MM I

Reducibles a variable separable

$$y' = f(ax+by+c) \to \begin{matrix} z = ax+by+c \\ y' = (z'-a)/b \end{matrix} \to z' = bf(z)+a$$

Homogéneas

$$y' = f(kx,ky) = f(x,y)\ \forall k \to \begin{matrix} z=y/x \\ y'=z+xz'\end{matrix} \to \text{Separable}$$

Reducibles a homogénea

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right);\ \boxed{\text{Caso A. Si } c=c'=0 \implies \text{Homogénea}}$$

$$\boxed{\text{B. Si } \begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix} \neq 0;\ \begin{cases} x=\alpha+h \\ y=\beta+k\end{cases} : \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'} = \frac{a\alpha+b\beta}{a'\alpha+b'\beta}}$$

$$\boxed{\text{C. Si } \begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix} = 0;\ y' = f\left(\frac{ax+by+c}{d(ax+by)+c'}\right);\ \begin{matrix} z=ax+by \\ \text{Sep.}\end{matrix}}$$

Exactas

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta $\iff M=\frac{\partial f}{\partial x};\ N=\frac{\partial f}{\partial y} \iff$ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$; Entonces encontramos f y la solución es $f(x,y)=C$

Cuasi-exactas Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ no es exacta, se puede encontrar un $\mu(x,y):\mu\cdot(M(x,y)dx+N(x,y)dy)=0$ exacta.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\to\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

Solo puede resolverse suponiendo $\mu=\mu(x)$ o $\mu=\mu(y)$

$$\mu=\mu(x):\frac{\mu'}{\mu}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/N=g(x)\to\mu=e^{\int g(x)dx}$$

$$\mu=\mu(y):\frac{\mu'}{\mu}=\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)/M=h(y)\to\mu=e^{\int h(y)dy}$$

Lineales

$y'+p(x)y=q(x)$ o $\frac{dx}{dy}+p(y)x=g(y)$ $\boxed{\text{Caso A. } q(x)=0 \implies \text{Sep.}}$

Caso B. Si $q(x)\neq 0$; Resolvemos $y_h'+p(x)y_h=0\to y=c(x)y_h(x)$

$c'y_h=q(x)\implies$ Sep.

Bernoulli

$$y'+p(x)y=q(x)y^n,\quad z=1/y^{n-1};\quad \frac{-1}{n-1}z'+zp(x)=q(x)$$

Paramétricas

Caso A. $f(y,y')=0: y=g(y')\to y'=p;$ $\boxed{dx=g'(p)dp/p}$

Caso B. $f(x,y')=0: x=g(y')\to y'=p;$ $\boxed{dy=pg'(p)dp}$

Lagrange

$y=xf(y')+g(y')\to y'=p;$ $\boxed{(f(p)-p)\frac{dx}{dp}+xf'(p)=-g'(p)}$

Clairut

$y=xy'+g(y')$ (Lagrange) $\to dp[x+g'(p)]=0$

$x+g'(p)=0$ (SP); $dp=0$ (SG)

Ricatti

$y'+a(x)y^2+b(x)y+c=0$ & SP $y_1\to y=y_1+z;\ y'=y_1'+z'$

Sustituimos y SP = 0 → $\boxed{z'+(2ay_1+b)z+az^2=0}$ (Bernoulli)

$y'+a(x)y^2+b(x)y+c=0$ & 2 SP $y_1;\ y_2\to$ $\boxed{\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int a(y_2-y_1)dx}}$

Familias de curvas

$h(x,y,\{a_i\})=0\to\frac{d^ih}{dx^i}=0\to$ quitamos a^i; $F\left(x,y,\{y^{(i)}\}\right)=0$

$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)$ es la trayectoria ortogonal a la familia de curvas

Reducción de orden

$$F(x,y^{(k)},\dots,y^{(n)})=0\to u=y^{(k)}\to F(x,u,\dots,u^{(n-k)})=0$$

$$F(y,\{y^{(i)}\})=0\to y'=p(y);\ y''=p'p;\ \dots\to F(y,p,\{p^{(j)}\})=0$$

$$F(z,ty,\{ty^{(i)}\})=t^kF(z,y,\{y^{(i)}\})\ \begin{matrix} y=e^{\int zdx}\\ y'=ze^{\int zdx}\end{matrix},\dots F(x,z,\{z^{(j)}\})$$

Teorema de Picard. Si $f(x,y)$ y $\partial f/\partial y$ son funciones continuas sobre un cerrado **R** entonces por cada punto (x_0,y_0) del interior de **R** pasa una única curva integral de la ecuación $dy/dx=f(x,y)$.

Teorema de exist. y unicidad 2º orden lineal. Sean $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces si $x_0\in[a,b]$ e y_0 , y_0' son arbitrarios, la EDO: $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ tiene una única solución $y(x)$ en $[a,b]$ tal que $y(x_0)=y_0$ y $y'(x_0)=y_0'$.

SG 2º orden lineal homogénea y_1 e y_2 SPH lin. indp.

$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ SG; $W=y_1y_2'-y_2y_1'=Ke^{-\int Pdx}\neq 0$

Conocida y_1 SPH ; $y_2=u(x)y_1$ también SPH; $u=\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx$

SG 2º orden lineal homogénea Coef. Cte.

$$y''+py'+qy=0;\quad y(x)=e^{mx};\quad m^2+pm+q=0$$

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x};\ y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$$

$$y=C_1e^{-px/2}+C_2xe^{-px/2}[m_1\neq m_2(\mathbb{R});a\pm bi(\mathbb{C});m_1=m_2(\mathbb{R})]$$

Ecuación equidimensional de Euler

$x^2y''+pxy'+qy=0;\ x=e^z$(coef. cte.) o $y=x^m$

Transformar EDOH a coef. cte

$$\frac{Q'+2PQ}{Q^{3/2}}=\alpha\implies z=\int\sqrt{Q}dx, y''(z)+\frac{\alpha}{2}y'(z)+y(z)=0$$

Lineal inhomogénea de 2 orden

$y(x)=y_h(x)+y_p(x);\ y_h$ SGH y y_p SPI

Coeficientes indeterminados

$y''+py'+qy=R(x);\ R(x):e^{ax}$ (a); sin ax o $\cos ax$ (b); $\sum_{i=0}^n a_ix^i$ (c)

(a) $y_p=Ae^{ax}; a^2+pa+q\neq 0\,|\,y_p=Axe^{ax}; 2a+P\neq 0\,|\,y_p=Ax^2e^{ax}$

(b) $y_p=A\cos ax+B\sin ax; (b-q)^2+(bp)^2\neq 0\mid\bar{y}_p=xy_p$

(b) $y_p=\sum_{i=0}^n A_ix^i; q\neq 0\mid y_p=x\sum_{i=0}^n A_ix^i$

Variación de ctes. (Cualquier EDOI 2º)

$y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ a partir de la EDOH

$u_1'y_1+u_2'y_2=0;\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=R(x)$; Resolver sist. lineal

Series de Potencias

$$\sum_{n=0}^\infty a_nx^n; R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;\ f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{i=0}^n p_iq_{n-i}x^n$$

Teorema: Sea x_0 un punto ordinario de la EDO $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ y sean a_0, a_1 constantes arbitrarias $\implies$ existe una única función $y(x)$ analítica en x_0 que es solución de la EDO en un mismo entorno de x_0 que $f(x)$ y $g(x)$ y satisface $y(x0)=a0$; $y'(x_0)=a_1$.

Series de Frobenius (Lineales)

$(x-x_0)P(x)$ & $(x-x_0)^2Q(x)$ analíticas $\implies x_0$ punto singular regular

$$y=x^m\sum_{n=0}^\infty a_nx^n;\quad a_0\neq 0;\quad z=-x \text{ para expandir en } x<0$$

$m(m-1)+mp_0+q_0=0$; Si $m_1-m_2\neq k\in\mathbb{Z}\implies y=x^{m_1}y_1+x^{m_2}y_2$

Si $m_1-m_2=k\in\mathbb{Z};\quad m_1\geq m_2;\exists$ al menos una sol. $y_1=x^{m_1}\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$