

MM I

Reducibles a variable separable

$$y' = f(ax + by + c) \rightarrow z = ax + by + c \rightarrow z' = bf(z) + a$$

$$y' = f(z' - a)/b$$

Homogéneas

$$y' = f(kx, ky) = f(x, y) \forall k \rightarrow \frac{z = y/x}{y' = z + xz'} \rightarrow \text{Separable}$$

Reducibles a homogénea

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right); \quad \boxed{\text{Caso A. Si } c = c' = 0 \Rightarrow \text{Homogénea}}$$

$$\text{B. Si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0; \begin{cases} x = \alpha + h \\ y = \beta + k \end{cases} : \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} = \frac{a\alpha + b\beta}{a'\alpha + b'\beta}$$

$$\text{C. Si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0; y' = f\left(\frac{ax + by + c}{d(ax + by) + c'}\right); z = \frac{ax + by}{\text{Sep.}}$$

Exactas

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ es exacta} \iff M = \frac{\partial f}{\partial x}; N = \frac{\partial f}{\partial y} \iff \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \text{ Entonces encontramos } f \text{ y la solución es } f(x, y) = C$$

Cuasi-exactas Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ no es exacta, se puede encontrar un $\mu(x, y) : \mu \cdot (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = 0$ exacta.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Solo puede resolverse suponiendo $\mu = \mu(x)$ o $\mu = \mu(y)$

$$\mu = \mu(x) : \frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N = g(x) \text{ función solo de } x.$$

$$\mu = \mu(y) : \frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / M = h(y) \text{ función solo de } y.$$

Lineales

$$y' + p(x)y = q(x) \text{ o } \frac{dx}{dy} + p(y)x = g(y) \quad \boxed{\text{Caso A. } q(x) = 0 \Rightarrow \text{Sep.}}$$

Caso B. Si $q(x) \neq 0$; Resolvemos $y'_h + p(x)y_h = 0 \rightarrow y = c(x)y_h(x)$

$$c'y_h = q(x) \Rightarrow \text{Sep.}$$

Bernoulli

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad z = 1/y^{n-1}; \quad \frac{-1}{n-1} z' + zp(x) = q(x)$$

Paramétricas

$$\text{Caso A. } f(y, y') = 0 : y = g(y') \rightarrow y' = p; \quad \boxed{dx = g'(p)dp/p}$$

$$\text{Caso B. } f(x, y') = 0 : x = g(y') \rightarrow y' = p; \quad \boxed{dy = pg'(p)dp}$$

Lagrange

$$y = xf(y') + g(y') \rightarrow y' = p; \quad \boxed{(f(p) - p) \frac{dx}{dp} + xf'(p) = -g'(p)}$$

Clairut

$$y = xy' + g(y') \text{ (Lagrange)} \rightarrow dp[x + g'(p)] = 0$$

Ricatti

$$x + g'(p) = 0 \text{ (SG); } dp = 0 \text{ (SP)}$$

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c = 0 \& \text{ SP } y_1 \rightarrow y = y_1 + z; \quad y' = y'_1 + z'$$

$$\text{Sustimos y SP} = 0 \rightarrow \boxed{z' + (2ay_1 + b)z + az^2 = 0} \text{ (Bernoulli)}$$

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c = 0 \& \text{ 2 SP } y_1; y_2 \rightarrow \boxed{\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int a(y_2 - y_1)dx}}$$

Familias de curvas

$$h(x, y, \{a_i\}) = 0 \rightarrow \frac{d^i h}{dx^i} = 0 \rightarrow \text{quitamos } a^i; F(x, y, \{y^{(i)}\}) = 0$$

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y}\right) \text{ es la trayectoria ortogonal a la familia de curvas}$$

Reducción de orden

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \rightarrow u = y^{(k)} \rightarrow F(x, u, \dots, u^{(n-k)}) = 0$$

$$F(y, \{y^{(i)}\}) = 0 \rightarrow y' = p(y); y'' = p'p; \dots \rightarrow F(y, p, \{p^{(j)}\}) = 0$$

$$F(z, ty, \{ty^{(i)}\}) = t^k F(z, y, \{y^{(i)}\}) \quad \frac{y = e^{\int z dx}}{y' = ze^{\int z dx}}, \dots F(x, z, \{z^{(j)}\})$$

Teorema de Picard. Si $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son funciones continuas sobre un cerrado **R** entonces por cada punto (x_0, y_0) del interior de **R** pasa una única curva integral de la ecuación $dy/dx = f(x, y)$.

Teorema de exist. y unicidad 2º orden lineal. Sean $P(x), Q(x), R(x)$ continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces si $x_0 \in [a, b]$ e y_0, y'_0 son arbitrarios, la EDO: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ tiene una única solución $y(x)$ en $[a, b]$ tal que $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y'_0$.

SG 2º orden lineal homogénea y_1 e y_2 SPH lin. indep.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \text{ SG; } W = y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = K e^{-\int P dx} \neq 0$$

$$\text{Conocida } y_1 \text{ SPH; } y_2 = u(x)y_1 \text{ también SPH; } u = \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

SG 2º orden lineal homogénea Coef. Cte.

$$y'' + py' + qy = 0; \quad y(x) = e^{mx}; \quad m^2 + pm + q = 0$$

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}; \quad y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

$$y = C_1 e^{-px/2} + C_2 x e^{-px/2} \text{ (R } \neq; a \pm bi; R =)$$

Ecuación equidimensional de Euler

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0; \quad x = e^z \text{ (coef. cte.) o } y = x^m$$

Transformar EDOH a coef. cte

$$\frac{Q' + 2PQ}{Q^{3/2}} = \alpha \Rightarrow z = \int \sqrt{Q} dx, y''(z) + ky'(z) + cy(z) = 0$$

Lineal inhomogénea de 2 orden

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x); \quad y_h \text{ SGH y } y_p \text{ SPI}$$

Coefficientes indeterminados

$$y'' + py' + qy = R(x); \quad R(x) : e^{ax} \text{ (a); } \sin ax \text{ o } \cos ax \text{ (b); } \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ (c)}$$

$$\text{(a) } y_p = Ae^{ax}; a^2 + pa + q \neq 0 \mid y_p = Axe^{ax}; 2a + P \neq 0 \mid y_p = Ax^2 e^{ax}$$

$$\text{(b) } y_p = A \cos ax + B \sin ax; (b - q)^2 + (bp)^2 \neq 0 \mid \tilde{y}_p = xy_p$$

$$\text{(b) } y_p = \sum_{i=0}^n A_i x^i; q \neq 0 \mid y_p = x \sum_{i=0}^n A_i x^i$$

Variación de ctes. (Cualquier EDO I 2º)

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \text{ a partir de la EDOH}$$

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0; \quad u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = R(x); \text{ Resolver sist. lineal}$$

Series de Potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|; f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n p_i q_{n-i} x^n$$

Teorema: Sea x_0 un punto ordinario de la EDO $y'' + y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ y sean a_0, a_1 constantes arbitrarias \Rightarrow existe una única función $y(x)$ analítica en x_0 que es solución de la EDO en un mismo entorno de x_0 que $f(x)$ y $g(x)$ y satisface $y(x_0) = a_0; y'(x_0) = a_1$.

