3.2. Teorema de Noether

Consideremos unas transformaciones genéricas h_j de las coordendas q_j, parametrizadas por un parámetro ϵ independiente del tiempo tal que

$$q_j \mapsto q'_j = h_j(\{q_i\}, \epsilon) \quad h_j(\{q_i\}, 0) = q_j \tag{3.2.1}$$

Si el conjunto de las transformaciones h_j deja invariante a $\mathcal{L}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) + \epsilon \frac{dB}{dt} + O(\epsilon^2) = \mathcal{L}(\{h_j(\{q_i\}, \epsilon), \dot{h}_j(\{q_i, \dot{q}_i\}, \epsilon)\}; t) \tag{3.2.2}$$

Donde $B = B(\{q_i, \dot{q}_i\}; t)$, entonces se conseva la siguiente cantidad para soluciones de (2.2.1)(E-L)

$$I(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = \sum_j^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{dh_j}{d\epsilon} - B \qquad \frac{dI}{dt} = 0 \tag{3.2.3}$$

Demostración

Vamos a expandir en Taylor h_j en términos de ϵ

$$q'_j = h_j(q_j, \epsilon) = q_j + \epsilon \frac{\partial h_j}{\partial \epsilon} + O(\epsilon^2) \tag{3.2.5}$$

Ahora recordando la definición (1.1.1), tenemos que $\delta q_j = q'_j - q_j = \epsilon \partial_\epsilon h_j$ (3.2.6) (despreciamos los órdenes superiores porque δq_j es la variación primera, Δq_j, la variación total, sí que contiene a todos los órdenes)

Por otro lado, y de una forma equivalente a lo que acabamos de hacer $\delta \mathcal{L}(\{q_j\}) = \epsilon dB/dt$ (3.2.7) (de nuevo ignoramos los órdenes superiores para la primera variación). Nótese que estas dos expresiones que hemos encontrado corresponden a establecer una función concreta para la función η que definíamos en el primer capítulo, y ϵ toma el papel del parámetro a.

Ahora, tenemos que podemos calcular $\delta\mathcal{L}$ usando la regla de la cadena, y además, al igual que hicimos en el primer capítulo, suponemos que q_j extremiza el funcional, y que por tanto, verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2.1), además usaremos que la derivada temporal y la variación conmutan como se demostró en el prmer capítulo

$$\delta \mathcal{L}(\{\delta q_j\}) = \sum_j^s \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] = \sum_j^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_j^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) \tag{3.2.8}$$

Ahora, esta expresión (3.2.8) es válida para variaciones δq_j arbitrarias, si estas se hacen 0, $\delta \mathcal{L} = 0$, por tanto, los caminos q_j verifican (2.2.1) (E-L). Por otro lado (3.2.7) se aplica solo para las funciones δq_j definidas en (3.2.6), puesto que son las que vienen dadas por la simetría, pero es válida para cualquier camino q_j genérico. De esta forma evaluando (3.2.7) con las q_j que verifican (2.2.1) (E-L) y evaluando (3.2.8) con (3.2.6), ambas variaciones serán iguales, tal que

$$\epsilon \frac{d}{dt} \left(\sum_j^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial h_j}{\partial \epsilon} \right) = \epsilon \frac{dB}{dt} \implies \epsilon \frac{d}{dt} \left[\sum_j^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial h_j}{\partial \epsilon} - B \right] = 0 \tag{3.2.9}$$

Ahora, ϵ es una variación arbitraria de la transformación de la simetría, por lo tanto, la derivada debe anularse, obteniendo (3.2.3).