MECANICA Y ONDAS

ABEL ROSADO

5 de octubre de 2021

Come, let us hasten to a higher plane
Where dyads tread the fairy fields of Venn,
Their indices bedecked from one to n
Commingled in an endless Markov chain!

– Stanislaw Lem

Índice general

MECANICA · ANALITICA

1 Cálculo Variacional

Tenemos una función $f : \boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$, donde tanto el dominio $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ como la imagen pertencen a $\mathbb{R}$. En contraposición, un funcional es una función $F : \boldsymbol{f} \in \mathscr{F}\{x, \mathbb{R}\} \mapsto F[f] \in \mathbb{R}$, donde $\mathscr{F}\{x, \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas las funciones reales de una variable [1] , tal que la imagen es un número real.

1: Aunque se puede definir un funcional como una función de $\mathscr{F}\{x, \mathbb{R}\}^n$ para n funciones reales.

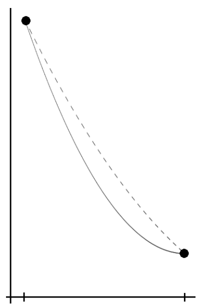
La forma genérica de los funcionales que nos interesan es la siguiente, donde ';' indica que x es la variable independiente, y f y f' dependen explícitamente de x, y por consiguiente depende entre sí, aunque no de forma explícita en la mayoría de circumstancias:

$$F[f] = \int_{x_A}^{x_b} g(f(x), f'(x); x) dx \tag{1.0.1}$$

Nos interesan solo las funciones f tales que $f(x_A) = y_A; \; f(x_B) = y_B$ (1.0.2), de tal forma que la función este fija en los extremos de la integral, esta propiedad va a resultar muy importante más adelante.

El principal objetivo que tenemos en mente es encontrar una f que extremize F, es decir, que $F(f)$ sea un máximo o mínimo del funcional.

1.1. Método de pequeñas variaciones



Definimos $\delta y(x) \equiv \bar{y}(x) - y(x)$ (1.1.1), donde $\bar{y}$ es el camino variado e y es el camino de referencia. Supondremos que el camino de referencia es el camino que extremiza el funcional, entonces una pequeña variación δy no debería alterar el funcional.

Podemos parametrizar $\delta y(x) \equiv a\eta(x)$ (1.1.2), donde a es un parámetro independiente de x y $\eta(x) = \delta y(x)/a$ (1.1.3) es una función arbitraria que da forma el camino variado y que debe cumplir que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$ (1.1.4) para verificar las condiciones que hemos impuesto en (1.0.2), ya que todo camino, sea el de referencia o el variado, debe cumplirlas.

Definimos entonces una nueva función $Y(x, a) \equiv y(x) + a\eta(x)$ (1.1.5) tal que $Y(x, 0) = y(x)$ y $Y(x, a) = \bar{y}(x)$. Si derivamos esta función con repecto a a, y con respecto a x tenemos

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = \eta(x); \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = y'(x) + a\eta'(x) \equiv Y'(x, a); \quad \frac{\partial Y'}{\partial a} = \eta'(x) \tag{1.1.6}$$

Podemos definir ahora $\delta y'(x) \equiv \bar{y}'(x) - y' = Y'(x, a) - Y'(x, 0)$, que por la expresión anterior nos resulta $\delta y'(x) = a\eta'(x)$ (1.1.7). Combinando ahora (1.1.7) y (1.1.2) podemos llegar a la conclusión de que la derivada y δ conmutan

$$\delta y'(x) = a\frac{d}{dx}\eta x = \frac{d}{dx}\left(a\eta(x)\right) = \frac{d}{dx}\delta y \implies \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\delta y \tag{1.1.8}$$

Variación de una función

Si partimos de una función $g(y, y'; x)$, queremos que no dependa de un solo camino sino de una familia de ellos, definimos $\mathbb{g}(x, a) = g(Y, Y'; x)$. Definimos la variación total de la función como $\Delta\mathbb{g} \equiv \mathbb{g}(Y(x, a), Y'(x, a); x) - \mathbb{g}(Y(x, 0), Y'(x, 0); x)$ (1.1.9). Como últimamente $\mathbb{g}$ depende solo de x y de a, podemos expandir $\mathbb{g}$ por serie de Taylor de a

$$\mathbb{g}(x, a) = \mathbb{g}(x, 0) + \left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial a}\right|_{a=0} a + O(a^2) \tag{1.1.10}$$

Reorganizando los términos y volviendo a añadir la dependiencia en Y e Y' llegamos a

$$\overbrace{\mathbb{g}(x, a) - \mathbb{g}(x, 0)}^{\Delta\mathbb{g}} = \overbrace{\left.\frac{\partial \mathbb{g}(Y(x, a), Y'(x, a); x)}{\partial a}\right|_{a=0} a}^{\delta\mathbb{g}} + O(a^2) \tag{1.1.11}$$

Donde $\delta\mathbb{g}$ es la variación primera de la función, que podemos reescribir desarrollando la derivada usando la regla de la cadena, y usamos (1.1.2) y (1.1.7)

$$\delta\mathbb{g} = \left.\left[\left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial Y}\right|_Y \frac{\partial Y}{\partial a} + \left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial Y'}\right|_Y \frac{\partial Y'}{\partial a} \right]\right|_{a=0} a = \left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial Y}\right|_y a\eta + \left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial Y'}\right|_y a\eta' = \left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial Y}\right|_y \delta y + \left.\frac{\partial \mathbb{g}}{\partial Y'}\right|_y \delta y' \tag{1.1.12}$$

Es **muy** importante no dejar de lado las composiciones y evaluaciones resultantes de hacer Taylor y la regla de la cadena, ya que la expresión anterior nos indica que aunque g dependa de cualquier camino, cuando hacemos δg, las parciales de g con respecto a sus entradas Y e Y' hay que **evaluarlas en el camino de referencia** $y = Y(x, 0)$. De esta forma podemos reesribir (1.1.12) en términos de g

$$\delta\mathbb{g} = \delta g = \frac{\partial g}{\partial y}\delta y + \frac{\partial g}{\partial y'}\delta y' \tag{1.1.13}$$

Observamos que nos queda una expresión similar a la regla de la cadena del diferencial exacto de una función.

Variación de un funcional

De nuevo, si partimos de un funcional $F[y]$ que depende de un único camino, definimos $\mathbb{F}([y], a) = F[Y(x, a)]$ y su variación total $\Delta\mathbb{F} = \mathbb{F}([y], a) - \mathbb{F}([y], 0)$ (1.1.14), que desarrollando la integral llegamos inmediatamente a

$$\Delta\mathbb{F} = \int_{x_A}^{x_B} \Delta\mathbb{g} dx = \int_{x_A}^{x_B} \delta\mathbb{g} dx + O(a^2) = \underbrace{\int_{x_A}^{x_B} \delta g dx}_{\delta\mathbb{F} = \delta F} + O(a^2) \tag{1.1.15}$$

1.2. Extremizar un funcional

Diremos que el extremo de F ocurrirá cuando $\delta F = 0$, puesto que a primer orden el funcional no cambiará de valor al variar y.

De (1.1.13) sustuimos en (1.1.14), sacamos factor común el parámetro a e integramos por partes el segundo término, tal que $u = \partial_{y'} g$ y $dv = \eta' dx$

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial g}{\partial y}\eta + \frac{\partial g}{\partial y'}\eta' \right] a dx = a \left[\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial g}{\partial y}\eta dx + \left| \frac{\partial g}{\partial y'}\eta \right|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right)\eta dx \right] \tag{1.2.1}$$

Por (1.1.4) el segundo término es 0, juntando las integrales y usando (1.1.2)

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right) \right] \delta y dx = 0 \tag{1.2.2}$$

Ahora, δy es completamente arbitrario, pues depende de un parámetro independiente a y de una función η que es también arbitraria, esto es lema fundamental del Cálculo Variacional, y garantiza que si la integral debe valer 0, el primer factor debe valer siempre 0, y concluimos

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0} \iff \delta F = 0 \tag{1.2.3}$$

Esta es la ecuación de *Euler-Lagrange*, una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden cuya solución y extremiza el funcional definido por g.

Geodésica del plano

Un ejemplo para aplicar (1.2.3) es minimizar la distancia $d = \int ds$ en el plano ecuclídeo. Si $y = y(x)$, entonces $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}dx = gdx$, tal que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \implies \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right) = 0 \implies \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = K \to y' = \frac{K}{\sqrt{1-K^2}} = \alpha$$

Lo cual implica que $y = \alpha x + y_0$, la ecuación de una recta.

Identidad de Beltrami

Podemos reescribir (1.2.3) de otra forma que nos va resultar últil para resolver algunos problemas y va a resultar muy importante en episodios posteriores.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y}y' + \frac{\partial g}{\partial y'}y'' + \frac{\partial g}{\partial x} \to \frac{\partial g}{\partial y}y' = \frac{dg}{dx} - \frac{\partial g}{\partial y'}y'' - \frac{\partial g}{\partial x}$$

Podemos observar que el término en el primer miembro de la segunda expresión aparece en (1.2.3) sin multiplicar por y'.

$$\frac{dg}{dx} - \frac{\partial g}{\partial x} - \left[\frac{\partial g}{\partial y'}y'' + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\right) \right] = 0 \to \frac{dg}{dx} - \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial y'}y'\right) = 0$$

Observando que lo de dentro del paréntesis de la primera expresión es la derivada de un producto, usamos la linearidad de la derivada para obtener

$$\frac{d}{dx}\left(g - \frac{\partial g}{\partial y'}y'\right) = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{1.2.4}$$

1.3. Generalización a varias variables

Denotamos $\{f_\alpha(x)\}$ a un conjunto de N funciones distintas, que verifican una expresión similar a (1.0.2), $f_\alpha(x_A) = f_{\alpha A};\ f_\alpha(x_B) = f_{\alpha B}$ (1.3.1). Definimos entonces el siguiente funcional que depende de $\{f_\alpha\}$

$$F[\{f_\alpha\}] = \int_{x_A}^{x_B} g(\{f_\alpha, f'_\alpha\}; x)dx$$

Ahora siguiendo un desarrollo idéntico a (1.1.12), desarrollando la regla de la cadena para cada una de las variables de g resulta en un sumatorio y los argumentos siguientes para llegar a δg son idénticos puesto que son lineales, de tal forma llegamos a la siguiente expresión

$$\delta g = \sum \frac{\partial g}{\partial f_\alpha}\delta f_\alpha + \frac{\partial g}{\partial f'_\alpha}\delta f'_\alpha \tag{1.3.2}$$

La expresión (1.1.15) no dependía de las variables de g, por lo que es directamente aplicable, sustituyendo (1.3.2) y haciendo la regla de la cadena igual que en (1.2.1) llegamos a una expresión similar a (1.2.2), usando que la integral conmuta con el sumatorio

$$\delta F = \sum \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial g}{\partial f_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial f'_\alpha}\right)\right] \delta f_\alpha dx = 0 \tag{1.3.3}$$

Para poder concluir que cada sumando es 0, y que entonces por ser δf_α arbitraria cada término en corchetes es 0, es necesario que los δf_α sean independientes entre sí, que es equivalente a que no exista una dependencia explícita entre los $f_\alpha(x)$, que podria estar por ejemplo expresada por una ecuación relacionando varias de ellas. Si se cumple que son independientes, entonces

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial f_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial f'_\alpha}\right) = 0} \iff \delta F = 0 \tag{1.3.4}$$

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones de *Euler-Lagrange* cuyas soluciones $f_\alpha(x)$ extremizan el funcional.

Ligaduras

En el caso de que existan m ecuaciones de ligadura de la forma $G_i(\{f_\alpha\}; t) = 0$, tenemos dos opciones, la primera es resolver el sistema de ecuaciones que forman expresando m funciones como dependientes de las otras $N - m$ funciones restantes, y aplicar (1.3.4) a las $N - m$ funciones independientes.

En el caso de que esto no sea posible resolver el sistema, debemos recurrir a multiplicadores de *Lagrange*.

Multiplicadores de Lagrange

Partimos de que tenemos m ecuaciones $G_i(\{f_\alpha\}; t) = 0$ que no sabemos resolver, $\Delta G_i = 0$, es decir, G_i se aplica de la misma forma tanto a los caminos de referencia como a los variados, además $\Delta G_i = \delta G_i + O(a^2) = 0$, como a es arbitrario, entonces $\delta G_i = 0$. Aplicando la regla de la cadena de (1.1.13)

$$\delta G_i(\{f_\alpha\}; x) = \sum_\alpha^m \frac{\partial G_i}{\partial f_\alpha}\delta f_\alpha = \sum_\alpha^m a_{i\alpha}\delta f_\alpha = 0; \quad a_{i\alpha} = \frac{\partial G_i}{\partial f_\alpha} \tag{1.3.5}$$

Así tenemos la ecuación que nos relaciona las distintas δf_α, el término de la derivada lo podemos expresar como las componentes de un matriz. Podemos separar la expresión anterior tal que

$$\delta G_i = \sum_{\gamma=1}^{N-m} a_{i\gamma}\delta f_\gamma + \sum_{\beta=N-m+1}^{N} a_{i\beta}\delta f_\beta = 0 \tag{1.3.6}$$

La matriz del segundo término es cuadrada $(m \times m)$, y es una matriz jacobiana cuyo determinante va a ser no nulo si las ecuaciones de ligadura son independientes entre sí, de lo contrario algunas sobran. Esto implica que esa matriz tiene inversa, expresando (1.3.6) como operaciones matriciales $(N - m < \beta \leq N)$

$$0 = A\mathbf{x} + J\mathbf{y} \implies \mathbf{y} = -J^{-1}A\mathbf{x}; \;\; \delta f_\beta = -\sum_{a=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{N-m} J^{-1}_{\beta a} a_{a\gamma}\delta f_\gamma \tag{1.3.7}$$

De esta forma, hemos encontrado la dependencia explícita de δf_β en función de los δf_γ, estos últimos siendo independientes entre sí. Ahora tomamos (1.3.3) y renombramos el factor en corchetes por Γ_α y separamos como en (1.3.6)

$$0 = \delta F = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\alpha}^{N} (\Gamma_\alpha \delta f_\alpha) dx = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\gamma=1}^{N-m} (\Gamma_\gamma \delta f_\gamma) dx + \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\beta=N-m+1}^{N} (\Gamma_\beta \delta f_\beta) dx \tag{1.3.8}$$

Sustituyendo δf_β de (1.3.7)

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\gamma=1}^{N-m} (\Gamma_\gamma \delta f_\gamma) dx - \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\beta=N-m+1}^{N} \left(\Gamma_\beta \sum_{a=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{N-m} J^{-1}_{\beta a} a_{a\gamma}\delta f_\gamma \right) dx \tag{1.3.9}$$

Como los sumatorios conmutan podemos llegar a

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\gamma=1}^{N-m} (\Gamma_\gamma \delta f_\gamma) dx - \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\gamma=1}^{N-m}\sum_{a=1}^{m}\sum_{\beta=N-m+1}^{N} \Gamma_\beta J^{-1}_{\beta a} a_{a\gamma}\delta f_\gamma dx \tag{1.3.10}$$

Y ahora podemos unificar los sumatorios de γ y sacar factor común δf_γ

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\gamma=1}^{N-m} \delta f_\gamma \left(\Gamma_\gamma - \sum_{a=1}^{m}\sum_{\beta=N-m+1}^{N} \Gamma_\beta J^{-1}_{\beta a} a_{a\gamma} \right) dx \tag{1.3.11}$$

Definimos entonces $\lambda_a = \sum_{\beta=N-m+1}^{N} \Gamma_\beta J^{-1}_{\beta a}$ como los multiplicadores de *Lagrange* y reemplazando $a_{a\gamma}$ por su definición de (1.3.5)

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{\gamma=1}^{N-m} \delta f_\gamma \left(\Gamma_\gamma - \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \frac{\partial G_a}{\partial f_\gamma} \right) dx \tag{1.3.12}$$

Ahora como δf_γ son independientes entre sí, podemos aplicar el mismo argumento que en los otros casos y concluir que lo del paréntesis debe ser igual a 0 para todos los γ, tal que $(1 \leq \gamma \leq N - m)$

$$\Gamma_\gamma - \sum_{a=1}^{m} \lambda_a \frac{\partial G_a}{\partial f_\gamma} = 0 \tag{1.3.13}$$

Podemos ahora comprobar que si $N-m<\gamma\leq N$

$$\Gamma_\gamma-\sum_{a=1}^{m}\lambda_a\frac{\partial G_a}{\partial f_\gamma}=\Gamma_\gamma-\sum_{a=1}^{m}\lambda_a J_{a\gamma}=\Gamma_\gamma-\sum_{a=1}^{m}\sum_{\beta=N-m+1}^{N}\Gamma_\beta J^{-1}_{\beta a}J_{a\gamma}=$$

$$=\Gamma_\gamma-\sum_{\beta=N-m+1}^{N}\Gamma_\beta\delta_{\beta\gamma}=\Gamma_\gamma-\Gamma_\gamma=0 \tag{1.3.14}$$

También se verifica (1.3.12), por lo que entonces

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial f_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial g}{\partial f'_\alpha}\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial f_\alpha}\qquad G_i(\{f_\alpha\})=0} \tag{1.3.15}$$

Tenemos por lo tanto un sistema de $N+m$ ecuaciones, que incluye las ecuaciones de *Euler-Lagrange* modificadas y las ecuaciones de ligadura, y las incognitas son las f_α y las λ_i.

Mecánica Lagrangiana | 2

Ahora la variable independiente sobre la que vamos a trabajar va a ser el tiempo, t, y las variables dependientes son las coordenadas cartesianas $\{x_{\alpha i}\}$, donde α indica la partícula y i indica la componente de la posición. Definimos además las derivadas totales temporales como $\{\dot{x}_{\alpha i}\}$.

2.1. Principio de Hamilton

Definimos una función llamada **Lagrangiano**[1]

$$\mathcal{L}(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}; t) = T - U \tag{2.1.1}$$

1: La definición de **Lagrangiano** dependerá de la configuración del sistema físico, pero como norma general en mecánica clásica (2.1.1) es la expresión más común de la función que verifica (2.1.3).

Dónde T es la energía cinética del sistema y U es la energía potencial (conservativa o no), de tal forma que definimos el siguiente funcional llamado **acción**

$$S \equiv \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}; t)dt \tag{2.1.2}$$

Principio de Hamilton o de mínima acción. La evolución temporal de un sistema físico es aquella que extremiza la acción, es decir que $\delta S = 0$ para la evolución real del sistema, lo cual es equivalente a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha i}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha i}}\right) = 0 \tag{2.1.3}$$

Para la mecánica clásica, este principio es equivalente a las leyes de *Newton*, cuando $\mathcal{L}$ toma la forma de (2.1.1) con ligeras modificaciones que discutiremos en las próximas secciones.

Muelle elástico

Un sencillo ejemplo para aplicar este principio es el de un muelle elástico en una dirección, donde $T = m\dot{x}^2/2$ y $U = kx^2/2$ (el término mgh es constante y puede ser ignorado), si $\mathcal{L} = T - U$, entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p \quad \frac{dp}{dt} = m\ddot{x} \to m\ddot{x} = -kx \iff F = -kx = ma$$

2.2. Coordendas generalizadas

Podemos realizar un cambio de variables para poder expresar $x_{\alpha i}$ en función de otras variables q_j, las cuales pueden resultarnos más sencillas para resolver un problema, tal que $x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(\{q_j\}; t)$. Esta transformación será invertible cuando

$$J_l^k = \frac{\partial x_k}{\partial q_l}$$

el determinante de esa matriz, el jacobiano, sea no nulo, tal que existe la transformación $q_j = q_j(\{x_{\alpha i}\}; t)$.

Usando la regla de la cadena podemos ver la dependencia de las velociades entre sí, $\dot{x}_{\alpha i} = \dot{x}_{\alpha i}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t)$ y que $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}; t)$.

De esta forma, podemos expresar $\mathcal{L}$ en función de las coordenadas y velocidades generalizadas, tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t)$ de tal forma que (2.1.3) queda como

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0} \tag{2.2.1}$$

Definimos además el **momento generalizado**, que para cartesianas es el momento lineal y para polares es el momento angular. También definimos la **fuerza generalizada**, que es la proyección del vector cartesiano en el sistema de vectores asociado a las coordenadas generalizadas.

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_{\alpha}^{N} \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \tag{2.2.2}$$

2.3. Ligaduras

Al igual que en la sección *Ligaduras* de la sección 1.3, tendremos M ecuaciones de ligadura, los tipos de las cuales se datallarán a continuación, pero antes definimos lo que vamos a denominar **grados de libertad**, que indica el número mínimo de parámetros que es necesario para especifcar la configuración del sistema en un tiempo dado, tal que $s = N \cdot d - M$ (2.3.1), donde s son los **grados de libertad**, N el número de partículas del sistema, y d la dimensión del espacio.

Tipos de ligaduras

Cuando las ecuaciones de ligadura no dependen de las veclocidades, $G_i(\{q_j\}) = 0$, se denominan ligaduras **holónomas** y son con las que vamos a trabajar. Si las ecuaciones de ligadura dependen de la velocidad,$G_i(\{q_j, \dot{q}_j\}) = 0$, se denominan **no holónomas** y salvo que sean integrables no trabjaremos con ellas. Son **integrables** cuando son de la forma siguiente donde $h = h(\{q_i\}; t)$ tal que

$$\sum_{j}^{N \cdot d} A_j(\{q_i\}; t)\dot{q}_j + B(\{q_i\}; t) = 0; \quad A_j = \frac{\partial h}{\partial q_j}; \quad B_j = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.3.2}$$

Entonces podemos ver que nos queda la regla de la cadena e integramos

$$\sum_{j}^{N \cdot d} \frac{\partial h}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} = 0 \iff h(\{q_i\}; t) - C = 0 \text{ (Holónoma)} \tag{2.3.3}$$

Luego a parte si la ligadura depende explícitamente del tiempo se llama **forzada** o **reónoma**, si no depende explcítamente del tiempo, se denominan **naturales** o **esclerónomas**.

Sistema holonómico

Decimos que un sistema es **holonómico** cuando podemos resolver (o bien en cartesianas o en generalizadas) las ecuaciones de ligadura (holónomas) y expresar m coordenadas como explícitamente dependientes de s coordenadas independientes, reduciendo el sistema a s variables que podemos resolver usando (2.2.1) (*E-L*).

Multiplicadores de Lagrange

En el caso en el que el sistema no sea holonómico, y no podamos resolver las ecuaciones de ligadura, al igual que en la sección 1.3 tenemos que recurrir a multiplicadores de multiplicadores de *Lagrange*, podemos obtener una expresión equivalente a (1.3.15) modificando el lagrangiano de la siguiente forma

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} + \sum^{m} \lambda_i G_i \tag{2.3.4}$$

Que aplicando las ecuaciones de *Euler-Lagrange* tanto para q_j como para λ_i resulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) + \underbrace{\sum^{m} \lambda_i(t) \frac{\partial G_i}{\partial q_j}}_{Q_j^L} = 0 \tag{2.3.5}$$

Donde Q_j^L es la componente j de la fuerza de ligadura total, tal que $\mathbf{F}^L = \sum Q_j^L \hat{u}_{q_j}$, que cumplen que $dW^L = \mathbf{F}^L \cdot d\mathbf{r} = 0$ son fuerzas que o siempre perpendiculares a la ligadura, o que provocan que $d\mathbf{r} = 0 \iff \mathbf{v} = 0$ en el punto de contacto.

2.4. Teorema de la Energía Cinética

Función k-homogénea

Una función k-homogéna cumple la siguiente expresión, donde λ es un parámetro arbitrario cualquiera

$$f(\{\lambda x_i\}) = \lambda^k f(\{x_i\}) \tag{2.4.1}$$

Teorema de Euler

Podemos derivar cada lado de (2.4.1) con respecto al parámetro

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\{\lambda x_i\}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^k f(\{x_i\})$$

En el primer miembro hacemos la regla de la cadena y en el segundo es la derivada de una potencia

$$\sum_j^N \frac{\partial f(\{\lambda x_i\})}{\partial(\lambda x_j)} \frac{d(\lambda x_j)}{d\lambda} = \sum_j^N \frac{\partial f(\{\lambda x_i\})}{\partial(\lambda x_j)} x_j = k\lambda^{k-1} f(\{x_i\})$$

Como λ es un parámetro arbitrario, podemos tomar $\lambda = 1$ y tenemos

$$\sum_j^N \frac{\partial f(\{x_i\})}{\partial x_j} x_j = k f(\{x_i\}) \tag{2.4.2}$$

Forma cuadrática

Una forma cuadrática es una función 2-homogénea de la siguiente forma

$$f(\{x_i\}) = \sum_{i,j}^{N} a_{jk} x_j x_k = \mathbf{x} A \mathbf{x}^T \tag{2.4.3}$$

Donde a_{jk} no tienen por que ser constantes, pueden ser funciones de otras variables, pero no de x_i.

Teorema

En coordenadas cartesianas la expresión de la energía cinética es una forma cuadrática que solo depende de las velocidades que tiene la siguiente forma

$$T = T(\{x_{\alpha i}\}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,i}^{N,d} m_\alpha \dot{x}_{\alpha i}^2 \tag{2.4.4}$$

Si $x_{\alpha i}(\{q_j\}; t)$, entonces

$$\dot{x}_{\alpha i} = \sum_{j}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} = \dot{x}_{\alpha i}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) \tag{2.4.5}$$

Elevando (2.4.5) al cuadrado tenemos

$$\dot{x}_{\alpha i}^2 = \left(\sum_{j}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\sum_{k}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + 2 \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \sum_{j}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2 =$$

$$= \sum_{j,k}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \sum_{j}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2 \tag{2.4.6}$$

Sustituyendo (2.4.6) en (2.4.4)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,i}^{N,d} m_\alpha \left[\sum_{j,k}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \sum_{j}^{s} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Usando que los sumatorios conmutan y son lineales llegamos a

$$T = \sum_{j,k}^{s} \left(\sum_{\alpha,i}^{N,d} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j}^{s} \left(\sum_{\alpha,i}^{N,d} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{\alpha,i}^{N,d} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2 \tag{2.4.7}$$

De una forma más reducida obtenemos

$$T = T(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = \sum_{j,k}^{s} A_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j}^{s} B_j \dot{q}_j + C \tag{2.4.8}$$

Así, fijándonos en (2.4.7), si el cambio de coordenadas no depende explícitamente del tiempo, B_j y C se anulan, y entonces T es una forma cuadrática en los $\dot{q}_j$.

Teorema de la Energía cinética. Si las coordenadas no dependen explícitamente del tiempo, entonces T es una forma cuadrática en los $\dot{q}$.

Si ahora partimos de este supuesto y hacemos la parcial de T con respecto a un $\dot{q}_l$ dado, obtenemos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_{j,k\neq l}^{s} A^{s}_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_{j=l,k\neq l}^{s} A_{lk}\dot{q}_l\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_{j\neq l,k=l}^{s} A_{jl}\dot{q}_j\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\left(A_{ll}\dot{q}_l^2\right) =$$

$$= \sum_{j=l,k\neq l}^{s} A_{lk}\dot{q}_k + \sum_{j\neq l,k=l}^{s} A_{jl}\dot{q}_j + 2A_{ll}\dot{q}_l = 2\sum_{i}^{s} A_{li}\dot{q}_i = 2\sum_{i}^{s} A_{il}\dot{q}_i \tag{2.4.9}$$

Si ahora hacemos lo siguiente usando (2.4.9), vemos que se verifica (2.4.2)

$$\sum_{j}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2\sum_{i,k}^{s} A_{kj}\dot{q}_j\dot{q}_k = 2T \tag{2.4.10}$$

Simetrias y cantidades conservadas | 3

3.1. Ejemplos de invariancias

Invariancia temporal y Hamiltoniano

Si tenemos un desplazamiento arbitratio en el tiempo, $t \mapsto t + \delta t$, y se verifica que $\mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = \mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t + \delta t)$, esto implica que la parcial de $\mathcal{L}$ con respecto a t es 0. Si ahora desarrollamos la derivadada total de de $\mathcal{L}$ con respecto a t, tenemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}$$

El primer término del primer sumando dentro del sumario lo podemos expresar en función de (2.2.1) (*E-L*), tal que

$$\sum^{s} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] - \frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Ahora lo de dentro del paréntesis es la derivada de un producto, y usando la linearidad de la derivada

$$\frac{d}{dt} \left(\sum^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \qquad (3.1.1)$$

Definimos entonces el *Hamiltoniano* $\mathcal{H}$, que se conservará cuando $\mathcal{L}$ no dependa explícitamente del tiempo.

$$\mathcal{H} \equiv \sum^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \qquad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \qquad (3.1.2)$$

Podemos además observar que si se verifican los supuestos del teorema de la energía cinética (el cambio de coordenadas no depende del tiempo) podemos aplicar (2.4.10), y la energía potencial es conservativa, llegamos a $\mathcal{H} = E$

$$\mathcal{H} = \cancelto{2T}{\sum^{s} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j}} \dot{q}_j - \cancelto{0}{\sum^{s} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j}} \dot{q}_j - (T - U) = 2T - T + U = T + U = E \qquad (3.1.3)$$

Invariancia espacial

Si tenemos un desplazamiento arbitrario en una de las coordenadas generalizadas, $q_k \mapsto q_k + \delta q_k$, y se verifica que $\mathcal{L}(q_k, \{q_j, \dot{q}_j\}; t) = \mathcal{L}(q_k + \delta q_k, \{q_j, \dot{q}_j\}; t)$, esto implica que la parcial de $\mathcal{L}$ con respecto a q_k es 0. Cuando esto ocurre se dice que q_k es una **variable ignorable**, y de (2.2.1) (*E-L*) deducimos que su momento generalizado asociado se conserva.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \dot{p}_k = 0 \implies p_k = C \qquad (3.1.5)$$

3.2. Teorema de Noether

Consideremos unas transformaciones genéricas h_j de las coordendas q_j, parametrizadas por un parámetro ϵ independiente del tiempo tal que

$$q_j \mapsto q' = h_j(\{q_i\}, \epsilon) \quad h_j(\{q_i\}, 0) = q_j \tag{3.2.0}$$

Enunciado

Si el conjunto de las transformaciones h_j deja invariante a $\mathcal{L}$ a orden ϵ (orden uno)

$$\mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) + O(\epsilon^2) = \mathcal{L}(h_j(\{q_i\}, \epsilon), \dot{h}_j(\{q_i, \dot{q}_i\}, \epsilon); t) \tag{3.2.1}$$

Entonces se conseva la siguiente cantidad

$$I(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = \sum_j^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{dh_j}{d\epsilon} \qquad \frac{dI}{dt} = 0 \tag{3.2.2}$$

Nuestra misión va a ser encontrar las transformaciones (simetrías) que no alteren $\mathcal{L}$ para hallar cantidades conservadas asociadas.

Ejemplo

Si tenemos una masa en en plano bajo la acción de una fuerza central, tal que $\mathcal{L} = 1/2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$, si tomamos las transformaciones $x \mapsto x + \epsilon y$ y $y \mapsto y - \epsilon x$, vemos que el lagrangiano se mantiene invariante a orden ϵ.

$$\mathcal{L}' = 1/2m((\dot{x} + \epsilon \dot{y})^2 + (\dot{y} - \epsilon \dot{x})^2) - U\left(\sqrt{(x + \epsilon y)^2 + (y - \epsilon x)^2}\right)$$

$$\mathcal{L}' = 1/2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \cancel{\epsilon^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}) - U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + \cancel{\epsilon^2(x^2 + y^2)}}\right)$$

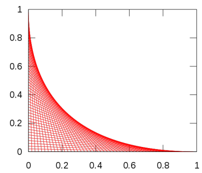
Entonces la cantidad conservada es el momento angular

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{d}{d\epsilon}(x + \epsilon y) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \frac{d}{d\epsilon}(y - \epsilon x) = m(\dot{x} y - \dot{y} x) = -m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = -\mathbf{J}_z$$

4 Mecánica Hamiltoniana

4.1. Transformada de Legendre

Si consideramos una función de una variable $y = f(x)$ tal que $f''(x) \neq 0$, entonces a cada punto le corresponde una sola recta tangente asociada, asociada con su pendiente $f'(x)$ y su ordenada en el origen g, tal que $y = f'(x)x + g$, a esta familia de rectas definida por el par $(f'(x), g)$ se le llama **envolvente** y contiene toda la información original de la función.



Así tenemos dos nuevas coordenadas $[p, g(p)]$, relacionadas con $[x, f(x)]$ mediante

$$\begin{array}{lll} p(x) = f'(x) & g(p) = f(x(p)) - x(p)p & [x, f(x)] \mapsto [p, g(p)] \\ x(p) = (f')^{-1}(p) & f(x) = p(x)x + g(p(x)) & [p, g(p)] \mapsto [x, f(x)] \end{array} \tag{4.1.1}$$

Donde la primera expresión es la *Transformada de Legendre*, y será invertible (la segunda expresión) siempre que $f'(x)$ sea invertible (cierto si $f''(x) \neq 0$).

Varias variables

Si ahora tenemos $f(\{x_i, y_i\})$ donde $\{y_i\}$ son las variables sobre las que queremos hacer la transformada, la transformada es entonces

$$\begin{array}{lll} p_i(\{x_i, y_i\}) = \frac{\partial f}{\partial y_i} & g(\{x_i, p_i\}) = f(\{x_i, p_i\}) - \sum_j p_j y_j(\{x_i, p_i\}) & [y_i, f(\{x_i, y_i\})] \mapsto [p_i, g(\{x_i, p_y\})] \\ y_i(\{x_i, p_i\}) = \left[\frac{\partial f}{\partial y_i}\right]^{-1} & f(\{x_i, y_i\}) = \sum_j y_j p_j(\{x_i, y_i\}) + g(\{x_i, y_i\}) & [p_i, g(\{x_i, y_i\})] \mapsto [y_i, f(\{x_i, y_i\})] \end{array} \tag{4.1.2}$$

La transformación será inversible si el jacobiano de $y_i \mapsto p_i$ es no nulo.

Transformada de Legendre del Lagrangiano

Ahora si tenemos $\mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t)$, $\{\dot{q}_j\}$ serán nuestras antiguas variables y las nuevas variables serán $\partial_{\dot{q}_j}\mathcal{L} = p_j$, los momentos generalizados o conjugados. Entonces aplicando (4.1.2) llegamos a (3.1.2)

$$p_i(\{q_i, \dot{q}_i\}; t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \qquad g(\{q_i, p_i\}; t) = \mathcal{L}(\{q_i, p_i\}; t) - \sum_j^s \dot{q}_j p_j(\{q_i, p_i\}) = -\mathcal{H} \tag{4.1.3}$$

De esta forma, $\mathcal{H}$ es equivalente a la *Transformada de Legendre* de $\mathcal{L}$ con respecto a los $\dot{q}_j$, y esta es inversible, la demostración de que el jacobiano de $[\partial_{\dot{q}_j} p_i]$ es no nulo bajo ciertas circumstancias es *añadir*.

De esta forma, no hemos perdido ninguna información del sistema al pasar de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{H}$, y a continuación reformularemos las ecuaciones del movimiento en función de esta cantidad de una forma equivalente a la fomulación lagrangiana.

4.2. Ecuaciones de Hamilton

Si hacemos la diferencial exacta de $\mathcal{H}$ usando la regla de la cadena tenemos

$$d\mathcal{H} = \sum^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \tag{4.2.1}$$

Si por otro lado hacemos el diferencial de $\mathcal{H}$ desde (3.1.2) o (4.1.3)

$$d\mathcal{H} = \sum^{s} (p_j dq_j + \dot{q}_j dp_j) - dL \tag{4.2.2}$$

si $d\mathcal{L}$ es por regla de la cadena, y usando (2.2.1) y (2.2.2)

$$d\mathcal{L} = \sum^{s} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \sum^{s} (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{4.2.3}$$

Sustituyendo (4.2.3) en (4.2.2)

$$d\mathcal{H} = \sum^{s} p_j dq_j + \dot{q}_j dp_j - \sum^{s} \dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \sum^{s} \dot{q}_j dq_j - \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{4.2.4}$$

Como dq_j, dp_j y dt son funciones independientes y arbitrarias, podemos igualar término a término (4.2.4) y (4.2.1), de tal forma que obtenemos tres ecuaciones

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}} \tag{4.2.5}$$

Estas dos primeras ecuaciones son las *Ecuaciones de Hamilton* del movimiento o *Ecuaciones canónicas*. Por otro lado tenemos la tercera ecuación, que junto a (3.1.2)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} \tag{4.2.6}$$

De esta forma, si $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo, este se conserva.

Para aplicar estas ecuaciones en un sistema holonómico tenemos que hayar primero $\mathcal{L}$, tras esto hayar los momentos generalizados y despues invertir la relación, tal que

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\{q_k, \dot{q}_k\}; t) \rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_k, p_k\}; t) \tag{4.2.7}$$

Entonces usamos la ecuación (4.1.3) con mucho cuidado de reemplazar todas las $\dot{q}_j$ por (4.2.7), y ya tendremos $\mathcal{H}$ en una forma que nos permita resolverlo usando (4.2.5).

Ejemplo

Un ejemplo sencillo es el péndulo simple donde $\mathcal{L} = 1/2ml\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$, hallamos $p_\theta = \partial_\theta \mathcal{L} = ml^2\dot{\theta}$, entonces despejamos $\dot{\theta} = p_\theta/ml^2 = \dot{\theta}(p_\theta)$. Sustituyendo tenemos $\mathcal{H} = p_\theta\dot{\theta} - \mathcal{L} = p_\theta^2/ml^2 - p_\theta^2/2ml^2 - mgl\cos\theta = p_\theta^2/2ml^2 - mgl\cos\theta = T + U$.

Ahora aplicamos (4.2.5), tal que $\dot{\theta} = p_\theta/ml^2$ para la primera, de donde sacamos que $\dot{p}_\theta = ml^2\ddot{\theta}$ y la segunda $\dot{p}_\theta = -mgl\sin\theta$, igualando y depejando obtnemos $\ddot{\theta} + g/l\sin\theta = 0$.

La formulación Lagrangiana es mejor para tratar con ligaduras, pero la hamiltoniana nos permite reducir el orden de la ecuación diferencial resultante cuando una o varias coordenadas generalizadas son ignorables, puesto que en (3.1.5) todavía tenemos que resolver las $\dot{q}$ detro del p, solo conseguimos reducir en 1 el orden de un ecuación de E-L, mientras que en la formulación hamiltoniana, si una variable es cíclica, es decir $\partial_{q_j}\mathcal{H} \iff$ ignorable por (4.2.5.B), entonces ya hemos resuelto $p_j = \alpha$, y entonces podemos resolver el resto de ecuaciones, $2s - 2$ y luego resolver (4.2.5.A) integrando pues es sepatable ya que $\mathcal{H}$ no depende de q_j y p_j es una constante.