Notas de Relatividad General

Abel 'Ender'
(https://github.com/EnderMk9/Notas_RG)

4 de julio de 2021

Resumen

Estas notas son tomadas de una seríe de vídeos de YouTube creada por **Javier García**, que se puede encontrar aquí, sobre Tensores, Geometría Diferencial y Relatividad General.
Estas notas no son una reproducción exacta de los vídeos, sino una recopilación del contenido que juzgo más relevante de ellos.
La plantilla para este documento ha sido tomada de aquí

Índice

1. Tensores

1.1. Convenio de sumación de Einstein

Antes de comenzar conviene explicar el **convenio de sumación de Einstein**, que nos va a permitir escribir expresiones de forma compacta que utilizando el símbolo de sumatorio, $\sum$, serían muy largas.

Tomemos por ejemplo un vector $\boldsymbol{v}$ expresado en función de una base $\boldsymbol{e}_i$, con componentes v^i, donde i no es un exponente, sino un superíndice, esta elección es la clave del criterio.

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \boldsymbol{e}_i = \sum v^i \boldsymbol{e}_i \equiv v^i \boldsymbol{e}_i$$

Para poder aplicar el criterio tenemos que tener claro cuales son los posibles valores que puede tomar el índice, en este caso, desde 1 hasta la dimensión del espacio vectorial.

La clave está en que cuando tenemos un superíndice y un súbindice iguales en un mismo término, esto indica una suma con respecto a ese índice, denominado **índice mudo**, porque solo indica la suma.

Otro ejemplo es aplicado a formas bilineales o endomorfismos, los detalles se detallan posteriormente.

$$\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = A_{ij} v^i w^j \qquad f(\boldsymbol{v})^j = M^j{}_i\, v^i$$

Se observa también que en una ecuación los índices no mudos a ambos lados deben coincidir.

1.2. Covarianza y Contravarianza

Las componentes de un vector de un espacio vectorial V se indican con un superíndice, mientras que los vectores de la base con un subíndice. Por el contrario, las componentes de un vector de V^*, el dual, se indican con un subíndice y la base dual se indica con superíndices.

1.2.1. Base Dual

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j \tag{1.1}$$

Recordemos que la **base dual** se define de esta forma, donde $\boldsymbol{e}^i$ son los vectores de la base dual, $\boldsymbol{e}_j$ son los vectores de una base cualquiera de V, y δ^i_j es el **delta de Kronecker**, así pues si los indices son iguales el resultado será 1 y si son distintos será 0.

1.2.2. Métrica

De nuevo, recordemos que para medir distancias, recurrimos a un **producto escalar**, que define una métrica euclidea, de tal forma que

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} = \sqrt{g_{ij}v^i v^j} \tag{1.2}$$

De tal forma que g es una matriz que define al producto escalar que llamamos la métrica o el **tensor métrico**, y g_{ij} son sus componentes, las cuales dependen de la base de los vectores, de la siguiente manera

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1.3}$$

Es de interés notar que en una base ortonormal, $g_{ij} = \delta_{ij}$, donde de nuevo, δ_{ij} es el delta de Kronecker.

1.2.3. Subir y bajar índices

En el caso $\mathbb{R}$, en el que trabajamos, podemos definir un isomorfismo entre V y V^* tal que $\boldsymbol{v} \mapsto \phi(\boldsymbol{v}, -)$, dónde $\boldsymbol{v} \in V$ y $\phi(\boldsymbol{v}, -) = g_{ij}v^i\boldsymbol{e^j}$, donde $\boldsymbol{e^j}$ es la base dual, así llegamos a

$$\begin{matrix} v_j = g_{ji}v^i & v^j = g^{ji}v_i \\ \boldsymbol{e}^j = g^{ji}\boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j = g_{ji}\boldsymbol{e}^i \end{matrix} \qquad g^{ij} = (g_{ij})^{-1} \iff g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \tag{1.4}$$

Esto es importante pues nos permite pasar las coordendas de un vector de V a V^* y viceversa, o interpretar los elementos de V^* como elementos de V.

1.2.4. Covarianza y Contravarianza

Los superíndices se denominan elementos **contravariantes**, mientras que los subíndices se denominan elementos **covariantes**. Esto indica como se transforman estos elementos cuando realizamos un cambio de base.

Si tomamos dos bases de V, tenemos que $\tilde{v}^j = S^j{}_i \; v^i$, mientras que para un elemento de V^*, si suponemos que esta en una base original y lo pasamos a una base nueva, como lo podemos interpretar como una transformación lineal desde un elemento de V hasta $\mathbb{R}$, para que cambiar de base otra, tenemos que multiplicar por la matriz de cambio de base de la base nueva a la antigua, que es la inversa de S, pues S es la matriz de cambio de base de la antigua a la nueva, así, llegamos a que $\tilde{v}_j = \left(S^{-1}\right)_j{}^i \; v_i$.

Así, los elementos covariantes y contravariantes, al realizar un cambio de base, se transforman de forma inversa.

En el ejemplo que he mostrado se ve como como las componentes de un vector de V son contravariantes y las de un vector de V^* son covariantes.

Otro ejemplo es por ejemplo las coordenadas de un vector de V en una base, que son contravariantes, y los vectores de una base expresados en otra, que son covariantes, puesto que si S es la matriz de cambio de la base vieja a la nueva, su inversa, la matriz de cambio de la base nueva a la vieja contiene como columnas a los vectores de la base nueva expresados en función de la base vieja, así tenemos $\tilde{\boldsymbol{e}}_j = \left(S^{-1}\right)^i{}_j \; \boldsymbol{e}_i$.

Si interpretamos 1.4 como un cambio de base entonces también podemos observar esta misma naturaleza.

1.3. Definición de tensor

1.3.1. Como forma multilineal

Un tensor puede definirse como una **forma multilineal** que manda elementos tanto de V como de V^* a $\mathbb{R}$, tal que:

$$T : V^1 \times \cdots \times V^k \to \mathbb{R} \qquad V^i = \{V \text{ o } V^*\}$$

En muchas ocasiones se colocan los V^* todos junto en la izquierda y el resto son V, de esta forma se habla de tensores (p, q), donde p es el orden contravariante y q es el orden covariante.

Es importante notar que no siempre tienen por que ir en este orden ni estar organizadas así las entradas del tensor, pueden estar mezcladas y en cualquier orden, pero este es el más común.

Por ejemplo una forma bilineal, como he indicado antes, sería un tensor $(0,2)$ que manda dos vectores de V a $\mathbb{R}$, y tiene la forma $\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = A_{ij}v^i w^j$, donde A_{ij} son las componentes del tensor, que podemos organizar en un *array* de orden 2 (una matriz).

Otro ejemplo es un endomorfismo, que podemos interpretar como un tensor $(1,1)$ donde dejamos la entrada de V^* abierta o viceversa. Adoptaría la forma de $f(-, \boldsymbol{w})^j = M^j{}_i \; w^i$, $f(\boldsymbol{v}, -)_j = M^i{}_j \; v_i$ o $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = M^i{}_j \; v_i w^j$ (este último una forma bilineal mixta). A las dos primeras expresiones se las denomina **contracción de un tensor**.

En general las componentes de un tensor (p, q) pueden organizarse en un *array* de orden $p + q$. Un tensor de orden total 0 es un escalar, uno de orden total 1 es un elemento de V o V^* y sus componentes se representan en una lista. Un tensor de orden total 2 puede ser una forma bilineal de V o V^* o un endomorfismo de V o V^*, y sus componentes se pueden representar en una matriz. Con *vectores de matrices* o *hipermatrices* para tensores de orden total 3 y así sucesivamente.

1.3.2. Como elemento de un Espacio Tensorial

Utilizando una operación llamada **producto tensorial**, podemos crear multitud de espacios vectoriales denominados espacios tensoriales haciento productos tensoriales de V y V^*.

$$\mathcal{T} = V^1 \otimes \cdots \otimes V^k \qquad V^i = \{V \text{ o } V^*\}$$

Al igual que en el caso anterior podemos tener cualquier combinación, pero vamos a centrarnos en la siguiente y generalizaremos

$$\mathcal{T} = V \otimes V$$

En este caso, la base de $\mathcal{T}$ serán los elementos abstractos $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$, de los cuales en este caso habrá n^2. Entonces podremos expresar cualquier elemento $\mathbb{T} \in \mathcal{T}$ como una combinación lineal de esa base, $\mathbb{T} = T^{ij}\ \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$

Además definimos un producto escalar entre dos tensores heredado del espacio del que prodece el espacio tensorial, de la siguiente forma:

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) = g_{ik}\ g_{jl} \tag{1.5}$$

Podemos además hacer el producto tensorial de dos vectores cualesquiera de V y el resultado será un tensor de $\mathcal{T}$ de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} = (v^i \boldsymbol{e}_i) \otimes (w^j \boldsymbol{e}_j) = v^i w^j\ \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1.6}$$

Puesto que el producto tensorial es una operación bilineal.

Para recuperar el significado anterior de forma multilineal lo definimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \mathbb{T} \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \left[T^{ij}\ \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right] \cdot \left[(v^k \boldsymbol{e}_k) \otimes (w^l \boldsymbol{e}_l)\right] = \\ &= T^{ij} v^k w^l\ (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \cdot (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) = T^{ij} v^k g_{ik} w^l g_{jl} = \\ &= T^{ij} v_i w_j = T_{kl} v^k w^l \end{aligned} \tag{1.7}$$

En este caso, por como esta definido el tensor, vemos que al final hay que expresar los vectores como elementos del dual, o el tensor como uno covariante.

1.3.3. Transformación de tensores

La propiedad más importante de un tensor es como se transforma durante cambios de base, que es en realidad la característica que los define

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{T}}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1}_{k_1} \dots T^{i_r}_{k_r}\ S^{l_1}_{j_1} \dots S^{l_r}_{j_r}\ \mathbb{T}^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} \\ \mathbb{T}^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = S^{i_1}_{k_1} \dots S^{i_r}_{k_r}\ T^{l_1}_{j_1} \dots T^{l_r}_{j_r}\ \tilde{\mathbb{T}}^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dónde S es la matriz de cambio de base de la base nueva a la antigua y T al revés y su inversa. Es decir, las componentes contravariantes se transforman de forma contravariante y lo mismo para las covariantes.

2. Geometría Diferencial