

Notas de Relatividad General

Abel 'Ender'

(https://github.com/EnderMk9/Notas_RG)

3 de julio de 2021

Resumen

Estas notas son tomadas de una serie de vídeos de YouTube creada por **Javier García**, que se puede encontrar [aquí](#), sobre Tensores, Geometría Diferencial y Relatividad General.

Estas notas no son una reproducción exacta de los vídeos, sino una recopilación del contenido que juzgo más relevante de ellos.

La plantilla para este documento ha sido tomada de [aquí](#)

Índice

1. Tensores	2
1.1. Convenio de sumación de Einstein	2
1.2. Covarianza y Contravarianza	2

1. Tensores

1.1. Convenio de sumación de Einstein

Antes de comenzar conviene explicar el **convenio de sumación de Einstein**, que nos va a permitir escribir expresiones de forma compacta que utilizando el símbolo de sumatorio, \sum , serían muy largas.

Tomemos por ejemplo un vector \mathbf{v} expresado en función de una base \mathbf{e}_i , con componentes v^i , donde i no es un exponente, sino un superíndice, esta elección es la clave del criterio.

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i = \sum v^i \mathbf{e}_i \equiv v^i \mathbf{e}_i$$

Para poder aplicar el criterio tenemos que tener claro cuales son los posibles valores que puede tomar el índice, en este caso, desde 1 hasta la dimensión del espacio vectorial.

La clave está en que cuando tenemos un superíndice y un subíndice iguales en un mismo término, esto indica una suma con respecto a ese índice, denominado **índice mudo**, porque solo indica la suma.

Otro ejemplo es aplicado a formas bilineales o transformaciones lineales, los detalles se detallan posteriormente.

$$\phi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = A_{ij} v^i w^j \quad f(\mathbf{v})^j = M^j_i v^i$$

Se observa también que en una ecuación los índices no mudos a ambos lados deben coincidir.

1.2. Covarianza y Contravarianza

Las componentes de un vector de un espacio vectorial V se indican con un superíndice, mientras que los vectores de la base con un subíndice. Por el contrario, las componentes de un vector de V^* , el dual, se indican con un subíndice y la base dual se indica con superíndices.

1.2.1. Base Dual

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i \quad (1.1)$$

Recordemos que la base dual se define de esta forma, donde \mathbf{e}^i son los vectores de la base dual, \mathbf{e}_j son los vectores de una base cualquiera de V , y δ_j^i es el delta de Kronecker, así pues si los índices son iguales el resultado será 1 y si son distintos será 0.

1.2.2. Métrica

De nuevo, recordemos que para medir distancias, recurrimos a un producto escalar, que define una métrica euclídea, de tal forma que

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\phi(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \sqrt{g_{ij}v^i v^j} \quad (1.2)$$

De tal forma que g es una matriz que define al producto escalar que llamamos la métrica o el tensor métrico, y g_{ij} son sus componentes, las cuales dependen de la base de los vectores, de la siguiente manera

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.3)$$

1.2.3. Subir y bajar índices

En el caso \mathbb{R} , en el que trabajamos, podemos definir un isomorfismo entre V y V^* tal que $\mathbf{v} \mapsto \phi(\mathbf{v}, -)$, donde $\mathbf{v} \in V$ y $\phi(\mathbf{v}, -) = g_{ij}v^i \mathbf{e}^j$, donde \mathbf{e}^j es la base dual, así llegamos a

$$\begin{aligned} v_j &= g_{ij}v^i & v^j &= g^{ij}v_i & g^{ij} &= (g_{ij})^{-1} & \Longleftrightarrow & g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i \\ \mathbf{e}_j &= g_{ij}\mathbf{e}^i & \mathbf{e}^j &= g^{ij}\mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (1.4)$$

Esto es muy importante pues nos permite pasar las coordenadas de un vector de V a V^* y viceversa.