日期：2022 年 5 月 15 日

成绩：________________

学院：智能工程学院　课程：智能机器人技术　周次：第 14 周

专业：智能科学与技术　姓名：方桂安　学号：20354027

1 题一

图为 2R 平面机器人，其中 $l_1 = l_2 = 1$ m 。关节状态变量表示为 $\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，其中 θ_1 和 θ_2 分别为关节 1 和关节 2 的角度，给定如下条件:

(1) 初始位置、速度、加速度

$$\mathbf{\Theta}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{10} & \theta_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 10^\circ & 20^\circ \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \dot{\mathbf{\Theta}}_0 = \begin{bmatrix} \dot\theta_{10} & \dot\theta_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \ddot{\mathbf{\Theta}}_0 = \begin{bmatrix} \ddot\theta_{10} & \ddot\theta_{20} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(2) 终点位置、速度、加速度

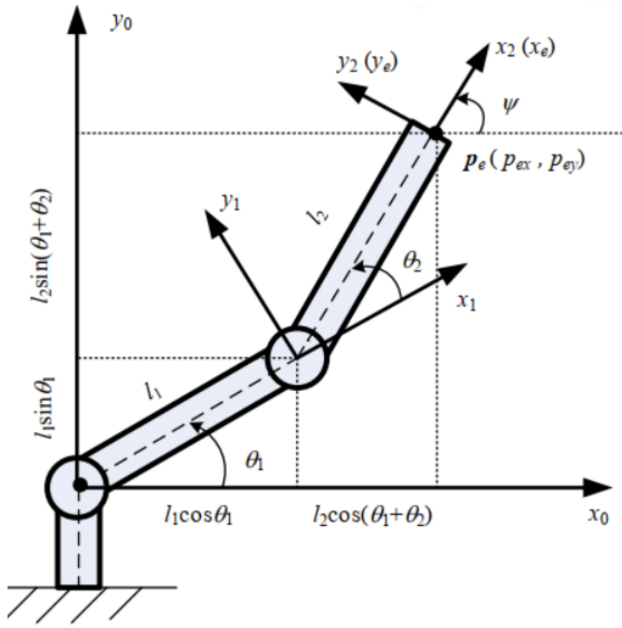
$$\mathbf{\Theta}_f = \begin{bmatrix} \theta_{1f} & \theta_{2f} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 60^\circ & 100^\circ \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \dot{\mathbf{\Theta}}_f = \begin{bmatrix} \dot\theta_{1f} & \dot\theta_{2f} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \ddot{\mathbf{\Theta}}_f = \begin{bmatrix} \ddot\theta_{1f} & \ddot\theta_{2f} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

(3) 要求所有关节的速度、加速度满足如下约束条件

$$\begin{cases} \left|\dot\theta_i\right| \le 5\,(^\circ/\mathrm{s}) \\ \left|\ddot\theta_i\right| \le 0.5\,(^\circ/\mathrm{s}^2) \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

1.1 题目

请采用五次多项式对关节 1 和关节 2 的轨迹进行规划，给出规划函数（含具体的多项式参数）、关节曲线、机器人运动状态图，附上求解程序（matlab，其他编程语言都可以）。



1.2 解答

每个关节角均采用五次多项式进行规划

$$\theta_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3 + a_{i4}t^4 + a_{i5}t^5 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

相应地，速度和加速度的表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i(t) = a_{i1} + 2a_{i2}t + 3a_{i3}t^2 + 4a_{i4}t^3 + 5a_{i5}t^4 \\ \ddot{\theta}_i(t) = 2a_{i2} + 6a_{i3}t + 12a_{i4}t^2 + 20a_{i5}t^3 \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

根据下列起始和终止条件，可以确定待定参数：

$$\begin{cases} \theta_i(0) = \theta_{i0}, & \dot{\theta}_i(0) = \dot{\theta}_{i0}, & \ddot{\theta}_i(0) = \ddot{\theta}_{i0} \\ \theta_i\left(t_f\right) = \theta_{if}, & \dot{\theta}_i\left(t_f\right) = \dot{\theta}_{if}, & \ddot{\theta}_i\left(t_f\right) = \ddot{\theta}_{if} \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

将起止条件代入表达式得到方程组：

$$\begin{cases} \theta_{i0} = a_{i0} \\ \dot{\theta}_{i0} = a_{i1} \\ \ddot{\theta}_{i0} = 2a_{i2} \\ \theta_{if} = a_{i0} + a_{i1}t_f + a_{i2}t_f^2 + a_{i3}t_f^3 + a_{i4}t_f^4 + a_{i5}t_f^5 \\ \dot{\theta}_{if} = a_{i1} + 2a_{i2}t_f + 3a_{i3}t_f^2 + 4a_{i4}t_f^3 + 5a_{i5}t_f^4 \\ \ddot{\theta}_{if} = 2a_{i2} + 6a_{i3}t_f + 12a_{i4}t_f^2 + 20a_{i5}t_f^3 \end{cases}$$

求得如下待定参数：

$$\begin{cases} a_{i0}=\theta_{i0}, a_{i1}=\dot{\theta}_{i0}, a_{i2}=\frac{\ddot{\theta}_{i0}}{2} \\ a_{i3}=\frac{20(\theta_{if}-\theta_{i0})-\left(8\dot{\theta}_{if}+12\dot{\theta}_{i0}\right)t_f+\left(\ddot{\theta}_{if}-3\ddot{\theta}_{i0}\right)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_{i4}=\frac{-30(\theta_{if}-\theta_{i0})+\left(14\dot{\theta}_{if}+16\dot{\theta}_{i0}\right)t_f-\left(2\ddot{\theta}_{if}-3\ddot{\theta}_{i0}\right)t_f^2}{2t_f^4} \\ a_{i5}=\frac{12(\theta_{if}-\theta_{i0})-\left(6\dot{\theta}_{if}+6\dot{\theta}_{i0}\right)t_f+\left(\ddot{\theta}_{if}-\ddot{\theta}_{i0}\right)t_f^2}{2t_f^5} \end{cases}$$

由于起点及终点的速度、加速度为 0 ，待定参数则为：

$$\begin{cases} a_{i0}=\theta_{i0}, a_{i1}=0, a_{i2}=0 \\ a_{i3}=\frac{10(\theta_{if}-\theta_{i0})}{t_f^3} \\ a_{i4}=\frac{-15(\theta_{if}-\theta_{i0})}{t_f^4} \\ a_{i5}=\frac{6(\theta_{if}-\theta_{i0})}{t_f^5} \end{cases}$$

通过（3）中的约束条件编程优化解得 $t_f=31s$, 利用 matlab 代入得到具体参数值并求解出关节曲线与机器人运动状态如下图所示（代码见附录）。

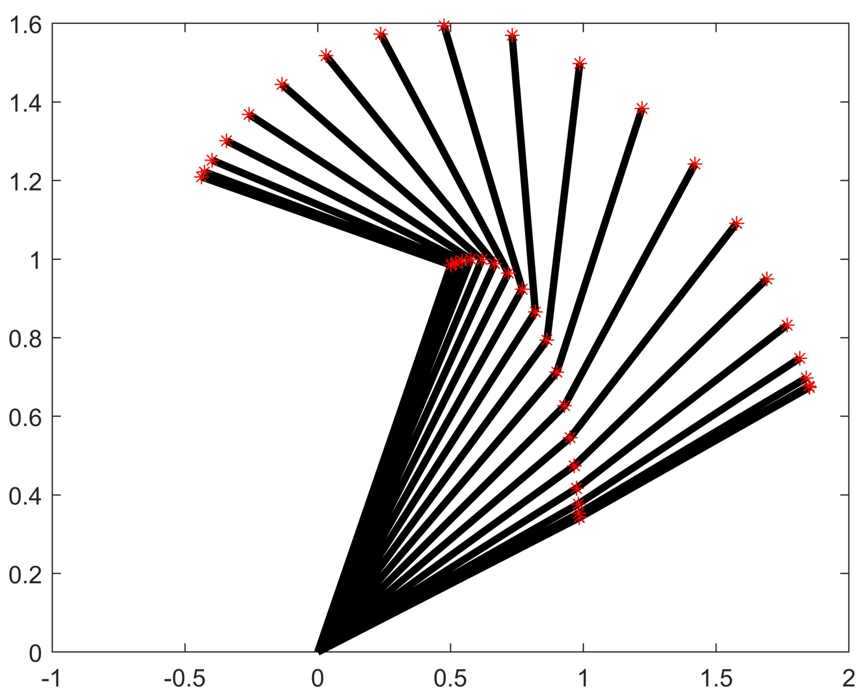


图 1: 机器人运动状态

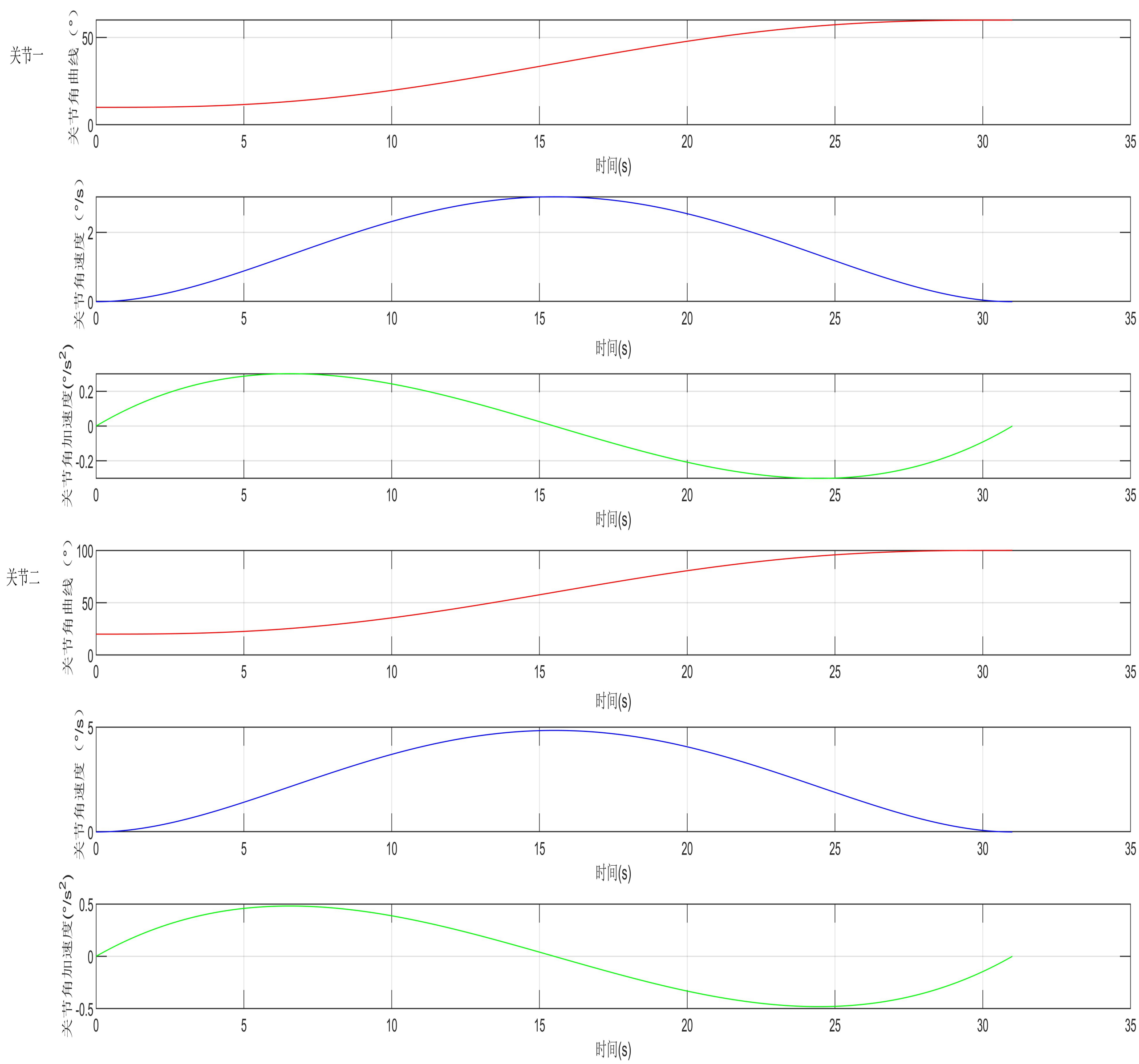


图 2：关节曲线

A 附录：代码

```
clc;clear;
% 求约束下的临界时间
% 使用了 optimization toolbox
q0 = [10,20];
qv0 = [0,0];
qa0 = [0,0];
qf = [60,100];
qvf = [0,0];
qaf = [0,0];
%syms tf; 没有解析解
x0.tf=31;
tf = optimvar('tf','Type','integer','LowerBound',x0.tf);
prob = optimproblem('ObjectiveSense','min');
prob.Objective = tf;
nn = length(q0);
for i=1:nn
        a0(i) = q0(i);
        a1(i) = qv0(i);
        a2(i) = qa0(i)/2.0;
        a3(i) = (20*(qf(i) - q0(i)) - (8*qvf(i) + 12*qv0(i))*tf + (qaf(i) - 3*qa0(i))*tf^2)/(2*tf^3);
        a4(i) = (-30*(qf(i) - q0(i)) + (14*qvf(i) + 16*qv0(i))*tf - (2*qaf(i) - 3*qa0(i))*tf^2)/(2*tf^4);
        a5(i) = (12*(qf(i) - q0(i)) - (60*qvf(i) + 6*qv0(i))*tf + (qaf(i) - qa0(i))*tf^2)/(2*tf^5);
end


for j=1:nn
    prob.Constraints.cons1 = a1(j) + 2*a2(j)*tf + 3*a3(j)*tf^2 + 4*a4(j)*tf^3 + 5*a5(j)*tf^4 ≥-5;
    prob.Constraints.cons2 = 2*a2(j) + 6*a3(j)*tf + 12*a4(j)*tf^2 + 20*a5(j)*tf^3 ≥-0.5;
    prob.Constraints.cons3 = a1(j) + 2*a2(j)*tf + 3*a3(j)*tf^2 + 4*a4(j)*tf^3 + 5*a5(j)*tf^4 ≤5;
    prob.Constraints.cons4 = 2*a2(j) + 6*a3(j)*tf + 12*a4(j)*tf^2 + 20*a5(j)*tf^3 ≤0.5;
    sol = solve(prob,x0,'Solver', 'ga');
end

% 五次多项式
clc;clear;
figure('name','五次多项式');
a_array1 = 0;a_array2 = 0;%起止加速度值
t_array1=0;t_array2=31;%起止时间值
q5_s=[10,20];q5_f=[60,100];%起止角度值
v_array1=0;v_array2=0;%起止速度值

T=t_array2-t_array1;
for i=1:2
    a0(i)=q5_s(i);
```

```
    a1(i)=v_array1;
    a2(i)=a_array1/2;
    a3(i)=(20*q5_f(i)-20*q5_s(i)-(8*v_array2+12*v_array1)*T-(3*a_array1-a_array2)*T^2)/(2*T^3);
    a4(i)=(30*q5_s(i)-30*q5_f(i)+(14*v_array2+16*v_array1)*T+(3*a_array1-2*a_array2)*T^2)/(2*T^4);
    a5(i)=(12*q5_f(i)-12*q5_s(i)-(6*v_array2+6*v_array1)*T-(a_array1-a_array2)*T^2)/(2*T^5);%计算五次多项式系数
end
tc=t_array1:0.01:t_array2;

    q1=a0(1)+a1(1)*tc+a2(1)*tc.^2+a3(1)*tc.^3+a4(1)*tc.^4+a5(1)*tc.^5;
    v1=a1(1)+2*a2(1)*tc+3*a3(1)*tc.^2+4*a4(1)*tc.^3+5*a5(1)*tc.^4;
    a1=2*a2(1)+6*a3(1)*tc+12*a4(1)*tc.^2+20*a5(1)*tc.^3;%位置，速度，加速度函数的计算
    q2=a0(2)+a1(2)*tc+a2(2)*tc.^2+a3(2)*tc.^3+a4(2)*tc.^4+a5(2)*tc.^5;
    v2=a1(2)+2*a2(2)*tc+3*a3(2)*tc.^2+4*a4(2)*tc.^3+5*a5(2)*tc.^4;
    a2=2*a2(2)+6*a3(2)*tc+12*a4(2)*tc.^2+20*a5(2)*tc.^3;

subplot(6,1,1),plot(tc,q1,'r'),xlabel('时间(s)'),ylabel('关节角曲线（°）');hold on;grid on;
subplot(6,1,2),plot(tc,v1,'b'),xlabel('时间(s)'),ylabel('关节角速度（°/s）');hold on;grid on;
subplot(6,1,3),plot(tc,a1,'g'),xlabel('时间(s)'),ylabel('关节角加速度(°/s^2)');hold on;grid on;
subplot(6,1,4),plot(tc,q2,'r'),xlabel('时间(s)'),ylabel('关节角曲线（°）');hold on;grid on;
subplot(6,1,5),plot(tc,v2,'b'),xlabel('时间(s)'),ylabel('关节角速度（°/s）');hold on;grid on;
subplot(6,1,6),plot(tc,a2,'g'),xlabel('时间(s)'),ylabel('关节角加速度(°/s^2)');hold on;grid on;

% 机器人状态需要使用助教提供的程序包


l1 = 1;
l2 = 1;

 qq1 = [10 20]*pi/180;
 qq2 = [60 100]*pi/180;



  pe_0 = fkine_2DOF(l1, l2, qq1(1), qq1(2)); %--------初始位置
  pe_f = fkine_2DOF(l1, l2, qq2(1), qq2(2)); %--------终止位置

 base0 = [0, 0]';%--------基座坐标系原点，用于后面绘图

    p1 = q1*pi/180;
    p2 = q2*pi/180;
    k = length(q1);
    for i=1:k
    pJ1_x(i) = l1*cos(p1(i)); %----杆件 1 的末端
    pJ1_y(i) = l1*sin(p2(i));

     pJ2_x(i) = l1*cos(p1(i)) + l2*cos(p1(i) + p2(i)); %----杆件 2 的末端，也即机械臂的末端
     pJ2_y(i) = l1*sin(p1(i)) + l2*sin(p1(i) + p2(i));
    end
```

```
NN = k-1;
delt_N = floor(NN/20); %—-绘制 NN/20 个状态
figure,
 for j = 1 :delt_N: NN
    line([base0(1),pJ1_x(j)],[base0(2),pJ1_y(j)],'linewidth',3,'color','k'); hold on;
    line([pJ1_x(j),pJ2_x(j)],[pJ1_y(j),pJ2_y(j)],'linewidth',3,'color','k');
    plot(pJ2_x(j),pJ2_y(j),'r*'); plot(pJ1_x(j),pJ1_y(j),'r*');
 end

axis([-1  2 0  1.6]); box on;
function xe = fkine_2DOF(l1, l2, q1, q2)

     s1 = sin(q1); c1 = cos(q1);
     s12 = sin(q1+q2); c12 = cos(q1+q2);
      pex = l1*c1 + l2*c12;
      pey = l1*s1 + l2*s12;

      xe = [pex, pey]';
end
```