**POD-ITPWL模型降阶方法在油藏数值模拟中的应用研究**

曹静1，陈国静\*1，曹津铭1,方雅馨1,熊金1

（1.长江大学 信息与数学学院，湖北 荆州 434023

**摘要：**油藏数值模拟是不确定性度量、生产优化和历史拟合等计算中不可缺少的工具。然而，即使是对于较简单的油藏模型，实现这些应用计算量也较大。为了减轻计算代价，提出一种POD-ITPWL模型降阶方法。该方法从线性化展开点的选取和权重函数出发，对轨迹分段线性(Trajectory Piecewise Linear，简记为TPWL)化方法进行改进，并与本征正交分解（POD）相结合。本文将该方法应用于全隐式求解的油水两相油藏模拟器，结果表明，该方法比现有的POD-TPWL方法具有更高的精度，且运算速度几乎相同，比全阶模拟器的运算速度提高近5倍，验证了该方法的有效性。

**关键字：**油藏数值模拟；模型降阶；轨迹分段线性化；本征正交分解

1. **引言**

油藏数值模拟是油藏不确定性度量和生产优化设计等必不可少的工具。这些应用通常需要多次模拟计算，特别对于实际油藏模型，它会带来计算上的巨大挑战，因此，如何减少计算量是我们迫切需要解决的问题。

模型降阶(MOR)技术已显示出了以最小的计算精度损失减少计算量方面的优势。MOR方法的主要目的是生成系统的降阶模型，同时准确地保留原始系统的输入/输出特点。大部分模型降阶方法的主要思想是将原始系统的状态空间投影到低维状态空间，以降低计算复杂度。轨迹分段线性化(Trajectory Piecewise Linear，TPWL)是一种目前广泛使用的非线性系统模型降阶方法，它最初由Rewienski和White[1]提出。TPWL方法通过对系统在选定的点进行线性展开得到一个加权线性函数来近似非线性项。该方法已经在电子电路建模[2-3]、生物微机电[4]、计算流体力学[5]等多个领域得到了广泛应用。近年来，国内外学者将TPWL与本征正交分解(POD)相结合应用于非线性油藏数值模拟[6-9]。在POD-TPWL方法中，对于每个时间步，利用训练过程得到的Jacobian矩阵，将非线性项线性化，再利用训练过程输出的结果构造POD基矩阵，将线性化的系统投影到低维空间。基于POD-TPWL模型降阶方法，由于只需计算低阶线性系统，所以与全阶非线性系统相比，可使运算速度提高102-103倍[6,7,10]。

虽然TPWL 模型降阶方法对非线性系统非常有效，但仍存在一些不足，如当前状态偏离展开点较大时，产生的误差很大[1,6,11-13]。本文从线性展开点的选择和权重函数两个方面对TPWL方法进行改进，并与POD相结合，提出POD-ITPWL方法，并将该方法应用于油水两相油藏模型，提高油藏模拟的运算速度和精度。

**2.控制方程**

本文主要将POD-ITPWL模型降阶方法应用于油水两相油藏模型。假设油藏等温，且油水两相互不相溶，由质量守恒和达西定律建立控制方程[14]：

 （1）

 （2）

 （3）

 （4）

其中下标和分别表示水相和油相，为饱和度，为相密度，为孔隙度，为源汇相，表示单位体积的流速，为时间，为几何因子，为达西渗流速度向量，为散度算子，和为相对渗透率，为流体粘度，为渗透率张量，为重力加速度，为深度，为压力，为梯度算子。

方程（1）和（2）共包含4个未知数，，，和，可通过关系式（5）和（6）消除其中的两个变量

 （5）

 （6）

式中为油水毛细管压力。

这里考虑相对简单的情况，忽略重力和毛管压力的影响。利用五点块中心有限差分格式在空间上离散，可得到非线性一阶微分方程（7），具体推导见文献[9]：

 （7）

式中向量和分别为网格中心油相压力和水相饱和度；和分别表示时刻 和对时间的导数；是累积矩阵；是传导矩阵；为分流量矩阵；向量为井的油水总流量。

实际上，源汇相通常不使用井底流量，而是压力，可将式（7）改写为分块的形式

（8）

式中：向量中的元素为不包含井的网格的压力，向量中的元素表示源汇项定井底流量的网格的压力，向量中的元素表示源汇项定井底压力的网格的压力，为井指数矩阵。

为了计算定井底压力的生产井的产油量和产水量，可用下式计算：

 （9）

为了计算定总流量的井的井底压力，可用下式计算：

 （10）

计算可得：

 （11）

为了将上述等式写成状态空间方程的的形式，定义输入向量，状态向量，输出向量分别为

   （12,13,14）

方程（8）、（9）和（11）可写成非线性状态空间方程的形式：

 （15）

 （16）

式中：状态向量的矩阵**A**(**x**)，**B**(**x**)，**C**(**x**) 和**D**(**x**)分别为：



需要注意的是，系统矩阵**A**和输入矩阵**B**仍然是状态向量**x**的函数。向量为输出向量，为输出矩阵，为直接传递矩阵。由于矩阵，，，中的元素都是状态变量的函数，则该系统为非线性系统。

**3. POD-ITPWL降阶模型的建立**

本节给出了POD-ITPWL降阶模型的建立方法。首先对改进的轨迹分段线性化(ITPWL)方法进行详细描述，然后说明POD基矩阵的生成过程。

3.1**改进的轨迹分段线性化方法**

为了减少全阶非线性方程(15)的计算量，引入改进的轨迹分段线性化(ITPWL)方法将非线性项线性化。在最初TPWL[1]方法中，非线性系统表示为分段线性系统的加权组合，然后每一个线性系统用适当的投影方法投影到低维空间进行降阶。

对于油藏模拟非线性系统（15），我们首先对每口井设定生产制度，进行一次或多次训练模拟，保存每个时间步输出的状态和导数信息。然后采用合适的线性化展开点选择方法，假设得到一系列点，将非线性项在不同的点处线性展开

， （17）

式中是在处的Jacobian矩阵，。

非线性系统（15）通过线性化模型（17）加权组合近似为：

 （18）

式中为权重。（所有的权值都是非负的，且对所有的**x**满足）

方程（18）中的向量和矩阵的计算复杂度分别为（是网格总数）。为了减小系统的阶数，采用合适的降阶方法，假设生成了基矩阵，则变量，其中为低维变量，，达到降阶的目的。将式（18）投影为：

 （19）

式中，，。

实际应用中，由于计算较复杂，可使用只依赖于降阶状态向量的加权函数替代。将方程(19)中的替换为，得到以下的降阶模型：

 （20）

式中。

TPWL在模拟过程中会出现一些问题，如当前状态与线性展开点偏离较大时，产生的误差较大。本文从TPWL方法中起决定性作用的线性化展开点的选择和权重函数两个方面对TPWL方法进行改进。

为了得到高质量的线性展开点，采用一种新的基于全局最大误差控制的线性化展开点选择算法[3]。该算法在每一时间步直接比较当前TPWL模型与全阶非线性模型的输出结果，然后通过全局最大误差选择一个状态作为新的线性展开点。在这个方法中，TPWL模型将被更新直到达到给定的最大误差限。与其他线性展开点的选择方法相比，这个算法给出了降阶模型的全局误差，保证了系统模拟的准确性。在油藏模拟中，该算法的具体过程描述为：

（1）给定最大误差控制限和输入向量；

（2）利用全阶油藏模拟器进行模拟，并保存所有时间步的输出状态向量；

（3）将初始状态作为第一个线性化展开点，并令；

（4）利用TPWL方法建立临时模型

 （21）

（5）对模型（21）进行模拟，并获得状态向量；

（6）比较和得到的最大误差状态，记录最大误差和；

（7）如果，选择第个线性化点，令，并转到第（4）步。

对于权重函数，通过实验，使用下面的更有效[2]:

 （22）

式中，，，是这些中心点之间的最小距离，参数在1-2之间取值。最后对所有权重进行归一化，以满足。

**3.2本征正交分解法（POD）**

在本文中，利用POD方法构造基矩阵。首先对全阶模拟器进行训练模拟，保存每个时间步输出的结果。采用文献[15,16]的方法，分别构造油相压力和水相饱和度数据矩阵和：

  （23）

式中表示训练过程中的所有时间步。

计算输出结果的均值：

数据矩阵和中每个结果减去均值：





然后对和进行奇异值分解（SVD），分别保留前和个左奇异向量，和的值根据能量准则确定。最后分别获得油相压力和水相饱和度两个基矩阵和，合并两个矩阵得到基矩阵，其中。可将方程（18）投影到低维空间。

**4.数值结果**

在本节中，我们将POD-TPWL和POD-ITPWL模型降阶方法应用于一个二维油水两相各向异性油藏模型。该油藏网格划分为，渗透率和孔隙度的分布如图1、2所示，每个网格块的长度为m，原油粘度为5mPa·s，地层水粘度为1mPa·s，综合压缩系数为3.0×10-3MPa-1，原始地层压力为30Mpa，井孔半径=0.114m，油相端点相对渗透率=0.9，水相端点相对渗透率=0.6，油相Corey指数为2.0，水相Corey指数为2.0，残余油饱和度=0.2，束缚水饱和度=0.2。采用反五点法井网生产，中心一口注水井，四角为四口生产井，忽略重力和毛管力。

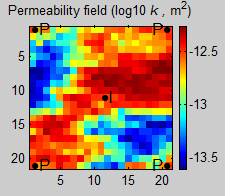
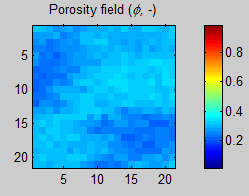
 

图2 孔隙度分布

图 1 渗透率分布

POD-TPWL和POD-ITPWL过程的第一步是对全阶模拟器进行训练模拟，生成状态向量和Jacobian矩阵。在训练过程中，注入井的注水速率为86.4m3/d。在后续的预测过程中，该工作制度保持不变(我们这里的重点是改变生产井的井底压力（BHPs）)，对于生产井，BHPs设定为26MPa。

在训练过程中，模拟1200天，最大时间步长为20天，保存62个时间步的油相压力，水相饱和度和Jacobian矩阵，按3.2节所述方法构造POD基矩阵，降阶基矩阵共有46列，其中22列对应油相压力，24列对应水相饱和度。对于POD-TPWL方法，我们得到10个线性展开点，POD-ITPWL方法，得到14个线性展开点。

下面考虑两种不同的工作制度来评估POD-TPWL和POD-ITPWL降阶模型的预测能力。

1. 工作制度一

我们改变4口生产井的BHPs，设置为23MPa，与训练过程的井底压力相比，差异不大，注入井注水速率与训练过程相同，预测1000天。4口生产井的产油量如图3-6，P2、P3井的产水量如图7、8。 由于P1和 P4两口井的产水量非常小，这里只记录了P2和P3两口井的产水量。在这些图中，黑色线表示全阶模拟器的输出结果，蓝色和红色曲线分别表示POD-TPWL和POD-ITPWL降阶模拟器的输出结果。

图 3 产油量P1（工作制度一）

图 4 产油量P2（工作制度一）



图 5 产油量P3（工作制度一）



图 6 产油量P4（工作制度一）



图 7 产水量P2（工作制度一）



图 8 产水量P3（工作制度一）

为了评估降阶模型的精度，我们定义时间平均误差，产油量的时间平均误差和产水量的时间平均误差为

 （24）

其中和分别是井全阶和降阶(POD-TPWL或POD-ITPWL)模型的产油量或产水量，为模拟总时间，为生产井数。POD-TPWL和POD-ITPWL降阶模型的误差如表1所示。

表 1 POD-TPWL和POD-ITPWL的误差（工作制度一）

|  |
| --- |
| POD-TPWL POD-ITPWL |
| 6.2% 2.1%  7.1% 2.4% |

从上述图和表可以看到，当预测过程的BHPs接近于训练过程中的BHPs时，两种降阶模型都能得到较好的结果，但是，POD-ITPWL降阶模型的精度比POD-TPWL更准确。

全阶油藏模拟器、POD-TPWL和POD-ITPWL降阶模型的模拟时间如表2所示，POD-ITPWL降阶模型运算速度提高了近5倍。

表 2 模拟时间对比（工作制度一）

|  |
| --- |
| 全阶油藏模拟 POD-TPWL POD-ITPWL |
| 时间 94.27s 17.18s 18.82s |

（2）工作制度二

在工作制度二中，将4口生产井BHPs设定为20MPa，与训练过程的井底压力相比差异较大，注水井的工作制度保持不变，预测1000天。4口生产井的产油量如图9-12，P2、P3井的产水量如图13、14。由于P1井和P4井的产水量也接近于零，主要记录P2井和P3井的产水量。在图中，黑色线表示全阶模型输出结果，蓝色和红色曲线分别表示POD-TPWL和POD-ITPWL降阶模型输出的结果。



图 9 产油量P1（工作制度二）



图 10 产油量P2（工作制度二）



图 11 产油量P3（工作制度二）



图 12 产油量P4（工作制度二）



图 13 产水量P2（工作制度二）



图 14 产水量P3（工作制度二）

POD-TPWL和POD-ITPWL降阶模型的时间平均误差如表3所示。

表 3 POD-TPWL和POD-ITPWL的误差（工作制度二）

|  |
| --- |
| POD-TPWL POD-ITPWL |
| 15.2% 3.0%  16.6% 2.6% |

从以上图和表中可以看出，当生产井BHPs与训练模拟过程井底压力的差异较大时，POD-TPWL模型的精度下降，但POD-ITPWL降阶模型仍能保持较高的精度。

工作制度二下的全阶和降阶模型的模拟时间如表4所示。与全阶油藏模拟器相比，POD-ITPWL降阶模型仍可提速近5倍。

表 4 模拟时间对比（工作制度二）

|  |
| --- |
| 全阶油藏模型 POD-TPWL POD-ITPWL |
| 时间 96.21s 18.62s 19.34s |

生成降阶模型的前期处理成本虽然相对较高，但是在需要大量模拟运算（如生产优化和历史拟合）时，与使用全阶模拟器相比，计算量还是少很多，所以使用降阶模型可以显著降低计算成本。

**5.结论**

（1）对于实际油藏模型，油藏数值模拟极其费时，特别是进行后续的生产优化和历史拟合，计算代价往往难以承受。本文引入了一种改进的POD-ITPWL模型降阶方法，该方法从线性展开点的选取和权重函数两个方面对TPWL方法进行了改进，并与POD方法相结合，生成降阶模拟器，提高模拟的运算速度。

（2）通过实例比较，该方法比现有的POD-TPWL方法具有更高的精度，运算速度相当，对于本文算例的较小油藏模型，可使运算速度提高近5倍(对于规模较大的模型，应该可获得更高的提速)。

（3）在后续的工作中，将POD-ITPWL降阶模型完善，应用于更大、更复杂的实际油藏模型。

**参考文献：**

[1] M. Rewienski, J. White. A trajectory piecewise-linear approach to model order reduction and fast simulation of nonlinear circuits and micromachined devices. IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst., 22(2): 155–170, 2003.

[2] N. Dong and J. Roychowdhury. General-purpose nonlinear model-order reduction

using piecewise-polynomial representations. IEEE Transactions on Computer- aided Design of Integrated Circuits and Systems, 27(2): 249-264, 2008.

[3] Y. Liu, W. Yuan, H. Chang. A global maximum error controller-based method for linearization point selection in trajectory piecewise-linear model order reduction. IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integr. Circuits Syst., 33(7): 1100–1104, 2014.

[4] D. Vasilyev, M. Rewienski, and J. White. Macromodel generation for BioMEMS

components using a stabilized balanced truncation plus trajectory piecewiselinear approach. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 25(2):285–293, 2006.

[5] David Gratton. Reduced-order trajectory piecewise-linear models for nonlinear

computational fluid dynamics. In: 34th AIAA Fluid Dynamic Conference, 2004.

[6] M. A. Cardoso, L. J. Durlofsky. Linearized reduced-order models for subsurface

flow simulation. Journal of Computational Physics, 229(3): 681-700, 2010.

[7] J. He, J. Satrom, L. J. Durlofsky. Enhanced linearized reduced-order models for

subsurface flow simulation. Journal of Computational Physics, 230(23): 8313-

8341, 2011.

[8] J. He, L. J. Durlofsky. Reduced-order modeling for compositional simulation by use of trajectory piecewise linearization. SPE Journal, 19(5):858-872, 2014.

[9] J. He, L. J. Durlofsky. Constraint reduction procedures for reduced-order subsurface flow models based on POD-TPWL. International Journal for Numerical Methods in Engineer, 103 (1):1-30, 2015.

[10] Sumeet Trehan, Louis J. Durlofsky. Trajectory piecewise quadratic reduced-order model for subsurface flow, with Application to PDE-constrained optimization. Journal of Cpmputational Physics, 326: 446-473, 2016.

[11] Seonkyoo Yoon, Zeid M. Alghareeb, John R. Williams. Hyper-Reduced-Order Models for Subsurface Flow Simulation. SPE Journal, 21(6):2128-2140, 2016.

[12] S. A. Nahvi, M. Nabi, and S. Janardhanan. Trajectory Based Methods for Nonlinear MOR: Review and Perspectives. IEEE Int. Conf.Signal Processing, Computing and Control, 2012, 1-6.

[13] VOSS T., PULCH R., TERMATEN J., ELGUENNOUNI A. Trajector Piecewise Linear Aproach for Nonlinear Differential-Algebraic Equations in Circuit Simulation. Scientific Computing in Electrical Engineering, Mathematics in Industry, 11: 167-173, 2007.

[14] J. D. Jansen. Systems Description of Flow Through Porous Media. Springer: Springer Briefs in Earth Sciences, 2013, 21-36.

[15] M. A., Cardoso, L. J., Durlofsky, and P., Sarma. Development and Applicationof Reduced-Order Modeling Procedures for Subsurface Flow Simulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 77(9): 1322-1350, 2008.

[16] J. F., van Doren, R. Markovinovic, J. D., Jansen. Reduced-Order Optimal Control of Water Flooding using Proper Orthogonal Decomposition. Computational Geosciences, 10: 137-158, 2006.

**Improved Trajectory Piecewise Linear Combined with POD Model Order Reduction for Subsurface Flow Simulation**

Jing Cao1,Guo-Jing Chen\*1,Jin-Ming Cao1,Ya-Xin Fang1,Jin-Xiong1

*1School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou,434023, China*

**Abstract:** Reservoir simulation is an indispensable tool for many computational applications such as uncertainty quantification, production optimization and history matching. However, these applications can become computational intractable because the simulation of even a single model is time consuming. To relieve the computational burden, a model order reduction (MOR) procedure referred to as POD-ITPWL is presented. In this procedure, trajectory piecewise linear (TPWL) is improved from linearization point selection and the weight function, and then combined with the POD method. We apply this MOR to a fully implicit oil–water subsurface flow problem. The result demonstrates that the method provides higher accuracy than existing POD-TPWL method, and the speed of POD-ITPWL model is almost the same as POD-TPWL. It provides runtime speedup of about 5 for the full-order model considered in this work.

**Keywords:** reservoir simulation; model order reduce; trajectory piecewise linear; proper orthogonal decomposition

[第一作者，曹静，邮箱cjnew\_2008@163.com](mailto:第一作者，曹静，邮箱cjnew_2008@163.com)，电话13627169101

通信作者，陈国静，邮箱31621537@qq.com，电话17671394390