**归纳与总结在《线性代数》课程教学中的应用**

**欧启通**

(厦门理工学院应用数学学院，福建厦门，361024)

摘要：本文结合《线性代数》课程内容的特点和教学实践，通过丰富的实例介绍在《线性代数》课程教学中如何适时进行归纳、总结，以使学生加深对概念的理解，充分培养学生分析问题、解决问题和创新的能力，进而提高其数学素养.

关键词：总结、归纳、线性代数、教学策略

The Application of Induction and Summary in the Teaching of “Linear Algebra”

Qitong OU

School of Applied Mathematics, Xiamen University of Technology,Xiamen 361024,China

Abstract: Based on the characteristics and teaching practice of the course of "Linear Algebra", this paper introduces how to sum up and summarize in the course of "Linear Algebra" through rich examples, so as to make the students better understand the concept. Fully develop studentsundefined ability of problem analysis, problem solving and innovation, and then improve their mathematical literacy.

Keywords: Summary, induction, linear algebra, teaching strategy

归纳和总结是学习的深化过程，是由认识、理解到消化、吸收的过程。在学完一个完整部分的内容后，通过系统复习、归纳整理，把概念、理论、方法分门别类地列出它们之间的关系，做出总结，这对全面系统地掌握和理解这部分知识起着关键性的作用.

本文在笔者多年教学实践的基础上，结合《线性代数》课程内容的特点和教学实践，通过丰富的实例来谈谈在线性代数教学中如何适时进行归纳、总结，使学生加深对概念的理解，充分培养学生分析问题、解决问题和创新的能力，进而提高其数学素养.

根据归纳总结内容的特点，在《线性代数》课程教学中， 我们主要采用以下几种归纳方法．

一、**对零散知识点的归纳总结**

在线性代数课程中，有许多不同概念之间具有某种联系，但是这些概念的学习却是在不同的学习过程出现的。如果我们在学习到一定阶段时，能给出某个概念与其他概念之间的关系， 那将更有利于学生对此概念的理解和掌握．因此，我们要适时地将与某个概念相关联的零散知识点进行归纳总结，以便于学生对所学内容有全面认识．

1、矩阵的运算性质[1]

矩阵常见的运算有加法、数乘、乘法、逆、转置等，彼此之间既有联系又有区别，教学中可列表如下（表中涉及的符号要求有意义），帮助学生梳理、提升知识点.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 加法 | 数乘 | 乘法 | 逆 | 转置 | 伴随 |
| 转置 |  |  |  |  |  |  |
| 行列式 |  |  |  |  |  |  |
| 逆 |  |  |  |  |  |  |
| 伴随 |  |  |  |  |  |  |

2、矩阵秩的等价刻划[2]

矩阵的秩是矩阵中的一个重要概念，它反映了矩阵的本质属性. 我们可以从行列式，相抵标准形，向量，线性空间，线性方程组，线性变换，矩阵分解等各个角度来刻划矩阵的秩.

定义1.1 设，则中不等于 0的子式的最大阶数叫做这个矩阵的秩，记作.

命题1.1 设，则的充分必要条件是中有一个阶子式不等于0，所有阶子式全为0.

命题1.2 设，则的充分必要条件是中有一个阶子式D不等于0，所有包含D作为子式的阶子式全为0.

命题1.3 设，则的充分必要条件是存在可逆矩阵使得.

推论1.4 设，则的充分必要条件是.

命题1.5 设，则的充分必要条件是的行向量的极大无关组所含的向量个数为.

命题1.6 设，则的充分必要条件是的列向量的极大无关组所含的向量个数为.

推论1.7 设，若，则的行秩和列秩也都等于.

命题1.8 设，则的充分必要条件是线性方程组的解空间的维数等于.

命题1.9 设，则的充分必要条件是线性方程组有个独立的方程，其余方程是这些方程的线性组合.

命题1.10 设取维线性空间的一个基维线性空间的一个基线性映射对应，即



则的充分必要条件是的维数等于.

推论1.11 设有线性映射则的充分必要条件是.

命题1.12 设，则的充分必要条件是存在矩阵且使得.

命题1.13 设，则的充分必要条件是存在个线性无关的，个线性无关的，使得.

矩阵的秩，定义虽然简单，但要从各个方面理解起来并熟练地掌握并不容易。只有正确理解矩阵的秩的定义，熟练掌握矩阵秩的刻划，并与数学中的知识有机的结合起来，这样才能够较好地掌握矩阵的秩.

3、**可逆矩阵的归纳[3]**

可逆阵这个概念．在线性代数教学中，我们会发现它与向量组的矩阵的秩，矩阵行列式，线性相关性，线性方程组解的判别， 矩阵特征值等都有密切关系。

命题1.14 设  是 ｎ 阶方阵，则

(1)是可逆阵当且仅当 是满秩阵．

(2)是可逆阵当且仅当是非奇异阵．

(3)是可逆阵当且仅当  的行列式不等于零．

(4)是可逆阵当且仅当 是有限个初等阵的积．

(5)是可逆阵当且仅当的行向量组线性无关．

(6)是可逆阵当且仅当的特征值都不等于零．

(7)是可逆阵当且仅当方程  有唯一解．

4、**初等变换的应用[4]**

矩阵的初等变换是线性代数解题的一个主要工具, 这里归纳了矩阵初等变换的九种主要应用.

(1)求矩阵或向量组的秩；

(2)求可逆矩阵的逆矩阵；

(3)解矩阵方程；

(4)判定一个向量组的线性相关性，求极大无关组并将其余向量用极大无关组线性表示；

(5)判断两个向量组是否等价；

(6)求齐次线性方程组的基础解系，求非齐次方程组的解；

(7)化二次型为标准型；

(8)求整数的最大公因数和多项式的最大公因式；

(9)解线性不定方程。

课堂上，教师若能将分布在不同章节的与可逆阵、矩阵的秩、初等变换的应用相关的知识归纳总结，则不仅有助于学生对相关知识的整体了解，也更有益于学生对该知识的应用，进而拓展学生的解题思路．如果布置学生自己去做这样的归纳总结工作，将有助于培养学生自主学习的能力， 也将提高学生学习数学的兴趣．

**二、集中知识点的提炼总结**

《线性代数》课程中的有些知识点虽然是在一个章节中，但是为了让学生更好地理解命题的结论，教材往往对这些命题进行证明或说明需要注意的条件，因此所占的篇幅都较长. 而作为工科的学生来说，是要用这些理论作为工具，因此更重要的是要记住这些命题的条件和结论. 因此，我们有必要对这些命题进行提炼总结，使学生易于记忆.

1、**向量组线性相关性的判别定理 [5]**

命题2.1含有零向量的向量组一定线性相关．

命题2.2只含1个向量的向量组，若则线性相关，若，则线性无关．

命题2.3含有2个向量的向量组，如果线性相关，则两向量的对应分量成比例．

命题2.4多于2个向量的向量组线性相关的充分必要条件是至少有一个向量能被其余的向量线性表示．

命题2.5线性相关的向量组添上向量后得到的新向量组还是线性相关的．

命题2.6线性无关的向量组去掉若干个向量后得到的新向量组还是线性无关的．

命题2.7将一个无关向量组的每个向量添加一个分量后得到的新向量组还是线性无关的．

命题2.8正交向量组一定线性无关．

命题2.9向量组的秩小于向量的个数，则向量组线性相关，若等于，则向量组线性无关．

命题2.10 个向量构成的元向量组线性相关.

命题2.11 个维向量组成的向量组线性相关的充分必要条件是

命题2.12 向量组线性无关，而向量组线性相关，则可以由线性表示且表示方法唯一.

**2、 行列式的性质[5]**

(1)行列式与它的转置行列式相等.

(2)若互换行列式的两行（列），则行列式变号.

(3)若行列式中有两行（列）完全相同，则此行列式等于0.

(4)行列式中某一行（列）中的所有元素都乘以同一个数，等于用数乘此行列式.

(5)行列式中某一行（列）的所有元素的公因子都可以提到行列式的外面.

(6)若行列式有两行（列）的所有元素成比例，则此行列式等于0.

(7)若行列式的某一行（列）的每一个元素都是两数之和，则可表示成两个行列式和的和.

(8)把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数加到另一行（列）的对应元素上去，行列式不变.

**3、逆矩阵的性质[5]**

(1)若矩阵可逆，则的逆矩阵唯一.

(2)若矩阵可逆，则亦可逆，且.

(3)若矩阵可逆，数，则亦可逆，且.

(4)若矩阵、为同阶可逆矩阵且均可逆，则亦可逆，且.

(5)矩阵可逆的充分必要条件是，且.

(6)若矩阵可逆，则.

归纳总结了这些性质，以下这个例题就很容易求解了.

例2．1 设是3阶矩阵，且，求的值.

**解**：

.

这个题目之所以被很多教材青睐，就是因为它考到了矩阵逆及矩阵其他的很多知识点。比如第（1）等号用到的知识点就是性质3，第（2）等号用到的就是性质5，第（3）个等号用到的是矩阵的线性运算，第（4）个等号用到的就是方阵的行列式性质，第（5）个等号用到的是性质6.

4、线性方程组解的情况与向量线性相关性的关系

向量组的线性相关性同方程组解的判定结合, 将行列式与秩的判别法融入其中,可以总结如下.

对于，有下列结论：

（1）方程组 

 ，使得

 （若是方阵）

（2）方程组   

**三、从特殊到一般的归纳[6]**

从特殊性的前提推论出一般性结论的推理方法. 先摆事实，后求结论，这是从特殊到一般，寻求事物普遍特征的认识方法. 例如，我们容易知道二阶行列式和三阶行列式的定义如下：

；



于是我们很自然地得到

.

从二阶和三阶行列式的代数表达式，我们归纳出对的阶行列式也类似于二、三阶行列式的表达式，是所有取自每一行每一列的个元素乘积的代数和.

**四、不同知识点的对比归纳**

在教学中，常常会遇到很多容易引起学生混淆的相似概念，或具有相似性质的知识．我们可以通过对比归纳明确他们的异同．

例如，在线性代数中经常出现矩阵间的相抵，相似和相合关系[7]．这三种关系既有相似的地方，也有各自特点，学生常常将这三种关系的概念和性质混淆，这里我们可以从定义、关系、性质及等价分类对它们进行对比归纳.

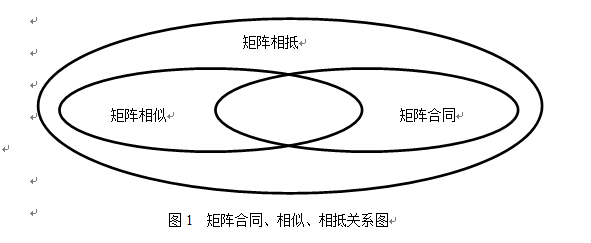
**1、矩阵相抵、相似、合同的定义对比归纳**

定义4.1 对于同型矩阵、，若存在可逆矩阵、，使得，则称与相抵.

定义4.2 对于阶方阵、，若存在一个可逆矩阵，使得，则称与相似.

定义4.3 对于阶方阵、，若存在一个可逆矩阵，使得，则称与合同.

**2、矩阵相抵、相似、合同的关系对比归纳**



**3、矩阵相抵、相似、相合的性质对比归纳**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 关系 | 秩 | 行列式 | 特征值 | 标准型 | 对称性 |
| 相抵 | 相同 | --- | --- | 相同 | --- |
| 相似 | 相同 | 相同 | 相同 | --- | --- |
| 合同 | 相同 | 同正负 | 同正负 | 相同 | 相同 |

**4、相抵、相似、合同的等价类对比归纳**

**命题4.1** 矩阵在相抵关系下可分为类（其中）.

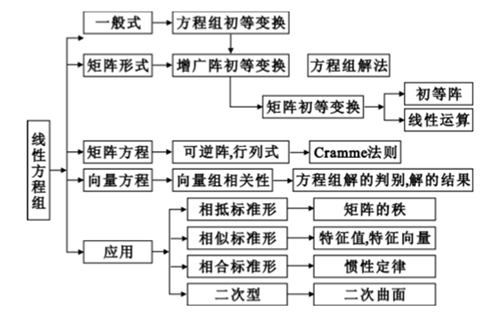
命题4.2 所有阶方阵，在相似关系下有无限多个等价类.

命题4.3 在复数域上，阶对称阵在合同关系下可分为类.

命题4.4 在实数域上，阶对称阵在合同关系下可分为类.

**五、知识主线的提炼[3]**

所谓知识主线的提炼是指将教学内容归类，把隐藏在纷繁内容中的最主要的概念、规律、原理等知识进行联系，建立知识链或运用图表归纳章节、单元知识，构建知识体系或知识网络．



线性方程组作为知识主线贯串整个《线性代数》始终. 这种归纳方式既可以将主要内容筛选出来，也可以使学生清楚各知识点相互之间的联系及在整个知识体系中的地位和作用，加深对知识的理解，更有利于学生对知识的记忆和迁移．

参考文献

[1]朱荣坤. 《线性代数》的典型问题与教学设计[R], 福建省第十九次《高等代数》与《线性代数》课程建设研讨会. http://gdjpkc.xmu.edu.cn/PictureShow.aspx?cID=6&pID=54

[2]林亚南. 矩阵的秩[R]. 福建省第五次《高等代数》与《线性代数》课程建设研讨会. http://gdjpkc.xmu.edu.cn/PictureShow.aspx?cID=6&pID=35

[3]王 颖，南基洙 .线性代数教学中的归纳与演绎方法[J].高等数学研究,2013,16 (6):46-48.

[4]欧启通. 矩阵初等变换的应用[J]. 甘肃联合大学学报，2007，21(2):26-30.

[5]杨海涛. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2013.

[6]黄益生. 高等代数[M]. 北京：清华大学出版社，2014.

[7]林亚南. 高等代数选讲[M]. 厦门：厦门大学出版社，2003.

**作者简介**：欧启通，男，1971年2月生，硕士，副教授，联系电话：18259463926，email：[ouqitong@xmut.edu.cn](mailto:ouqitong@xmut.edu.cn)

项目资助：福建省教育厅教学改革项目资助，项目编号：FBJG20180271