小学数学中二元问题的井字格辅助解法

王刚

（自然资源部第一海洋研究所，山东 青岛，266061；青岛海洋科学与技术试点国家实验室，区域海洋学与数值模拟功能实验室，山东 青岛，266237；空天地海一体化大数据应用技术国家工程实验室海洋大数据研究与应用中心，山东 青岛，266061；自然资源部海洋环境科学与数值模拟重点实验室，山东 青岛，266061）

**摘要**：小学数学应用题中的二元问题常常涉及到逆推的思想，是教学的难点，也是学生学习的难点．“井”字格辅助解法采用顺序的方法解决问题，易于理解、便于操作，符合小学生的思维．教师可考虑在小学数学的教学中引入该方法．

**关键词**：二元问题；井字格辅助解法；方程；消元法

**总图分类号**：G622 **文献标识码**：A **文章编号**：

**引用格式**：\*\*．小学数学中二元问题的井字格辅助解法[J]．数学教育学报，\*\*

**投：小学数学教师，ZA2019121352537**

**Checked Spun Antung Auxiliary Solution**

**for Binary Problems in Primary Mathematics Education**

WANG Gang

1 The First Institute of Oceanography, Ministry of Natural Resources, Qingdao 266061, China

2 Laboratory for Regional Oceanography and Numerical Modeling, Pilot National Laboratory for Marine Science and Technology, Qingdao 266237, China

3 National Engineering Laboratory for Integrated Aero-Space-Ground-Ocean Big Data Application Technology, The First Institute of Oceanography, MNR, Qingdao 266061, China

4 Key Laboratory of Marine Science and Numerical Modeling (MASNUM), Ministry of Natural Resources, Qingdao 266061, China

**Abstract**: Applied binary problems are difficult topics for both teachers and students in primary mathematics education, since their solving usually need reverse thinking. Checked spun antung auxiliary solution helps to solve binary problems forwardly. It is easy to understand and operate, and accords with the mode of primary students’ thinking. Teachers may introduce the method in primary mathematics education.

**Key words**: binary problems; checked spun antung auxiliary solution; equation; elimination method

作者简介：

王刚（1977—），男，内蒙古巴彦淖尔人，副研究员，主要从事海洋内波及数据分析研究。

Email：[wangg@fio.org.cn](mailto:wangg@fio.org.cn)

电话：13780607353

联系地址：山东省青岛市仙霞岭路6号，自然资源部第一海洋研究所科研楼704，266061

小学三年级数学中已经出现了二元应用题．这里的“二元”是指题目中出现了两个未知变量而不是方程有两个未知数，因为二元问题不一定要用二元方程来解．

一个典型的问题是：

【例1】：一桶油连桶共重7斤，倒掉半桶油之后重4斤．请问油和桶各有多重？

熟悉了多元方程之后，这就是一个二元一次方程组的问题：两个变量（油和桶）在两个状态（满桶油和半桶油）时各有一个等量关系．该问题可以在三年级解决的原因是，第二个变量（桶）的状态在倒油前后并并没有变化，这样就可以用“两个变量的状态变化量（半桶油）就是第一个变量的状态变化量”这一事实来求解．从方程的视角来看，这就是二元一次方程组最简单的加减消元法．由于题目中“桶”的状态没有发生变化，这个问题也可以认为就是一元问题．

小学五、六年级，在学习了一元一次方程之后，二元问题频频出现在应用题中．例如，

**【**例2**】**：小明和小红原来一共有10颗苹果．现在小红给小明两颗，两人的苹果就一样多．请问，两人原来各有几颗苹果？

即使有了“方程”这个强大的武器，二元问题仍然让孩子感到非常困扰．困扰的原因是，这个问题涉及到两个变量（小红和小明）以及两个状态（原来和现在）．可以认为，问题中有4个未知量，而小学阶段只接触了一元方程．按照通常的思路，题目“问什么就设什么为未知数”，这样仍然有两个未知数，两个等量关系．该设哪个未知量为x，又该以哪个状态的等量关系来建立方程？

一般而言，以第一状态的两个变量之一作为未知数x，以第二个状态的等量关系建立方程是比较方便的．但是由于第二状态的等量关系需要第一状态未知数x导出的两个函数之间来建立，这就给孩子们的理解造成了难题．在此题中，假设小明原来有x个苹果，则它导出的两个函数是：小明现在的苹果数和小红现在的苹果数．小明现在的苹果数很容易得到，是x+2；而小红现在的苹果却无法非直接得到，先计算小红原来的苹果数（10-x），然后才能计算出小红现在的苹果数10-x-2．整个过程是逆推再逆推．

整理一下解决这类问题的思路：要根据题目中叙述的第二个状态的等量关系建立方程，而建立该方程所需的两个函数，一个可通过未知数的状态变化直接导出，另一个则需要第一状态时的等量关系给出第二个变量的表达式，然后再根据第二个变量的状态变化导出第二状态等量关系中的另一个函数．整体来看，这是一个复杂的逆向推导过程，类似于计算机科学领域的“堆栈”思想．而“堆栈”历来是计算机算法中一个较难理解的结构和过程，无怪乎这样的二元问题会让孩子们感到困扰．

**井字格辅助法**

类似的二元问题有个非常直观明了的解法，本文称其为“井”字格辅助法．下面以例2来说明该方法的具体操作过程：

（1）先画一个“井”字形表格，然后将两变量、两状态分别填入“井”字格的上、左边格中．为了不致引起混淆，可以在左上角的位置给出表格的题目，比如“苹果问题”．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **苹果问题** | 小明 | 小红 |
| 原来 |  |  |
| 现在 |  |  |

（2）把未知数填入表格中．这里我们直接设第一个变量的第一个状态为未知数x，即“井”字表格的正中间位置填“x”．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **苹果问题** | 小明 | 小红 |
| 原来 | x |  |
| 现在 |  |  |

（3）根据题目的表述，逐个填充表格中剩下的三个空格，如下表．表格中加入了一些箭头．这里单向箭头表示变量状态的变化；实心双向箭头表示两个变量之间有等量关系；空心双向箭头表示有等量关系，待建立方程．

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **苹果问题** | 小明 | 小红 |
| 原来 | x | 10-x |
| 现在 | x+2 | 10-x-2 |

（4）根据题目的最后一个已知条件（两人现在的苹果一样多），列出方程．注意，这个方程一定是两个变量在第二状态时的等量关系（图中空心双向箭头）．回顾上面的填表过程，首先从未知数x出发，建立了x到10-x，以及x到x+2的关系；然后又建立了从10-x到10-x+2的关系．剩下的x+2和10-x-2的关系就是要求解的方程．

再来看【例2】的问题．井字格辅助法解决的问题其实都是二元一次方程组．导出最终方程的过程其实已经用到了解二元一次方程组的代入消元法．

如果以图的观点来看，两个变量，每个变量都有两个状态，这样就构成了四个节点的图．而题目中的4个关系（两个等量关系表示变量之间的联系，其他两个函数关系表示变量状态的变化）构成了图的4条边．等量关系（横向关系）是双向路径，而其他两个函数关系是单向的（纵向关系）．四条边从两个不同的方向建立起了未知函数x所在节点和其他所有点的关系，未知数x可以从顺时针和逆时针两个方向到达图中其他任意一个节点．这是方程可解的逻辑关系．

**井字格辅助法为何有效**

井字格辅助法仍然是用一元方程来解二元问题，仍然是要用两个变量第二状态的等量关系建立方程来求解问题．但是比起在【例2】部分讨论的解题过程，井字格辅助法更加清楚明了．原因是，在建立方程的时候，所需要的材料都已经准备好了；而且准备材料的过程都是顺向思维．

此外，井字格辅助法直接设第一个变量的第一状态为方程的未知数x，最终求解的是表格中变量的第二状态对应的两个函数所建立的方程，不需要学生再考虑设哪个变量的哪个状态为未知数，以及以哪个等量关系建立方程的问题．对于理解力将强的学生，当然也可以根据题干给出的条件逐步先列出两个等式和两个关系式，以便建立最后的方程．但是，由于目标并没有再开始时就明确，这些函数和等量关系要表达到什么程度并不清楚．所以，准备工作总体上是比较盲目的．而井字格辅助法不同，只需根据题干的叙述填写表格的每一个空，不需要考虑其用途，不需要考虑所填的内容能够对题干解释到什么程度．

总之，井字格辅助法的思路是根据题干的表述顺序进行，不需要逆向思维，不需要“堆栈”思想．填表的过程是3个简单的表达式直接转换，不涉及多步推理过程．

**井字格辅助法的应用及推广**

“井”字表格法适用于小学六年级众多的二元应用题．比如两个队伍的工程问题、两辆汽车的行程问题、分数问题．我国古典数学书籍中的百僧百馍问题、鸡兔同笼问题也可以采用井字格辅助法解决．

【例3】：（百僧百馍）一百馒头一百僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚得几丁？（程大位:《算法统宗》）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **百僧百馍** | 大僧 | 小僧 |
| 人数 | x | 100-x |
| 馒头个数 | 3x | (100-x)/3 |

根据上表，下行两个函数建立方程：3x+(100-x)/3=100．

【例4】：（鸡兔同笼）今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？（《孙子算经》

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **鸡兔同笼** | 雉 | 兔 |
| 头 | x | 35-x |
| 足 | 2x | 4×(35-x) |

根据上表，下行两个函数建立方程：2x+4×(35-x)=94．

正如前面所看到的，井字格辅助法适用于二元一次方程组．对于一元方程，可以用类似的表格法，此时的表格可能如“丰”字形．例如，李白喝酒问题：

【例5】：（李白喝酒）李白街上走，提壶去买酒．遇店加一倍，见花喝一斗．三遇店和花，喝光壶中酒．借问此壶中，原有多少酒？（唐张遂）

这个题目用“丰”字格就清楚明了．

|  |  |
| --- | --- |
| 原来 | x |
| 一遇店和花 | 2x-1 |
| 二遇店和花 | 2×(2x-1)-1 |
| 三遇店和花 | 2×[2×(2x-1)-1]-1 |

依据上表可得方程：2×[2×(2x-1)-1]-1=0．显然，对于一元问题，表格法的优势并不明显．

如果是多元的方程组，则表格的横向、纵向格子多一些．一般来说，对于n个变量，表格应当为（n+1）行、（n+1）列，其中第一行用来标识变量、第一列用来标识状态．注意，从第二行开始，每一行可以建立一个等量关系，等量关系个数和变量数相等；从第二列开始，每一列可以建立一个函数关系，函数的个数和状态数相等．如要方程有解且解唯一，状态数和变量数相等．

表格辅助法可推广到多元方程．从训练学生的逻辑推理能力角度来看，井字格辅助法是最不利的。若单从解决问题本身来看，该方法非常易于理解．小学数学老师可以考虑在教学中引入该方法．