多复变与复流形笔记
全纯域

EndlieDownAHell

2024 年 3 月 24 日

定义 1 若区域 Ω 上有不能延拓的解析函数, 称 Ω 为全纯域.

1 Hartgos 现象

定理 1 取定开圆盘 $D_n(0,R)$, U 为 $\partial D_n(0,R)$ 的邻域, 若 f 在 U 上解析, 则可将 f 延拓至 $D_n(0,R)\cup U$.

Proof. 先来证明 $n=2$ 的情况, 此时

$$\partial D_2(0,R)=\partial D_1^1\times D_1^2\cup D_1^1\times\partial D_1^2$$

此时构造函数

$$\tilde{f}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\omega|=r_1}\frac{f(\omega,z^2)}{\omega-z^1}\mathrm{d}\omega$$

由于 ∂D_2 的构成, 这函数关于 $z_{1,2}$ 连续, 且分别关于 $z_{1,2}$ 解析, 从而是 D_2 邻域上的解析函数.

另一方面, 在 $D_1^1\times U(\partial D_1^2)\subset U$ 上应用 Cauchy 积分公式也有

$$f(z^1,z^2)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\omega|=r_1}\frac{f(\omega,z^2)}{\omega-z^1}\mathrm{d}\omega$$

则在某个开集上 $f=\tilde{f}$, 命题成立.

现在假定 n 的情况下命题成立, 对于 $n+1$ 的情况, 分解 $Z^1=(z_1,\cdots,z_{n-1}), z^2=z_n$, 则 f 关于 Z^1,Z^2 分别解析, 沿用上述证明即可. □

注 1 单复分析中, 我们不难知道 $\mathbb{C}$ 上的任意区域都是全纯的, 然而在 $\mathbb{C}^n$ 上, 不少区域上的函数实际能构作统一的解析延拓.

2 全纯凸域

定理 2 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 若在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中是凸的, 则是全纯域.

Proof. 取 $Z_0\in\partial\Omega$, 则 Z_0 处切平面 $L(X)=0$ 满足 $L\cap\Omega=Z_0$, 假定 L 具有形式

$$L(X)=\sum_{k=1}^n a_k(x^k-x_0^k)+\sum_{k=1}^n b_k(y^k-y_0^k)$$

构造函数

$$H(Z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-\mathrm{i}b_k}{2}(z^k-z_0^k)$$

则 $L(X)=2\Re(H(Z))$, 令 $f(Z)=\dfrac{1}{H(Z)}$, 显然 $f(Z)\in C^{\omega}(\Omega)$, 却不能延拓到 Z_0 的任何邻域中去. □

定义 2 对 $K\subset\Omega$, 称

$$\widetilde{K}=\{Z\in\Omega\mid\forall f\in C^{\omega}(\Omega),|f(Z)|\le\sup_{W\in K}|f(W)|\}$$

为 K 的全纯凸包, 若 Ω 中紧集的全纯凸包总是紧的, 称 Ω 为全纯凸域.

定理 3 全纯凸域是全纯域.

Proof. 取 $\{Z_k\}\subset\Omega$ 仅以 $\partial\Omega$ 为极限点, 构造系列紧集满足

$$Z_n\in K_n,Z_{n+1}\notin K_n,K_n=\widetilde{K}_n,K_n\subset\mathrm{Int}R_{n+1},\bigcup K_n=\Omega$$

在此构造下可取得系列函数 $\{f_n\}$ 使得 $f_n(Z_{n+1})>\sup\limits_{Z\in K_n}|f_n(Z)|$.

选取正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_k$ 收敛, 进一步假设 $\sup\limits_{Z\in K_n}|f_n(Z)|<a_n$, 从微积分学的知识知道

$$f(Z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-f_k(Z))^k$$

在 Ω 上内闭一致收敛, 从而解析.

现在假定 $f(Z)$ 可延拓到 $Z_0\in\partial\Omega$ 的某个邻域上, 相应地有子序列 $Z_{k_n}\to Z_0$, 注意到 $k_j>|\alpha|$ 时

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(1-f_{k_j})^{k_j}}{\partial Z^{\alpha}}(Z_{k_j})=0$$

而对任意的多重指标 α, 总有充分大的 k_j 使得上式成立, 则 f 拓展后在 Z_0 的邻域里恒为零, 这使得 $f\equiv 0$, 矛盾. □

定理 4 全纯域是全纯凸域.

Proof. 考虑紧集 $K\subset\Omega$, 选取充分小的 r, 使得

$$K_r=\overline{\bigcup_{Z\in K}D_n(Z,r)}\subset\Omega$$

现在取 $|f(Z)|\le M$ 在 K_r 上恒成立, 应用 Cauchy 积分定理可导出不等式

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|f}}{\partial Z^{\alpha}}\right|\le\frac{\alpha!M}{r^{\alpha}}$$

上式在 K 的全纯凸包 $\widetilde{K}$ 上亦成立, 从而可以构造级数

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\partial^{|\alpha|f}}{\partial Z^{\alpha}}\frac{(Z-Z_0)^{\alpha}}{\alpha!}$$

使 $f(Z)$ 也在 $\widetilde{K}_r$ 上解析, 而 Ω 是全纯域, 便只能继续成立 $\widetilde{K}_r\subset\Omega$, 又显然 $\widetilde{K}$ 在 $\widetilde{K}_r$ 中紧, 则 Ω 是全纯凸的. □

3 下调和函数

定义 3 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子, 若 $f : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足

$$\Delta f \geq 0$$

称 f 为下调和函数.

定理 5 函数 f 下调和当且仅当如下条件成立:

(i) f 上半连续, 也即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 δ 使得 $|Z - Z_0| < \delta$ 时 $f(Z) < u(Z_0) + \varepsilon$.

(ii) 对任意的调和函数 u, 若在任意 $\partial D_1(z_0, r)$ 上成立 $f \leq u$, 则在 $D_1(z_0, r)$ 上完全成立 $f \leq u$.

Proof. 假定 $\Delta f > 0$, 若上述条件不成立, 此时取 $f(z') > u(z')$, 则有函数 $g = f - u$ 在 z' 上有局部极大, 这便说明 g 在此处的 Hessian 矩阵负定, 从而得到

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \leq 0, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right) \geq 0$$

则只能 $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \leq 0$, 此时

$$\Delta f = \Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \leq 0$$

这是秽乱后宫, 罪不容诛的.

现在放宽假设至 $\Delta f \geq 0$, 并作如下改造

$$\Delta\left(f + \frac{|z|^2}{n}\right) > 0$$

应用 Poisson 积分从 ∂D_1 延拓 $\frac{|z|^2}{n}$ 到 D_1 内, 得到相应的调和函数 v_n, 此时回归至前一种情况, 便是

$$f + \frac{|z|^2}{n} \leq u + v_n$$

令 $n \to \infty$, 即得 $f \leq u$, 则所需的条件成立.

现在假定相应的条件成立, 来证明下调和性, 为此首先有不等式

$$f(z_0) \leq u(z_0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

取 $\varphi \in C_c(\Omega)$, 先有 $f\varphi \leq u\varphi$, 积分又得

$$\int_\Omega f\varphi dS \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\Omega \varphi dS \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

变换不等式右端如下:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\Omega \varphi(z) dS \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\Omega dS \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z) f(z + \varepsilon e^{i\theta})}{i\varepsilon e^{i\theta}} d(\varepsilon e^{i\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\Omega dS \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{\varphi(z) f(\zeta)}{i(\zeta - z)} d(\zeta - z) \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\Omega dS \int_{|\zeta - (\zeta - z)| = \varepsilon} \frac{\varphi(\zeta - z) f(\zeta)}{i(\zeta - (\zeta - z))} d(\zeta - (\zeta - z)) \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_\Omega dS \int_{|z| = \varepsilon} \frac{\varphi(\zeta - z) f(\zeta)}{iz} dz
\end{aligned}$$

显然最后一式也即是[1] $\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\mathrm{d}S\int_0^{2\pi}\varphi(z-\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})f(z)\mathrm{d}\theta$, 作 φ 关于变量 $z,\bar{z}$ 的展开, 继续处理之, 有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\mathrm{d}S\int_0^{2\pi}\varphi(z-\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})f\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\mathrm{d}S\int_0^{2\pi}\varphi(z-\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\bar{z}-\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})f\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\mathrm{d}S\int_0^{2\pi}\left(\varphi(z)-\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}}\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right. \\
&+ \left.\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2}\varepsilon^2\mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}+\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2}\varepsilon^2\mathrm{e}^{2\theta\mathrm{i}}+\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z\partial\bar{z}}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right)f\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\mathrm{d}S\int_0^{2\pi}\left(\varphi(z)+\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z\partial\bar{z}}\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\right)f\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

现在回代入初始不等式, 即得

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\Omega}\mathrm{d}S\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z\partial\bar{z}}+o(1)\right)f\mathrm{d}\theta\geq 0$$

这也便是 $\int_{\Omega}f\Delta\varphi\mathrm{d}S\geq 0$, 从数学分析的知识我们知道

$$\int_{\Omega}(f\Delta\varphi-\varphi\Delta f)\mathrm{d}S=\int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}l=0$$

则 $\int_{\Omega}\varphi\Delta f\mathrm{d}S\geq 0$ 恒成立, 从 φ 任意, 得到 $\Delta\geq 0$ 点点成立. □

定理 6 上半连续函数 f 在 Ω 上下调和当且仅当 $f(z_0)\leq\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}f(z_0+\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$ 在 Ω 上恒成立.[2]

Proof. 命题的一半已经在前文得到应验, 现在假定结论的不等式成立, 若 f 不是下调和的, 取出相应的 $u,D_1(z_0,\varepsilon)$, 照例构造 $g=f-u$, 显然 $g^{-1}(\max_{z\in D_1}g)\cap\overline{D}_1(z_0,\varepsilon)$ 紧, 则可取其中的点 z' 使得 $D_1(z',r)$ 与 $\partial D_1(z_0,\varepsilon)$ 无交, 且 $\partial D_1(z',r)$ 不完全在 S 中, 此时即得不等式

$$f(z')-u(z')>\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(z'+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-u(z'+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

于是 $\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(z'+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta<f(z')$, 这与均值不等式矛盾. □

推论 7 若 $\{f_n\}$ 下调和, 则 $\sup f_n$ 下调和, 若 u 下调和, 则 $|u|^p$ 下调和, 其中 $p\geq 1$.

推论 8 若 f 解析, 则 $|f|^p,\ln|f|$ 次调和.

定义 4 若对任意的 $Z_0,\alpha\in\mathbb{C}^n$, 函数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$ 总满足

$$f(Z_0+t\alpha)$$

对 $t\in\mathbb{C}$ 在有定义处总是下调和的, 称 f 是多下调和函数.

定理 9 f 多下调和当且仅当矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right)_{n\times n}$ 总是半正定的.

[1]抄完了我才在想为什么我不直接让你们看书呢....

[2]原书证明这里才开始论述上半连续函数的可积性质, 小编也不知道他前面那堆积分哪来的, 无语. (流汗黄豆) 总之你们就默认上半连续函数就是可积的, 前一个证明里在边界上等于 f 的调和函数这时候也就是 Poisson 的小把戏了.

Proof. 函数 $f(Z_0+t\alpha)$ 对 t 下调和, 则

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left.\frac{\partial^2 f(Z_0+\alpha t)}{\partial t\partial\bar{t}}\right|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left.\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(Z_0+\alpha t)}{\partial(z^i+\alpha^i t)}\alpha_i\right)\right|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 f(Z_0+\alpha t)}{\partial(z^i+\alpha^i t)\partial(\bar{z}^j+\bar{\alpha}^j t)}\alpha_i\bar{\alpha}^j\right|_{t=0} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(Z_0)}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\alpha_i\bar{\alpha}^j = \alpha\left(\frac{\partial^2 f(Z_0)}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right)_{n\times n}\alpha^\dagger
\end{aligned}
$$

□

定理 10 若 Ω 是全纯域, 则函数 $d(Z)=\operatorname{dist}(Z,\partial\Omega)$ 在 Ω 上满足 $-\ln d(Z)$ 是多下调和的.

Proof. 采用反证法, 考虑到这性质是平移和旋转不变的, 不妨就假设命题对 $Z_0=0,\alpha=1$ 的情况不成立, 此时有不等式

$$
-\ln d(0) > \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} -\ln d(\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta
$$

利用 Poisson 构造调和函数 u, 其在边界上恰好等于 $-\ln d(0)$, 再构造解析函数 f, 其实部是 $u-\ln d(0)-u(0)$, 且 $\Im f(0)=0$, 取定 $W\in\partial\Omega$ 使得 $|W|=d(0)$, 现在令

$$
F_n:\overline{D}(0,\varepsilon)\to\mathbb{C}^n, z\to z+\frac{n-1}{n}\mathrm{e}^{-f(z)}\frac{W}{|W|}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(F_n(Z),\partial\Omega) &\ge \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)-\operatorname{dist}(F_n(z),z) \\
&= \operatorname{dist}(z,\partial\Omega)-\frac{n-1}{n}d(z)\mathrm{e}^{\ln d(0)+u(0)} \\
&= (1-\mathrm{e}^{\ln d(0)+u(0)})\min_{|t|=\varepsilon} d(z) > 0
\end{aligned}
$$

从而集合 $K=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n(\partial D(0,\varepsilon))}$ 是紧集, 进而由 Ω 是全纯凸的, 知道 $\widetilde{K}$ 也是紧的, 于是若 $h\in C^\omega(\Omega)$, 即对 $z\in D(0,\varepsilon)$ 有

$$
|h(F_n(z))| \le \max_{z\in\partial D(0,\varepsilon)} |h(F-n(z))| \le \max_{W\in K}|h(W)|
$$

则按照全纯凸包的定义便得 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n(D(0,\varepsilon))\subset\widetilde{K}$, 然而

$$
\lim_{n\to\infty} f_n(0)=W
$$

矛盾, 于是命题成立. □

4 拟凸域

定义 5 取定区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, 假定对任意的 $Z\in\partial\Omega$, 都存在 Z 的邻域 U 与函数 F 使得 $U\cap\Omega=\{Z\in U\mid F(U)\}$, 这样的函数被称为定义函数.

若 $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}\right)_{n\times n}$ 在 Z 处切空间上正定, 则称 Ω 是拟凸域.

若 F 是 k 阶连续可导的, 且 ΔF 在 $\partial\Omega$ 上不为 0, 则称 Ω 有 k 阶光滑边界.

定理 11 若 Ω 具有二阶光滑的边界, 其为拟凸域当且仅当对任意的 $Z_0 \in \partial\Omega$, 存在充分小邻域使得 $-\ln d(Z)$ 在 $U \cap \Omega$ 上多下调和, 其中

$$d(Z) = \min_{Q \in \partial\Omega} |Z - Q|$$

Proof. 构造函数

$$r(Z) = \begin{cases} -d(Z), Z \in \Omega \\ \ \ d(P), Z \notin \Omega \end{cases}$$

这也是 Ω 的定义函数, 其同样在切空间上半正定.

现在假定 $-\ln d$ 不是多下调和的, 则我们对某个 $Z_0 \in \Omega$ 有向量 $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 使得式子

$$C = \left.\frac{\partial^2 \ln d(Z_0 + t\alpha)}{\partial t \partial \bar{t}}\right|_{t=0} > 0$$

现在对函数 $\ln d(Z_0 + t\alpha)$ 在 $t = 0$ 处作 Taylor 展开, 有

$$\ln d(Z_0 + t\alpha) = \ln d(Z_0) + \Re(At + Bt^2) + C|t|^2 + o(t^3)$$

其中 $A = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln d(Z_0)}{\partial z^i}\alpha^i, B = 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln d(Z_0)}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\alpha^i\bar{\alpha}^j$.

对充分小的 t 可假设 $\frac{C}{2}|t|^2 + o(t^3) > 0$, 则

$$d(Z_0 + t\alpha) \geq d(Z_0)\mathrm{e}^{\frac{C|t|^2}{2}}\mathrm{e}^{\Re(At+Bt^2)}$$

选取 P_0 使得 $d(Z_0) = |Z_0 - P_0|$, 构造映射

$$Z(t) = Z_0 + t\alpha + (P_0 - Z_0)\mathrm{e}^{\Re(At+Bt^2)}$$

从三角不等式, 对充分小的 t 得到

$$\begin{aligned} d(Z(t), \partial\Omega) &\geq d(Z_0 + t\alpha, \partial\Omega) - \mathrm{d}(Z(t), Z_0 + t\alpha) \\ &\geq d(Z_0)\mathrm{e}^{\frac{C}{2}|t|^2}\mathrm{e}^{\Re(At+Bt^2)} - |P_0 - Z_0|\mathrm{e}^{\Re(At+Bt^2)} \\ &= d(Z_0)\mathrm{e}^{\Re(At+Bt^2)}(\mathrm{e}^{\frac{C}{2}|t|^2} - 1) \\ &\geq d(Z_0)\frac{C}{4}|t|^2 > 0 \end{aligned}$$

从这不等式, 我们知道 $d(Z(t))$ 在 $t = 0$ 取得极小值, 则

$$\frac{\partial d(Z(0))}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 d(Z(0))}{\partial t \partial \bar{t}} > 0$$

另一方面 $Z \in \Omega$ 时 $r(Z) = -d(Z)$, 于是还有

$$\frac{\partial r(Z(0))}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r(Z(0))}{\partial t \partial \bar{t}} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 r(Z(0))}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)_{n\times n}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^\dagger \\ &= -\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 d(Z(0))}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)_{n\times n}\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^\dagger < 0 \end{aligned}$$

于是 $r(Z)$ 不再是半正定的, 矛盾.

现在假定 $\ln d(Z)$ 是多下调和的, 计算有

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \ln d}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} &= \frac{1}{d}\frac{\partial^2 d}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + \frac{1}{d^2}\frac{\partial d}{\partial z^i}\frac{\partial d}{\partial \bar{z}^j} \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z^i}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}^j}\right)
\end{aligned}$$

由于 $-\ln d$ 的多下调和性, 矩阵

$$\left(-\frac{\partial^2 \ln d}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)_{n\times n} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z^i}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}^j}\right)_{n\times n}$$

在 Ω 上半正定.

现在取定 $W_0 \in \partial\Omega$ 处的切向量 V, 有 $Z_k \to W_0$, 同样取定其上一组切向量 $V_k \to V$, 首先有

$$V_k\left(\frac{\partial^2 r(Z^k)}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} - \frac{1}{r}\frac{\partial r(Z^k)}{\partial z^i}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}^j}\right)_{n\times n} V_k^\dagger \geq 0$$

令 $k \to \infty$, 即得 $V\left(\frac{\partial^2 r(Z^k)}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\right)_{n\times n} V^\dagger \geq 0$, 于是 Ω 是拟凸的. □

定义 6 函数 $h:\Omega \to \mathbb{R}$ 若使得

$$K_C = \{Z \in \Omega \mid h(Z) \leq C\}$$

紧, 则称 h 是 Ω 上穷竭函数.

若 Ω 上存在一个多下调和的穷竭函数, 称 Ω 为拟凸域.

推论 12 全纯域都是拟凸的.