抽象代数笔记
模论

EndlieDownAHell

2023 年 7 月 23 日

模与模同态

定义 1 取定环 R 与 Abel 群 M, 若能取定映射 $R \times M \to M, (r,x) = rx$, 使得:

(i) $(r_1 + r_2)(x+y) = r_1x + r_1y + r_2x + r_2y$

(ii) $r_1(r_2x) = (r_1r_2)x$

(iii) $1 \cdot x = x$

则称 M 为 R 的左 R 模, 简称为 R 模, 类似的我们也可定义右 R 模.

例 1 环 R 本身可作为 R 模, 所需的乘法为环本身的乘法.

取定加法群 M, 定义 $\mathbb{Z} \times M \to M, nx = \sum_{i=1}^{n} x$, 则其为 $\mathbb{Z}$ 模.

取定 R 的左理想 I, 从 $RI \subset I$, 其上有自然乘法, 类似的, 对于交换整环 R 而言, 其分式理想也是一个 R 模.

定义 2 取定 N 为模 M 的加法子群, 若是还有 $RN \subset N$, 称 N 是 M 的一个子模.

取定 N 为 M 的子模, 则在商群 M/N 上我们定义如下的乘法:

$$r(x+N) = rx + N$$

从 $RN \subset N$ 不难证明这定义的良定性, 从而我们将获得一个新的 R 模, 称为 M 对 N 的商模.

例 2 取定 I 为 R 的理想, 则 IM 生成 M 的一个子模.

若 I 为 R 的一个理想并满足 $IM = 0$, 则 M 也可是 R/I 模, 相应的自然乘法为 $(r+I)m = rm$.

取定 M 的两个子模 M_1, M_2, 则

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 \mid m_i \in M_i, i = 1,2\}, M_1 \cap M_2 = \{m \in M \mid m \in M_1, M_2\}$$

同样是一个子模.

定义 3 模 M 被称为是有限生成的, 若存在 M 的有限子集 X 满足:

$$M = \langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X \right\}$$

若下式成立, 称 $f: M \to N$ 是模 M, N 间的一个同态:

$$f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2)$$

相应的, 我们有模同构的概念, 另外的,

$$\mathrm{Ker}f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$$

为 M 的一个子模.

$$\mathrm{im}f = f(M)$$

为 N 的一个子模.

$$\mathrm{Coker}f = M/\mathrm{im}f$$

为 N 的一个商模.

定理 1 (i) $M/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{im}f$

(ii) $M_1 + M_2/M_2 \simeq M_1/M_1 \cap M_2$

(iii) $(M/M_1)/(M_2M_1) \simeq M/M_2$

Proof. 三大同构定理是一种你证了第一次就不想证第二次的东西. □

命题 2 由一个元素生成的模被称为是循环模, 当且仅当 $M \simeq R/I$ 时 M 是循环模, 且此时 $\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$ 是 R 的一个理想.

Proof. 若 $M \simeq R/I$, 作为商模而言, R/I 可写为 $\langle 1 + I \langle$ 自然也便是循环的. 相反的, 假若 M 是循环的, 取定这唯一的生成元 x, 取定同态 $f: R \to M$,$f(r) = rx$, 这映射是满的, 从而 $M \simeq R/\mathrm{Ker}f$, 另外的, 此时的 $\mathrm{Ker}f$ 便是我们所需的 $\mathrm{Ann}(M)$. □

定义 4 如下的两个模同态被称为是正合的, 若是 $\mathrm{im}f = \mathrm{Ker}g$:

$$M' \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$$

同样的, 如下模同态序列若是两两正合的, 也称为正合列:

$$\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots$$

例 3 一般地, 存在如下正合列:

$$0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \to 0$$

其中 0 为零模, i 为嵌入映射, p 为自然同态.

取定交换环 R, 按照下式定义模 M, N 间同态的运算:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(rf)(x) = rf(x)$$

于是, $\mathrm{Hom}(M, N)$ 实际上还能生成一个 R 模.

注 1 上面的一番论述中交换环的条件是必不可少的, 否则乘法 $(rf)(x)$ 将失去良定性, 为此查看下面两个式子:

$$(rf)(sx) = s[(rf)(x)] = s[rf(x)] = srf(x)$$

$$(rf)(sx) = r[f(sx)] = r[sf(x)] = rsf(x)$$

命题 3 交换环上的 R 模具有如下的模同构:

$$\mathrm{Hom}(R, M) \to M, f \to f(1)$$

Proof. 下式说明了模同态的成立:

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1)$$

$$(rf)(1) = rf(1)$$

对于 1-1 属性, 为 $m \in M$ 定义 $g_m : R \to M, r \to rm$,

$$f \to f(1) \to \left[g_{f(1)} : R \to M, r \to rf(1) = f(r)\right] = f$$

于是逆映射存在, 同构成立. $\square$

R 上的左模与模同态组成了模范畴, 记为 R-Mod.

Hom 与 $\otimes$

Hom

光速验证如下两个交换图, 管你看不看得懂:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, dash] \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "u\circ v"'] & & & \mathrm{Hom}(N,M) \arrow[dl, "u^*"'] \arrow[dd, "u^*\circ v^*"] \\
& M' \arrow[r, dash] \arrow[dl, "v"] & \mathrm{Hom}(N,M') \arrow[dr, "v^*"] & \\
M'' \arrow[rrr, dash] & & & \mathrm{Hom}(N,M'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "f"'] \arrow[dr, dashed, "g=u^*(f)=u\circ f"] \arrow[drr, dashed] & N \arrow[r, dash] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dashed, "h=v^*(g)=v\circ g"] & N \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u"] & M' \arrow[r, "v"] & M''
\end{tikzcd}$$

于是 $\mathrm{Hom}(N,)$ 联合 $*$ 其实是 R-Mod 到 Ab 的一个共变函子, 类似的我们还能得到 R-Mod 到 Ab 的一个反变函子 $\mathrm{Hom}(, N)$ 与 $*$.

定义 5 共变函子 F 被称为左正合的, 若能从上面的正合列得到下面的正合列:

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

$$0 \to FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC$$

共变函子 F 被称为右正合的, 若能从上面的正合列得到下面的正合列:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

$$FA \xrightarrow{F\alpha} FB \xrightarrow{F\beta} FC \to 0$$

相应的我们对反变函子也有类似的概念, 注意反变函子倒转箭头即可.

定理 4 $\mathrm{Hom}(N,)$ 是共变左正合函子, $\mathrm{Hom}(, N)$ 是反变左正合函子.

Proof. 取定正合列

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

我们来逐个验证下面的正和列的正合性:

$$0 \to \mathrm{Hom}(N, A) \xrightarrow{F\alpha} \mathrm{Hom}(N, B) \xrightarrow{F\beta} \mathrm{Hom}(N, C)$$

其中 $F\alpha : f \to \alpha \circ f, F\beta : g \to \beta \circ g$.

我们先来证明 $\mathrm{Ker}F\alpha = 0$, 为此假定 $(F\alpha)f = 0$, 则 $\alpha \circ f = 0 = \alpha 0$, 由于 $Ker\alpha = 0$, α 是单态射[1], 因而 $f = 0$.

验证第二处正合, 为此我们先来证明 $\mathrm{im}F\alpha \subset \mathrm{Ker}F\beta$, 取定 $g \in \mathrm{im}F\alpha$, 则存在 $f \in \mathrm{Hom}(N, A)$ 使得 $g = \alpha \circ \alpha$, 于是 $(F\beta)(g) = \beta \circ \alpha \circ f$, 第一个正合列告诉我们 $\beta \circ \alpha = 0$, 于是 $(F\beta)g = 0$.

再来证明 $\mathrm{Ker}F\beta \subset \mathrm{im}F\alpha$, 为此取定 $g \in \mathrm{Ker}F\beta$, 便有 $\beta \circ g = 0$, 于是, 取定 $n \in N$, 立即有 $\beta \circ g(n) = 0$, 即得 $g(n) \in \mathrm{Ker}\beta = \mathrm{im}\alpha$, 考虑到 α 是单的, 存在唯一的 $a \in A$ 使得 $\alpha(a) = g(n)$, 这便为我们指派了一个从 N 指向 A 的映射 f 满足着 $\alpha \circ f = g$.

反变函子的情况与此类似. □

例 4 取定如下的 $\mathbb{Z}$ 模正合列:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

取函子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2,)$, 来查看 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q})$, 自然 $f(\bar{0}) = 0$, 对于 $f(\bar{1})$, 则从 $f(\bar{0}) = f(\bar{1}) + f(\bar{1})$ 得到 $f(\bar{1}) = 0$, 于是 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$, 对于 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $f(\bar{1})$ 也可取值 $0.5 + \mathbb{Z}$, 于是 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$, 则不能实现 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}), \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), 0$ 之间的正合.

再取函子 $\mathrm{Hom}(, \mathbb{Z})$, 考虑 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, 若 $f(1) \neq 0$, 从 $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, 要么 $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 总成立, 要么 $f(1)$ 被全体整数整除, 这都是矛盾的, 于是只能 $f(1) = 0$, 从而 $f(n) = 0, f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, 于是 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$, 然而 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$, 则不能实现 0, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ 之间的正合.

于是, $\mathrm{Hom}(N,)$ 与 $\mathrm{Hom}(, N)$ 均不是右正合的.

[1]这件事情久远到我还在用 Chapter 0 学范畴论的时候了, 什么? 你说你忘了? 关我什么事.

$\bigotimes$

定义 6 取定交换环 R 上模 M, N, 可定义出双线性映射 $f : M \times N \to T$(T 为一 Abel 群). M, N 的张量积 $M \otimes N$ 便是其上的一个具有如下泛性质的双线性映射 g 与加法群 T:

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, dashed] \\
G &
\end{tikzcd}
$$

其中 f, G 是另一个双线性映射.

定理 5 M, N 的张量积在同构意义上唯一.

. [化成灰都认识的七个字]:

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"] \arrow[ddr, "g_1"'] & M \otimes_1 N \arrow[d, dashed, "g_1^*"] \arrow[dd, dashed, bend left, "\mathrm{id}"] \\
& M \otimes_2 N \arrow[d, dashed, "g_2^*"] \\
& M \otimes_1 N
\end{tikzcd}
$$

□

定理 6 M, N 的张量积存在.

Proof. 取定 F 为 $M \times N$ 生成的自由 Abel 群, 于是 F 中元素都是诸 $(m, n) \in M \times N$ 的整系数线性组合, 取定 $S < F$ 由下列元素生成:

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$$

$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$$

$$r(x, y) - (rx, y), r(x, y) - (x, ry)$$

现在, 定义 $M \otimes N = F/S$, 将 F 的基 (x, y) 的像 $(x, y) + S$ 记作 $x \otimes y$, 下面来验证 $(x, y) \to x \otimes y$ 的双线性属性:

$(x+x') \otimes y = (x+x', y) + S$, 由于 $(x+x', y) - (x, y) - (x', y) \in S$, 于是 $(x+x', y) + S = (x, y) + (x', y) + S$, 也即

$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

其余的双线性属性的验证与此类似.

至于泛性质的成立[1], XXXXXXX:

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\iota"'] \arrow[dr, "\otimes"] & G \\
F \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"] & F/S = M \otimes N \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}
$$

[1]好吧还是补充几句, 当年痛苦搞这段, 被高等线代讨论班的老师拷打了. $\bar{f}$ 作为 f 的线性拓展, $\sum k_i(x_i, y_i)$ 的映射结果其实由诸多 (x_i, y_i) 确定, 而这些基元素, 其在 $\bar{f}$ 下的结果, 由于图表交换, 已经被 f 确定. 这是自由群 F 所具有的泛性质. 从 $M \times N$ 到 G 的唯一映射, 则又是商群的泛性质导致的, 于是使得图表交换的映射便唯一存在了.

□

命题 7 取定 R 模同态 $f : M \to M', g : N \to N'$, 则存在唯一的 R 模同态 $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N', m \otimes n \to f(m) \otimes g(n)$.

Proof. 你知道我要说什么:

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[r, "f"] & M' & \\
& N \arrow[r, "g"] & N' & \\
M \times N \arrow[uur, "\pi_M"] \arrow[ur, "\pi_N"'] \arrow[rrr, dashed, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[rrrd, "{\otimes' \circ (f,g)}"] & & & M' \times N' \arrow[uul, "\pi_{M'}"'] \arrow[ul, "\pi_{N'}"] \arrow[d, "\otimes'"] \\
M \otimes N \arrow[rrr, "f \otimes g"] & & & M' \otimes N'
\end{tikzcd}
$$

□

定理 8 $N\otimes$ 与 $\otimes N$ 构成 R-Mod 到 Ab 的共变函子.

Proof. 只针对第一种情况, 先来看如下的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[rrr, dash] \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[dd, "\varphi_2\circ\varphi_1"'] & & & M\otimes N \arrow[dl, "\varphi_1\otimes \mathrm{id}_N"'] \arrow[dd, "(\varphi_1\circ\varphi_2)\otimes \mathrm{id}_N"] \\
& M' \arrow[r, dash] \arrow[dl, "\varphi_2"] & M'\otimes N \arrow[dr, "\varphi_2\otimes\mathrm{id}_N"] & \\
M'' \arrow[rrr, dash] & & & M''\otimes N
\end{tikzcd}
$$

对于 $(\varphi_2 \circ \varphi_1) \otimes \mathrm{id}_N = (\varphi_2 \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}_N)$ 的证明, 我们来通过下面的交换图证明更一般的情形:

$$
\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "{(f_1,g_1)}"] \arrow[dr, bend left, "{(f_1,g_1)\circ\otimes'}"] \arrow[ddr] \arrow[dd, bend right=60, "{(f_2\circ f_1,g_2\circ g_1)}"'] & M\otimes N \arrow[d, dashed, "f_1\otimes g_1"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "(f_2\otimes g_2)\circ(f_1\otimes g_1)"] \\
M'\times N' \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, "{(f_2,g_2)}"] \arrow[dr, bend left, "{(f_2,g_2)\circ\otimes''}"] & M'\otimes N' \arrow[d, dashed, "f_2\otimes g_2"] \\
M''\times N'' \arrow[r, "\otimes''"] & M''\otimes N''
\end{tikzcd}
$$

从这交换图中不难得到 $(f_2 \circ g_2) \otimes (f_1 \circ g_1) = (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)$. □

命题 9 取定 R 模 M, 存在 R 模同构 $f : R \otimes M \to M, r \otimes m$.

Proof. 查看下面的交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
R \times M \arrow[r, "{(r,m)\to rm}"] \arrow[d, "\otimes"'] & M \\
R \otimes M \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

我们再来为 f 找寻逆映射, 只需注意下面的式子即可:

$$r \otimes m \to rm \to 1 \otimes rm = r \otimes m$$

□

命题 10

$$M \otimes N \simeq N \otimes N$$

$$(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$$

Proof. 嘿嘿嘿:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "(m,n)\to n\otimes m"] \arrow[d, "\otimes"] & N \otimes M \arrow[d, dashed, bend right, "n\otimes m\to m\otimes n"'] \\
M \otimes N \arrow[u, dashed, bend right, "m\otimes n\to n\otimes m"'] & N \times M \arrow[l, "(n,m)\to m\otimes n"] \arrow[u, "\otimes"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(M \otimes N) \times P \arrow[r, "(m\otimes n,p)\to m\otimes(n\otimes p)"] \arrow[d, "\otimes"] & M \otimes (N \otimes P) \arrow[d, dashed, bend right, "m\otimes(n\times p)\to(m\otimes n)\otimes p"'] \\
(M \otimes N) \otimes P \arrow[u, dashed, bend right, "(m\otimes n)\otimes p\to m\otimes(n\times p)"'] & M \times (N \otimes P) \arrow[l, "(m,n\otimes p)\to(m\otimes n)\otimes p"] \arrow[u, "\otimes"]
\end{tikzcd}$$

□

定理 11 $N\otimes, \otimes N$ 都是右正合函子.

Proof. 取定如下正合列:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

现在来挨个验证如下正合列:

$$N \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} M \otimes B \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\beta} M \otimes C \to 0$$

对于 $\mathrm{im}(\mathrm{id}\otimes\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{id}\otimes\beta)$, 注意到 $(\mathrm{id}\otimes\beta)\circ(\mathrm{id}\otimes\alpha) = 1\otimes(\beta\circ\alpha) = 0$.

对于 $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}\otimes\beta) \subset \mathrm{im}(\mathrm{id}\otimes\alpha)$, 查看如下的交换图表给出的映射 $\bar{\beta}$:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes B \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\beta"] \arrow[d, "\pi"] & M \otimes C \\
M \otimes B/\mathrm{id}\otimes\alpha \arrow[ur, "\bar{\beta}"] &
\end{tikzcd}$$

若 $\bar{\beta}$ 为同构, 则 $\mathrm{Ker}\mathrm{id}\times\beta = \mathrm{Ker}\bar{\beta}\circ\pi = \mathrm{Ker}\pi = \mathrm{im}(\mathrm{id}\otimes\alpha)$, 为此, 我们来构造 β 的逆映射: 为 $(m, c) \in M \times C$ 配备 $m \otimes b + E$, 其中 $\beta(b) = c$, 不难验证其良定性, 于是上面的交换图可补充为:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes B \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\beta"] \arrow[d, "\pi"] & M \otimes C \arrow[dl, bend right, "\bar{f}"'] \\
M \otimes B/\mathrm{id}\otimes\alpha \arrow[ur, bend right, "\bar{\beta}"'] & M \times C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\otimes"]
\end{tikzcd}$$

于是从中容易证明 $\bar{f} \circ b\bar{e}ta = \mathrm{id}$.

对于 $\mathrm{id}\otimes\beta$ 为满射, 查看 $\sum m_i \otimes c_i \in M \otimes C$, 由于 β 是满的, 能够为 c_i 取得 B 中原象, 自然也便使得 $m_i \otimes c_i$ 具有 $\mathrm{id}\otimes\beta$ 的原象, 从而 $\sum m_i \otimes c_i$ 具有原象, 于是命题成立. □

例 5 查看 $\mathbb{Z}$ 模正合列:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

取函子 $\mathbb{Z}_2\otimes$, 则 $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$, 而取定 $x \otimes q \in \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q}$, 有

$$x \otimes q = x \otimes \frac{2q}{2} = 2x \otimes \frac{q}{2} = 0 \otimes \frac{q}{2} = 0$$

于是 $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q} = 0$, 进而不能实现 $0, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Q}$ 的正合.

定理 12 取定交换环 R 上模 A, B, C, 则

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$$

Proof. 我们给出如下的对应法则:

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \quad f : A \otimes B \to C, a \otimes b \to c$$

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))\bar{f} : a \to (f_a : B \to C, b \to f(a \otimes b))$$

不难证明我们得到了同态 $\tau : f \to \bar{f}$.

再给出如下的对应:

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \quad \bar{f} : A \to \mathrm{Hom}(B, C), a \to f_a$$

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \quad f : A \otimes B \to C, a \otimes b \to f_a(b)$$

于是我们得到了同态 $\tau^{-1} : \bar{f} \to f$, 只需验证下面的式子:

$$\begin{aligned}
&[a \otimes b \to c] \\
&\to \\
&[a \to (b \to f(a \otimes b))] \\
&\to \\
&[a \otimes b \to f_a(b)] = [a \otimes b \to f(a \otimes b)] = [a \otimes b \to c]
\end{aligned}$$

现在 τ 便是同构了. □

推论 13 取定 Abel 群 M 与交换环 R, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_{\mathbb{Z}} M, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M))$.

若函子 F, G 满足 $\mathrm{Hom}(FA, B) \simeq \mathrm{Hom}(A, GB)$, 称函子 F, G 是一堆相伴偶.

直积与直和

定义 7 取定 $\{A_{j \in J}\}$ 为一族 R 模, 其积 $\prod_{j \in J} A_j$ 是诸 A_j 的笛卡尔积, 并具有如下自然的运算:

$$(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$$

$$r(a_j) = (ra_j)$$

$\{A_{i \in J}\}$ 的和是 $\prod_{j \in J} A_j$ 的子模, 其中的元素只有有限个坐标不为 0, 记作 $\bigoplus_{j \in J} A_j$, 自然, 在 J 为有限集时, 直和与直积时一回事.

定义如下的投射与入射:

$$\pi_j : \prod_{j\in J} A_j \to A_j, (a_j) \to a_j$$

$$\lambda_j : A_j \to \prod_{j\in J} A_j, a_j \to (\cdots, 0, a_j, 0, \cdots)$$

命题 14 取定 R 模族 $\{A_{j\in J}\}$, 则 $A \simeq \bigoplus_{j\in J} A_j$ 当且仅当 A 是 R-Mod 范畴里 $\{A_{j\in J}\}$ 的余积.

Proof. 先来证明 $\oplus_{j\in J} A_j$ 的确是余积, 为此取出诸多投射族 π_j, 当存在一列模同态 $f_j : A_j \to X$ 时, 定义

$$\varphi : \bigoplus_{j\in J} A_j \to X, a \to \sum_{j\in J} f_j \circ \pi_j(a)$$

于是不难验证下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "f_i"'] & \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

对于上图唯一性的成立, 再取定 ψ 使得图表交换, 于是

$$\psi(a) = \sum_{j\in J} \psi \circ \lambda_j \circ \pi_j(a) = \sum_{j\in J} f_j \circ \pi_j(a) = \varphi(a)$$

现在再来证明诸 $\{A_{j\in J}\}$ 的余积同构, 再取定 $(A, \{f_{j\in J}\})$ 为一组余积, 1234567:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "\lambda_j"] \arrow[ddr, "f_j"'] & A \arrow[d, dashed] \arrow[dd, dashed, bend left] \\
& \bigoplus_{j\in J} A_j \arrow[d, dashed] \\
& A
\end{tikzcd}$$

$\square$

命题 15 $A \simeq \prod_{j\in J}$ 当且仅当 A 是 $\{A_{j\in J}\}$ 的余积.

Proof. 我问你它真来了吗, 如来嘛.[1] $\square$

定理 16 存在如下一个同构:

$$\theta : \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i\in J} A_j, B\right) \to \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(A_j, B), \varphi \to (\varphi \circ \lambda_{j\in J})$$

[1]还问我要证明的小同学, 你疑似有点没学好上一条证明了.

Proof. 同态属性只是套公式的事情, 下面来证明其是同构.

取定 $(f_{j\in J}) \in \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(A_j, B)$, 从直和的性质能够取定唯一的 φ 使得:

$$(\varphi \circ \lambda_{j\in J}) = (f_{j\in J})$$

于是同构成立. $\square$

定理 17 存在如下一个同构:

$$\theta : \mathrm{Hom}\left(B, \prod_{j\in J} A_j\right) \to \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}(B, A_j), \varphi \to (\pi_{j\in J} \circ \varphi)$$

Proof. 你觉不觉得我要是在这里打上某句话的话一共四条两组定理就构成同构了. $\square$

定理 18 存在如下同构:

$$\theta : A \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) \to \bigoplus_{j\in J}(A \otimes B_j), a \otimes (b_{j\in J}) \to (a \otimes b_{j\in J})$$

Proof. 容易察觉 $\theta : A \times \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) \to \bigoplus_{j\in J}(A \otimes B_j), (a, (b_{j\in J})) \to (a \otimes b_{j\in J})$ 是双线性的, 则依照张量积的属性, 自然便生成了

$$\theta : A \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) \to \bigoplus_{j\in J}(A \otimes B_j), a \otimes (b_{j\in J}) \to (a \otimes b_{j\in J})$$

逆映射的构造则留神如下的交换图, 其中 φ 的生成仰仗直和的属性:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) & A \otimes B_j \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\lambda_j"'] \arrow[d, "\pi_j"] \\
& \bigoplus_{j\in J}(A \otimes B_j) \arrow[ul, dashed, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

命题 19 取定 R 模 A, B 间单射 $i : A \to B$, 则 A 是 B 的直和分量当且仅当存在 $p : B \to A$ 使得 $p \circ i = \mathrm{id}_A$.

Proof. 假若 $B = A \oplus C$, 由于 $\mathrm{Ker}\pi_A = C$, 显然 $\pi_A \circ i = \mathrm{id}_A$.

对于反向命题, 取定 $C = \mathrm{Ker}p$, 则 $b \in B$ 有表法:

$$b = i \circ p(b) + b - i \circ p(b)$$

其中 $i \circ p(b) \in i(A)$, $b - i \circ p(b) \in C$, 自然 $i(A) \cap C = 0$, 于是 $B = i(A) \circ C$. $\square$

命题 20 取定正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

则如下两个条件等价:

(i) 存在 $\varphi: C \to B$ 使得 $p \circ \varphi = \mathrm{id}_C$

(ii) 存在 $\psi: B \to A$ 使得 $\psi \circ i = \mathrm{id}_A$

这样的正合列被称为是可裂的.

Proof. (ii)⇒(i): 于是可表 B 为 $B = i(A) \oplus \mathrm{Ker}\psi$, 进而有

$$C = p(B) = p \circ i(A) \oplus p(\mathrm{Ker}\psi) = p\mathrm{Ker}\psi$$

取定 $p(x) = p(y), x, y \in \mathrm{Ker}\psi$, 则 $p(x-y) = 0 \Rightarrow x-y = i(a)$, 又 $\psi(x-y) = 0 = \psi \circ i(a) = a$, 于是只能 $x = y$, 故 p 在 $\mathrm{Ker}\psi$ 上单, 便说明 $\mathrm{Ker}\psi \simeq C$, 取定相应的同构为 φ, 即得 $p \circ \varphi = \mathrm{id}$.

反向命题证明与此类似. □

自由模、向量空间、对偶空间

定义 8 R 模 A 是自由的, 若 $A \simeq \bigoplus_{j\in J} Ra_j$, 其中 $Ra_j \simeq R, a_j \in A$, 相应的 $\{a_{j\in J}\}$ 被称为 A 的基底.

考虑到直和中只有有限个坐标非零, A 中全体成员也可写为 $\sum_{j=1}^{n} r_j a_j$.

命题 21 取定基底为 $\{a_{j\in J}\}$ 的自由模 A, 再取定模 B 中的一组元素 $\{a_{j\in J}\}$(下标集完全一致), 则存在唯一的 $f: A \to B$ 使得 $f(a_j) = b_j$.

Proof. "考虑到直和中只有有限个坐标非零, A 中全体成员也可写为 $\sum_{j=1}^{n} r_j a_j$." □

推论 22 若 B 同样为自由模且基底为 $\{b_{j\in J}\}$, 则也有 $g: B \to A$ 使得 $g(b_j) = a_j$, 不难发现 $g \circ f == f \circ g = \mathrm{id}$, 再对 A, B 本身应用上一命题, 即知 A, B 同构.

定理 23 取定任意集合 X, 则存在以 X 为基底的自由模.

Proof. 取如下的形式模即可:

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X \right\}$$

不难验证 $M \simeq \bigoplus_{x\in X} Rx$, 且 $Rx \simeq R$. □

推论 24 取定模 M, 施加大遗忘函子后, 我们将得到集合 M, 在这集合 M 上, 我们生成全新的 R 自由模 $\langle M \rangle$, 则能够取得唯一同态 $f: \langle M \rangle \to M$, 使得基底里的 m 被映到 M 中对应的 m, 此刻 $M = f(\langle M \rangle) \simeq \langle M \rangle / \mathrm{Ker} f$, 故而 R 模都是自由模的商模.

命题 25 取定交换环上有限生成 R 模 M, 若有理想 I 使得 $IM = M$, 则存在 $a \in I$ 使得 $(1-a)M = 0$, 另外的, 若 I 在 M 的 Jacobson 根中, $M = 0$.

Proof. $IM = M$, 于是存在如下的系列表达式:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} r_{i,j} x_j, r_{i,j} \in I$$

表为矩阵形式也即 $X = AX, X = \langle x_n \rangle, A = (a_{i,j})_{n\times n}$, 进而得到 $(E-A)X = 0$, 令 $B = E - A$, B^* 为其伴随, 于是 $B^*B = (\det B)E$, 故而有

$$(\det B)X = B^*BX = 0$$

于是 $(\det B)x_i = 0$, 也便使得 $(\det B)M = 0$, 此时 $\det B$ 便是我们所需要的 $1-a$.

若 $a \in I \subset J$, $1-a$ 便是可逆的, 则 $(1-a)M = 0$ 立即导出了 $M = 0$. □

命题 26 取定交换环 R 上有限生成模 M, 若 $\beta : M \to M$ 是满的, 便也是单的.

Proof. 定义

$$\left(\sum_{k=0}^{n} r_k x^k\right) m = \sum_{k=0}^{n} r_k \beta^n m$$

则 M 变成了一个 $R[x]$ 模, 取 $R[x]$ 的一个理想 $R[x]x$, 由于 β 满, 将有 $(R[x]x)M = M$, 于是存在着多项式 $f(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k x^k \in R[x]x$, 使得

$$[1 - f(x)]M = 0$$

这便向我们指出了

$$1 - \sum_{k=1}^{n} r_k \beta^k = 0$$

于是, 能够断言 $\beta^{-1} = \sum_{k=1}^{n} r_k \beta^{k-1}$. 再觉得 β 不单就没礼貌了. □

定理 27 查看如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

此处的 β 是模 B, C 满射, α 是自由模 $F \to C$ 的任意映射.

Proof. 取定 X 为 F 的基底, 从 β 满, 能够取得 $b \in B$ 使得 $\beta(b) = \alpha(x), x \in X$, 这使得我们能够取得诸 b_j 与 x_j 对应, 进而确知存在唯一同态 $\gamma : F \to B$ 使得

$$\gamma(x_j) = b_j$$

并使得图表交换. □

推论 28 若 F 是自由模, 则 $\mathrm{Hom}(F,)$ 是完全正合的函子.

Proof. 只需验证 $\mathrm{Hom}(F,)$ 是右正合的, 为此取正合列:

$$B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

现在来证明 $\mathrm{Hom}(F, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}(F, C) \to 0$ 是正合的.

取 $f : F \to C \in \mathrm{Hom}(F, C)$, 由于 $\beta : B \to C$ 满, 即有 $\gamma : F \to B$ 满足 $\beta \circ \gamma = f$, 于是 β_* 也是满的, 则函子正合. □

定义 9 模 M 的子集 S 线性无关, 若

$$\sum_{x\in S} a_x x = 0$$

只能推出 $a_x = 0$.

命题 29 若 $\{x_{j\in J}\}$ 是 M 线性无关的生成元集, 则 $M = \bigoplus_{j\in J} Rx_j$.

Proof. 取定自由模 $\langle\{x_{j\in J}\}\rangle$, 则存在唯一同态 $f : \langle\{x_{j\in J}\}\rangle \to M$ 使得诸多 x_j 被映到本身.

另外的, 由于 M 由 $\{x_j\}$ 生成, 从线性无关性质, 其元素具有唯一表法 $\sum_{k=1}^{n} r_k x_k$, 于是也能建立 M 到 F 的唯一同态 φ 使得 $\varphi(x_j) = x_j$.

不难得到 $\varphi \circ f = f \circ \varphi = \mathrm{id}$, 于是命题成立. □

定理 30 域上的模都是自由的, 进而便是向量空间.

Proof. 零模自然是自由的, 现在来考虑非零模的情况. 任意模 V 总是自由模的商模, 于是能够取定其一个生成元组 T. 记 Σ 为 T 的线性无关子组的全体, 其中必然有非零单子集, 于是其非空. 依照包含关系引入序, 则 Σ 为一偏序集, 取其全序子列 $\{T_{i\in I}\}$, 则 $\bigcup_{i\in I} T_i$ 线性无关且为其上界, 进而依据 Zorn 引理便能断言极大元 X 的存在, 假定极大元生成的向量空间为 W, 若 $W \neq V$, 即是在说:

$$\exists y \in T - W, \sum_{x\in X} a_x x + by = 0 \Rightarrow a_x = 0, b = 0$$

于是 $\{y\} \cup X$ 又是线性无关的, 这与 X 的极大性矛盾, 便只能是 $V = W$, 从而 V 是自由的. □

定理 31 域上的向量空间的基底基数一致.

Proof. 有限情况的证明自去看高等代数. 现在来看无限情况的证明:

取定 V 有无限的基底 X, 则其另一个基底自然不能是有限的, 取定 $K(Y)$ 是 Y 的有限子组组成的集合, 为此定义映射

$$f : X \to K(Y), x \to \{y_1, \cdots, y_n\}, x = \sum_{k=1}^{n} r_k y_k, r \neq 0$$

若 $\mathrm{im}f$ 有限, 则 X 将有有限生成 $\bigcup_{\mathfrak{Y}\in \mathrm{im}f} \mathfrak{Y}$, 从而使得 V 又要有有限生成 $\bigcup_{\mathfrak{Y}\in \mathrm{im}f} \mathfrak{Y}$, 矛盾.

于是 $\mathrm{im}f$ 是无限的. 取定 $T \in \mathrm{im}f$, 显然 $f^{-1}(T)$ 有限, 于是便可为任意 $f^{-1}(T)$ 标上序号, 进而生成如下的单射

$$g_T = f^{-1}(T) \to \mathrm{im}f \times \mathbb{N}, x_k \to \mathrm{im}f \times \mathbb{N}$$

考虑到诸多 $f^{-1}(T)$ 达成了对 X 的一个划分, 于是这对应也可提升为如下的单射:

$$X \to \mathrm{im}f \times \mathbb{N}$$

这单射便导出了下面的式子:

$$|X| \leq |\mathrm{im}f \times \mathbb{N}| = |\mathrm{im}f| \times \aleph_0 = |\mathrm{im}f| \leq |K(Y)| = Y$$

对称的便还有 $|Y| \leq X$, 于是 $|Y| = |X|$. □

定理 32 取定向量空间同态 $f : V \to U$, 则

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{im} f)$$

Proof. 取定 $\mathrm{im} f$ 中线性无关生成元生 $\{\mathfrak{u}_{i\in I}\}$ 的一组原像 $\{u_{i\in I}\}$, 再取定 $\mathrm{Ker} f$ 的一组线性无关生成元 $\{v_{j\in J}\}$, 接下来尝试证明 $\{u_i, v_j \mid i \in I, j \in J\}$ 能够生成 V.

设 $x \in V$, 则 $f(x)$ 具有表出

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k$$

进而知道

$$f\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{u}_k\right) = 0$$

于是 $x - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k v_k$ 在 $\mathrm{Ker} f$ 中, 导出如下自然而然的表出:

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k + \sum_{l=1}^{m} b_l w_l$$

现在, 假若

$$\sum_{i\in I} c_i v_i + \sum_{j\in J} d_j w_j = 0$$

即得

$$0 = \sum_{j\in J} c_j f(u_j) = \sum_{j\in J} c_j \mathfrak{v}_j$$

便有 $c_j = 0$ 恒成立, 回代之, 再次从得到 $d_j = 0$ 恒成立.

至此命题成立. □

定义 10 取定域 K 上向量空间 V, 视 K 为其本身的 1 维向量空间, 则 V 的对偶空间指的是 $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$, 其中成员被称为线性函数.

对 $x \in V, f \in V^*$ 记 $\langle x, f\rangle = f(x)$, 则对于固定的 x, $\langle x, f\rangle$ 是 V^* 上的线性函数, 于是又有

$$x \in \mathrm{Hom}(V^*, K) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, K), K) = V^* *$$

这指出了嵌入 $V \to V^* *$, 却未必是满的.

定理 33 取 V 为 K 上向量空间, X 为相应基底, 若取 $f_x(y) = \delta_{xy}, y \in X$, 则 $\{f_{x\in X}\}$ 是 V^* 基数为 $|X|$ 的线性无关子集, 若 V 是有限维的, 则还有 $\dim V = \dim V^*$.

Proof. 假定

$$\sum_{i=1}^{n} k_i f_{x_i} = 0$$

则知道

$$0 = \left\langle x_j, \sum_{i=1}^{n} k_i f_{x_i} \right\rangle = \langle x_j, k_j f_{x_j}\rangle = k_j$$

于是线性无关成立, 又显然 $f_x \neq f_y$, 于是 $|\{f_{x\in X}\}| = |X|$.

当 V 维数有限时, 对 $f \in V^*, v = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \in V$, 我们断言如下的式子:

$$\begin{aligned}
\langle v, f \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} k_i x_i, f \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_i \langle x_i, f \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} k_j \delta_{ij} c_i = \sum_{i,j=1}^{n} k_j \langle x_j, f_{x_i} \rangle \langle x_i, f \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} k_j x_j, \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, f \rangle f_{x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, f \rangle f_{x_i} \right\rangle
\end{aligned}$$

于是命题成立. □

投射模与入射模

定义 11 模 P 被称为是入射的, 若针对着正合列 $N \xrightarrow{\beta} C \to 0$ 有如下的交换图表成立:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

命题 34 模 P 是投射的当且仅当 $\mathrm{Hom}(P,)$ 正合.

Proof. 左推右仿照推论 28 即可, 至于右推左, 注意如下的交换图即可:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, no head] \arrow[d, dashed, "h"'] & P \arrow[d, "\beta_*(h)=f"'] & \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Hom}(P,B) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, no head] & \mathrm{Hom}(P,C) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r] \arrow[d, no head] & 0 \arrow[d, no head] \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

命题 35 若 $\beta : B \to P$ 是到投射模 P 的满同态, 则 $B = \mathrm{Ker}\beta \oplus P', P' \simeq P$.

Proof. 考察如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, no head] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & P \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

结合命题 19,20, 即刻知道

$$B = \alpha(P) \oplus \mathrm{Ker}\beta$$

而 α 是单的, 自然 $\alpha(A) \simeq A$. □

推论 36 若商模 B/A 投射, 则 A 是 B 的直和分量, 且正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$$

在 P 投射时是可裂的.

定理 37 模 P 是投射的当且仅当其是自由模的一个直和分量.

Proof. 若 P 投射, 考虑如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, dashed] & \\
F \arrow[r, "\beta"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 F 为 P 生成的自由模. 于是从命题 35 确知 P 是 F 的直和分量.

对于反向命题, 我们不妨来直接证明投射模的直和分量是投射的, 为此只需注意如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift right, "i"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "f\circ i"' near end] & P \arrow[l, shift right, "p"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\alpha\circ p" near start] & \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

例 6 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 都是 $\mathbb{Z}_6$ 模, 且有同构

$$\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

存在, 又 $\mathbb{Z}_6$ 作为 $\mathbb{Z}_6$ 模是自由的, 于是 $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ 作为 $\mathbb{Z}_6$ 模投射, 然而并不是自由的.

命题 38 $\bigoplus\limits_{i\in I}$ 投射当且仅当 P_i 均是投射的.

Proof. 正向命题从前显然, 对于反向的命题, 考虑如下的交换图即可:

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, shift right, "p_i"'] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "f\circ p_i"' near end] & \bigoplus\limits_{i\in I} P_i \arrow[l, shift right, "\lambda_i"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\alpha\circ\lambda_i" near start] & \\
B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

定义 12 有限生成的模 P 被称为是稳定自由的, 若存在有限生成的自由模使得 $P \oplus F$ 自由.

关于某范畴的论断 S 的对偶 S^* 是将其箭头反向得到的结果, 例如, 单同态

$$0 \to A \xrightarrow{f} B$$

的对偶便是满同态

$$0 \leftarrow A \xleftarrow{g} B$$

定义 13 针对任意正合列 $0 \to A \xrightarrow{i} B$ 使得如下图表交换的模 E 被称为入射模.

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

自然入射模是投射模的对偶, 进一步地, 通过逆转箭头, 我们能够将关于入射模的诸多性质迁移到投射模上.

命题 39 模 E 是入射的当且仅当 $\mathrm{Hom}(,E)$ 是正合的.

命题 40 若 E_i 入射, 则 $\prod\limits_{i\in I} E_i$ 也是入射模.

定理 41 入射模 E 的直和分量是入射的.

定理 42 模 E 是入射的, 当且仅当模同态 $f : I \to E$ 总可扩展为模同态 $g : R \to E$, 其中 I 为 R 的一个理想.

Proof. 注意到正合列

$$0 \to I \xrightarrow{\iota} R$$

命题即刻成立.

对于反向的命题, 取如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

依照 Zorn 引理, 假定 A_0 为使得如下图表交换的 B 中极大子集:

$$\begin{tikzcd}
& E & A_0 \arrow[l, "g'"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\alpha"] & B
\end{tikzcd}$$

假若 $A_0 \neq B$, 取 $x \in B - A_0$, 生成理想

$$I = \{r \in R \mid rx \in A_0\}$$

依照假设将同态 $h : I \to E$ 扩展为 $h' : R \to E$, 进而生成如下的 $A' \subset B$:

$$A' = A_0 + Rx, g'' : A_1 \to E, a_0 + rx \to g'(a_0) + rh'(1)$$

于是 A' 将真包含 A_0 且使得图表交换, 这与假定 A_0 的极大属性矛盾, 于是只能 $A_0 = B$, 这便断言了交换图

$$\begin{tikzcd}
& E & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[ul, dashed, "g'"]
\end{tikzcd}$$

□

定义 14 Abel 群 D 被称为是可除的, 若对非零的 $n \in \mathbb{N}$ 与 $y \in D$, 总有 x 使得 $nx = y$.

命题 43 Abel 群 D 可除当且仅当其是入射 $\mathbb{Z}$ 模.

Proof. 对正项的命题查看如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
0 \arrow[r] & \langle n \rangle \arrow[u, "n \to y"] \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{Z} \arrow[ul, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

于是 $nh(1) = h(n) = y$, 则 D 是可除的.

相反的, 取 $\mathbb{Z}$ 的一个理想 $\langle n \rangle$, 对应地有 $\mathbb{Z}$ 模同态 $f : \langle n \rangle \to D$, 由于 D 是可除的, 总有 x 使得 $nx = f(n)$, 定义 $f' : \mathbb{Z} \to D, n \to nx$, 这便是对 f 的扩展, 从定理 42, 便得命题的成立. $\square$

命题 44 Abel 群 G 总可嵌入可除的 Abel 群中.

Proof. 改写 G 为 $G = F/S$, 其中 F 为自由 Abel 群且 $S \lhd F \simeq \bigoplus \mathbb{Z}$, 进而有下面的式子:

$$F = \bigoplus \mathbb{Z}/S \subset \bigoplus \mathbb{Q}/S$$

由于 $\mathbb{Q}$ 是可除的, 进而不难得知 $\bigoplus \mathbb{Q}/S$ 是可除的, 从 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Q}$ 中诱导出相应的嵌入即可完成证明. $\square$

命题 45 若 D 是可除的 Abel 群, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ 是入射 R 模.

Proof. 我们来尝试证明 $\mathrm{Hom}(, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D))$ 是正合的, 这只需我们来证其是右正合的, 为此取正合列

$$o \to A \xrightarrow{\alpha} B$$

下面来证明

$$\mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \to 0$$

已经证明了 D 作为 $\mathbb{Z}$ 模是入射的, 于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D) \to 0$$

正合.

从相伴同构定理, 又有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, D) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B \otimes R, D) \simeq \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D))$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D) \simeq \mathrm{Hom}(A \otimes R, D) \simeq \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D))$$

于是所需的正合列成立. $\square$

定理 46 模 M 可嵌入一个入射模中.

Proof. 将 M 作为 Abel 群嵌入可除的 Abel 群 D 中, 得到正合列 $0 \to M \xrightarrow{\alpha} D$.

为 $m \in M$ 定义 $f_m : R \to M, r \to rm$, 则 $\varphi : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D), m \to \alpha \circ f_m$ 是单的 R 模同态. $\square$

定义 15 使得函子 $B\otimes_R$ 正合的模被称为平坦模.

命题 47 $\bigoplus\limits_{i\in I} B_i$ 平坦当且仅当 B_i 平坦.

Proof. 注意如下的交换图即可:

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus\limits_{i\in I} B_i\right)\otimes A' \arrow[r, "(\mathrm{id}_{i\in I})\otimes f"] & \left(\bigoplus\limits_{i\in I} B_i\right)\otimes A \arrow[r] & 0 \\
\bigoplus\limits_{i\in I} B_i\otimes A' \arrow[u] \arrow[r, "(\mathrm{id}_{i\in I}\otimes f)"] & \bigoplus\limits_{i\in I} B_i\otimes A \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
B_i\otimes A' \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{id}_i\otimes f"] & B_i\otimes A \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0 \\
A' \arrow[u, no head] \arrow[r, "f"] & A \arrow[u, no head] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

推论 48 据命题 9, $R\otimes_R M\simeq M$, 于是 R 作为 R 模是平坦的, 进而自由模 $F\simeq\bigoplus R$ 是平坦的, 又投射模总是自由模的直和分量, 于是, 投射模总是平坦的.

正向极限与反向极限

定义 16 取定范畴 A 中一组对象 $\{A_{i\in I}\}$, 其中 I 为一有序集, 且对着 $i\leq j$ 能够指定 $\varphi_j^i: A_i\to A_j$, 使得

(i) $\varphi_i^i=\mathrm{id}_{A_i}$.

(ii) 针对 $i\leq j\leq k$, 总有下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\varphi_k^i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"'] & A_k \\
A_j \arrow[ur, "\varphi_k^j"'] &
\end{tikzcd}$$

这样的对象族与映射被称为正向系统.

例 7 取 $A_i\equiv A$, $\varphi_i^j=\mathrm{id}_A$, 这是一个常量正向系统, 记作 $|A|$.

取 $I=\{1,2,3\}$, 相应的序关系为 $1<2, 1<3$, 相应的正向系统便是下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \\
A_2 &
\end{tikzcd}$$

取定交换环 R, Q 为其上的商域, Q 上的循环子模具有形式 $\left\langle\dfrac{1}{r}\right\rangle$, 其上具有的一个部分序关系为 $\left\langle\dfrac{1}{r}\right\rangle\subset\left\langle\dfrac{1}{s}\right\rangle$, 相应的便有一个 R-Mod 范畴中的一个正向系统.

取 $A=\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, 则有限和按包含关系生成的系统便是正向系统.

定义 17 取定正向系统 $\{A_i, \varphi_j^i\}$, 若有对象 $\varinjlim A_i$ 与相应的映射族 $\alpha_i : A_i \to \varinjlim A_i$ 使得如下图标总交换:

$$\begin{tikzcd}
 & \varinjlim A_i & \\
A_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[rr, "\varphi_j^i"] & & A_j \arrow[ul, "\alpha_j"']
\end{tikzcd}$$

并具有下图所示的泛性质, 则称其为这系统的正向极限.

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim A_i \arrow[rr, dashed] & & X \\
 & A_j \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[ur, "\chi_j"'] & \\
 & A_i \arrow[uul, "\alpha_i"] \arrow[u, "\varphi_j^i"] \arrow[uur, "\chi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

定理 49 R-Mod 范畴中正向系统的极限存在.

Proof. 取直和 $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, 再取 S 为诸多 $\lambda_j \circ \varphi_j^i(a_i) - \lambda_i(a_i)$ 生成的子模, 定义

$$\varinjlim A_i = \bigoplus_{i\in I} A_i / S$$

相应的映射族为 $\alpha : A_i \to \varinjlim, \alpha_i(a_i) = \lambda_i(a_i) + S$.

于是 $\alpha(a_i) = \lambda_i(a) + S$, $\alpha_j \circ \varphi_j^i = \lambda_j \circ \varphi_j^i(a_i) + S$, 注意到

$$\lambda_i(a) + S = \lambda_i(a) + \lambda_j \circ \varphi_j^i(a_i) - \lambda_i(a_i) + S = \lambda_j \circ \varphi_j^i(a_i) + S$$

于是交换图表成立, 对于泛性质, 考察 a_i 在 X 中的像 $\chi_i(a_i)$, 为使得图表交换, 立即要有

$$\varinjlim A_i \to X, \lambda_i(a_i) + S \to \chi_i(a_i)$$

从上面映射的模同态属性, 唯一性便得确立. □

例 8 查看例 7 的几个正向系统.

常量正向系统的极限为 A, 从下面的交换图一切便是自明的:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dd, dashed, "f"] \\
A \arrow[urr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, "f"'] & A \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

对于第二例中的正向系统, 结合如下的交换图, 注意到一般模同态 f 中分式环中成员 $\dfrac{r}{s}$ 的结果为 $rf\left(\dfrac{1}{s}\right)$ 即可.

$$\begin{tikzcd}
 & & Q \arrow[dd, dashed] \\
\left\langle \dfrac{1}{s} \right\rangle \arrow[urr, "\iota_s"] \arrow[drr, "f_s"'] & \left\langle \dfrac{1}{r} \right\rangle \arrow[l, "\iota_s^r"'] \arrow[ur, "\iota_r"] \arrow[dr, "f_r"'] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

$\left\{\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right\}$ 生成的正向系统的极限与此类似.

定义 18 三点正向系统的极限被称为推出.

定理 50 采取与定理 49 一致的符号体系, 则 $\varinjlim A_i$ 中元素均具有形式 $\lambda_i(a_i)+S$, 且从 $\lambda_i(a_i)+S=0$ 可以导出 $\varphi_j^i(a_i)=0$ 对某个 $j\geq i$ 成立.

Proof. 取 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}(a_{i_k})+S\in\varinjlim A_i$, 取 $j\geq i_k$, 生成 $b=\sum_{k=1}^{n}\varphi_j^i(a_i)$, 进而得到

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}(a_{i_k})-\lambda_j(b)=\sum_{k=1}^{n}[\lambda_{i_k}(a_{i_k})-\lambda_{i_k}\circ\varphi_j^{i_k}(a_i)]\in S$$

于是 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}(a_{i_k})+S=\lambda_j(b)+S$.

剩余命题的证明十分繁琐, 此处略去, 敬请查看原书, 你实在要问我也没办法. □

定义 19 将正向系统定义中的箭头反转即得方向系统的定义, 同理即得反向极限及相应的三点反向系统的拉回.

定理 51 R-Mod 范畴中存在反向极限.

Proof. 对反向系统 $\{A_i,\psi_i^j\}$ 取定下面的直和子组:

$$\varprojlim A_i=\left\{(a_i)\in\prod A_i\,\middle|\,a_i=\psi_i^j(a_j),i\leq j\right\}$$

再定义 $\alpha_i=\pi_i\mid_{\varprojlim A_i}$, 剩余的验证工作与前一致. □

p-adic 环

当 $k\leq m\leq n$ 时, 不难察觉到下面一个交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_{p^m} \arrow[d, "\iota_k^m"] \\
\mathbb{Z}_{p^n} \arrow[ur, "\iota_m^n"] \arrow[r, "\iota_k^n"'] & \mathbb{Z}_{p^k}
\end{tikzcd}$$

于是, 序列

$$\mathbb{Z}_p \xleftarrow{\iota_1^2} \mathbb{Z}_{p^2} \xleftarrow{\iota_2^3} \cdots \xleftarrow{\iota_{n-1}^n} \mathbb{Z}_{p^n} \xleftarrow{\iota_n^{n+1}} \cdots$$

生成了一个反向系统, 其反向极限被称为 p-adic 整数环.

命题 52 p-adic 整数环中元素可逆仅当其不被 p 整除, 非零元素 x 具有唯一表出 $p^n u$.

Proof. 揭示出 x 在该环中的形象后, 一切便是自明的:

$$x=\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k p^k=(x \mod p, x \mod p^2,\cdots)$$

□

其中 n 被称为 x 的 p-adic 赋值, 记作 $v_p(x)$, 定义 $v_p(0)=\infty$, 不难确知下面的几个式子:

$$v_p(xy)=v_p(p)+v_p(y)$$

$$v_p(x+y)\geq \inf(v_p(x),v_p(y))$$

于是若 $xy=0$, 若其均不为 0, 这是第一式所不允许的, 因而 x,y 至少有一个为 0, 这便说明了 p-adic 整数环是整环.

p-adic 整数环生成的分式环被称作 p-adic 数域.

正合列与交换图

命题 53 对于如下的交换图 (第一行正合)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \\
 & E & & &
\end{tikzcd}$$

存在模 P 使其完备成如下的两行正合列:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & P \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Proof. A,B,E 生成一个三点部分序系统, 于是能够导出推出

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[d, "\gamma'"] \\
E \arrow[r, "\alpha'"] & P
\end{tikzcd}$$

其中 $P=A\oplus B/W$, $W=\{(\gamma(a),-\alpha(a))\mid a\in A\}$,

$$\alpha':E\to P,e\to(e,0)+W$$

$$\gamma:B\to P,b\to(0,b)+W$$

进而定义 $\beta':P\to C,(e,b)+W\to\beta(b)$.

α' 的单性与 β 的满性均可通过 α 的单性, β 的满性得到.

从下式即得 $\mathrm{im}\alpha'\subset\mathrm{Ker}\beta'$:

$$e\xrightarrow{\alpha'}(e,0)+W\xrightarrow{\alpha}\beta(0)=0$$

假定 $\beta(b)=0$, 应有 $\alpha(a)=b$, 对 $\beta'[(e,b)+W]=0$, 由于 $(\gamma(a),-\alpha(a))\in W$, 我们作改造

$$(e,b)+W=(e,b)+(\gamma(a),-\alpha(a))+W=(e-\gamma(a),0)+W$$

于是 $\alpha'(e-\gamma(a))=(e-\gamma(a),0)+W=(e,b)+W$, 故而断言 $\mathrm{Ker}\beta'\subset\mathrm{im}\alpha'$.

现在, 所有的正合性得到了验证. $\square$

命题 54 考虑下面行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle t_1} & & \downarrow{\scriptstyle t_2} & & \downarrow{\scriptstyle t_3} & & \downarrow{\scriptstyle t_4} & & \downarrow{\scriptstyle t_5} \\ B_1 & \xrightarrow[h_1]{} & B_2 & \xrightarrow[h_2]{} & B_3 & \xrightarrow[h_3]{} & B_4 & \xrightarrow[h_4]{} & B_5 \end{array}$$

若 t_2, t_4 满, t_5 单, 则 t_3 满; 若 t_2, t_4 单, t_1 满, 则 t_3 单.

Proof. 对于第一种情况, 取定 $b_3 \in B_3$, 由 t_4 满得到 $\exists a_4 \in A_4, t_4(a_4) = h_3(b_3)$, 同时, 由于图标交换与行正合, 确信

$$t_5 \circ f_4(a_4) = h_4 \circ t_4(a_4) = h_4 \circ h_3(a_3) = 0$$

由于 t_5 单, 立即得到了 $f_4(a_4) = 0$, 于是又有 $a_3 \in A_3$ 使得 $f_3(a_3) = a_4$, 再次从图表交换, 将得到

$$h_3 \circ t_3(a_3) = t_4 \circ f_3(a_3) = t_4(a_4) = h_3(b_3)$$

因而 $t_3(a_3) - b_3 \in \mathrm{Ker} h_3 = \mathrm{im} h_2$, 这便说明 $\exists b_2 \in B_2, h_2(b_2) = t_3(a_3) - b_3$, 又因 t_2 满, 进一步回退有 $t(a_2) = b_2$, 于是

$$t_3 \circ f_2(a_2) = h_2 \circ t_2(a_2) = h_2(b_2) = b_3 - t_3(a_3)$$

至此我们藉以下式宣告 t_3 的满性:

$$t_3[f_2(a_2) + a_3] = b_3$$

对于命题的第二部分, 假若 $t_3(a_3) = 0$, 则

$$t_4 \circ f_3(a_3) = h_3 \circ t_3(a_3) = 0$$

考虑到 t_4 单, 于是 $f_3(a_3) = 0$, 进而 $a_3 \in \mathrm{Ker} f_3 = \mathrm{im} f_2$, 这便说明 $\exists a_2 \in A_2$, $f_2(a_2) = a_3$, 从而

$$h_2 \circ t_2(a_2) = t_3 \circ f_2(a_2) = 0$$

于是 $t_2(a_2) \in \mathrm{Ker} h_2 = \mathrm{im} h_1$, 进而得到 $t_2(a_2) = h_1(b_1)$, 再从 t_1 的满性, $\exists a_1 \in A_1$, 使得 $t_1(a_1) = b_1$, 由于图表交换, 得到

$$t_2 \circ f_1(a_1) = h_1 \circ t_1(a_1) = h_1(b_1) = t_2(a_2)$$

又 t_2 是单的, 于是 $a_2 = f_1(a_1)$, 继而正合列从下式宣告了 t_3 单性的成立.

$$a_3 = f_2(a_2) = f_2 \circ f_1(a_1) = 0$$

□

命题 55 如下行正合的交换图将具有唯一的 f 使得图表完备

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' \end{array}$$

类似地也有如下的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proof. 只对第一种情况完成证明, 取 $a \in A$, 则 $p' \circ g \circ i(a) = 0$, 于是 $g \circ i(a) \in \mathrm{Ker}p' = \mathrm{im}i'$, 于是有唯一的 $a' \in A'$ 使得

$$i'(a) = g \circ i(a)$$

于是映射 $f : A \to A', a \to a'$ 便能使得图表交换, 唯一性则是 a' 的唯一性的附加结果. $\square$

引理 56 对如下行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"'] & C \arrow[r, "p'"'] & C'' &
\end{tikzcd}$$

存在同态

$$\partial : \mathrm{Ker}\gamma \to \mathrm{Coker}\alpha, a'' \to i^{-1} \circ \beta \circ p^{-1}(a'') + \mathrm{im}\alpha$$

Proof. 取 $a'' \in \mathrm{Ker}\gamma$ 从 p 满倒退得到 $p(a) = a''$, 即得 $p' \circ \beta(a) = \gamma \circ p(a) = 0$, 这便导出了 $c' \in C'$ 使得

$$i(c') = \beta(a)$$

我们便确立了从 $\mathrm{Ker}\gamma$ 到 C' 的一个对应, 现在, 假若还有 $p(\mathfrak{a}) = a''$, 于是得到 $i(\mathfrak{c}') = \beta(\mathfrak{a})$, 又 $a - \mathfrak{a} \in \mathrm{Ker}p = \mathrm{im}i'$, 于是得到 $a' \in A'$ 使得

$$i'(a') = a - \mathfrak{a} \Rightarrow i \circ \alpha(a') = \beta \circ i(a') = \beta(a - \mathfrak{a}) = i(c - \mathfrak{c})$$

i 是单的, 故而 $c - \mathfrak{c} = \alpha(a') \in \mathrm{im}\alpha$, 这便说明诸多 $p(a) = a''$ 相差的只是 $\mathrm{im}\alpha$ 中的一个元素, 进而我们断言对应 $a'' \to c + \mathrm{im}\alpha$ 是良定义的. $\square$

命题 57 考虑行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"'] & C \arrow[r, "p'"'] & C'' &
\end{tikzcd}$$

则存在正合列

$$\mathrm{Ker}\alpha \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}\beta \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}\alpha \xrightarrow{g'} \mathrm{Coker}\beta \xrightarrow{f'} \mathrm{Coker}\gamma$$

Proof. 补充得到下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Ker}\alpha \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "\alpha'"] & \mathrm{Ker}\beta \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\beta'"] & \mathrm{Ker}\gamma \arrow[d, hook, "\gamma'"] \arrow[dddll, dashed, bend left, "\partial"] & \\
 & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & C \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Coker}\alpha \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\beta \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\gamma \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

第二行的映射均为嵌入, g, f, g', f' 的生成依赖命题 55 给出, 剩下的工作只是对 g, f, ∂, g', f' 正合性的普通验证, 你不想写我也不想写. □

命题 58 在交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

若列正合, 且上 (下) 两行正合, 则最下面 (上面) 的行正合.

Proof. 列正合, 于是 $\mathrm{Coker}\alpha_1 = C', \mathrm{Coker}\alpha_2 = C, \mathrm{Coker}\alpha_3 = C''$, 且 $\mathrm{Ker}\alpha_{1,2,3} = 0$, 于是从命题 57 有正合列

$$0 \to C' \to C \to C''$$

又 $B \to B'$ 满, 则 $C \to C''$ 也满, 进而最后一行是完全正合的.

其他情况与此类似. □

定义 20 取定投射模序列 $\{P_n\}$, 正合列

$$\cdots \to P_n \to \cdots P_0 \to M \to 0$$

被称为 M 的投射分解.

命题 59 考虑如下的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & \\
 & P_1' \arrow[d, "\alpha_1'"] & & P_1'' \arrow[d] & \\
 & P' \arrow[d, "\varepsilon_1"] & & P_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

其中列是投射分解而行正合, 则存在额外模 A 的投射分解使得行列均正合.

Proof. 可归纳证明之, 故而只需对下面的 3×3 形式完成证明即可:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d, "\alpha_1'"] & & K_0'' \arrow[d] & \\
 & P_0' \arrow[d, "\varepsilon_1"] & & P_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

令 $P_0 = P_0' \oplus P_0''$, 则立即能够将交换图补充为:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
 & K_0' \arrow[d, "\alpha_1'"] & & K_0'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "\lambda_0'"'] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi_0''"'] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

抽取部分, 依据 P_0'' 的投射模属性, 不难得到

$$\begin{tikzcd}
 & P_0' \arrow[r, "\lambda_0'"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi_0''"] & P_0'' \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

取 $\varepsilon: P_0 \to A, (x', x'') \to i\circ\varepsilon'(x') + \sigma(x'')$, 即得

$$\begin{tikzcd}
 & P_0' \arrow[r, "\lambda_0'"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi_0''"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & P_0'' \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

至此立即可以断言如下的交换图, 最上一层的正合性由命题 58 保证:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_0' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1'"] & \mathrm{Ker}\varepsilon \arrow[r] \arrow[d, hook] & K_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0' \arrow[r, "\lambda_0'"'] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi_0''"'] \arrow[d, "\varepsilon"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

□

函子 S^{-1}

不难发觉 S^{-1} 构成从 R-Mod 范畴到 $S^{-1}R$-Mod 范畴的一个函子.

定义 21 存在如下同构:

$$f: S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M, \frac{a}{s} \otimes m \to \frac{am}{s}$$

Proof. 不难验证映射 $\left(\frac{a}{s}, m\right) \to \frac{am}{s}$ 的双线性, 于是立即有唯一的 R 同态

$$f: S^{-1}R \otimes M \to S^{-1}M$$

满性质是显然的, 对于单性质, 先来对 $S^{-1}R \otimes M$ 中成员进行一些小小的改写, 简记 $s = \prod_i s_i, t_i = \prod_{j \neq i} s_j$, 于是

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m_i$$

于是 $S^{-1}R \otimes M$ 中元素总有形式 $\frac{1}{s} \otimes m$.

现在假定 $f\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s} = 0$, 于是存在 t 使得 $tm = 0$, 进而

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0$$

单性便已经得到了确定. □

命题 60 存在如下的同构:

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \to S^{-1}(M \times_R N), \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \to \frac{m \otimes n}{st}$$

Proof. 你是个成年人了, 要学会独立. □

命题 61 S^{-1} 是正合函子.

Proof. 坏了, 我还是不想证, 你自己去证吧. □

特殊环上的模

半单环与半单模

定义 22 模 A 被称为是单模, 若其非零且无真子模. 半单模是单模的直和.

命题 62 模 A 半单当且仅当子模均是直和分量.

Proof. A 半单时, 将其分解为单模 S_i 直和如下:

$$A = \bigoplus_{i \in I} S_i$$

取 $J \subset I$, 则 $\bigoplus\limits_{i\in J} S_i$ 被简记为 S_J, 现在, 对子模 B 取定极大的 J, 使得 $S_J \cap B = 0$. 若 $S_i \subset S_j$, 当然很好, 否则, 从 S_J 的极大性, 还能够断言

$$(S_J + S_i) \cap B \neq \varnothing \Rightarrow S_i \cap (B + S_J) \neq \varnothing$$

由于 S_i 单, 只能是 $S_i \cap (B+S_J) = S_i$, 进而我们确信 $S_i \subset B+S_J$, 综上便导出了 $A = S_J \oplus B$.

相反的, 假定 A 的子模均是直和分量. 现在取定 A 的一个子模 B, 对非零的 $b \in B$, 取定极大的模 $C \subset B$ 不包含 C, C 是 A 的直和分量, 于是也是 B 的直和分量, 从而我们还能断言下面的式子出现:

$$B = C \oplus D$$

D 若有真子模 D', 又将得到下面的的加细:

$$B = C \oplus D' \oplus D''$$

现在, 要么 $C \oplus D'$ 不含 b, 要么 $C \oplus D''$ 不含 b, 这都使得 C 的极大性不保, 于是 D 便是单的.

将能够表为单模直和的 A 的子模组为集合, 这集合从前非空, 取定极大元 M, 其若不是 A, 便还有分解 $A = M \oplus N$, 回溯前文结果, 我们能够加细之为

$$A = M \oplus N_0 \oplus N'$$

其中 N' 为单的, 于是 $M \oplus N'$ 又是半单的, 这与 M 的极大属性矛盾, 便只能 $M = A$, 于是 A 是半单的. □

推论 63 取半单模 A 的子模 B, 组成 A 的单模 S 要么与 B 无交, 要么在 B 之中, 于是我们能够将 B 再度分解为单模的直和, 进而 B 是单的.

取半单模 A 的商模 C, C 要被表为 $C = A/B$, 其中 B 是 A 的子模, 这使得 C 同构于 A 的某个子模, 进而是半单的.

定义 23 环 R 作为 R 模若是半单的, 则为半单环.

Noether 环上的模

对于模 M, 依照"$\subset$"建立序关系, 同样能够定义升降链条件, 对于模链, 我们同样有类似于 Jordan-Hödel 定理的结论.

命题 64 模 M 具有合成链当且仅当其满足两个链条件.

Proof. 当模 M 具有合成链时, 其子模长度均是有限的, 自然满足双重的降链条件, 当模满足两个链条件时, 取 M 的极大子模 M_1, 则 M/M_1 将是单的, 再取 M_1 的极大子模 M_2, 即得 M_1/M_2 单, 重复之, 我们得到不可加细的模序列

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$$

然而又有降链条件成立, 于是其有限, 进而组成 M 的合成链. □

命题 65 取定正合列

$$0 \xrightarrow{M'} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

则 M 具有升降链条件与 M', M'' 具有升降链条件等价.

Proof. 只是对链取个 β 或 α^{-1} 的事情. □

命题 66 对域 K 上的向量空间, 如下命题等价:

(i) 有限维度

(ii) 模链长度有限

(iii) 升链条件

(iv) 降链条件

定理 67 Artin 环都是 Noether 环

Proof. Artin 环 R 中素理想与极大理想一致, 且数量有限, 取定 N 为其诣零根, 则 $0 = N^k = \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k \supset \prod_{i=1}^{n} M^k$, 于是

$$\prod_{i=1}^{n} M_i^k = 0$$

其中 M_i 是诸多极大理想, 进而考虑下面的理想链, 得到

$$R \supset M_1 \supset M_1 M_2 \supset \cdots \supset \prod_{l=1}^{nk} M_l = 0$$

后面的式子中允许 M_l 出现重复. 现在, 因子 $\prod_{k=1}^{i-1} M_k / \prod_{k=1}^{i} M_k$ 便是域 $K = R/M_i$ 上的向量空间, 由此其上升降链条件是等价的, 重复应用命题 65, 便知道全体因子的升降链条件与 R 的升降链条件等价, 即得 R 上的升链条件成立, 继而 R 是 Noether 环. □