群与代数表示笔记
特征标

EndlieDownAHell

2023 年 10 月 23 日

概览

这一章讲了有限群的特征标理论, 值得注意的一点是, 复特征标本身作为群上类函数的一组基, 也可独立于表示之外看待.

§2.1 给出了特征标的基本概念以及一些基本性质, 这些基本性质实际给出了有关联的群 (如子群, 商群) 之间的特征标的一些基本关系, 以及特征标值具有的一些特殊的数论与分析意义上的性质.

§2.2, 2.3 给出了特征标作为类函数的基本描述: 类函数作成的空间的一组正交基, 借助正交关系, 我们便能对表示的既约分解中的既约表示的重数进行进一步定量的分析, 其中较为重要的结果便是同一群的表示与特征标的完全对应以及既约特征标/表示的内积判定.

§2.4 是借助一系列特征标性质及有限群技巧达成的特征标计算实例, §2.5 将特征标表与群的一些重要指标 (如子群, 换位子群以及中心) 联系起来. §2.6,§2.7 两节则是利用代数整数的技巧后的特征标理论的应用, 中心结果便是 Burnside 可解性定理.

逐节评注

§2.1 特征标的基本概念

这一节给出了特征标的定义, 重点导出了特征标的一些计算方法与基本性质, 没有太多可以说的.

我们来处理一下习题.

问题 1 取 G' 为 G 的换位子群, 证明

$$\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G/G') = \{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G) \mid \chi(1) = 1\}$$

Proof. 考虑到 $\chi(1) = 1$ 当且仅当这表示是一次的, 于是我们实际需要证明如下两个基本事实:

(i) G/G' 的一次表示总可视为 G 上的一个一次表示, 且相应的特征标一致.

注意到关系 $G \to G/G' \to \mathbb{C}^*$ 即可, 对于特征标, 从 $\rho(g)(e) = \rho(gG')(e)$ 即知其一致性.

(ii) G 上的一次表示与 G/G' 上的一个一次表示相联系, 且相应的特征标一致.

对于 G 上的一次表示, 由于总成立 $gv = \lambda_g v$, 则先天成立等式

$$\rho(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = \rho(g_1)\rho(g_1^{-1})\rho(g_2)\rho(g_2^{-1}) = \mathrm{id}$$

则知道 $\mathrm{Ker}\rho \supset G'$ 的成立, 此时定义 $\rho_{G/G'}(gG') = \rho_G(g)$ 并不导致矛盾, 相应的特征标也一致.

□

问题 2 取 $\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}$, 当 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ 时, 证明 $\overline{\chi} \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$.

Proof. 只需找到表示 $\rho \in \overline{\mathrm{Irr}}(G)$ 以 $\overline{\chi}$ 为特征标即可, 为此我们取 $\overline{\rho}(g) = \overline{\rho(g)}$, 其成表示是等式 $\overline{AB} = \overline{AB}$ 成立的直接结果, 既约性是等式 $\overline{A}\xi = A\overline{\xi}$ 成立的结果. □

§2.2 特征标的正交关系

借助两个改写表达用的引理, 本节证明了既约特征标的正交属性, 并借此给出了既约分解重数的一个计算公式, 这式子进一步阐明了在 $\mathrm{char}F = 0$ 的域上表示与其特征标的唯一对应性质, 以及一个表示的既约属性的验证方法.

Explanation 1 我们对定理 2.5 做如下几式的补充:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{End}_G(V)}(g) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\bigoplus_{i=1}^n V_{\mathrm{id}}}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k=1}^{n}\chi_{V_{\mathrm{id}}}(g)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} n\deg V_{\mathrm{id}} = n\cdot 1\end{aligned}$$

其中 $n = \dim_F \mathrm{End}_G(V)$.

§2.3 分裂域上既约常表示的个数

这一节通过两个引理逐步先将任意的类函数 f 与特征标 χ 联系了起来, 进而得到了既约特征标是 F-向量空间 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的一组基的结论, 由于 $\mathrm{cf}_F(G)$ 本身还具有一个由共轭类导出的自然的基, 这便将既约特征标与共轭类数这一重要的群指标联系了起来.

得到这个重要结果后本节进行了一些应用, 主要的内容包括第二正交关系, 通过 Abel 子群的指数估计群 G 的既约复表示的维数.

本节以群 $G_1 \times G_2$ 既约特征标的结构为结, 其可分解为 G_1, G_2 既约特征标的事实将有利于我们求高阶群的特征标.

Explanation 2 防止有人和我一样线性代数学得一坨, 看到 $XA\overline{X}^{\mathrm{T}} = |G|I_s$ 还要愣一愣, 提醒下这意味着 $XA = \left(\frac{1}{|G|}\overline{X}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

对于 §2.3.6 的例, 当 G 的轨道数, 或类数为 $|G|$ 时, 即知 $ghg^{-1} = h$ 恒成立, 进而 G 是交换群.

§2.4 特征标表计算实例

这一节主要就是给出了一些计算有限群特征标的技巧.

Explanation 3 这里将计算群特征标的几个技巧总结如下:

(i) 利用正规子群得到一部分既约特征标.

取定 $H \lhd G$, 若 G/H 的特征标已知, 依据同态

$$G \to G/H \to \mathrm{GL}(V)$$

作表示提升, 即得 G 的一组表示, 当 G/H 的表示既约时, G 的提升表示自然也必须既约, 进而便能写出 G 的一些特征标.

例如, 由于 $S_2 \simeq S_3/C_3$, 而 S_2 的特征标如左, 考虑到在同态 $S_3 \to S_3/C_3$ 中 $xC_3 = C_3$, 于是扩展得到了 S_3 的如右的两个既约特征标.

	e	y
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

	e	y	x
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3			

(ii) 利用正交关系及维数关系得到其他列.

由于 n 维表示中总成立 $\rho(e) = n$, 则对于未知行中的第一列元素, 有时可以通过计算各个表示间的维数关系确定.

例如, 对于上表中的第三个未知的表示, 由于

$$\chi_1(e)^2 + \chi_2(e)^2 + \chi_3(e)^2 = 6$$

解得 $\chi_3(e) = 2$, 再从行正交关系有

$$1 \cdot \chi_3(e) \cdot \chi_1(e) + 2\chi_3(x) \cdot \chi_1(x^2) + 3 \cdot \chi_3(y) \cdot \chi_1(y) = 0$$

$$1 \cdot \chi_3(e) \cdot \chi_2(e) + 2\chi_3(x) \cdot \chi_2(x^2) + 3 \cdot \chi_3(y) \cdot \chi_2(y) = 0$$

$$1 \cdot \chi_3(e) \cdot \chi_3(e) + 2\chi_3(x) \cdot \chi_3(x^2) + 3 \cdot \chi_3(y) \cdot \chi_3(y) = |S_3|$$

也即 $\begin{cases} 2 + 2\chi_3(x) + 3\chi_3(y) = 0 \\ 2 + 2\chi_3(x) - 3\chi_(y) = 0 \\ 4 + 2\chi_3(x)^2 + \chi_3^2(y) = 6 \end{cases}$, 解出 $\chi_3(x) = -1, \chi_3(y) = 0$, 至此, 特征标扩充为

	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

(iii) 特征标其他性质的使用, 如既约特征标与线性特征标的乘积依旧是既约特征标, 对于 $g^m = 1$ 的元素, $\chi(g)$ 为 $\deg \rho$ 个 m 次单位根的和.

由于本人是组合学苦手, 有限群技巧这块学得稀烂, 所以这一节就此打住, 以后看 Serre 的有限群导引什么的再说.

§2.5 从特征标读群的结构

这一节主要是通过各式特征标的核表出了群的一些重要的子对象, 首当其冲的便是被表为既约特征标核之交的正规子群, 借此我们得到了表出群的中心, 以及判定群的可解性的特征标方法. 关于 G 是单群当且仅当 $\mathrm{Ker}\chi=\{1\}$ 的成立, 缺失的一个条件了 $\mathrm{Ker}\chi$ 总是 G 的正规子群, 这是习题中的结果, 我们予补证之:

命题 1 取定群 G 的一个 k 维既约特征标 χ, 则 $\mathrm{Ker}\chi\lhd G$.

Proof. 我们先来证明 $\mathrm{Ker}\chi$ 构成子群, 由于 $g\in G$ 均有 $g^m=1$ 成立, 于是 g 的特征标必然是 m 次单位根的和, 于是

$$\chi(g)=|\omega_1+\cdots+\omega_k|\le|\omega_1|+\cdots+|\omega_k|\le\chi(1)$$

等号成立仅当 $\omega_1=\cdots=\omega_k$, 此时 $\rho(g)=\chi\cdot\mathrm{id}_V,\chi(g)=k\omega$, 于是故

$$\chi(g)=\chi(1)\Leftrightarrow\rho(g)=\rho(1)$$

此时正规子群属性是不难验证的. □

Expansion 1 对于 §2.5.3 的内容, 我们来看如下一个例子:

例 1 考虑 S_3 的正规子群 C_3 生成的正规子群 $C_2\simeq S_3/C_3$, 对于前者的特征标表, 有 则

	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

满足 $\mathrm{Ker}\chi\supset C_3$ 的既约特征标是 χ_1,χ_2, 这便是 S_3/C_3 的两个特征标. 不难得到 S_3/C_3 的成员为 $\{C_3,yC_3\}$, 另一方面, 对于 e,y, $\chi_2(e)\neq\chi_2(y)$, 于是 $\{C_3\},\{yC_3\}$ 各自成为一个共轭类, 从而我们得到 $C_2=S_3/C_3$ 的如下特征标表:

	C_3	yC_3
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

Explanation 4 §2.5.5 的论述实际为我们提供了一个考虑一般抽象群的中心的视角, 更进一步言之, 在建立同态 $G\to\mathrm{GL}(V)$ 后, "与 G 中全体成员交换的元素" 的议题立即变为了 "与 $\mathrm{GL}_n(F)$ 中全体方阵交换的矩阵", 后者的结果是经典的, 也即是 kE_n.

如此便不难解释为何将特征标 χ 的中心定义为 $\{g\in G\mid\chi(g)=\omega\chi(1)\}$.

Expansion 2 我们来处理一下习题 1(ii).

命题 2 取 G' 为 G 的换位子群, 则 G 的一维表示个数为 $[G:G']$.

Proof. 记一维表示为 ρ, 相应的特征标为 χ, 自然 $\rho(g)$ 彼此总是交换的, 从而

$$G/\mathrm{Ker}\chi\simeq\mathrm{im}\rho$$

交换, 则 χ 为一维特征标当且仅当 $\mathrm{Ker}\chi\supset G'$, 此时即得 χ 的个数为 $[G:G']$. □

§2.6 整性定理与既约复表示的维数,§2.7 Burside 可解性定理

§2.6 小节的中心结论为定理 6.8, 也即既约复表述的维数整除 $[G : Z(G)]$, 其中定理 6.6 作为重要引理存在, 代数整数发挥的主要作用是将多为代数数的特征标相关的指标与整数联系了起来, 具体联系手段则是通过定理“有理代数整数均为整数”实现.

§2.7 则是对 §2.6 中结果的一个较大的应用.

Expansion 3 关引理 6.3 的证明, 实际上 Abel 群 (加法群) 都是一个自然的 $\mathbb{Z}$-模[1], 从而 α 为代数整数的充要条件也可改述为存在一个包含 α 的有限生成子模.

这子模实际是 $\mathbb{Z}[x]/\langle f(x)\rangle$ 的结果, 其中 f 是 α 的极小多项式.

Explanation 5 关于 Burnside 可解性定理的证明思路我们概述如下:

$p^a q^b$ 阶群 G 的研究可以其 Sylow p-群为自然的突破口, 从中我们不难得到 G 中一个阶为 q^t 的非平凡的共轭类.

这共轭类只有一元时, 其便在 $Z(G)$ 中, 从其非平凡性, $Z(G)$ 也非平凡, 则 $G/Z(G)$ 从归纳假设已经可解, 进而 G 可解.

当这共轭类有多个元时, 依据引理 7.3 能够取得与 $Z(G)$ 具有类似的性质的 G 的子群 N.

[1] 对于都开始学表示论了还不知道什么是模的小可怜, 建议将其理解为整系数的线性空间.