群与代数表示笔记
诱导表示

EndlieDownAHell

2023 年 12 月 10 日

概览

这一部分内容的一个核心是 Res 和 Ind 两个函子的伴随, 这是群表示独有的理论, 首先便能使得我们将子群的概念与表示更加紧密地结合起来.

§4.1 采用张量的语言定义了诱导表示, 这是代数表示论对群表示的慧启, 重点值得注意的是其利用陪集导出的简单的结构, 这实际也是诱导表示的古典定义路径.

§4.2 给出了两个函子之间的对偶性, 并将这结论移植到了群特征标与类函数上, §4.3,§4.4 是其简单的应用.

Frobenius 群是一类较为特殊的群, 由于构造 Frobenius 补时需要用到诸多诱导表示的技巧, 本章也顺带介绍了 Frobenius 群的一些理论.

逐节评注

§4.1 基本概念与性质

诱导表示的另一个导出方法是讨论陪集上自然的 G-作用, 这里采用的是张量积定义 $FG \otimes_{FH} W$, 只能说"你是龙, 也好".

总之诱导表示所具有的优良且乏善可陈的性质就是如下的表出

$$W^G = \bigoplus_{i=1}^{[G:H]} g_i W$$

这一节之后顺带给出了诱导表示特征标的计算, 感兴趣的小朋友可以看看系列笔记《带 DLC 的抽象代数》的《群论——反顾》最后一小节.

Expansion 1 我们来处理一下习题 1.

命题 1 子群 $H < G$ 诱导出的表示 W^G 在 H 上的限制具有与 W 同构的子表示.

Proof. 考虑模 $FH \otimes_{FH} W$ 在 H 上的限制即可. □

命题 2 取 $H \lhd G$, 则 W^G 的子模 $g_i(FH) \otimes_{FH} W$ 是 FH-模.

Proof. 验证其对 FH 乘法封闭即可, 进一步这只需验证其对 H 乘法封闭, 注意到 $Hg_i = g_iH$, 于是

$$h\left(g_i \sum_{h\in H} k_h h\right) \in Hg_i(FH) = g_iH(FH) = g_i(FH)$$

则 FH-模确实成立. □

命题 3 若 FG-模 V 有直和分解 $V = \bigoplus_{k=1}^{s} W_i$ 且 G 在 $\{W_s\}$ 上可迁, 取定

$$H = \{g \in G \mid gW_i = W_i\}$$

则 V 是 FH-模 W_i 的诱导表示, 且 $s = [G : H]$.

Proof. 我们欲证明 $V \simeq FG \otimes_{FH} W_i$, 后者也即

$$\bigotimes_{\mathrm{j}=1}^{[G:H]} g_{\mathrm{j}} W_i, g_{\mathrm{j}}H \neq g_{\mathrm{i}}H$$

现在考虑 G 对 W_i 的作用, 已经说明了 $\forall h \in G, hW_i = W_i$, 则实际的全部结果为

$$g_1W_i, \cdots, g_{\mathrm{j}}W_i, \cdots, g_{[G:H]}W_i$$

从可迁性, 它们便分别是 $W_1, \cdots, W_s$, 所需的所有性质其实已经证完. □

§4.2 模与类函数的 Frobenius 互反律[1]

利用相伴同构定理快捷地导出了 Ind 函子和 Res 函子的相伴同构, 相应的结论很快又转移到了特征标与类函数上.

Explanation 1 我们来证明定理 2.1 下一段论述中所用到的结论, 这证明直接参考了 Serre 有限群线性表示中的提供的思路, 找了两本中文教材都无果, 不得不说你大爷还是你大爷.

命题 4

$$\dim_F \mathrm{Hom}_G(U, W) = (\chi_U, \chi_W)$$

Proof. 假定 U, W 的直和分解为

$$U = \bigoplus_{i=1}^{s} n_k V_k, W = \bigoplus_{j=1}^{t} m_k V_k$$

进而

$$\begin{aligned}\dim_F \mathrm{Hom}_{FG}(U, W) &= \sum_{i,j} n_i m_j \mathrm{Hom}_{FG}(V_i, V_j) \\ &= \sum_{i,j} n_i m_j (\chi_i, \chi_j) \\ &= \sum_{i,j} (n_i\chi_i, m_j\chi_j) = (\chi_U, \chi_V)\end{aligned}$$

□

[1] 二次互访律: 互联网对喷结束后, 当时双方往往还会再互相家访空间查成分一次.(确信)

Expansion 2 关于习题, 我们只对 3 进行一点说明, 实际可以利用诱导表示唯一性, 或说其泛性质完成证明, 此处具体而言则是, ξ_H 的诱导表示必然是 ξ, 实际上, 对于群代数 $FG, FH(H < G)$, 不难构作 FG-模 W 在 FH 上的限制 $\mathrm{Res}_H(W)$, 或 W_H, 这是一个 FH-模, 则我们显然得到了 FG-Mod 到 FH-Mod 的一个协变函子.

命题 5 对群 $H < G$, 取定 N 为 FH-模, 则存在与 N 相称的 FG-模 $\mathrm{Ind}_G N$ 以及映射 $u : N \to \mathrm{Ind}_G(N)$ 使得如下交换图对任意的 FG-模 M 成立:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathrm{Res}_H[\mathrm{Ind}_G(H)] \arrow[dl, dashed] \\ \mathrm{Res}_H(M) & \end{tikzcd}$$

Proof. 唯一映射的存在性只需注意构造

$$\varphi : \mathrm{Res}_H[\mathrm{Ind}_G(N)] \to \mathrm{Res}_H(M), \left(\sum k_g g\right) \otimes n \to \left(\sum k_g g\right) \eta(n)$$

对于唯一性, 考虑新的 $\tilde{\varphi}$ 使得图表交换, 则

$$\tilde{\varphi}(1 \otimes n) = \tilde{\varphi}[u(n)] = \eta n = \varphi(1 \otimes n)$$

从中立刻由线性性质得到 $\tilde{\varphi}$ 与 φ 的全同. $\square$

§4.3 Mackey 的子群定理, §4.4 诱导表示既约判定

Mackey 的子群定理对诱导表示进行了分解, 进而给出了关于诱导表示既约性的 Mackey 既约性法则, 这两节除了两个基本的定理之外都是后文的准备性工作, 没太多可说的.

§4.6 Frobenius 群

Frobenius 群具有群作用意义上的良好性质, 本节首先通过 Frobeniu 补的存在性定义了 Frobenius 群, 而后给出了 Frobenius 核的存在性, 并从置换的角度给出了这定义的重述, 本节以 Frobenius 群的特殊性为结.

Explanation 2 我们从群作用角度给出 Frobenius 群的一个解释, 对于 Frobeniu 群 G 的补 H, 我们知道其与其诸多共轭类是除开 $\{0\}$ 外无交的, 其轨道 ${}^{x_0}H, {}^{x_1}H, \cdots, {}^{x_n}H$ 的成员同样是 G 的一个 Frobenius 补, 于是我们有如下一个谱系

$$\begin{bmatrix} {}^{x_0}({}^{x_0}H) & \cdots & {}^{x_0}({}^{x_n}H) \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{x_n}({}^{x_0}H) & \cdots & {}^{x_n}({}^{x_n}H) \end{bmatrix}$$

这是一个置换矩阵.

不难证明 $x_0, \cdots, x_n$ 构成一个群, 其实际由等价关系 ${}^{x_1}H = {}^{y}H$ 商成, 且对轨道

$${}^{x_0}H, {}^{x_1}H, \cdots, {}^{x_n}H$$

具有自然的群作用, 不妨就取 H 作为被研究的轨道成员, 再次可作出 $x_1, \cdots, x_n$ 在 $H - \{0\}$ 上的作用情况

$$\begin{bmatrix} {}^{x_1}h_1 & \cdots & {}^{x_n}h_1 \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{x_1}h_m & \cdots & {}^{x_n}h_m \end{bmatrix}$$

这矩阵的列便是诸多 ${}^{x_i}H-\{0\}$, 向上述矩阵追加一个共轭作用 h, 则矩阵的行将发生置换, 变为

$$\begin{bmatrix} {}^{x_1}({}^{h}h_1) & \cdots & {}^{x_n}({}^{h}h_1) \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{x_1}({}^{h}h_m) & \cdots & {}^{x_n}({}^{h}h_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{x_1h}(h_1) & \cdots & {}^{x_nh}(h_1) \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{x_1h}(h_m) & \cdots & {}^{x_nh}(h_m) \end{bmatrix}$$

诸多 ${}^{x_i}H-\{0\}$ 从定义已经穷尽包括 x_ih 在内的 G 成员对 H 的共轭作用结果, 于是新矩阵至多是前一矩阵的列置换, 不难期盼并验证其实是某个不同的 ${}^{x_i}H$ 的类似作用图谱总而言之, H 现在对群 $\{x_n\}$ 也有了置换作用.

现在 H 与 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 有了一个相互之间的作用, 由于 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 对 H 的作用是几乎自由[1]的, 相应的 H 对 $\{x_0,\cdots,x_n\}$ 的作用也是几乎自由的, 假若重新定义 x_ih 为 ${}^{x_i}h$, 其余运算规则不变, 新群 $G*$ 与群 G 起码是元素一致的, 假如能找到 G 子群 $N=\{x_1^*,\cdots,x_n^*\}$ 使得 ${}^{x_i}h=x_1^*h$, 我们便为 H 找到了核.

Expansion 3 我们给出 Frobenius 群的一个例子, 考虑域 F 上仿射变换 $x\to ax+b$ 构成的群 G, 这是一个 Frobenius 群, 以 $x\to ax$ 为 Foubenius 补.

[1]除开 0 外是自由的