群与代数表示笔记
群表示的基本概念

EndlieDownAHell

2023 年 9 月 25 日

概览

这一章的主要结果是给出了群表示的定义以及一个基本的结果: 有限群常表示的半单属性, 以及相应的既约分解的唯一性和既约表示的有限性.

具体而言, §1.1,§1.2,§1.3 主要讨论了群表示论的对象, 群的有限维线性表示以及其通过多重线性代数的导出.

§1.4 定义了既约性与半单性两种性质, 并进行了一些简单的探讨, 最后, §1.5, 划分出了一大类可以既约分解的表示, 并在 §1.6 中论述了包括唯一性在内的基本结果.

逐节评注

§1.1 定义与例子

就是给出了群表示的线性群同态定义和 G-模定义, 顺带给出了几个较为典型的例子.

Expansion 1 我们来处理一下习题 3,4,5.

问题 1 写出 $\mathfrak{S}_3$ 正则表示的矩阵表达.

Proof. $\mathfrak{S}_3 = \langle x, y \mid x^2 = e, y^3 = e, xy = yx^2 \rangle$, 取基向量为 (e, x, x^2, y, xy, x^2y) 于是我们有如下基本的式子:

$$\rho_{\mathrm{Reg}}(x) = \begin{bmatrix} L & O \\ O & L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \rho_{\mathrm{Reg}}(y) = \begin{bmatrix} O & E \\ E & O \end{bmatrix}$$

其中 $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 剩余的成员的矩阵依此即可写出. □

问题 2 取定 $H \lhd G$, 则 G/H 为自然的 G-集, 求其上置换表示的核.

Proof. 相应的群作用为 $g(g_0H) = gg_0H$, 显然 $\mathrm{Ker}\rho = H$. □

§1.2 子表示, 商表示与表示同态

表示作为依托于线性空间的代数结构, 自然能够导出相应的子结构与商结构, 这一节的主要内容就是将线性空间理论上的结论进行了迁移, 值得注意的是 $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ 标准表示结构.

Explanation 1 我们来对引理 2.4 的一些部分进行证明.

命题 1 取定表示同态 $f: V_1 \to V_2$, 则有

(i) $\mathrm{im}f \simeq V_1/\mathrm{Ker}f$

(ii) 另取表示同态 $g: V_1 \to V_3$, 满足 $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}g$, 则存在唯一 G 模映射 $h: \mathrm{im}f \to V_3$ 使得 $g = h \circ f$.

Proof. 对于 (i), 我们构作表示同构为 $v_1 + \mathrm{Ker}f \to f(v_1)$, 其良定义性与线性只是线性代数的普通结果, 现在还需验证的是对 g 的线性, 为此我们有

$$f(gv_1 + \mathrm{Ker}f) = f(gv_1) = gf(v_1)$$

于是表示同构存在.

对于 (ii), 直接将 $f(v_1)$ 送往 $g(v_1)$, 对于良定义性, 若 $f(v_1) = f(v_2)$, 从 $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}g$, 即得 $g(v_1) = g(v_2)$, 对于唯一性, 将问题转移到一组基上即可, 现在验证其对 $\mathfrak{g} \in G$ 的线性, 为此有

$$h[\mathfrak{g}f(v_1)] = h[f(\mathfrak{g}v_1)] = g(\mathfrak{g}v_1) = \mathfrak{g}g(v_1) = \mathfrak{g}h[f(v_1)]$$

□

§1.3 表示的常用构造法

这一节就是说明了如何将表示转移到线性空间固有的运算上 (直和, 对偶, 张量积等), §1.3.3 额外介绍了张量积的构造过程, 不过不如看一般的多重线代教材.

Explanation 2 我们来验证 §1.3.3 中引理所给予的映射 φ 为 G-模单射.

命题 2 如下映射为 G-模单射:

$$\varphi: V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_F(V, W), f \otimes w \to (v \to f(v)w)$$

Proof. 假定如下的映射是全同的:

$$v \to f_1(v)w_1, v \to f_2(v)w_2$$

于是知道 $f_1(v)w_1 \equiv f_2(v)w_2$, 则至少 $w_1 = k_1 w_0, w_2 = k_2 w_0$, 如此带入之, 得到关系

$$\frac{f_1(v)}{f_2(v)} = \frac{k_2}{k_1}$$

换言之我们有关系 $f_1 = kf_2, w_2 = kw_1$, 这立即导出了 $f_1 \otimes w_1 = f_2 \otimes w_2$, 于是单射成立.

对于 G-模映射的成立, 注意到

$$\varphi[g(f \otimes w)] = \varphi(gf \otimes gw) = \{v \to f(g^{-1}v)gw\}$$

后者显然为 $g\varphi(f \otimes w) = \{v \to g[f(g^{-1}v)w]\}$, 于是 G-模映射成立. □

对于 §1.3.4 中的的引理, 我们仅指明 G 的表示 $\rho, \mathrm{Ker}\rho \supset N$ 与 G/N 上表示的对应通过投射 $G/H \to G/\mathrm{Ker}\rho$ 完成.

Expansion 2 我们来处理一下习题 1, 剩下的几个习题实际纯纯抽象代数题.

问题 3 *求 $\mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$ 诱导的置换表示与 $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_3}$ 诱导的置换表示的张量积.*

Proof. $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$ 在自身的置换表示写为矩阵形式为

$$\rho_{\mathfrak{S}_2}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_{\mathfrak{S}_2}(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是诱导出的相应置换表示为表示为

$$\pi\rho_{\mathfrak{S}_2}(e, x, x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pi\rho_{\mathfrak{S}_2}(y, xy, x^2y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_3}$ 诱导的置换表示与 $\mathfrak{S}_3$ 本身的置换表示一致, 对其矩阵作 Keronecker 积即得相应表示的张量积. □

§1.4 既约表示与半单表示

kaishu 这一节所描述的既约表示将扮演着素数的角色, §1.4.3 小节给出了既约性的几个等价表述, 另外的, Schur 引理是对既约表示的性质的较好刻画, 值得掌握.

Explanation 3 对于 §1.4.1 引理的证明, 注意思考其中既约性的狡猾应用.
我们来证明 §11.4.2 小节的例 1(i)(iii).

命题 3 *表示 V 既约当且仅当表示 ${}^{\rho}V$ 既约.*

假若 ${}^{\rho}V$ 不既约, 取定其非零真子表示, 将 g^{-1} 作用其上, 我们即刻获得 V 的一个非零真子表示, 则 V 也是不既约的, 相同的方法我们也能说明 V 不既约时 ${}^{g}V$ 不既约, 于是命题成立.

对于 §1.4.2 例 2 的构造, 重点在于如下方阵对应的多项式的既约属性:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Expansion 3 我们来处理一下习题 1, 4, 5

命题 4 *半单表示的子表示与商表示都是半单的.*

Proof. 取定半单表示 V 具有形式 $V = \bigoplus_{k=1}^{n} V_k$, 再取其子表示 $W \subset V$, 则 $W \cap V_k$ 要么为空, 要么为 V_k, 如此遍历之, 即得 $W = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{k_i}$.

取定半单表示的商表示 V/W, 由于 V 既约, W 将有补子表示 $W^{\perp}$, 进而立即成立 $V/W \simeq W^{\perp}$, 后者从前半单, 于是 V/W 也是半单的. □

命题 5 有限群的有限维实表示 (V,ρ) 必然是正交的.

Proof. 取定 V 上的标准内积 $(\ ,\ )$, 构造

$$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gv_1, gv_2)$$

这便是所需的. □

命题 6 证明 (V,ρ) 既约当且仅当 (V^*,ρ^*) 既约.

Proof. rho 若不既约, 其将有矩阵表示 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & D \end{bmatrix}$ 进而 ρ^* 作为其转置逆同样具有类似的形式, 则是不既约的, 类似的方法可以论证反向的命题, 于是两者的既约属性等价. □

§1.5 Maschke 定理,§1.6 表示的既约分解

这两节的主线十分清晰, Maschke 定理说明了对常表示进行完全既约分解的可能性, §116.1 的定理则说明了这分解的唯一性, 特殊的, §1.6.2 则将这些既约表示揽在了正则表示之下, 通过论述其中的特殊数量关系说明了既约表示的有限性.

Explanation 4 Maschke 定理的中, 补子空间的存在性也可通过赋予 V 一个 G-不变的内积完成证明, 这内积的构造法前文已经说明了, 我们来借此生成子表示的补子表示.

命题 7 假定有限维线性 V 上具有 G-不变的内积 $\langle\ ,\ \rangle$, 对于 V 的子表示 W,

$$W^\perp = \{v\in V \mid \forall w\in W, \langle w, v\rangle = 0\}$$

具有 G 不变性.

Proof. 若 G 不变性不成立, 将有 $w'\in W^\perp$ 满足 $gw'\in W$, 进而存在 $w\in W$ 使得

$$\langle gw', w\rangle \neq 0$$

于是 $\langle w', g^{-1}w\rangle\neq 0$, 这是不可饶恕的. □

我们来对定理 6.2 进行一些补充:

命题 8 存在对 G 模 V 存在同构 $V\simeq \mathrm{Hom}_G(FG,V)$.

Proof. 我们取定映射 $\mathrm{Hom}_G(FG,V)\to V, f\to f(1)$, 构作映射 $f(g)=gv$, 于是我们知道 $\mathrm{Hom}_G(FG,V)\to V$ 是满的.

而假若 $f(1)\neq g(1)$, 立即知道 $f(\mathfrak{g})\neq g(\mathfrak{g})$, 于是这映射是 1-1 的. □

定理中表达式 $\dim_F V_i = n_i d_i$ 实际来源于:

$$V_i\simeq V\simeq \mathrm{Hom}_G(FG,V)\simeq n_i\mathrm{Hom}_G(V_i,V)$$

前后两个同构式子说明了 $V_i\simeq n_i\mathrm{Hom}_G(V_i,V_i)$, 于是所需的同构式成立.