多复变与复流形笔记
多元解析函数

EndlieDownAHell

2024 年 3 月 6 日

1 一元解析函数论的迁移

1.1 多元复微分

单变量解析函数论在 $\mathbb{C}$ 上讨论问题, 相应的, 多元解析函数便是 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 的映射, 为此, 讨论 $\mathbb{C}^n$ 中应当具有什么样的拓扑是有必要的, 为赋予 $\mathbb{C}^n$ 范数, 我们依据 $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 的观点定义

$$|Z| = |(z^i)_{i=1}^n| = \sqrt{\sum |z^i|^2}$$

相应的便有度量 $|Z - Z'| = \sqrt{\sum |z^i - z^{i\prime}|^2}$.

依据度量导出的邻域, 如 $\mathbb{R}^n$ 中的情形一般, 可以有两种等价的选择, 也即如下的球形邻域与多圆盘:

$$B(Z_0, r) = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid |Z - Z_0| < r\}, D(Z_0, R) = \{Z \in \mathbb{C}^n \mid |z_0^i - z^i| < r_i\}$$

其中 $R = (r_i)_{i=1}^n$.

将 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ 视作映射 $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$, 我们立即有系列微分及全微分

$$\frac{\partial f}{\mathrm{d}x^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial u}{\partial y^i} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y^i}$$

$$\mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i + \sum \frac{\partial f}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i$$

其中 $z^i = x^i + \mathrm{i}y^i$, 进而又有等式 $x^i = \dfrac{z^i + \bar{z}^i}{2}, y^i = \dfrac{z^i - \bar{z}^i}{2\mathrm{i}}$, 于是导出

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial y^i}\right)\mathrm{d}z^i + \frac{1}{2}\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i}\right)\mathrm{d}\bar{z}^i$$

于是我们定义 $\dfrac{\partial f}{\partial z^i} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i} + \dfrac{\partial f}{\partial y^i}\right), \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^i} - \dfrac{\partial f}{\partial y^i}\right)$. 取 z^i 为变量, 其他变元为参量, 即知 f 关于 z^i 可微的充要条件是 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = 0$, 故而我们将如下的方程组称为多元解析函数的 Riemann-Cauchy 方程:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = 0, i = 1, \cdots, n$$

1.2 多元幂级数

显然, 幂级数 $\sum c_n z^n$ 拓展到多元情形便是

$$\sum_{I\in\mathbb{N}^n} c_I Z^I$$

其中 $I=(i_1,\cdots,i_n)$ 被称为多重指标集, Z^I 被定义为 $(z^1)^{i_1}\cdots(z^n)^{i_n}$.

多元幂级数的第一个问题是如何定义部分和, 也即应当按照何种顺序去累加各项, 好在我们知道一种在换序上具有优良性质的收敛定义:

定义 1 *若存在排列 $s:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ 使得级数*

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_{s(I)} Z_0^I$$

在 $Z=Z_0$ 时绝对收敛, 则称级数 $\sum c_I Z^I$ 在 Z_0 处收敛.

这样定义收敛后, 从我们已经学过的级数论知识, 无论以何种方式累加, 收敛结果是不变的.

继续迁移幂级数中的理论, 我们有

定义 2 *若存在排列 $s:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ 使得级数*

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_{s(I)} Z_0^I$$

在 $Z\in\Omega$ 时绝对收敛 (一致收敛), 则称级数 $\sum c_I Z^I$ 在 Z_0 处收敛 (一致收敛).

不难知道, 多重级数 $\sum c_I Z^I$ 一致收敛时, 其和函数连续, 且交换积分, 微分与求和的条件与单重级数的情况类似.

定理 1 *若级数 $\sum c_I Z^I$ 在 Z_0 处收敛, 记 $R=(|z_0^i|)_{i=1}^n$, 则级数 $\sum c_I Z^I$ 在多圆盘 $\bar{D}_n(0,R)$ 上一致收敛, 且*

$$\frac{\partial}{\partial Z^{I_0}}\sum c_I Z^I=\sum\frac{c_I!}{(I-I_0)!}Z^{I-I_0}$$

也在 $D_n(0,\widetilde{R})$ 上收敛, 进而级数是无穷, 其中 $\tilde{r}^i<r^i$.

Proof. 注意到 $\left|\sum c_I Z^I\right|\le\left|\sum c_I Z_0^I\right|$ 即知收敛性, 另一方面, 由于级数收敛, $|c_I Z^I|$ 总有界, 进而 $|c_I Z^{I-I_0}|$ 同样有界, 记这上界为 L, 则

$$\begin{aligned}\sum\frac{c_I I!}{(I-I_0)!}Z^{I-I_0}&=\sum\frac{c_I I!}{(I-I_0)!}Z^{I-I_0}=\sum\frac{c_I Z_0^{I-I_0} I!}{(I-I_0)!}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{I-I_0}\\&\le L\sum\frac{I!}{(I-I_0)!}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)^{I-I_0}\le L\sum\frac{I!}{(I-I_0)!}\left(\frac{\widetilde{R}}{Z_0}\right)^{I-I_0}\end{aligned}$$

不难得知后者是收敛的. □

注 1 *我们建议读者研究级数 $\displaystyle\sum_{I\in\mathbb{I}^n} Z^I=\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}(z^1)^{i_1}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{\infty}(z^n)^{i_n}\right)$ 来补全证明.*

1.3 多元复积分

多元解析函数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 对每个分量解析, 故可逐次积分得出

$$\begin{aligned}f(z_0^1,\cdots,z_0^n)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z^1|=r_1}\frac{f(\omega^1,\cdots,z^n)}{\omega^1-z_0^1}\mathrm{d}\omega^1\\&=\cdots=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{|z^n|=r^n}\cdots\int_{|z^1|=r_1}\frac{f(\omega^1,\cdots,\omega^n)}{(\omega^1-z_0^1)\cdots(\omega^n-z_0^n)}\mathrm{d}\omega^1\cdots\mathrm{d}\omega^n\end{aligned}$$

记 $\widetilde{\partial}D_n(Z,R)=\{(\omega_i)_{i=1}^n\mid|\omega_i|<r_i\}$, 称为多圆盘 D_n 的特征边界, 上式也即

$$f(z_0^1,\cdots,z_0^n)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{\widetilde{\partial}D_n}\frac{f(\omega^1,\cdots,\omega^n)}{(\omega^1-z_0^1)\cdots(\omega^n-z_0^n)}\mathrm{d}\omega^1\cdots\mathrm{d}\omega^n$$

进一步地, 由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\omega^1-z^1)\cdots(\omega^n-z^n)}&=\frac{1}{(\omega^1-z_0^1)(1-\dfrac{z^1-z_0^1}{\omega^1-z_0^1})\cdots(\omega^n-z_0^n)(1-\dfrac{z^n-z_0^n}{\omega^n-z_0^n})}\\&=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)=0}^{\infty}\frac{(z^1-z_0^1)^{i_1}}{(\omega^1-z_0^1)^{i_1+1}}\cdots\frac{(z^n-z_0^n)^{i_n}}{(\omega^n-z_0^n)^{i_n+1}}\end{aligned}$$

于是我们有

$$f(z_0^1,\cdots,z_0^n)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)=0}^{\infty}c_{i_1\cdots i_n}\left(z^1-z_0^1\right)^{i_1}\cdots\left(z^n-z_0^n\right)^{i_n}$$

其中 $c_{i_1\cdots i_n}=\displaystyle\int_{\widetilde{\partial}D_n}\frac{f(\omega^1,\cdots,\omega^n)\mathrm{d}\omega^1\cdots\omega^n}{(\omega^1-z_0^1)^{i_1+1}\cdots(\omega^n-z_0^n)^{i_n+1}}$.

特殊地, 我们注意到上述论述里面只要求了 f 对分量分别解析, 故而我们实际有如下的结果:

定理 2 *若函数 $f(Z)$ 关于每个分量解析, 则 $f(Z)$ 解析.*

1.4 典型结论

定理 3 *若 $f(Z)$ 在 $\bar{D}_n(0,R)$ 上解析, 则*

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f(0)}{\partial Z^\alpha}\right|\le\frac{\alpha!}{R^\alpha}\sup_{Z\in\tilde{\partial}D_n}|f(Z)|$$

Proof. 对积分表示微分得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}f(0)}{\partial Z^\alpha}\right|&=\left|\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^n}\int_{\widetilde{\partial}D_n}\frac{\alpha!f(\omega^i)}{(\omega^1)^{\alpha^1+1}\cdots(\omega^n)^{\alpha^n+1}}\mathrm{d}\omega^1\cdots\mathrm{d}\omega^n\right|\\&\le\frac{\alpha!}{(2\pi)^n}\int_{\widetilde{\partial}D_n}\left|\frac{f(\omega^i)}{(\omega^1)^{\alpha^1+1}\cdots(\omega^n)^{\alpha^n+1}}\right|\left|\mathrm{d}\omega^1\cdots\mathrm{d}\omega^n\right|\\&=\frac{\alpha!}{R^\alpha}\int_{\widetilde{\partial}D_n}\left|\frac{(2\pi)^{-n}f(\omega^i)}{(\omega^1)^{\alpha^1+1}\cdots(\omega^n)^{\alpha^n+1}}\right|\left|\mathrm{d}\omega^1\cdots\mathrm{d}\omega^n\right|\\&\le\frac{\alpha!}{R^\alpha}\sup_{Z\in\tilde{\partial}D_n}|f(Z)|\end{aligned}$$

□

定理 4 *区域 Ω 上的函数 $f(Z)$ 若在 Z_0 的某个邻域内为零, 则 Ω 上 f 恒为 0.*

Proof. 取

$$Z(f)=\{z\in\Omega\mid z\in U\subset\tau(\Omega),f(U)=0\}$$

对 $z\in Z(f)$, 在其周围展开级数即知道 $Z(f)$ 为开集, 同时即得 $Z(f)$ 也是全体连续函数 $\dfrac{\partial^{|I|}f}{\partial Z^I}$ 的零点集, 于是 $Z(f)$ 是闭的, 故而 $O=\Omega$. □

定理 5 若 Ω 上的解析函数 $f(Z)$ 在 Ω 内取得 $|f(Z)|$ 最大值, 则 $f(Z)$ 是常数.

Proof. 注意到 $f(Z)$ 对每个分量成立最大模原理, 取多圆盘 D_n 包含 $\max|f(Z)|$, 则从单变量的最大模原理, 即得 $\widetilde{\partial}D_n$ 上 $f(Z)$ 为常数, 从而据积分表示 $f(Z)$ 在 D_n 为常数, 再据唯一性, 便知 $f(Z)$ 在 Ω 上为常数. □

定理 6 取球形邻域 $B(0,1)$, 若其上解析函数 $f(Z)$ 满足 $f(0)=0,|f(Z)|\leq 1$, 则 $|f(Z)|\leq|Z|$.

Proof. 对 Z 取单变量复函数 $g(t)=f(tz^1/|Z|,\cdots,tz^n/|Z|)$, 显然 $g(t)$ 满足 Schwartz 定理的要求, 则有

$$|g(t)|\leq|t|$$

对 $|t|\leq 1$ 成立, 取 $t=|Z|$ 即得所求. □

2 从代数观点看 $C^\omega(\Omega)$

2.1 零点问题

定义 3 考虑 Ω 上非零的解析函数 $f(Z)$ 的零点, 不妨就将其取为 0, 再在差一个线性变换的前提下假定有 z^n 使得 $f(0,\cdots,0,z^n)\neq 0$, 从而我们知道 $f(0,\cdots,0,z^n)$ 作为 z^n 的函数具有 k 阶零点 $z^n=0$, 此时我们说 $f(Z)$ 在 z^n 方向上 k 阶正则.

例 1 取解析函数 $a_k(z_1,\cdots,z^{n-1})$ 在 $Z'=(z^1,\cdots,z^{n-1})=0$ 时为零, 则多项式

$$h(Z)=(z^n)^k+\sum_{i=1}^{k-1}a_k(Z')(z^n)^i$$

在 z^n 方向上 k 阶正则, 这样的多项式被称为 Weierstrass 多项式.

命题 7 若 $f(Z)$ 在 z^n 方向 k 阶正则, 则存在充分小的多圆盘 $D_n(0,\delta)$ 满足

(i) 函数 $f(Z',z^n)$ 作为 z^n 的函数在圆盘 $D_1(0,\delta_n)$ 上有且仅有 k 个零点;

(ii) 函数 $f(Z)$ 在 $D_{n-1}(0,\delta')\times D_n(0,\delta_n)$ 不为零.

Proof. 由于 $f(0,z^n)$ 非零, 存在充分小的开圆盘 $D_1(0,\delta_n)$ 满足 ∂D_1 上 $f(0,z^n)\neq 0$. 另一方面, 由于 $f(Z)$ 解析, 能够取得开圆盘 $D_{n-1}(0,\delta')$ 满足

$$|f(Z',z^n)-f(0,z^n)|\leq\min_{z^n\in\partial D_1}|f(0,z^n)|\leq|f(0,z^n)|$$

则依据 Rouche 定理即得 (i) 的成立. 针对 $z\in\partial D_1$, 从解析性不难取得圆盘 $D'_n(z,\delta_z)$ 使得其上 $f\neq 0$, z 遍历 ∂D_1 即得 ∂D_1 的一个开覆盖, 由于 ∂D_1 紧, 这覆盖有限, 则我们能够取得最小的 δ' 使得 (ii) 成立. □

推论 8 假定有界函数 $g(Z)$ 在 $\Omega - Z(f)$ 的区域外解析, 其中 f 在 Ω 上解析, 则 $g(Z)$ 可解析延拓到全部的 Ω 上.

Proof. 不妨取这奇点为 0, 依据命题 7 取定圆盘 D_n, 由于 $g(Z', z^n)$ 是 z^n 的有界解析函数, 其在圆盘 D_1 上的奇点都是可去奇点, 延拓后应用 Cauchy 积分公式, 我们得到

$$\tilde{g}(Z', z^n) = \int_{|z^n|=\delta_n} \frac{g(Z', z^n)}{\omega - z^n} \mathrm{d}\omega$$

则不难知道 $\tilde{g}(Z', z^n)$ 对各个分量分别解析, 则其解析性得到了保证. □

注 2 考虑函数 $f(Z) \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$, 这是一个解析函数, 其零点集是我们所熟知的复代数簇, 具有着曲面的几何结构, 而非简单的孤立点集合, 这是多元解析函数与一元解析函数的不同之处.

我们取定 $Z(f)$ 来制约 g 的奇点, 由于解析函数零点的特性, 我们得以将零点问题, 进而也是奇点的问题转移到单个圆盘上, 最终通过单复变的方法解决延拓存在性以及函数解析性的问题, 这是本条定理的主要任务.

定理 9 若解析函数 $f(Z)$ 对 z^n 方向 k 阶正则, 则存在如下的分解在 $Z = 0$ 充分小的邻域上成立:

$$f = hu$$

其中 h 为 k 阶 Weierstrass 多项式, u 在邻域上解析且非零.

Proof. 依旧取命题 7 中的邻域 D_n, 取定 $Z' \in D_{n-1}$, 即得相应的 k 个零点 $b_1(Z'), \cdots, b_k(Z')$, 从而我们构造多项式

$$h(Z) = \prod_{i=1}^{k} (z^n - b_i(Z'))$$

现在来证明这多项式的解析性, 为此应用广义幅角原理[1]得到:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i^m(Z') = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z^n|=\delta_n} (z^n)^m \frac{f_n'(Z)}{f(Z)} \mathrm{d}(z^n)$$

则不难得知 $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^m(Z')$ 的解析性, 从而关于 z^n 的多项式 $h(Z', z^n)$ 的系数由于是 $b_i(Z')$ 的对称多项式, 从牛顿定理也是解析的, 进而便是 Weierstrass 多项式.

现在考虑函数 $u(Z) = f(Z)/h(Z)$, 取

$$M = \max_{Z \in \overline{D}_{n-1} \times \partial D_1} |f(Z)|, m = \min_{Z \in \overline{D}_{n-1} \times \partial D_1} |h(Z)|$$

则针对任意的 $Z' \in D_{n-1}$ 对 z^n 应用最大模定理, 我们有

$$|u(Z', z^n)| \leq \frac{M}{m}$$

成立, 从而 $u(Z)$ 有界, 其又以 $Z(h)$ 为奇点集, 则其可解析延拓到 $Z(h)$ 上, 从而命题成立. □

[1]参看谭小江《复变函数简明教程》§5.2 定理 4

定理 10 对于任意的解析函数 f 与 k 阶 Weierstrass 多项式 h, 在 $Z=0$ 的充分小邻域上有如下的式子唯一成立:

$$f = uh + r$$

其中 u 解析, $r = \sum_{i=1}^{k-1} c_i(Z')(z^n)^i$.

Proof. 依旧取定令人难绷的 D_n, 我们有

$$u(Z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z^n|=\delta_n} \frac{f(Z',\omega)}{h(Z',\omega)} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{z - z^n}$$

这函数的解析性不难确定, 同时我们有

$$\begin{aligned} f - hu = & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\omega|=\delta_n} \frac{f(Z',\omega)}{\omega - z^n} - \frac{f(Z',\omega)}{h(Z',\omega)} \cdot \frac{h(Z,z^n)}{\omega - z^n} \mathrm{d}\omega \\ = & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\omega|=\delta_n} \frac{f(Z',\omega)}{h(Z',\omega)} \left[\frac{h(Z',\omega) - h(Z)}{\omega - z^n} \right] \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

考虑到 $h(Z)$ 是 z^n 的 k 阶多项式, 命题已经成立, 至于唯一性的成立, 我们已经在代数学中见识够多了. □

2.2 解析函数的芽环

定义 4 我们定义

$$\mathcal{O}(X) = \{f \mid f \in C^\omega(U), U \supset X\}/\sim$$

其中 $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists U \subset X, f_1 \mid_U = f_2 \mid_U$. 这是一个环, 特殊地, 我们将 $\mathcal{O}(0)$ 记为 $\mathcal{O}_n$, 称作 $\mathcal{O}(X)$ 在 $Z=0$ 处的函数芽环.

现在我们重述定理 9,10 如下:

定理 11 若 $f \in \mathcal{O}_n$ 在 z^n 方向 k 阶正则, 存在分解 $f = hu$, 其中 h 是 k 阶 Weierstrass 多项式, u 可逆.

若 $f \in \mathcal{O}_n$ 而 h 是 k 阶 Weierstrass 多项式, 有整除 $f = uh + r$, 其中 $u \in \mathcal{O}, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z^n]$ 且 $\deg r < k$.

现在开始论述 $\mathcal{O}$ 作为代数环的性质.

定理 12 环 $\mathcal{O}_n$ 是 UFD.

Proof. 利用归纳法, $n=1$ 的情形下唯一分解 $f = uz^k$ 是显然的, 现在假定命题对 $n-1$ 成立, 首先从 Guass 定理, 多项式环 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 是 UFD, 考虑 $f \in \mathcal{O}_n$, 我们首先有唯一分解

$$f = uh$$

其中 h 作为 Weierstrass 多项式在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中, 现在我们来证明 h 在 $\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中的分解问题是一致的, 为此只需证明两者具有一致的既约成员.

假定 $h = g_1 g_2$ 在 $\mathcal{O}_n$ 中成立, 从定理 9 进一步分解 $g_{1,2}$ 得到

$$h = u_1 u_2 h_1 h_2$$

考虑到 h 还有分解 $h = 1 \cdot h$, 从定理 9 中的唯一性即得 $u_1u_2 = 1, h = h_1h_2$, 于是 h 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中也不是既约的.

假定 $h = h_1h_2$ 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中成立, 则这式子在 $\mathcal{O}_n$ 中也成立, 假若此时 h 在 $\mathcal{O}_n$ 还是既约的, 只能 h_1, h_2 中有一者是可逆的, 我们即有

$$h_1 = h_2^{-1}h$$

对比多项式除法 $h_1 = qh + r$, 则 h_2^{-1} 也是一多项式, 这与 h_2 在 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 中不可逆矛盾. □

命题 13 $f, g \in \mathcal{O}_n$ 互素当且仅当经过坐标变换后有 $u, v \in \mathcal{O}_n, r \in \mathcal{O}_{n-1}$ 使得

$$uf + vg = r$$

Proof. 坐标变换至 f, g 在 z^n 方向正则, 在相差一个可逆元的前提下即可将其视为 Weierstrass 多项式, 视 f, g 为 ${\mathcal{O}_{n-1}^*}^{-1}\mathcal{O}_{n-1}[z]$, 这是一个域上的多项式环, 则利用 Bezout 定理得到

$$\tilde{u}f + \tilde{v}g = 1$$

再乘以 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 的公分母 $r \in \mathcal{O}_{n-1}$ 即得所需. □

定理 14 $\mathcal{O}_n$ 是 Noether 环.

Proof. $n = 1$ 时命题显然, 现在假定 $n - 1$ 的情况命题成立, 则从 Hilbert 基定理 $\mathcal{O}_{n-1}[z]$ 是 Noether 环. 取定理想 $I \subset \mathcal{O}_n$, 取其中的 Weierstrass 多项式[1]f, 则 $I \mod f \subset \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 是有限生成的, 进而 I 总是有限生成的, 于是 $\mathcal{O}_n$ 是 Noether 环. □

2.3 解析簇

命题 15 记 $Z(J)$ 为一族函数 $J \subset C^\omega(\Omega)$ 的公共零点集, 则对于区域 Ω 上任意一点 Z_0, 存在充分小邻域以及有限个函数 $f_1, \cdots, f_k$ 使得 $Z(J) = Z(f_1) \cap \cdots Z(f_k)$.

Proof. 不妨设 $Z_0 = 0$, 取理想

$$I = \{f \in \mathcal{O}_n \mid \exists U, f(U \cap Z(J)) = 0\}$$

则这理想是有限生成的, 不妨取其生成元为一列 Weierstrass 多项式 $f_1, \cdots, f_k$, 进而能够取得公共的 D_n 使得 $f_1, \cdots, f_k$ 在 $D_{n-1} \times \partial D$ 上非零, 注意到 J 在 $Z = 0$ 处的芽都在 I 中, 而 J 成员都在 $\overline{D}_n$ 里解析, 从而我们有

$$J \equiv 0 \pmod{f_1, \cdots, f_k}$$

此时命题在 D_n 上成立. □

定义 5 若 $S \subset \Omega$ 局部上总能表为有限个解析函数的公共零点, 称 S 为 Ω 的解析子簇.

为了与上述定义的局部性质相匹配, 我们再来构造一类新的芽.

定义 6 若 $S_1, S_2 \subset \mathbb{C}^n$ 在 $Z = 0$ 的某个邻域上一致, 记 $S_1 \sim S_2$, 则 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)/\sim$ 中的成员被称为 $Z = 0$ 处的一个芽.

[1]聪明的小朋友快开动脑筋想一想为什么一定会有这样的多项式呢?

我们有解析子簇的芽与函数芽之间的一组对应:

对于一列 $f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{O}_n$ 生成的理想 I, 显然 $Z(I) = Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_k)$ 为一解析子簇的芽.

对于解析子簇的芽 S, 取 $I(S) = \{f \in \mathcal{O}_n \mid Z(f) \supset S\}$, 这是 Ω 中的理想.

于是我们总能将解析子簇的芽与 $\mathcal{O}_n$ 中的理想对应起来, 由此即得一个简单的结果:

引理 16 解析子簇的芽的交与并也是解析子簇, 解析子簇的芽 S 既约 (也即不能再分解为更小的解析子簇的芽的并) 当且仅当 $I(S)$ 是素理想.

我们给出与代数簇分解所类似的解析子簇的分解:

定理 17 解析子簇的芽 S 能够唯一地表为一组既约解析子簇的并.

Proof. 取 $I(S)$ 在 $\mathcal{O}_n$ 中, 其可以被准素分解为

$$I(S) = I_1 \cap \cdots \cap I_k$$

进而有 $S = Z(I_1) \cup \cdots \cup Z(I_k)$. 下证 $Z(f_1)$ 既约:

取 f_i 满足 $f_i(Z(I_i)) = 0$ 而在 $Z(I_1)$ 上不恒为零, 现在取 $f_1 \in I(Z(I_1))$, 显然

$$f_1 \cdots f_k \in I(S) \subset I_1$$

然而 I_1 准素, 考虑到 $f_2, \cdots, f_k$ 在 $Z(I_1)$ 不恒为零, 只能 $f_1^k \in I_1$, 从而 $f_1 \in \sqrt{I_1}$, 又显然若 $f^k \in Z(I_1)$ 则 $f(Z(I_1)) = 0$, 于是

$$I(Z(I_1)) = \sqrt{I_1}$$

又 I_1 准素, 则 $I(Z(I_1))$ 为素理想, 于是 $Z(I_1)$ 既约.

同理得其他 $Z(I_i)$ 既约.

现在假定还有既约分解 $S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$, 则

$$S_i = \bigcup (S_i \cap Z(I_j)), Z(I_j) = \bigcup (Z(I_j) \cap S_l)$$

由于上述的求并项也是解析子簇, 而 $S_i, Z(I_j)$ 既约, 将有

$$S_i = Z(I_j) \cap S_i, Z(I_j) = Z(I_j) \cap S_l$$

这将要导出 $S_i = S_1 \cap Z(I_j) \cap S_l$, 考虑到 S_k 彼此不包, 只能 $S_i = S_l$, 于是 $S_i = Z(I_j)$, 则唯一性成立. $\square$

最后我们来推广证明中的 $I(Z(I_1)) = \sqrt{I_1}$:

定理 18 对 $\mathcal{O}_n$ 中的任意理想 I, 成立

$$I(Z(I)) = \sqrt{I}$$

Proof. 仅证明主理想的情况. 取 $g \in I(Z(f))$, 不妨假定两者均为 Weierstrass 多项式, 此时 f 具有因式分解

$$f = \prod p_i^{k_i}$$

我们只需证明 $g \equiv 0 \pmod{p_1, \cdots, p_k}$, 非如此, 则有 $u, v \in \mathcal{O}_{n-1}[z]$ 使得

$$ug + vp_i = r \in \mathcal{O}_{n-1}$$

然而对于任意的 Z', 总有 z^n 使得 $p_i(Z) = 0$, 相应的 $g(Z) = 0$, 则只能 $r \equiv 0$, 这是矛盾的. $\square$

2.4 从微分观点看 $C^\omega(\Omega)$

考虑 $f\in C^\omega(\Omega)$, 自然我们能够写出

$$f=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i+\frac{\partial f}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i$$

作代换 $\mathrm{d}x^i=\dfrac{\mathrm{d}z^i+\mathrm{d}\bar z^i}{2},\mathrm{d}y^i=\dfrac{\mathrm{d}z^i-\mathrm{d}\bar z^i}{2\mathrm{i}}$, 即得

$$\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i+\frac{\partial f}{\partial \bar z^i}\mathrm{d}\bar z^i$$

这可以视为一个 $(1,1)$-形式, 具体而言, 我们可以仿照实流形中的情况构造复的微分形式, 满足与实微分形式类似的性质, 由于微元包括全纯形式 $\mathrm{d}z^i$ 与反全纯形式 $\mathrm{d}\bar z^i$ 两种, 我们一般以 (p,q)-形式记其中全纯形式与反全纯形式出现的次数.

定义 7 微分形式

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p=1\bar j_1,\cdots,\bar j_q=1}^n f_{\vec{i},\vec{\bar j}}\mathrm{d}z^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{i_p}\wedge\mathrm{d}\bar z^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\bar z^{j_q}$$

被称为 (p,q)-形式, 其楔积与实微分形式相类似.

注意到 $\mathrm{d}f=\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i+\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial f}{\partial \bar z^i}\mathrm{d}\bar z^i$, 则我们有算子间的关系

$$\mathrm{d}=\partial+\overline{\partial}$$

其中 $\partial=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i,\overline{\partial}=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial}{\partial \bar z^i}\mathrm{d}\bar z^i$, 分别被称为全纯方向外微分与反全纯方向外微分.

定义 8 取 $W=(\omega^1,\cdots,\omega^n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中坐标, 先取

$$\omega(W)=\mathrm{d}\omega^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\omega^n$$

$$\eta(W)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}w^i\mathrm{d}\omega^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\omega^n$$

生成函数 $W(n)=\displaystyle\int_{B(0,1)}\omega(\overline{W})\wedge\omega(W)$, 我们称如下的 $(n,n-1)$-形式为 Bochner-Martinelli 核函数 (形式):

$$H(Z,W)=\frac{\eta(\overline{W-Z})\wedge\omega(W)}{nW(n)|W-Z|^{2n}}$$

引理 19 $\forall Z\in\mathbb{C}^n,\varepsilon>0,\displaystyle\int_{\partial B(Z,\varepsilon)}H(Z,W)=1$

Proof.

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(Z,\varepsilon)}H(Z,W)=\int_{B(Z,\varepsilon)}\mathrm{d}H(Z,W)&=\int_{B(Z,\varepsilon)}\mathrm{d}\left(\frac{\eta(\overline{W-Z})\wedge\omega(W)+\eta(\overline{W-Z})\wedge\mathrm{d}\omega(W)}{nW(n)\varepsilon^{2n}}\right)\\&=\int_{B(Z,\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}\eta(\overline{W-Z})\wedge\omega(W)+\eta(\overline{W-Z})\wedge\mathrm{d}\omega(W)}{nW(n)\varepsilon^{2n}}\\&=\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{\mathrm{d}\eta(\overline{W})\wedge\omega(W)}{nW(n)\varepsilon^{2n}}=\int_{B(0,\varepsilon)}\frac{n\omega(\overline{W})\wedge\omega(W)}{nW(n)\varepsilon^{2n}}\\&=\int_{B(0,1)}\frac{\omega(\overline{W})\wedge\omega(W)}{W(n)}=1\end{aligned}$$

□

引理 20 $\mathrm{d}H(Z,W)=\overline{\partial}H(Z,W)=0$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H(Z,W)&=\frac{1}{nW(n)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\mathrm{d}\left(\frac{\overline{w^i-z^i}}{|W-Z|^{2n}}\right)\wedge\mathrm{d}\bar{\omega}^1\wedge\cdots\\
&=\frac{1}{nW(n)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}^i}{|W-Z|^{2n}}-\frac{(\overline{w^i-z^i})(\omega^i-z^i)}{|W-Z|^{2n+2}}\right)\wedge\mathrm{d}\bar{\omega}^1\wedge\cdots\\
&=\frac{1}{nW(n)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}^i}{|W-Z|^{2n}}-\frac{(\overline{w^i-z^i})(\omega^i-z^i)\mathrm{d}\bar{\omega}^i}{|W-Z|^{2n+2}}\right)\wedge\mathrm{d}\bar{\omega}^1\wedge\cdots\\
&=\frac{\mathrm{d}\bar{\omega}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\bar{\omega}^n}{W(n)|W-Z|^{2n}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{|\omega^i-z^i|^2}{W(n)|W-Z|^{2n+2}}\mathrm{d}\bar{\omega}^1\wedge\cdots\mathrm{d}\bar{\omega}^n=0
\end{aligned}$$

□

定理 21 $\Omega\in\mathbb{C}^n$ 边界分片光滑, f 在 $\bar{\Omega}$ 上连续可微, 则

$$f(Z)=\int_{\partial\Omega}f(W)H(Z,W)-\int_{\Omega}\overline{\partial}f(W)\wedge H(Z,W)$$

Proof. 取 $B(Z,\varepsilon)$, 对区域 $\Omega-B(Z,\varepsilon)$ 应用 Stokes 公式有

$$\int_{\Omega-B(Z,\varepsilon)}\mathrm{d}(f(W)H(Z,W))=\int_{\partial\Omega}f(W)H(Z,W)-\int_{\partial B(Z,\varepsilon)}f(W)H(Z,W)$$

由于 $H(Z,W)$ 是 $(n,n-1)$-形式, 还有 $\mathrm{d}f(W)\wedge H(Z,W)=\partial f(W)\wedge H(Z,W)+\overline{\partial}f(W)\wedge H(Z,W)=\overline{\partial}f(W)\wedge H(Z,W)$ 成立, 上式左边为

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega-B(Z,\varepsilon)}\mathrm{d}(f(W)H(Z,W))&=\int_{\Omega-B(Z,\varepsilon)}\mathrm{d}f(W)\wedge H(Z,W)+\int_{\Omega-B(Z,\varepsilon)}f(W)\wedge\mathrm{d}H(Z,W)\\
&=\int_{\Omega-B(Z,\varepsilon)}\overline{\partial}f(W)\wedge H(Z,W)
\end{aligned}$$

从而我们有等式

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega-B(Z,\varepsilon)}\overline{\partial}f(W)\wedge H(Z,W)&=\int_{\partial\Omega}f(W)H(Z,W)-\int_{\partial B(Z,\varepsilon)}f(W)H(Z,W)\\
&=\int_{\partial\Omega}f(W)H(Z,W)-\int_{\partial B(Z,\varepsilon)}[f(W)-f(Z)]H(Z,W)-f(Z)
\end{aligned}$$

上式中令 $\varepsilon\to0$ 即得

$$\int_{\Omega}\overline{\partial}f(W)\wedge H(Z,W)=\int_{\partial\Omega}f(W)H(Z,W)-f(Z)$$

这便是所需. □

推论 22 考虑到对解析函数 f 有 $\overline{\partial}f=0$, 则

$$f(Z)=\int_{\partial\Omega}f(W)H(Z,W)$$

这便是 Cauchy 积分定理在高维中的一个推广.