多复变与复流形笔记
复流形

EndlieDownAHell

2024 年 7 月 4 日

定义 1 C_2 的 Hausdorff 空间 M 若总局部同胚于 $\mathbb{C}^n$, 且坐标卡间的转移函数是全纯的, 则称 M 是复流形, 相应的我们有流形上的解析函数, 流形间的解析映射, 流形的解析同胚的概念.

定理 1 取 Ω 上的解析函数 $F(Z)$, 在 $F(Z_0)=0$ 处, 若

$$\frac{\partial F(Z_0)}{\partial z_1} \neq 0$$

则在 Z_0 的邻域 O 上, 有 (Z_0') 邻域 W 上的解析函数 f 使得

$$Z(F) \cap O = \{(f(Z'), Z') \mid Z' \in W\}$$

Proof. 作分解 $F(Z)=U(X,Y)+\mathrm{i}V(X,Y)$, 则联合 Cauchy-Riemann 方程我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(x_1,y_1)}\right| &= \frac{\partial U}{\partial x^1}\frac{\partial V}{\partial y^1} - \frac{\partial U}{\partial y^1}\frac{\partial V}{\partial x^1} \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}\right)^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial z^1}\right|^2\end{aligned}$$

于是从条件实函数 $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^2$ 在 (X_0,Y_0) 处的 Jacobi 矩阵非退化, 从而可从 $\begin{cases}U(X,Y)=0\\V(X,Y)=0\end{cases}$ 在 (X_0,Y_0) 的邻域里反解出

$$\begin{cases}x^1 = x^1(X';Y')\\ y^1 = y^1(X';Y')\end{cases}$$

使得 $F(f(Z'),Z')=0$, 其中 $f(Z')=x^1(X',Y')+\mathrm{i}y^1(X',Y')$, 对其再针对 $\bar{z}^i$ 求导, 还有

$$\frac{\partial F}{\overline{\partial z^i}} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^1} = 0$$

从假设 $\dfrac{\partial F}{\partial f} = \dfrac{\partial F}{\partial z^1} \neq 0$, 只能 $\dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}^i}$ 为零, 则 h 解析. □

注 1 推广即得多元情况的隐函数定理与反函数定理.

1 子流形

经典的流形除了 $\mathbb{C}^n$ 外, 还有 $\mathbb{C}P^n$, 具体而言, $\mathbb{C}P^n$ 是一种典型的紧复流形, 其定义如下:

定义 2 在 $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ 中, 称 $Z^1\sim Z^2$, 当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$ 使得 $Z^1=\lambda Z^2$, 此时我们记 $\mathbb{C}P^n=\mathbb{C}^{n+1}/\sim$, 称为复射影空间.

命题 2 $\mathbb{C}P^n$ 是一个 n 维紧复流形.

Proof. 构造开集 $U_0=\{[z^0,\cdots,z^n]\in\mathbb{C}P^n\mid z^0\neq 0\}$, 则存在同胚

$$\varphi_0:U_0\to\mathbb{C}^n,[z^0,\cdots,z^n]\to\left(\frac{z^1}{z^0},\cdots,\frac{z^n}{z^0}\right)$$

同理我们可以构造其余坐标卡 $U_1,\cdots,U_n$, 对于例如 $U_0\cap U_n$ 的重叠部分, 我们有转移函数

$$\varphi_0^{-1}\varphi_n:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}P^n\to\mathbb{C}^n,\left(\frac{z^1}{z^0},\cdots,\frac{z^n}{z^0}\right)\to\left[1,\frac{z^1}{z^0},\cdots,\frac{z^n}{z^0}\right]\to\left(z^0,\cdots,\frac{z^{n-1}}{z^n}\right)$$

从而 $\mathbb{C}P^n$ 是 n 维复流形.

现在取定 $\mathbb{C}P^n$ 中的一列点 $\{P_k\}$, 显然其必在某个 U_i 中无限, 将 U_i 同胚到曲面 $|Z|^2=1$ 的子集上, 即知收敛子列的存在, 进而我们便为 $\{P_k\}$ 找到了收敛子列, 这说明了 $\mathbb{C}P^n$ 是紧流形. □

例 1 现在我们利用 $\mathbb{C}P^n$ 紧化代数簇, 首先来说明 $\mathbb{C}P^n$ 如何紧化复空间.

注意到 $U_0=\{[z^0,\cdots,z^n]\in\mathbb{C}P^n\mid z^0\neq 0\}$, 即得

$$\mathbb{C}P^n-U_0=\{[0,z^1,\cdots,z^n]\}\simeq\mathbb{C}P^{n-1}$$

于是我们实际可以断言, $\mathbb{C}^n\cup\mathbb{C}P^{n-1}\simeq\mathbb{C}P^n$, 换言之射影空间 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 紧化了复空间 $\mathbb{C}^n$.

现在考虑 k 次多项式 $P(z^1,\cdots,z^n)$, 按照如下方法使其齐次化:

$$\widetilde{P}(z^0,\cdots,z^n)=(z^0)^kP\left(\frac{z^1}{z^0},\cdots,\frac{z^n}{z^0}\right)$$

齐次化后, 多项式 $\widetilde{P}(z^0,\cdots,z^n)$ 显然只和 $(z^0,\cdots,z^n)$ 的射影坐标有关, 于是我们知道 $\overline{Z(P)}=Z(\widetilde{P})$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 上的紧子集.

我们来分析 $\overline{Z(P)}$ 的构成, 由于 $U_0\simeq\mathbb{C}^n$, 我们可以将 $P\mid_{U_0}$ 直接视作 P, 换言之我们有

$$\overline{Z(P)}\cap U_0\simeq Z(P)$$

除此之外的部分, 注意到 $z^0=0$ 时, $\widetilde{P}$ 实际只剩下 P 的最高次项[1],

$$\overline{Z(P)}-U_0\simeq Z(P_k)$$

其中 P_k 是 P 的最高次项.

综上我们有 $\overline{Z(P)}\simeq Z(P)\cup Z(P_k)$, 这便是代数簇 $Z(P)$ 的紧化.

以此类推之可以紧化一族多元多项式的零点.

定义 3 $\mathbb{C}P^n$ 中的代数簇若也是复流形, 则称为代数流形.

如下一条定理说明了 $\mathbb{C}P^n$ 中什么样的子流形可以是代数流形:

定理 3 (周纬良) $\mathbb{C}P^n$ 的正则子流形是代数簇.

定义 4 映射 $g:M\to\mathbb{C}$ 若对任意 $x\in M$, 都有 x 的某个邻域上的解析函数 $f_{1,2}$(f_2 不恒为零), 使得 $g=f_1/f_2$, 则被称为 M 上的亚纯函数.

[1]聪明的小朋友想想这是为什么?

考虑解析映射 $F : M \to \mathbb{C}P^n$, 其在 P 点的邻域 U_P 上可被表为[1]

$$Q \to (f^0(Q), \cdots, f^n(Q))$$

再取 $\widetilde{P}$, 在 $U_P \cap U_{\widetilde{P}}$ 上, 便知

$$[f^0(Q), \cdots, f^n(Q)] = [\tilde{f}^0(Q), \cdots, \tilde{f}^n(Q)]$$

换言之, 存在非零的 h 使得 $(f^0, \cdots, f^n) = h(\tilde{f}^0, \cdots, \tilde{f}^n)$, 现在假定 $F(U_P)$ 中 f^0 不恒为零, 则我们可得到如下定义的系列函数

$$g^i = \frac{f^i}{f^0} = \frac{hf^i}{hf^0} = \frac{\tilde{f}^i}{\tilde{f}^0}$$

显然这函数与 $\{f^k\}$ 的选取法无关, 且在坐标卡之间是不变的, 进而实际可以全局定义在 M 上, 我们便从 $F : M \to \mathbb{C}P^n$ 上得到的一组亚纯函数.

相反地, 对于一组亚纯函数 $g^1, \cdots, g^n$, 若我们能在任意点 $P \in M$ 的邻域 U_P 上选定表示 $g^i = \dfrac{f^i}{f^0}$ 使得 $f^0, \cdots, f^n$ 无公共零点, 则我们能够取得如下的映射:

$$F\mid_{U_p} : U_p \to \mathbb{C}P^n, Q \to [f^0(Q), \cdots, f^n(Q)]$$

进而我们从一组亚纯函数中得到了映射 $F : M \to \mathbb{C}P^n$.

2 解析向量丛

定义 5 取定 $p \in M$, 映射 $v : C_p^\infty \to \mathbb{C}$ 若满足

(i) $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$

(ii) $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

则称 v 是 M 在 p 处的一个复切向量. 显然全体复切向量是一个线性空间, 将其称为 M 在 p 的复切空间 T_p.

记 $\overline{\mathcal{O}}_p$ 为 $\mathcal{O}_p$ 中全体成员的共轭, 若 $v(f) = 0$ 在 $\overline{\mathcal{O}}_p$ 上总成立, 则称 v 是全纯切向量, 若 $v(f) = 0$ 在 $\mathcal{O}_p$ 上总成立, 则称 v 是反全纯切向量, 相应的两种空间分别被记为 $T_{(1,0)p}, T_{(0,1)p}$.

引理 4 $T_p = T_{(1,0)p} \oplus T_{(0,1)p}$.

Proof. 在 p 的邻域 U 上考虑解析函数 f 的如下展开, 其中额外要求 p 的坐标为 $(0, \cdots, 0)$:

$$f(Z) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(0)}{\partial z^i} z^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} \bar{z}^i + \sum_{i=1}^n h_i(Z) g(Z_i)$$

其中 $h_i(Z)g_i(Z)$ 是 $z^i, \bar{z}^i$ 的二阶等价小量, 且满足 $h_i(0) = g(0) = 0$, 从而对任意的 v, 实际

$$\begin{aligned} v\left(\sum_{i=1}^n h_i g_i\right) &= \left(\sum_{i=1}^n g_i(0)\right) v\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n h_i(0)\right) v\left(\sum_{i=1}^n g_i\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

[1]聪明的小朋友想一想这表示是否唯一? 又由什么决定?

于是若 $v \in T_{(1,0)p} \cap T_{(0,1)p}$, 则

$$v(f) = v\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial z^i} z^i\right) + v\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial \bar{z}^i} \bar{z}^i\right) = 0$$

于是 $v = 0$, 另一方面, 对 $v \in T_p$, 取定

$$v = v_1 + v_2, v_1(f) = v\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial z^i} z^i\right), v_2(f) = v\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial \bar{z}^i} \bar{z}^i\right)$$

即得直和分解的成立. □

定义 6 复切空间 T_p 的对偶空间 T_p^* 被称为复余切空间, 相应地便有全纯余切空间与全纯余切空间.

定理 5 对于复流形 M, $T_{(1,0)}(M) = \bigcup_{p \in M} T_{(1,0)p}$ 是一个微分流形, 称为 M 上的全纯切丛.

Proof. 只需一次性构造出 $T_{(1,0)p}$ 上的图册, 取定 M 上的一个坐标卡 U_α, 我们定义

$$g_\alpha : \bigcup_{p \in U_\alpha} T_{(1,0)p} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^{n} a^i \left.\frac{\partial}{\partial z^i}\right|_p \to (z_p^1, \cdots, z_p^n; a^1, \cdots, a^n)$$

对 M 的坐标卡 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, 集族 $\left\{\bigcup_{p \in U_\alpha} T_{(0,1)p}, g_\alpha\right\}_{\alpha \in \Lambda}$ 便是 $T_{(0,1)p}(M)$ 的一个图册, 从而实际 $T_{(0,1)}(M)$ 是一个 $2n$ 维复流形. □

我们把坐标变换的验证问题放到这里, 为此先来重新观察一遍 $T_{(0,1)}(M)$ 的结构, 局部上来说, 其就是 $U_\alpha \times \mathbb{C}^r$, 换言之, 全纯切丛为流形的每一点黏贴了一个向量空间.

因而我们可以推广切丛的概念, 将“每点附加一个向量空间”反过来说, 也就是复流形 M 上的向量丛 E, 应当在局部上具有坐标卡与 $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ 同胚, 其中 U_α 是 M 上的开集.

单纯给每一点附加向量空间时我们得到的只是一族带下标的向量空间, 首先难以言说拓扑结构, 更遑论复结构, 为此我们采用的是批量打包的策略, 直接借助 M 上的复坐标卡做出了局部的复流形结构.

此后的问题在流形理论中老生常谈, 便是如何处理 $U_\alpha \cap U_\beta$ 的部分, 现在记 $\pi : E \to M$ 是向量到其“下标”的投影, 我们实际有如下的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n \arrow[dd, "g_\alpha \circ g_\beta^{-1}"] \\
\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[ur, "g_\alpha"] \arrow[dr, "g_\beta"'] & \\
 & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

显然这其中 $U_\alpha \cap U_\beta$ 的成员是纹丝不动的, 重点在于 $g_\alpha \circ g_\beta^{-1} |_p : p \times \mathbb{C}^n \to p \times \mathbb{C}^n$ 作为实际线性同构, 将如何传送向量, 这样的线性同构, 以矩阵表出时, 被称为转移矩阵, 记作 $G_\beta^\alpha(P)$, 变动 P 时, $P \to G_\beta^\alpha(P)$ 实际是解析映射.

正是这样的转移矩阵, 决定了同一复流形上相同维数的不同向量丛, 在介绍具体例子前, 我们还是来看一遍向量丛的定义:

定义 7 对于复流形 M, 复流形 E 连同解析映射 $\pi: E \to M$ 满足如下要求时, 被称为 M 上的 r 维全纯向量丛.

(i) 存在 M 的开覆盖 $\{U\}_\alpha$, 使得解析同胚 $g_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ 存在;

(ii) 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时, 映射 $g_\alpha \circ g_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^r$ 保持 $U_\alpha \cap U_\beta$ 不变, 而在每个 $p \times \mathbb{C}^r$ 上是线性变换, 且有

$$U_\alpha \times U_\beta \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^r), p \to \left(g_\alpha \circ g_\beta^{-1}\right)_{p \times \mathbb{C}^r}$$

是解析映射.

例 2 一维全纯向量丛被称为全纯线丛, 我们可以用如下的方案构造全纯线丛:

取定 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 其上有亚纯函数 g_α, 特别在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上满足 $G_\beta^\alpha = \dfrac{g_\alpha}{g_\beta}$ 处处不为零, 这时 G_β^α 正可以作为一个转移矩阵, 进而我们构造出了 M 上的一个线丛, 覆盖 $\{U_\alpha, g_\alpha\}$ 被称为 M 的一个除子, 相应的线丛被记作 $[D]$.

特殊地, 对于紧而一维的复流形, 换言之即为紧 Riemann 曲面, 覆盖是有限的, 又注意到 G_β^α 处处不为零实际意味着 g_α, g_β 在交界处的极点, 零点一致, 于是我们可以将除子表现为:

$$D = \sum_{i=1}^{s} n_i P_i - \sum_{j=1}^{t} m_t Q_t$$

其中 P_i, Q_j 为零点与极点, 系数是他们的阶数, 反过来, 给定上面的一组包含零点, 极点及其阶数的形式和, 也不难还原出一个除子来.

我们将继续围绕除子进行论述, 但在这之前还是让我们介绍一些小向量丛中生成向量丛的方法:

例 3 向量丛 E_1, E_2 的直和 $E_1 \oplus E_2$ 指的是在局部上具有形式 $E_p = E_{1p} \oplus E_{2p}$ 的向量丛 E, 相应的转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} G_{\beta 1}^\alpha & 0 \\ 0 & G_{\beta 2}^\alpha \end{bmatrix}$$

向量丛 E_1, E_2 的直和 $E_1 \times E_2$ 指的是在局部上具有形式 $E_p = E_{1p} \otimes E_{2p}$ 的向量丛 E, 相应的转移矩阵为 $G_{\beta 1}^\alpha \otimes G_{\beta 2}^\alpha$.

向量丛 E 的对偶丛 E^* 指的是在局部上具有形式 E_p^* 的向量丛, 相应的转移矩阵为 $(G_\beta^\alpha)^{-1}$.

接下来我们再介绍向量丛作为代数结构具有的性质:

定义 8 取定全纯向量丛 E_1, E_2, 取定解析映射 $F: E_1 \to E_2$, 若其满足

(i) $F(E_{1p}) \subset E_{2p}$

(ii) $F\mid_{E_{1p}}: E_{1p} \to E_{2p}$ 总是线性映射

则称 F 是 E_1, E_2 之间的同态, 特殊地我们也可定义出向量丛的同构.

现在我们回过头来讨论除子.

例 4 显然紧 Riemann 面上的全部除子作为形式和有自然的加减法结构, 我们称之为除子群, 这是应该 Abel 群, 而放到线丛的语境里, 我们来考虑 $[D_1] \otimes [D_2]$ 对应的除子, 为此选定 D_1, D_2 对应的函数族 $\{f_\alpha\}, \{g_\alpha\}$, 则 $[D_1], [D_2]$ 的转移矩阵为

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} \times \frac{g_\alpha}{g_\beta}$$

于是我们可以生成函数族 $\{f_\alpha g_\alpha\}$ 满足例 2 的要求, 其上立刻有一个除子, 不难发现这除子就是 $D_1 + D_2$.

我们再来考虑 $[D]^*$ 对应的除子, 重复之前的操作, 这次的转移矩阵是 $\dfrac{1/f_\alpha}{1/f_\beta}$, 从而相应的函数族是 $\{1/f_\alpha\}$, 生成的除子, 不难看出正好倒转了原先除子规定的极点与零点, 也就是 $-D$, 于是我们有除子群到线丛群的一个同态, 依照下面的公式得到:

$$[D_1 + D_2] = D_1 \otimes D_2, [-D] = [D]^*$$

我们来考虑一番这个同态的核, 假若 $[D_1] \simeq [D_2]$ 成立, 相应的同构映射为 $G : [D_1] \to [D_2]$, 则局部上 G 复合坐标变换, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上应当有

$$g_\beta \frac{h_{1\beta}}{h_{1\alpha}} = \frac{h_{2\beta}}{h_{2\alpha}} g_\alpha$$

上式在一般的向量丛上即是 $F_\beta \circ G_\alpha^\beta = G_\alpha^\beta \circ F_\alpha$, 利用这式子, 我们可大言不惭地在紧 Riemann 面上定义函数

$$f\ |_{U_\alpha} = g_\alpha \frac{h_{1\alpha}}{h_{2\alpha}}$$

此时记 $\mathrm{div}(f)$ 为 f 的极点与零点生成的除子, 则我们有

$$\mathrm{div}(f) = D_1 - D_2$$

不难得知从上式倒推的结果, 于是

$$\mathrm{Ker}(D \to [D]) = \{\mathrm{div}(f) \mid \mathrm{supp} f \neq \varnothing\}$$

我们现在将要给出看待 $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}P^n)$ 的一种新观点, 为此先定义

定义 9 针对向量丛 $E \to M$, 取定可微 (解析) 映射 $s : M \to E$ 满足 $s\ |_p : p \to E_p$, 称呼 s 是流形 M 在 E 上的一个可微 (全纯) 截面, 记载 $U \subset E$ 上的全部截面组成的线性空间为 $\Gamma(U, E)$, 这线性空间的一组基 $\{s_\alpha\}$ 被称为 U 在 E 上的可微 (全纯) 标架.

例 5 考流形 M 上解析线丛 L 的一组解析截面 $s^0, \cdots, s^n$ 无公共零点, 此时在局部我们便可定义映射 $F : M \to \mathbb{C}P^n$ 满足

$$F\ |_{U_\alpha} : U_\alpha \to \mathbb{C}P^n, P \to [s_\alpha^0, \cdots, s_\alpha^n]$$

相反地, 考虑解析映射 $F : M \to \mathbb{C}P^n$, 即可局部地从齐次坐标 $[f_\alpha^0, \cdots, f_\alpha^n]$ 得到一列无公共零点的解析函数 $\{f_\alpha^k\}$, 考虑这列函数在不同坐标卡之间的坐标变换:

$$(f_\alpha^0, \cdots, f_\alpha^n) = h_\alpha^\beta (f_\beta^0, \cdots, f_\beta^n)$$

则我们便得到系列转移矩阵 h_α^β, 进而这些解析函数同时也便是线丛上的解析截面.

于是我们将解析映射 $F : M \to \mathbb{C}P^n$ 与线丛上的解析截面联系了起来.

3 复联络与 Hermite 度量

定理 6 取定向量丛 E 上的一组局部解析标架 $\{e^1,\cdots,e^r\}$, 对于具有表示

$$s_\alpha=\sum_{i=1}^{r} f_i e^i$$

的可微截面 s_α, 我们可定义 $(0,1)$ 方向的微分 $\bar\partial:\Gamma(E)\to\Gamma(E\otimes T^*_{(0,1)}(M))$:

$$\bar\partial s_\alpha=\sum_{i,j=1}^{r,n}\frac{\partial f_i}{\partial\bar z^j}\mathrm{d}\bar z^j\otimes e^i$$

Proof. 证明良定义性即可, 首先考虑解析标架 $\{e_i\},\{\tilde e_j\}$ 之间的变换函数构成的矩阵 $(a_{i,j})_{r\times r}$, 这是一个解析函数构成的矩阵, 我们有

$$\begin{aligned}\overline\partial s_\alpha&=\sum_{j=1}^{r}\overline\partial(\tilde f_j\tilde e^j)=\sum_{i,j=1}^{r}\overline\partial(\tilde f_j a_{i,j}e^i)\\&=\sum_{i,j=1}^{r}\overline\partial(\tilde f_j)a_{i,j}\otimes e^i=\sum_{i=1}^{r}\overline\partial(\tilde f_j)\otimes\tilde e^j\end{aligned}$$

从而这个 $\overline\partial s_\alpha$ 的定义与局部标架的选取无关.

现在考虑坐标变换 $Z\to W$, 则

$$\begin{aligned}\bar\partial s_\alpha&=\sum_{i,j,k=1}^{r,n,n}\frac{\partial f_i}{\partial\bar z^j}\frac{\partial\bar z^j}{\partial\overline w^k}\mathrm{d}\bar z^j\otimes e^i\\&=\sum_{i,k=1}^{r,n}\frac{\partial f_i}{\partial\overline w^k}\mathrm{d}\overline w^k\otimes e^i\end{aligned}$$

于是这定义是坐标变换不变的. □

定义 10 复流形 M 上的一个全纯向量丛 E 的联络 $\nabla:\Gamma(M,E)\to\Gamma(M,E\otimes T^*M)$ 若对于分解 $\nabla=\nabla^{(1,0)}+\nabla^{(0,1)}$ 满足 $\nabla^{(0,1)}=\overline\partial$, 称 ∇ 是 E 上的复联络.

命题 7 全纯向量丛 E 上的联络 ∇ 为复联络的充分必要条件是对 E 的任意局部解析标架, ∇ 相应的联络形式都是 $(1,0)$-形式.

Proof. 当 ∇ 是复联络时, 对解析标架 $S=(s^1,\cdots,s^r)^{\mathrm T}$ 我们有

$$\nabla S=\nabla^{(0,1)}S+\overline\partial S=\nabla^{(0,1)}S$$

从而相应的联络形式是 $(1,0)$-形式.

当反向命题的条件被满足时, 考虑可微标架 $S=(s^1,\cdots,s^r)^{\mathrm T}$, 得到

$$\begin{aligned}\nabla fS&=\mathrm{d}f\otimes S+f\nabla S\\&=\partial f\otimes S+\overline\partial f\otimes S+f\omega^{(1,0)}\otimes S+f\omega^{(0,1)}\otimes S\\&=(\partial f+f\omega^{(1,0)})\otimes S+(\overline\partial f+f\omega^{(0,1)})\otimes S\\&=\nabla^{(1,0)}fS+\nabla^{(0,1)}fS\end{aligned}$$

此时令 S 为全纯标架, 则有 $\omega^{(0,1)}=0$, 于是上式变换为

$$\nabla^{(0,1)}fS=\overline\partial f\otimes S$$

于是命题成立. □

定义 11 复向量丛 $\pi: E \to M$ 上的 Hermite 度量 $\mathrm{d}s^2$ 是对每个 E_p 都有定义的 Hermite 内积 $\mathrm{d}s_p^2$, 局部上针对着 $w_1, w_2 \in \Gamma(E, U)$ 成立

$$p \to (w_1(p), w_2(p))_p$$

是可微函数.

取定联络 D, 其将向量 s_p 平行移动到向量 s_q 上, 若 Hermite 度量 $\mathrm{d}s^2$ 满足

$$\sqrt{(s_p, s_p)_p} = \sqrt{(s_q, s_q)_q}$$

则称度量 $\mathrm{d}s^2$ 与联络 D 相容.

定理 8 全纯向量丛上的 Hermite 度量总有唯一的复联络 D 与之相容.

Proof. 考虑曲线 $l(t)$ 上向量丛的平行截面 $w_1(t), w_2(t)$, 对局部标架 $S = (s^1, \cdots, s^r)^{\mathrm{T}}$, $w_{1,2}$ 将具有表出

$$w_1 = fS, w_2 = gS$$

平行条件意味着

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} S + f \left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle S = 0, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} S + g \left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle S = 0$$

现在考虑 w_1, w_2 内积的不变性, 为此假定度量矩阵为 $G = (g_{i,j})_{r \times r}$, 则

$$(w_1(t), w_2(t)) = fG\bar{g}^{\mathrm{T}}$$

为了保持度量的平移不变性, 右端对 t 导数应当为 0, 也即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} G\bar{g}^{\mathrm{T}} + f \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \bar{g}^{\mathrm{T}} + fG \frac{\mathrm{d}\bar{g}^{\mathrm{T}}}{t} = 0$$

代入平行条件得到

$$\begin{aligned} 0 &= -f \left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle G\bar{g}^{\mathrm{T}} + f \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \bar{g}^{\mathrm{T}} - fG \left\langle \bar{\omega}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^{\mathrm{T}} \bar{g}^{\mathrm{T}} \\ &= f \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} - \left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle G - G \left\langle \bar{\omega}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle^{\mathrm{T}} \right) \bar{g}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

考虑到上式应当对任意路径与 f, g 成立, 我们便可直接断言

$$\mathrm{d}G = \omega G + G\bar{\omega}^{\mathrm{T}}$$

追加复联络的假设, 此时 ω 为 $(1,0)$-形式, 则为了使得等式两边一致, 我们得到

$$\partial G = \omega G$$

则我们可以从度量矩阵 G 中确定联络形式 ω 的表达, 命题成立. □

4 Kähler 流形

以下的度量皆指切丛上的度量, 我们接下来将从 Hermite 度量中导出 Riemann 度量.

取定 Hermite 度量 $\mathrm{d}s^2$ 的度量矩阵 G, 由于这矩阵与 $T^*_{(1,0)}(M)$ 上的内积相对应, 我们还可将 $\mathrm{d}s^2$ 处理为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g_{i,j} \mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\bar{z}^j$$

不难证明这定义与坐标变换相容, 从而 Hermite 度量也可视为张量 $T^*_{(1,0)}(M)\otimes T^*_{(0,1)}(M)$ 的一个可微截面, 另一方面, 取共轭时,

$$\overline{\mathrm{d}s^2}=\sum_{i,j=1}^{m}\bar{g}_{i,j}\mathrm{d}\bar{z}^i\otimes\mathrm{d}z^j$$

也便对应着 $T_{(0,1)}(M)$ 的一个 Hermite 度量. 进一步地, 假若我们追加要求 $T_{(1,0)}(M), T_{(0,1)}(M)$ 是正交的, 则我们可以在 $T(M)=T_{(1,0)}(M)\otimes T_{(0,1)}(M)$ 上定义出内积结构 (,).

不难将这内积通过变换 $\frac{\partial}{\partial z^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$ 变换为复流形 M 作为 $2m$ 维实流形所具有的切空间上的 Riemann 度量, 相应的度量矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}2\Re(G) & 2\Im(G)\\ -2\Im(G) & 2\Re(G)\end{bmatrix}$$

定义 12 Hermite 流形上的容许联络若是无挠的, 则被称为 Kähler 流形.

定理 9 Hermite 度量 $\mathrm{d}s^2$ 是 Kähler 度量当且仅当 $(1,1)$-形式

$$\sum_{i,j=1}^{n}g_{i,j}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\bar{z}^j$$

满足 $\mathrm{d}W=0$.

定理 10 流形上的 Hermite 度量 $\mathrm{d}s^2$ 为 kähler 度量的充分必要条件是: 对任意的 $p\in M$, 存在以 p 为原点的局部坐标系 $(z^1,\cdots,z^n)$, 成立

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}(\delta_{i,j}+O(|Z|^2))\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\bar{z}^j$$

Proof. 取定 $\mathrm{d}s^2$ 的局部表示 $\sum_{i,j=1}^{n}g_{i,j}\mathrm{d}z^i\otimes\mathrm{d}\bar{z}^j$, 若 $[g_{i,j}(0)]_{n\times n}\neq I$, 不妨再利用线性变换变换其为 E_n, 从而可展开 $g_{i,j}$ 为

$$g_{i,j}=\delta_{i,j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial z^k}z^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{i,j}}{\partial \bar{z}^k}\bar{z}^k+O(|Z|^2)$$

注意到 $\mathrm{d}s^2$ 是 Hermite 度量与 Kähler 度量要求

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial g_{i,j}}{\partial \bar{z}^k}}=\frac{\partial \bar{g}_{i,j}}{\partial z^k}&=\frac{\partial g_{j,i}}{\partial z^k}\\&=\frac{\partial \bar{g}_{i,k}}{\partial z^j}\end{aligned}$$

现在作坐标变换

$$z^i=w^i-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial \bar{g}_{i,j}}{\partial z^k}w^jw^k$$

计算即可验证坐标系 $(w^1,\cdots,w^n)$ 满足条件. □