多复变与复流形笔记
Dolbeaut 同调

EndlieDownAHell

2024 年 7 月 14 日

1 Dobeaut 同调

我们先来对复外微分形式进行推广, 为此考虑如下的向量丛:

$$\Omega^{(p,q)}(E,M)=E\otimes[\wedge^p T^*_{(1,0)}(M)]\wedge[\wedge^q T^*_{(0,1)}(M)]$$

在给定的坐标卡及 E 的局部标架 $\{e_i\}$ 下, 我们定义 $\overline{\partial}$ 在上述向量丛的作用为

$$\overline{\partial}\left[\sum_{k=1}^{\dim E}\sum_{I,J} f^k_{I,J}e_k\otimes(\wedge \mathrm{d}z_I)\wedge(\wedge \mathrm{d}\overline{z}_J)\right]=\sum_{k=1}^{\dim E}\sum_{I,J}\overline{\partial}(f^k_{I,J})e_k\otimes(\wedge \mathrm{d}z_I)\wedge(\wedge \mathrm{d}\overline{z}_J)$$

其中 I,J 遍历严格递增指标集 $(i_1,\cdots,i_p),(j_1,\cdots,j_q)$, 外积 $\wedge \mathrm{d}z_I=\bigwedge_{n=1}^{p}\mathrm{d}z_{i_n}$. 以此我们不难得到如下的链复形

$$\Omega^{(p,0)}(M,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\Omega^{(p,1)}(M,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\cdots$$

以此我们能够导出如下的 Dolbeaut 同调:

$$H^{(p,q)}(M,E)=\frac{\ker[\Omega^{(p,q)}(M,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\Omega^{(p,q+1)}(M,E)]}{\mathrm{im}[\Omega^{(p,q-1)}(M,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\Omega^{(p,q)}(M,E)]}$$

命题 1 记复形式 $w_i\in\Omega^{(p_1,q_1)}(M)$ 在 $H^{(p_i,q_i)}(M)$ 中的同调类为 $[w_i]$, 则

$$[w_1\wedge w_2]\in H^{(p_1+p_2,q_1+q_2)}(M)$$

且不依赖于同调类 $[w_{1,2}]$ 中具体代表元的选取, 换言之, 对于 $[w_i]=[w_i']$ 成立 $[w_1\wedge w_2]=[w_1'\wedge w_2']$.

Proof. 若 w_1,w_2 均是 $\overline{\partial}$ 闭形式, 则

$$\overline{\partial}(w_1\wedge w_2)=\overline{\partial}w_1\wedge w_2+(-1)^{p_1+q_1}w_1\wedge\overline{\partial}w_2=0$$

从而 $w_1\wedge w_2$ 同样是 $\overline{\partial}$ 闭形式, 现在取 $w_1'=w_1+\overline{\partial}u_1, w_2=w_2+\overline{\partial}u_2$, 则

$$\begin{aligned}
[w_1'\wedge w_2']&=[(w_1+\overline{\partial}u_1)\wedge(w_2+\overline{\partial}u_2)]\\
&=[w_1\wedge w_2]+[(-1)^{(p_1+q_1)(p_2+q_2-1)}\overline{\partial}u_2\wedge w_1+0]+[\overline{\partial}u_1\wedge w_2+0]+[\overline{\partial}u_1\wedge\overline{\partial}u_2+0]\\
&=[w_1\wedge w_2]+[(-1)^{(p_1+q_1)(p_2+q_2-1)}\overline{\partial}(u_2\wedge w_1)]+[\overline{\partial}(u_1\wedge w_2)]+[\overline{\partial}(u_1\wedge\overline{\partial}u_2)]\\
&=[w_1\wedge w_2]+0+0+0=[w_1\wedge w_2]
\end{aligned}$$

□

推论 2 全部 Dolbeaut 同调在如上定义的外积下形成了代数 $\bigoplus_{p,q} H^{(p,q)}(M)$.

定理 3 若 M 是紧的 m 维 Kähler 流形, 则 M 作为 $2m$ 维实流形的偶数阶 Betti 数 $b_{2r}(M) \neq 0$, 其中 $r = 1, \cdots, m$.

Proof. 关键在于证明 $H^{2r}(M) \neq 0$, 这里 H^{2r} 是 M 的 $2r$ 阶 De Rham 同调群.

取定 M 的 Kähler 度量 $\mathrm{d}s^2$ 所对应的 $(1,1)$-形式 W, 这形式作为微分形式满足 $\mathrm{d}W = 0$, 从而 $\mathrm{d}W^r \equiv 0$.

现在假定某个 W^r 是恰当的, 也即存在 $\mathrm{d}V = W^r$, 则 $W^m = W^{m-r} \wedge \mathrm{d}V$ 也是恰当的, 进而

$$\int_M W^m = \int_M \mathrm{d}(V \wedge W^{m-r}) = \int_{\partial M} V \wedge W^{m-r} = 0$$

然而从 Wirtinger 定理 $\int_M W^m = V(M)m! \neq 0$, 则产生了矛盾, 说明 W^r 总不是恰当的微分形式, 进而 $H^{2r}(M) \neq 0$. □

2 Hodge 定理

Hodge 定理的目的在于为 Dolbeaut 同调 $H^{(p,q)}(M,E)$ 找到一组较为好的代表元.

2.1 反全纯微分算子 $\overline{\partial}$

定义 1 取定复流形 M 及一点 $P \in M$, 若 $T_{(0,1)}(M)$ 及其上向量丛 E 各自带有 Hermite 度量 $\mathrm{d}s_M^2, \mathrm{d}s_M^2$, 在这度量 (内积) 下各自在取定 P 附近的正交标架 $\{v_1, \cdots, v_m\}, \{e_1, \cdots, e_r\}$, 我们构造 $\Omega_P^{(p,q)}(M,E)$ 上的 Hermite 度量符合要求:

(i) 全部 $e_k \otimes (\wedge v_I) \wedge (\wedge \bar{v}_J)$ 是一组正交基.

(ii) $e_k \otimes (\wedge v_I) \wedge (\wedge \bar{v}_J)$ 的模长为 2^{p+q}

其中 I, J 遍历严格递增指标集 $(i_1, \cdots, i_p), (j_1, \cdots, j_q)$, 外积 $\wedge \mathrm{d}z_I = \bigwedge_{n=1}^{p} \mathrm{d}z_{i_n}$. 上述内积不难证明是坐标变化下不变的, 将这内积记为 $(,)_P$.

我们从此一点上向量的内积出发定义如下整个向量丛截影的内积:

定义 2 对截影 $w, v \in \Omega^{(p,q)}(M,E)$ 定义内积

$$(w,v)_{(p,q)} = \int_M (w_P, v_P)_P \mathrm{dV}$$

进而记 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E)$ 是如上内积空间的完备化, 则其为 Hilbert 空间.

现在我们来对算子 $\overline{\partial} : \Omega_*^{(p,q)}(M,E) \to \Omega_*^{(p,q+1)}(M,E)$ 进行延拓, 为此在 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E) \times \Omega_*^{(p,q+1)}(M,E)$ 上构造内积

$$(,)_* = ()_{(p,q)} + ()_{(p,q+1)}$$

现在取空间 $G(F) = \{(x, \overline{\partial}x) \mid x \in \mathrm{Dom}\ \overline{\partial}\}$, 若 $(x_1, y), (x_2, y) \in G(F)^\perp$, 则

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\ \overline{\partial}, \begin{cases} (x_1, x) + (y, Fx) = 0 \\ (x_2, x) + (y, Fx) = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathrm{Dom}\ \overline{\partial}, (x_1 - x_2, x) = 0$$

由于 Dom $\overline{\partial} = \Omega^{(p,q)}(M,E)$ 在 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E)$ 中稠密, 则只能 $x_1 = x_2$, 从而我们依规则可指定算子 $\overline{\partial}^* : \Omega_*^{(p,q+1)}(M,E) \to \Omega_*^{(p,q)}(M,E)$:

$$\overline{\partial}^* : y \to \overline{\partial}^* y, \text{s.t. } (-\overline{\partial}^* y, y) \in G(\overline{\partial})^\perp$$

此时

$$\begin{aligned} ((x, \overline{\partial}x), (-\overline{\partial}^* y, y))_* &= (\overline{\partial}x, y)_{(p,q+1)} - (x, \overline{\partial}^* y)_{(p,q)} \\ &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (\overline{\partial}x, y)_{(p,q+1)} = (x, \overline{\partial}^* y)_{(p,q)}$$

现在考虑 $G(\overline{\partial}^*)^\perp$, 其同样指定了一个算子 $\overline{\partial}^{**}$, 则

$$G(\overline{\partial}^{**}) = \overline{G(\overline{\partial})}$$

于是我们得到了闭算子 $\overline{\partial}^{**}$, 用其替换 $\overline{\partial}$.

引理 4 取定 $h \in [h] \in H^{(p,q)}(M,E)$, 则 $\|h\| = \sqrt{(h,h)_{(p,q)}}$ 在 $[h]$ 的全部成员中最小当且仅当

$$\overline{\partial}h = \overline{\partial}^* h = 0$$

Proof. 显然 $\overline{\partial}h = 0$, 若 $\|h\|$ 最小, 则对任意 $v \in \Omega^{(p,q-1)}(M,E)$ 有

$$(h + t\overline{\partial}v, h + t\overline{\partial}v) = \|h\|^2 + 2t\Re(\overline{\partial}v, h) + t^2\|\overline{\partial}v\|^2$$

$$(h + \mathrm{i}t\overline{\partial}v, h + \mathrm{i}t\overline{\partial}v) = \|h\|^2 + 2t\Im(\overline{\partial}v, h) + t^2\|\overline{\partial}v\|^2$$

均在 $t = 0$ 时有最小值, 从而 $(\overline{\partial}v, h) = \Re(\overline{\partial}v, h) + \mathrm{i}\Im(\overline{\partial}v, h) = 0$, 也即

$$\forall v \in \Omega^{(p,q-1)}(M,E), (v, \overline{\partial}^* h) = 0$$

于是 $\overline{\partial}^* h = 0$.

反向命题显然. □

若 $\overline{\partial}h = 0, \overline{\partial}^* h = 0$, 我们实际有

$$\begin{aligned} (\overline{\partial}h, \overline{\partial}v)_{(p,q+1)} + (\overline{\partial}^* h, \overline{\partial}^* v)_{(p,q-1)} &= (\overline{\partial}^*\overline{\partial}h, v)_{(p,q)} + (\overline{\partial}\overline{\partial}^* h, v)_{(p,q)} \\ &= ((\overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*)h, v)_{(p,q)} = 0 \end{aligned}$$

定义 3 取定复流形 M 及其上向量丛 E, 命 $\mathrm{d}s_M^2, \mathrm{d}s_E^2$ 是 $T_{(1,0)}(M)$ 与 E 上的 Hermite 度量, $\overline{\partial}^*$ 是相应构造出来的 $\overline{\partial}$ 的伴随算子, 则称

$$\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*$$

是这组几何结构下给出的 Laplace 算子, 方程 $\Delta_{\overline{\partial}}h = 0$ 在 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E)$ 上的解被称为 E-值 (p,q)-调和形式, 其全体被记为 $\mathscr{H}^{(p,q)}(M,E)$.

定理 5 (Hodge 定理) 若 M 是紧复流形, 对其上的纤维丛 E 有

$$\mathscr{H}^{(p,q)}(M,E) \subset \Omega^{(p,q)}(M,E)$$

$$\mathscr{H}^{(p,q)}(M,E) \simeq H^{(p,q)}(M,E)$$

$$\dim \mathscr{H}^{(p,q)}(M,E) < \infty$$

2.2 星算子 $*$

定义 4 对紧复流形 M 及其上的向量丛 E, 我们取定 $T_{(1,0)}(M)$ 与 E 的 Hermite 度量 $\mathrm{d}s_M^2, \mathrm{d}s_E^2$, 对于一点 P 的附近的坐标卡, 我们取定这度量下的正交局部标架 $\{v_1, \cdots, v_m\}, \{e_1, \cdots, e_r\}$, 我们定义星算子 $*$ 如下:

$$\begin{aligned}
* :&\Omega^{(p,q)}(M,E) \to \Omega^{(m-p,m-q)}(M,E) \\
&\sum_{k=1}^{r}\sum_{I,J} f_{I,J}^k e_k \otimes (\wedge v^I) \wedge (\wedge \overline{v}^J) \to C_{m,p,q}\sum_{k=1}^{r}\sum_{I,J} \sigma_{I,J}\overline{f_{I,J}^k} e_k^* \otimes (\wedge v_{I^c}) \wedge (\wedge \overline{v}_{J^c})
\end{aligned}$$

其中 $I \cup I^c = J \cup J^c = \{1, \cdots, m\}$, 且依旧递增排列, 系数 $C_{(m,p,q)}$ 与 $\sigma_{I,J}$ 分别为

$$C_{(m,p,q)} = 2^{p+q}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}+q(m-p)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m$$

$$\sigma_{I,J} = \mathrm{sgn}(I, I^c)\mathrm{sgn}(J, J^c)$$

这局部表示是坐标变换下不变的, 同时由于仅是代数变换而可延拓至 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E)$ 上.

$**(w) = (-1)^{p+q}\omega$, 从而 $*$ 实际是线性同构.

引理 6 对 $w, v \in \Omega^{(p,q)}(M,E)$, 恒成立 $(w,v)_{(p,q)} = \displaystyle\int_M w \wedge *(v)$

Proof. 取定 $W = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} v^i \wedge \overline{v}^i$, 在局部表示下通过一番艰苦运算验证

$$(w,v)_P \frac{W^m}{m!} = w_P \wedge *(v_P)$$

成立即可. □

定理 7 在 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E), \Omega_*^{(p,q+1)}(M,E)$ 中 $\overline{\partial}^* = - * \overline{\partial} *$.

Proof.

$$\begin{aligned}
(\overline{\partial}w, v) &= \int_M \overline{\partial}w \wedge *v = \int_M \overline{\partial}(w \wedge *v) - \int_M (-1)^{p+q} w \wedge \overline{\partial} * v \\
&= \int_M \mathrm{d}(w \wedge *v) - \int_M w \wedge * * \overline{\partial} * v \\
&= \int_{\partial M} w \wedge *v - (w, *\overline{\partial} * v) = (w, - * \overline{\partial} * v)
\end{aligned}$$

从而命题在 $\Omega^{(p,q)}(M,E)$ 中成立, 后者在 $\Omega_*^{(p,q)}(M,E)$ 中稠密, 则命题成立. □

推论 8 $\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^* = -(*\overline{\partial} * \overline{\partial} + *\overline{\partial} * \overline{\partial})$, 注意到 $** = (-1)^{p+q}\mathrm{id}$, 则 $*\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\overline{\partial}}*$.

定理 9 (小平 – Serre 对偶) 对 m 维紧复流形 M 及其上解析向量丛 E, 当 $0 \le p, q \le m$ 时, 成立

$$H^{(p,q)}(M,E) \simeq H^{(m-p,m,q)}(M,E^*)$$

Proof. 由于 $*\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\overline{\partial}}*$, 则对 $w \in \Omega^{(p,q)}(M,E)$, $\Delta w = 0$ 当且仅当 $*\Delta w = 0$, 也即 $\Delta * w = 0$, 对 $w' \in \Omega^{(m-p,m-q)}(M,E)$, 我们同样也便得到 $\Delta_{\overline{\partial}} w' = 0$ 当且仅当 $\Delta_{\overline{\partial}} * w' = 0$, 于是我们有如下同构:

$$\mathscr{H}^{(p,q)}(M,E) \overset{*}{\simeq} \mathscr{H}^{(m-p,m-q)}(M,E)$$

又从 Hodge 定理等号两边各自与相应的 Dolbeaut 同调群同构, 从而命题成立. □

定理 10 对 m 维紧复流形及其上解析向量丛 E, 当 $0 \le p, q \le m$ 时, 成立

$$\mathrm{H}^{(p,q)}(M,E)^* \simeq \mathrm{H}^{(m-p,m-q)}(M,E^*)$$

相应的同构关系由 $\mathrm{H}^{(p,q)}(M,E) \times \mathrm{H}^{(m-p,m-q)}(M,E) \to \mathbb{C}, (w,v) \to \int_M w \wedge v$ 给出.

Proof. 首先我们来证明 $\int_M w \wedge v$ 仅与 w, v 的 Dolbeaut 同调类确定, 为此假定 $w = \overline{\partial} v$ 是恰当形式, 进而

$$\int_M \overline{\partial} u \wedge v = \int_M \overline{\partial}(u \wedge v) = \int_M \mathrm{d}(u \wedge v) = \int_{\partial M} u \wedge v = 0$$

对恰当的 v 我们有同样的结论, 进而我们不妨假定 w, v 均是调和形式, 则我们有

$$\forall v \in \mathrm{H}^{(m-p,m-q)}(M,E), \left(w \to \int_M w \wedge v\right) \in \mathrm{Hom}[\mathrm{H}^{(p,q)}(M,E), \mathbb{C}]$$

注意到

$$\int_M *v \wedge v = (-1)^{p+q} \int_M *v \wedge **v = (-1)^{p+q} (*v, *v)_{(p,q)} \neq 0$$

则 $w \to \int_M w \wedge v$ 在 $w \neq 0$ 时是 $\mathrm{H}^{(p,q)}(M,E)$ 中非零的对象, 从 Hodge 定理及小平 − Serre 对偶又有 $\dim H^{(p,q)}(M,E) = \dim H^{(m-p,m-q)}(M,E) < \infty$, 于是

$$v \to \left(w \to \int_M w \wedge v\right)$$

实际给出了我们所需的线性同构. □

推论 11 $\mathrm{H}^{(0,q)}(M,E)^* \simeq \mathrm{H}^{(m,m-q)}(M,E^*) \simeq \mathrm{H}^{(0,m-q)}(M, E^* \otimes \wedge^m T^*_{(1,0)}(M))$

例 1 取定紧 Riemann 曲面 R, 其上有除子 D 定义的线从 $[D]$, 考虑小平 − Serre 对偶

$$\mathrm{H}^{(0,1)}(R,[D]) \simeq \mathrm{H}^{(0,0)}(R,[D]^* \otimes T^*_{(1,0)}(R))$$

取 $[D]$ 上典则截影 s_D, 对任意 $w \in \mathrm{H}^{(0,0)}(R,[-D] \otimes T^*_{(1,0)}(R))$ 即有亚纯微分形式 $u = s_D w$, 使得

$$\mathrm{div} u - D = \mathrm{div} w \ge 0$$

于是 $i(D) = \{u \mid \mathrm{div} u \ge D\} \simeq \mathrm{H}^{(0,1)}(R,[D])$.

3 Kähler 流形上的 Hodge 分解

定义 5 取定链复形 $\wedge^1 T^*(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \wedge^2 T^*(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots$, 其中 d 是微分形式上的外微分算子, 则我们有复流形 M 上的 De Rham 同调群如下

$$\mathrm{H}^r(M,\mathbb{C}) = \frac{\ker[\wedge^r T^*(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \wedge^{r+1} T(M,\mathbb{C})]}{\mathrm{im}[\wedge^{r-1} T^*(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{d}} \wedge^r T^*(M,\mathbb{C})]}$$

基于 De Rham 同调有相应的 Hodge 定理与 Laplace 算子 Δ_d 与调和形式 $\mathscr{H}^r(M,\mathbb{C})$.

我们将说明 Kähler 流形上的两种同调群: Dolbeaut 同调和 De Rham 同调的关系, 这关系的证明主要依赖于 Laplace 算子 $\Delta_\mathrm{d}, \Delta_{\overline{\partial}}$ 之间的关系, 为此我们来详细讨论两种算子.

3.1 Step I: $\mathbb{C}^m$

记

$$\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)=\{w\in\Omega^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)\mid \mathrm{supp} w compact\}$$

在内积 $(,)_{(p,q)}$ 下这是一个内积空间.

现在取定算子

$$e_i:\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)\to\Omega_0^{(p+1,q)}(\mathbb{C}^m),w\to \mathrm{d}z^i\wedge w$$
$$\overline{e}_j:\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)\to\Omega_0^{(p,q+1)}(\mathbb{C}^m),w\to \mathrm{d}\overline{z}^i\wedge w$$
$$\partial_i:\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)\to\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m),w\to \frac{\partial w}{\partial z^i}$$
$$\overline{\partial}_j:\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)\to\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m),w\to \frac{\partial w}{\partial \overline{z}^i}$$

并记这四个算子的伴随算子为 $l_i,\bar{l}_j,\partial^*,\overline{\partial}^*$, 进而

$$(l_i(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J),v)=(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J,\mathrm{d}z^i\wedge v)$$

注意到 $\mathrm{d}z^i\wedge v$ 各项总有外积项 $\mathrm{d}z^i$, 于是 $l_i(\mathrm{d}z^I\wedge\mathrm{d}\overline{z}^J)=0\Leftrightarrow i\notin I$.

同时又有

$$(l_i(f\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J),v)=(f\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J,\mathrm{d}z^i\wedge v)=2(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J,v)$$

从而

$$l_ie_i(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J)=\begin{cases}2f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J,i\notin I\\0,i\in I\end{cases}\quad e_il_i(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J)=\begin{cases}2f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J,i\in I\\0,i\notin I\end{cases}$$

于是 $l_ie_i+e_il_i=2\mathrm{id}$, 同理我们还有 $\bar{l}_i\overline{e}_i+\overline{e}_i\bar{l}_i=2\mathrm{id}$.

另一方面, 当 $i\notin I$ 时, $l_ie_j(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J)+e_jl_i(f\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J)=0$, 否则则有

$$\begin{aligned}l_ie_j(f\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J)&=l_i(f\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}z^i\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J)\\&=-2f\mathrm{d}z^j\wedge\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z}^J=-e_jl_i(f\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}z^I\wedge \mathrm{d}\overline{z})\end{aligned}$$

从而我们得到 $i\neq j$ 时 $l_ie_j+e_jl_i=0$, 同理有 $\bar{l}_i\overline{e}_j+\overline{e}_j\bar{l}_i=0$ 以及 $\bar{l}_ie_j+e_j\bar{l}_i=0$ 对任意 i,j 成立.

注意到

$$\int_{\mathbb{C}^m}\partial_i(f)\overline{g}\mathrm{d}V+\int_{\mathbb{C}^m}f\overline{\overline{\partial}_i(g)}\mathrm{d}V=\int_{\mathbb{C}^m}\partial_i(f\overline{g})\mathrm{d}V=0$$

从而 $(\partial_iw,v)+(w,\overline{\partial}_iv)=0$, 进而我们知道

$$\partial_i^*=-\overline{\partial}_i,\overline{\partial}_i^*=\partial_i$$

取定 $W=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^m\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}\overline{z}^i$, 我们定义算子

$$L:\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)\to\Omega_0^{(p+1,q+1)}(\mathbb{C}^m),v\to W\wedge v$$

同时定义 Λ 是 L 的伴随算子, 则我们有表示

$$L=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^m e_i\overline{e}_i,\Lambda=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^m l_i\bar{l}_i$$

$$\mathrm{d}=\partial+\overline{\partial}=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}\partial_i e_i+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}\overline{\partial}_i\overline{e}_i$$

$$\mathrm{d}^*=\partial^*+\overline{\partial}^*=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}l_i\overline{\partial}_i+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}\overline{l}_i\partial_i$$

引理 12 $[\Lambda,\partial]=\mathrm{i}\overline{\partial}^*,[\Lambda,\overline{\partial}]=-\mathrm{i}\partial^*$

Proof.

$$\begin{aligned}[\Lambda,\partial]&=\Lambda\partial-\partial\Lambda\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(l_i\bar{l}_i\partial_j e_j-\partial_j e_j l_i\bar{l}_i)\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}(l_i\bar{l}_i\partial_i e_i-\partial_i e_i l_i\bar{l}_i)-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i\neq j}^{m}(l_i\bar{l}_i\partial_j e_j-\partial_j e_j l_i\bar{l}_i)\\&=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}\partial_i(l_i\bar{l}_i e_i-e_i l_i\bar{l}_i)-\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i\neq j}^{m}\partial_j(l_i\bar{l}_i e_j-e_j l_i\bar{l}_i)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m}\partial_i(l_i e_i+e_i l_i)\bar{l}_i+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i\neq j}^{m}\partial_j(l_i e_j+e_j l_i)\bar{l}_i\\&=\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m}\partial_i\bar{l}_i=\mathrm{i}\overline{\partial}^*\end{aligned}$$

取共轭即得另一式. □

引理 13 在 $\Omega_0^{(p,q)}(\mathbb{C}^m)$ 上, $[\Lambda,L]=(m-p-q)\mathrm{id}$

Proof.

$$\begin{aligned}\Lambda L&=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\bar{l}_i l_i e_i\overline{e}_i+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}^{m}\bar{l}_i l_i e_j\overline{e}_j\\&=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\bar{l}_i(2-e_i l_i)\overline{e}_i+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}^{m}e_j\overline{e}_j\bar{l}_i l_i\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\bar{l}_i\overline{e}_i-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}e_i\bar{l}_i\overline{e}_i l_i+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}^{m}e_j\overline{e}_j\bar{l}_i l_i\\&=m-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_i\bar{l}_i-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}e_i(2-\overline{e}_i\bar{l}_i)l_i+\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}^{m}e_j\overline{e}_j\bar{l}_i l_i\\&=m-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{e}_i\bar{l}_i+e_i l_i)+L\Lambda\end{aligned}$$

注意到

$$\overline{e}_j\bar{l}_j(f\mathrm{d}z^I\wedge\mathrm{d}\overline{z}^J)=\begin{cases}2f\mathrm{d}z^I\wedge\mathrm{d}\overline{z}^J,j\in J\\0,j\notin J\end{cases}\qquad e_i l_i(f\mathrm{d}z^I\wedge\mathrm{d}\overline{z}^J)=\begin{cases}2f\mathrm{d}z^I\wedge\mathrm{d}\overline{z}^J,i\in I\\0,i\notin I\end{cases}$$

则 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\overline{e}_i\bar{l}_i+e_i l_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\overline{e}_i\bar{l}_i+\frac{1}{2}e_i l_i=p+q$, 从而

$$\Lambda L=(m-p-q)\mathrm{id}+L\Lambda$$

于是命题得证. □

3.2 One Step Closer: Kähler 流形

不难将算子 L, Λ 推广到 Kähler 流形上.

定理 14 在 Kähler 流形上成立

$$[\Lambda, \partial] = \mathrm{i}\overline{\partial}^*, [\lambda, \overline{\partial}] = -\mathrm{i}\partial^*$$

$$[\Lambda, L] = (m-p-q)\mathrm{id}$$

Proof. 注意到 K aler 流形上的度量在局部上有表示

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{m} [\delta_{ij} + O(|Z|^2)]\mathrm{d}z^i \otimes \mathrm{d}\overline{z}^j$$

则对点 P 上的坐标卡我们可以选取 $T^*_{(1,0)}$ 上的一组正交标架 $\theta^{1\leq i\leq m}$ 满足

$$\mathrm{d}\theta^i_P = 0$$

从而 $\partial(\theta^i_P), \partial(\overline{\theta}^j_P) = 0$, 考虑 $\partial(f_P\theta^I_P \wedge \overline{\theta}^J_P)$ 的结果, 即得

$$\begin{aligned}
\partial(f_P\theta^I_P \wedge \overline{\theta}^J_P) &= \partial f_P \wedge \theta^I_P \wedge \overline{\theta}^J_P + f_P\partial\theta^I_P \wedge \overline{\theta}^J_P + f_P\theta^I_P \wedge \partial\overline{\theta}^J_P \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial z^i}\right|_P \mathrm{d}z^i_P \wedge \mathrm{d}\theta^I_P \wedge \mathrm{d}\overline{\theta}^J_P \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i e_i(f_P\mathrm{d}\theta^I_P \wedge \mathrm{d}\overline{\theta}^J_P)
\end{aligned}$$

从而 $\partial = \sum_{i=1}^{m} \partial_i e_i$ 在 P 上成立, 同理 $\overline{\partial} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\partial}_i\overline{e}_i$ 在 P 上成立.

注意到 $W = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m} \theta^i \wedge \overline{\theta}^i = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}z^i \wedge \mathrm{d}\overline{z}^i$, 于是 $L = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i\overline{e}_i$, 进而依照从前的证明我们依旧在 P 上有

$$[\Lambda, \partial] = \mathrm{i}\overline{\partial}^*, [\lambda, \overline{\partial}] = -\mathrm{i}\partial^*$$

$$[\Lambda, L] = (m-p-q)\mathrm{id}$$

上式算子不受具体标架影响, 从而点点成立. □

定理 15 在 Kähler 流形上成立

$$\Delta_{\mathrm{d}} = 2\Delta_{\overline{\partial}}$$

Proof. 直接计算

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{d}} &= \mathrm{dd}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d} + (\partial + \overline{\partial})(\partial^* + \overline{\partial}^*) + (\overline{\partial}^* + \partial^*)(\overline{\partial} + \partial) \\
&= (\partial\partial^* + \partial^*\partial + \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}) + (\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial) + (\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial}^*)
\end{aligned}$$

对于后两项, 我们有

$$\begin{aligned}
\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial &= -\mathrm{i}(\partial[\Lambda, \partial] + [\Lambda, \partial]\partial) \\
&= -\mathrm{i}(\partial\Lambda\partial - \partial^2\Lambda + \Lambda\partial^2 - \partial\Lambda\partial) = 0
\end{aligned}$$

取共轭即得 $\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial}^* = 0$.

对于第一项, 则有

$$\begin{aligned}\partial\partial^* + \partial^*\overline{\partial} &= \mathrm{i}(\partial\Lambda\overline{\partial} - \partial\overline{\partial}\Lambda + \Lambda\overline{\partial}\partial - \overline{\partial}\Lambda\partial) \\ &= -\mathrm{i}(\partial\overline{\partial}\Lambda - \partial\Lambda\overline{\partial} + \overline{\partial}\Lambda\partial - \Lambda\overline{\partial}\partial) = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}\end{aligned}$$

从而 $\Delta_{\mathrm{d}} = 2\overline{\partial}\overline{\partial}^* + 2\overline{\partial}^*\overline{\partial} = 2\Delta_{\overline{\partial}}$. □

3.3 In the End: 两种上同调

定理 16 取定 m 维紧 Kähler 流形 M, 则对 $r = 0, \cdots, 2m$ 成立

$$\mathrm{H}^r(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \mathrm{H}^{(p,q)}(M)$$

Proof. 从定理 15 我们知道 Δ_{d} 与 $\Delta_{\overline{\partial}}$ 的调和形式一致, 此时对 $w \in \mathscr{H}^r(M, \mathbb{C})$ 作唯一分解

$$w = \sum_{p+q=r} w^{(p,q)}$$

其中 $w^{(p,q)}$ 是 w 在 $\Omega^{(p,q)}(M)$ 中的分量, 而

$$0 = \Delta_{\mathrm{d}} w = \sum_{p+q=r} \Delta_{\mathrm{d}} w^{(p,q)} = 2 \sum_{p+q=r} \Delta_{\partial} w^{(p,q)}$$

则 $\Delta_{\overline{\partial}} w^{(p,q)} = 0$, 使得 $w^{(p,q)} \in \mathscr{H}^{(p,q)}(M)$, 反向的论述显然成立, 进而我们不难得知

$$\mathscr{H}^r(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} \mathscr{H}^{(p,q)}(M)$$

此时利用两个同调的 Hodge 定理即得命题的成立. □

引理 17 在紧 Kähler 流形上成立 $\overline{\mathrm{H}^{(p,q)}(M)} \simeq \mathrm{H}^{(q,p)}(M)$

Proof. 注意到 Δ_{d} 是实算子, 于是 $\overline{\Delta}_{\mathrm{d}} = \Delta_{\mathrm{d}}$ 则从定理 15 $\Delta_{\overline{\partial}}$ 也是实算子, 于是

$$\Delta_{\overline{\partial}} w = 0 \Leftrightarrow \Delta_{\overline{\partial}} \overline{w} = 0$$

这使得 $\overline{\mathscr{H}^{(p,q)}(M)} \simeq \mathscr{H}^{(q,p)}(M)$, 再从 Dolbeaut 同调的 Hodge 定理, 即得命题的成立. □

定理 18 紧 Kähler 流形 M 的奇数阶 Betti 数 b_{2r+1} 为偶数.

Proof. 从定理 16 有

$$b_{2r+1} = \dim \mathrm{H}^{2r+1}(M, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=2r+1} \dim \mathrm{H}^{(p,q)}(M)$$

又从引理 17 $\dim \mathrm{H}^{(p,q)}(M) = \dim \mathrm{H}^{(q,p)}(M)$, 于是命题成立. □

4 陈类

考虑微分流形 M 上的复向量丛 E, 考虑其上联络 ∇ 给出的曲率张量

$$\Omega = \mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega$$

这里 ω 是联络矩阵. 由于 Ω 对标架变换 A 满足

$$\Omega = A\widetilde{\Omega}A^{-1}$$

因此 Ω 实际是向量丛 $E\otimes E^*\otimes\wedge^2T^*(M)$ 的截影, 根据这变换关系, 我们定义

定义 6 记 $A=(x_{\alpha,\eta})_{r\times r}$ 为不定元集合, 构造多元多项式

$$P(A)=\det(I+\mathrm{i}A/2\pi)=\sum_{k=0}^{r}P_k(A)$$

其中 $P_K(A)$ 是多项式的 k 次齐次部分.

注 1 考虑 $P(\Omega)$, 则其齐次项 $P_k(\Omega)$ 为 $2k$ 次微分形式.

引理 19 记 $P(\Omega)$ 关于 $\Omega_{\alpha,\beta}$ 的形式偏导数为 $\dfrac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}$, 则

$$\left(\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}\right)^{\mathrm{T}}_{r\times r}\Omega=\Omega\left(\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}\right)^{\mathrm{T}}_{r\times r}$$

Proof. 采用摄动法, 注意到 $P(\Omega)$ 是相似不变量, 则

$$P_k[(I+tE_{\alpha,\beta})\Omega]=P_k[\Omega(I+tE_{\alpha,\beta})]$$

对 t 求导即得

$$\sum_{s,t=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{s,t}}(E_{\alpha\beta}\Omega)_{s,t}=\sum_{s,t=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{s,t}}(\Omega E_{\alpha,\beta})_{s,t}$$

从 $E_{\alpha,\beta}$ 的作用效果, 上式也即

$$\sum_{t=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,t}}(E_{\alpha,\beta}\Omega)_{\alpha,t}=\sum_{s=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{s,\beta}}(\Omega E_{\alpha,\beta})_{s,\beta}$$

进而即得

$$\sum_{t=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,t}}\Omega_{\beta,t}=\sum_{s=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{s,\beta}}\Omega_{s,\alpha}$$

这便是命题所需的具体展开式. □

定理 20 针对复向量丛 E 上联络 D 曲率形式 Ω, 有

(i) $\mathrm{d}P_k(\Omega)=0$;

(ii) $P_k(\Omega)$ 是实的微分形式, 且其所在的 De Rham 同调类是向量丛 E 的内蕴指标, 与 D 无关.

Proof. 首先来证明 (i) 的成立, 注意到 $\Omega_{\alpha,\beta}$ 在 $P_k(\Omega)$ 的每一项中至多出现一次, 则我们形式上地有

$$\mathrm{d}P_k(\Omega)=\sum_{s,t=1}^{r}\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{s,t}}\mathrm{d}\Omega_{s,t}=\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}\right)^{\mathrm{T}}_{r\times r}\mathrm{d}\Omega\right]$$

进一步应用 Bianchi 恒等式我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega&=\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}\right)^{\mathrm{T}}_{r\times r}(\omega\wedge\Omega-\Omega\wedge\omega)\right]\\&=\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}\right)^{\mathrm{T}}_{r\times r}\omega\wedge\Omega\right]-\mathrm{tr}\left[\left(\frac{\partial P_k(\Omega)}{\partial\Omega_{\alpha,\beta}}\right)^{\mathrm{T}}_{r\times r}\Omega\wedge\omega\right]=0\end{aligned}$$

现在我们来证明 P_k 确定的同调类与具体联络无关, 为此我们考虑两个联络 ∇_0,∇_1, 对标架变换 A 其联络矩阵 ω_0,ω_1 成立

$$t\omega_1 A = \mathrm{d}t\omega_1 + At\omega_1 A^{-1}$$

$$(1-t)\omega_0 A = \mathrm{d}(1-t)\omega_0 + A(1-t)\omega_0 A^{-1}$$

加和即得

$$(t\omega_1 + (1-t)\omega_0)A = \mathrm{d}(t\omega_1 + (1-t)\omega_0) + A(t\omega_1 + (1-t)\omega_0)A^{-1}$$

于是我们有如下的联络之间的同伦:

$$\nabla_t = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$$

考虑微分算子 $\tilde{\mathrm{d}} = \mathrm{d} + \dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}t$, 则不难证明

$$\widetilde{\Omega}_t = \tilde{\mathrm{d}}\omega_t - \omega_t \wedge \omega_t$$

同样满足 Bianchi 恒等式与引理 19, 从前同样有 $\tilde{\mathrm{d}}P_k(\widetilde{\Omega}_t) = 0$, 若假定 $P_k(\widetilde{\Omega}_t) = h + g\wedge \mathrm{d}t$, 其中 h 不含 $\mathrm{d}t$, 则即得

$$\mathrm{d}h + \frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}t = 0$$

考虑含 $\mathrm{d}t$ 的项, 上式也即 $\dfrac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{d}g = 0$, 积分得到

$$h|_{t=1} - h|_{t=0} = -\mathrm{d}\left(\int_0^1 g\mathrm{d}t\right)$$

则 $h|_{t=1} - h|_{t=0}$ 为恰当形式, 于是 $h|_{t=1} = P_k(\Omega_1), h\mid_{t=0} = P_k(\Omega_0)$ 在同一同调类中.

现在来证明实微分形式的成立, 为此考虑 E 上的一个 Hermite 度量及相应的联络 ∇, 则对于正交标架 $\{e_i\}$, 即得

$$(\nabla e_i, e_j) + (e_i, \nabla e_j) = 0$$

则联络 ∇ 的矩阵 ω 满足

$$\omega + \overline{\omega}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \Omega + \overline{\Omega}^{\mathrm{T}} = 0$$

从而 $\overline{P(\Omega)} = P(\Omega)$, 使得 $P_k(\Omega) = \overline{P_k(\Omega)}$, 也即其为实的微分形式. □

定义 7 取定微分流形 M 及其复向量丛 E, 定义多项式

$$P(\Omega) = \det(I - \mathrm{i}\Omega/2\pi)$$

的各个 k 次齐次项 $P_k(\Omega)$ 所在的实同调类 $c_k(E) \in \mathrm{H}^{2k}(M,\mathbb{R})$ 为复向量丛 E 的 k 阶陈类, 其中 Ω 是 E 上任意联络 ∇ 的曲率张量.

针对指标 $K = (k_0,\cdots,k_r)$ 满足 $k_0 + \cdots + k_r = n$, 定义复向量丛关于指标 K 的陈数为

$$c_K(E) = \int_M c_{k_0}(E)\wedge\cdots\wedge c_{k_r}(E)$$

特殊的, 取定 E 为 M 复切向量丛, 则将 E 的陈类称为流形 M 自身的陈类, 记作 $C_k(M)$.

例 2 取定复流形 M 上的复向量丛 E, 其上有 Hermite 度量 $\mathrm{d}s^2$, 取 ∇ 为与之相容的联络, 再取局部解析标架 $\{e_1,\cdots,e_r\}$, 取定相应的度量矩阵 $h=((e_i,e_j))_{r\times r}$, 则容许联络 ∇ 的联络矩阵为 $\omega=(\partial h)h^{-1}$, 从而可化简得到其曲率形式为

$$\Omega=\overline{\partial}[(\partial h)h^{-1}]$$

追加 E 是线丛的假定, 则 $h^{-1}=1/h$, 从而 $\Omega=\overline{\partial}\partial(\ln h)$, 再假设 M 是紧 Riemann 曲面 R, 即得 L 的陈数为

$$C_1(L)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_R\overline{\partial}\partial(\ln h)$$

假定 $D=\{U_\alpha,f_\alpha\}$ 为 L 的除子, 相应的坐标变换为 $h_{\alpha,\beta}=\dfrac{f_\alpha}{f_\beta}$, 注意到 h 是 L 上的 Hermite 度量矩阵只需

$$h|_{U_\beta}=|h_{\alpha,\beta}|^2h_{U_\alpha}$$

考虑到 $|f_{alpha}|^2=|h_{\alpha,\beta}|^2|f_\beta|^2$, 则我们不难通过 Poisson 积分等手段在保持边值的条件下将 f_α 处理为无极点与零点的函数 $\tilde{f}_\alpha$, 从而现在我们获得了度量矩阵 $|\tilde{f}_\alpha|^2$, 不妨假定 U_α 是对 M 的剖分, 从而对线丛 L 我们有

$$\begin{aligned}C_1(L)&=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_R\overline{\partial}\partial(\ln|\tilde{f}_\alpha|^{-2})\\&=\sum_\alpha\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{U_\alpha}\overline{\partial}\partial(\ln|\tilde{f}_\alpha|^{-2})=\sum_\alpha\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\partial U_\alpha}\partial(\ln|\tilde{f}_\alpha|^{-2})\\&=\sum_\alpha\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\partial U_\alpha}\frac{f'_\alpha}{f_\alpha}=\deg(D)\end{aligned}$$

定义 8 对复向量丛 E, 我们定义陈多项式 $Ch(E,x)=\sum\limits_{k=0}^{r}c_0(E)x^k$, 形式地分解这多项式为 $Ch(E,x)=\prod\limits_{k=0}^{r}(1+\gamma_kx)$, 称呼 γ_i 为 E 的陈根.

陈根作为形式记号, 其意义实际在于 γ_i 的基本对称多项式为陈类, 进而其对称多项式都是同调代数 $\bigoplus\limits_{r=0}^{m}\mathrm{H}^{2r}(M,\mathbb{R})$ 中的元素.

定理 21 取定 m 维数的紧复流形 M, 其上 r 维解析向量丛的陈根为 γ_i, 全纯切丛 $T_{(1,0)}(M)$ 的陈根为 δ_i, 则

$$\chi(E)=\int_M\left[\sum_{i=1}^{r}\mathrm{e}^\gamma\right]\wedge\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\delta_j}{1-\mathrm{e}^{-\delta_j}}\right]$$

其中 $\chi(E)=\sum\limits_{q=0}^{m}(-1)^q\dim\mathrm{H}^q(M,E)$

例 3 考虑 $m=1$ 时的情况, 即得

$$\dim\mathrm{H}^0(M,L)-\dim H^1(M,L)=\int_R\mathrm{e}^\gamma\wedge\frac{\delta}{1-\mathrm{e}^{-\delta}}=\int_R\left[c_1(L)+\frac{1}{2}c_1(T_{(0,q)})\right]$$

假若我们承认 $\int_R c_1(T_{(0,q)})=2-2g$, 其中 g 为紧 Riemann 曲面 R 的亏格, 则我们得到 Riemann-Roch 定理:

$$\dim\mathrm{H}^0(M,[D])-\dim\mathrm{H}^1(M,[D])=\deg(D)-g+1$$