群与代数表示笔记
代数表示

EndlieDownAHell

2023 年 11 月 24 日

概览

第三章的前半部分主要都在处理半单代数上的表示, §3.1 主要引入了本章所要表示的对象: 域上的代数, 这其中比较重要的结果便是如下两式之间的联系

$$A=\bigoplus_{i=1}^{n}A_i, 1=\sum_{i=1}^{n}e_i$$

其中 e_i 为 A_i 的中心幂等元, 且两两正交, 使得 $A_i=Ae_i$.

§3.2 则在域上代数的基础上引入了代数上模的概念, 配套的结果包括: 模 M 的直和分解及 Schur 引理. 这些内容实际与群表示是类似的, 将代数上模视为代数的表示, 单模便是代数的既约表示, 单模的自同态则从除环升格为了可除代数.

关于一般的代数上模的分解问题, 这问题首先被联系到了 $\mathrm{End}_A(E)$-正则模的直和分解上, 对于后者, 通过双边 Peirce 分解, 我们便给予了后者矩阵代数的形式.

§3.3 给出了有限维代数的有限维表示的一个初步的结果: 其是代数的正则模的合成因子, 这结论的先决条件是模上的 Jordan-Hölder 定理, 结果便是说明了有限维代数的有限维既约表示, 也即单模个数的有限, 这是我们对代数表示得到的原始结论之一.

§3.4 节首先将半单代数表示归结到了单代数的表示上, 对于单代数, 其特殊的矩阵结构 (这结构的寻得正仰仗于 §3.2 最后的结果) 则使得我们轻松说明了其单模, 也即既约表示的唯一性与存在性.

§3.4 节后期的工作则是关于半单代数分解唯一性的收尾以及所得结论在群表示上的应用.

§3.5 节是 §3.4 节结果的进一步推广, 借助 Jacobson 根的良好性质, 非半单代数上的既约表示的问题被很好地迁移到了伴随的半单代数上, 并得到了与半单代数几乎一致的结果.

逐节评注

§3.1 域上代数

这一节就是给出域上代数的定义和例子, 后文从结合代数的直和分解出发对幂等元进行了一番论述, 不难看到幂等元在代数的理想中充当着的幺元的任务.

Explanation 1 §3.1.4 叙述得有点乱, 我们以证明的形式进行一下梳理.

命题 1 对 F-代数 A 如下三个条件等价:

(i) A 可分解为若干代数的直积.

(ii) A 是非零理想的直和.

(iii) A 的单位元可分解为两两正交的中心幂等元.

Proof. (i)⇒(ii): 假定相应的分解为 $A=\prod\limits_{i\in I}A_i$, 此时取 I_i 为

$$I_i=\{(a_j)_{j\in I}\mid \forall j\neq i, a_j=0\}$$

显然 I_i 是 A 的理想, 对于直和, 只需注意到 I_i, I_j 的正交关系及

$$(a_i)_{i\in I}=(a_1,0,\cdots)+\cdots+(0,\cdots,0,a_i,\cdots)$$

即可.

(ii)⇒(iii): 取定直和表示为 $A=\bigoplus\limits_{i\in I}I_i$ 则立即有 $1=\sum\limits_{i\in I}e_i$ 成立, 进而

$$1^2=\sum_{i,j\in I}e_ie_j, 1=\sum_{i\in I}e_i$$

由于直和属性以及 $e_ie_j\in I_i\cap I_j$, 则成立 $e_ie_j=0, i\neq j$, 于是还有

$$\sum_{i\in I}e_i^2=\sum_{i\in I}e_i\Rightarrow\sum_{i\in I}e-e_i^2=0$$

这直接预示了 $e_i^2=e_i$, 对于中心属性的成立, 则更为简单, 首先 e_i, e_j 的之间的乘法交换性是不言而喻的, 对于一般的情形, 则只需通过线性表示即可.

(iii)⇒(i): 假定这分解为 $1=\sum\limits_{i\in I}e_i$, 则我们知道如下式子的成立

$$a=1a1=\sum_{i\in I}e_iae_i$$

另一方面, 考虑全体 $A_i=e_iA$, 假若存在 $e_1x=e_2y$, 即得 $e_1x=e_1^2x=e_1e_2y=0$, 则直和成立, 从而能够将 A 分解为 e_iA 的积. □

Explanation 2 关于中心本原幂等元未必本原, 我们有如下简单的例子:

例 1 考虑矩阵代数 $M_2(F)$, 这是典型的非交换代数, 单位矩阵 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 是一个自然的中心本原幂等元, 然而其又可做如下分解:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

不难验证这分解是幂等且正交的.

我们来对 §3.1.7 中命题的证明进行补充.

命题 2 取 e 为 A 的中心幂等元, 则 e 中心本原当且仅当 Ae 不能分解为 A 的非零理想的直和.

Proof. 若 Ae 非中心本原的, 即有分解 $e=\sum_{i\in I}e_i$, 其中 e_i 正交且幂等, 于是得到

$$Ae=A\sum_{i\in I}e_i=\sum_{i\in I}Ae_i$$

不难证明 $Ae_i\cap Ae_j=\{0\},i\neq j$, 于是所需的分解成立.

另一方面, 假如有这样的分解 $Ae=\sum_{i\in I}I_i$, 总有 $e=\sum_{i\in I}e_i$, 考虑到 e 幂等即得

$$\sum_{i,j}e_ie_j=\sum_{i\in I}e_i$$

直和属性立即揭示 $e_i=e_i^2,e_ie_j=0,i\neq j$, 于是 e_i 是正交且幂等的, 对于其在中心的证明, 显然 e_i 已经对 Ae 中成员交换, 若 $x\in A,x\notin Ae$, 有 $xe\in Ae,xe\notin Aee=Ae$, 这导致了矛盾, 于是只能 $Ae=A$, 从而命题成立. □

Expansion 1 我们来对习题进行处理.

命题 3 取定 D 为可除 F 代数, 证明 $M_n(D)$ 是单代数.

Proof. 只需为 $M_n(D)$ 的任意非零理想 I 找到 E_n 即可, 为此我们取 $A\in I$, 由于代数 D 是可除的, 则存在矩阵 A^* 为其伴随矩阵, 进而我们有

$$A\frac{A^*}{\det A}=E_n$$

从而在 $M_n(D)$ 中存在 A^{-1}, 进而依据理想的吸收律一切得证. □

命题 4 设 A 是有限维代数.

(i) 左零因子必然也为右零因子.

Proof. 取定 a 满足 ab, 注意到如下关系的成立

$$a\to\mathrm{End}(A),a\to(x\to ax)$$

于是当 A 的一组基 (不妨就使其是正交的) 取定时, 我们能够为 a 的左乘行为联系上 $M_n(F)$ 中的成员, 记作 L_a, 显然有

$$L_{ab}=L_aL_b$$

于是若 a 有零因子, 有 b 使得 $L_aL_b=L_{ab}=0$ 成立, 也即 L_a 非满秩, 这立即将导出矩阵 C 使得

$$CL_a=0$$

对于矩阵 C, 取 $c=\sum_{i=1}^{n}k_ie_i$, 若 $Ce_j=ce_j$, 则

$$\sum_{i,j=1}^{n}k_ie_ie_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}e_i$$

假若 $e_ie_j=\sum_{t=1}^{n}T_{ij}^te_t$, 则有

$$\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}T_{ij}^tk_i\right)e_t=\sum_{i=1}^{n}c_{ij}e_i$$

对应相等即得方程组 $\sum_{i=1}^{n} T_{ij}^{t} k_i = c_{tj}, j = 1$, 不难通过调整 C 得到解的存在性, 进而存在 c 使得 $ce_i = Ce_i$, 于是 $L_c L_a = Lca = 0$, 则 $ca = 0$. □

(ii) A 中元素要么为零因子, 要么可逆.

Proof. 换算到 L_a 中, 这只是 L_a 是否满秩的问题. □

(iii) 推论: 有限维 F 代数若无零因子, 则是可除代数.

§3. 2 代数上的模范畴

这一节将环上模的概念窄化为了代数上的线性空间, 而后讨论了这一类模的子模, 商模及模同态, 之后则论述了模的半单分解的问题.

§3.2.8 之后的内容致力于将模 M 的直和分解与 $\mathrm{End}_A(M)$ 左正则模直和分解联系起来, 目的在于在关于代数的理论中建立起矩阵的语言, 也即 §3.2.11 引理等.

关于文章最后的范畴论的老生常谈的内容, 我们不作过多言说.

Expansion 2 我们来对引理 §3.2.4 和 §3.2.5 的引理 1 进行证明.

命题 5 取定左 A-模 $M_{1,2,3}$, 存在如下的 F 向量空间同构:

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, M_3) \simeq \mathrm{Hom}_A(M_1, M_3) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3)$$

对括号右项也是如此.

Proof. 我们给出如下的映射:

$$\mathscr{E} : \mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, M_3) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, M_3) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3)$$

$$\varphi(m_1 \oplus m_2) \to \varphi|_{M_1}(m_1) \oplus \varphi\,|_{M_2}\,(m_2)$$

良定义性是直和的结果, 对于 A, F-线性, 取 $k_{1,2} \in F, a_{1,2} \in A$, 则

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}[(k_1a_1 + k_2a_2)\varphi] &= (k_1a_1 + k_2a_2)\varphi|_{M_1} \oplus (k_1a_1 + k_2a_2)\varphi\,|_{M_2} \\
&= (k_1a_1\varphi|_{M_1} + k_2a_2\varphi|_{M_1}) \oplus (k_1a_1\varphi\,|_{M_2} + k_2a_2\varphi\,|_{M_2}) \\
&= (k_1a_1\varphi|_{M_1} \oplus k_1a_1\varphi\,|_{M_2}) + (k_2a_2\varphi|_{M_1} \oplus k_2a_2\varphi\,|_{M_2}) \\
&= k_1a_1(\varphi|_{M_1} \oplus \varphi\,|_{M_2}) + k_2a_2(\varphi|_{M_1} \oplus \varphi\,|_{M_2}) \\
&= k_1a_1\mathscr{E}(\varphi) + k_2a_2\mathscr{E}(\varphi)
\end{aligned}$$

其他性质的验证与此类似, 于是这起码已经是一个模同态, 对于同构的成立, 我们取如下的映射说明问题:

$$\mathscr{F} : \mathrm{Hom}_A(M_1, M_3) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3) \to \mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, M_3)$$

$$\varphi_1(m_1) \oplus \varphi_2(m_2) \to \varphi(m_1 \oplus m_2) = \varphi_1(m_1) + \varphi_2(m_2)$$

不难验证这同样是一个同态, 另一方面也有

$$\begin{aligned}
\varphi \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi|_{M_1} \oplus \varphi|_{M_2} \xrightarrow{\mathscr{F}} \phi(m_1 \oplus m_2) &= \varphi|_{M_1}(m_1) + \varphi|_{M_2}(m_2) \\
&= \varphi(m_1) + \varphi(m_2) = \varphi(m_1 \oplus m_2)
\end{aligned}$$

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2 \xrightarrow{\mathscr{F}} \varphi(m_1 \oplus m_2) = \varphi_1(m_1) + \varphi_2(m_2) \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi|_{M_1} + \varphi|_{M_2}$$
$$= \varphi_1 \oplus \varphi_2$$

从而 $\mathscr{E} \circ \mathscr{F} = \mathrm{id}, \mathscr{F} \circ \mathscr{E} = \mathrm{id}$, 同构成立. □

命题 6 下述命题等价:

(i) M 半单.

(ii) M 的子模均有补子模.

(iii) M 的单子模均有补子模.

Proof. (i)⇒(ii): 假定 M 的所有单子模为 $\{M_n\}$, 取定 M 的子模 N, 则 $N \cap M_n$ 为 M_n 或 $\varnothing$, 取定使得前提成立的全体子模记为 $M_1, \cdots, M_r$, 显然 $\bigoplus_{k=1}^{r} M_k \subset N$.

然而假若 N 中有 $M_{r+1}, \cdots, M_n$ 的成员, 立即多出 $N \cap M_{r+i} \neq \varnothing$, 这是不可饶恕的, 从而实际有

$$N = \bigoplus_{k=1}^{r} M_k$$

此时 $N^{\perp} = \bigoplus_{k=r+1}^{n} M_k$ 自然构成了 N 的补子模.

(ii)⇒(iii): 显然.

(iii)⇒(i): 我们先来证明 M 可表为单模的和, 为此我们取定 M 的所有单子模 $\{M_\alpha\}$, 相应的补表示记为 $\{M_\alpha^{\perp}\}$, 显然

$$\sum_{\alpha} M_\alpha \subset M$$

假若真包含成立, 则有非零的 x 不能被表为 $\sum_{m_\alpha \in M_\alpha} m_\alpha$ 的形式, 换言之, 其必然不在任意 M_α 中, 于是 $\bigcap_{\alpha} M_\alpha^{\perp}$ 非空, 使得直和式 $M = \sum_{\alpha} M_\alpha \oplus \bigcap_{\alpha} M_\alpha^{\perp}$ 成立, 后者将有单子模, 这使得我们对 $\{M_\alpha\}$ 极大性的要求被破解, 进而只能 $M = \sum_{\alpha} M_\alpha$.

现在只需证明 $\sum_{\alpha} M_\alpha$ 可重新整理为直和, 指路读者联合上文中单子模的存在性参考李文威《代数学方法》第一卷命题 6.11.4. □

Explanation 3 §3.2.8 中引理所述的 $f \xrightarrow{\varphi} f(1)$ 构成 $\mathrm{End}_A({}_A A)$ 与 A^{op} 的同构, 依据在于

$$\varphi(fg) = g(1)f(1) = f(1) \circ g(1) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$$

从而映射保持结构.

Explanation 4 我们整理一下 §3.2.9 后的内容究竟得到了什么结果:

对于 $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, $\mathrm{End}_A(M)$ 具有着如下能够导出直和分解的式子:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i, e_i : M \to M_i$$

此时利用双边 Pierce 分解, 对 $f \in \mathrm{End}_A(M)$ 便有 $f=(e_jfe_i)_{n\times n}$, 且对 $m=\sum_{i=1}^{n} m_i, m_i \in M_i$, 成立

$$f(m)=(e_jfe_i)_{n\times n}(m_1,\cdots,m_n)$$

此时具有直和分解的模的自同构的结构便是十分简单的了.

§3.3 Jordan-Hölder 定理

这一节是对前文所述的一些应用, Jordan-Hölder 定理的证明在于给出了正则 A-模的合成因子的唯一性, 之后得到的定理 3.3 实际类似于“有限群的既约表示是正则表示的直和分量”.

Explanation 5 关于 Jordan-Hölder 定理的证明, 关键处在于寻找中间的对象将两个模塔

$$M>M_1>\cdots>M_s=0, M>N_1>\cdots>N_t=0$$

联系起来, 为此本节采用的是如下的同构关系:

$$N_1/(M_1\cap N_1)\simeq M/M_1, M_1/(M_1\cap N_1)\simeq M/N_1$$

以此用 $M_1\cap N_1$ 将 M_2, N_2 替换, 便得可用的中间列.

Explanation 6 关于定理 3.3, 若全体 $\mathrm{Hom}_A(M_i/M_{i+1}, S)=0$, 则正合列变为

$$0\to \mathrm{Hom}_A(M_i,S)\to \mathrm{Hom}_A(M_{i+1},S), i=0,\cdots,t-1$$

从而我们有如下的一列单模同态

$$\mathrm{Hom}_A(A,S)\to \mathrm{Hom}_A(M_1,S)\to\cdots\to \mathrm{Hom}_A(M_{t-1},S)$$

注意到 $M_{t-1}=M_{t-1}/M_t$ 已经是单 A-模, 若 $\mathrm{Hom}_A(M_{t-1},S)\neq 0$, 这与 $\mathrm{Hom}_A(M_i/M_{i+1},S)=0$ 矛盾, 则只能 $\mathrm{Hom}_A(M_{t-1},S)=0$, 由于上面的嵌入列, 我们立即要宣称 $\mathrm{Hom}_A(A,S)=0$, 这是不可饶恕的.

§3.4 Wedderburn-Artin 定理

引理 4.4 预先完成了定理 4.5 中的一些运算, 作为定理 4.5 的 Wedderburn-Artin 定理则给出了半单代数等价重要性质: 其上模均是半单的, 同时也给出了半单代数在结构上的重要性质: 同构于 F-可除代数上矩阵的直积, 推论 4.6 则进一步将半单代数的组成成分: 单代数刻画为了 F-可除代数上的矩阵代数.

借助定理 4.5, 半单代数模的研究被转化为了半单代数上单模的研究, §3.4.7 定理则进一步将后者限制到了半单代数的组分上, 也即半单代数的单模实际是单因子上的单模.

§3.4.7 定理的第二条完全阐述了单代数 $A=D_n(D)$ 上单模 V 的结构: 模 V 是唯一的, 作为 F-代数的维数为 $n[D:F]$, 其自同态代数同构于 D^{op}, 且 A 的正则 A-模实际正是 V 的简单直和.

作为上述结果的最终推论, 我们得到了推论 4.8: 半单代数 A 的单模有限, 单因子与单模 1-1 对应.

§3.4.10 定理则解决了一个遗留问题, 即半单代数的直和分解的唯一性问题, 处理中主要应用了前述的单子模与幂等元的关系.

本节最后是代数表示论在群表示论上的简单应用, 将群表示化为群代数后, 应用前述结果, 我们再次得到了既约表示个数的刻画, 以及 §3.4.12 中的新结果.

Explanation 7 我们来细化一下定理 4.5 证明中的计算:

$$\begin{aligned} A \simeq \mathrm{End}_A(A)^{\mathrm{op}} &= \left(\mathrm{End}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} L_i\right)\right)^{\mathrm{op}} \\ &= \left(\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i=1}^{t} L_i, \bigoplus_{j=1}^{t} L_i\right)\right)^{\mathrm{op}} = \left(\bigoplus_{i,j=1}^{t} \mathrm{Hom}(L_i, L_j)\right)^{\mathrm{op}} \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{End}(L_i)\right)^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

Explanation 8 我们来整理一下 §3.4.7 定理构造模 V 的过程:

(i) 构造 $V = D^n$, 进而其自然为 $A = M_n(D)$-模.

(ii) 通过构造矩阵 $[0 \ \cdots \ 0 \ a^* \ 0 \ \cdots \ 0]$ 在 V 的非零理想中生成 1, 进而得到其单模属性.

(iii) 将模 $M_n(D)$ 拆解为行向量的直和, 即得其同构于 nV.

(iv) 证明 $\mathrm{End}_A(V)$ 的成员 f 的右乘实质, 得到其与 D 的成员的 1-1 对应.

§3.5 代数与模的 jacobson 根

推论 §3.5.4 说明了 $\mathrm{rad}(A)$ 具有的重要性质: 使得 A/I 半单的最小理想. 借此我们将 A-模的问题转移到了 $A/\mathrm{rad}(A)$-模上, 所得的结论便是代数 A 的单模是且仅是 $A/\mathrm{rad}(A)$ 的单模.

本节结论应用到群代数上即可得重新得到既约表示为 $\mathrm{cf}_F(G)$ 的基的结论.

Expansion 3 我们来处理一下习题 7.

命题 7 取定不同的 $g, h \in G$, 当 $\mathrm{char}\ F \nmid |G|$ 时存在既约的 F-表示使得 $\rho(g) \neq \rho(h)$.

Proof. 群 G 上的全体既约表示也便是 FG 上的全体单模, 则在任意的单 FG-模 V 上我们将有

$$(g-h)v \equiv 0$$

成立, 考虑 $g-h$ 的半单分解

$$g - h = \sum_{k=1}^{n} m_k, m_k \in M_k$$

其中 M_k 为 FG 的半单分解项, 则我们进一步能够断言

$$m_k v_k \equiv 0, v_k \in V_k$$

其中 V_k 是 M_k 上唯一的单模, 同时也是忠实的, 从而 $m_k = 0$, 进而得到 $h - g = 0$, 这已经使得命题成立. □

§3.6 K-S-R 定理, §3.7 投射模与内射模

从 Krull-Schimidt 定理, 一般代数上的模的完全直和分解是唯一的, 以这定理为基础, 一般代数的表示就可处理为不可分解表示的问题.

§3.7 所介绍的投射模具有足够良好的性质, 为此, 关于不可分解模的结构的问题, 首先可以从不可分解的投射模开始处理, 所得的便是定理 7.6.

再作对偶函子 $\mathrm{Hom}(,F)$, 投射模的结果也可转移到内射模上, 相应的扮演重要作用的 $\mathrm{rad}(M)$ 则变为了 $\mathrm{soc}(M)$.

Explanation 9 我们来对引理 7.2 需验证的部分进行验证.

命题 8 对于正合列 $0 \to M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \to 0$, 若 f,g 可裂, 则有

$$L = \mathrm{im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f', L = \mathrm{Ker}\ g \oplus \mathrm{im}\ g'$$

成立.

Proof. 直和性的成立请回家问你妈妈, 对于 L 上相应分解的成立, 注意查看下面的两个式子即可:

$$l = ff'(l) + l - ff'(l), l = l - g'g(l) + g'g(l)$$

□

Explanation 10 我们给出命题 7.5 证明的一个交换图阐释:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_P"] \arrow[dr, "\varphi\circ\pi_P"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\pi_Q"] & 0 & P \arrow[l] \arrow[d, "\pi_P"] & Q \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\pi_Q"] \arrow[dl, "\varphi\circ\pi_Q"'] \\
P/\mathrm{rad}(P) \arrow[r, "\varphi"] & Q/\mathrm{rad}(Q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & P/\mathrm{rad}(P) \arrow[l] \arrow[d] & Q/\mathrm{rad}(Q) \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Explanation 11 我们来对本节重要的定理 7.6 进行一些说明.

定理内容实际阐述了如下几个基本事实:

(i) 不可分解投射模以其 Jacobson 根作为唯一的极大子模.

(ii) 正如正则表示遍历了群的全体既约表示一般, 正则模遍历了代数上的全体不可分解投射模.

(iii) 通过模 Jacobson 根, 不可分解投射模成为单模, 且两者的对应是 1-1 的.

关于证明, 我们对几个 Step 进行梳理:

Step I 利用直和属性将 P_i 表为 Ae_i, 以便于处理, 所用的都是 §3.1,3.2 中很常见的技巧.

Step II 对 Step III 的系列预处理, 其中 $\mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{A}\bar{e}_i) \simeq \bar{e}_i\bar{A}\bar{e}_i$ 一事, 提醒读者回忆 $\mathrm{End}_A(M)$ 的双边 Peirce 分解.

Step III 为 P_i 正式寻找极大理想, 也即 $\mathrm{rad}(P_i)$, 所采取的路径是:

$$\mathrm{rad}(P_i) \text{ 是极大子模 } \leftarrow Ae_i/\mathrm{rad}(Ae_i) \simeq \bar{A}\bar{e}_i \text{ 是单模 } \leftarrow \mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{A}\bar{e}_i) \text{ 可除}$$

Step IV 存在 $P_i/\mathrm{rad}(P_i) \simeq S$, 实际还是对 $\mathrm{Hom}(A,S)$ 非零的应用, 与群表示论中的做法类似.