

СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №2

Тема

Приближение табличных функций сплайнами

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002
Преподаватель

Новиков А.А.
Павлова Л.В.

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи

Интерполировать заданную функцию кубическим сплайном при известных значениях 2-ой производной функции на концах отрезка интерполяции. Рассмотреть разные промежутки и различное число узлов для Чебышевской сетки. Исследовать зависимость абсолютной погрешности приближения от числа. Сравнить с полиномиальной интерполяцией.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости

1. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ - узлы попарно различны и граничные узлы совпадают с концами отрезка интерполяции.

2.2 Алгоритм

1. Пусть задан отрезок $[a, b]$ и n точек на этом отрезке

Сетка Чебышева $\{x_i\}_{i=0}^n$ тогда записывается так:

$$x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\right), \text{ где } i = 0, \dots, n-1$$

2. Введем обозначения $g(x) := S_3^1(x)$, $g_i(x) := S_3^1(x)|_{[x_{i-1}, x_i]}$. Запишем функцию $g_i(x)$ в виде:

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 1 \dots n$$

Тогда из условий интерполяции:

$$g_1(x_0) = y_0, \quad g_i(x_i) = y_i \quad i = 1 \dots n$$

из условий гладкой стыковки звеньев сплайна:

$$\begin{aligned} g_i(x_{i-1}) &= g_{i-1}(x_{i-1}) \\ g'_i(x_{i-1}) &= g'_{i-1}(x_{i-1}) \quad i = 1 \dots n \\ g''_i(x_{i-1}) &= g''_{i-1}(x_{i-1}) \end{aligned}$$

из краевых условий:

$$g''_1(x_0), \quad g''_n(x_n) - \text{известны}$$

Обозначим: $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, y_i - значения сеточной функции.

$$f(x_{k-1}, x_k) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}$$

Получаем формулы для нахождения коэффициентов полинома:

$$a_i = g_i(x_i) = y_i$$

Вывод формул для c_i , b_i , d_i :

$$(a) \quad g_{k-1}(x_{k-1}) = g_k(x_{k-1}), \quad a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_{k-1} h_k^3,$$

$$a_{k-1} = y_{k-1}, \quad a_k = y_k \rightarrow b_k h_k - c_k h_k^2 + d_{k-1} h_k^3 = y_k - y_{k-1} \rightarrow b_k - c_k h_k + d_{k-1} h_k^2 = f(x_{k-1}; x_k)$$

$$b_k = f(x_{k-1}; x_k) + c_k h_k - d_{k-1} h_k^2$$

$$(b) \quad g''_k(x_{k-1}) = g''_{k-1}(x_{k-1}), \quad 2c_{k-1} + 6d_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-1}) = 2c_k - 6d_k h_k,$$

$$c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, \quad d_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k}$$

$$(c) \quad \text{Избавляемся от } d_k: \quad b_k = f(x_{k-1}; x_k) + c_k h_k - d_{k-1} h_k^2 = f(x_{k-1}; x_k) + c_k h_k - \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k} h_k^2 = f(x_{k-1}, x_k) + \frac{2}{3} h_k c_k + \frac{1}{3} h_k c_{k-1}$$

$$(d) \quad g'_{k-1}(x_{k-1}) = b_{k-1} + 2c_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-1}) + 3d_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-1})^2 = b_{k-1}$$

$$g'_k(x_{k-1}) = b_k + 2c_k(x_{k-1} - x_k) + 3d_k(x_{k-1} - x_k)^2 = b_k - 2c_k h_k - 3d_k h_k$$

$$g'_{k-1}(x_{k-1}) = g'_k(x_{k-1}) \rightarrow b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k - 3d_k h_k^2$$

(е) Подставим предыдущие выражения для b_k , b_{k-1} , d_k :

$$f(x_{k-2}, x_{k-1}) + \frac{2}{3}h_{k-1}c_{k-1} + \frac{1}{3}h_{k-1}c_{k-2} = f(x_{k-1}, x_k) + \frac{2}{3}h_k c_k + \frac{1}{3}h_k c_{k-1} - 2c_k h_k - 3\frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k} h_k^2 \rightarrow$$

$$c_{k-1} \cdot h_k + 2c_k(h_k + h_{k+1}) + c_{k+1} \cdot h_{k+1} = 3(f(x_k; x_{k+1}) - f(x_{k-1}; x_k))$$

$$b_i = f(x_{i-1}, x_i) + \frac{2}{3}h_i c_i + \frac{1}{3}h_i c_{k-1} \quad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}$$

$$c_{i-1} \cdot h_i + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + c_{i+1} \cdot h_{i+1} = 3(f(x_i; x_{i+1}) - f(x_{i-1}; x_i))$$

$$c_0 = \frac{1}{2}g''_1(x_0), \quad c_n = \frac{1}{2}g''_n(x_n)$$

3. Из системы выражений $c_{i-1} \cdot h_i + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + c_{i+1} \cdot h_{i+1} = 3(f(x_i; x_{i+1}) - f(x_{i-1}; x_i))$ можно найти коэффициенты $c_1 \dots c_{n-1}$ методом прогонки.

$$\delta_1 = -\frac{h_2}{2h_1 + 2h_2}, \quad \lambda_1 = \frac{3(f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1))}{2h_1 + 2h_2}$$

$$\delta_{i-1} = -\frac{h_i}{2h_{i-1} + 2h_i + h_{i-1}\delta_{i-2}}, \quad \lambda_{i-1} = \frac{3(f(x_{i-1}; x_i) - f(x_{i-2}; x_{i-1})) - h_{i-1}\lambda_{i-2}}{2h_{i-1} + 2h_i + h_{i-1}\delta_{i-2}}$$

при $i = 3 \dots n$

Находим коэффициенты c_i путем обратной прогонки:

$$c_{i-1} = \delta_{i-1}c_i + \lambda_{i-1} \quad \text{при } i = n, n-1, \dots, 2$$

4. Находим коэффициенты b_i и d_i путем подстановки найденных c_i и получим требуемые функции $g_i(x)$.

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимости

Узлы в сетке Чебышева не совпадают. Если задан отрезок $[a, b]$, на нем строится сетка Чебышева, при этом $x_0 > a$, $x_n < b$. Для выполнения условий применимости сместим концы заданного отрезка $[a, b] \rightarrow [a_1, b_1]$, так что $x_0 = a_1$, $x_n = b_1$.

5. Тестовый пример

Дано: $f(x) = e^{-x}$ на $[-3, 0]$

1. Формируем Чебышевскую сетку из 4 узлов:

$$t_0 = \cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)}{2 \cdot 4}\right) = 0,92; \quad t_1 = \cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 1 + 1)}{2 \cdot 4}\right) = 0,38$$

$$t_2 = \cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 2 + 1)}{2 \cdot 4}\right) = -0,38; \quad t_3 = \cos\left(\frac{\pi(2 \cdot 3 + 1)}{2 \cdot 4}\right) = -0,92$$

$$\text{Далее по формуле } x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k = \frac{0-3}{2} + \frac{-3-0}{2}t_k, k = 0, 1, 2, 3$$

$$x_0 = -2,88, \quad x_1 = -2,07, \quad x_2 = -0,93, \quad x_3 = -0,11$$

$$h_1 = 0,81, \quad h_2 = 1,14, \quad h_3 = 0,82$$

$$y_0 = 17,92, \quad y_1 = 7,96, \quad y_2 = 2,52, \quad y_3 = 1,12$$

$$f(x_0, x_1) = -12,3, \quad f(x_1, x_2) = -4,77, \quad f(x_2, x_3) = -1,7$$

$$2. \text{ Надо решить систему } \begin{cases} a_i = y_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ c_{i-1} \cdot h_i + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + c_{i+1} \cdot h_{i+1} = 3(f(x_i; x_{i+1}) - f(x_{i-1}; x_i)), \quad i = 1, 2 \\ b_i = f(x_{i-1}, x_i) + \frac{2}{3}h_i c_i + \frac{1}{3}h_i c_{k-1}, \quad i = 1, 2, 3 \\ d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2c_0 = g''_1(x_0) = e^{-x_0} \\ 2c_3 = g''_3(x_3) = e^{-x_3} \end{cases}$$

Ниже приведено покомпонентное решение системы.

3. Прямой ход метода прогонки:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{h_2}{2h_1 + 2h_2} = -\frac{1.14}{2 \cdot 0.81 + 2 \cdot 1.14} = -0.29 \\ \lambda_1 &= \frac{3(f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1))}{2h_1 + 2h_2} = \frac{3(-4.77 + 12.3)}{2 \cdot 0.81 + 2 \cdot 1.14} = 5.79 \\ \delta_2 &= -\frac{h_3}{2h_2 + 2h_3 + h_2\delta_1} = -\frac{0.82}{2 \cdot 1.14 + 2 \cdot 0.82 - 0.82 \cdot 0.29} = -0.22 \\ \lambda_2 &= \frac{3(f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)) - h_2\lambda_1}{2h_2 + 2h_3 + h_2\delta_1} = \frac{3 \cdot (-1.7 + 4.77) - 1.14 \cdot 5.79}{2 \cdot 1.14 + 2 \cdot 0.82 + 1.14 \cdot (-0.29)} = 0.72 \end{aligned}$$

Обратный ход метода прогонки:

$$c_0 = \frac{1}{2}g''_1(x_0) = \frac{1}{2}e^{-x_0} = \frac{1}{2}e^{2.88} = 8.9, \quad c_3 = \frac{1}{2}e^{0.11} = 0.56$$

$$c_2 = \delta_2 \cdot c_3 + \lambda_2 = -0.22 \cdot 0.56 + 0.72 = 0.6$$

$$c_1 = \delta_1 \cdot c_2 + \lambda_1 = -0.29 \cdot 0.6 + 5.79 = 5.01$$

$$b_1 = f(x_0, x_1) + \frac{2}{3}h_1c_1 + \frac{1}{3}h_1c_0 = -12.3 + \frac{2}{3} \cdot 0.81 \cdot 5.01 + \frac{1}{3} \cdot 0.81 \cdot 8.9 = -7.2$$

$$b_2 = f(x_1, x_2) + \frac{2}{3}h_2c_2 + \frac{1}{3}h_2c_1 = -4.77 + \frac{2}{3} \cdot 1.14 \cdot 0.6 + \frac{1}{3} \cdot 1.14 \cdot 5.01 = -2.41$$

$$b_3 = f(x_2, x_3) + \frac{2}{3}h_3c_3 + \frac{1}{3}h_3c_2 = -1.7 + \frac{2}{3} \cdot 0.82 \cdot 0.56 + \frac{1}{3} \cdot 0.82 \cdot 0.6 = -1.23$$

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{3h_1} = \frac{5.01 - 8.9}{3 \cdot 0.82} = -1.58$$

$$d_2 = \frac{c_2 - c_1}{3h_2} = \frac{0.6 - 5.01}{3 \cdot 1.14} = -1.29$$

$$d_3 = \frac{c_3 - c_2}{3h_3} = \frac{0.56 - 0.6}{3 \cdot 0.82} = -0.02$$

4. Получаем сплайн:

$$g_1(x) = 7.96 - 7.2(x + 2.07) + 5.01(x + 2.07)^2 - 1.58(x + 2.07)^3, \quad x = -2.88... - 2.07$$

$$g_2(x) = 2.52 - 2.41(x + 0.93) + 0.6(x + 0.93)^2 - 1.29(x + 0.93)^3, \quad x = -2.07... - 0.93$$

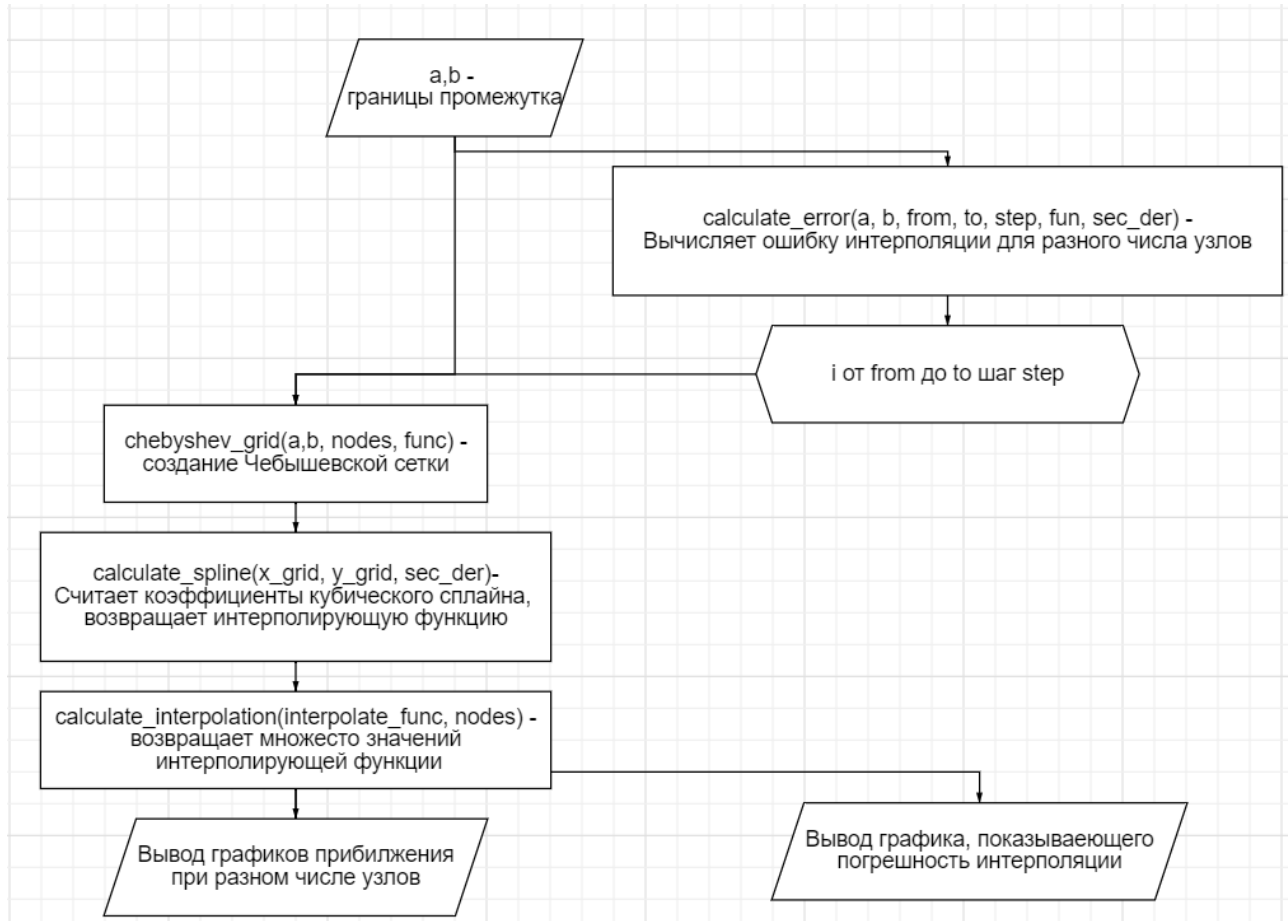
$$g_3(x) = 1.12 - 2.41(x + 0.11) + 0.6(x + 0.11)^2 - 1.29(x + 0.11)^3, \quad x = -0.93... - 0.11$$

6. Контрольные тесты

1. Графики приближения на Чебышевской сетке с 5 и 20 узлами на промежутках $[-4, 4]$.
2. Графики приближения на Чебышевской сетке с 5 узлами на промежутке, где функция практически вырождается в константу - $[3, 8]$.

3. График зависимость абсолютной ошибки приближения от числа узлов для Чебышевской сетки на промежутке $[-4, 4]$. Ошибка вычисляется как максимум по всем абсолютным погрешностям в центре промежутка соседних узлов. Количество узлов меняется от 3 до 80 с шагом 1.
4. График зависимости абсолютной ошибки приближения от числа узлов для Чебышевской сетки на промежутке $[-4, 4]$ интерполяции полиномом Ньютона и кубическим сплайном.

7. Модульная структура программы



8. Численный анализ

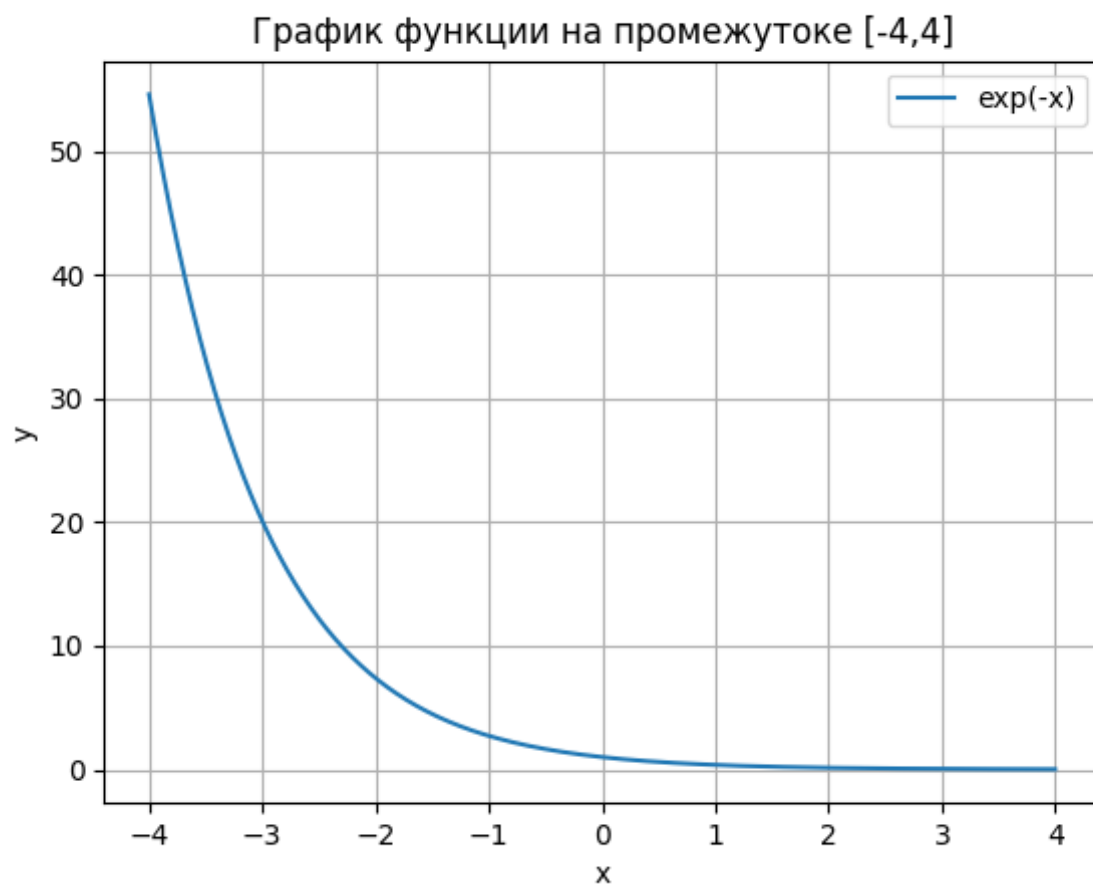


Рис. 1: График заданной функции на промежутке $[-4,4]$

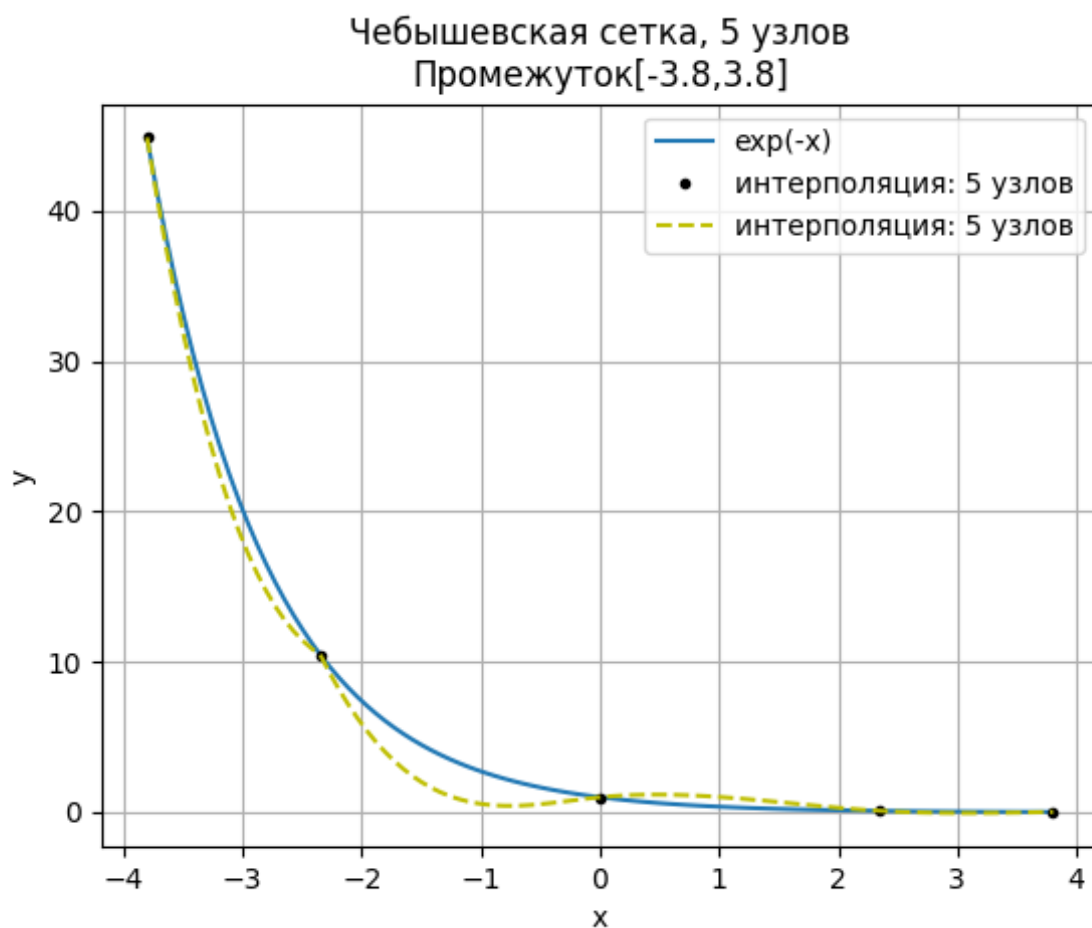


Рис. 2: Интерполяция функции кубическим сплайном на Чебышевской сетке с 5 узлами, промежуток $[-4, 4]$

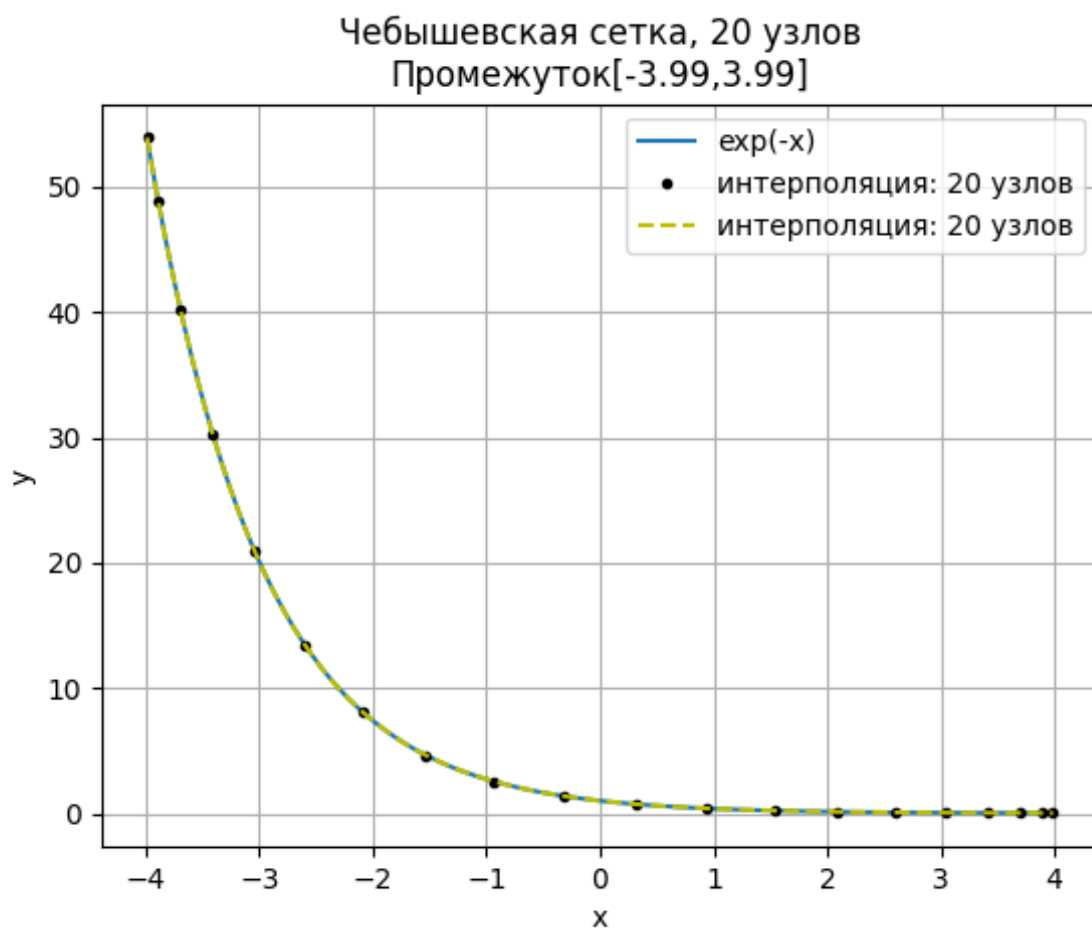


Рис. 3: Интерполяция функции кубическим сплайном на Чебышевской сетке с 5 узлами, промежуток $[-4, 4]$

Из графиков 2-3 можно сделать вывод, что кубический сплайн точно приближает заданную функцию e^{-x} при 20 узлах. При 5 узлах заметна относительно большая погрешность в сравнении с интерполяцией полиномом Ньютона (график ниже).

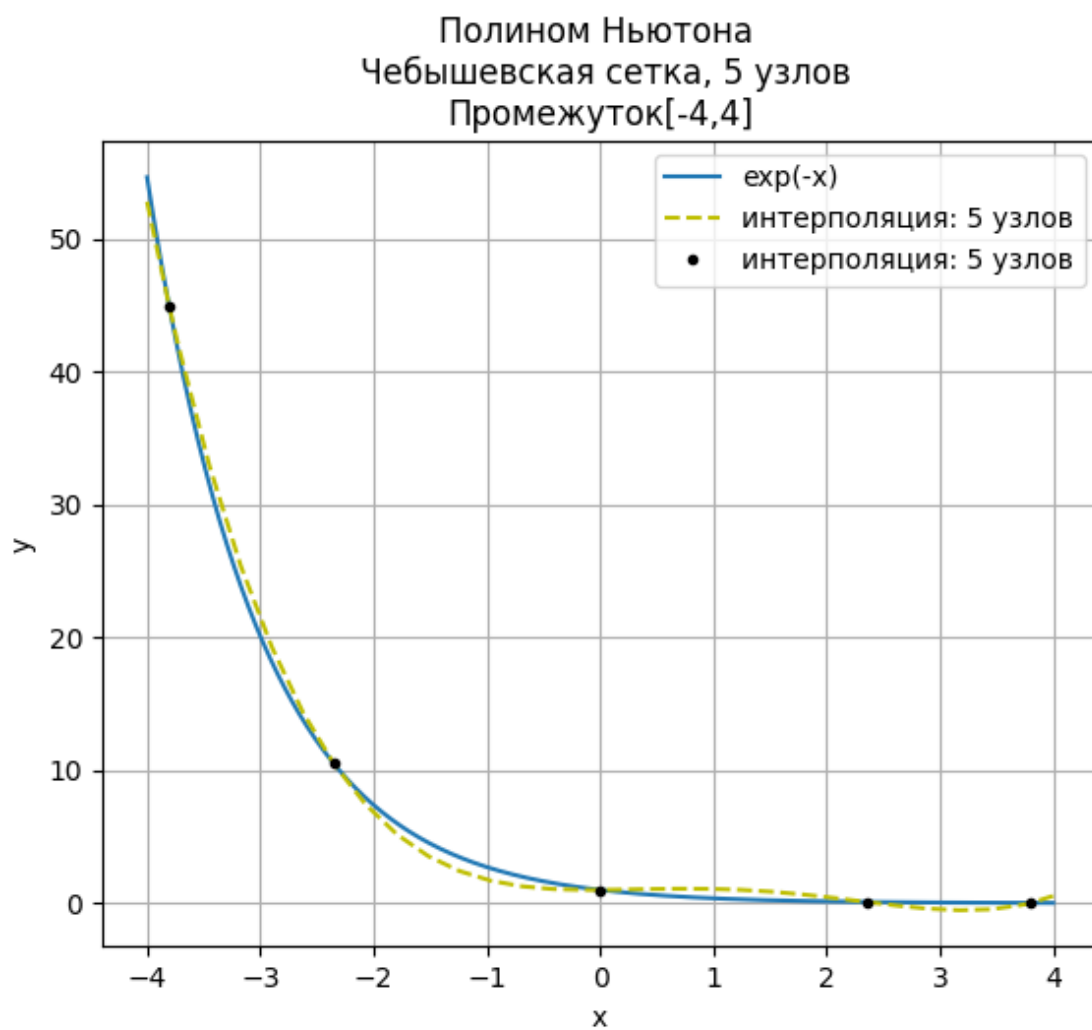


Рис. 4: Интерполяция функции полиномом Ньютона на Чебышевской сетке 5 с узлами, промежуток $[-4, 4]$

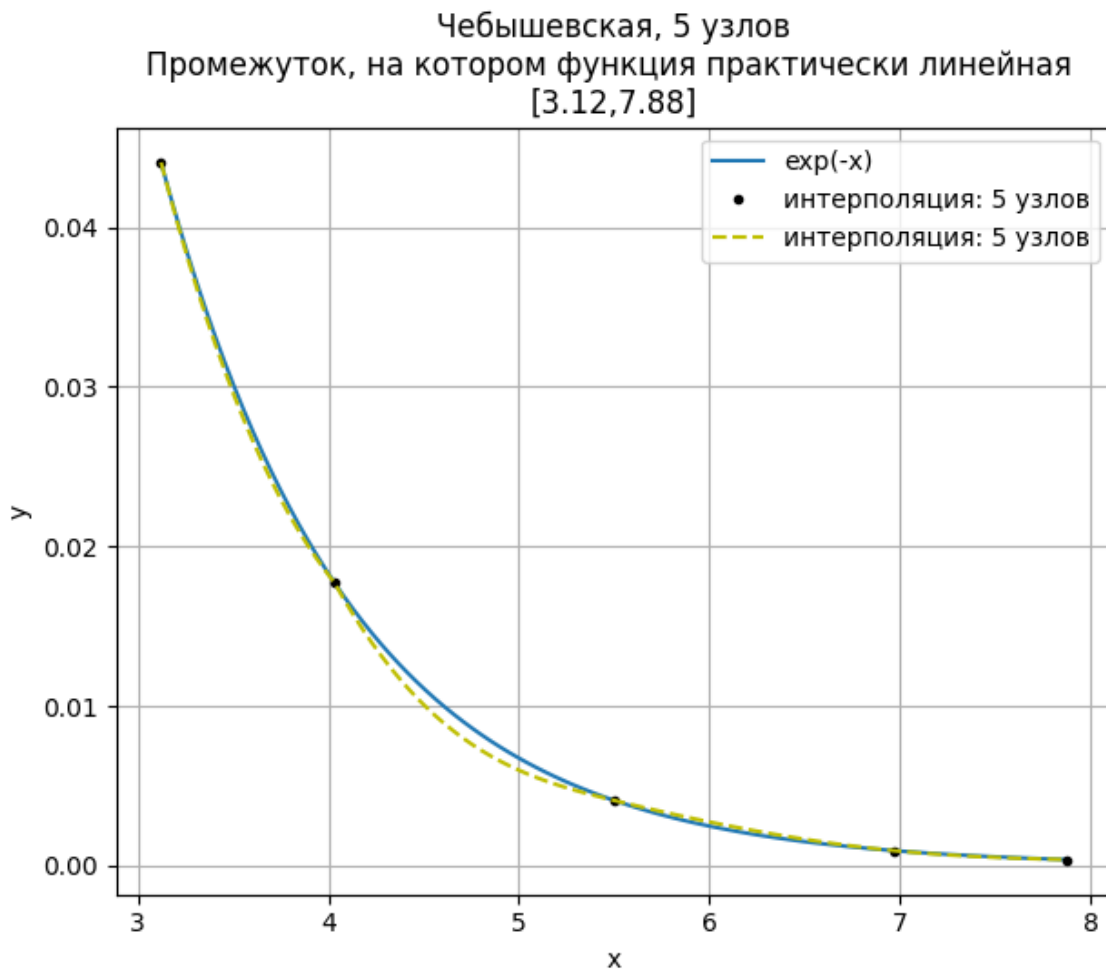


Рис. 5: График зависимости абсолютной погрешности интерполяции кубическим сплайном от числа узлов для Чебышевской сетки, промежуток, на котором функция практически константа - $[-3, 8]$

Из графика 5 можно сделать вывод, что кубический сплайн достаточно точно приближает функцию, которая имеет практически константное значение на промежутке интерполирования.

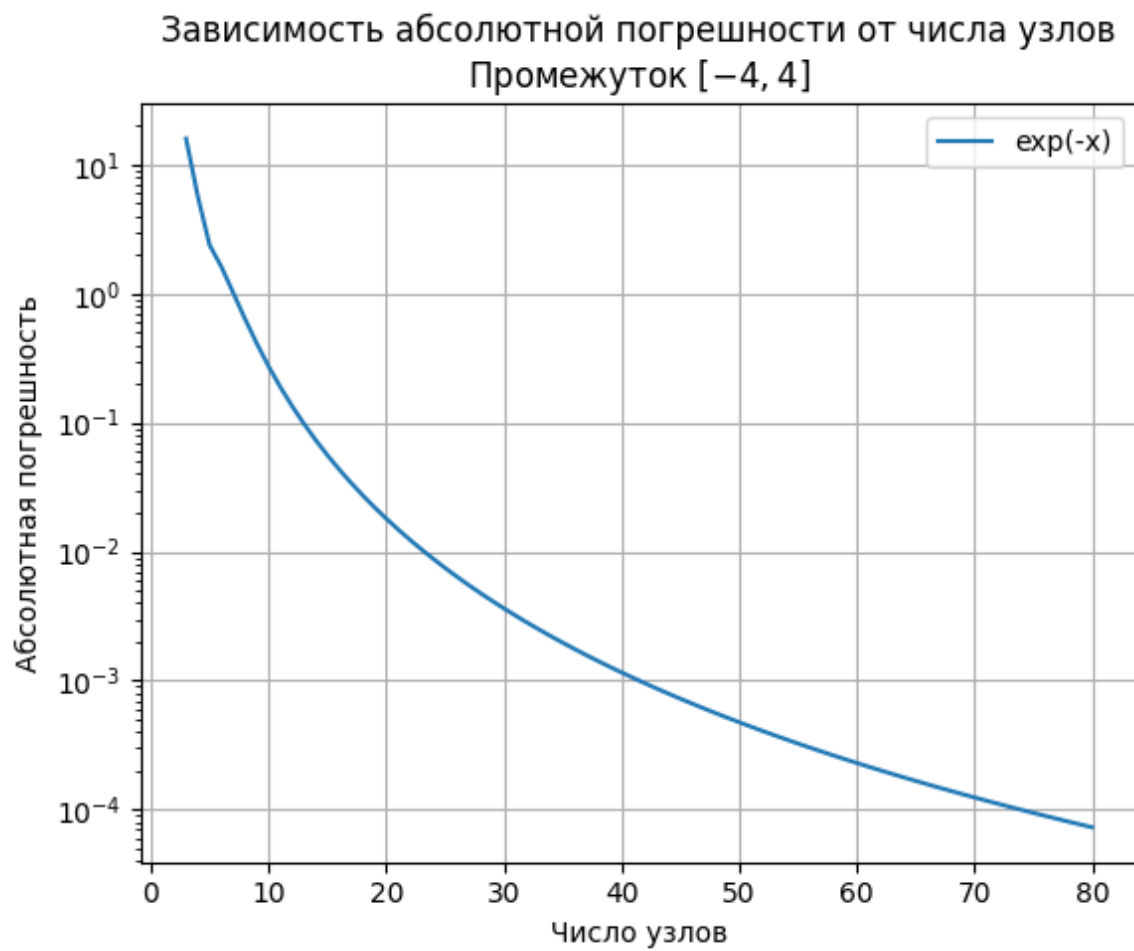


Рис. 6: График зависимости абсолютной погрешности интерполяции кубическим сплайном от числа узлов для Чебышевской сетки, промежуток $[-4, 4]$

Зависимость абсолютной погрешности
от числа узлов для Чебышевской сетки
полином Ньютона
Промежуток $[-4, 4]$

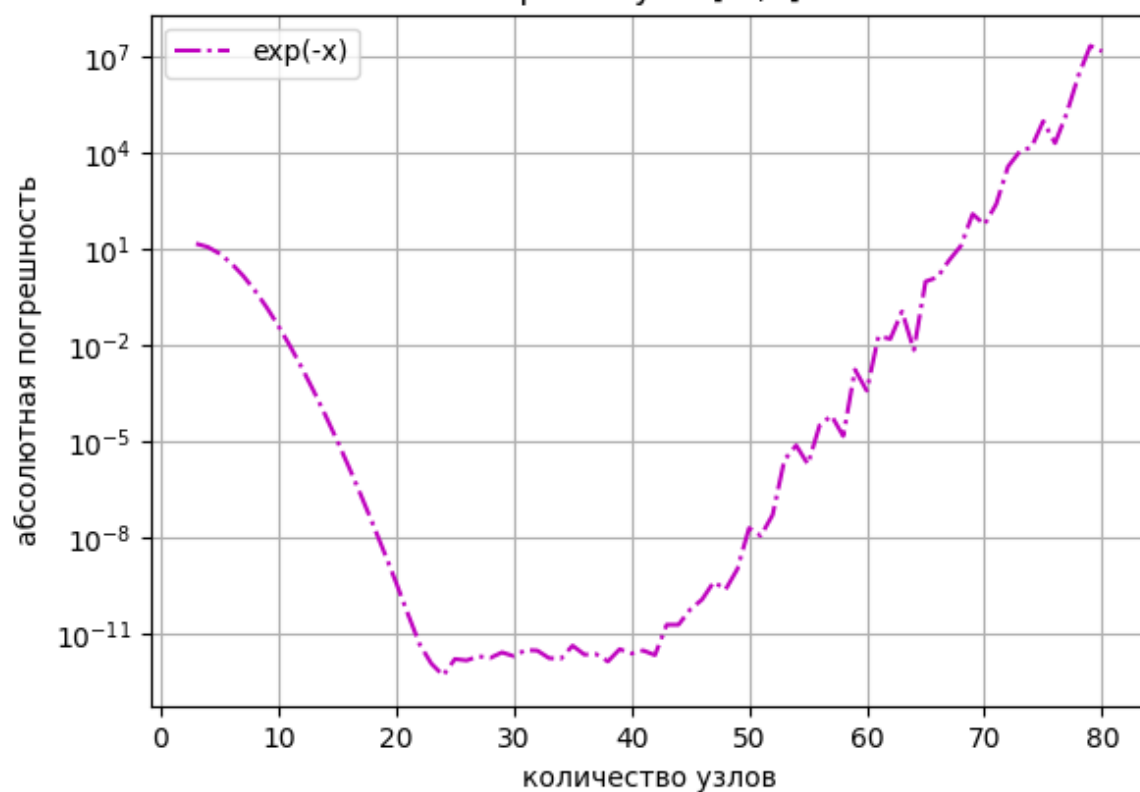


Рис. 7: График зависимости абсолютной погрешности интерполяции полиномом Ньютона от числа узлов для Чебышевской сетки, промежуток $[-4, 4]$

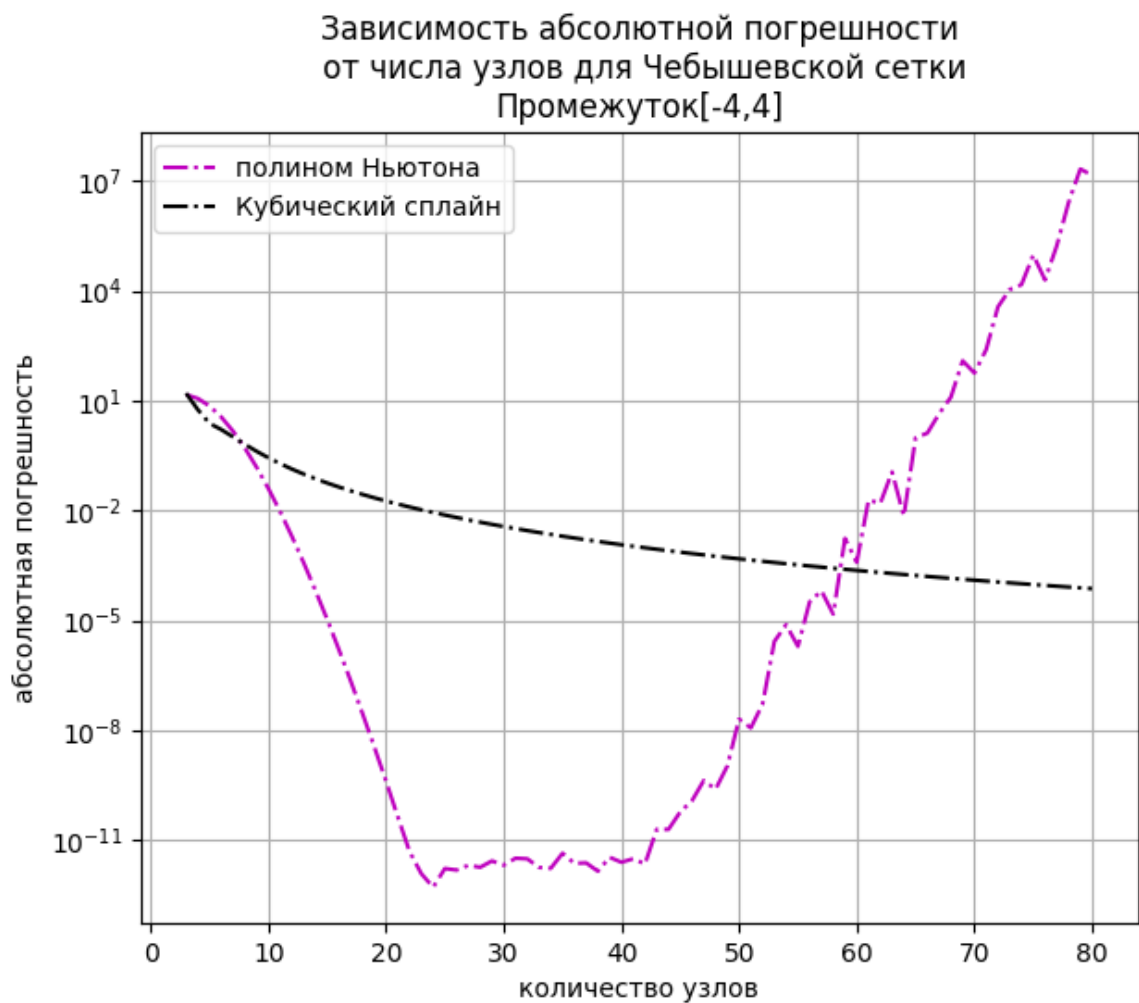


Рис. 8: График зависимости абсолютной погрешности от числа узлов для равномерной сетки, промежуток $[-4, 4]$

Из графиков 6-8 можно сделать вывод, что интерполяция полиномом Ньютона приближает функцию с большей скоростью, то есть показывает лучшую точность при одинаковом числе узлов, чем кубический сплайн. Так при числе узлов = 35 значения абсолютной погрешности отличаются приблизительно на 9 порядков в пользу интерполяции полиномом Ньютона. Однако при большом числе узлов полиномиальная интерполяция показывает большую погрешность, в то время как интерполяция кубическим сплайном монотонно сходится при увеличении числа узлов.

9. Вывод

Интерполяция кубическим сплайном монотонно сходится при увеличении числа узлов, что является значительным преимуществом. Однако скорость сходимости оказывается низкой. Интерполяция полиномом Ньютона показывает значительно большую точность при небольшом числе узлов. Однако с увеличением числа узлов растет вычислительная погрешность интерполяции полиномом и метод начинает расходиться.