СПбПУ Петра Великого

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки

«Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторным работам №5 и 6

Тема

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002	Новиков А.А.
Преподаватель	Павлова Л.В.

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи

Дана задача Коши для обыкновенного диффернциального уравнения 2-порядка:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), x \in [a, b] \\ y'(a) = y'_0 \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Эту задачу Коши надо решить методами Эйлера-Коши и Адамса II-го порядка для дифференциального уравнения:

$$y'' = \frac{y' + e^x(1+y)}{e^x + 1}$$

на отрезке $[0, 1]$ с начальными условиями: $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
Исходная функция для проверки: $y = e^x - 1$

2. Алгоритм метода и условия его применимости

Приближенное решение в численных методах решения задачи Коши строится в виде табличной функции

$y^h = \{y_k\}_{k=0}^n$, определенной на равномерной сетке: $x^h \subset [a, b],\ x^h = \{x_k\}_{k=0}^n,\ x_k = a + kh,\ y_k$ - приближенное значение функции в точке x_k.

Рассматриваемые численные методы применимы к дифференциальным уравнениям 1-го порядка, поэтому с помощью замены $z(x) = y'(x),\ (z'(x) = y''(x))$ перейдем от ДУ 2-го порядка к системе ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} y' = z(x) \\ z' = f(x, y(x), z(x)) \end{cases}$$

2.1 Метод Эйлера-Коши

Общая формула 2-ух стадийных методов Рунге-Кутты 2-го порядка:

$$y_{k+1} = y_k + h(1-p)f(x_k, y_k) + hpf\left(x_k + \frac{h}{2p}, y_k + \frac{h}{2p}f(x_k, y_k)\right)$$

Метод Эйлера-Коши - это явный одношаговый метод, частный случай 2-ух стадийного метода Рунге-Кутты 2-го порядка при параметре $p = \frac{1}{2}$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k) + \frac{hf}{2}\left(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k)\right) = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1})}{2},$$

где $x_k + h = x_{k+1},\ \overline{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

Итого расчетная формула для решения ДУ 1-го порядка принимает вид:

$$\begin{cases} \overline{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h\dfrac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1})}{2} \end{cases}$$

Запишем формулу для решения ДУ 2-го порядка:

$$(1) \begin{cases} \overline{y}_{k+1} = y_k + hz_k \\ \overline{z}_{k+1} = z_k + hf(x_k, y_k, z_k) \\ z_{k+1} = z_k + h\dfrac{f(x_k, y_k, z_k) + f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1}, \overline{z}_{k+1})}{2} \\ y_{k+1} = y_k + h\dfrac{z_k + z_{k+1}}{2} \end{cases}$$

2.1.1 Условия применимости

1. $y'' = f(x, y, y') \in C^2([a; b])$ - обеспечивает существование и единственность задачи Коши.

2.1.2 Алгоритм

1. Задан отрезок $[a, b]$. На нем построена равномерная сетка из n интервалов с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$.
2. Применяем формулу (1) для $k = 0..(n-1)$, учитывая начальные условия: $y_0 = y(a),\ z_0 = z(a) = y'(a)$
3. Получаем сеточную функцию y^h – приближенное решение задачи Коши, h - шаг.
4. Точность вычисляется по правилу Рунге:

$$\frac{|y^{(2h)}(b) - y^{(h)}(b)|}{2^s - 1} \leq \epsilon$$

   Где $s = 2$ - порядок метода, $y^{(2h)}(b)$ - значение сеточной функции, построенной при шаге $2h$, в точке b.
   Если точность ϵ не достигается, то уменьшаем шаг в 2 раза.

2.2 Метод Адамса II-го порядка

Методы Адамса - многошаговые методы численного решения дифференциальных уравнений. Решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)dx$$

Будем строить r-шаговый метод.
Аппроксимируем $F(x)$ интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

$L_m(x)$ - интерполяционный полином по $\{\overline{x}_j, F_j\}_{j=0}^m$, $\overline{x}_0 = x_{k-r}, \overline{x}_1 = x_{k-r+1} \ldots$

- $m = r - 1$ - явная, или эстропаляционная формула
- $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$F(x) = L_m(x) + R_m(x) \rightarrow$

$$y_k = y_{k-1} + \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx}_{I_2 - \text{пренебрежем}}$$

Сделаем замену переменной: $x = \overline{x}_0 + ht$

$$I_1 = \int_{\overline{x}_{k-1}}^{\overline{x}_k} L_m(x)dx = \int_{r-1}^{r} L_m(\overline{x}_0 + ht)dt$$

Используя интерполяционный полином Лагранжа для равноотстоящих узлов, запишем:

$$I_1 = \int_{r}^{r-1} L_m(\overline{x}_0 + ht)dt = \int_{r-1}^{r} \sum_{j=0}^{m} F_j \frac{(-1)^{m-j} \cdot \overline{\omega}(t)}{(m-j)! \cdot j! \cdot (t-j)} dt$$

где $\overline{\omega}(t) = \prod_{j=0}^{m} (t - j)$. Переставим знаки интегрированния и суммирования:

$$I_1 = h \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\left(\frac{(-1)^{m-j} \cdot}{(m-j)! \cdot j!} \int_{r-1}^{r} \frac{\overline{\omega}(t)}{t-j} dt \right)}_{\beta_j} F_j = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j F_j$$

Окночательно получаем:

$$y_k = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{m}\beta_j f_{k-r+j}$$

Рассмотрим остаточный член формулы Лагранжа:

$$R_m(x) = \frac{F^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}\omega(x)$$

где $\omega(x) = \prod\limits_{j=0}^{m}(x - x_j)$.

Сделаем замену переменной: $x = x0 + ht \Rightarrow \omega(x) \to h^{m+1}\overline{\omega}(x)$

$$I_2 = \int_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx = h^{m+2}\int_{r-1}^{r}\frac{F^{(m+1)}(\xi(x(t)))}{(m+1)!}\overline{\omega}(t)dt = \frac{h^{m+2}}{(m+1)!}\int_{r-1}^{r}F^{(m+1)}\eta(t)\overline{\omega}(t)dt = c_m h^{(m+2)}$$

Из рассмотренного равенства делаем вывод:

- $m = r - 1$ - явная формула, имеет порядок точности r (то есть совпадает с шаговостью метода).
- $m = r$ - неявная формула, имеет порядок точности $r - 1$.

Значит для получения предиктор-корректорного метода Адамса II-го порядка сначала вычисляем по явной формуле с $r = 2$, и уточняем по неявно формуле с $r = 1$.
Выведем нужные нам формулы:

$$y_k = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{m}\beta_j f_{k-r+j}$$

где $\beta_j = \dfrac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!}\int\limits_{r-1}^{r}\dfrac{t(t-1)...(t-m)}{t-j}$

- $r = 2, m = r - 1 = 1$ - явная формула

$$y_k = y_{k-1} + h(\beta_0 f_{k-2} + \beta_1 f_{k-1})$$

$$\beta_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{(1-0)!0!}\int\limits_{2-1}^{2}\frac{t(t-1)}{t-0} = -\frac{1}{2},\ \beta_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!1!}\int\limits_{2-1}^{2}\frac{t(t-1)}{t-1} = \frac{3}{2}$$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}(3f_{k-1} - f_{k-2})$$

- $r = 1, m = r = 1$ - неявная формула.

$$y_k = y_{k-1} + h(\beta_0 f_{k-2} + \beta_1 f_{k-1})$$

$$\beta_0 = \frac{(-1)^{1-0}}{(1-0)!0!}\int\limits_{1-1}^{1}\frac{t(t-1)}{t-0} = \frac{1}{2},\ \beta_1 = \frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!1!}\int\limits_{1-1}^{1}\frac{t(t-1)}{t-1} = \frac{1}{2}$$

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}(f_{k-1} + f_{k-2})$$

Итого получаем расчетную формулу предиктор-корректорного метода Адамса II-го порядка для ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases}\overline{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1}))\\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1}) + f(x_k, y_k))\end{cases}$$

Для ДУ 2-го порядка:

$$(2)\begin{cases} \overline{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(3z_k - z_{k-1}) \\ \\ \overline{z}_{k+1} = z_k + \frac{h}{2}(3f(x_k, y_k, z_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})) \\ \\ z_{k+1} = z_k + \frac{h}{2}(f(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1}, \overline{z}_{k+1}) + f(x_k, y_k, z_k)) \\ \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(z_{k+1} + z_k) \\ \end{cases}$$

$y_0 = y(a), z_0 = y'(a)$ - известны. y_1, z_1 найдем с помощью одношагового метода того же порядка, например, методом Эйлера-Коши.

2.1.1 Условия применимости

1. $y'' = f(x, y, y') \in C^2([a; b])$ - обеспечивает существование и единственность задачи Коши.

2.1.2 Алгоритм

1. Задан отрезок $[a, b]$. На нем построена равномерная сетка из n интервалов с шагом $h = \frac{b-a}{n}$.
2. Найдем y_1, z_1 одношаговым методом Эйлера-Коши.
3. Применяем формулу (1) для $k = 0..(n-1)$, учитывая начальные условия: $y_0 = y(a),\ z_0 = z(a) = y'(a)$.
4. Получаем сеточную функцию y^h – приближенное решение задачи Коши, h - шаг.
5. Точность вычисляется по правилу Рунге:

$$\frac{|y^{(2h)}(b) - y^{(h)}(b)|}{2^s - 1} \leq \epsilon$$

   Где $s = 2$ - порядок метода, $y^{(2h)}(b)$ - значение сеточной функции, построенной при шаге $2h$, в точке b.
   Если точность ϵ не достигается, то уменьшаем шаг в 2 раза.

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимости

$f(x, y, y') = \frac{y' + e^x(1-y)}{e^x + 1}$ - непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$.

5. Тестовый пример

Дано: задча Коши, сформулированная в пункте 1.

5.1. Метод Эйлера-Коши

$n = 2$ - количество интервалов, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2} = 0.5$, $y_0 = y(0) = 0,\ z_0 = y'(0) = 1,\ \ x = [0, 0.5, 1]$.
$f(x_k, y_k, z_k) = \frac{z_k + e^{x_k}(1 + y_k)}{e^{x_k} + 1}$.

$k = 0$:

$$\begin{cases} \overline{y}_1 = y_0 + hz_0 = 0 + 0.5 \cdot 1 = 0.5 \\ \overline{z}_1 = z_0 + hf(x_0, y_0, z_0) = z_0 + h \cdot \dfrac{z_0 + e^{x_0}(1 + y_0)}{e^{x_0} + 1} = 1 + 0.5 \cdot \dfrac{1 + e^0(1 + 0)}{e^0 + 1} = 1.5 \\ z_1 = z_1 + h\dfrac{f(x_0, y_0, z_0) + f(x_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)}{2} = 1 + \dfrac{0.5}{2} \cdot (\dfrac{1 + e^0(1 + 0)}{e^0 + 1} + \dfrac{1.5 + e^{0.5}(1 + 0.5)}{e^{0.5} + 1}) = 1.625 \\ y_1 = y_0 + h\dfrac{z_0 + z_1}{2} = 0 + \dfrac{0.5}{2} \cdot (1 + 1.625) = 0.65625 \end{cases}$$

$k = 1$:

$$\begin{cases} \overline{y}_2 = y_1 + hz_1 = 0.65625 + 0.5 \cdot 1.625 = 1.46875 \\ \overline{z}_2 = z_1 + hf(x_1, y_1, z_1) = 1.625 + 0.5 \cdot \dfrac{1.625 + e^{0.5}(1 + 0.65625)}{e^{0.5} + 1} = 2.44722 \\ z_2 = z_1 + h\dfrac{f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, \overline{y}_2, \overline{z}_2)}{2} = 1.625 + \dfrac{0.5}{2}(\dfrac{1.625 + e^{0.5}(1 + 0.65625)}{e^{0.5} + 1} + \dfrac{2.44722 + e^1(1 + 1.46875)}{e^1 + 1}) = 2.65185 \\ y_2 = y_1 + h\dfrac{z_1 + z_2}{2} = 0.65625 + \dfrac{0.5}{2} \cdot (1.625 + 2.65185) = 1.72546 \end{cases}$$

Точное значение $y\_ex = e^1 - 1 = 1.71828$
$\dfrac{|y\_ex - y_2|}{y\_ex} = \dfrac{|1.71828 - 1.72546|}{1.71828} \approx 0.004$, достигли хорошей точности.

5.2. Метод Адамса II-го порядка

$n = 2$ - количество интервалов, $h = \dfrac{b - a}{n} = \dfrac{1}{2} = 0.5$, $y_0 = y(0) = 0$, $z_0 = y'(0) = 1$, $x = [0, 0.5, 1]$.
$f(x_k, y_k, z_k) = \dfrac{z_k + e^{x_k}(1 + y_k)}{e^{x_k} + 1}$.

$k = 0$, метод Эйлера-Коши:

$$\begin{cases} \overline{y}_1 = y_0 + \dfrac{h}{2}(3z_0 = 0 + 0.5 \cdot 1 = 0.5 \\ \overline{z}_1 = z_0 + hf(x_0, y_0, z_0) = z_0 + h \cdot \dfrac{z_0 + e^{x_0}(1 + y_0)}{e^{x_0} + 1} = 1 + 0.5 \cdot \dfrac{1 + e^0(1 + 0)}{e^0 + 1} = 1.5 \\ z_1 = z_1 + h\dfrac{f(x_0, y_0, z_0) + f(x_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)}{2} = 1 + \dfrac{0.5}{2} \cdot (\dfrac{1 + e^0(1 + 0)}{e^0 + 1} + \dfrac{1.5 + e^{0.5}(1 + 0.5)}{e^{0.5} + 1}) = 1.625 \\ y_1 = y_0 + h\dfrac{z_0 + z_1}{2} = 0 + \dfrac{0.5}{2} \cdot (1 + 1.625) = 0.65625 \end{cases}$$

$k = 1$:

$$\begin{cases} \overline{y}_2 = y_1 + \dfrac{h}{2}(3z_1 - z_0) = 0.65625 + \dfrac{h}{2} \cdot (3 \cdot 1.625 - 1) = 1.625 \\ \overline{z}_2 = z_1 + \dfrac{h}{2}(3f(x_1, y_1, z_1) - f(x_0, y_0, z_0)) = 1.625 + \dfrac{0.5}{2}(3\dfrac{1.625 + e^{0.5}(1 + 0.65625)}{e^{0.5} + 1} - \dfrac{1 + e^0(1 + 0)}{e^0 + 1}) = 2.60833 \\ z_2 = z_1 + \dfrac{h}{2}(f(x_2, \overline{y}_2, \overline{z}_2) + f(x_1, y_1, z_1)) = 1.625 + \dfrac{0.5}{2}(\dfrac{2.60833 + e^1(1 + 1.625)}{e^1 + 1} + \dfrac{1 + e^0(1 + 0)}{e^0 + 1}) = 2.69124 \\ y_2 = y_1 + h\dfrac{z_1 + z_2}{2} = 0.65625 + \dfrac{0.5}{2} \cdot (1.625 + 2.69124) = 1.73531 \end{cases}$$

Точное значение $y\_ex = e^1 - 1 = 1.71828$
$\dfrac{|y\_ex - y_2|}{y\_ex} = \dfrac{|1.71828 - 1.73531|}{1.71828} \approx 0.009$, достигли хорошей точности.

6. Контрольные тесты

1. График сравнения точного ответа и полученного в методе.
2. График зависимости точности от величины шага.
3. График зависимотси погрешности вычисления от погрешности в 1 производной.

7. Модульная структура программы

def Eiler_Koshi(a, b, n)
Принимает на вход отрезок, на котором решается задача Коши, и количество промежутков разбиения этого отрезка.
Результат работы функции - сеточная функция - численное решение ДУ 2-го порядка

def Adams(a, b, n)
Принимает на вход отрезок, на котором решается задача Коши, и количество промежутков разбиения этого отрезка.
Результат работы функции - сеточная функция - численное решение ДУ 2-го порядка

def nodes_epsilon(a, b)
Принимает на вход отрезок, на котором решается задача Коши.
Результат работы функции - график зависимости ошибки от числа узлов для обох методов.

def graphics(a,b)
Принимает на вход отрезок, на котором решается задача Коши.
Результат работы функции - график сравнения точного решения и полученного численным методом.

def derivative_error(a,b)
Принимает на вход отрезок, на котором решается задача Коши.
График зависимости относительной погрешности вычисления от погрешности в 1 производной.

8. Численный анализ

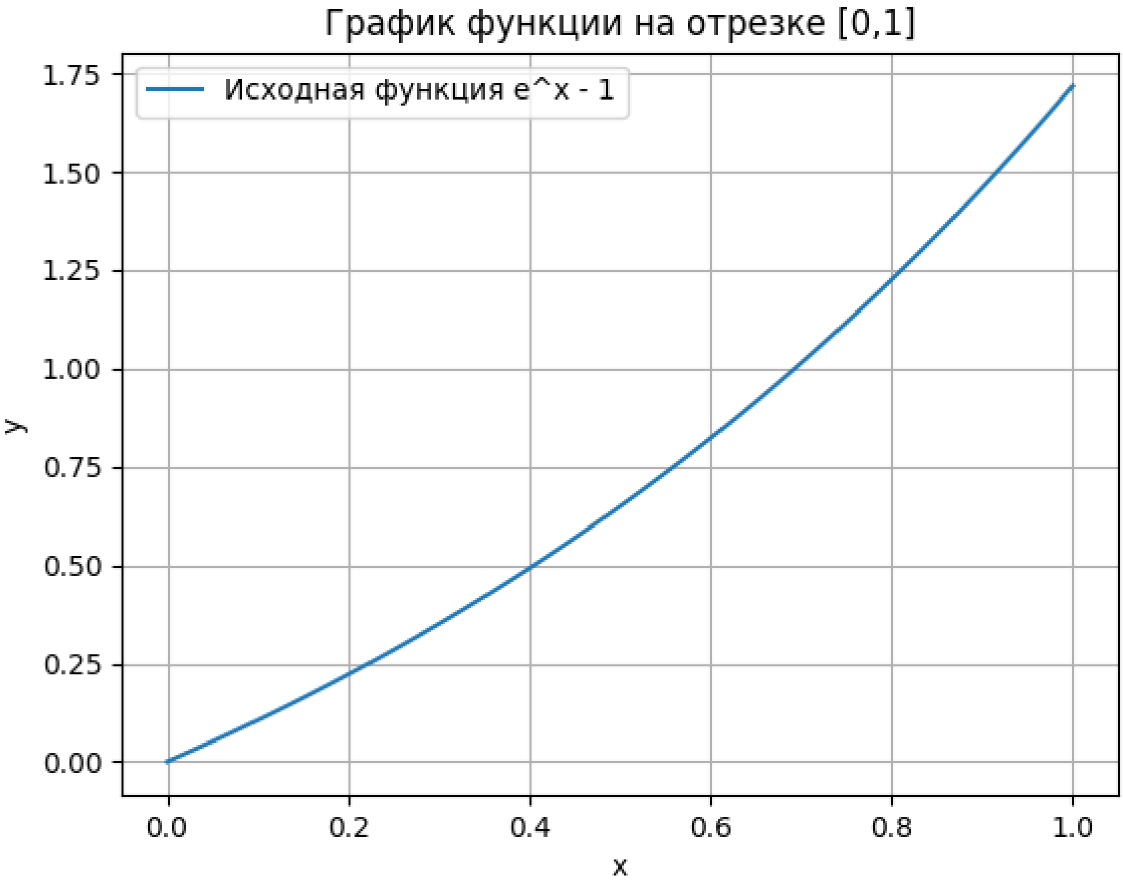

Рис. 1: График точного решения на отрезке $[0, 1]$

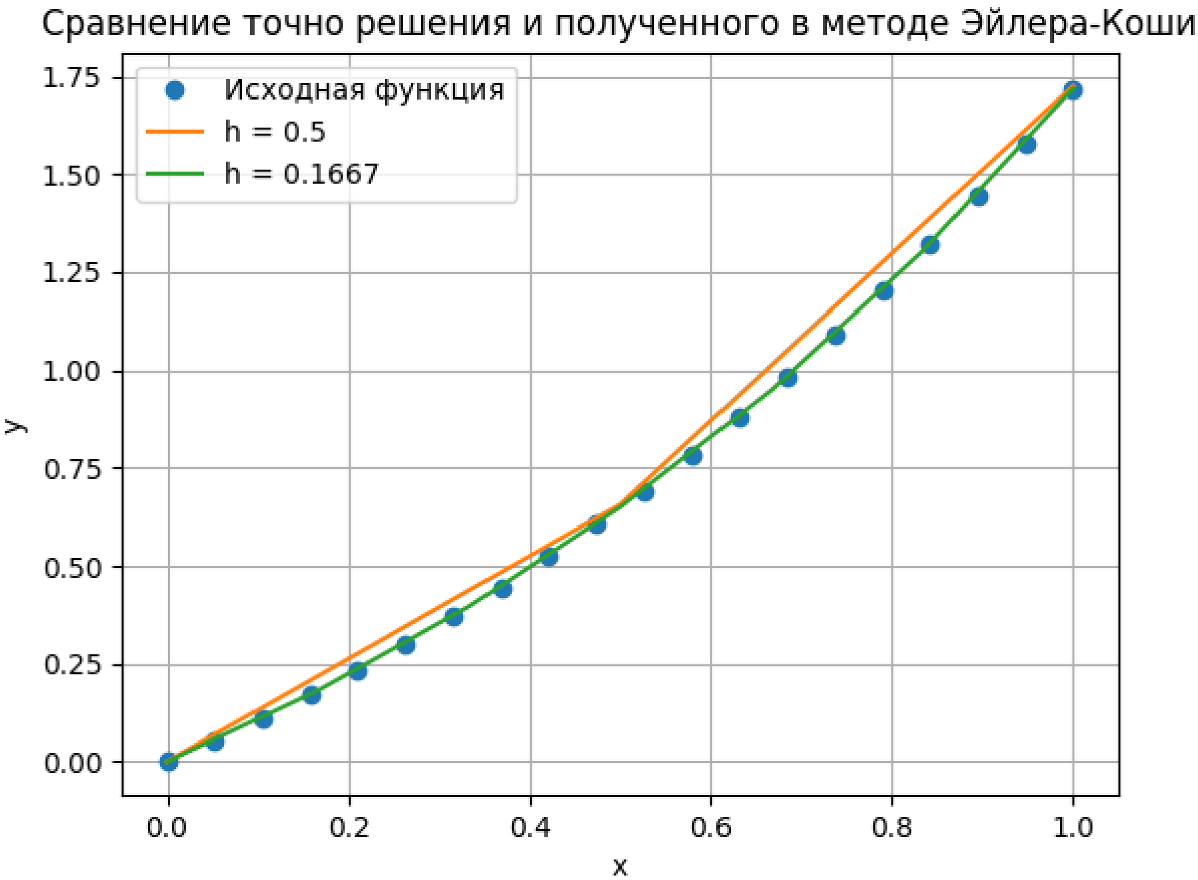

Рис. 2: Метод Эйлера-Коши. График сравнения точного ответа и полученного в методе.

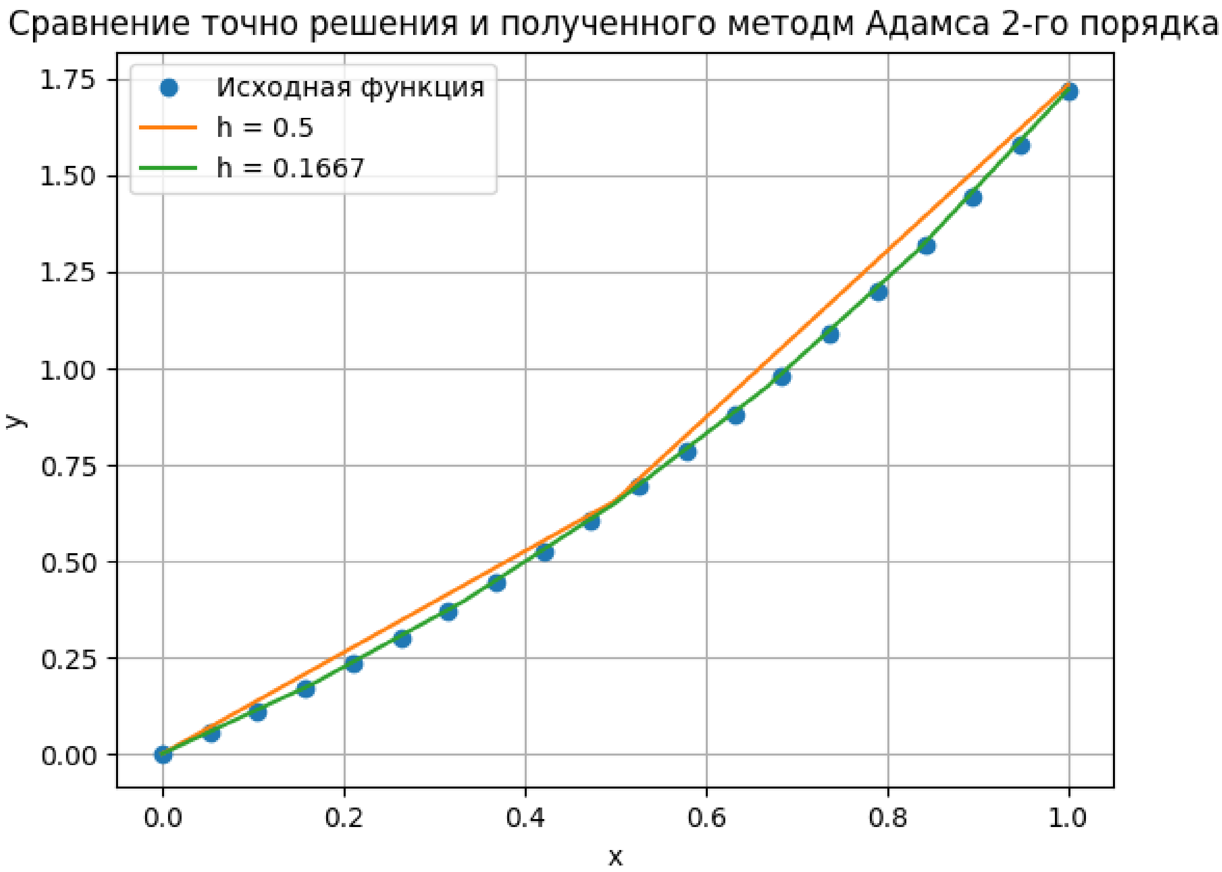

Рис. 3: Метод Адамса II-го порядка. График сравнения точного ответа и полученного в методе.

На графиках 2-3 представлен результат работы методов Эйлера-Коши и Адамса 2-го порядка при 2 разных шагах. Оба метода хорошо приближают функцию при $h = 0.1667$.

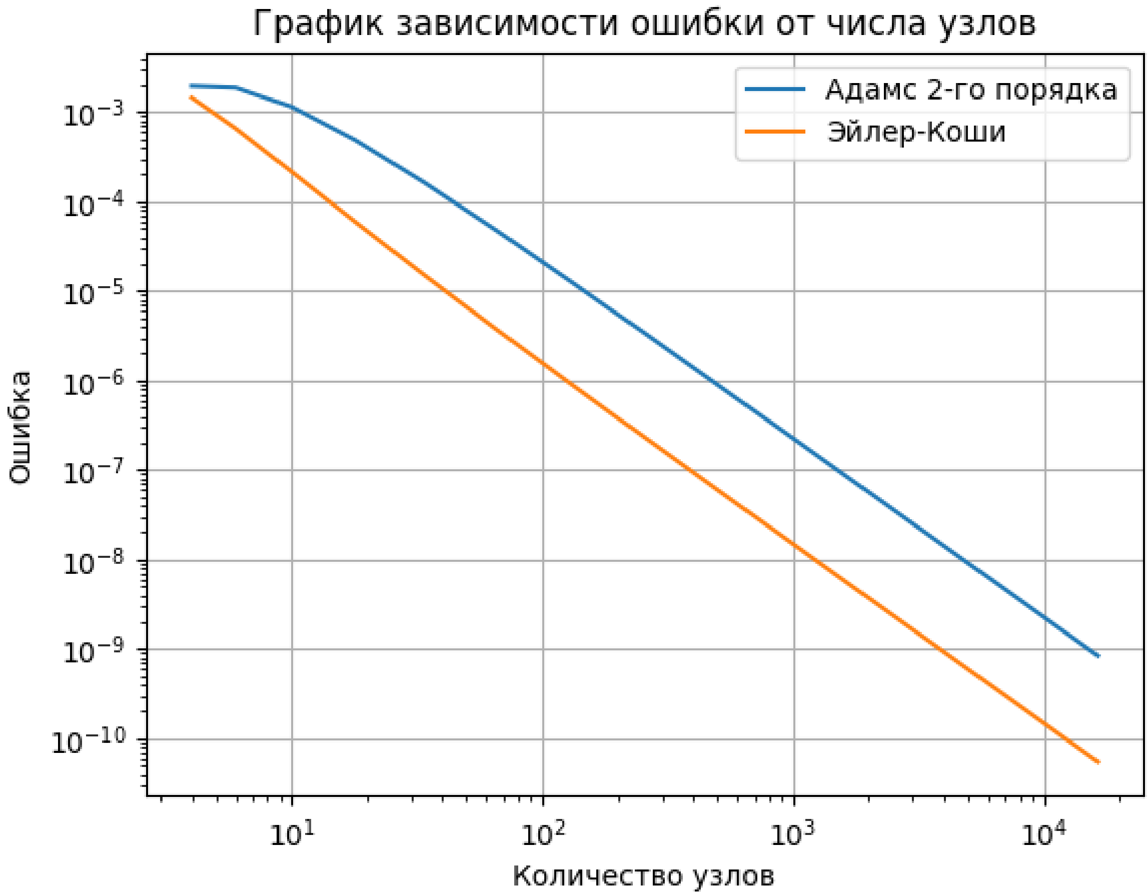

Рис. 4: График зависимости ошибки от числа узлов для обох методов.

На графике 4 видно, что метод Эйлера-Коши эффективнее метода Адамса II-го порядка, то есть при обдинаковой величине шага метод Эйлера-Коши показывает лучшую точность. Также можно сделать вывод, что при $h \to 0$ уменьшается ошибка вычисления.

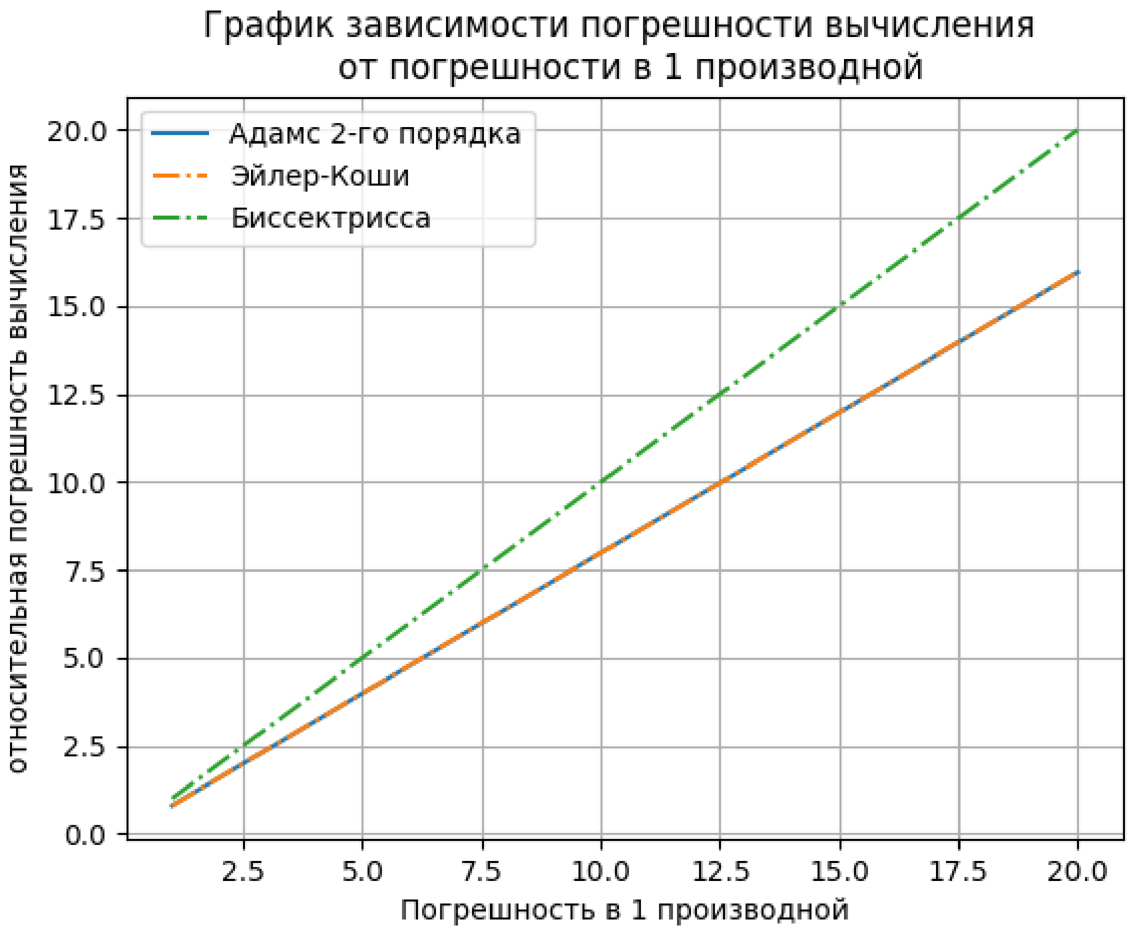

Рис. 5: График зависимости относительной погрешности вычисления от погрешности в 1 производной. Начальные значения для метода Адамса считаются методом Эйлера-Коши с внесенной в 1-ую производную погрешностью.

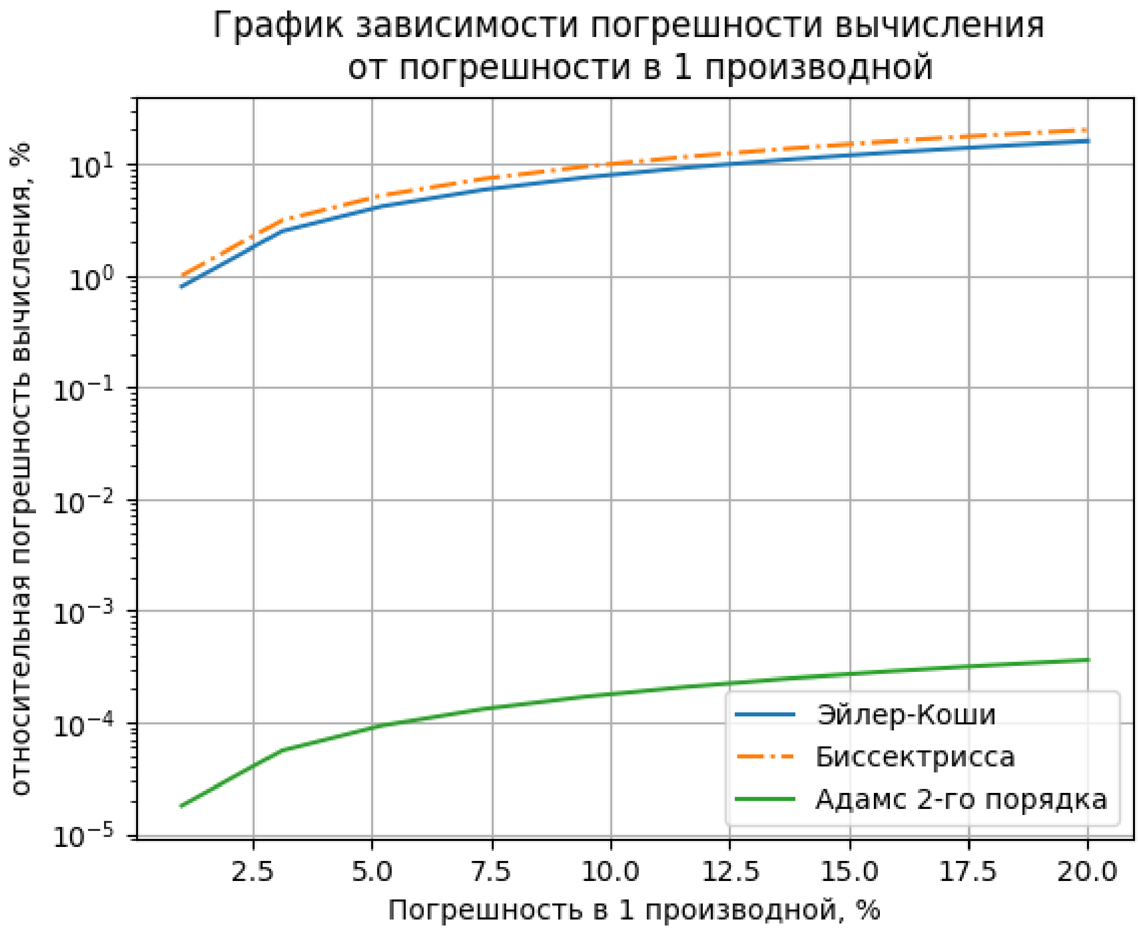

Рис. 6: График зависимости относительной погрешности вычисления от погрешности в 1 производной. Начальные значения для метода Адамса считаются методом Эйлера-Коши без внесения погрешности. После поулчения начальных значений вносится погрешность в 1-ую производную.

Из графиков 5-6 можно сделать вывод, что методы устойчивы, так как графики лежат ниже биссектрисы.

9. Вывод

В ходе работы были реализованы 2 метода численного решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка: одношаговый - метод Эйлера-Коши и двушаговый - метод Адамса II-го порядка. Получилось, что:

1. оба метода сходятся при стремлении выличины шага к нулю.
2. метод Эйлера-Коши немного эффективнее метода Адамса II-го порядка.
3. оба метода устойчивы по отношению к погрешности в 1-ой производной.