СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторным работам №3 и №4

Тема

Численное интегрирование

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Новиков А.А.
Преподаватель Павлова Л.В.

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи

Вычислить определенный интеграл от заданной функции $f(x) = e^{-x}$ с помощью квадратурной формулы Нютона-Котеса - формулы Симпсона и с помощью квадратурной формулы Гаусса с 4 узлами. Использовать правило Рунге для оценки погрешности интеграла. Рассмотреть графики зависимости точности методов от числа узлов, графики зависимости требуемого числа узлов для достижения заданной точности и сравнить эффективность методов.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

Представим определённый интеграл на промежутке $[a, b]$ функции $F(x)$ в виде квадратурной формулы:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

A_k и x_k - коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

2.1 Формула Симпсона

Пусть заданы и различны $x_i \in [a, b],\ i = 1..n$. Построим табличную функцию $(x_i, f(x_i)) \rightarrow$ построим интерполяционный полином в форме Лагранжа: $L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi(x_k)$.

$f(x) = L_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \Rightarrow$
Подставим полученное выше представление $f(x)$, отбросив погрешность $R_{n-1}(x)$:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \int_a^b p(x)L_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b p(x)\Phi(x_k)dx}_{A_k}$$

Формулы Ньютона-Котесса - Квадратурные формулы интерполяционного типа, для которых выполнено 2 дополнительных условия:

1. $p(x) = 1$
2. $x_k = a + h(k-1), h = \dfrac{b-a}{n-1},\ k = 1..n$, те сетка равномерная

Получаем: $A_k = \int_a^b \Phi(x_k)dx,$ где $\Phi(x_k) = \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_k - x_j}$

Далее выполним замену: $x = a + ht,\ t \in [0, n-1] \ \Rightarrow\ x - x_j = a + ht - (a + h(j-1)) = h(t - j + 1),\ x_k - x_j = h(k-j)$

$A_k = h\int\limits_a^b \prod\limits_{j=1, j\neq k}^{n} \dfrac{t-j+1}{k-j},\ \ \omega(t) = \prod\limits_{j=0}^{n-1}(t-j)$

Получаем формулу для вычисления коэффициентов Ньютона-Котесса:

$$A_k = h\frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\int\limits_0^{n-1}\frac{\omega(t)}{t-k+1}dt = hH_n^{(k)}, \text{ где } k = 1..n,\ n - \text{число узлов}$$

Формула Симпсона:
$x_1 = a, x_2 = a + h = \dfrac{a+b}{2}, x_3 = b, h = \dfrac{b-a}{2}$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(H_3^{(1)}f(a) + H_3^{(2)}f(\frac{a+b}{2}) + H_3^{(3)}f(b))$$

где $H_3^{(1)} = H_3^{(3)} = \dfrac{1}{3}, H_3^{(2)} = \dfrac{4}{3},$ выводятся из соответствующей формулы выше.

$$S_3(f) = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Выведем обобщенную формулу Симпсона:

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2N$ интервалов длиной $h = \dfrac{b-a}{2N}$, $H = 2h$

$$\overline{x}_k = a + kh, k = 0..2N$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\overline{x}_{2k-2}}^{\overline{x}_{2k}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{3}(f(\overline{x}_{2k-2} + 4f(\overline{x}_{2k-1}) + f(\overline{x}_{2k})$$

Перегруппировав слагаемые, получаем окончательно обобщенную формулу Симпсона:

$$S_{3,N(f)} = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{N} f(\overline{x}_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(\overline{x}_{2k})\right)$$

2.1.1 Условия применимости

1. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ - узлы попарно различны и граничные узлы совпадают с концами отрезка
2. $f(x) \in C([a; b])$

2.1.2 Алгоритм

1. Пусть задан отрезок $[a, b]$ и $2n+1$ точек (те $2n$ интервалов), на которые надо разбить этот отрезок. $x_k = a + kh, k = 0, \dots, n-1, h = \dfrac{b-a}{n-1}$.
2. Находим значеня функции в узловых точках.
3. Считаем интеграл по обобщенной формуле.
4. Вычисляем точность по правилу Рунге:

$$\frac{|S_{n,2N(f)} - S_{n,N(f)}|}{2^m - 1} \le \epsilon$$

Где $n = 3$, $m = 4$ для формулы Симпсона.

2.2 Формула Гаусса с 4 узлами

Метод Гаусса - формула наивысшего порядка точности, то есть узлы не зареплены. Узлы - это корни характеристического полинома $\omega(x)$:

$$\omega(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$$

Узлы можно найти по формуле Родрига, где они являются корнями полинома Лежандра:

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

,где $c_n = \frac{1}{n!2^n}$. Если $[a; b] = [-1; 1], n = 4$. Можем записать полином Лежандра для четырех узлов $P_4(x) = c_4 \frac{d^4}{dx^4}[(x^2-1)^4]$
и найти его корни, которые будут коэффициентами t_i квадратурной формулы Гаусса, которые, как известно, существуют для любого n, различны и принадлежат интервалу $(-1; 1)$, а веса A_i находятся интегрированием базисных многочленов Лагранжа $l_i(t)$ степени $n-1$, а именно

$A_i = \int_{-1}^{1} \frac{(t-t_1)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_n)}{(t_i-t_1)\dots(t_i-ti-1)(t_i-t_{i+1})\dots(t_i-t_n)} dt.$

Получим:
$t_i = [-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136]$

$A_i = [0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855]$

Чтобы находить интегралы не только на отрезке $[-1; 1]$, а на любом произвольном $[a; b]$ введем $x =$

$\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$, тогда

$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^n A_k f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k)$

Теперь получим обобщенную формулу:
$H = \frac{b-a}{N}$ $T_i = a + iH, i = 0, \ldots, N$.

Тогда наша формула примет вид:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^N \int_{T_{i-1}}^{T_i} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^N \frac{H}{2}\sum_{k=1}^n A_k f(\frac{T_{i-1}+T_i}{2}+\frac{T_i-T_{i-1}}{2}t_k)$$

2.2.1 Алгоритм

1. разобьем отрезок на N промжутков: $H = \frac{b-a}{N}$ $T_i = a + iH, i = 0, \ldots, N$.
2. для каждого промежутка $[T_{i-1}, T_i]$ применим формулу:

$$I+= \frac{H}{2}\sum_{k=1}^n A_k f(\frac{T_{i-1}+T_i}{2}+\frac{T_i-T_{i-1}}{2}t_k)$$

3. Вычисляем точность по правилу Рунге:

$$\frac{|S_{n,2N(f)} - S_{n,N(f)}|}{2^m-1} \le \epsilon$$

Где $n = 4$, $m = 4$ для формулы Гаусса с 4 узлами.

2.2.2 Условия применимости

1. $f(x) \in C([a;b])$

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимости

Заданная функция $f(x) = e^{(-x)}$ всюду непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка. Значит можно применять методы при любых a и b.

5. Тестовый пример

Дано: $f(x) = e^{(-x)}$, Найдем значение интеграла на отрезке $[-1;0]$

Для проверки $\int_{-1}^0 e^{-x}dx = -e^{-x}|_{-1}^0 = 1.718$

5.1. Формула Симпсона

1. N = 2 (N - количество интервалов):

$$h = \frac{0-(-1)}{2} = 0.5 \quad x = [-1, -0.5, 0]$$

$$S_{3,2} = \frac{0.5}{3}(e^{-(-1)} + e^{-(0)} + 4 * \sum_{k=1}^{1} f(x_{2k-1}) + 2 * \sum_{k=1}^{0} f(x_{2k})) = 1.719$$

Как видим на малом участке получился практически точный ответ уже при минимальном числе интервалов.

2. N = 2 (N - количество интервалов):

Попробуем взять более широкий отрезок интегрирования: $[-3;0]$

Для проверки $\int_{-3}^0 e^{-x}dx = -e^{-x}|_{-3}^0 = 19.086$

$$h = \frac{0-(-3)}{2} = 1.5 \quad x = [-3, -1.50,]$$

$$S_{3,2} = \frac{1.5}{3}(e^{-(-3)} + e^{-(0)} + 4 * \sum_{k=1}^{1} f(x_{2k-1}) + 2 * \sum_{k=1}^{0} f(x_{2k})) = 19,506$$

$$\frac{|19,506 - 19.086|}{19.086} \approx 0.02 \text{ - получаем опять же хорошую точность}$$

5.2. Формула Гаусса с 4 узлами

Пусть N = 1(N - количество промежутков), тогда:
$H = \frac{0-(-1)}{1} = 1$ $T_0 = -1, T_1 = 0$

$$I = \frac{1}{2}(0.347855 \cdot (\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0.861136)) + 0.652145 \cdot (\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-0.339981)) + 0.652145 \cdot (\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.339981) + 0.347855 \cdot (\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.861136)) = 1.718$$

Как видим, уже с 1 промежутком интегрирования получается точный ответ.

6. Контрольные тесты

Тесты буду производить для обоих методов для отрезков $[-5; -1]$, на котором функция быстро убывает, и $[0; 3]$, где функция практически константа.

1. График зависимости погрешности метода от количества узлов
2. График зависимости требуемого количества узлов для достижения требуемой точности
3. График проверки достижения требуемой точности вычилсения
4. График сравнения эффективности методов

7. Модульная структура программы

def integrate(func,a,b,eps)
Принимает на вход интегрируемую функцию, границы
интегрирования a и b, и требуемую точность результата eps.
Результат работы функции - посчитанный интеграл на промежутке a,b.

def simpson(nodes)
Работает в паре с функцией integrate.
Принимает на вход количество узлов разбиения отрезка интегрирования.
Результат работы функции - значение интеграла по отрезку a,b.

def gauss(nodes)
Работает в паре с функцией integrate.
Принимает на вход количество узлов разбиения отрезка интегрирования.
Результат работы функции - значение интеграла по отрезку a,b.

def nodes_accuracy(func,a,b)
Принимает на вход интегрируемую функцию, границы интегрирования a и b.
Результат работы функции - график зависимости точности от количества узлов.

def error_nodes(func,a,b)
Принимает на вход интегрируемую функцию, границы интегрирования a и b.
Результат работы функции - график зависимости требуемого числа узлов для достижения нужной точности.

def check_accuracy(func,a,b)
Принимает на вход интегрируемую функцию, границы интегрирования a и b.
Результат работы функции - проверки достижения требуемой точности вычилсения.

def compare(func,a,b)
Принимает на вход интегрируемую функцию, границы интегрирования a и b.
Результат работы функции - график, на котором изображены,две кривые, отвечающие зависимостям погрешности от числа узлов для обоих методов.

8. Численный анализ

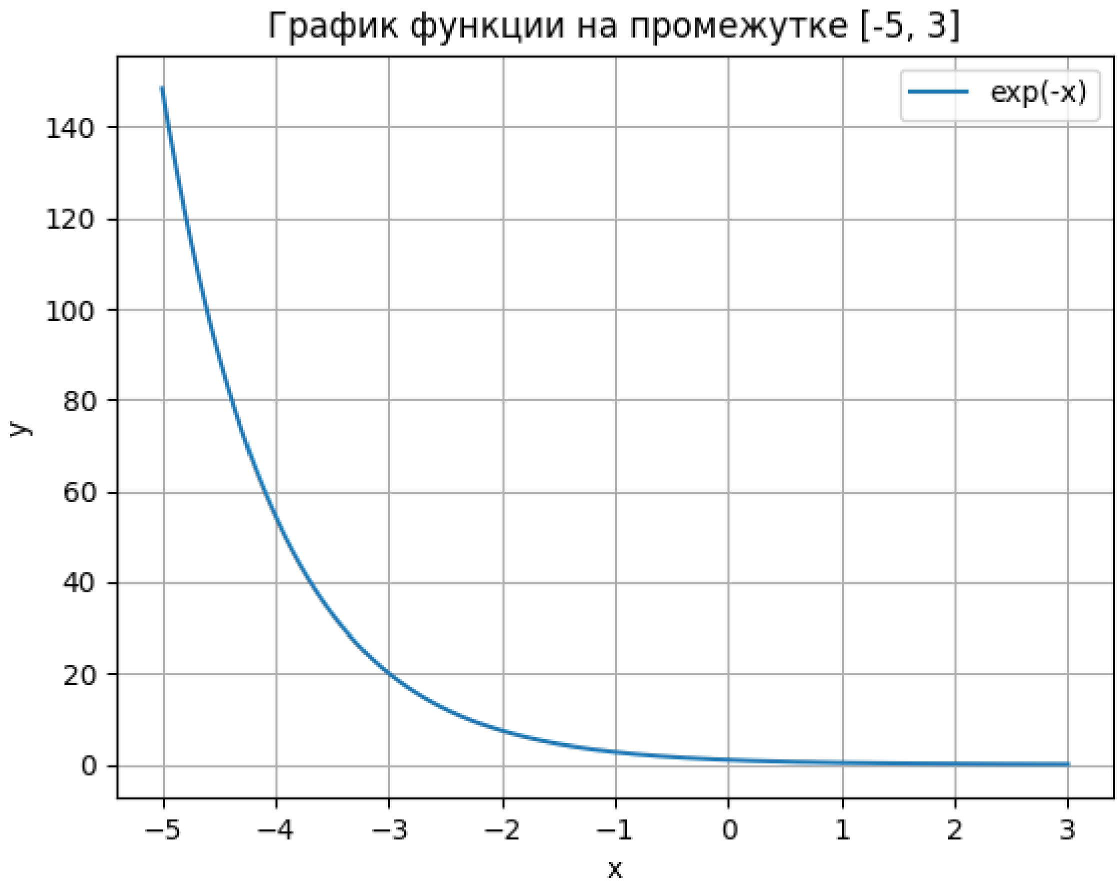

Рис. 1: График заданной функции на промежутке $[-5, 3]$

8.1. формула Симпсона

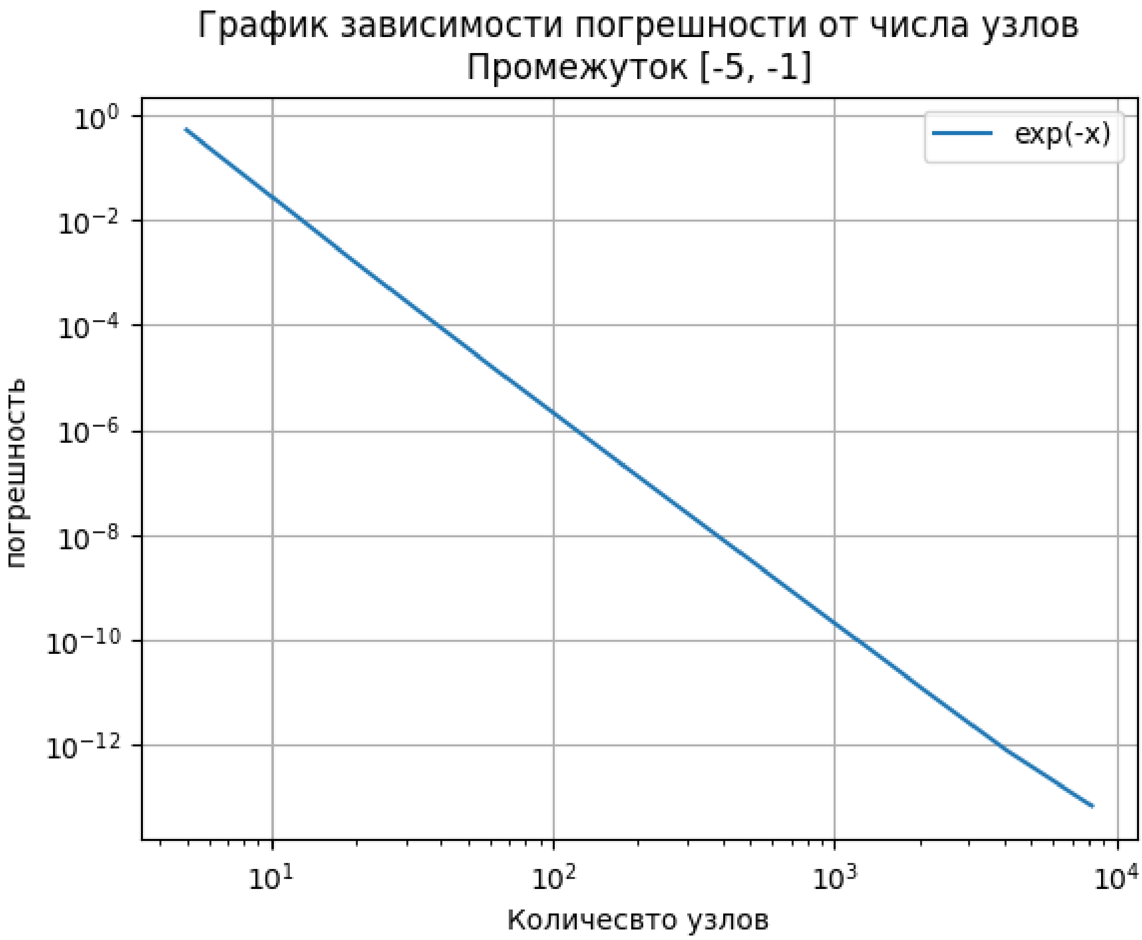

Рис. 2: Формула Симпсона. График зависимости погрешности от числа узлов на $[-5, -1]$

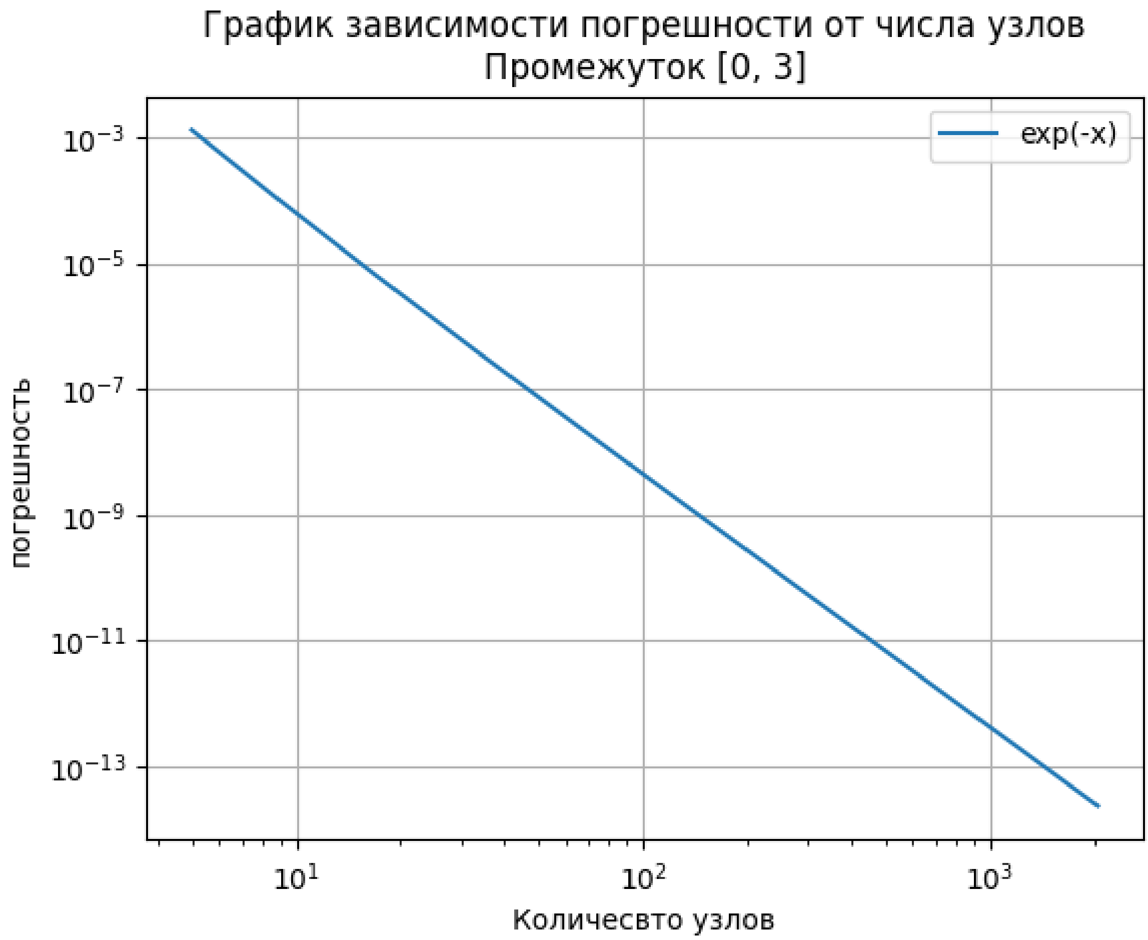

Рис. 3: Формула Симпсона. График зависимости погрешности от числа узлов на $[0, 3]$

Рис. 4: Формула Симпсона. График зависимости требуемого количества узлов для достижения требуемой точности на $[-5, -1]$

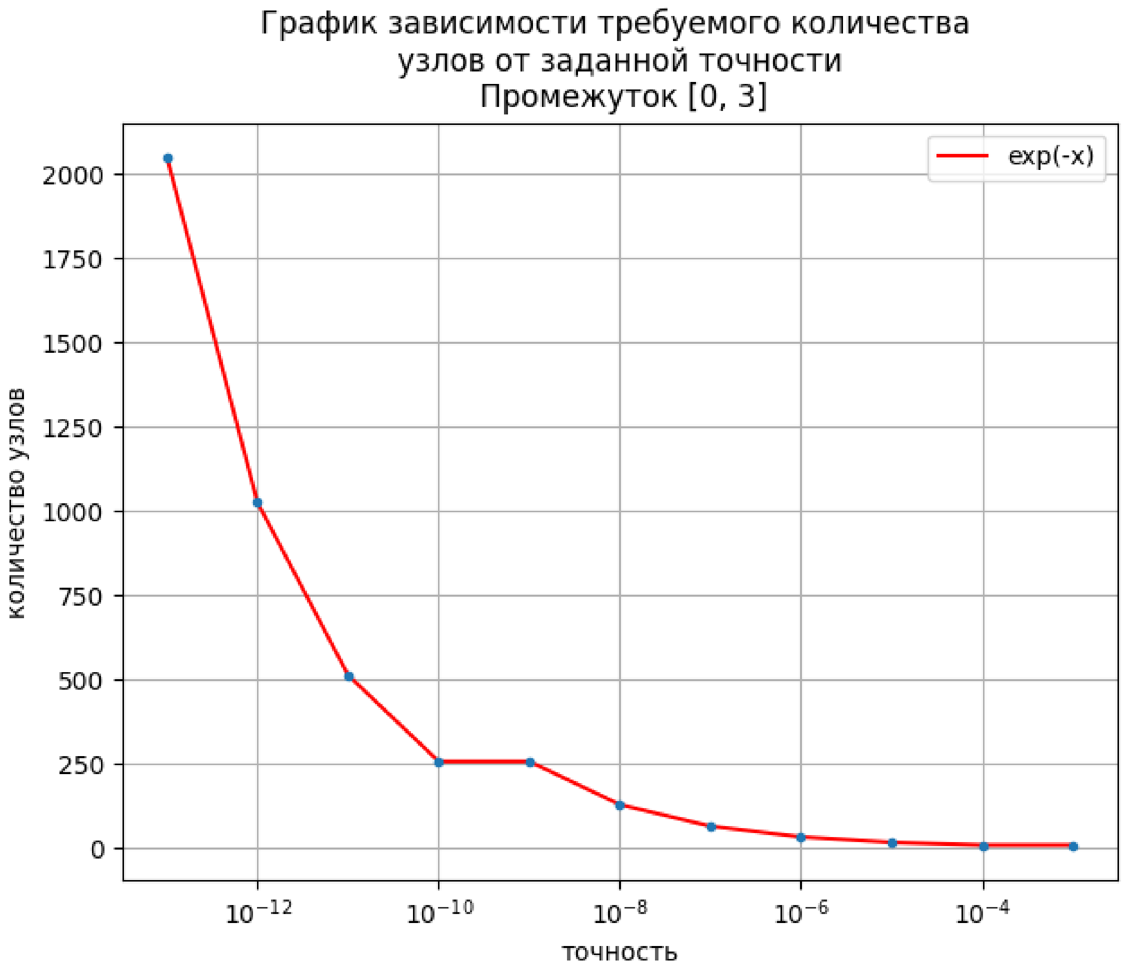

Рис. 5: Формула Симпсона. ависимости требуемого количества узлов для достижения требуемой точности на $[0, 3]$

Из графиков 2-5 делаем вывод, что с увеличением числа узлов уменьшается погрешность вычисления для формулы Симпсона. При этом для отрезка, где функция практически константа и принмиает небольшие значения, точность достигается за меньшее число узлов.

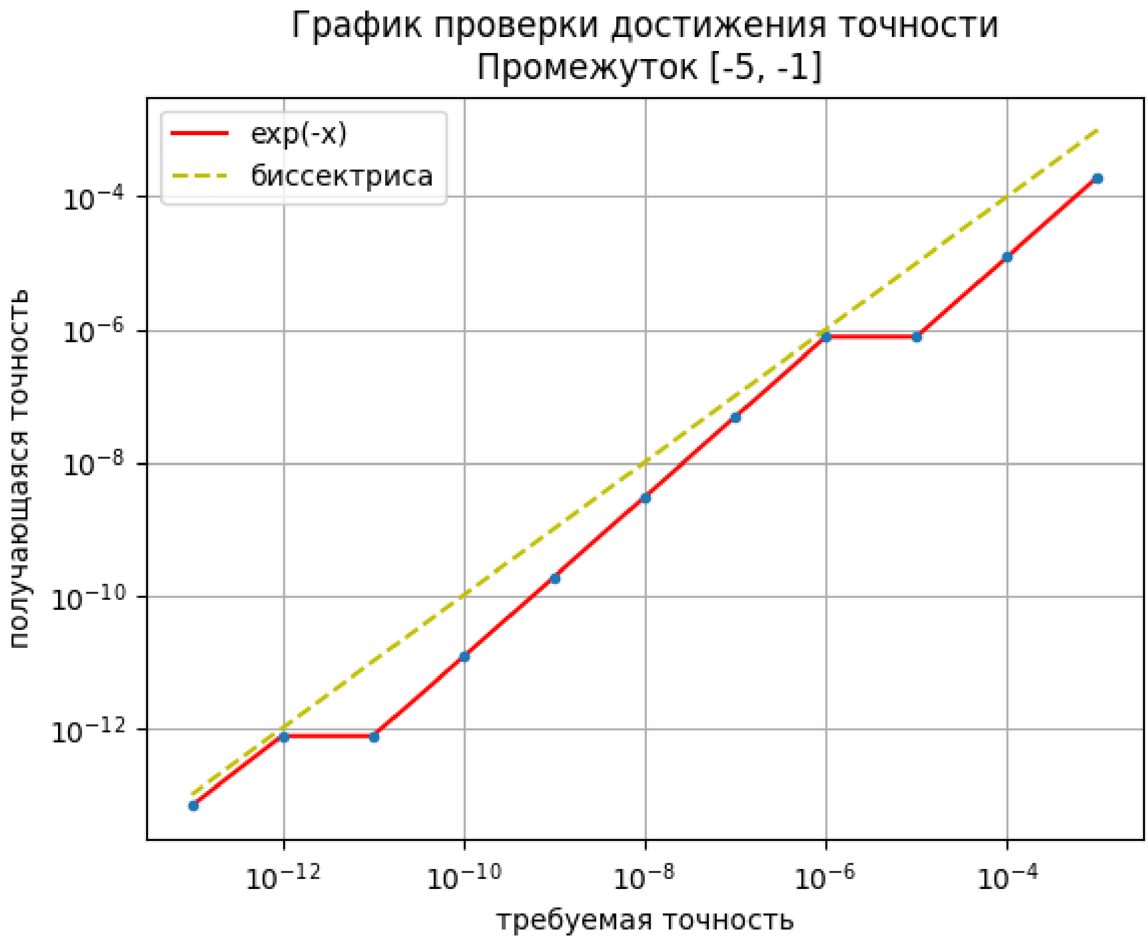

Рис. 6: Формула Симпсона. График проверки достижения требуемой точности вычилсения на $[-5, -1]$

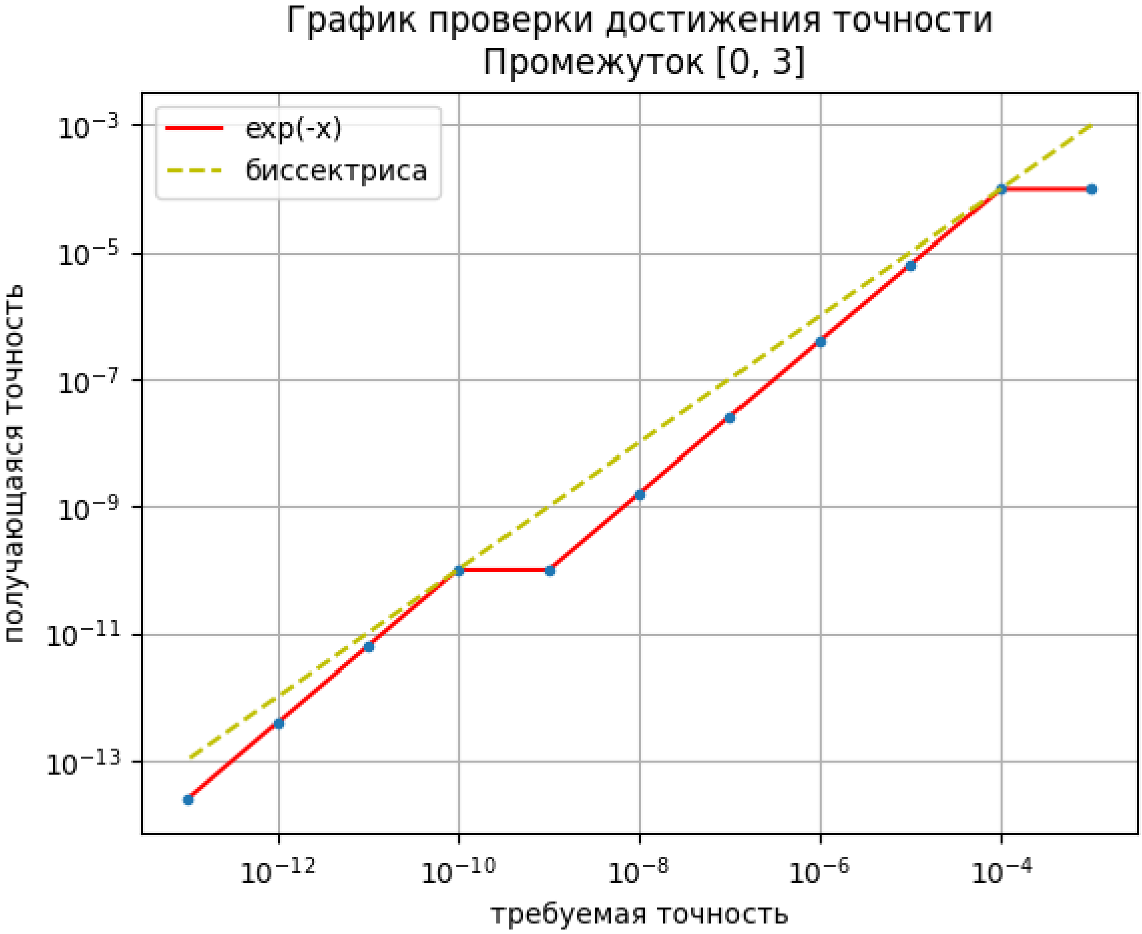

Рис. 7: Формула Симпсона. График проверки достижения требуемой точности вычилсения на $[0, 3]$

Из графиков 6-7 делаем вывод, что требуемая точность достигается, так как график зависимотси лежит ниже биссектрисы.

8.2. формула Гаусса с 4 узлами

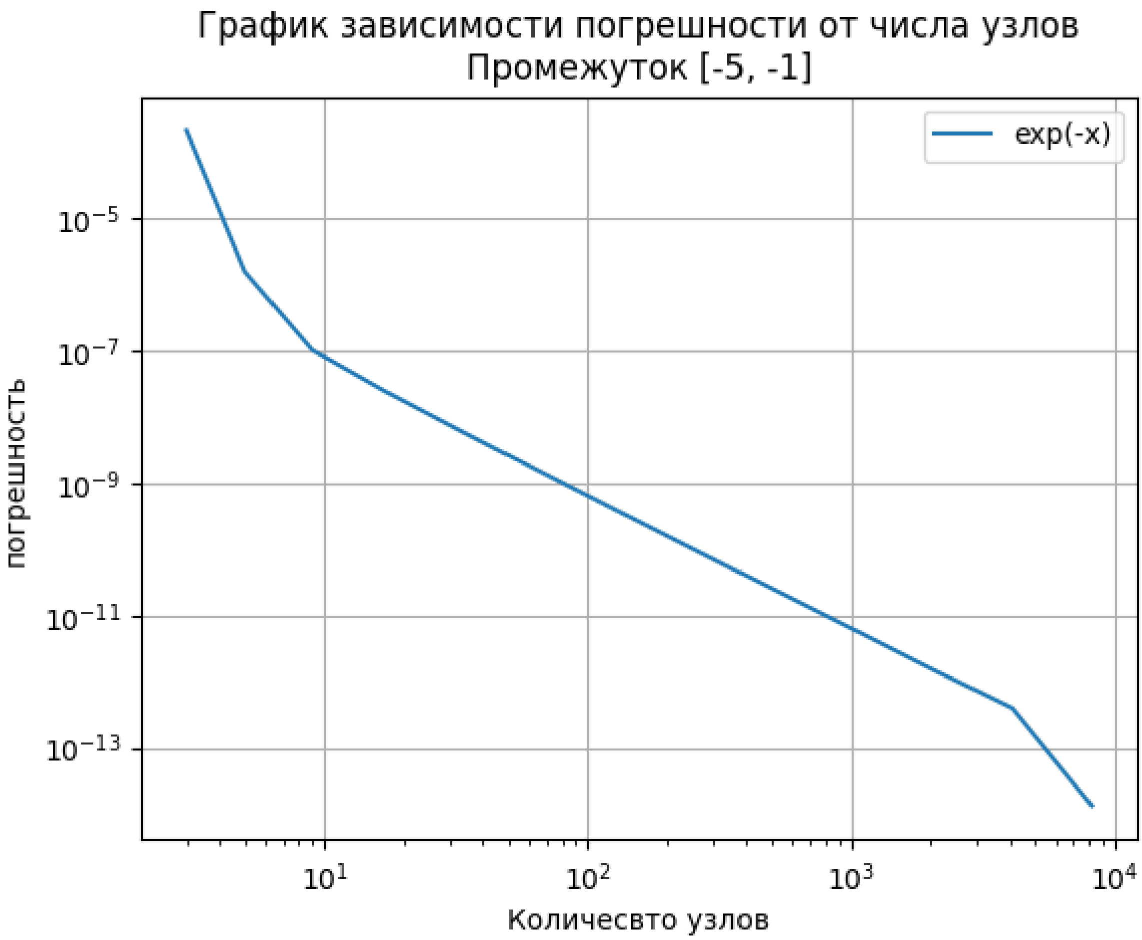

Рис. 8: Формула Гаусса с 4 узлами. График зависимости погрешности от числа узлов на $[-5, -1]$

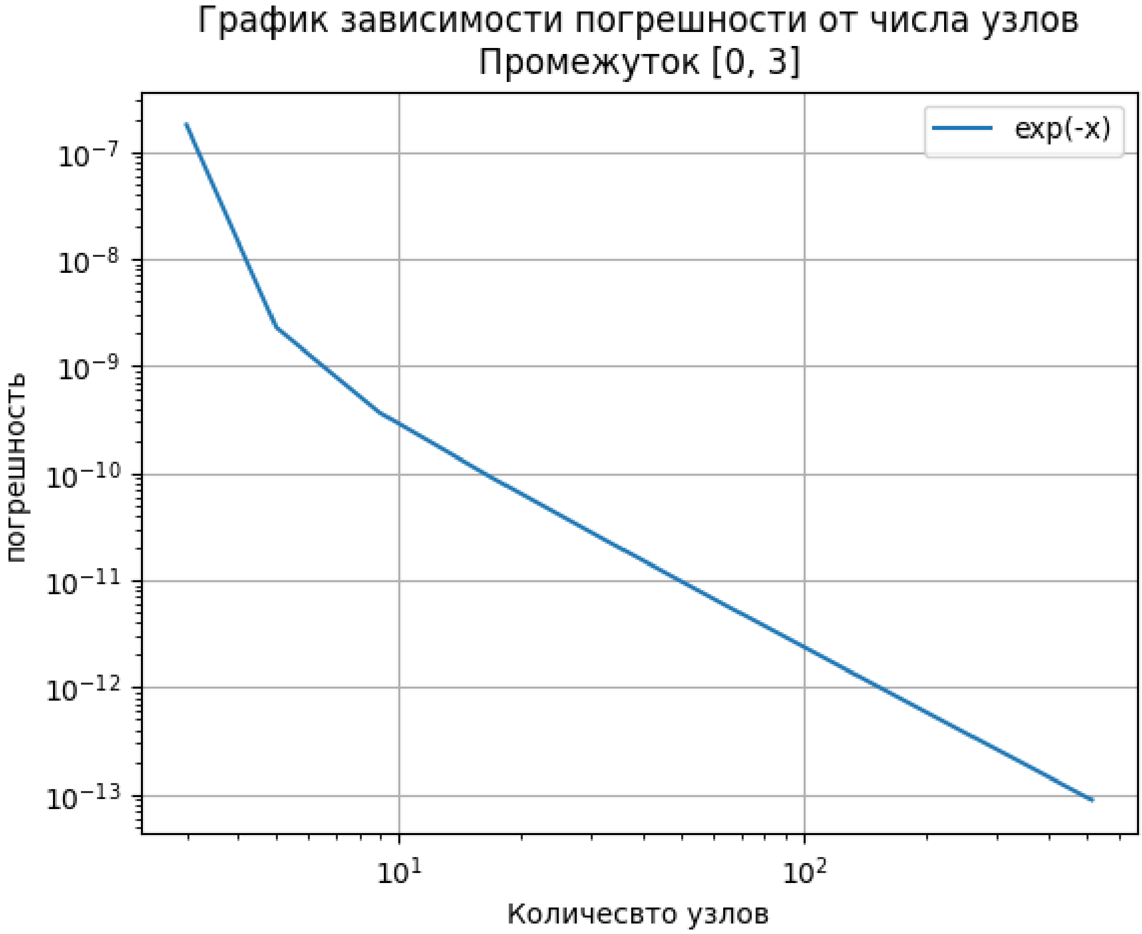

Рис. 9: Формула Гаусса с 4 узлами. График зависимости погрешности от числа узлов на $[0, 3]$

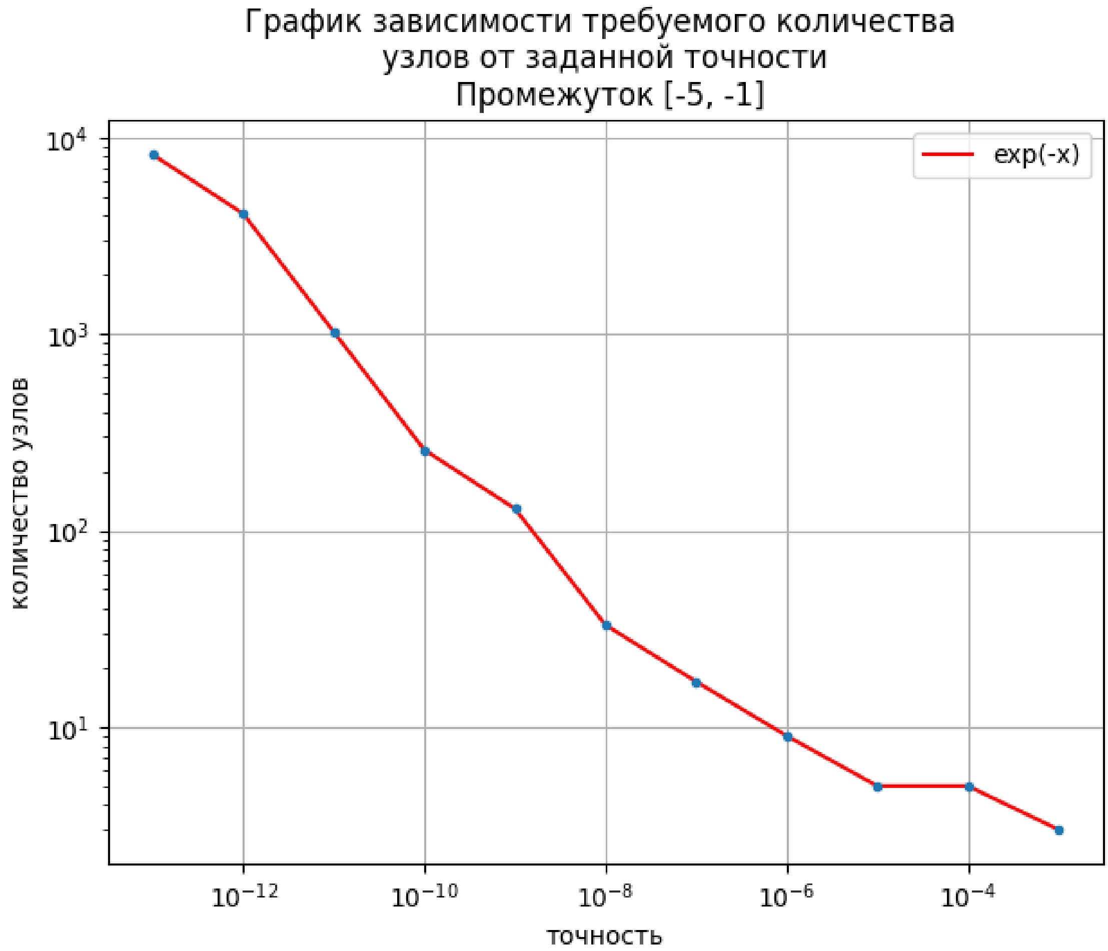

Рис. 10: Формула Гаусса с 4 узлами. График зависимости требуемого количества узлов для достижения требуемой точности на $[-5, -1]$

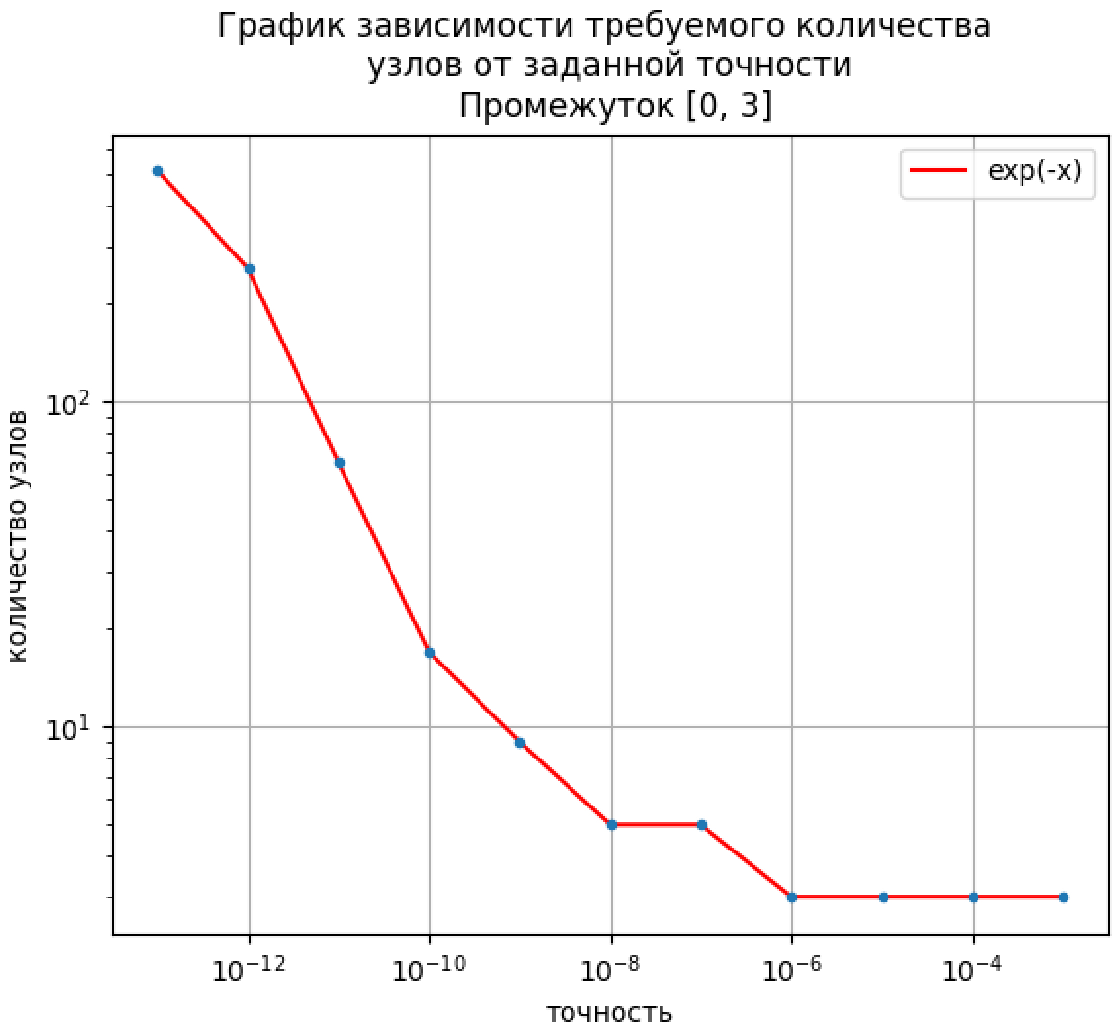

Рис. 11: Формула Гаусса с 4 узлами. ависимости требуемого количества узлов для достижения требуемой точности на $[0, 3]$

Из графиков 8-11 делаем вывод, что с увеличением числа узлов уменьшается погрешность вычисления для формулы Гаусса с 4 узлами. При этом для отрезка, где функция практически константа и принмиает небольшие значения, точность достигается за меньшее число узлов.

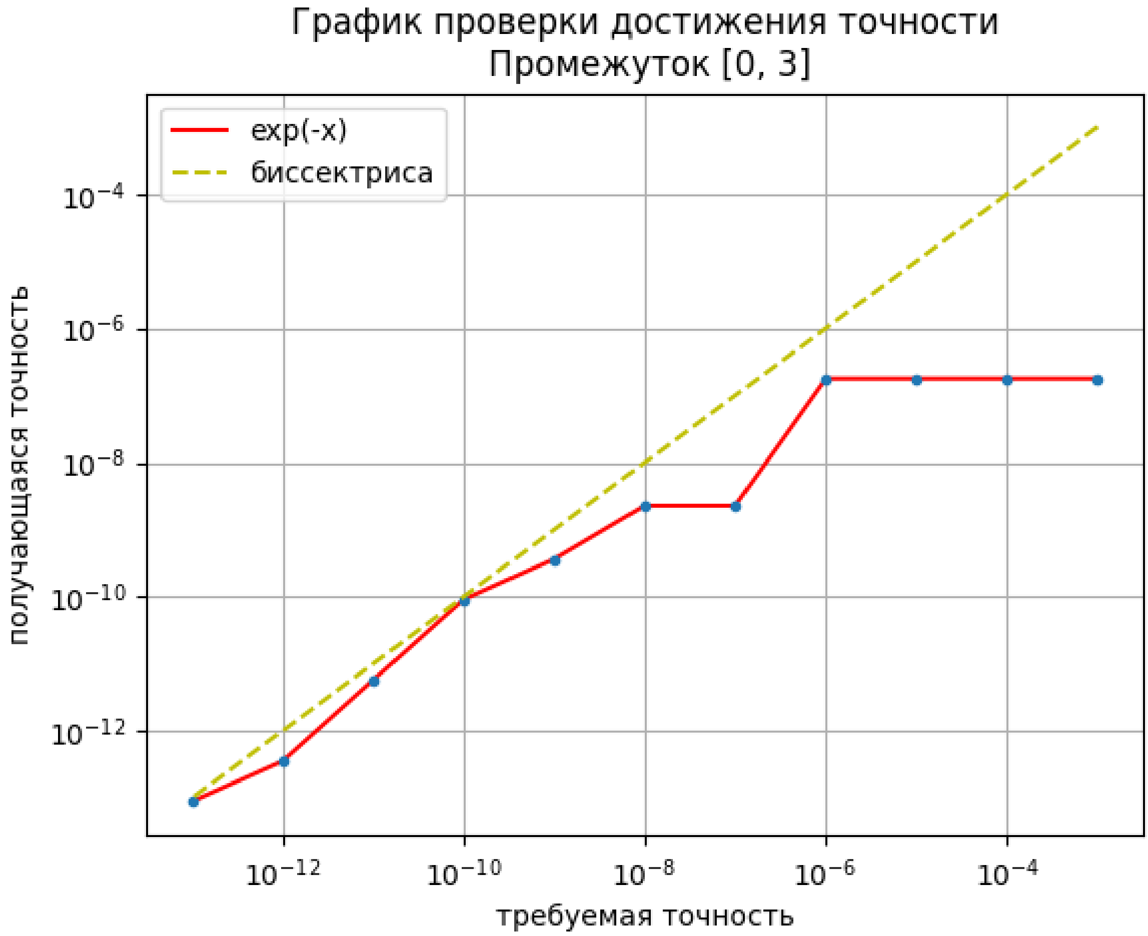

Рис. 12: Формула Гаусса с 4 узлами. График проверки достижения требуемой точности вычилсения на $[-5, -1]$

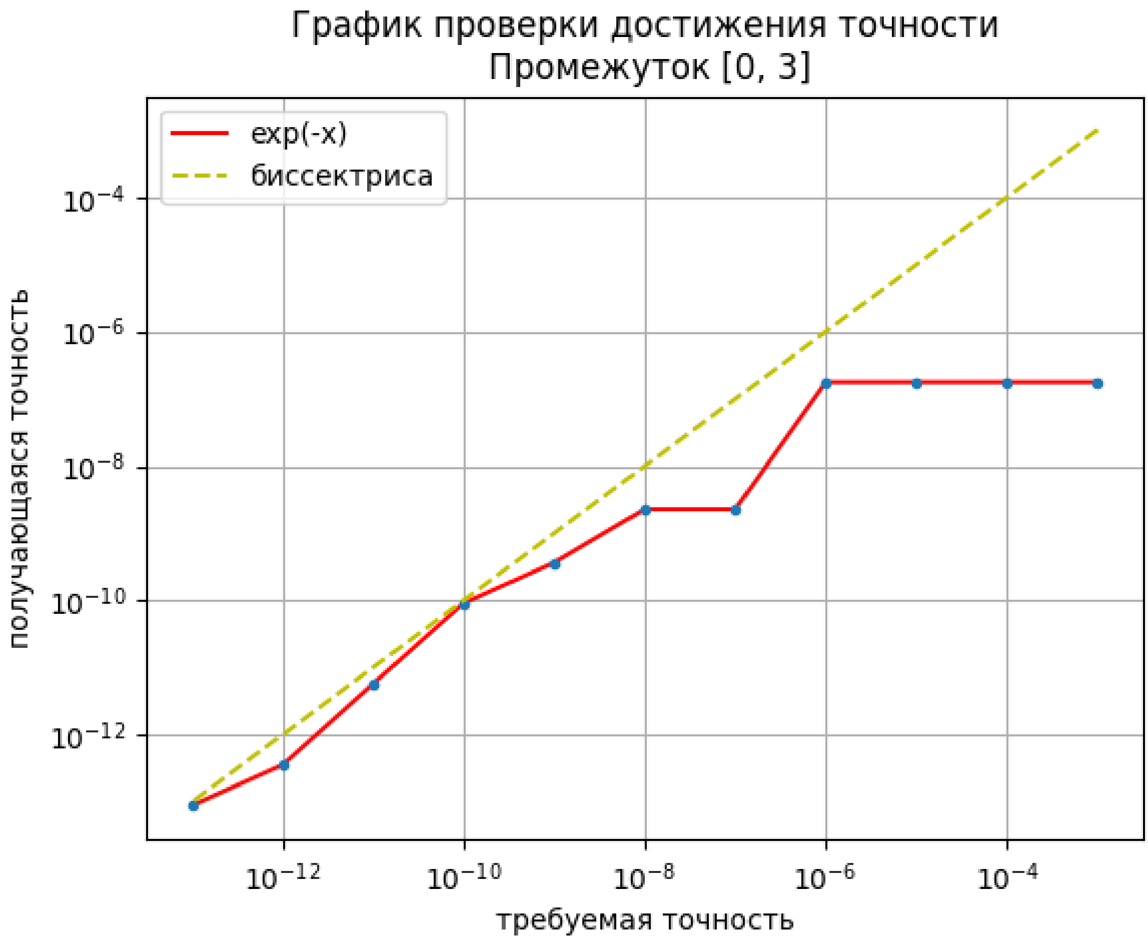

Рис. 13: Формула Гаусса с 4 узлами. График проверки достижения требуемой точности вычилсения на $[0, 3]$

Из графиков 12-13 делаем вывод, что требуемая точность достигается, так как график зависимотси лежит ниже биссектрисы.

8.3. Сравнение методов

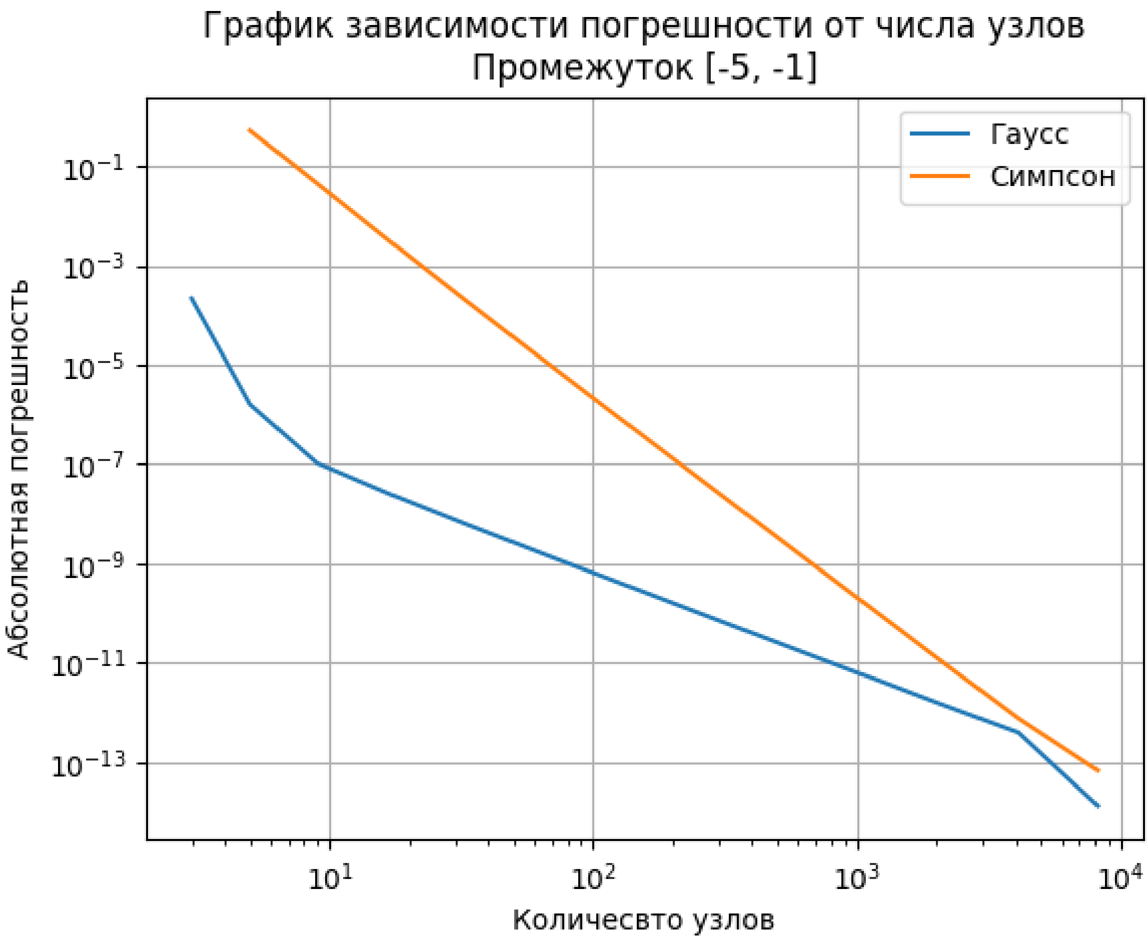

Рис. 14: График зависимости огрешности метода от количества узлов для оформулы Симпсона и Гаусса с 4 узлами на $[-5, -1]$

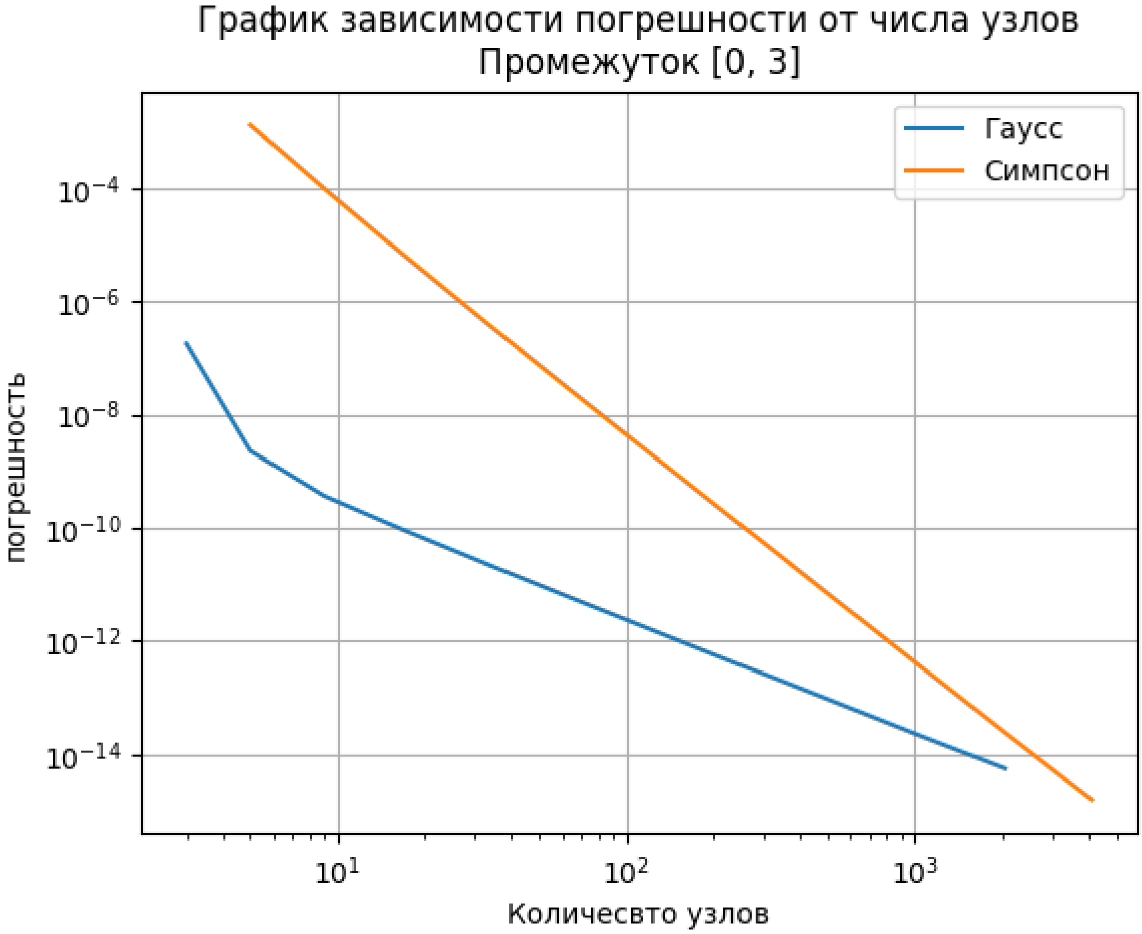

Рис. 15: График зависимости огрешности метода от количества узлов для оформулы Симпсона и Гаусса с 4 узлами на $[0, 3]$

Из графиков 14-15 можно сделать вывод, что формула Гаусса сходится эффективнее по требуемому количеству узлов разбиения, но каждый элементарный отрезок интегрирования формула Гаусса дополнительно разбивает на 4 узла.

9. Вывод

В ходе работы были реализованы 2 метода численного интегрирования: интерполяционный - формула Симпсона и наивысшего порядка точности - формула Гаусса с 4 узлами. Получилось, что:

1. оба метода сходятся с точностью вплоть до $\approx 10^{-13}$;
2. для обоих методов с увеличением числа узлов разбиения отрезка уменьшается погрешность;
3. для достижения требуемой точности на отрезке, где функция сильно меняет свое значение, требуется больше узлов, чем на отрезке, где функция практически константа и принмает небольшое значение;
4. при одинаковом числе узлов разбиения формула Гаусса с 4 узлами показывает лучшую точность, чем формула Симпсона. Однако на каждом элементарном отрезке интегрирования формула Гаусса строит доплонительно 4 узла. Поэтому эффективность методов примерно одинаковая.