СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №1

Тема

Приближение табличных функций интерполяционными методами

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002 Новиков А.А.
Преподаватель Павлова Л.В.

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи

Аппроксимировать заданную функцию с помощью интерполяционного многочлена Ньютона. Рассмотреть разные промежутки и различное число узлов для равномерной и Чебышевской сетки. Исследовать зависимость абсолютной погрешности приближения от числа узлов для обоих сеток.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Условия применимости

$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ - сетка, тогда x_i должны быть попарно различны.

2.2 Алгоритм

1. Пусть задан отрезок $[a, b]$ и n точек на этом отрезке

   Равномерная сетка $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ тогда записывается так:

   $x_i = a + ih$, где $h = \dfrac{b-a}{n-1}$, $i = 0, ..., n-1$

   Сетка Чебышева $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ тогда записывается так:

   $x_i = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} cos\left(\frac{2i+1}{2n}\right)$, где $i = 0, ..., n-1$

2. Интерполяционный полином в форме Ньютона для неравных промежутков (для Чебышевской сетки в частности) вычисляется так:
   $P_n(x) = y_0 + [y_0, y_1](x - x_0) + [y_0, y_1, y_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n] \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$, где
   Разделённая разность 1-го порядка, вычисленная по двум узлам
   $[y_0, y_1] = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
   $[y_2, y_1] = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   $\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

   $[y_{n-1}, y_n] = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

   Зная все разделённые разности (m-1)-го порядка, найдем разделённую разность m-го порядка, вычисленную по узлам $x_{k_0}, \ldots, x_{k_m}$

   $[y_{k_0}, \ldots, y_{k_m}] = \dfrac{[y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}] - [y_{k_0}, \ldots, y_{k_{m-1}}]}{x_{k_m} - x_{k_0}}$

3. Интерполяционный полином в форме Ньютона для равных промежутков вычисляется так (интерполирование вперед):
   $P_n(a + th) = y_0 + \dfrac{\Delta y_0}{1!}t + \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \cdots + \dfrac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\ldots,(t-n+1)$, где

   Конечная разность 1-го порядка в узле $x_k, k = 0, \ldots .n-1$
   $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$

   а конечная разность m-го порядка
   $\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k$

4. Вычислим значения полинома в промежуточных точка и построим график. Так же вычислим значения полинома в серединах отрезков разбиения для нахождения отклонения приближения от функции.

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимост

При выборе отрезка ненулевой длины для аппроксимирования функции получившиеся равномерная сетка и сетка Чебышева могут считаться упорядоченными ($x_i < x_{i+1}$), а значит все x_i попарно различны. Это означает, что существует интерполяционный многочлен Ньютона и он единственный. Заданная функция $y = e^{-x}$ всюду равномерно непрерывна, так что узлы сетки можно выбирать, не опасаясь попадания в разрыв.

5. Тестовый пример

Дано: $f(x) = e^{-x}$ на $[-3, 0]$

5.1. Чебышевская сетка

1. Формируем Чебышевскую сетку из 3 узлов:
   $t_0 = cos\left(\frac{\pi(2\cdot0+1)}{2\cdot3}\right) = 0,86603$; $t1 = cos\left(\frac{\pi(2\cdot1+1)}{2\cdot3}\right) = 0$

   $t_2 = cos\left(\frac{\pi(2\cdot2+1)}{2(2+1)}\right) = -0,86603$

   Далее по формуле $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k = \frac{0-3}{2} + \frac{-3-0}{2}t_k, k = 0, 1, 2$

   $x_0 = -2.8$ $x_1 = -1.5$ $x_2 = -0.2$

2. Считаем разделенные разности, для этого составляем вспомогательную таблицу:

-	первый порядок	второй порядок
$y_0 = 16,445$	$[y0, y1] = -9.2$	$[y0, y1, y2] = 2.58$
$y_1 = 4,482$	$[y1, y2] = -2.5$	
$y_2 = 1.221$		

Таблица 1: Разделенные разности

   $P_3(x) = 16.445 - 9.2(x + 2.8) + 2.58 \cdot (x + 2.8)(x + 1.5)$

3. Вычислим значения полинома в узлах и серединах между узлами. Составим таблицу значений:

В узлах				В серединах между узлами			
x	$f(x)$	$P_3(x)$	$\|f(x) - P_3(x)\|$	x	$f(x)$	$P_3(x)$	$\|f(x) - P_3(x)\|$
-2.8	$16,445$	$16,445$	$0,0$	-2.15	8.585	9.37	0.86
-1.5	$4,482$	$4,479$	$0,003$	-0.85	2.34	1.77	0.57
-0.2	1.221	1.201	$0,02$	—	—	—	—

Таблица 2: Таблица результатов

5.2. Равномерная сетка

1. Формируем Равномерную сетку из 3 узлов:
   $h = \dfrac{3}{2} = 1.5$
   $x_0 = a = -3 \quad x_1 = -3 + 1.5 = -1.5 \quad x_2 = b = 0$

2. Считаем конечные разности, для этого составляем вспомогательную таблицу:
   $P_3(x) = 20.08554 - 15.60385 \cdot t + 6.06108 \cdot t(t - 1)$
   $t = \dfrac{x - x_0}{h}$

3. Вычислим значения полинома в узлах и серединах между узлами. Составим таблицу значений:

-	первый порядок	второй порядок
$y_0 = 20.08554$	$\Delta y_0 = -15.60385$	$\Delta^2 y_0 = 12.12216$
$y_1 = 4.48169$	$\Delta y_1 = -3.48169$	
$y_2 = 1$		

Таблица 3: Разделенные разности

В узлах				В серединах между узлами			
x	$f(x)$	$P_3(x)$	$\lvert f(x) - P_3(x)\rvert$	x	$f(x)$	$P_3(x)$	$\lvert f(x) - P_3(x)\rvert$
-3	20.08554	20.08554	0.0	-2.25	9.48774	10.768	1.28
-1.5	4.48169	$4,15855$	0.0	-0.75	2.117	1.225	0.891
0	1	1	0.0	—	—	—	—

Таблица 4: Таблица результатов

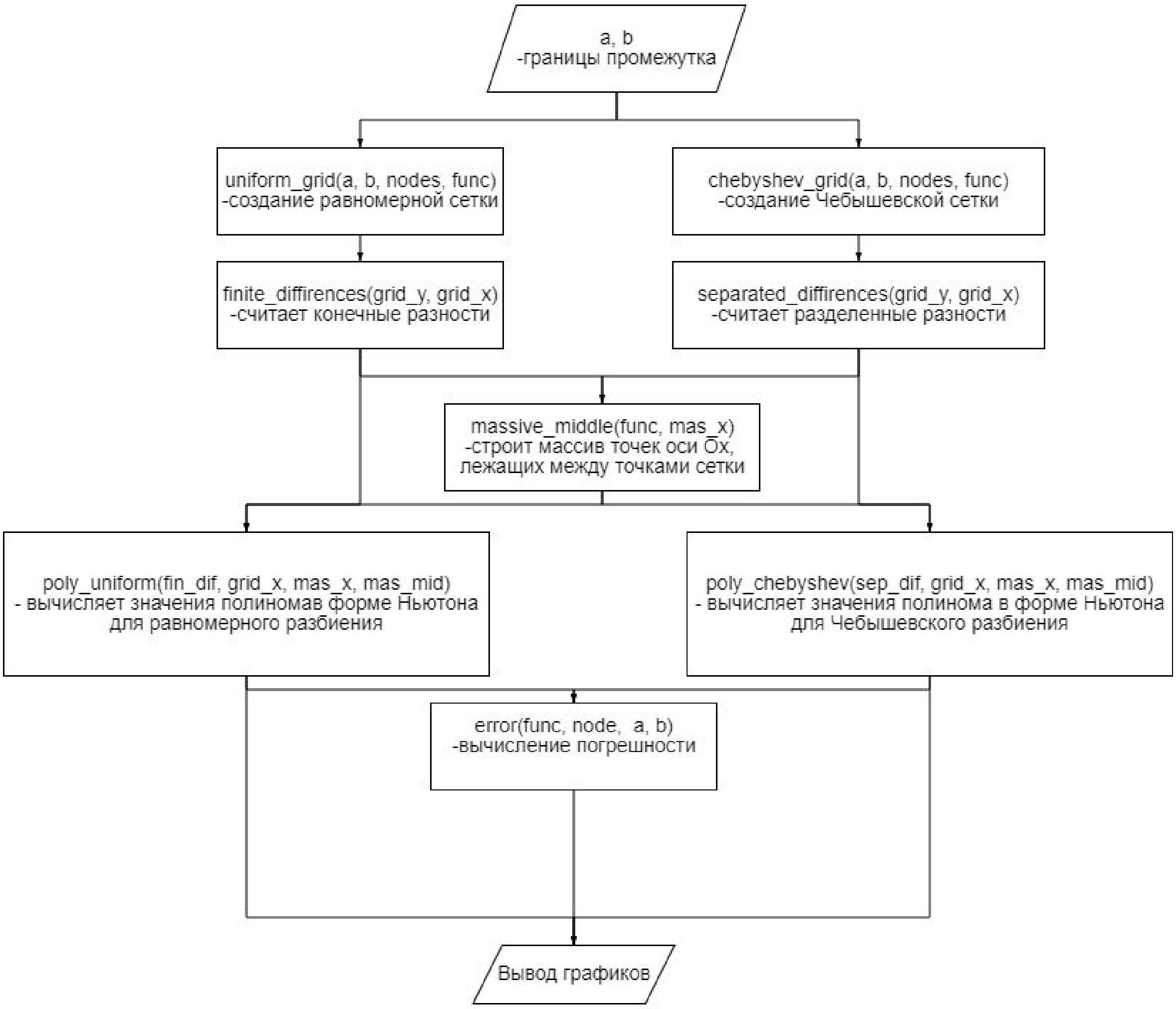
6. Контрольные тесты

1. Графики приближения на равномерной сетке с 5 и 20 узлами на промежутках $[-4, 0]$ и $[0, 4]$.

2. Графики приближения на Чебышевской сетке с 5 и 20 узлами $[-4, 0]$ и $[0, 4]$.

3. График зависимость абсолютной ошибки приближения от числа узлов для равномерной и Чебышевской сетки на промежутке $[-4, 4]$.Ошибка вычилсяется как максимум по всем абсолютным погрешностям в центре промежутка соседних узлов. Количество узлов меняется от 3 до 47 с шагом 1.

7. Модульная структура программы



8. Численный анализ

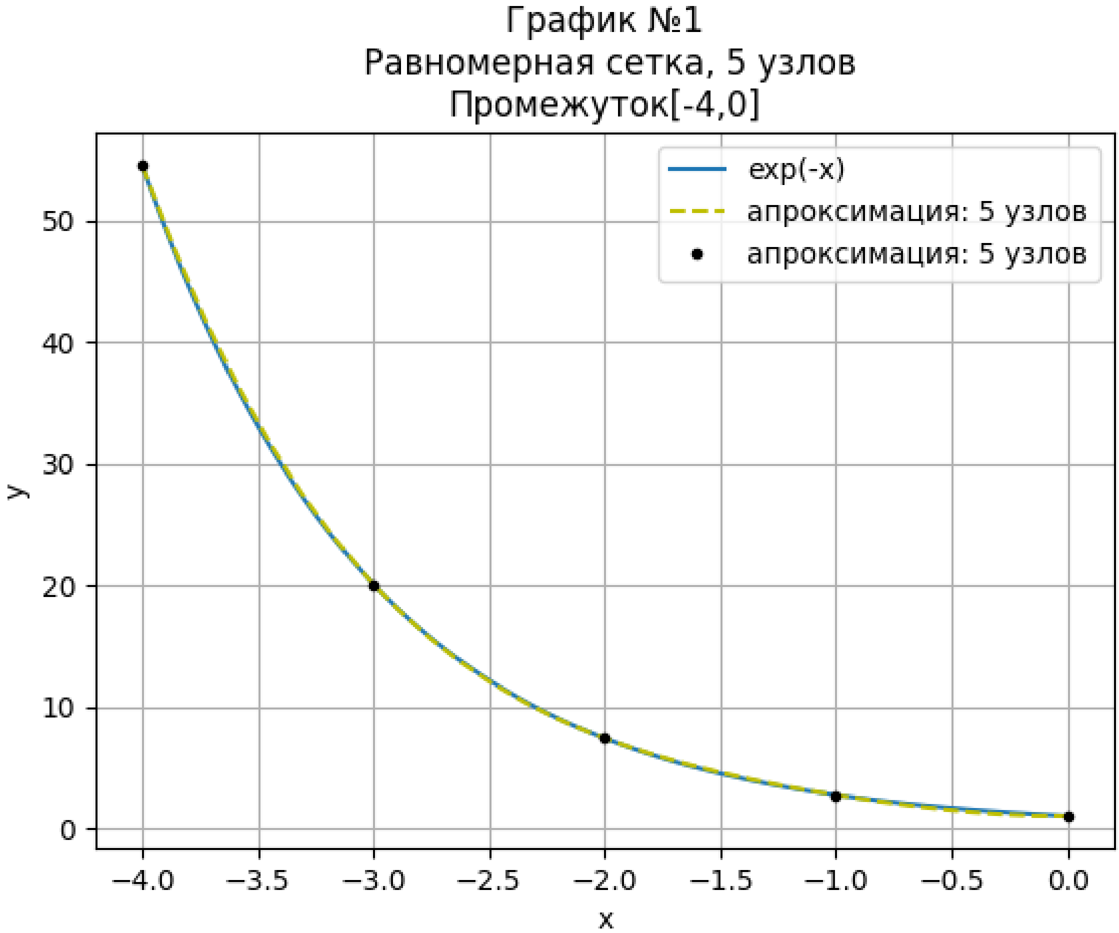


Рис. 1: Аппроксимация функции на равномерной сетке 5 узлами, промежуток $[-4, 0]$

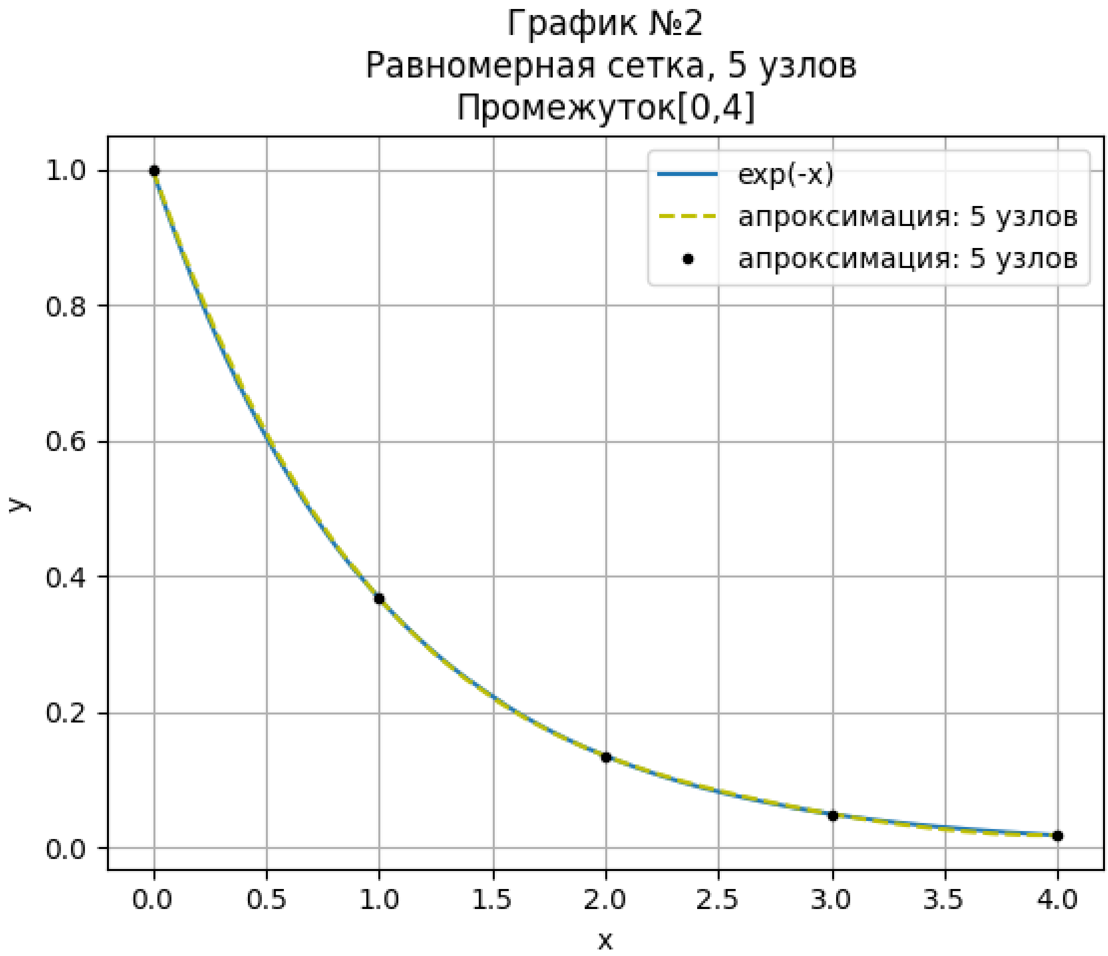


Рис. 2: Аппроксимация функции на равномерной сетке 5 узлами, промежуток $[0, 4]$

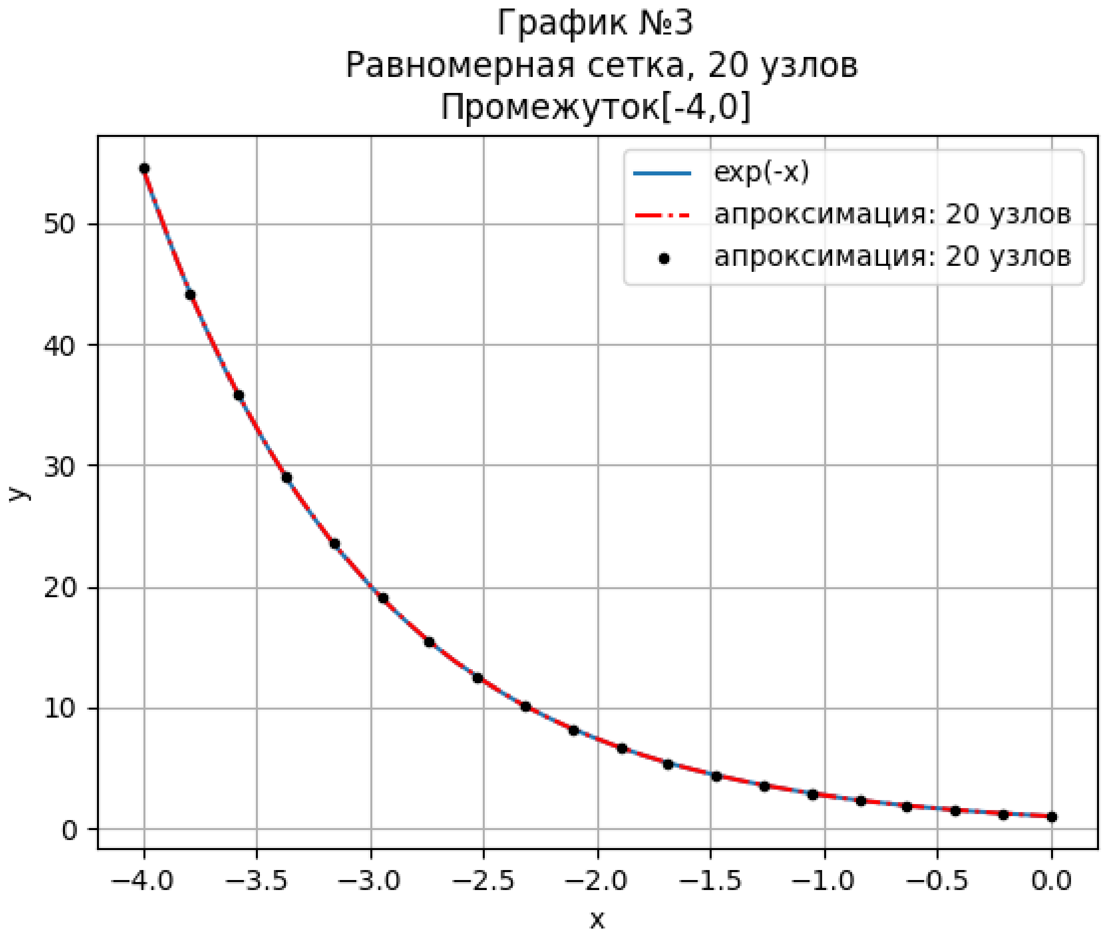


Рис. 3: Аппроксимация функции на равномерной сетке 20 узлами, промежуток $[-4, 0]$

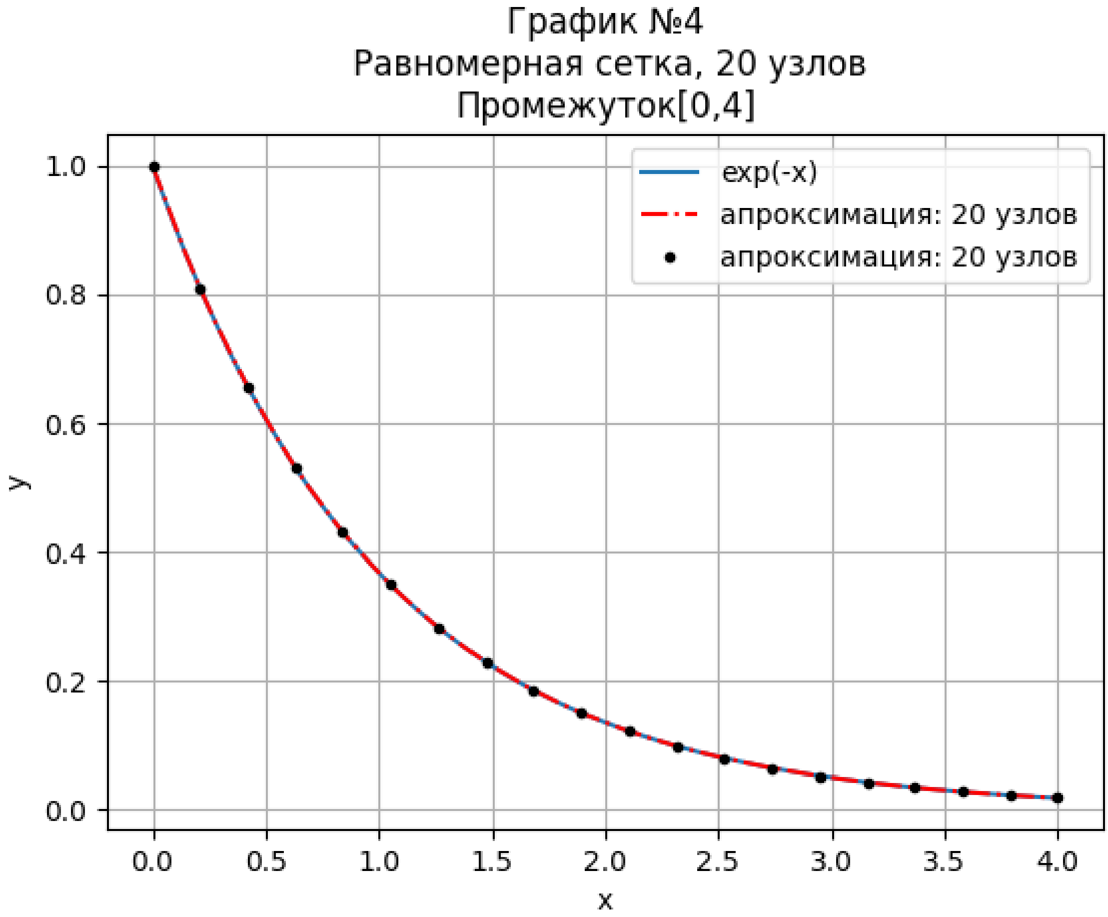


Рис. 4: Аппроксимация функции на равномерной сетке 20 узлами, промежуток $[0, 4]$

Из графиков 1-4 монжо сделать вывод, что функция приближается полиномом точно уже для 5 узлов для равномерной сетки на обоих промежутках. С увеличением числа узлов полином еще лучше приближает к исходной функции. При этом нет увеличения погрешности на концах отрезка, характерных для равномерной сетки (как, например, функция Рунге на равномерной сетке). Это может быть связано с гладкостью функции $y = e^x$.

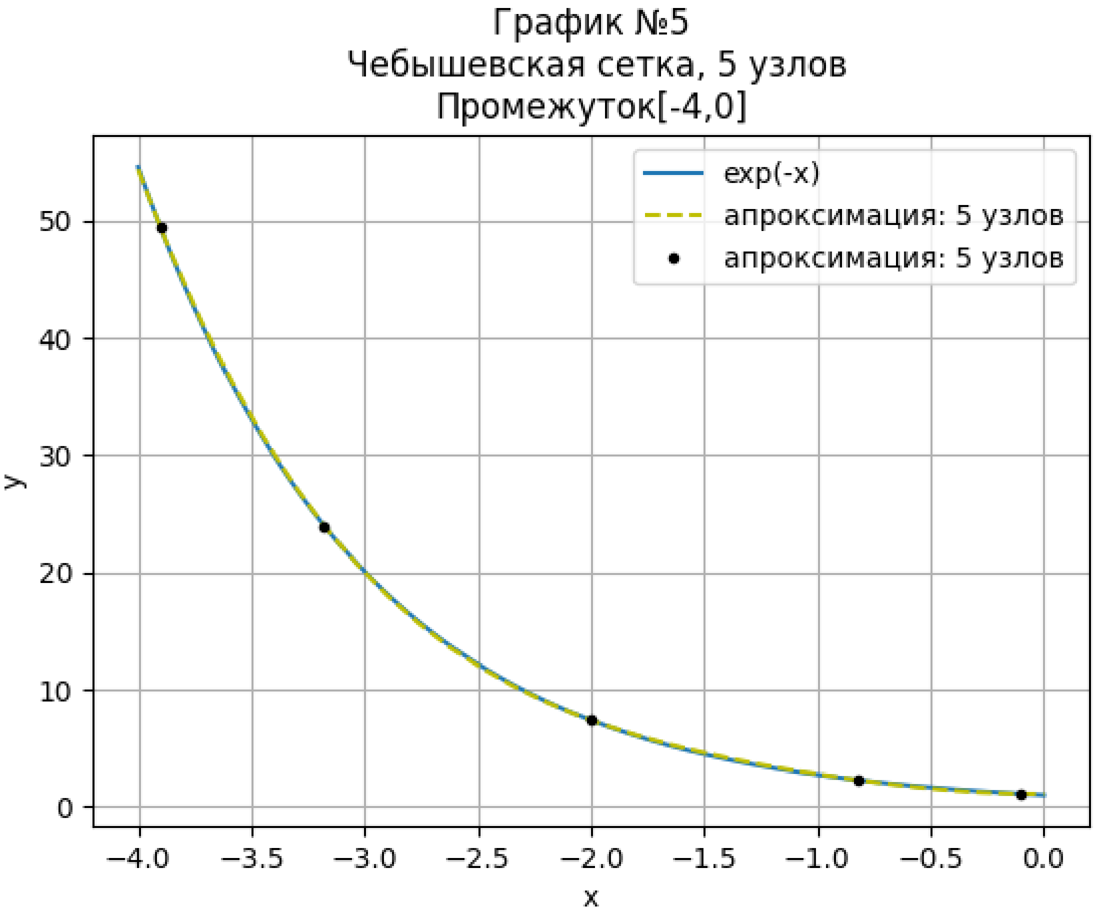


Рис. 5: Аппроксимация функции на Чебышевской сетке 5 узлами, промежуток $[-4, 0]$

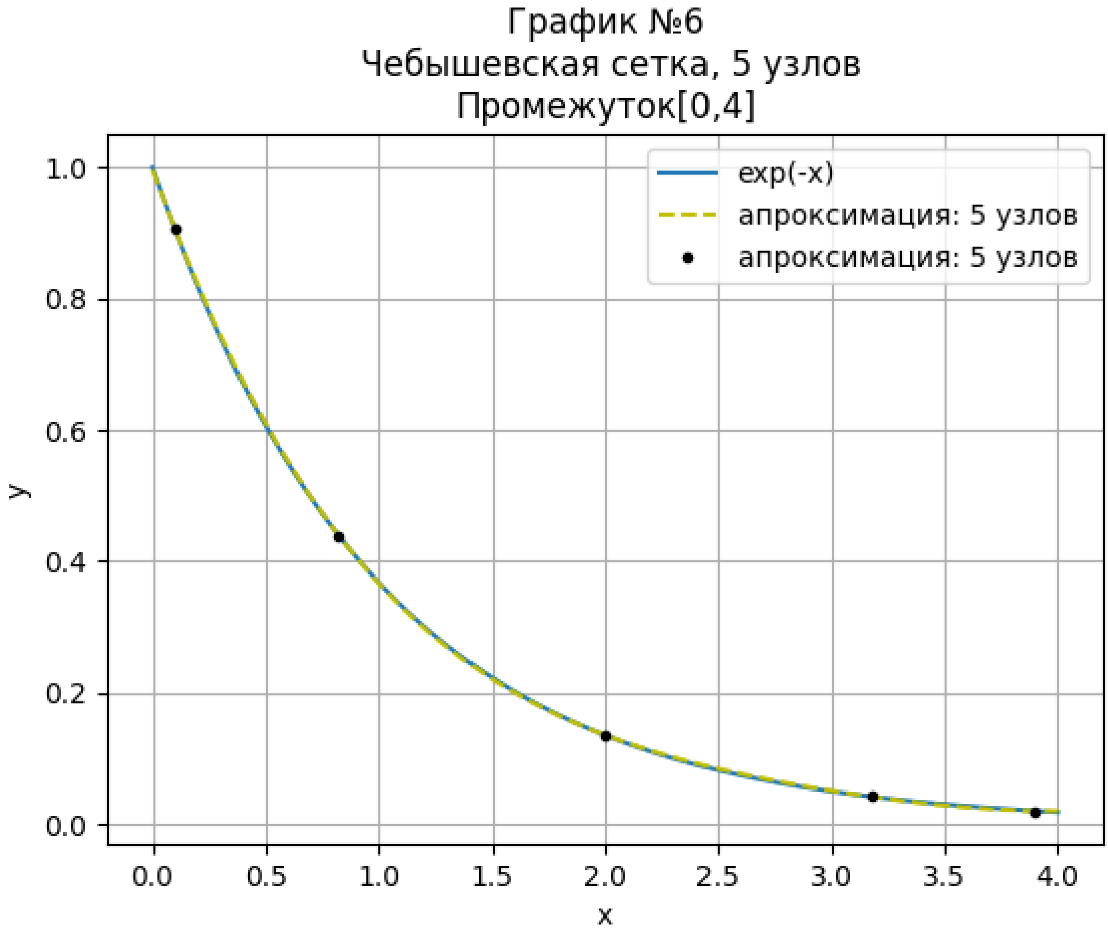


Рис. 6: Аппроксимация функции на Чебышевской сетке 5 узлами, промежуток $[0, 4]$

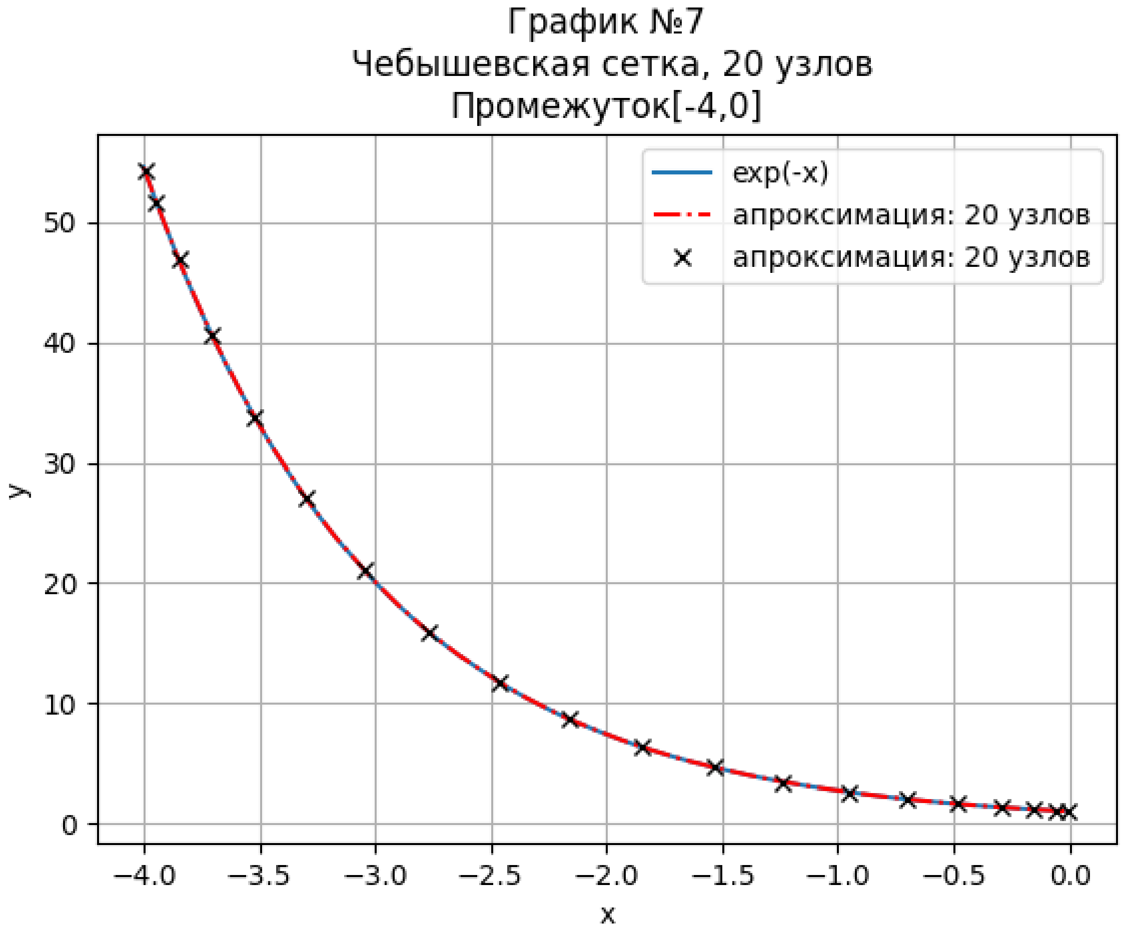


Рис. 7: Аппроксимация функции на Чебышевской сетке 20 узлами, промежуток $[-4, 0]$

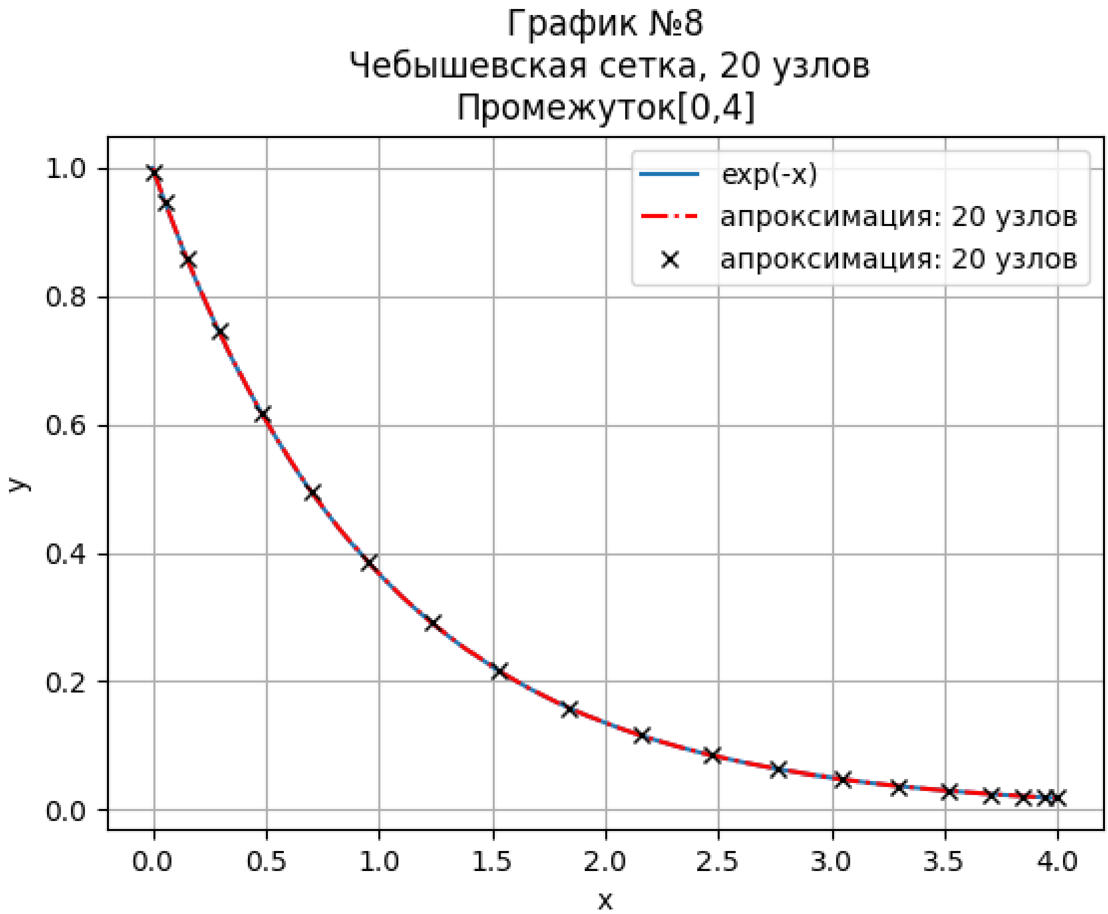


Рис. 8: Аппроксимация функции на Чебышевской сетке 5 узлами, промежуток $[0, 4]$

Из графиков 5-8 можно сделать вывод, что на обоих промежутках для Чебышевской сетки приближение 5 узлами уже является точным. С увеличением чсила узлов точность увеличивается. Результат подтверждается теоремой о том, что если исходная функция равномерно непрерывна, то интерполяционный процесс сходится для Чебышевской сетки.

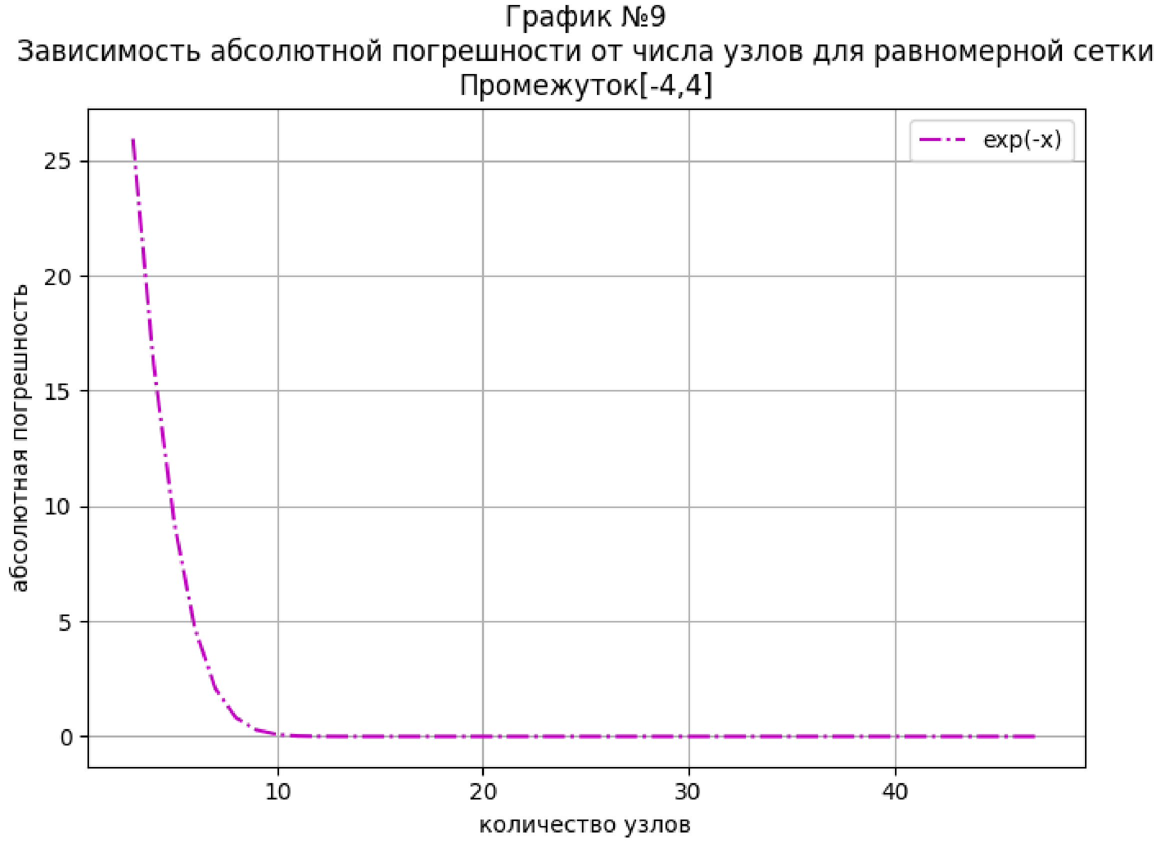


Рис. 9: График зависимости абсолютной погрешности от числа узлов для равномерной сетки, промежуток $[-4, 4]$

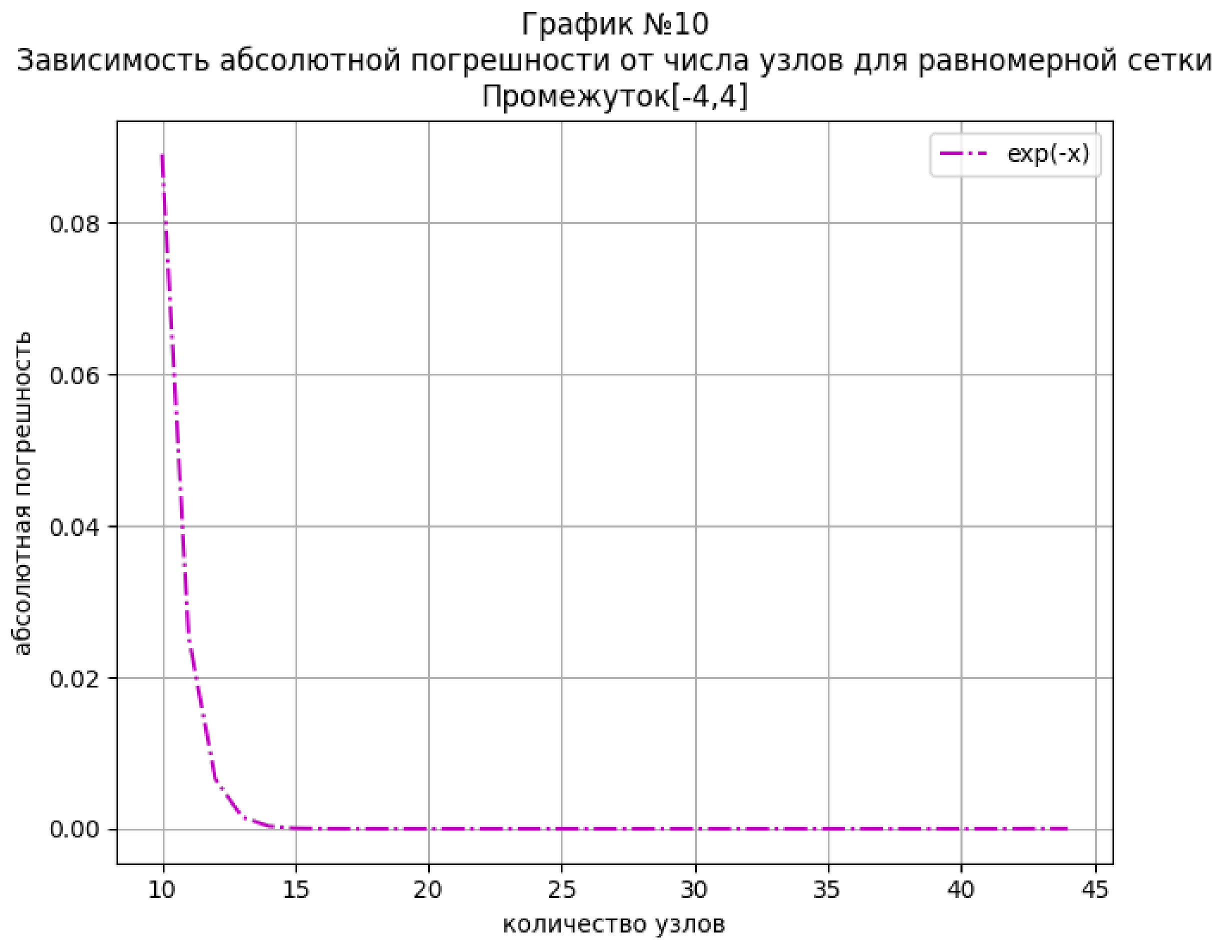


Рис. 10: График зависимости абсолютной погрешности от числа узлов для равномерной сетки, промежуток $[-4, 4]$

Из графиков 9-10 можно сделать вывод, что с увеличением числа узлов равномерной сетки метод сходится. Начиная с 15 узлов нет смысла увеличивать количество узлов.

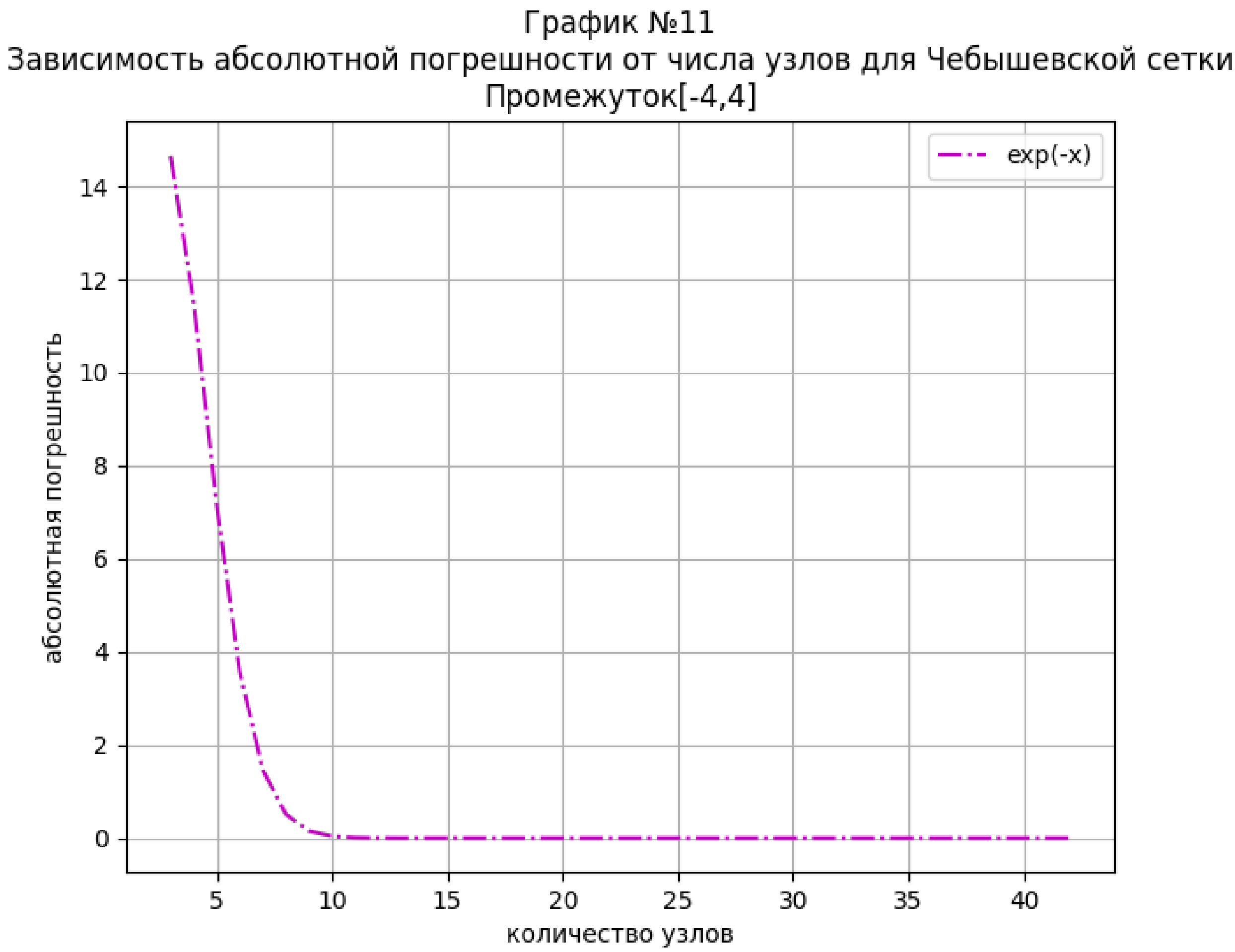


Рис. 11: График зависимости абсолютной погрешности от числа узлов для Чебышевской сетки, промежуток $[-4, 4]$

Из графика 10 можно сделать вывод, что с увеличением числа узлов Чебышевской сетки метод сходится, как и должно быть исходя из теоремы.

9. Вывод

Приближение с помщью полинома Ньютона на Чебышевской и равномерной сетке показало хорошую точность для заданной гладкой функции. Получилось, что с увеличением числа узлов для обеих сеток метод сходится, при этом с определенного номера нет смысла увеличивать число узлов.