

СПбПУ Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки
«Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №7

Тема

Численные методы решения краевых задач

Дисциплина

Численные методы

Выполнил студент группы 5030102/00002
Преподаватель

Новиков А.А.
Павлова Л.В.

Санкт-Петербург

1. Формулировка задачи

Дано линейное ОДУ 2-порядка с граничными условиями:

$$y'' = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), x \in [a, b]$$
$$\begin{cases} l_a[y] := \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ l_b[y] := \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases}$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$$

Необходимо решить эту краевую задачу методом редукции (сведением к двум задачам Коши) для заданного дифференциального уравнения 2-го порядка с граничными условиями:

$$\begin{cases} (e^x - 1)y'' - y' - e^x y = e^x, x \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e - 1 \end{cases}$$

2. Алгоритм метода и условия его применимости

2.1 Метод редукции

Будем искать решение $y = y(x)$ линейной краевой задачи в виде:

$$y = u(x) + Cv(x)$$

C и $u = u(x), v = v(x)$ - некоторые постоянная и функции, условия на которые будут накладываться ниже.

Сначала потребуем, чтобы функция $y = u(x) + Cv(x)$ была решением заданного ДУ при любом значении постоянной C , т.е. чтобы имело место

$$L[u + Cv] = f \quad \forall C \in \mathbf{R}$$

.

В силу линейности дифференциального оператора L , выражение можно переписать в виде

$$L[u] + CL[v] = f \quad \forall C \in \mathbf{R}.$$

Так как C должно быть произвольной, то уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} L[u] = f \\ L[v] = 0 \end{cases}$$

Согласно этому функции u и v в представлении решения можно найти, решая уравнения:

$$u'' + p(x)u'(x) + q(x)u = f(x)$$
$$v'' + p(x)v'(x) + q(x)v = 0$$

Найдем начальные условия, воспользовавшись линейностью краевого условия:

$$l_a[y] = l_a[u + Cv] = l_a[u] + Cl_a[v] = A \quad \forall C \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_a[u] = A \\ l_b[v] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A \\ \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = 0 \end{cases}$$

Для удовлетворения этих равенств, положим:

$$v(a) = \alpha_1 \quad v'(a) = -\alpha_0$$

$$u(a) = \frac{A}{\alpha_0} \quad u'(a) = 0,$$

при этом коэффициенты $\alpha_1, \beta_1 = 0$, т.к. рассматриваем первую краевую задачу, где известны значения в концах отрезка. Коэффициенты $\alpha_0, \beta_0 = 1$ возьмём равными единице, чтобы удовлетворяли условиям: $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Применим метод Эйлера-Коши для полученных двух задач Коши. Приближённое решение этих задач строится на отрезке $[a, b]$, в результате чего становятся известными, в частности, значения $u(b), u'(b), v(b), v'(b)$. Это позволяет подобрать постоянную C так, чтобы с этим значением C и найденными функциями $u(x)$ и $v(x)$ функция $y(x) = u(x) + Cv(x)$ удовлетворяла не только заданному ДУ и 1-му краевому словию, но и второму условию.

Имеем:

$$l_b[y] = l_b[u + Cv] = l_b[u] + Cl_b[v] = B \quad \forall C \in \mathbf{R},$$

Если

$$C = \frac{B - l_b[u]}{l_b[v]} = \frac{B - \beta_0 u(b) - \beta_1 u'(b)}{\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)}$$

2.2 Условия применимости

1. $y'' = f(x, y, y') \in C^2([a; b])$ - обеспечивает существование и единственность задачи Коши.

2.3 Алгоритм

1. Задан отрезок $[a, b]$. На нем построена равномерная сетка из n интервалов с шагом $h = \frac{b-a}{n}$.
2. Определяем начальные условия для $v(a), v'(a), u(a), u'(a)$.
3. Находим решения задачи Коши методом Эйлера-Коши для функций u, v - сеточные функции u^h, v^h .
4. Вычисляем коэффициент C .
5. Получаем ответ - сеточную функцию решения - по формуле: $y^h = u^h + Cv^h$.

3-4. Предварительный анализ задачи и проверка условий применимости

$$f(x, y, y') = \frac{y' + e^x(1-y)}{e^x + 1} \text{ - непрерывно дифференцируема на отрезке } [0, 1].$$

5. Тестовый пример

Дано: $(e^x - 1)y'' - y' - e^x y = e^x$ на участке: $[0, 1] \quad y(0) = A = 0 \quad y(2) = B = 1.718$

Для проверки:

$y = e^x - 1$ - точное решение исходного дифференциального уравнения.

Зададим начальные условия: $v(a) = \alpha_1 = 0; \quad v'(a) = -\alpha_0 = -1 \quad u(a) = A; \quad u'(a) = 0$

Пусть $n = 4$, тогда $h = \frac{b-a}{n} = 0.25$

Построим равномерную сетку $x_i = a + hi, i = 0, \dots, n$

Применим метод Эйлера-Коши для поиска решения u, v (подробное решение рассматривалось в предыдущих работах):

$$u^h = [0.0, 0.017, 0.074, 0.180, 0.346]$$

$$v^h = [0, -0.268, -0.576, -0.939, -1.373]$$

Осталось посчитать константу C:

$$C = \frac{B - \beta_0 u(b) - \beta_1 u'(b)}{\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)} = \frac{1.718 - 1 \cdot 0.346 - 0}{1 \cdot (-1.373) + 0} = -0.999$$

Итого найдем решение:

$$y[i] = u[i] + C v[i], \quad i = 0 \dots n$$

$$y_0 = 0 + C \cdot 0 = 0$$

$$y_1 = 0.017 - 0.999(-0.268) = 0.285$$

$$y_2 = 0.074 - 0.999(-0.576) = 0.649$$

$$y_3 = 0.180 - 0.999(-0.939) = 1.118$$

$$y_4 = 0.346 - 0.999(-1.373) = 1.718$$

$$y^h = [0, 0.285, 0.649, 1.118, 1.718]$$

Сравним с точными значениями

$$[0, 0.28402542, 0.64872127, 1.11700002, 1.71828183].$$

Точность достигнута порядка 0.001.

6. Контрольные тесты

1. График, иллюстрирующий сравнение точного решения с численными для разных точностей.
2. График зависимости погрешности от количества отрезков разбиения.
3. График зависимости относительной погрешности от возмущений в начальном условии.
4. График зависимости абсолютной погрешности от координаты x.

7. Модульная структура программы

def **Euler_Koshi**(a, b, n)

Принимает на вход отрезок, на котором решается задача Коши, и количество промежутков разбиения этого отрезка.

Результат работы функции - сеточная функция - численное решение ДУ 2-го порядка.

def **reduction**(a, b, n)

Принимает на вход отрезок, на котором решается краевая задача, и количество промежутков разбиения этого отрезка.

Результат работы функции - сеточная функция - численное решение краевой задачи.

def **nodes_epsilon**(a, b)

Принимает на вход отрезок, на котором решается краевая задача.

Результат работы функции - график зависимости ошибки от числа отрезков разбиения.

def **graphics**(a,b)

Принимает на вход отрезок, на котором решается краевая задача.

Результат работы функции - график сравнения точного решения и полученного численным методом.

def **derivative_error**(a,b)

Принимает на вход отрезок, на котором решается краевая задача.

График зависимости относительной погрешности вычисления от погрешности в начальных данных.

def **max_err**(a,b)

Принимает на вход отрезок, на котором решается краевая задача.

График зависимости абсолютной погрешности вычисления от значения x .

8. Численный анализ

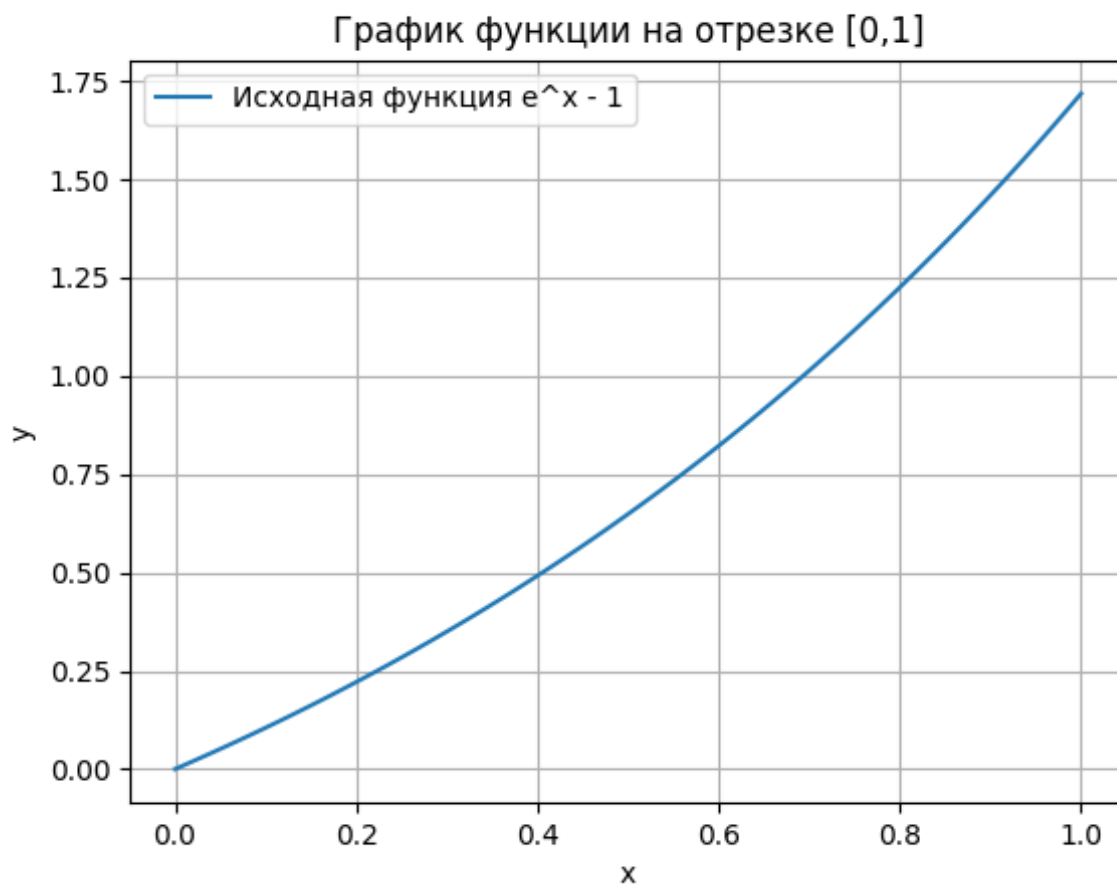


Рис. 1: График точного решения на отрезке $[0,1]$

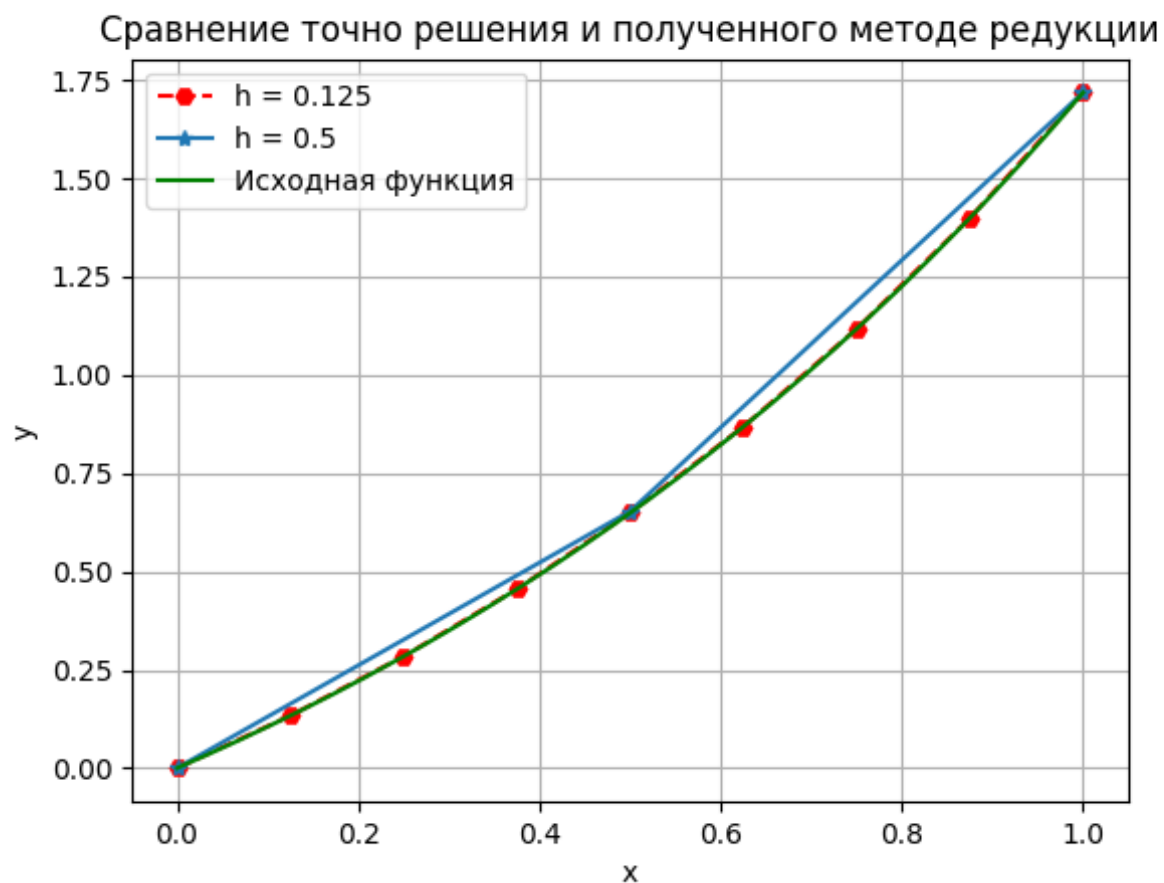


Рис. 2: График, иллюстрирующий сравнение точного решения с численными для разной величины шага.

На рис. 2 изображено точное решение однородного дифференциального уравнения второго рода и его несколько численных приближения с шагом $h = 0.5$, $h = 0.125$. Исходя из результатов данного графика, видно, что при $h = 0.125$ численный результат достаточно точен.

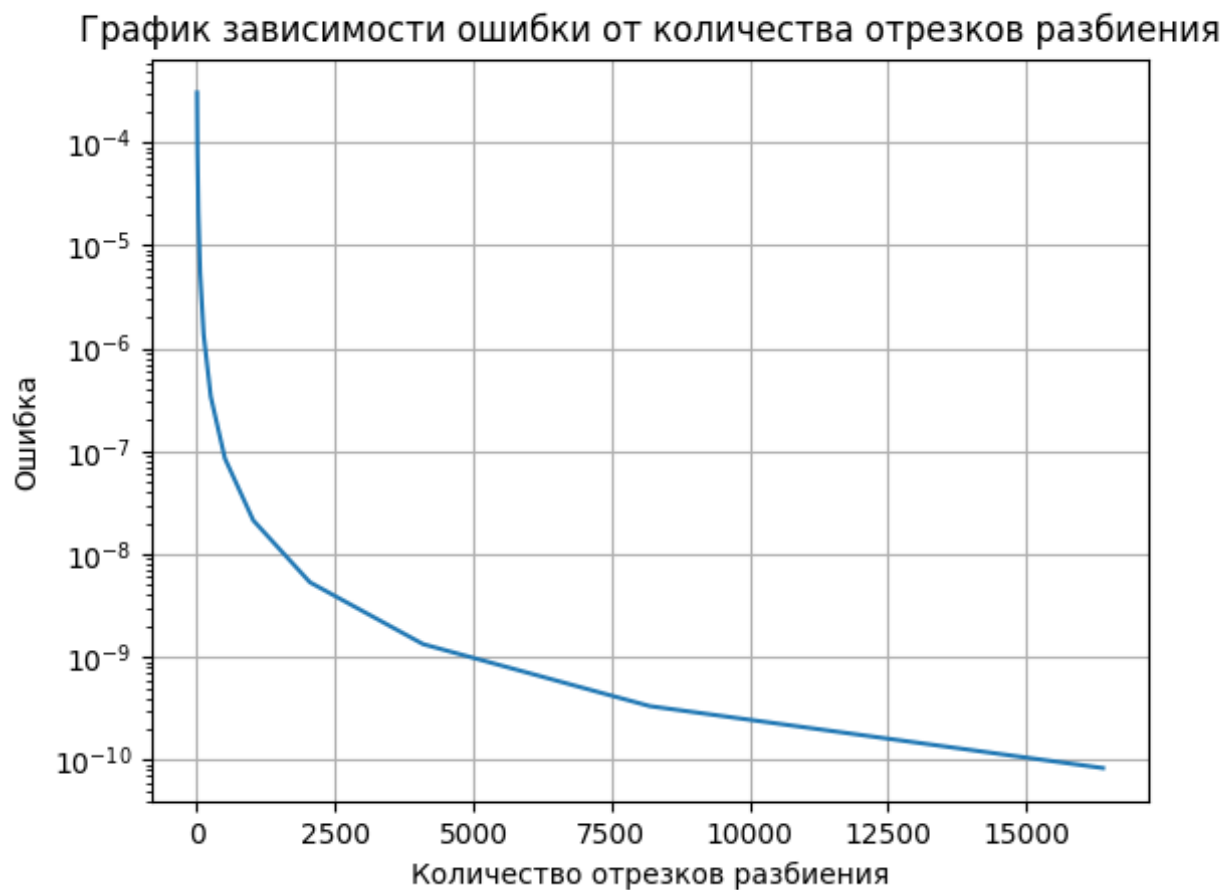


Рис. 3: График зависимости погрешности от количества отрезков разбиения.

Из рис. 3 можно сделать вывод, что с увеличением отрезков разбиения, или, что то же самое, с уменьшением шага h , уменьшается погрешность численного решения. На 15000 отрезках разбиения удалось достичь точности 10^{-10} .

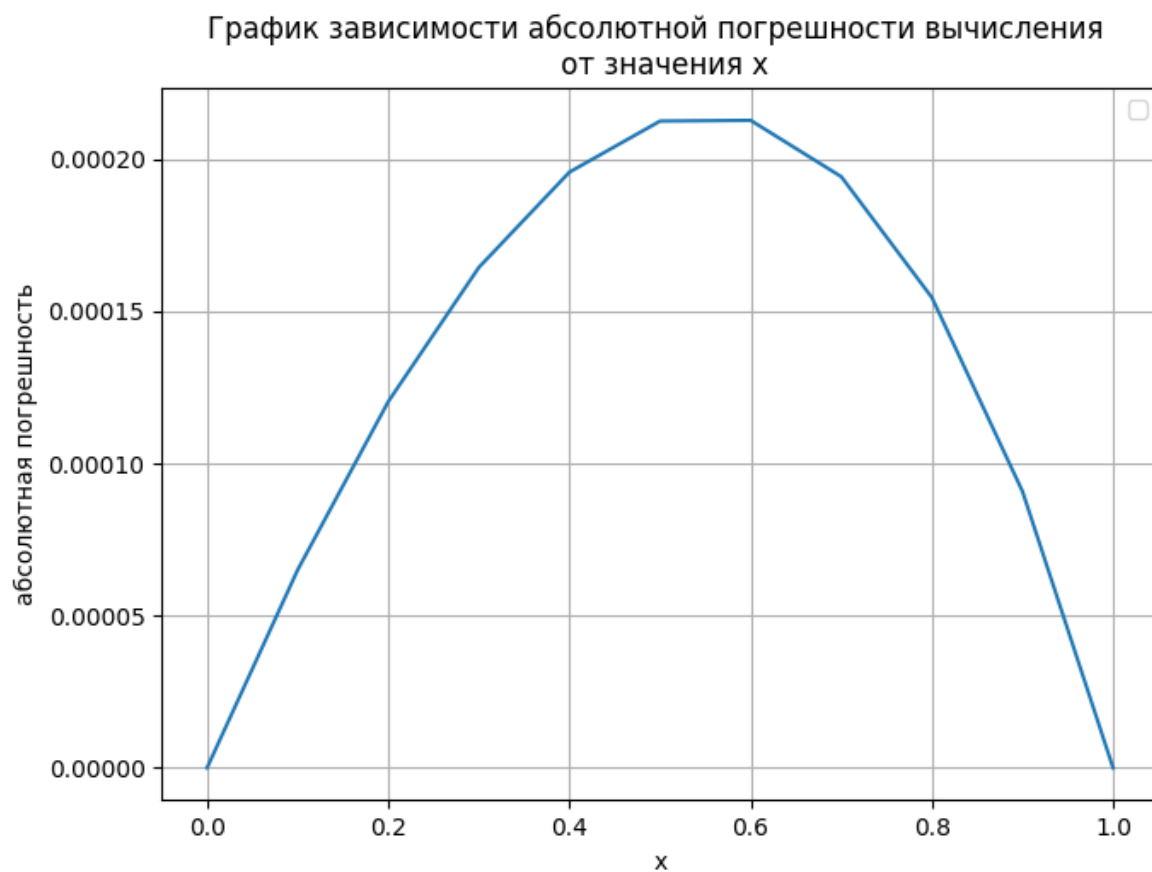


Рис. 4: График зависимости абсолютной погрешности от координаты x .

На рис. 4 видно, что значение на концах промежутка абсолютная ошибка равна нулю, так как в концевых точках известны точные значения функции решения. Ошибка нарастает от начала промежутка до середины, где достигает максимума, и потом уменьшается, при приближении к концу промежутка.

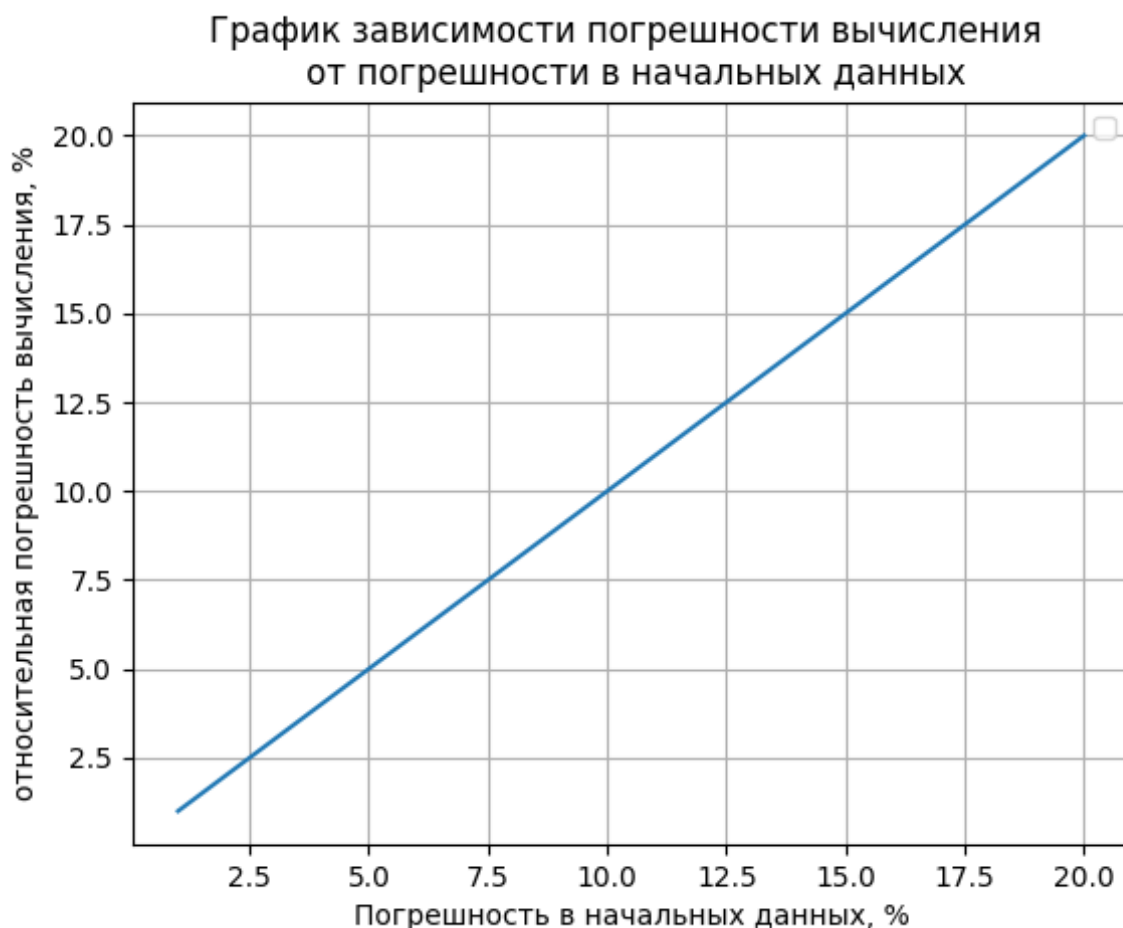


Рис. 5: График зависимости относительной погрешности от возмущений в начальном условии.

На основании рис. 5 можно сделать вывод, что относительная ошибка, получаемая в результате работы метода при внесении погрешности в начальное условие, не превышает саму ошибку, следовательно, метод редукции устойчивый.

9. Вывод

В ходе работы получилось найти численное решение ОДУ второго порядка методом редукции, сведя к последовательному решению 2-ух задач Коши и используя для решения задачи Коши метод Эйлера-Коши. Получилось, что:

- Метод сходится при увеличении количества отрезков разбиения.
- Метод редукции является устойчивым.
- Абсолютная ошибка растёт примерно к середине разбиения начального промежутка на отрезки, а далее убывает. В концах абсолютная ошибка равна нулю, т.к. в этих точках нам известны точные значения, используемые для построения метода.