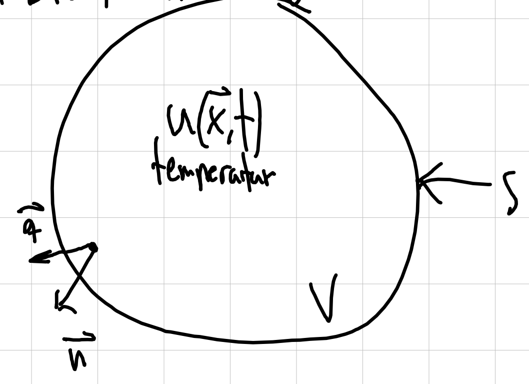
Utlede og løse varmelikningen numerisk i minst to dimensjoner

Først utledningen:



$\vec{q} = -K\vec{\nabla} u$ ← Vektor som sier hvordan varmen går fra varmt til kaldt rom.

K: Ledningshastighet

V: Legeme / volum
S: Grensesnittet til legemet V
$\vec{n}$: Varmefluks gjennom grensesnittet S

Vi skal altså beskrive hvordan varmeenergien i legemet V endrer seg over tid, utifra energifluksen $\vec{n}$ gjennom grensesnittet S.
Også viktig å påpeke at hvis vi har en energikilde som genererer varme inne i legemet, så vil dette også påvirke varmeendringen.

Varmen over tid:
$u(\vec{x},t)$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V c\rho u(\vec{x},t)\,dV}_{\text{Hvordan varmeenergien i V endrer seg over tid}} = \underbrace{-\oiint_S \vec{q}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,dS}_{\text{Varmefluks gjennom grensesnittet S}} + \underbrace{\iiint_V Q(\vec{x},t)\,dV}_{\text{Varmeproduksjon inne i legemet V}}$$

Benytter Gauss' divergensteorem for å utlede en partiellderiverte likning:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V c\rho u(\vec{x},t)\,dV = -\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{q}(\vec{x},t)\,dV + \iiint_V Q(\vec{x},t)\,dV$$

$$\iiint_V \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{q} - Q\right]dV = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\nabla u) = \nabla^2 u$$

$$\Downarrow$$

$$\iiint_V \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - K\nabla^2 u - Q\right]dV = 0$$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = K\nabla^2 u + Q$$ ← Varmelikningen i N dimensjoner

Kan også skrives:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\nabla^2 u$$

Og i 2D:

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$$

Løse varmelikningen i 2 dimensjoner for noen valgte initialbetingelser:

$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$

Setter alle grenseverdiene til 0:
$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(\pi, y, t) = u(x, \pi, t) = 0$

$u(x, y, 0) = 2\sin(x)\sin(2y) + 3\sin(4x)\sin(5y)$

Antar at funksjonen er separabel: $u(x, y, t) = f(x, y)g(t)$

Løser for grenseverdiene:
$u(0, y, t) = f(0, y)g(t) = 0 \Rightarrow f(0, y) = 0$
$u(x, 0, t) = f(x, 0)g(t) = 0 \Rightarrow f(x, 0) = 0$
$u(\pi, y, t) = f(\pi, y)g(t) = 0 \Rightarrow f(\pi, y) = 0$
$u(x, \pi, t) = f(x, \pi)g(t) = 0 \Rightarrow f(x, \pi) = 0$

Setter inn i vår PDE:
$u_t = f g'$
$u_{xx} = f_{xx} g, \quad u_{yy} = f_{yy} g$

$f g' = c^2 (f_{xx} g + f_{yy} g) = c^2 g \nabla^2 f$

Separerer variablene:
$f g' = c^2 (f_{xx} g + f_{yy} g) = c^2 g \nabla^2 f \quad \Big| \cdot \frac{1}{c^2 f g}$
$\frac{g'}{c^2 g} = \frac{f_{xx} + f_{yy}}{f} = \frac{\nabla^2 f}{f} = \lambda \leftarrow$ Avhenger ikke av tiden, og er derfor konstant

I $\nabla^2 f = \lambda f$
II $g' = c^2 \lambda g$

Løser grenseverdiproblemet:
$f_{xx} + f_{yy} = \lambda f \qquad f(0, y) = f(\pi, y) = f(x, 0) = f(x, \pi) = 0$

Antar at funksjonen er separabel: $f(x, y) = X(x)Y(y)$
$f_{xx} = X''Y$
$f_{yy} = XY''$

Løser for grenseverdiene:
$f(0, y) = X(0)Y(y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$
$f(\pi, y) = X(\pi)Y(y) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$
$f(x, 0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$
$f(x, \pi) = X(x)Y(\pi) = 0 \Rightarrow Y(\pi) = 0$

Setter inn i PDE:
$X''Y + XY'' = \lambda XY \quad \Big| \cdot \frac{1}{XY}$
$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda$
$\frac{X''}{X} = \lambda - \frac{Y''}{Y} = \mu$

I $X'' = \mu X \qquad X(0) = X(\pi) = 0$
II $Y'' = (\lambda - \mu)Y = \nu Y \qquad Y(0) = Y(\pi) = 0$
$\Downarrow$
$X_m(x) = \sin(mx) \qquad \mu = -m^2$
$Y_n(y) = \sin(ny) \qquad \nu = -n^2$
$\Downarrow$
$\lambda = \mu + \nu = -(n^2 + m^2)$

Den generelle løsningen: $\sum_{n,m=1} b_{mn} \sin(mx)\sin(ny)$

Tilbake til likningene:
I $\nabla^2 f = \lambda f \qquad f(0, y) = f(\pi, y) = f(x, 0) = f(x, \pi) = 0$
II $g' = c^2 \lambda g = -c^2 (m^2 + n^2) g$
$\Downarrow$
$g_{mn}(t) = e^{-c^2(m^2+n^2)t}$
$\Downarrow$
$u_{mn}(x, y, t) = \sin(mx)\sin(ny)e^{-c^2(m^2+n^2)t}$

Den generelle løsningen blir da å summere over alle punktene i xy-planet:
$u(x, y, t) = \sum_{n,m \geq 1} f_{mn}(x, y) g_{mn}(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin(mx)\sin(ny)e^{-c^2(m^2+n^2)t}$

Løser nå for vår initialbetingelse:
$u(x, y, 0) = 2\sin(x)\sin(2y) + 3\sin(4x)\sin(5y)$

$u(x, y, 0) = \sum_{n,m \geq 1} b_{mn} \sin(mx)\sin(ny) = \underbrace{2}_{b_{12}}\sin(x)\sin(2y) + \underbrace{3}_{b_{45}}\sin(4x)\sin(5y)$

$b_{12} = 2$
$b_{45} = 3$
Alle andre $b_{mn} = 0$

$u(x, y, t) = b_{12} f_{12}(x, y) g_{12}(t) + b_{45} f_{45}(x, y) g_{45}(t)$
$= 2\sin(x)\sin(2y)e^{-c^2(1^2+2^2)t} + 3\sin(4x)\sin(5y)e^{-c^2(4^2+5^2)t}$
$= \underline{\underline{2\sin(x)\sin(2y)e^{-5c^2t} + 3\sin(4x)\sin(5y)e^{-41c^2t}}}$