Karlsruher Institut für Technologie

Parametrisierte Algorithmen II

Kurzvortrag

Oliver Enes | 08. Mai 2023

Ausgangssituation: $\mathcal{NP}$-schwere Probleme... überall
$\mathcal{NP}$-schwere Probleme

Ausgangssituation: $\mathcal{NP}$-schwere Probleme... überall
$\mathcal{NP}$-schwere Probleme

Frage

Ist ein $\mathcal{NP}$-schweres Problem in der Praxis nicht effizient/schnell lösbar?

Ausgangssituation: $\mathcal{NP}$-schwere Probleme... überall
$\mathcal{NP}$-schwere Probleme

Karlsruher Institut für Technologie

Frage

Ist ein $\mathcal{NP}$-schweres Problem in der Praxis nicht effizient/schnell lösbar?

Antwort

In der Praxis sind viele Instanzen $\mathcal{NP}$-schwerer Probleme effizient lösbar, weil die Instanzen **gutartig** sind!

Parametrisierte Algorithmen

- Die Laufzeit eines Algorithmus wird zusätzlich zur Eingabegröße in einem **weiteren Parameter k** betrachtet.
- Mittels k soll die „Schwierigkeit der konkreten Probleminstanz“ formalisiert werden.
- In diesem Vortrag: Fokus auf strukturelle Parametrisierung

Parametrisierte Algorithmen

- Die Laufzeit eines Algorithmus wird zusätzlich zur Eingabegröße in einem **weiteren Parameter k** betrachtet.
- Mittels k soll die „Schwierigkeit der konkreten Probleminstanz“ formalisiert werden.
- In diesem Vortrag: Fokus auf strukturelle Parametrisierung

In welchem Teil einer Probleminstanz liegt die Schwierigkeit?

Problemkerne

Problem Vertex Cover

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

Frage: Existiert Menge $M \subseteq V$, sodass $|M| \leq k$ und jede Kante zu min. einem Knoten in M adjazent ist?

Problemkerne

Problem Vertex Cover

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

Frage: Existiert Menge $M \subseteq V$, sodass $|M| \leq k$ und jede Kante zu min. einem Knoten in M adjazent ist?

Satz

Vertex Cover ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

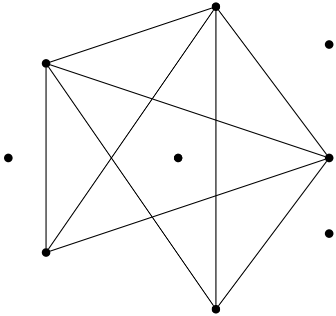
Problemkerne

Problem Vertex Cover

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

Frage: Existiert Menge $M \subseteq V$, sodass $|M| \leq k$ und jede Kante zu min. einem Knoten in M adjazent ist?



hier $k = 3$

Satz

Vertex Cover ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

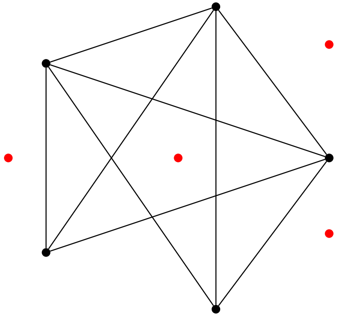
Problemkerne

Problem Vertex Cover

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

Frage: Existiert Menge $M \subseteq V$, sodass $|M| \leq k$ und jede Kante zu min. einem Knoten in M adjazent ist?



hier $k = 3$

Satz

Vertex Cover ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

- Trotzdem sehen wir, dass wir isolierte Knoten ignorieren können.
- Die „Schwierigkeit" des Problems muss also in der hier größten Zusammenhangskomponente liegen.

Der Kern allen Übels

- Wir haben die Probleminstanz verkleinert, indem wir „einfache“ Teile der Instanz entfernt haben.
- Reicht es, den „schweren“ Teil der Instanz zu lösen, um die Instanz selbst zu lösen?
- Können wir das bei jedem (NP-schweren) Problem machen?

Neue Problemklassen

Neue Problemklassen

Karlsruher Institut für Technologie

Problemklasse FPT

Die Menge aller Entscheidungsprobleme der Form $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ wobei k der Parameter und die Instanz in $\mathcal{O}\left(f(k) \cdot |x|^c\right)$, $c \in \mathbb{N}$ lösbar ist.

Neue Problemklassen

Problemklasse FPT

Die Menge aller Entscheidungsprobleme der Form $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ wobei k der Parameter und die Instanz in $\mathcal{O}\left(f(k) \cdot |x|^c\right)$, $c \in \mathbb{N}$ lösbar ist.

Ist jedes parametrisierte Problem FPT?

Neue Problemklassen

Karlsruher Institut für Technologie

Problemklasse FPT

Die Menge aller Entscheidungsprobleme der Form $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ wobei k der Parameter und die Instanz in $\mathcal{O}\left(f(k) \cdot |x|^c\right)$, $c \in \mathbb{N}$ lösbar ist.

Ist jedes parametrisierte Problem FPT?

(Spoiler: nein)

Neue Problemklassen

Problemklasse FPT

Die Menge aller Entscheidungsprobleme der Form $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ wobei k der Parameter und die Instanz in $\mathcal{O}\big(f(k) \cdot |x|^c\big)$, $c \in \mathbb{N}$ lösbar ist.

Ist jedes parametrisierte Problem FPT?

(Spoiler: nein)

Wie zeigen wir, dass ein Problem nicht FPT ist?

Neue Problemklassen

Problemklasse FPT

Die Menge aller Entscheidungsprobleme der Form $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ wobei k der Parameter und die Instanz in $\mathcal{O}\big(f(k) \cdot |x|^c\big)$, $c \in \mathbb{N}$ lösbar ist.

Ist jedes parametrisierte Problem FPT?

(Spoiler: nein)

Wie zeigen wir, dass ein Problem nicht FPT ist?

Parametrisierte polynomielle Reduktion (W[1]-Hardness)

Neue Problemklassen

Problemklasse FPT

Die Menge aller Entscheidungsprobleme der Form $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ wobei k der Parameter und die Instanz in $\mathcal{O}\left(f(k) \cdot |x|^c\right)$, $c \in \mathbb{N}$ lösbar ist.

Ist jedes parametrisierte Problem FPT?
(Spoiler: nein)

Wie zeigen wir, dass ein Problem nicht FPT ist?
Parametrisierte polynomielle Reduktion (W[1]-Hardness)

Exponential Time Hypothesis (ETH) und Strong Exponential Time Hypothesis (SETH) ermöglichen enge untere Schranken für die Laufzeit von Algorithmen.