



國家考試與研究所考試用書
作者：歐陽 經銷：文笙書局

高考技師
榜首巨著

解說土壤力學



2014/11/11 12:44



解說土壤力學

技師、高普特考
研究所、國營事業

國考榜首 大地技師榜首

歐陽 編著

文笙書局 經銷

里 程 碑(Milestone)

土壤力學教些什麼？20 餘年前我在課堂裏真不知道它傳授些什麼，入伍當兵前，就全忘光了。今天竟要把自己 20 多年來與國考土壤力學奮戰的經驗寫出來，期待更多考生能受惠而金榜題名，真是世事難料。

時光回到 20 餘年前開學的某天，淡江土木 2B 班眾人暑假放到「生仙」，滿心期待著大三土壤力學開課，有人暑假就開始補工數，欲提早卡位人生勝利組。台下的我從小玩泥巴長大，土壤力學對我來說算哪根蔥？相信運用我幼稚園玩泥巴的經驗，輕輕扳指關節，必可在眾人羨慕下 99 分輕騎過關。然所謂幻滅就是成長的開始，一點不錯，原先佔據我小小腦袋，對土壤與泥巴的想像完全是錯的，從童稚學來的直覺完全糟的，魯蛇(loser)被狠狠巴了一掌，又一次加深在大學裡的挫折。

當兵兩年退伍後決定考技師，遇到施國欽老師出新書及授課，在施老大有系統的領導下，終於知道土壤力學的脈絡及精神，還有一件很重要的事情是：**我回家一定動手做題目，咬緊現場授課進度，每堂課都發問，把自己的想法、觀念講出來讓老師修琢**，一週一週過去，我腦海裡的土壤力學模型越來越正確，幼稚園的想像已不復存在，魯蛇逐漸變穩拿(winner)，研一時榮幸考上大地技師榜首。同時間，補習班裏保持沉默的同學還是大多數，而落榜的，也是大多數；或許他們對土壤力學還堅持著「自己的想像」，沒有靠考古題與發問修改自己的想法。

本書蒐羅的考古題比較新，砍掉無意義考題，編書時時刻刻注意考出來的機率，**包含 107 年土木、水利、結構技師考題**，討論豐富而深入，這些是書版面較大的原因。考試機率很低的內容，均被作者拿掉，學校教授當然對此不爽，但某些為考試煩惱的朋友或許因此高興。作者的想法是：以房市來講，市面上有老舊二手公寓、有帝寶寬庭豪宅、有低公設的透天厝、也有高公設的電梯大樓、有人只要自住、有的要投資，還有人選擇租屋，顯然不同消費者，有不同需求。有人先看地段，有人首重價格，有人注重保全隱私，並非單一屋款能通吃市場。那麼，不同風格的書籍，正好照顧不同需求的消費者。這書沒辦法提供所有的大地工程知識，它註定是考試好朋友。

廣獵群書的結果，筆者發現在極細微之處，各家原文書作者觀點未必相同，大家別擔心，這些通常不會是考試重點。另一方面，差異造成競爭與演化，人類的知識亦然，有差異就有找到原因、細節的動力，學科就逐漸發展起來了

誠如你所知，筆者寫了不少結構力學的書籍，故特別能從材料力學的觀點來審視土壤力學，再回頭反省材料力學與土壤力學的人文思想發展脈絡，這對我自己是很好的回饋之路，思考後毫不藏私的放在書裡。舉例：醫學、生物、化學有重疊之處，同一件事情，醫生、生物學家和化學老師看的角度、講的內容就不相同，交叉看能懂更多。本書用材力觀點以及人文觀點來交叉說明土壤力學，如果說得不好，是主筆人才情有限，還須用功；如果說得好，您就有機會站上材力與土力的制高點。

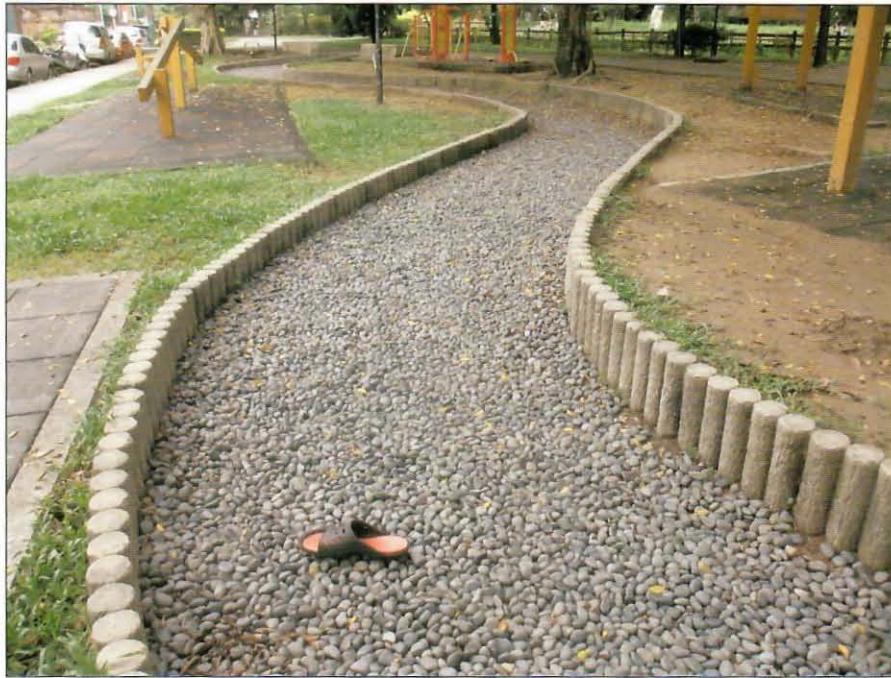
編書中除了儘量翻閱原文書外，敝人還要特別感謝施老師於知識交流、理財觀念與人生經驗多方提攜(老師的兒子超有禮貌)，還有中央大學董家鈞教授、李崇正教授、黃俊鴻教授、交通大學林志平教授、台灣大學陳正興教授、卿建業教授的悉心指點。因敝人力量有限，多有麻煩昌政君、昌良君、培修君、明弘君、永洲君、庭宇君、碩鴻君、鈴頌君、宏澤君、冠宇君、至為君、明松君、世鈞君、孟達君、衡哥、揚哥、明徹君、皓宇君、Swallow、來好、雪花等人校閱，在此特地向您致謝。繪圖則感激 Roller 巧奪天工悉心幫忙，圖片清晰清爽、毛邊少，字體清楚不會糊成一團。

上帝沒有辦法照顧每一位考生，所以祂派補習班老師(eg：施老大、毛神、歐陽)來幫忙，可是補習班某些考生還是缺課，老師只好先照顧那些主動過來發問的人，因為他(她)們看起來「有更強烈的上榜慾望」，能了解「天助自助者」的意義。

筆者在此感謝翰昇、建國補習班提供機會，讓敝人教授材力、結構學、RC、工程力學、土壤力學、基礎工程，從不同面向反覆審視土壤力學，最後回饋給讀者，能出書代表建立自己的里程碑，不枉讀者群、家人們的支持與自己過去歲月的堅持。

讀者們，祝您 金榜題名與學業進步

歐陽 Jan/01/2019 摺頁照片均攝於釜山(Busan)



您對統一土壤分類有多少生活上具體感覺？公園健康步道的圓滑礫石，此類礫石尺寸，已經接近統一土壤分類的礫石尺寸上限(7.5 cm)，再大就稱為卵石。



統一土壤分類的砂與礫石的分界是 4.75 mm，照片是新北市石門區石門洞海邊的貝殼砂，粒徑範圍跨越 4.75 mm，手掌中砂與礫石都有。



紅土統一土壤分類常為 CL(低塑性黏土)，透水性差，乾燥時抗剪強度高，如照片可垂直開挖不坍，長期泡水後抗剪強度下降，故部分工地開挖拚施工速度，垂直開挖後不設擋土支撐，趕快構築完成地下結構體。紅土見於林口、中壢、平鎮、楊梅、湖口、大肚山、火炎山、八卦台地等處。



鐵路道碴通常為礫石尺寸，為何採用礫石？請從三大工程性質回答。



新北市石門區石門洞(海蝕洞)，據信是火山噴發物沉積後，海水侵蝕加上海退(或地表隆起)所形成，地球歷史活生生演給你看。比頭還大的岩塊可能來自大屯山火山噴發的安山岩、角礫岩，其間以火山灰膠結。圖中明顯的細砂層猜測可能是不同時期沉積物。不同層面間，令你想到水平向和垂直向的等值滲透係數怎麼算了嗎？

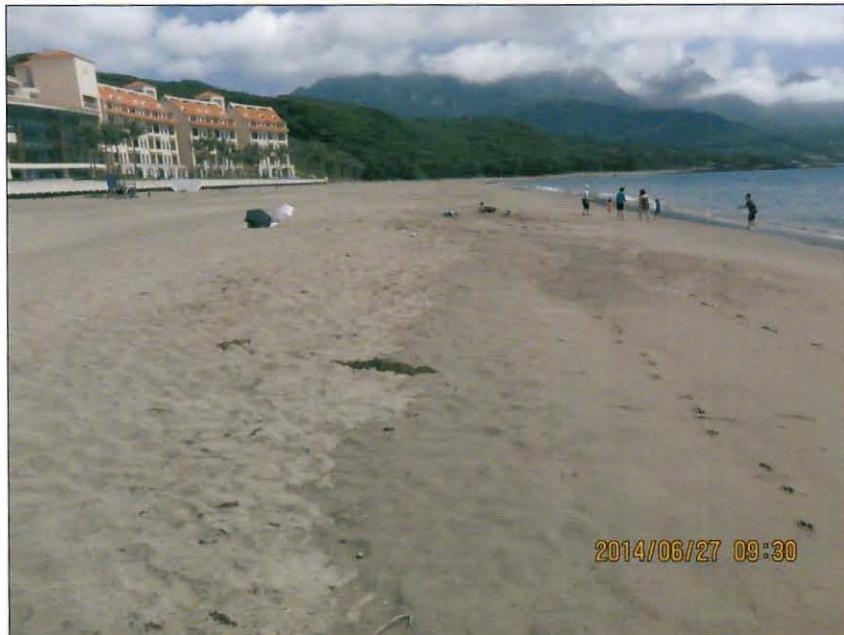


雲林縣內因抽取地下水之壓密沉陷，嚴重處逾 1 公尺，攝於台 17 線。

交通部公路總局第五區養護工程處 (Fifth Maintenance Office)

工程名稱 (Project Name)	台78線22K+700東西行線改建工程
設計單位 (Designer)	萬鼎工程服務股份有限公司 RESOURCES ENGINEERING SERVICES INC.
監造單位 (Construction Supervisor)	交通部公路總局第五區養護工程處嘉太工務所 JIATAI BRANCH, FIFTH MAINTENANCE OFFICE, DIRECTORATE GENERAL OF HIGHWAYS
施工廠商 (Contractor)	松華營造有限公司 SONG-HUA CONSTRUCTION CO., LTD.
工程概要 (Project Descriptions)	移除既有路堤,改建240米鋼箱梁橋。 TO REMOVE THE ORIGINAL EMBANKMENT AND BUILD A 240-METER LONG STEEL BOX GIRDER BRIDGE.
工程效益 (Expected Benefits)	減緩高鐵橋墩之差異沉陷。 REDUCING THE DIFFERENTIAL SUBSIDENCE OF THE PIERS OF TAIWAN HIGH SPEED RAIL.
施工期間 (Duration)	民國103年01月25日至 104年06月18日 (25/01/2014 ~ 18/06/2015)
土工(負責人)	黃 春 日
	電話 0907-100000

雲林縣台 78 線與高鐵交叉處，工程界號稱死亡交叉點，因土壤壓密，高鐵橋墩差異沉陷最嚴重，不只高鐵墩柱補強，台 78 線也因此改建。



照片裡的沙灘，右邊沙顏色較深，乃毛細現象作用區域，承載力佳，跑步、騎腳踏車均方便。左邊沙顏色較淡，已無毛細現象，承載力差，跑步、騎腳踏車均費力。攝於台東杉原海水浴場，畫面尚未波濤洶湧，不是杉原杏璃喔！



土生岩、岩生土，照片為台東縣利吉惡地，又名利吉月世界，屬於海岸山脈，它怎麼來的？你相信它是從海底下被推上來的嗎？



已經存在一千萬年之久的澎湖群島玄武岩，乃地底岩漿流出地表冷卻形成，其最著名的外觀就是冷卻收縮的柱狀節理。上部玄武岩風化成紅色土壤，好像笑得臉變紅了，看盡台灣戰爭與和平更迭(荷蘭人、鄭成功、施琅、日本人、蔣中正、國民黨、民進黨)，嘲笑著人類短淺的眼光。



上下兩圖均攝於桃園某處之紅土台地，紅土之紅色乃因氧化鐵為紅色之故。桃園市中壢區之紅土地層，往下挖 2 m 一般可碰到卵礫石，有的地方甚至卵礫石更近地表，為良好的建築承載層。





上下兩圖均攝於桃園市龍潭區之河道，照片上半部是河上游側，就是有人划橡皮艇的地方；下半部是下游側。上、下游中間用土圍成圍堰，有水頭差。圍堰土石顏色較淺的部分，比較乾燥，圍堰土石顏色較深的部分，已經被水浸濕，甚至照片上還看得到水流出來的白色泡沫。仔細觀察泡沫產生之處，已經沒有中小顆粒的土壤了，因被沖刷流失了，只剩下大顆粒比較重，還沒沖走，那地方很明顯看到土石「缺口」，就像人缺了門牙一樣。這缺口，像個「管道」(pipe)，這種形成管道的過程，就稱為 piping (pipe + ing) —— 管湧。





課本請順時針轉 90° 看。某建築基地開挖，你能憑肉眼看統一土壤分類嗎？這類土壤，滲透性、壓縮性、剪力強度特徵為何？未來基礎是什麼型式？無解者請來上課。



格樑擋土係由上而下逐階施作，照片裡上方植生已發芽，下方尚未放植生包，此案例未設計地錨。左隧道口棗紅色的剛架結構體，是隧道襯砌推進工作車。



擋土預壘排樁+地錨，排樁難以相鄰緊密，故易滲水。此為舊式地錨，錨頭為RC製，新式為金屬製。擋土設施型態之選擇，與c、 ϕ 、開挖深度有關。



井式基礎。環狀基礎受外土壓力，土壓力導致 RC 環受壓應力，壓應力可自我平衡，這是材力薄壁壓力容器的反命題。材力請速參考《材料力學論衡》。

解說土壤力學

里程碑(Milestone)

作者簡介

第一章 土壤力學序論

§1-1 土壤力學教什麼與得高分該有心態.....	1-1
§1-2 土壤的來源.....	1-3
§1-3 「土壤」+「力學」v.s.其他力學科目	1-4

第二章 土壤基本指數性質與結構

§2-1 從三相圖談基本定義.....	2-3
§2-2 砂土結構與相對密度 D_r	2-15
§2-3 黏土內的黏土礦物與結構.....	2-20
§2-4 歷年考題精選.....	2-27

第三章 土壤分類

§3-1 阿太堡限度與指數.....	3-3
§3-2 粒徑分布曲線.....	3-13
§3-3 統一土壤分類(細顆粒部分)	3-19
§3-4 統一土壤分類(粗顆粒部分)	3-21
§3-5 AASHTO 分類法	3-29
§3-6 歷年考題精選.....	3-34
【探求人生意義與你和我】	3-50

第四章 土體中應力

§4-1 總應力、水壓力與有效應力.....	4-2
§4-2 均質均向地層受點荷重.....	4-27
§4-3 各種均布荷重與壓力球根觀念.....	4-29
§4-4 Newmark 應力影響圖	4-35
§4-5 局部面積加載之角隅法.....	4-38
§4-6 局部面積加載之概算法.....	4-42
§4-7 靜止土壓力係數 K_0	4-47
§4-8 應力轉換與莫爾圓.....	4-48
§4-9 歷年考題精選.....	4-57

第五章 滲透性

§5-1 水頭觀念與達西定律(Darcy's Law).....	5-2
§5-2 室內試驗求滲透係數(定水頭法).....	5-8
§5-3 室內試驗求滲透係數(變水頭法).....	5-11
§5-4 室外試驗求滲透係數.....	5-14
§5-5 滲流水壓 u_s	5-18
§5-6 滲流方向與層面平行.....	5-26
§5-7 滲流方向與層面垂直.....	5-29
§5-8 雙向度滲與流線網.....	5-38
§5-9 濾層設計.....	5-55
§5-10 砂湧(Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition).....	5-59
§5-11 管湧(Piping).....	5-70
§5-12 上舉(Uplift).....	5-73
§5-13 歷年考題精選.....	5-76
【Darcy 與你和我】	5-113

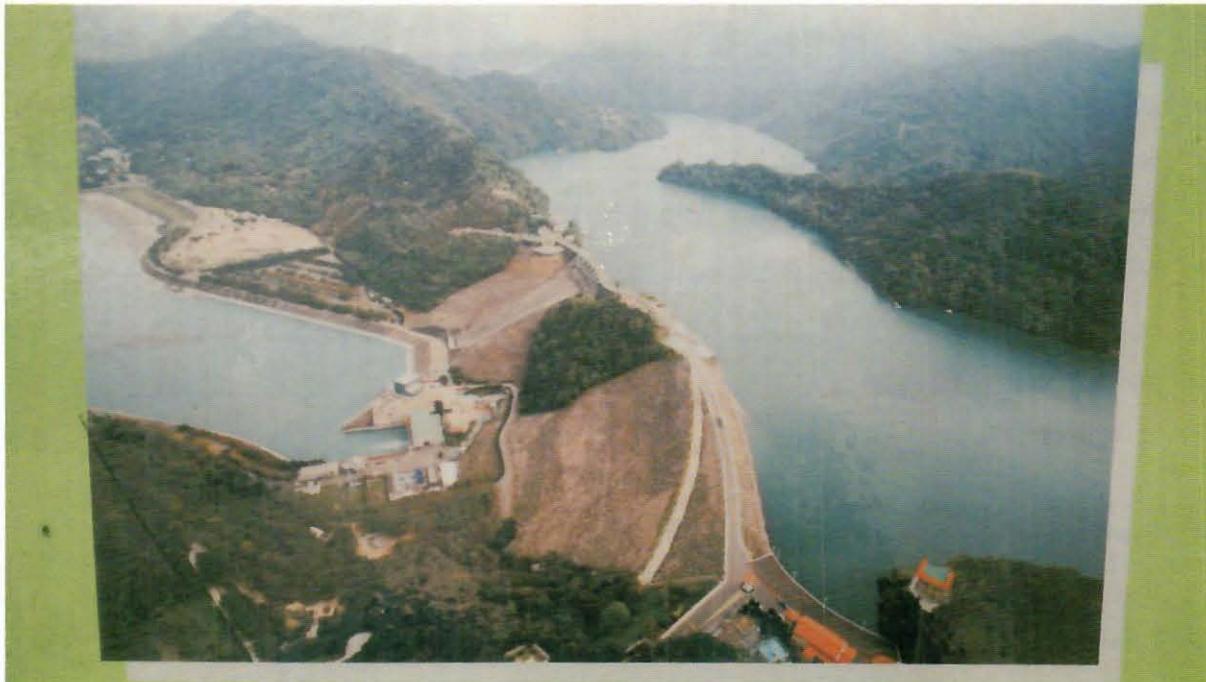
第六章 壓縮性

§6-1 土壤不同階段的沉陷量.....	6-3
§6-2 單向度壓密試驗.....	6-4
§6-3 NC、OC 與壓密中土壤.....	6-11
§6-4 壓縮指數 C_c 與壓密沉陷量	6-15
§6-5 Terzaghi 單向度壓密理論	6-25
§6-6 圖解法求壓密係數 c_v	6-28
§6-7 整層平均壓密度 U_{avg} 與某點壓密比 U_z	6-33
§6-8 二次壓縮.....	6-50
§6-9 短期的彈性沉陷量.....	6-54
§6-10 歷年考題精選.....	6-55
【不要當公務員的 N 大理由】	6-99

第七章 剪力強度

§7-1 土壤之強度準則.....	7-3
§7-2 直剪試驗(Direct Shear Test).....	7-7
§7-3 孔隙水壓力參數.....	7-17
§7-4 三軸之 CD 試驗	7-23
§7-5 三軸之 CU 試驗	7-33
§7-6 三軸之 SUU 試驗	7-48
§7-7 無圍壓縮試驗 UC	7-65
§7-8 十字片剪試驗 VST	7-70
§7-9 應力路徑(Stress Path)觀念.....	7-72
§7-10 常見之應力路徑	7-76
§7-11 應力路徑應用	7-83
§7-12 歷年考題精選.....	7-86
【跑步與你和我】	7-123

附錄 A 土壤力學公式彙整	A-1
附錄 B 參考文獻	B-1
【參考文獻之 44 ≠ 22×2】	B-3



石門水庫空照圖，右側為壩體上游蓄水側(又稱內庫)，左側為下游後池堰(又稱外庫)。石門水庫乃土石壩，圖中壩殼之拋石層(rock fill)清晰可見，隨便一顆體積都比籃球大甚多。圖中哪裡可以看到土壤力學滲透性、壓縮性、剪力強度的影子呢？

章名	重要程度	章名	重要程度
第一章 土壤力學序論		第五章 滲透性	★★★★★
第二章 土壤基本指數性質與結構	★★	第六章 壓縮性	★★★★★
第三章 土壤分類	★★★	第七章 剪力強度	★★★★★
第四章 土體中應力	★★★		



第一章 土壤力學序論

§1-1 土壤力學教什麼與得高分該有心態

有些朋友第一次接觸土壤力學，心想「這不是『五行』金、木、水、火、土中的老麼麼，有什麼好學的？我在《倚天屠龍記》第(四)冊中就學過了」，書中云「只見楊逍擲出一面小小黃旗。一羣頭裹黃巾的明教徒走進廣場，…，人數卻比金、木、水、火四旗少得多，只有一百人。…突然間轟的一聲大響，…，廣場中心陷落，四百條大漢驟地從地底鑽出，羣雄都是大吃一驚，…，原來這四百名教眾早就從遠處打了地道，鑽到廣場中心的地底，…厚土旗掌旗使顏垣發出號令，…五百教眾齊向張無忌行禮。…羣雄心中明白：『倘若我站在廣場中心，口出侮慢明教之言，此刻只怕早已被活埋在地底了。』」

如果以這故事當成本書的開場白，卻也發人深省。厚土旗挖地道時，有沒有遭遇地下水？水有沒有夾帶泥沙衝出使得開挖面倒退數百公尺，就像雪山隧道一樣？或發生淘空？這就和土壤的滲透性有關了。厚土旗挖地道時，有沒有打井降水使地表沉陷？如果有沉陷，羣雄遠遠看出端倪就不上光明頂，或預先有防備，厚土旗就功虧一簣，沉陷量和土壤的壓縮性有關。地道側壁的支撐系統究竟要多厚的模板與木條支撐？側向土壓力是多少？支撐的間距是多少？這就和土壤的自立性有關，而控制自立性與挖掘難易的關鍵，正是土壤的剪力強度。

土壤力學了沒

土壤力學教什麼？

土壤力學主要教土壤的「滲透性」、「壓縮性」和「剪力強度」，這三種性質被稱為土壤的工程性質。考題最多的是剪力強度，滲透性次之，壓縮性又次之。

滲透性顧名思義，研究水在土壤中流動時，水的單位時間滲漏量 q 多寡、水對壩體的浮力、滲流對土壤到底是造成穩定還是破壞的作用…？定量上如何估算各種安全係數？

壓縮性拿近距離來講，你去海邊玩水，一腳踩下去瞬間在沙灘上留下偉人腳印，這其實就涉及到土壤的壓縮沉陷；遠的來講，比薩斜塔之所以 800 年來緩慢傾斜，也是肇因於其基礎下

土壤的壓縮沉陷。壓縮性，有沉陷「量」的問題及沉陷「速率」的問題。

(基礎工程)

而剪力強度呢？讀者有在泥巴地裏滑倒的經驗嗎？那就是土壤的抗剪強度不足。有看過新聞報導連續豪雨後的邊坡滑動嗎？有看過山坡地的擋土牆或河床上裸露出來的基樁嗎？相不相信邊坡滑動、擋土牆設計和樁設計，竟然和土壤剪力強度有關。

得高分該有心態

回到教室，從以前到現在，似乎系裏功課好的，就往結構組移動；系裏功課較差的，就往大地組移動，或許是因為「功課好=數理能力好，比較會算，於是唸結構組」，「功課不好=數理能力不好，只好找一些背誦科目來唸」。於是唸大地組的朋友，不少人一開始就打定主意要背一大堆資料，再參加考試。這不是個完全正確的想法，因為很多土壤力學的觀念，遠遠超乎材料力學基本學科的延伸(例如材力不講水，土力要講水；材力不講時間，土力要講時間)，請要有「建立全新觀念」的準備，而不只是準備背誦，否則，對算數四則運算將束手無策。

建立的新觀念正不正確，能否得高分，就看有沒有常問老師，找老師琢磨自己腦海裡的想法。資本主義社會不吃大鍋飯，讀者要自己爭取福利，自己累積籌碼選擇想過的生活。下課和同學一樣拍拍屁股就走，這叫吃大鍋飯，未來可參考邁⊕牢時薪 140 圓、■漢堡時薪 130 圓，下班後在網路貼酸文。決定跟別人不同，主動問老師，就是主動決定人生，主動決定生活品質。

自從國考成為熱門運動後，大地組考生也要唸結構學，結構組考生也要唸土壤力學，不管資質是否聰穎，每一組都要擁抱土壤力學了。更甚至水利普考、高考三級、二級、地方特考、鐵路特考、土木技師、水利技師、結構技師、大地技師都要考土力，考選部比你還熱愛土力，若想考試，有多少放棄的空間？還是決定好好 K 懂它，採取一魚多吃的策略？土壤力學題目算不出來，從來不是數學太高深的問題，追究到最後，是自己的人生觀及生活態度問題。

要考的科目很多，面對每一個科目(eg：土壤力學、RC、結構學、…)，複習後都要能回答「這科目的中心觀念是什麼？」、「常考範圍是什麼？」答得出來，金榜如探囊取物。目前已經有大學生利用寒暑假到補習班預先學習下學期要修的科目(如 RC、土力、基礎工程)，補習班老師教得比較好，很快抓出重點，開學後這些學生期中、期末考試的確分數較高，利於推甄、國考。得高分該有心態是什麼，已經很清楚了。

§1-2 土壤的來源

地球表面的地殼岩石，是岩漿冷卻形成。大部分土壤是由岩石崩解、風化(Weathering)而來。岩石崩解，是一個很緩慢的過程，在岩石強度遞弱之際，植物、生物的成長力量就相對強，植物根系膨脹、微生物的活動，均能夠在長時間的演變中，將堅硬的岩石分解為土壤，其中包括物理、化學及生物作用。和許多人造的土木工程材料比起來(eg：混凝土、型鋼、加勁材、…)，土壤的強度並不高，土壤內部的顆粒，膠結能力不算強，有些甚至彼此間沒有膠結能力。

岩石經過崩解、風化、分解後形成的土壤，如果土壤仍留在母岩旁邊，則此土壤稱為殘留表土(Residual Soil)。若土壤被運到母岩以外的地方，則此土壤稱為運積土(Transported Soil)，運送的動力來源可能是重力、風力、水或冰河。

土壤經過長時間的重量累積、壓縮，固結之後形成沉積岩(台灣西部沉積岩多，如砂岩、泥岩、頁岩)，沉積岩可再風化、崩解為土壤，也可受力量或熱量作用而變質成變質岩。簡單講，岩石變成土壤，土壤變成岩石，就像蛋生雞、雞生蛋，已經在地球上進行幾億年，而人類，就像在地球上打工的工讀生，隨時走人。

土壤來源不是考試焦點，市面上書籍已交代甚多，土壤、岩石的生成循環圖也很漂亮，如圖 1-1，注意不同線型代表不同作用，同一線型即是作用相同，土壤生成非考試所愛，所以我們到此打住。

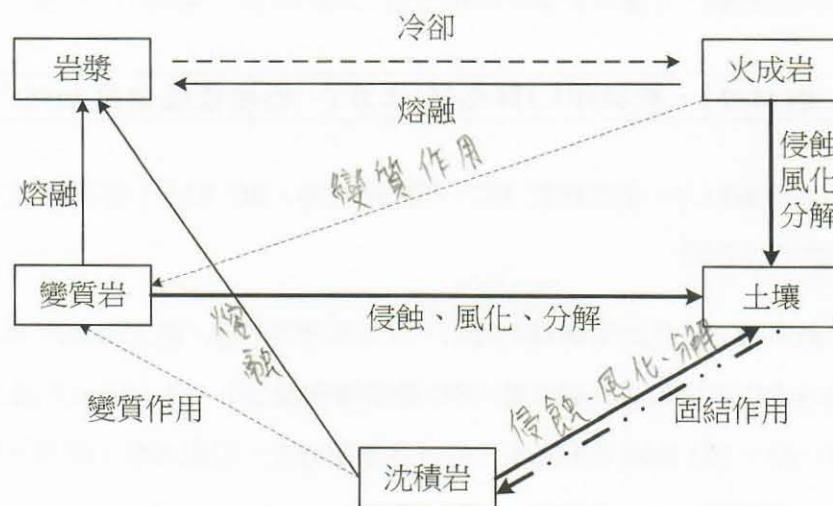


圖 1-1

§1-3 「土壤」 + 「力學」 v.s. 其他力學科目

此節節名是兩個獨立名詞：土壤、力學。土壤在地球上的時間，遠超過人類在地球上的時間，顯然是老ㄉㄡㄉㄡ，然而力學的歷史，從伽利略開始，也不過 400 年左右，一老一少，竟然共締良緣結婚了，形成土壤力學。究竟維持這婚姻正常運作的奧秘是什麼？

答案是做試驗 + 設定力學模型 + 邏輯數理推導。

首先得藉由試驗了解「土壤」，廣義的材料包含土壤，就像筆者在《材料力學論衡》第零章所說的，凡材料之類的力學，必有三重特質：第一，必須針對土壤做試驗，找出它在外在環境改變下(例如含水量的變化、排水條件的變化、外力的變化)，土壤會彰顯出什麼行為(eg:沉陷、膨脹、抗剪強度增減、…)，把變化記錄下來，歸納、分析出具代表性的參數。第二，**設定力學模型**，通常把土壤設為均質均向，因均質均向材料的數理推導較簡單。第三，根據試驗的結果，將試驗數據迴歸或輔以邏輯數理推導(eg：力平衡、質量不滅原理)，導出或迴歸出考試的公式，藉此可預測該土壤未來的工程行為。迴歸出來的，通常是經驗公式或破壞準則(eg： $\tau=c+\sigma\tan\phi$)。實務上土壤非均質非均向，故基礎工程用土力公式設計時，須加安全係數。

就算一開始都是試驗，土壤力學也比材料力學精采得多。因材力只探討固體，人為品管後可大幅降低異向性；而土壤出自上帝之手，其中是氣體、液體、固體都有，三相俱存，號稱三國演義，其異向性的程度比結構鋼嚴重。試驗者就得先搞清楚這三相的重量、體積比例關係，此可詳見第二章的三相圖。土壤的試驗結果常受這三相的重量、體積比例影響。

舊愛(材力)、新歡(RC)與元配(土力)，比較後優缺點如何？

讀者可能已經修過材力、正在修習 RC，不妨把材力、RC 和土力互相比對，不失為賞析土力的角度，例如以下四段。

就滲透性比較，材力常見的結構鋼不透水，沒有滲透性問題。施工良好的 RC 結構幾乎不透水，施工不良的 RC 結構則可見到白華，RC 是滲透係數很小，並非完全不透水。土壤的滲透性問題，獨樹一格，它比前兩者更透水，造成滲漏量過大、引起淘空、砂湧、管湧、上舉、降低邊坡穩定性、濾層設計、…等問題。

就壓縮性來講，材力常進行結構鋼的單拉試驗，記錄應力和應變的關係；對應到土力裏，就是土壤的單向度壓密試驗，記錄應力和沉陷量的關係，此見第六章。第六章還提到「變形速率」的問題，結構鋼受力之後，立刻展現出變形，幾乎沒有時間遲滯，當天就能拿到試驗報告。但是某些低透水性土壤(如黏土)受壓後，需要較久的時間方能排掉超額孔隙水壓，沉陷變形才會表現出來，也就是有時間遲滯問題，此即壓密速率問題，當天不可能有試驗報告。就像比薩斜塔下的黏土，花了 800 年才排掉超額孔隙水壓。材料力學的考古題沒有時間項(time, t)，考生背的公式也沒有時間項，但土壤力學有。RC 則有潛變問題，類似黏土的二次壓縮現象。

就剪力強度來說，從結構鋼應力－應變曲線裡，決定降伏強度 σ_y 或極限強度 σ_u 是容易的，不管試體是否泡在水裏受拉，強度幾乎不變，例如 A36 鋼鉗，不管潮濕或乾燥，降伏強度就是 36 ksi。土壤花樣可多了，至少有直剪試驗、CD、CU、SUU、UC 等試驗，對同一土壤會測出不同的剪力強度參數，甚至還有現地試驗，考題就是考你「選哪一個參數來用？」「各種試驗對應的現場意義為何？」

雖然是同一工址的土壤，土壤是乾燥(模擬大熱天)還是飽和(雨天)，其剪力強度就不一樣；受剪時能否排水，強度也不一樣；試體彼此有效應力若不相同，剪力強度也不一樣，結構鋼就沒有這樣的概念。材力考題會給單一的降伏強度值，RC 會給單一的混凝土抗壓強度與鋼筋的降伏強度，你毫不猶疑拿來用，可是土力卻有排水強度參數(如 c')與不排水強度參數(如 c_u)，到底要用哪一個才對？這就是土壤力學精采的地方(之一)。

土壤是不是廣義材料？是！那為何不放在材料力學裡面教？原因之一是大學材料力學主要探討均質均向線彈性材料，現地土壤非均質非均向，不是線彈性材料；其次，材力教導線彈性材料構成的桿件(eg：二力桿、樑、柱等)之力學行為，而土壤沒有辦法構成桿件，更別說土壤有形心軸、中性軸了。第三，桿件有明確邊界，即能量法的積分邊界，土壤很難釐定受力邊界，故土力幾乎沒有能量法。

從考古題來看，材力的計算量比較多，用到的數學有些還涉及微積分；土力的計算題相對簡單容易，多是加減乘除。土壤異向性程度高，真要照實推導會很吃力，但考題常假設土壤為均質均向連續體，而推導內容又非常少考，很多複雜的公式均被畫成圖表了(便利工程師使用)，注意考題有可能提供圖表，考生要學會查圖表。RC 呢？它幾乎在算桿件斷面配筋量，解一題的計算量比土力多，要背的公式也多，另有規範改版問題，大地工程的規範改版極為緩慢。

表 1-1 土壤力學、材料力學與 RC 之比較

	土壤力學	材料力學與 RC
滲透性	討論不同土壤的透水能力，討論透水能力對土體、壩體、滲漏量、開挖穩定等的影響。	不討論透水性質。
壓縮性	<p>1. 土壤的線彈性區極小，受力後展現出來的大部分是塑性變形。土力以壓縮指數 C_c 與再壓指數 C_r 算塑性變形量，C_c、C_r 有些類似彈性係數 E 的倒數。欲求 C_c、C_r 值須做單向度壓密試驗。</p> <p>2. 土力以壓密係數 c_v 算沉陷速率。欲求 c_v 值須作單向度壓密試驗。</p> <p>3. 土力也討論潛變問題，所用的參數是二次壓縮指數 C_u。</p>	<p>1. 結構鋼或純混凝土，均有所謂的線彈性區，該區的代表參數是彈性係數 E。若欲求彈性變形量，必定動用 E 值。欲求 E 值須做單拉或單壓試驗。</p> <p>2. 材料力學不討論變形速率。</p> <p>3. RC 討論潛變問題，所用的參數是極限潛變係數 C_u 或依時潛變係數 C_t。</p>
強度	土壤主要是剪力滑動失敗，所以主要討論抗剪強度。影響抗剪強度 τ_f 的是兩個獨立參數：凝聚力 c 和內摩擦角 ϕ 。進行不同試驗，所得的 c 、 ϕ 不同。試驗時土壤能不能排水，嚴重影響測出來的 c 、 ϕ 值。常見的室內試驗有直剪試驗、CD、CU、SUU、UC 試驗。	純混凝土主要討論抗壓強度 f'_c ，結構鋼主要討論降伏強度 f_y (σ_y)，頸縮之後還有極限強度 σ_u 。以上這些強度值均與水無關，一般認為泡水試驗也不影響強度值。
破壞	以莫爾—庫倫準則預測土壤破壞。	結構鋼以最大形變能準則預測破壞，純混凝土以最大正向應力準則預測破壞。
外力	地表超載瞬間加足。	材力與 RC 多是緩慢加載，逐漸加足。

若您的材料力學與鋼筋混凝土遲滯不前，更別說比對土壤力學，則可參閱筆者《材料力學論衡》、《材料力學了沒》、《解說鋼筋混凝土》與《鋼筋混凝土學了沒》以提升程度。土壤力學後續的延伸是基礎工程，基礎工程會不斷應用您在土壤力學裏所學的剪力強度知識，可參考筆

者《解說基礎工程》。

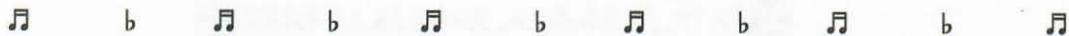
表 1-2 三種工程性質代表參數

滲透性	滲透係數(Hydraulic Conductivity, Coefficient of Permeability)k	土壤易透水者 k 大。
壓縮性	壓縮指數(Compression Index)C _c 和壓密係數(Coefficient of Consolidation)c _v	相同外力、地層厚度條件下，壓密量大者 C _c 大。相同外力、地層厚度、載重歷時條件下，壓密速率較大者，c _v 大。
剪力強度	凝聚力(Cohesion)c 和內摩擦角(Internal Friction Angle)φ	凝聚力 c 大者，抗剪強度 τ_f 大。在相同正向應力下，內摩擦角 φ 大者，抗剪強度 τ_f 大。

你學完這本書，再回頭看看心得是否就是「三大工程性質」。

有少部分的書認為工程性質(engineering properties)應該指：開挖難易、抽排水方式、夯實滾壓機具選擇、能承受載重大小、…；而滲透性、壓縮性、剪力強度應該叫力學性質(mechanical properties)才對。本書於此不花時間討論，對考試沒幫助。

倘若覺得本書習題太少，想研究水利技師考題，或想增加練習機會，觀看神妙解法與討論，可參考筆者《土壤力學了沒》、《目擊者大地工程精解》。(去書局找)





熱忱是鮮為人知的成功秘訣



第二章 土壤基本指數性質與結構

體 系 表

- ☆從三相圖談基本定義
- 砂土結構與相對密度 D_r
- 黏土內的黏土礦物與結構

學 習 重 點

1. 土壤裏大致包含土顆粒、水與空氣。為了分析上的方便，將此三相分開，形成三相圖。注意三相圖內空氣重量當成零，但空氣體積不是零。土壤一旦飽和，空氣體積就是零。
2. 各種基本名詞的定義要記，不記就沒辦法算基本指數性質。選擇當廚師就不要怕廚房熱，選擇當船員就不要怕吃罐頭，選擇當總統就不要怕被亂罵，選擇考試就不要怕定義與考古題。
3. 砂土、礫石的工程性質受相對密度 D_r 影響， $0\% \leq D_r \leq 100\%$ 。 D_r 是評估砂土、礫石緊密程度的指標， e_{max} 、 e_{min} 與 e 均須取自同一砂土進行測試方有意義。 D_r 越接近100%，就越緊密。
4. 黏土的工程性質受含水量影響最大。黏土裡有三種常見的黏土礦物，其中蒙脫土最不適合做路基或結構基礎下方土壤。常見的黏土結構則有兩種(膠凝結構、分散結構)，這兩種的工程性質(滲透性、壓縮性、剪力強度)要能回答。

土壤十分異於人造材料，不只種類繁多，緊密程度和含水量的多寡差異大，均嚴重影響其工程性質。如果你是第一位研究土壤力學的人類，千頭萬緒，你要從哪裡開始？大哉問。

土壤的個性決定命運，人類亦然。在學習土壤的三大工程性質之前，須先學習土壤的基本性質(土壤的個性)，基本性質會影響工程性質，這就像是人的基本個性決定他適合學什麼武功、進入什麼行業，或說個性決定命運。《射鵰英雄傳》裏，郭靖個性質樸，那些檳榔上開花、花樣多、招式繁複的武功學不來，反而降龍十八掌這種單純渾厚武功符合他個性，讓他所向披靡。黃蓉心眼轉得快，能學各種輕盈靈動武功，聰慧如她反而學不來降龍十八掌。^{註1}

基本指數性質(Index Property)指的是土壤單位重、比重、含水量、孔隙比、孔隙率、飽和度、…等等性質，基本性質可以告訴我們土裡有多少孔隙、多少水、多少固體顆粒。同一工區土壤的基本性質不是永遠不變，加水、夯實滾壓、太陽曝曬、人為抽水、經過壓密沉陷就會變。有關取土區、借土區的題型，就是在考土壤的基本性質與三相圖。

土壤裡有空氣、水及固體顆粒，剛好物質三態(氣態、液態、固態)都有了，號稱三國演義。為了方便分析起見，很理想化把三種狀態分開，繪成三相圖，密度最小的空氣在上，最重的固體顆粒在下。三相圖裡， V 是體積， V_v 是孔隙(void)體積， W 是重量，solid 是固體顆粒。空氣重量視為零，但空氣體積 V_a 不可視為零，海邊疏鬆砂土，孔隙體積可能很大。

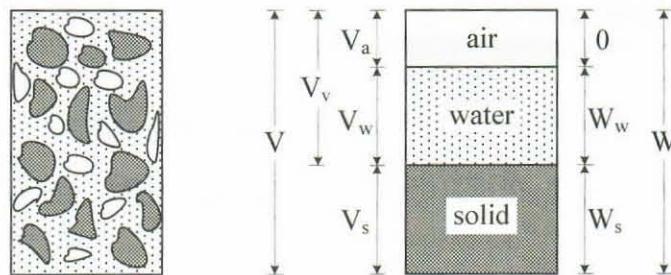


圖 2-1 三相圖

本章講完三相圖計算後，再講砂土、黏土結構，但還是以三相圖計算比較重要。

註 1：你知道你個性造成你的強項是什麼？弱項是什麼嗎？這和你未來成就有關。加水或夯實滾壓，土壤的基本性質(個性)會變，工程表現就改變，工程師藉以調整土壤性質以符工程所需。那麼，人要如何調整個性以獲得成就？什麼時候人會調整個性？什麼時候不會？

§2-1 從三相圖談基本定義

體積的比例：

$$\text{孔隙比(Void Ratio)} e = \frac{V_v}{V_s} , \text{ 孔隙比可以大於 1，以小數點表示。} \quad [2.1]$$

$$\text{孔隙率(Porosity)} n = \frac{V_v}{V} \times 100\% , \text{ 孔隙率小於 1，常見以百分比表示。}$$

$$n = \frac{V_v}{V} = \frac{V_v}{V_s + V_v} = \frac{V_v / V_s}{(V_s + V_v) / V_s} = \frac{e}{1+e} \quad [2.2]$$

土壤力學裏「孔隙比」比「孔隙率」常用，尤其在算壓密沉陷量時常用 e 。 e 和 n ，誰是「比」誰是「率」呢？有一首童謠「 e 比呀呀~ e 比 e 比呀~」。謝謝明松先生提供童歌口訣。

$$\text{飽和度(Degree of Saturation)} S = \frac{V_w}{V_v} \times 100\% , \text{ } S \leq 100\% , \text{ 以百分比表示。} \quad [2.3]$$

重量的比例：

$$\text{含水量(Water Content, Moisture Content)} w = \frac{W_w}{W_s} \times 100\% , \text{ 含水量可以大於 100\%。} \quad [2.4]$$

飽和度是體積比，含水量是重量比，請勿混淆。

各種單位重：

$$\text{溼土(Moist)單位重 } \gamma_m , \text{ 又稱統體(Total)單位重 } \gamma_t , \quad \boxed{\gamma_m = \gamma_t = \frac{W}{V}} \quad [2.5]$$

$$\text{乾土(Dry)單位重 } \gamma_d = \frac{W_s}{V}$$

$$\text{土固體顆粒(Solid)單位重 } \gamma_s = \frac{W_s}{V_s}$$

$$\text{飽和(Saturated)單位重 } \gamma_{sat} = \frac{W_w + W_s}{V_w + V_s} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w \quad [2.6]$$

飽和指土體內沒有空氣，孔隙全由水分填滿的狀態。

$$\text{浸水(submerged)單位重 } \gamma' = \gamma_{\text{sub}} = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w \quad [2.7]$$

$$\text{若土壤不飽和, 則 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1 + e} \gamma_w \quad [2.8]$$

此式常見於毛細水區域的題型，當 $S=100\%$ ， γ_m 就變成 γ_{sat} 。

土顆粒比重(Specific Gravity) $G_s = \frac{\rho_s}{\rho_w} = \frac{\rho_s g}{\rho_w g} = \frac{\gamma_s}{\gamma_w}$ ，無單位。

物體的比重，乃是物體的密度與 4°C 水密度之比，故無單位。在公制裏， G_s 的數值和 γ_s 的數值相等，例如 $G_s = 2.65$ ，則 $\gamma_s = 2.65 \text{ tf/m}^3 = 26 \text{ kN/m}^3$ 。水的單位重 $\gamma_w = 1 \text{ tf/m}^3 = 9.81 \text{ kN/m}^3$ 。

表 2-1 各種常見礦物比重

礦物名稱	比重 G_s	礦物名稱	比重 G_s
石英 Quartz	2.65	蒙脫土 Montmorillonite	2.65 ~ 2.8
高嶺土 Kaolinite	2.6	和樂土 Halloysite	2.0 ~ 2.55
伊利土 Illite	2.8	綠泥石 Chlorite	2.6 ~ 2.9

請讀者取 1 m^3 土樣思考：乾土單位重是「在不含水分的前提下，孔隙全為空氣，土樣的重量就是乾土單位重」；孔隙比是「孔隙(空氣+水)體積對土壤顆粒體積的比值」；飽和度是「水的體積對土樣孔隙(空氣+水)體積的比值」；飽和單位重是「當全部孔隙體積皆充滿水的條件下，孔隙全是水，土樣的重量」。

前幾段介紹各種參數(孔隙比 e 、溼土單位重 γ_m 、…等等)的基本定義，如果給你一坨土壤，請問你如何得到那些數據？最基本層次的數據，就像材料力學最基本的降伏應力、彈性係數，必須透過作試驗得到。例如：現場若是砂土，最常進行標準貫入試驗(SPT)，試驗前在劈裂式取樣器內部預先置入銅圈，打擊時，土壤就被貫入取樣器，也被貫入到銅圈內。將銅圈收回後，對銅圈內土樣利用試驗的方法求出基本的含水量 w 、溼土單位重 γ_m 、土顆粒比重 G_s 。其餘如乾土單位重 γ_d 、飽和度 S 、孔隙比 e 、孔隙率 n 等等，就利用恆等式算出。

簡介含水量試驗：

(1) 秤蒸發皿空重 W_c 。 250g

(2) 濕土置於蒸發皿內，秤重得($W_c + W_m$)。 300g

(3) 濕土與蒸發皿移入烘箱內，以 $110^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$ 的溫度烘乾 24 小時，取出後秤重得($W_c + W_s$)。 290g

$$(4) \text{含水量 } w = \frac{W_w}{W_s} = \frac{(W_c + W_m) - (W_c + W_s)}{(W_c + W_s) - W_c} \times 100\% = \frac{300 - 290}{290 - 250} = \frac{10}{40} = 25\%$$

因考試幾乎不考試驗細節，對試驗細節有興趣者請參閱其他書籍。

$$\text{簡介溼土單位重 } \gamma_m \text{ 試驗: } \gamma_m = \frac{W}{V} = \frac{W_c + W_m}{V_c} = \frac{300 - 250}{\pi d^2 h}$$

(1) 測量空銅圈內徑、高度、求出銅圈內部體積 V_c 。

(2) 測量空銅圈重量 W_c 。

(3) 從現場標準貫入試驗(SPT)之劈裂式取土器，取出含溼土之銅圈。測量銅圈與溼土的重量 $W_c + W_m$ 。

$$(4) \text{溼土單位重 } \gamma_m = \frac{(W_c + W_m) - W_c}{V_c}$$

土顆粒比重試驗目的在求出固體顆粒的比重 G_s ，土顆粒非均勻形狀，需使用阿基米得原理求土顆粒體積，土顆粒浸水後，排開的水體積即是土顆粒沒入水中的體積。本試驗較繁複，離考試更遠，對試驗細節有興趣者請參閱相關書籍。

以上透過試驗求出 w 、 γ_m 、 G_s 。其他參數可用恆等式求得，例如 $\gamma_s = G_s \times \gamma_w$ ， $\gamma_d = \frac{\gamma_m}{1+w}$ ，

$$e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1, S = \frac{wG_s}{e}, n = \frac{e}{1+e}, \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w, \gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$$

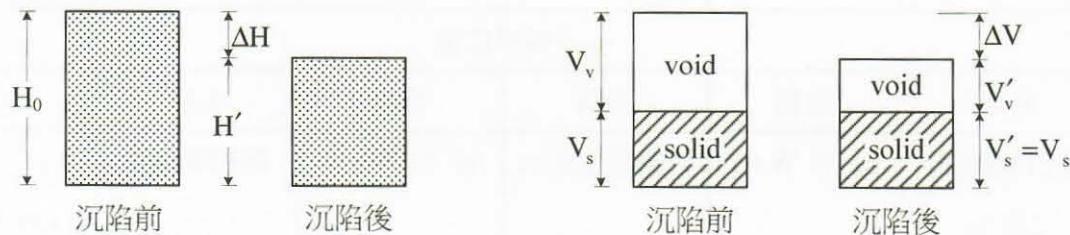


圖 2-2

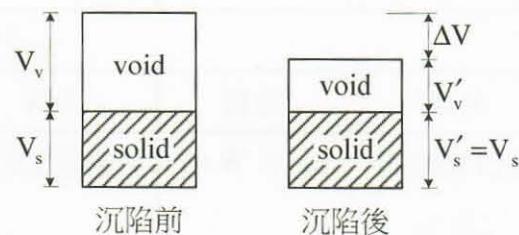
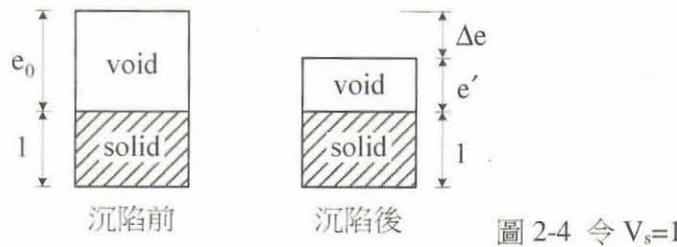


圖 2-3

圖 2-4 令 $V_s=1$

有一土層原始厚度 H_0 , 初始孔隙比 e_0 , 如圖 2-2, 受壓縮後沉陷 ΔH , 問孔隙比變化量 $\Delta e = ?$

固體(solid)顆粒無法被壓縮, 沉陷量完全來自於孔隙(void)的減少。

$$\text{圖 2-2 與圖 2-3, 垂直應變 } \varepsilon_v = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{V_v - V'_v}{V_s + V_v} = \frac{\text{壓縮前高度} - \text{壓縮後高度}}{\text{壓縮前高度}} \quad (\text{壓應變為正})$$

$$\text{分子、分母同除以 } V_s, \text{ 得 } \boxed{\varepsilon_v = \frac{e_0 - e'}{1 + e_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{\Delta H}{H_0}} \quad [2.9]$$

$$\text{故 } \Delta e = \frac{1 + e_0}{H_0} (\Delta H)$$

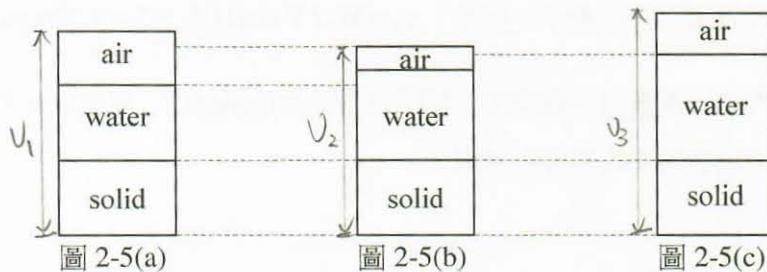
應變是一無因次比值, 可以同倍率調整分子、分母的值, 比值不變, 故常令 $V_s=1$, 孔隙體積 V_v 就變成孔隙比 e , 方便求應變, 也方便求孔隙比變化量。

表 2-2

體積比例					
名稱	定義	名稱	定義	名稱	定義
孔隙比 e	$e \equiv V_v / V_s$	孔隙率 n	$n \equiv V_v / V$	飽和度 S	$S \equiv V_w / V_v$
重量比例					
名稱	定義	名稱	定義		常用公式
含水量 w	$w \equiv W_w / W_s$	顆粒比重 G_s	$G_s \equiv \gamma_s / \gamma_w$		$Se \equiv wG_s$
各種單位重					
名稱	定義	名稱	定義	名稱	定義
溼土(統體)單位重 γ_m	$\gamma_m \equiv W / V$	乾土單位重 γ_d	$\gamma_d \equiv W_s / V$	飽和單位重 γ_{sat}	$\gamma_{sat} \equiv W / V$ ($S=100\%$)
顆粒單位重 γ_s	$\gamma_s \equiv W_s / V_s$	浸水單位重 γ'	$\gamma' \equiv \gamma_{sat} - \gamma_w$		

請不要用小時候玩泥巴的直覺來學習土壤力學。例如，部分考生認為對乾土加水，乾土單位重也不會改變，因為在算「乾土」的單位重嘛。他錯了。加水後，總體積 V 增加，水會排擠空氣體積，但也可能排擠土顆粒體積，造成孔隙比改變，乾土單位重可能增加或減少(故產生夯實曲線)，須按定義來算，不是按自己想像算，請注意乾土單位重的定義。

舉例，新建道路會對現場土壤灑水夯實滾壓，現場的乾土單位重就會改變，適量加水滾壓逼走空氣可提高乾土單位重，但是過量加水反而會減少乾土單位重。驗收時常要求相對夯實度達 95%以上，詳見《解說基礎工程》標準夯實試驗、現場密度試驗與相對夯實度。圖 2-5(a)顯示某工址夯實滾壓前的三相圖，加少許水夯實滾壓後，可能變成圖 2-5(b)，那麼乾單位重就會提高；另一種是加太多水變成圖 2-5(c)，那麼乾單位重就會降低，詳見《解說基礎工程》。



土壤孔隙比 e 會因夯實、震動等而改變，含水量 w 、飽和度 S 等等也會因外在環境改變(如烈日、下雨)而改變，不要以為工址或某處的土壤基本指數性質永遠不變，不要以為土壤像鋼筋一樣，鋼筋的性質不會因下雨、出太陽而變。

例 2-1.1 含水量試驗

一銅圈內徑 3 cm，高 5 cm，重 260 gw。當銅圈裝滿土壤時重 335.8 gw，將裝滿土之銅圈送至烘箱，烘乾 24 小時後，秤得銅圈加乾土重 321 gw，試問原銅圈內土樣的含水量為多少？溼土單位重？乾土單位重？

Sol

$$(1) \text{蒸散掉的水重 } W_w = 335.8 - 321 = 14.8 \text{ gw}$$

$$\text{乾土重 } W_s = 321 - 260 = 61 \text{ gw}$$

$$\text{含水量 } w = W_w / W_s = 14.8 / 61 = 24.26\%$$



$$335.8 - 260 = 15.8$$

$$321 - 260 = 61$$

$$15.8 - 61 = 14.8$$

$$w = \frac{14.8}{61} = 24.26\%$$

$$r_m = \frac{14.8}{3^2 \times \pi \times 5 \times \frac{1}{4}} = 2.145 \text{ gw/cm}^3 = 2.145 \text{ t/m}^3$$

$$(2) \text{銅圈內部體積 } V = \frac{\pi}{4} \times 3^2 \times 5 = 35.343 \text{ cm}^3$$

$$\text{溼土單位重 } \gamma_m = \frac{W}{V} = \frac{335.8 - 260}{35.343} = 2.145 \text{ gw/cm}^3$$

$$\text{恒等式 } \gamma_m = \gamma_d(1+w)$$

$$2.145 = \gamma_d (1 + 0.2426)$$

$$\text{解出 } \gamma_d = 1.726 \text{ gw/cm}^3$$

$$\gamma_m = \gamma_d(1+w)$$

討論

黏土經壓密沉陷後，飽和單位重會上升、孔隙比會減少，基本指數性質會改變，請不要以為基本指數性質永遠不變。 $1 \text{ gw/cm}^3 = 1 \text{ tf/m}^3$ 。

含水量的答案，習慣用百分比表示。另外， $\gamma_d = W_s / V = 61/35.343 = 1.726 \text{ gw/cm}^3$ 。

在考場宜把算半天的答案畫線明顯標出，幫閱卷老師就是幫自己，整他就是整自己。讓他找不到答案而給零分，是心態不成熟咎由自取。

例 2-1.2 基本練習

試證明恆等式：

$$(1) \gamma_m = \gamma_d (1 + w)$$

$$(2) \gamma_s = \gamma_d(1+e)$$

$$(3) S \rightarrow w G_s$$

$$(4) \gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w$$

$$(5) \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w$$



$$(1) \quad \gamma_d(1+w) = \frac{W_s}{V} \left(1 + \frac{W_w}{W_s}\right) = \frac{W_s}{V} \left(\frac{W_s + W_w}{W_s}\right) = \frac{W}{V} = \gamma_m$$

$$(2) \quad \gamma_d(1+e) = \frac{W_s}{V} \left(1 + \frac{V_v}{V_s}\right) = \frac{W_s}{V} \left(\frac{V_s + V_v}{V_s}\right) = \frac{W_s}{V_s} = \gamma_s$$

$$w G_s = \frac{W_w}{W_s} \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_w} = \frac{W_w}{W_s} \cdot \frac{W_s}{V_s} \cdot \frac{V_w}{W_w} = \frac{V_w}{V_s} \dots \dots \dots \quad ②$$

$$\therefore \textcircled{1} = \textcircled{2} \quad \therefore S_e = w G_s$$

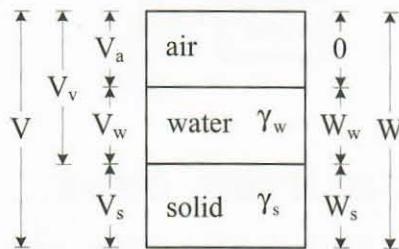
(4) 飽和土壤, $V_v = V_w$

$$\frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{\frac{\gamma_s + \frac{V_v}{V_s}}{\frac{V_w}{V_s + V_v}} \gamma_w}{\frac{V}{V_s}} = \frac{\frac{W_s + \frac{V_v W_w}{V_s V_w}}{\frac{V}{V_s}}}{\frac{W}{V_s}} = \frac{W}{V} = \gamma_{sat}$$

$$(5) \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{\frac{\gamma_s + \frac{V_w V_v}{V_v V_s}}{\frac{V_s + V_v}{V_s}} \gamma_w}{\frac{V}{V_s}} = \frac{\frac{W_s + \frac{V_w W_w}{V_s V_w}}{\frac{V}{V_s}}}{\frac{W}{V_s}} = \frac{W}{V} = \gamma_m$$

討論

1. 把各符號代換回三相圖的基本體積、基本重量來證，有很多符號會約分約掉。
2. 從資訊多的那一側(常是等號右側)開始證，打回原形(以定義代入)，會較容易。
3. 對於第(5)小題，若令 $S = 100\% = 1$ ，則得 γ_{sat} 的公式。
4. 單位重的名目繁多，你怎麼記？對於同一土壤， γ_s 、 γ_m 、 γ_d 三者以 γ_d 最小，所以 γ_d 須乘以比 1.0 大的係數，方會變成 γ_s 或 γ_m 。
5. 如何記 $\gamma_s = \gamma_d(1+e)$ ？由恆等式 $Se = wG_s$ 得暗示， S 與 e 同時出現。乾土單位重會因夯實而改變(見《解說基礎工程》第六章)，所以孔隙比 e 就跟著改變。
6. 如何記 $\gamma_m = \gamma_d(1+w)$ ？下標字母 m 與括弧裏 w 類似，只是旋轉 180 度。
7. 計算題求飽和度 S ，99% 機率就是用 $Se = wG_s$ 。
8. 筆者備考期的經驗是多默寫公式與親自動手算考古題以背住公式。



例 2-1.3 基本練習

一飽和黏土試體置於壓密盒中，其直徑為6.35公分、厚度為2.5公分，經壓縮後直徑不變，厚度變為1.9公分，若其初始孔隙比(initial void ratio)為1.30，且土壤顆粒比重為2.72，假設壓縮造成體積變化與孔隙比下降之原因，主要來自於孔隙水之流失，試計算下列各問題：

- (一)初始單位重(kN/m^3) (7分)。 (二)壓縮後孔隙比(6分)。
<96結構技師>
(三)壓縮後之單位重(kN/m^3) (6分)。 (四)壓縮後含水量之變化(6分)。



$$(一) Se = wG_s \Rightarrow 1 \times 1.3 = 2.72w \quad \text{解出 } w = 47.79\%$$

$$\because G_s = 2.72 \Rightarrow \gamma_s = 2.72 \text{tf/m}^3 = 2.72 \times 9.81 \text{kN/m}^3 = 26.6832 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_s = \gamma_d(1+e) \quad 26.6832 = \gamma_d(1+1.3) \quad \text{解出 } \gamma_d = 11.6 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_m = \gamma_d(1+w) \quad \gamma_m = 11.6(1+0.4779) = 17.15 \text{ kN/m}^3$$

$$(二) 鉛垂向應變 \varepsilon_v = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{2.5 - 1.9}{2.5} = 0.24$$

$$\text{鉛垂向應變 } \varepsilon_v = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{e_0 - e'}{1 + e_0} = \frac{1.3 - e'}{1 + 1.3} = 0.24$$

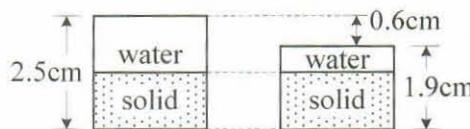
$$\text{解出壓縮後孔隙比 } e' = 0.748$$

$$(三) \gamma_s = \gamma_d(1+e) \quad 26.68 = \gamma_d(1+0.748) \quad \text{解出 } \gamma_d = 15.26 \text{ kN/m}^3$$

$$Se = wG_s \Rightarrow 1 \times 0.748 = 2.72w \quad \text{解出 } w = 27.5\%$$

$$\gamma_m = \gamma_d(1+w) \quad \gamma_m = 15.26(1+0.275) = 19.46 \text{ kN/m}^3$$

(四)壓密後含水量減少， $\Delta w = 27.5\% - 47.79\% = -20.29\%$



討論

考生常常漏掉「飽和」關鍵字，請「逐字審題、逐線審圖」。土壤受壓後變緊密，是孔隙比 e 降低，不是升高。使用公式前，建議在答案紙上先寫出公式，再套入數據，這樣能夠避免掉許多隱形錯誤。公式放腦袋，紙上直接寫數據，很容易犯低級錯誤。

飽和黏土試體壓密前， $\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.72 + 1.3}{1+1.3} \times 9.81 = 17.15 \text{ kN/m}^3$ 。壓密後仍為飽和，

$\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.72 + 0.748}{1+0.748} \times 9.81 = 19.46 \text{ kN/m}^3$ 。土壤壓密後，飽和單位重會增加。

本題土壤壓縮後，乾土單位重上升，請不要以為水份流失後，乾土單位重不會變。要按定義算，溼土可以算其乾單位重，飽和土壤也可以，不是按國小學生的直覺算。

某些考題會測驗考生是否具有大地工程常識，要考生自行假設合理參數。對 G_s 可以假設為 2.65 左右，對 e 可以設為 0.8 左右，是考場的安全做法。說到這裡，有一些教授出題給的參數太多，互為矛盾，他們有觀念，但題目卻算太少，忘記某些恆等式(eg: $Se=wG_s$)會制約參數之間的關係。

例 2-1.4 取土運輸問題

Wb on Nature

某一借土區之未擾動土樣之自然含水量為 15%， $e = 0.60$ ， $G_s = 2.70$ 。此一區之土壤擬用於某一公路路段之填方工程，該段填方量約為五萬立方公尺。土方之運送係以 5 立方公尺容量之卡車運載，其最大載重量為 6 公噸。依路堤填方規範中規定，需補充灑水使土方之含水量達 18%，攪拌均勻並予輾壓至乾土單位重為 1.76 tf/m^3 ，試問：

- (一)假設每一車次均滿載，需要多少車次才能運送完成？
- (二)挖土完成後留在原地之土坑體積多少(m^3)？
- (三)每車土方需加水多少立方公尺？(假設運送途中之水分散失可以忽略)
- (四)若此段公路在某次洪水之後其含水量達到飽和，且體積未膨脹，則此時之含水量多少？
- (五)如果因為土壤吸水而產生 15% 之體積膨脹，則此時含水量為多少？<82 年高考一級>



(1)填方區的填方量體積 $V = V_v + V_s = 50000 \text{ m}^3$ ①

填方區濕土單位重 $\gamma_m = \gamma_d(1+w) = 1.76(1+0.18) = 2.0768 \text{ tf/m}^3$

求填方區孔隙比 e

$$\gamma_s = \gamma_d(1+e) \Rightarrow 2.7 = 1.76(1+e)$$

$$\text{得 } e = 0.5341 = V_v / V_s \quad \dots \dots \dots \quad ②$$

聯立①、②，解出

$$V_v = 17407.4 \text{ m}^3$$

$$V_s = 32592.6 \text{ m}^3$$

假設運送途中，土顆粒體積 V_s 不損耗，則取土區(借土區)之 $V'_s = 32592.6 \text{ m}^3$

$$\text{借土區 } e = 0.6 = \frac{V'_v}{V'_s} = \frac{V'_v}{32592.6}$$

$$\text{解出 } V'_v = 19555.6 \text{ m}^3$$

$$\text{借土區 } V' = V'_v + V'_s = 52148.2 \text{ m}^3 \quad \dots \dots \dots \text{Ans.(二)}$$

$$(2) \text{借土區 } \gamma_s = \gamma_d (1+e) \Rightarrow 2.7 = \gamma_d (1 + 0.6)$$

$$\Rightarrow \gamma_d = 1.6875 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{借土區 } \gamma_m = \gamma_d (1+w) = 1.6875(1+0.15) = 1.940625 \text{ tf/m}^3$$

依題意，在借土區灑水

$$\text{含水量 } w \equiv \frac{W_w}{W_s} \quad \therefore W_w = w \times W_s = w \times (V_s \times \gamma_s)$$

$$\text{所需加水量 } \Delta W_w = (18\%-15\%) \times 32592.6 \times 2.7 = 2640 \text{ tf}$$

灑水後，借土區溼土單位重會改變，可能的最小單位重是 γ_{ml} (加的水不進入原先空氣裡)

$$\gamma_{ml} = \frac{W}{V_1} = \frac{1.940625(52148.2) + 2640}{52148.2 + \frac{2640}{1}} = \frac{103840.1}{54788.2} = 1.8953 \text{ tf/m}^3$$

灑水後，可能的最大單位重是 γ_{m2} ，水全進入原先空氣裡， $\gamma_{m2} = 103840.1 / 52148.2 = 1.991 \text{ tf/m}^3$

題目資訊不足，以下採用 γ_{ml} 繽算

$$\text{每台卡車只能載重 } 6 \text{ tf}，\text{相當於運載體積 } V_2 = \frac{6}{1.8953} = 3.1657 \text{ m}^3/\text{車}$$

故每台車無法載滿 5 m^3 (否則超過 6 公噸，卡車是重量滿載，非體積滿載)

$$\text{所需車次 } z = \frac{V_1}{3.1657} = \frac{54788.2}{3.1657} = 17307 \quad (\text{車次}) \dots \dots \dots \text{Ans.(一)}$$

$$(3) \text{每車加水量 } = \Delta W_w / z = 2640 / 17307 = 0.1525 \text{ tf}$$

$$\text{即每車加水體積 } 0.1525 \text{ m}^3 \dots \dots \dots \text{Ans.(三)}$$

$$(4) \text{參考圖 a，填方區 } \gamma_m = \frac{W}{V} \Rightarrow 2.0768 = \frac{x + 2.7}{1 + 0.5341}$$

$$\text{解出 } x = 0.486$$

所以圖 a 中的水體積 y

$$y = \frac{x}{\gamma_w} = \frac{0.486}{1} = 0.486$$

公路因洪水土壤體積飽和，但體積未膨脹，即指圖 a 之空氣體積被水佔據， $S = 100\%$ ，

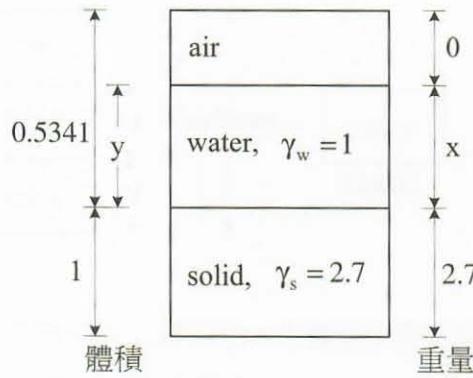


圖 a 填方區，體積未膨脹， $S=100\%$

$$(5) \text{圖 a 的總體積 } \bar{V} = 1 + 0.5341 = 1.5341$$

題意說總體積產生 15% 膨脹， $\bar{V} \times 15\% = 0.23$

參考圖 b

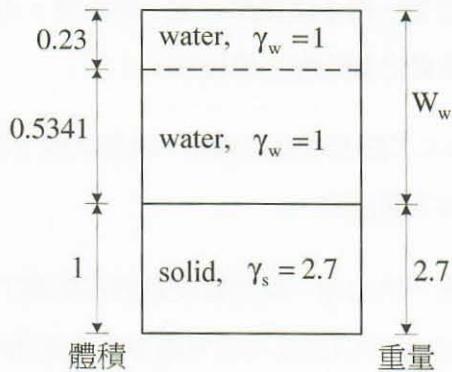
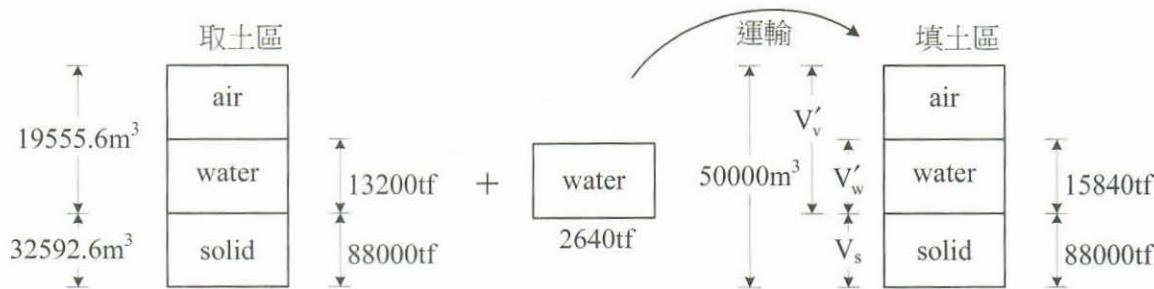


圖 b 填方區，體積有膨脹， $S=100\%$

討論

1. 由第(四)小題可知此土壤縮性限度 $SL = 19.78$ 。縮性限度見第三章。

2. 解此種題型，掌握的要點在於「借土區與填方區的土顆粒重量 W_s 是相同的」。車次計算，不可用填方區體積為分子，應以借土區體積為分子，因為卡車係從借土區運土出來。另外，車次應進位成整數。又，土壤從借土區挖出時，會膨脹變成鬆方，而車斗體積固定，所以需要的車次將會更多。



3. 實務上，灑水是在填方區灑水，不是在借土區灑水，所以題目說由卡車運輸已加水之土方，純粹只是學術上的練習計算，並非實務現象。實務上，填方區為了達到相對夯實度的規定，多半需灑水以提高乾土單位重。有考生認為本題是在填方區加水，然後計算每一卡車之加水量，這不對，卡車離開取土區，不是體積滿載就是重量滿載，怎麼能夠再承擔「未來」在填方區的灑水量？
4. 注意本題有三個溼土單位重，借土區原來的溼土單位重、借土區灑水後溼土單位重以及填土區輾壓排除部分空氣之後的溼土單位重。
5. 在第(四)小題中，乃公路含水量因雨達到飽和，故應以填方區(工址)之土壤物理性質計算，而非以借土區的物理性質計算。
6. 取土區就是借土區，是土方的來源；填方區就是道路新建工址，是填土土方流向的終點。一般進行道路新建工程時(例如欲在苗栗縣境內新建道路)，工址原地的土壤可能含有雜草、垃圾、級配或強度不符需求，而須將表土降挖、刮掉 60 cm ~ 80 cm(視現場及工程需求而定)，這些土壤是不要的，會送去土資場。標到工程的營造廠，須另覓借土區(例如在新竹縣)，借土區有級配較優良的土壤，將借土區的土壤一車車運輸至工地(苗栗縣)，填滿先前降挖掉的空間。考慮經濟及效率的因素，借土區與填土區儘量不要太遠，以免因運距增加而造成成本增加。

7. 計算所需增加的水量，用含水量公式會比用飽和度公式還快，且容易對。因為含水量

$$w \equiv \frac{W_w}{W_s} \text{, 再因取土區與填土區的 } W_s \text{ 均相同，即分母相同，所以水的增減量}$$

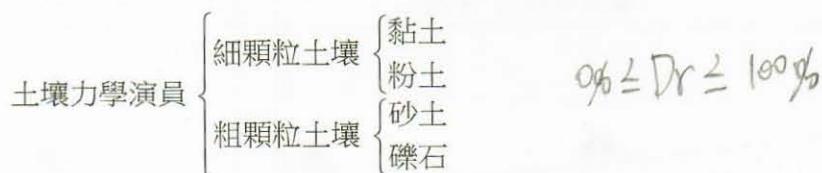
$$\Delta W_w = (\Delta w) W_s = (w_{\text{填土區}} - w_{\text{取土區}}) W_s = \text{含水量的變化} \times \text{土顆粒重，此公式較快。}$$

8. 對於第(一)到第(四)小題，因為取土區與填土區 W_s 相同，再因 γ_s 不變，所以取土區與填土區 V_s 相同。總結是：三相圖填土區的 solid 圖形，照抄取土區的 solid 圖形。

9. 第(四)和第(五)小題，也可以用 $Se = wG_s$ 來求 w 。

§2-2 砂土結構與相對密度 D_r

在這節開始之前，先請大家建立一幅圖像：從考試的觀點，土壤力學這齣戲有 4 名主要演員，分別是黏土(Clay)、粉土(Silt)、砂土(Sand)、礫石(Gravel)。砂土和礫石被歸類為粗顆粒土壤，卵石(Cobble)則是比礫石更大的單顆粒。黏土和粉土被歸類為細顆粒土壤，下節介紹。



砂土和礫石常常是顆粒狀(其他例：彈珠、米粒、食鹽等)，顆粒間的孔隙明顯，孔隙愈多，密度愈小。粗顆粒土壤常常用相對密度(Relative Density, D_r)代表現場顆粒緊密程度，細顆粒土壤不使用相對密度評估緊密程度，粗細相間的土壤多用相對夯實度(R.C.)表示緊密程度。

請讀者想像砂岸，例如福隆、沙崙、高美溼地、旗津或南灣。砂土主要為顆粒狀，海邊疏鬆的砂土，其結構稱為蜂巢結構(Honeycomb Structure, Bulk Structure)，孔隙多，易透水。不只砂土，無凝聚性的粉土，也可能形成蜂巢結構。蜂巢結構乃顆粒與顆粒之間，以類似架橋的方式互搭形成結構以承載重量，其間孔隙相當多。蜂巢結構易受震動、地下水位升降或水流衝擊而崩潰，不可視為穩定的強度來源。

沙灘長年完全浸水的區域，飽和度可視為 $S=100\%$ ，一直受水流沖刷的土壤結構並不穩定，承載力也不佳。其次，稍離開海浪反覆拍打的區域，飽和度降到略低於 100% ，此區域存在毛細水，毛細水提供負的水壓力，使有效應力上升，提高抗剪強度，此稱外視凝聚力(Apparent Cohesion)，所以人們可以在沙灘的毛細水區域騎單車、跑步也相對省力。更遠離毛細水區域，砂的飽和度降到接近 0% ，騎單車、行走、跑步均顯得特別吃力。外視凝聚力不是物理上真正的凝聚力，且毛細現象易受震動、水位升降而中斷，即喪失外視凝聚力。

將乾毛巾一端垂入水中，水分沿毛巾上升的現象就是毛細現象，成因在於水和毛絮之間的吸附力大於水的表面張力，這種不同物質分子間的吸引力成為附著力(Adhesion)，土力稱其為假凝聚力。而相同物質分子間的吸引力叫做內聚力、凝聚力(Cohesion)。題外話：你還記得小學學過的「虹吸現象」與「連通管原理」嗎？



圖 2-6 蜂巢結構

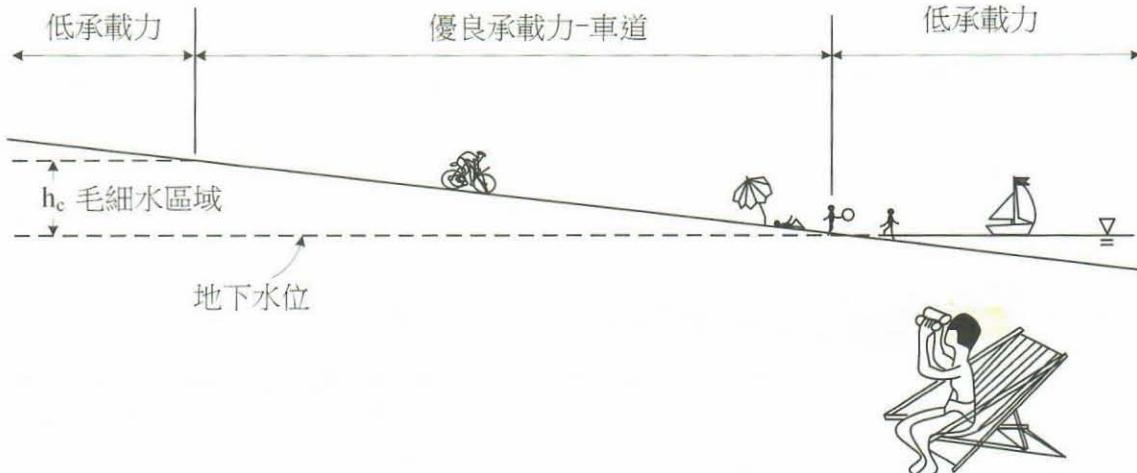


圖 2-7 毛細水區域

所謂的砂雕，必須常常噴水霧保持其假凝聚力，不然它風乾很快就崩潰。

疏鬆的砂土容易被夯實(Compaction)，夯實是排除空氣使土壤變緊密的過程，可用打擊、震動或滾壓等任何手段達成，夯實後土體沉陷，砂土變得較緊密。你敲奶粉罐周緣，奶粉變得

較密實的過程也是夯實。

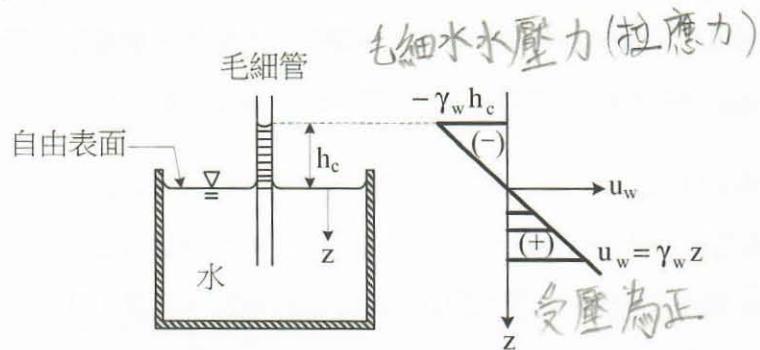


圖 2-8 毛細管現象與其水壓力

疏鬆狀態的礫石、砂、粉土，排列狀況類似圖 2-9，孔隙比高。緊密狀態的排列則如圖 2-10，孔隙比低，像水果行小販堆疊橘子的方式。如果土壤裡各種大小顆粒都有，粒徑分布廣泛，則大顆粒間被中顆粒填充，中顆粒間被小顆粒填充，比較容易形成圖 2-10 的密緻狀況，剪力強度會較高，壓縮性會較低。



圖 2-9 疏鬆狀態



圖 2-10 緊密狀態(像當兵，插縫隙站)

對於粗顆粒狀土壤(e.g.: 砂土)，我們以相對密度評估緊密程度。 D_r 還可以協助研判粒狀土壤的內摩擦角 ϕ 、評估砂土液化潛能(見《解說基礎工程》第七章)。

$$D_r \equiv \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} \quad e = \frac{V_U}{V_S} \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{Void} \\ \text{Solid} \end{array}} \quad [2.10]$$

e 是粒狀土壤目前孔隙比，你可以寫 e_{now} 。 e_{\max} 是同一種粒狀土壤最疏鬆時的孔隙比， e_{\min} 是同一種粒狀土壤最緊密時的孔隙比。注意分子不是 $e - e_{\min}$ 。計算 D_r 須注意地域性問題，例如想計算沙崙海邊砂土的 D_r ，則 e_{\max} 、 e_{\min} 、 e 之求取均須採用沙崙海邊的砂土為之，不可以拿別處的砂土。工址的孔隙比 e ，可能每周不一樣，故 D_r 是時間的函數。

e_{\max} 、 e_{\min} 如何得到？試驗室有標準做法，但非考試目標，故此處僅大約講。求 e_{\max} 乃取乾砂，注意不要震動緩慢倒入固定體積的刻度模中，測量倒入的重量，重量除以體積得 $\gamma_{d,\min}$ ，

有了 $\gamma_{d,\min}$ 就可以反算 e_{\max} 。求 e_{\min} 乃取乾砂，以震動方式倒入固定體積的刻度模中，震動頻率與時間有標準規定，震動使得顆粒緊密，測量倒入的重量，重量除以體積得 $\gamma_{d,\max}$ ，有了 $\gamma_{d,\max}$ 就可以反算 e_{\min} 。不同國家的試驗程序，得到 e_{\max} 、 e_{\min} 可能不同。

不同地點砂土(eg：淡水、旗津)，彼此 e_{\max} 不一樣， e_{\min} 也不一樣。顆粒大小、形狀、細粒料含量、粒徑分布曲線均能影響 e_{\max} 、 e_{\min} 。部分考生讀到最後，以為 e_{\max} 是指最緊密狀態，因為看到 max 嘛！完全錯，e 是孔隙比，max 是孔隙最多之意，反而是最疏鬆狀態。歐陽有言「運動為頭腦清醒之本」。 e_{now} 怎麼得到？就是從 $e_{\text{now}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1$ 得到。現場工址的砂土，現場震動前後相對密度不一樣。經過震動後，孔隙比 e_{now} 會下降，震動後的 D_r 會較大。請不要以為 D_r 永遠不變。強調第 N 次，外在環境的改變，會改變工址土壤的基本指數性質，包含 D_r 。

D_r 的值介於 0%~100%，數值愈大愈緊密，至少要記表 2-4 三分法。現地自然狀態的顆粒性土壤，其 D_r 少有小於 20% 者，若欲夯實滾壓到 85% 以上，卻也要大費功夫。

表 2-3 五分法，粗顆粒土壤稠性(consistency)分類

X不用背

D_r 範圍	0%~15%	15%~35%	35%~65%	65%~85%	85%~100%
描述	非常疏鬆 very loose	疏鬆 loose	中等緊密 medium	緊密 dense	非常緊密 very dense
SPT-(N ₁) ₆₀	<4	4~10	10~17	17~32	>32

SPT-(N₁)₆₀ 可等到基礎工程再研讀。(《解說基礎工程》第三章)

表 2-4 三分法

D_r 範圍	0~1/3	1/3~2/3	2/3~1.0
描述	疏鬆	中等緊密	緊密

對於粗顆粒狀的土壤和粉土，其單一顆粒的質量相對比黏土大，比表面積比黏土小，粗顆粒狀的土壤和粉土主要受重力影響，不是受電荷力影響。下一節詳細介紹比表面積。

例 2-2.1 基本練習

$$\text{試證明 } D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{\gamma_{d,\max} (\gamma_d - \gamma_{d,\min})}{\gamma_d (\gamma_{d,\max} - \gamma_{d,\min})}$$



對於同一土壤固體顆粒， γ_s = 常數 = $\gamma_d (1 + e) = \gamma_{d,\max} (1 + e_{\min}) = \gamma_{d,\min} (1 + e_{\max})$

$$\text{故 } e_{\max} = \frac{\gamma_s}{\gamma_{d,\min}} - 1, e_{\min} = \frac{\gamma_s}{\gamma_{d,\max}} - 1, e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1$$

$$\text{將以上三式代入 } D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}},$$

$$\text{整理即得 } D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{\gamma_{d,\max} (\gamma_d - \gamma_{d,\min})}{\gamma_d (\gamma_{d,\max} - \gamma_{d,\min})}$$

Q.E.D.(證明完畢)

討論

1. 記 $D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}$ 就好，另一式考試遇到再導。
2. 砂土抗剪強度受顆粒形狀、尺寸、相對密度值的影響較大，較少受含水量影響。(此處暫時排除地震液化情形)
3. 砂土的形狀多為角狀、稜狀或圓狀，可以憑肉眼判斷，當然還有粗砂、細砂之分。砂土、粉土兩者不易分辨，以手掌搓揉較有粗糙感的是砂土。粉土則像極細粉筆灰。
4. 新建道路夯實滾壓後，實務上多半是以相對夯實度(R.C.)檢驗夯實成效，少用相對密度檢驗夯實成效。因為作為路基的級配料，其實內含眾多細粒料成分，這就不適合用相對密度了。相對夯實度請見《解說基礎工程》第六章。
5. 一般而言，砂土顆粒裏最常見的礦物是石英(quartz)，其比重 2.65。
6. 「體**重**」這名詞是有含意的，數字大代表**重**，例如張三 70 kgf，李四 60 kgf，就是張三比較**重**。「身**高**」這名詞是有含意的，數字大代表**高**，例如王五 170 cm，趙六 180 cm，就是趙六比較**高**。道不遠人，「**孔隙比**」這名詞是有含意的，數字大代表**孔隙多**，例

如土壤甲 $e=0.8$ ，土壤乙 $e=1.2$ ，就是土壤乙孔隙比較多。

7. 毛細現象不是砂土的專利，粉土、黏土也有。
8. 鋼筋的品質較穩定，幾乎不依時而改變。混凝土的品質略遜於鋼筋，長期後有潛變問題，造成彈性係數下降，長期後壓力筋會分配到較多應力。土壤則更不爭氣，不用等長期，明天下個雨，很多性質(孔隙比、相對密度、含水量、飽和度、滲透性、抗剪強度等等)就跟今天不一樣了。你要學好土壤力學，須建立許多全新觀念，很多是你從未想像過的，想用鋼筋的那一套來學，保證學得跌跌撞撞。

§2-3 黏土內的黏土礦物與結構

《天龍八部》第一冊有云「大理國三公司徒華赫艮、司馬范驛、司空巴天石，率領身有武功的三十名下屬，…進入萬劫谷後森林，擇定地形，挖掘地道。…掘到申牌時分，算來已到段譽被囚的石室之下，…華赫艮放下鐵鏟，便以十根手指抓土，「虎抓功」使將出來，…將泥土一大塊一大塊抓下來。…此時華赫艮已非向前挖掘，轉為自下而上。工程將畢，能否救出段譽，轉眼便見分曉，三人都不由得心跳加速。」

依文字所言，華赫艮應當在黏土之類的地層挖掘隧道，因為他往上挖時，土壤並不自行掉落，而須靠「虎抓功」抓下。若土壤是無凝聚力的砂土，天盤容易崩落，何需「虎抓功」？

黏土內部因為有「黏土礦物」(Clay Mineral)，導致有凝聚力，可立於小隧道之天盤。黏土礦物有很多種，如伊利土(Illite)、高嶺土(Kaolinite)、蒙脫土(Montmorillonite)、和樂土(Halloysite)、膨潤土(Smectite)、葉臘土(Pyrophyllite)、綠泥土(Chlorite)等。左列所提的「土」，不是一般的土，乃專指「黏土礦物」^{註2}。台灣的黏土礦產量不多，品質屬中低，主要的分布地點為台北大屯火山區、新竹到苗栗一帶及金門等地。黏土是製陶瓷的原料，讀者可拜訪新北市鶯歌區的「陶瓷博物館」或鶯歌老街一識黏土真貌，或觀賞《第六感生死戀》，欣賞派屈克·韋恩-史威茲和黛咪-摩爾如何美美地研究黏土含水量。

註 2：對於黏土礦物，地質系與地球科學系習慣以「石」稱之，如伊利石、高嶺石、蒙脫石。

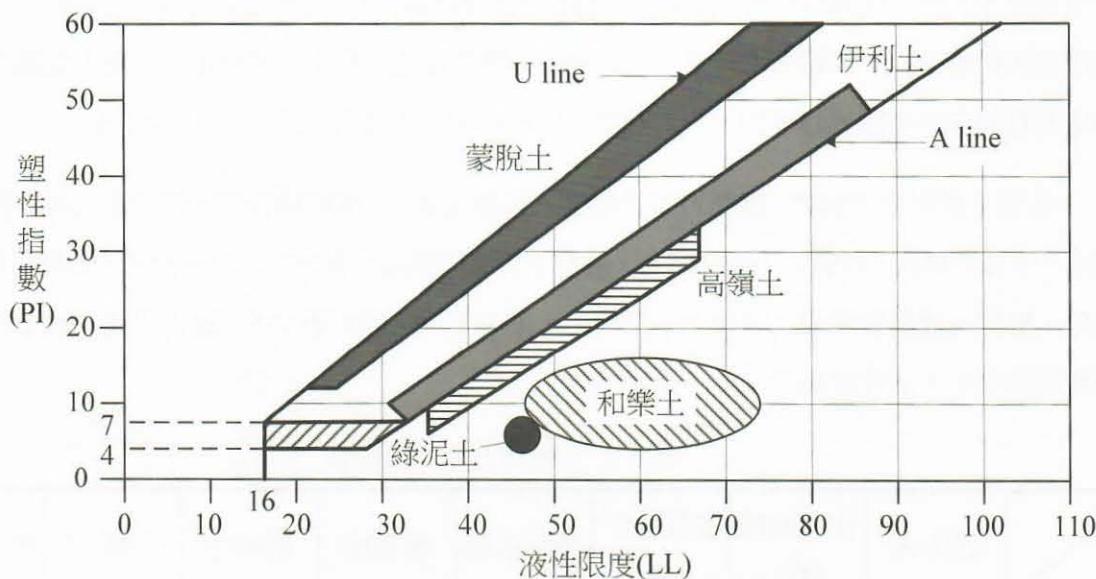


圖 2-11 黏土礦物在塑性圖上的位置

黏土顆粒極小，肉眼無法辨認，就像生活中的水泥顆粒、麵粉、太白粉等。黏土礦物的粒徑遠小於 0.002 mm，故工程上並不討論其粒徑。常見的黏土礦物有三種：高嶺土、伊利土和蒙脫土，它們均是以鋁和矽組成的化合物，自然界黏土礦物很少單獨存在。以台東縣長濱鄉樟原地區黏土為例，該區的礦物組成以蒙脫土為主，佔 35%以上。

比表面積(Specific Surface, S_s)是指「單位質量所擁有的表面積」(eg : cm^2/kg)或指「單位體積所擁有的表面積」(eg : cm^2/cm^3)，以前者較常用。高嶺土的比表面積約為 $15 \text{ m}^2/\text{g}$ ，伊利土的比表面積約為 $80 \text{ m}^2/\text{g}$ ，蒙脫土的比表面積約為 $800 \text{ m}^2/\text{g}$ 。¹比表面積越大，表面所帶有的負電荷越多，越容易吸引水分子。乾淨砂的比表面積約為 $2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{g}$ 。本書刪掉黏土礦物的化學鍵結內容，因相對少考，意者請參考《土壤力學了沒》。

高嶺土的運用範圍極廣，如做為陶瓷(景德鎮)、橡膠、塑料、面膜、人造革、造紙、高壓電的絕緣礙子、耐火材料、化學工業以及農業等等的原料。

伊利土可作為生產高壓電瓷、日用瓷的原料，在化工工業上用作造紙、橡膠、油漆的填料，還可作為水泥配料與高級化妝品。

蒙脫土具有良好的分散性，可作為增稠劑、皂土、化妝品的原料。蒙脫土比高嶺土、伊利

土更易吸水，吸水後體積膨脹，可能頂壞路基或建築物基礎，乾燥後又沉陷，可能造成路面下陷或建築物傾斜，其體積不穩定，而高嶺土的體積變化性最小，最穩定。工程上應選擇體積穩定的材料作為道路或建築物下方的基礎。貓砂有蒙脫土成分在內，你知為何嗎？

高嶺土與頁岩間，鍵結力大且穩定，水難以進入，故體積穩定。伊利土與頁岩鍵結力稍小，水分可移動，但體積不明顯變化。蒙脫土與頁岩鍵結力最弱，水分一進入，體積就膨脹；水分一離開，體積就收縮。高嶺土、伊利土、蒙脫土，比較如表 2-5，遇到「萌」脫土猶如遇到較萌的女生，活性就高了。

表 2-5 三種黏土礦物比較表
飽和
無壓
膨脹

	活性 A_c	比表面積 m^2/g	粒徑 $\times 10^{-3}$ mm	吸附水層	滲透性	壓縮性	回脹性	剪力強度
高嶺土	0.3~0.5	15	0.05~2	小	大	小	小	大
伊利土	0.5~1.3	80	0.01~1	中	中	中	中	中
蒙脫土	1.3~7.2	800	0.02~0.2	大	小	大	大	小

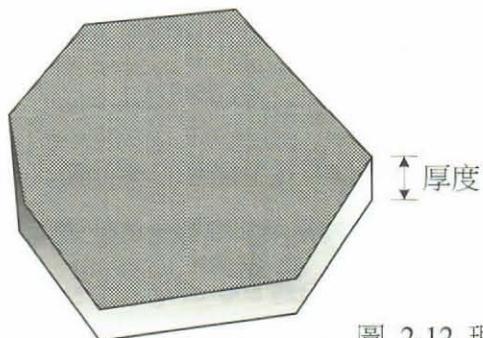


圖 2-12 理想化的黏土顆粒

黏土顆粒小，所以比表面積非常大。正因為面積相對大，所以能在面積上產生重大影響的力量(eg：電力)，就會嚴重影響黏土的力學行為，黏土顆粒質量輕，比較不受重力影響^{註 3}。相對之下，砂土礫石比較受重力影響。因為黏土表面帶負電荷，會吸引水分子聚集，水分子的多

註 3：動物的體型，有小如螞蟻者，也有大如驃馬、人類者。馬和人類的世界，因自身重量大，受重力影響相對顯著，馬和人從三樓摔下來，非死即傷，但螞蟻毫無影響。螞蟻的世界反而受表面張力影響很大，牠可以靠表面張力過河，人類甭想。

寡，就嚴重影響黏土的力學行為，所以含水量對黏土而言，幾乎是最重要的工程指標參數。

大部分黏土是片狀，可想像成小學生的墊板，如圖 2-12，尺寸約略在 $2 \mu\text{m}$ 以下，少數是針狀、棒狀或管狀。黏土表面帶負電荷，易吸引水分子，如圖 2-13，其邊緣或角隅帶正電荷。負電荷會吸引水分子的氫原子，在引力範圍內的水有兩種，內層稱為吸附水(Adsorbed Water)，非常不容易被移動；外層稱為電雙層水(Double-layer Water)，必須以烘乾方式去除，內外兩層合稱電雙層，電雙層內的水無法以重力方式排除。擴散電雙層外緣就是吸引力的極限邊界。引力範圍外的水稱為自由水(Free Water)，是容易移動的水，或稱常態孔隙水(Normal Pore Water)。電雙層越厚，越排擠水分可以自由移動的空間，越不易透水，滲透係數越小。

非常靠近黏土表面的水分子，極難被移去，擴散電雙層(Diffuse Double Layer)示意圖如圖 2-14。圖 2-14 顯示厚度 10 \AA 的蒙脫土礦物，其單側擴散電雙層厚度竟然可達 210 \AA ，可見吸附水層之厚，這些水是無法自由移動的水。黏土的塑性主要來自於擴散電雙層的水。

不是考試重點

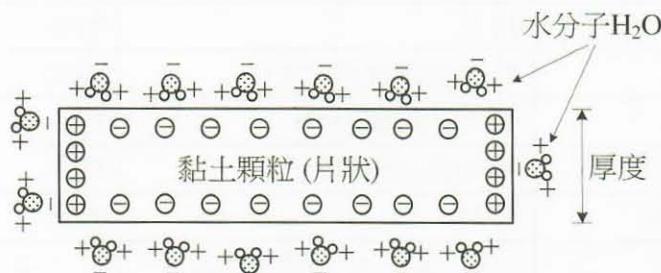


圖 2-13 黏土顆粒吸附水分子

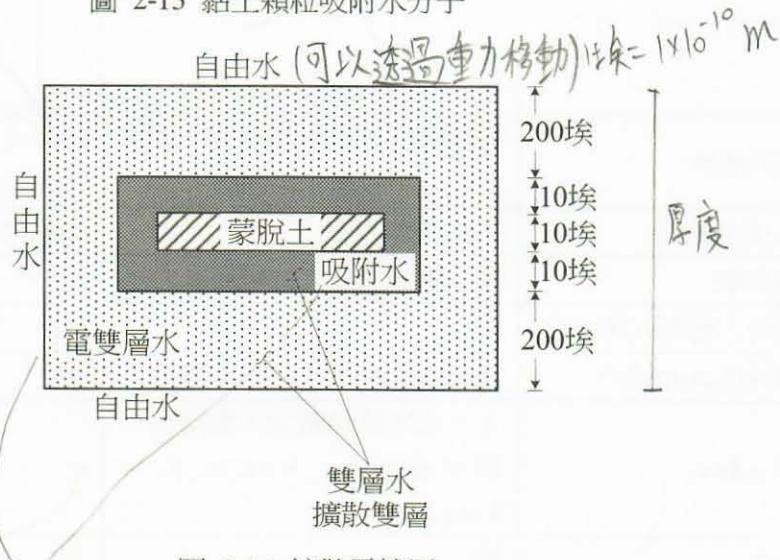
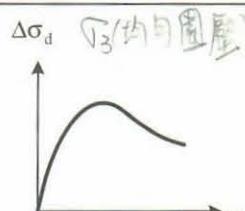


圖 2-14 擴散電雙層

黏土結構有兩種，定向排列的分散結構(Disperse Structure)與排列雜亂無章的膠凝結構(Flocculent Structure)，如圖 2-15 與 2-16。在極稀釋的溶液中，考慮最初黏土分散時，因為顆粒之間的斥力大於吸引力之故，易形成分散結構，如圖 2-15。長期後，因隨機的布朗運動而使部分黏土可以「面—角隅」接觸，正負電相吸，形成無鹽型膠凝結構(nonsalt flocculation)。

當鹽分加入已經分散的黏土水懸浮液，鹽分會減少顆粒內部排斥作用，形成鹽型膠凝結構(salt flocculation)，鹽型膠凝結構乃是「我泥中有你，你泥中有我」，同時兼具分散結構與無鹽型膠凝結構的特徵。在海水的環境中沉積，易形成鹽型膠凝結構，因為海水扮演電解液的角色，可使斥力減緩。淡水的環境中沉積(eg：陸地湖泊)，容易形成分散結構與無鹽型膠凝結構。

表 2-6 兩種黏土結構比較表

項目	膠凝結構	分散結構
沉澱環境	鹽水湖泊	淡水湖泊
滲透性	較大，孔隙結構發達	較小
孔隙比	較大	較小
低壓時壓縮性	較小(因彈性係數大)	較大
高壓時壓縮性	較大(因結構崩潰)	較小
剪力強度	較大(因正負相吸)	較小
浸水後強度損失	較大	較小
軸差應力-應變曲線 $(\Delta\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3)$	 <p>△σ_d (均圍壓) ε_{axial}</p>	 <p>△σ_d (軸力), ε (應變)</p>
吸水回脹性	若原先在夯實曲線乾側，因原先較乾，故吸水易回脹	若原先在夯實曲線濕側，因原先較濕，吸水回脹性較少
吸水後再乾縮	乾縮量小	乾縮量大
彈性係數	大，膠凝結構之抗變形能力佳	小
破壞時之超額孔隙水壓	較小	較大，因含水量高
敏感性(Sensitivity)	大，重模後會失去較多強度	小
壓密係數 c _v	大，因滲透係數大，易排水， 壓密速率快， $k = c_v m_v \gamma_w$ ， $k \propto c_v$ 。	小
自癒性	無	有

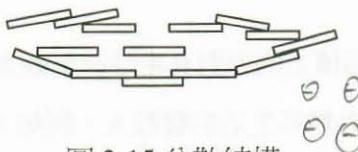


圖 2-15 分散結構



圖 2-16 無鹽型膠凝結構(類似梁柱結構) 鹽型膠凝結構(海水環境)

膠凝結構係黏土顆粒互相以「面一邊」、「面一角隅」的方式，正負電相吸引結合而成，讀者可以把它想成「樑一柱結構」，樑柱間孔隙大，相對於分散結構易透水；低壓時，樑一柱結構可抵擋外力，變形小，壓縮量小；高壓時，樑一柱結構崩潰，變形大，壓縮量大。由於膠凝結構是以正負電相吸結合，故抗剪強度優於以斥力平行排列的分散結構。

分散結構係黏土顆粒間，因為面與面的負電相斥，形成「面一面」(面對面)幾乎平行排列的方式。

「重模」(Remold)，意指徹底改變土壤結構，但是不改變土壤含水量及孔隙比的動作。

例 2-3.1 比表面積

有一體積為 $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ 的豆腐，請計算其比表面積。

若將此豆腐切成 $5\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ 的豆腐，請計算此時單一小塊的比表面積。

再將此豆腐切成 $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ 的豆腐，請計算此時單一小塊的比表面積。



$$(1) \text{ 比表面積} = (6 \times 10 \times 10) / 1000 = 0.6 \quad (\text{cm}^2/\text{cm}^3)$$

$$(2) \text{ 比表面積} = (6 \times 5 \times 5) / 5^3 = 1.2 \quad (\text{cm}^2/\text{cm}^3)$$

$$(3) \text{ 比表面積} = (6 \times 1 \times 1) / 1^3 = 6 \quad (\text{cm}^2/\text{cm}^3)$$

討論

體積越小的生物，表面張力這類面積上的力對其生活影響較大，例如水蠶、蜻蜓、螞蟻等。體積越大的生物，重力這類體積上的力對其生活影響較大，例如人、馬、大象等。黏土顆粒比砂土、礫石小很多，黏土嚴重受面積上的力影響，如各種電化力、氫鍵、凡得瓦爾力等等。

不同土壤含不同百分比的黏土礦物，對水的反應亦大不相同，所以土壤的工程性質亦將大不相同。如何表現水對凝聚性土壤的影響(i.e.,阿太堡指數、限度)，未來對土壤分類是重要的一環，我們下一章就開講。

岩石裏的不連續面經常充斥著黏土礦物而形成弱面(Weak Plane)。

§2-4 歷年考題精選

練 1 考三相圖

有一土樣，已知土壤比重(G_s)為2.7，濕土單位重(γ_m)為 20 kN/m^3 ，含水量為 10%，試求其乾土單位重(γ_d)、孔隙比(e)、飽和度(S)及如果要讓該土壤的飽和度達到90%，每 m^3 所須加入的水重。

<100年土木技師20分>



$$(1) \gamma_m = \gamma_d(1 + w) \Rightarrow 20 = \gamma_d(1 + 0.1)$$

解出 $\underline{\underline{\gamma_d = 18.1818 \text{ kN/m}^3}}$

$$\gamma_s = \gamma_d(1 + e) \Rightarrow 2.7 \times 9.81 = 18.1818(1+e)$$

解出 $\underline{e = 0.4568}$

$$(\text{或用 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{G_s + wG_s}{1+e} \gamma_w, \text{ 亦可解出 } e)$$

$$Se = wG_s \Rightarrow S \times 0.4568 = 0.1 \times 2.7$$

解出 $\underline{S = 59.11\%}$

(2) 考慮總體積 $V=1 \text{ m}^3$ 的三相圖，如圖

$$\therefore e = \frac{V_v}{V_s}$$

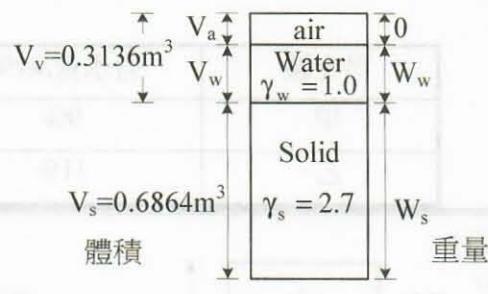
$$\therefore V_v = eV_s$$

$$\text{又 } V_v + V_s = 1$$

$$\therefore eV_s + V_s = 1$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{1}{1+e} = \frac{1}{1.4568} = 0.6864 \text{ m}^3$$

$$V_v = 1 - V_s = 1 - 0.6864 = 0.3136 \text{ m}^3$$



體積

飽和度要從 59.11% 增到 90%，在圖中須增加水體積

$$\Delta V = V_v(90\% - 59.11\%) = 0.3136 \times 0.3089 = 0.09687 \text{ m}^3$$

此相當於 96.87 kgf 的水，即每 m^3 應增加水量 96.87 kgf

討論

$$\text{速解: } \bar{\gamma}_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{2.7 + 0.9 \times 0.4568}{1 + 0.4568} \times 9.81 = 20.95 \text{ kN/m}^3$$

\therefore 要加水 0.95 kN/m^3 即 950 N/m^3

$$\frac{950}{9.81} = 96.83 \text{ kgf} \quad \text{即質量 } 96.83 \text{ kg 的水}$$

最後一小題必須視為「飽和度從 59.11% 升到 90%，孔隙比不變」，方能得唯一解，這是不得已的。

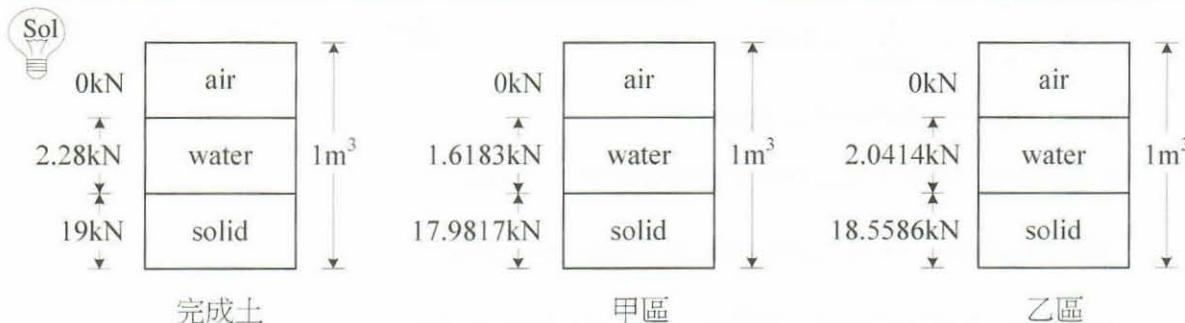
練 2 借土運輸問題

高速公路某路段的路堤填方工程需從甲借土區和乙借土區進行借土，借土區土壤基本性質如附表所示。為考慮整體路段夯實土壤強度與變形的一致性，施工規範要求甲、乙土壤先以 4:1 之體積比混合後再進行滾壓，且經滾壓後土壤之含水量 $w=12\%$ ，乾土單位重 $\gamma_d=19 \text{ kN/m}^3$ 。試問 1 m^3 之夯實土需甲、乙兩借土區土壤各多少體積與重量？ 1 m^3 之夯實土需加多少水？

<修改97結構技師25分>

附表

借土區	含水量, w(%)	單位重, $\gamma_l(\text{kN/m}^3)$	比重, G_s
甲	9%	19.6	2.65
乙	11%	20.6	2.7



(1) 完成土 1 m^3 包含 W_s 重量為 $= 19 \text{ kN}$

(因為 $\gamma_d = 19 \text{ kN/m}^3$)

$$W_w = 0.12W_s = 0.12 \times 19 = 2.28 \text{ kN}$$

(2) 取土，設來自乙區 $x \text{ m}^3$ ，來自甲區 $4x \text{ m}^3$

根據土顆粒質量守恆， $18.5586x + 17.9817(4x) = 19$

解出 $x = 0.21 \text{ m}^3$ (乙區)， $4x = 0.84 \text{ m}^3$ (甲區)

(3) 乙區提供重量 = $0.21 \times 20.6 = 4.326 \text{ kN}$

甲區提供重量 = $0.84 \times 19.6 = 16.464 \text{ kN}$

乙區提供水 = $2.0414 \times 0.21 = 0.4287 \text{ kN}$

甲區提供水 = $1.6183 \times 0.84 = 1.3594 \text{ kN}$

額外加水 = $2.28 - 0.4287 - 1.3594 = 0.492 \text{ kN}$

討論

1. 考選部原版題目要求滾壓後土壤要達到 $w = 12\%$ 以及乾土單位重 $\gamma_d = 20 \text{ kN/m}^3$ ，實際上此兩數據是矛盾的，一個成立另一個就不成立，故筆者才改題目，考生可以試算看看。
2. 一般工程夯實後 $\gamma_d \approx 18 \text{ kN/m}^3$ ，原題目提供 20 kN/m^3 數據太大，故本書逕修正為 19 kN/m^3 。
3. 混合土的顆粒比重 $G_s = 2.65 \times 0.8 + 2.7 \times 0.2 = 2.66$ 。
4. 滾壓後飽和度 $S = 0.2325 / (0.0393 + 0.2325) = 85.54\%$ ，尚屬一般工程常見值。

練 3 土壤單位重等參數

某自然土樣，質量 M 為 2230 克(gm)，體積 V 為 1200 立方公分(cm^3)，土樣烘乾後之質量 M_s 為 2040 gm。土壤固體土粒之比重 G_s 為 2.70。((一)至(六)每小題 3.5 分，第(七)小題 4 分)
求(一) 統體密度(BULK DENSITY) ρ
(二) 單位重(UNIT WEIGHT) γ

(三) 含水比(WATER CONTENT) w (四) 空隙比(VOID RATIO) e (五) 孔隙率(POROSITY) n (六) 飽和度(SATURATION) S_r (七) 空氣含量(AIR CONTENT) A

<88 薦任升等考 25%>



因為 $G_s = 2.7 \quad \Rightarrow \gamma_s = 2.7 \text{ tf/m}^3 = 2.7 \text{ gw/cm}^3$

$$(一) \rho = \frac{M}{V} = \frac{2230}{1200} = \underline{\underline{1.8583 \text{ gm/cm}^3}}$$

$$(二) \gamma = \rho g = 1.8583 \text{ gw/cm}^3 = \underline{\underline{1.8583 \text{ tf/m}^3}}$$

$$(三) w = \frac{W_w}{W_s} = \frac{2230 - 2040}{2040} = \frac{190}{2040} = \underline{\underline{9.3137\%}}$$

$$(四) \gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{2040}{1200} = 1.7 \text{ gw/cm}^3 = 1.7 \text{ tf/m}^3$$

$$\gamma_s = \gamma_d (1 + e) \quad \Rightarrow 2.7 = 1.7(1 + e) \quad \Rightarrow e = \underline{\underline{0.5882}}$$

$$(五) n = \frac{e}{1 + e} = \frac{0.5882}{1.5882} = 0.3704 = \underline{\underline{37.04\%}}$$

$$(六) Se = wG_s \quad S = \frac{wG_s}{e} = \frac{0.093137 \times 2.7}{0.5882} = \underline{\underline{42.75\%}}$$

$$(七) V_s = \frac{M_s}{\rho_s} = \frac{2040}{2.7} = 755.5556 \text{ cm}^3$$

$$V_w = \frac{W_w}{\gamma_w} = \frac{W - W_s}{\gamma_w} = \frac{2230 - 2040}{1} = 190 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Air}} = V - V_s - V_w = 1200 - 755.5556 - 190 = 254.4444 \text{ cm}^3$$

$$A = V_{\text{air}} / V = 254.4444 / 1200 = \underline{\underline{21.2\%}}$$

討論

- 亦可畫土壤三相圖解之，注意空氣重量為零，但其體積不為零。
 - 國家考試，單位以公制或國際公制為主。在公制裏， G_s 與 γ_s 的數值是相同的，前者無單位，後者有單位。
 - 土壤溼土單位重一般範圍在 $2.6\sim2.85 \text{ tf/m}^3$ 。
 - 公式 $Se = wG_s$ 與 $\gamma_d = \frac{\gamma_s}{1+e} = \frac{\gamma_m}{1+w}$ 非常重要，須銘記在心。
 - 按照大部分的原文書(eg : Terzaghi、Peck、Mesri、Holtz、Coduto、McCarthy、Liu、Evett 等人)，回答 e 值時，通常不以百分比回答。回答 n 、 S 、 w 值時，通常以百分比回答。

練 4 求含水量

含水量 95% 之火山灰土 3500 kg，與含水量 11.5% 粗砂 4500 kg 混合時，試求混合土之含水量。
 <84 薦任升等考 10 分>

<84 薦任升等考 10 分>



$$\text{對火山灰土} \quad w = \frac{W_w}{W_s} \Rightarrow 0.95 = \frac{W_w}{W_s} \Rightarrow W_w = 0.95W_s$$

$$\text{又 } W_w + W_s = 3500 \Rightarrow 1.95W_s = 3500$$

$$\text{解出 } W_s = 1794.872 \text{ kgf} \quad W_w = 1705.128 \text{ kgf}$$

$$\text{對粗砂} \quad w = \frac{W_w}{W_s} \quad \Rightarrow 0.115 = \frac{W_w}{W_s} \quad \Rightarrow W_w = 0.115W_s$$

$$\text{又 } W_w + W_s = 4500 \Rightarrow 1.115W_s = 4500$$

$$\text{解出 } W_s = 4035.874 \text{ kgf} \quad W_w = 464.126 \text{ kgf}$$

$$\text{混合土含水量 } w = \frac{\sum W_w}{\sum W_s} = \frac{1705.128 + 464.126}{1794.872 + 4035.874} = 37.2\% \quad \dots \quad \text{Ans.}$$

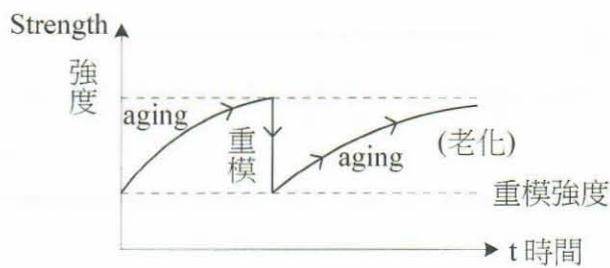
練 5 復原性

(五) 復原性(thixotropy)

<103 土木技師 5 分>、<94 薦任升等考 5 分>

Sol

溼潤黏土受振動(重模)時，土壤顆粒間的距離發生變化，土壤由硬化狀態變成膠凝狀態，強度因而減少；靜止時又恢復逐漸硬化狀態(老化 aging)，水分子及陽離子重新排列，強度因而增加，這就是復原性。究其原因乃由於振動後，土壤顆粒間之距離接近，形成排斥力，靜止時隨時間增加又恢復原距離，再形成吸引力。復原性又稱復硬性、觸變性。



討論

只寫文字回答而不畫圖，在閱卷時容易被比下去。

練 6 無聊的簡答題

(六) 風化(weathering)

<103 土木技師 5 分>

Sol

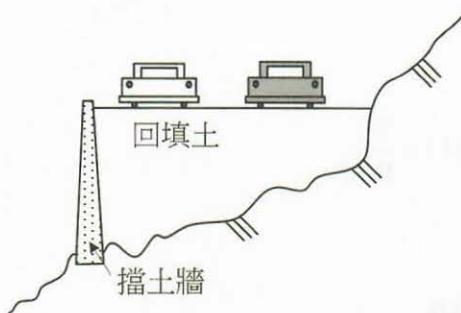
岩石與土壤，接觸大氣而分解的過程稱為風化。風化分機械性(物理性)風化與化學性風化，前者如熱量、水、冰(水結冰體積膨脹)、熱漲冷縮及壓力導致岩石與土壤分解，後者如酸雨引起岩石或土壤分解。而岩石表面的生物(地衣、蘚類植物)，則會造成潮濕的化學環境，對岩石同步進行物理性與化學性分解。

討論

對於裸露岩壁，工程師會採用掛網噴漿，阻止落石傷人，以達「妨礙風化」的效果 XD！

練 7 取土問題

請依序回答下列土壤重量體積關係之問題：莫拉克颱風造成高雄山區道路多處坍崩，為了道路重建，公路局由附近河床沖淤地運土至現地回填。河床沖積地之土壤單位重 $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ，含水量 $w = 10\%$ ，此土壤的最大乾單位重 $\gamma_{d,\max} = 17.5 \text{ kN/m}^3$ 與最小乾單位重為 $\gamma_{d,\min} = 15 \text{ kN/m}^3$ 。



- 依現地施工規範要求，回填土需夯實到相對密度 $D_r = 90\%$ ，以確保地基的緊實度，此時回填土含水量為 $w = 10\%$ ，求此時回填土的乾單位重 γ_d 與濕單位重 γ 。
- 高雄河川多為砂岩風化後的砂土，根據砂土物理性質，假設一個合理的土壤固體比重 G_s 。計算此時回填土的孔隙比 e 與飽和度 S 。
- 經概估後得知，需回填體積為 $V = 10^5 \text{ m}^3$ ，請計算總共需要由附近河床沖淤地運多少體積的土壤至現地回填(提示：回填前後土壤固體重量 W_s 不變) <101年台科大土力25%>



$$(a) D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{\gamma_{d,\max} (\gamma_d - \gamma_{d,\min})}{\gamma_d (\gamma_{d,\max} - \gamma_{d,\min})}$$

$$\Rightarrow 0.9 = \frac{17.5(\gamma_d - 15)}{\gamma_d (17.5 - 15)} \quad \Rightarrow 2.25\gamma_d = 17.5(\gamma_d - 15)$$

解出現地夯實後(現地回填土) $\gamma_d = 17.213 \text{ kN/m}^3$

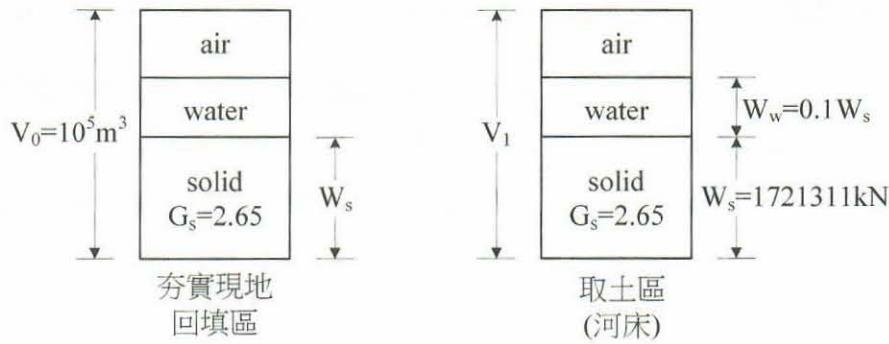
$$\gamma_m = \gamma_d (1 + w) = 17.213 (1 + 0.1)$$

$$= 18.934 \text{ kN/m}^3 \dots\dots \text{現地夯實後溼土單位重(現地回填土)}$$

(b) 假設 $G_s = 2.65$ ，即 $\gamma_s = 2.65 \times 9.81 = 25.9965 \text{ kN/m}^3$

$$\gamma_s = \gamma_d (1 + e) \quad \Rightarrow 25.9965 = 17.213 (1 + e) \quad \Rightarrow e = 0.51$$

按 $S_e = wG_s$ $\Rightarrow S = \frac{0.1 \times 2.65}{0.51} = 0.519 = 51.9\%$



(c) 依三相圖求解

$$\gamma_d = \frac{W_s}{V_0} \Rightarrow 17.213 = \frac{W_s}{10^5}$$

解出 $W_s = 1,721,311 \text{ kN}$

故取土區 W_s 也是 $1,721,311 \text{ kN}$

取土區 $W_w = w \cdot W_s = 0.1 \times 1721311 = 172131.1 \text{ kN}$

已知取土區 $\gamma_m = 18 \text{ kN/m}^3$

$$\gamma_m = \frac{W_w + W_s}{V_1} \Rightarrow 18 = \frac{172131.1 + 1721311}{V_1}$$

$$\Rightarrow V_1 = 105191.3 \text{ m}^3$$

討論

一般而言，假設 $G_s=2.65\sim2.7$ 均不會太離譜。若欲假設孔隙比，可設 $e=0.8$ 不致離譜。筆者建議畫三相圖求解，看圖求解比較容易拿分數，單純背公式有時候太抽象了。取土運輸題目，通常取土區取出之總體積較大，填土區之總體積較小(縱使填土區加水)，因為填土區要夯實滾壓之故。

練 8 基本定義運算

某一圓柱形土壤試體（直徑 6 cm、高 20.8 cm）之濕重為 1010 g，烘乾後之重為 918 g，固體顆粒比重 $G_s = 2.65$ ，

(1) 試推求該土壤之孔隙比 e 、孔隙率 n 、飽和度 S 、含水量 w 。

(2) 若另測出該土壤之最大孔隙比 = 0.75、最小孔隙比 = 0.62，分析說明該土壤之工程性質。

<100年台科大土壤力學25 %>



$$(1) \text{ 總體積 } V = \frac{\pi}{4} \times 6^2 \times 20.8 = 588.106 \text{ cm}^3$$

$$\text{濕土單位重 } \gamma_m = \frac{W}{V} = \frac{1010}{588.106} = 1.717 \text{ gw/cm}^3 = 1.717 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{乾土單位重 } \gamma_d = \frac{W_s}{V} = \frac{918}{588.106} = 1.561 \text{ gw/cm}^3 = 1.561 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{因 } \gamma_m = \gamma_d(1+w) \text{, 含水量 } w = \frac{\gamma_m}{\gamma_d} - 1 = \frac{1.717}{1.561} - 1 = 0.1 = \underline{10\%}$$

$$\gamma_s = G_s \gamma_w = 2.65 \times 1 = 2.65 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{因 } \gamma_s = \gamma_d(1+e) \text{, 孔隙比 } e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1 = \frac{2.65}{1.561} - 1 = \underline{0.698}$$

$$n = \frac{e}{e+1} = \frac{0.698}{1.698} = \underline{0.411 = 41.1\%}$$

$$\text{按 } Se = wG_s \Rightarrow S = \frac{wG_s}{e} = \frac{0.1 \times 2.65}{0.698} = 0.38 = \underline{38\%}$$

$$(2) \text{ 相對密度 } D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{0.75 - 0.698}{0.75 - 0.62} = 0.4 = 40\%$$

屬於中等緊密。

相對密度是研判粗顆粒土壤疏鬆或緊密的指標，故暗示此土壤試體為粗顆粒土壤。其工程性質為：

①滲透性佳。

②膨脹性低。

③幾乎無壓密沉陷量，即時沉陷量在施工階段就已發生完畢，砂土也幾乎沒有二次壓縮量。
 ④定性而言，砂土的抗剪強度比黏土大，若要定量的講，須進一步試驗求得強度參數 ϕ 。砂土的抗剪強度 τ ，也和正向應力 σ 有關，即 $\tau = \sigma \tan \phi$ 。依此砂土的相對密度值研判，此砂進行 CD 試驗時，孔隙比會減小；進行 CU 試驗時，會產生正的超額孔隙水壓。因 $D_r = 40\%$ ，按經驗圖表，扣掉圍壓影響，可查得修正後的 SPT， $N_1=16.67$ ，再依 Peck 等人建議， $\phi(\text{deg}) = 27.1 + 0.3N_1 - 0.00054N_1^2$ ，得 $\phi = 32^\circ$ 。

討論

1. 相對密度有三分法及五分法，不論三分法或五分法， $D_r = 40\%$ 均屬於中等緊密。
2. 要講「工程性質」，就要講滲透性如何、壓縮性如何、剪力強度如何。

練 9 取土問題

於一砂質土壤取土區（已知土粒比重 2.7、孔隙比 0.6、含水量 13%），欲利用此一砂土作 20000 m³ 之填土所需，擬於填土輾壓時加水使其含水量增為 18%，並使輾壓後之乾土單位重保持 18 kN/m³。（一）試求應自取土區取土的總體積？（二）輾壓時應添加多少水重量？（三）若當初取土區的砂質土壤有優良級配與均勻級配兩種，設兩者在輾壓均達到 95% 相對密度後，試問何種級配砂會具有較高的摩擦角 ϕ ，並簡述其原因。 <95 高考二級 25 分>



$$(1) \text{ 填土區總體積} = 20000 \text{ m}^3 = V_v + V_s \quad \dots \quad ①$$

$$\text{填土區 } \gamma_s = \gamma_d(1+e) \Rightarrow 2.7 \times 9.81 = 18(1+e)$$

$$\Rightarrow e = 0.4715 = \frac{V_v}{V_s} \quad \dots \quad ②$$

$$\text{聯立} ①, ②, \text{解出 } V_v = 6408.427 \text{ m}^3 \quad V_s = 13591.573 \text{ m}^3$$

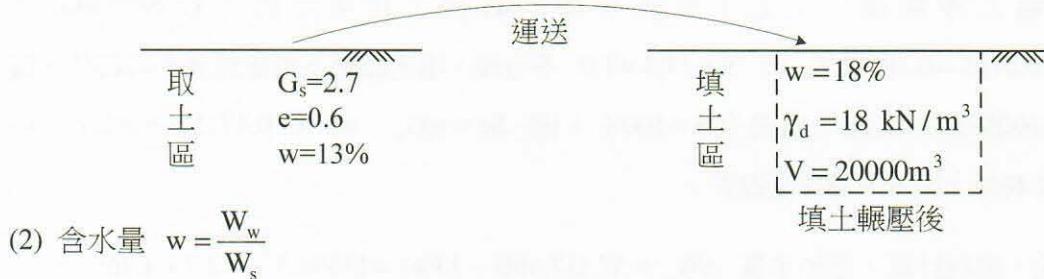
在土壤運輸過程中，設土顆粒不掉落

故應自取土區取出顆粒體積 $V_{s0} = V_s = 13591.573 \text{ m}^3$

$$\text{又取土區 } e = 0.6 = \frac{V_{v0}}{V_{s0}} = \frac{V_{v0}}{13591.573}$$

$$\therefore V_{v0} = 0.6(13591.573) = 8154.944 \text{ m}^3$$

$$\text{取土區取土總體積} = V_{v0} + V_{s0} = \underline{21746.517 \text{ m}^3}$$



\because 在填土區及取土區， W_s 均相同

$$\therefore \text{輾壓時應添加水量 } \Delta W_w = W_s(18\% - 13\%) = 13591.573 \times 2.7 \times (5\%) = \underline{1834.86 \text{ tf}}$$

(有爭議)

(3) 優良級配有較高摩擦角 ϕ 。

相對密度大小的決定，僅涉及土顆粒體積佔據土壤全體積的比例，不涉及顆粒受剪所遭遇的阻抗力，可說只是一種數學空間幾何性質。但內摩擦角值涉及受剪時，顆粒翻越鄰近顆粒所遇到的阻抗力，是一種力學性質，表面越粗糙、接觸到越多其他顆粒，阻抗就越大，內摩擦角就越大。優良級配裏有大、中、小顆粒分布，小顆粒的存在有如增加中、大顆粒表面粗糙度，故內摩擦角較大。

均勻級配缺乏更細小顆粒，導致個別顆粒和周圍其他顆粒的接觸點，不如優良級配多，故抗剪阻力小。

雖然 D_r 都是95%，但分子、分母構成情形可能不同。

按公式 $D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}}$ ，分析分母與分子。

優良級配在最緊密狀態時之 $(e_{\min})_{\text{優}}$ ，會小於均勻級配之 $(e_{\min})_{\text{均}}$ 。此乃因優良級配之中、小顆粒可填於大顆粒之間。

優良級配在最疏鬆狀態時之 $(e_{\max})_{\text{優}}$ ，亦小於均勻級配之 $(e_{\max})_{\text{均}}$ 。

兩種級配之 $(e_{\max} - e_{\min})$ 值相去不遠。分母相去不遠又 D_r 值均為95%，所以兩種級配之

$(e_{max} - e)$ 值亦應相去不遠。 \Rightarrow 分子相去不遠。

在優良級配的 $(e_{max})_{優} < (e_{max})_{均}$ 的情形下，必是 $(e)_{優} < (e)_{均}$
也就是現地優良級配孔隙比較小，摩擦角較大。

討論

- 題目給太多數據，又犯了彼此矛盾的窘狀。在填土區，按 $Se = wG_s$ ，
 $\Rightarrow S \times 0.4715 = 0.18 \times 2.7 \Rightarrow S = 1.03 > 1.0$ 不合理。填土輾壓不可能達到 $S = 103\%$ ，縱使 $S = 100\%$ 亦不可能。勉強令 $S = 100\%$ ，則 $Se = wG_s \Rightarrow 1 \times 0.4715 = w \times 2.7 \Rightarrow w = 17.46\%$ ，故 $w = 18\%$ 要改正。
- 改正後，重新計算，添加水量 $\Delta W_w = W_s (17.46\% - 13\%) = 13591.573 \times 2.7 \times 4.46\% =$
1637.78 tf，比原先差了將近 200 噸的水，故出題者確有疏漏。
- 取土區土壤飽和度 $S = \frac{wG_s}{e} = \frac{0.13 \times 2.7}{0.6} = 58.5\%$ 。

練 10 蒙脫土

試述膨土(Bentonite)在營建工程上的應用。



膨土是一種黏土，其內部主要礦物是蒙脫土，高達 80%，另外含少量高嶺土與伊利土。膨土一般為白色或淡黃色，通常呈土塊狀，單位重約 $2\sim 3 \text{ tf/m}^3$ 。

- 膨土具有很強的吸水性和膨脹性，能夠吸收比自己大 8 到 15 倍體積的水，體積可膨脹到原來的 30 倍。膨土在水中會分散成膠凝狀並且懸浮，同時吸附水中的細泥、細砂，也就是具有造漿性、吸附性、懸浮性、黏滯性、潤滑性。可用於鑽井、連續壁、反循環樁之循環水，水加入膨土後稱為穩定液，扮演穩定鑽孔孔壁、防止坍孔、吸附及輸送土砂的功能。
- 膨土可作為水壓計內部的封層(如 Casagrande 形式的水壓計)，也可作為鑽孔後的封層，阻止水往上或往下流動。

3. 在新拌混凝土中加少量膨土可以改善泵送性、施工性，也可加強混凝土之水密性。

討論

穩定液常用在地下水位高之處，在台北盆地施作地下工程，因地下水位高又兼之土壤自立性差，故常需使用穩定液防止坍孔。反循環樁樁底常有穩定液殘留，清除不易，降低樁底承載力，穩定液若漏失也可能污染地下水。做工程經常是有一好沒兩好，經濟發展、環境保護也是。

練 11 借土壤問題

取土坑之砂質土壤，土粒比重為 2.7，孔隙比為 0.6，含水量為 16.5%，利用此砂質土壤作為 10,000 m³ 之填土，填土輾壓工程進行時，如使含水量增加為 20%，而欲保持輾壓後之乾土單位重為 17 kN/m³。 $(\gamma_w = 9.81 \text{ kN/m}^3)$ <87 年第一次結構技師檢覈 20%>

- (1)求取土坑之土壤單位重、乾土單位重及飽和度。
- (2)求取土坑內應採取之土壤總體積。
- (3)求輥壓時應添加之水量及輥壓後之飽和度。
- (4)設填土輥壓工程完竣後到達完全飽和而土壤之體積膨脹率為 5%，求其最後含水量。



$$(1) S_e = wG_s$$

$$0.6S = 0.165 \times 2.7$$

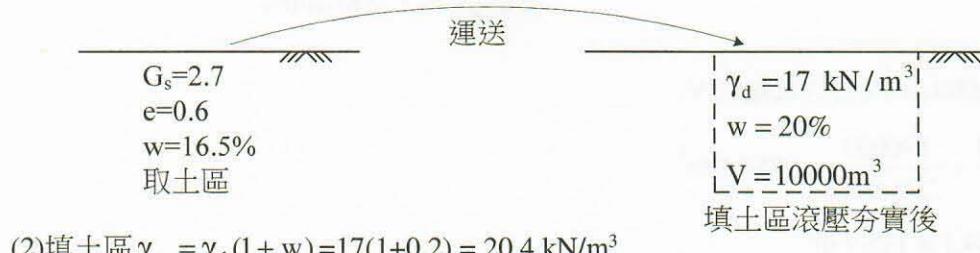
$$\text{解出 } S = 74.25\%$$

$$\gamma_s = \gamma_d(1 + e)$$

$$2.7 \times 9.81 = \gamma_d(1 + 0.6)$$

$$\text{解出 } \gamma_d = 16.554 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_m = \gamma_d(1 + w) = 16.554(1 + 0.165) = 19.286 \text{ kN/m}^3$$



$$(2) \text{填土區 } \gamma_m = \gamma_d(1 + w) = 17(1 + 0.2) = 20.4 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_m = \frac{W_w + W_s}{V}$$

$$\text{填土區含水量 } w = \frac{W_w}{W_s}$$

$$0.2 = \frac{W_w}{W_s} \dots \dots \dots \quad ②$$

聯立①、②解出 $W_s = 170000 \text{ kN}$

$$W_w = 34000 \text{ kN}$$

假設運送過程中，土顆粒不掉落，故從取土區亦是取出 $W_s=170000\text{ kN}$

取十區含水量 $w = 0.165$

$$取土區水重量 W_w = w \times W_s = 0.165 \times 170000 = 28050 \text{ kN}$$

$$\text{取土區溼土單位重 } \gamma_m = \frac{W_w + W_s}{V} \quad 19.286 = \frac{28050 + 170000}{V}$$

解出應採取之土壤總體積 $V=10269.11\text{ m}^3$

$$(3) \Delta W_w = V_s (\text{填土區含水量} - \text{取土區含水量}) = 170000(0.2 - 0.165) = 5950 \text{ kN}$$

$$\text{或 } \Delta W_w = 34000 - 28050 = 5950 \text{ kN}$$

此相當於 606.5 m^3 的水

填土區 $\gamma_s = \gamma_d (1 + e)$

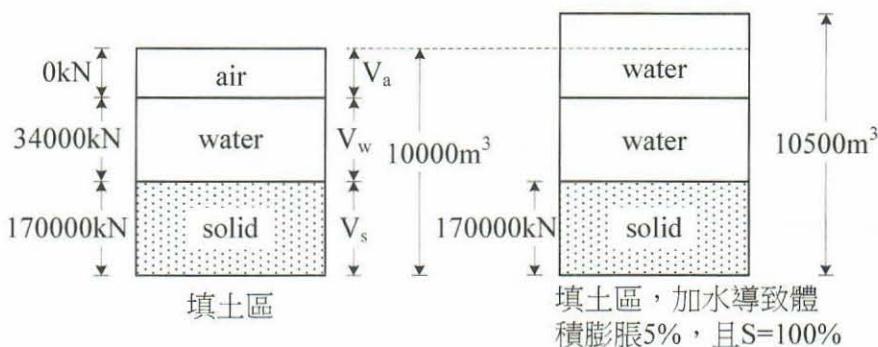
$$2.7 \times 9.81 = 17(1 + e)$$

解出 $e = 0.5581$

填土區 $Se = wG_s$

$$0.5581S = 0.2 \times 2.7$$

解出 $S = 96.76\%$



(4) 參考圖，求 $10,000 \text{ m}^3$ 內之空氣體積 V_a

$$V_w + V_s = \frac{34000}{9.81} + \frac{170000}{2.7 \times 9.81} = 9884.1 \text{ m}^3$$

$$V_a = 10000 - 9884.1 = 115.9 \text{ m}^3$$

體積膨脹 5% 後，體積增量 = $10000 \times 0.05 = 500 \text{ m}^3$

空氣部分裝滿水以達飽和，此時之水重量 $W_w = 34000 + 9.81(115.9 + 500) = 40042 \text{ kN}$

最後含水量 $w = 40042 / 170000 = 23.55\%$

討論

建議畫取土區與填土區的三相圖來解，不要呆呆狂套公式，因為有取土區、填土區兩套數據，不畫圖很容易套亂。取土區與填土區就靠土顆粒重量 W_s 不變來轉換。

部分考生解題喜歡建立在「體積不減定律」上，這是錯的，夯實會使總體積減少，加太多水會使總體積增加，根本就沒有「體積不減定律」，因為密度(統體單位重)會變。國中以來，只有「質量不減定律」，或「質能不減定律」。

實際上滾壓夯實無法達到 $S=100\%$ ，本題純是理論計算。

有一建設公司興建集合住宅，開挖地下室的土方欲運棄，找張三所開的營造廠談棄土的運費如何計算。建設公司說「地下室開挖體積 $30 \text{ m} \times 30 \text{ m} \times 7 \text{ m} = 6300 \text{ m}^3$ ，每運棄一立方的運費為 y 元，故承攬總價為 $6300y$ 元。」如果你是張三，這樣的總價你接受不接受？土壤力學學不好就會被騙。 6300 m^3 是地底下壓實方，你用壓實方計算所需出車車數(計算成本)就毀了。開挖之後，膨脹變鬆方，體積搞不好增到 7000 m^3 ，你的出車車數增加了，建設公司還是只付你總價 $6300y$ 元，當然虧本。我想，建設公司的老闆有偷偷研讀過《解說土壤力學》。

練 12 幫誤辯正

- (一)有一砂土，經分析後得知空氣佔 0.5 m^3 ，水佔 0.5 m^3 ，土壤固體顆粒佔 0.5 m^3 ，總體積為 1.5 m^3 。後加水 0.1 m^3 ，經仔細測定後，得知空氣佔 0.4 m^3 ，水佔 0.6 m^3 ，土壤固體顆粒佔 0.5 m^3 ，總體積仍為 1.5 m^3 ，這是怎麼一回事？
- (二)有一砂土，經分析後得知空氣佔 0.2 m^3 ，水佔 0.5 m^3 ，土壤固體顆粒佔 0.5 m^3 ，總體積為 1.2 m^3 。後加水 0.1 m^3 ，經仔細測定後，得知空氣佔 0.18 m^3 ，水佔 0.6 m^3 ，土壤固體顆粒佔 0.5 m^3 ，總體積只升為 1.28 m^3 ，這是怎麼一回事？



(一)

原先狀態(三相圖)	增加水量	末狀態(三相圖)
air 0.5 m^3	---	air 0.4 m^3
water 0.5 m^3	water 0.1 m^3	water 0.6 m^3
solid 0.5 m^3	---	solid 0.5 m^3

原先狀態，空氣含量所佔之體積比例甚高(33.33%)，應是疏鬆砂土，後來所加之 0.1 m^3 水，完全「**侵占**」原先空氣在三相圖的位置，所以空氣體積從 0.5 m^3 退至 0.4 m^3 。而如果只考慮「水」這單一元素，「水」它應該遵守體積不減定律，即 $0.5\text{ m}^3+0.1\text{ m}^3=0.6\text{ m}^3$ 。可是以「整個土樣」來講，不會遵守體積不減定律，即 $1.5\text{ m}^3+0.1\text{ m}^3 \neq 1.5\text{ m}^3$ 。

(二)

原先狀態(三相圖)	增加水量	末狀態(三相圖)
air 0.2 m^3	---	air 0.18 m^3
water 0.5 m^3	water 0.1 m^3	water 0.6 m^3
solid 0.5 m^3	---	solid 0.5 m^3

原先狀態，空氣含量所佔之體積比例偏低(16.67%)，應是偏飽和砂土，後來所加之 0.1 m^3 水，只能「**局部侵占**」原先空氣在三相圖的位置，所以空氣體積從 0.2 m^3 退至 0.18 m^3 ，也就是有 0.02 m^3 的空間被水侵占了。而如果只考慮「水」這單一元素，「水」它應該遵守體積不減定律，即 $0.5\text{ m}^3+0.1\text{ m}^3=0.6\text{ m}^3$ 。可是以「整個土樣」來講，不會遵守體積不減定律，即 $1.2\text{ m}^3+0.1\text{ m}^3 \neq 1.28\text{ m}^3$ 。

討論

拜託先去操場跑步流汗，腦筋清醒再來想「三相圖空氣的空間，有沒有可能被水侵占？」當然有可能呀！而水本身很難被壓縮，故工程上認為水本身遵守體積不減定律。

練 13 恒等式應用

一靈敏的火山黏土在實驗室中試驗，獲得以下性質：

(1)溼土單位重=1.28 tf/m³

(2)孔隙比 e=9

(3)飽和度 S=95%

(4)固體土粒單位重 $\gamma_s=2.75$ tf/m³

(5)含水比 w=311%

在重新驗算時，發現上面數值中的一項與其他項不相符，試求不相符的一項為何？並更正其數值。

<84 年土木技師>



(1)試恒等式 $Se = wG_s$

$$Se = 0.95 \times 9 = 8.55$$

$$w G_s = 3.11 \times 2.75 = 8.5525$$

兩數據極接近，可視為相等，故 S、e、w、 G_s 均無誤

$$(2) \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{2.75 + 0.95 \times 9}{1+9} \times 1 = 1.13 \text{ tf/m}^3 \neq 1.28 \text{ tf/m}^3$$

故為溼土單位重有誤，更正為溼土單位重=1.13 tf/m³

討論

有優秀學員問「雖然成立 $Se = wG_s$ ，但搞不好是 S 和 w 都錯，e 和 G_s 都對，依然可造成 $Se = wG_s$ 呀！」說得很有道理，你說怎麼辦？Remember，題目說只有一項數據是錯的。

練 14 相對密度

某砂土之最小孔隙比為 0.45，最大孔隙比為 0.97，比重為 2.68，相對密度 (D_r) 為 40%。

(一)在此狀態下($D_r=40\%$)，試求此砂土之乾土單位重及飽和單位重，使用 kN/m³ 作答。(9 分)

(二)若此砂層厚度原為 3.0 m，夯實後相對密度增加為 65%，試求此砂土層之沉陷量。(8 分)

(三)試求夯實後砂土($D_r=65\%$)之乾土單位重及飽和單位重，使用 kN/m³ 作答。(8 分)

<101 年鐵路特考>



$$(一) D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} \Rightarrow 40\% = \frac{0.97 - e}{0.97 - 0.45} \Rightarrow e = 0.762$$

$G_s = 2.68$ ，按 $\gamma_s = \gamma_d(1+e)$

$$2.68 \times 9.81 = \gamma_d(1+0.762) \Rightarrow \gamma_d = 14.92 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.68 + 0.762}{1.762} \times 9.81 = 19.16 \text{ kN/m}^3$$

$$(二) \text{夯實後 } D_r = 65\% = \frac{e_{\max} - e'}{e_{\max} - e_{\min}} \Rightarrow 65\% = \frac{0.97 - e'}{0.97 - 0.45} \Rightarrow e' = 0.632$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta e}{1+e_0} = \frac{0.762 - 0.632}{1.762} = 0.0738$$

$$\Delta H = \varepsilon_v H_0 = 0.0738 \times 300 = 22.13 \text{ cm}$$

(三) $\gamma_s = \gamma_d(1+e)$

$$2.68 \times 9.81 = \gamma_d(1+0.632) \Rightarrow \gamma_d = 16.11 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.68 + 0.632}{1.632} \times 9.81 = 19.91 \text{ kN/m}^3$$

練 15 基本定義計算

有一砂性土壤，已知含水量為 10%，最大孔隙比 $e_{\max} = 0.98$ ，濕土單位重 $\gamma = 17.64 \text{ kN/m}^3$ ，比重 $G_s = 2.65$ ，相對密度 60%，試計算該土壤之(一)孔隙比，(二)乾土單位重，(三)飽和度，(四)最小孔隙比，(五)10立方公尺之本土壤應加多少重量之水才可使其達到飽和狀態？

<104年鐵路特考，每小題4分，共20分>



$$\gamma_m = \gamma_d(1+w)$$

$$17.64 = \gamma_d(1+0.1)$$

$$\text{解出 } \gamma_d = 16.036 \text{ kN/m}^3 \dots \text{Ans(二)}$$

$$\gamma_s = \gamma_d(1+e)$$

$$2.65 \times 9.81 = 16.036(1+e)$$

$$\text{解出 } e = 0.621 \quad \dots\dots\dots \text{Ans}(-)$$

$$Se = wG_s \quad 0.621S = 0.1 \times 2.65$$

$$\text{解出 } S = 42.67\% \quad \dots\dots\dots \text{Ans(三)}$$

$$D_r = 0.6 = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{0.98 - 0.621}{0.98 - e_{\min}}$$

解出 $e_{min} = 0.382$ Ans(四)

$$\gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.621}{1 + 0.621} \times 9.81 = 19.796 \text{ kN/m}^3$$

應該加水 ΔW_w

$$\Delta W_w = 10(\gamma_{sat} - \gamma_m) = 10(19.796 - 17.64) = 21.56 \text{ kN} \dots \text{Ans(五)}$$

討論

有考生分不清 γ_s 的 γ_{sat} 差異，他以為 $\gamma' = \gamma_s - \gamma_w$ 。請這樣想像： γ_s 就像一顆彈珠的單位重。 γ_{sat} 就像把彈珠丟進寶特瓶，彈珠裝到瓶口後，再注水到滿，此時的瓶內總重除以瓶內總體積，就是 γ_{sat} 。 γ_{sat} 是混合了水與彈珠的單位重，自然小於彈珠的單位重 γ_s 。

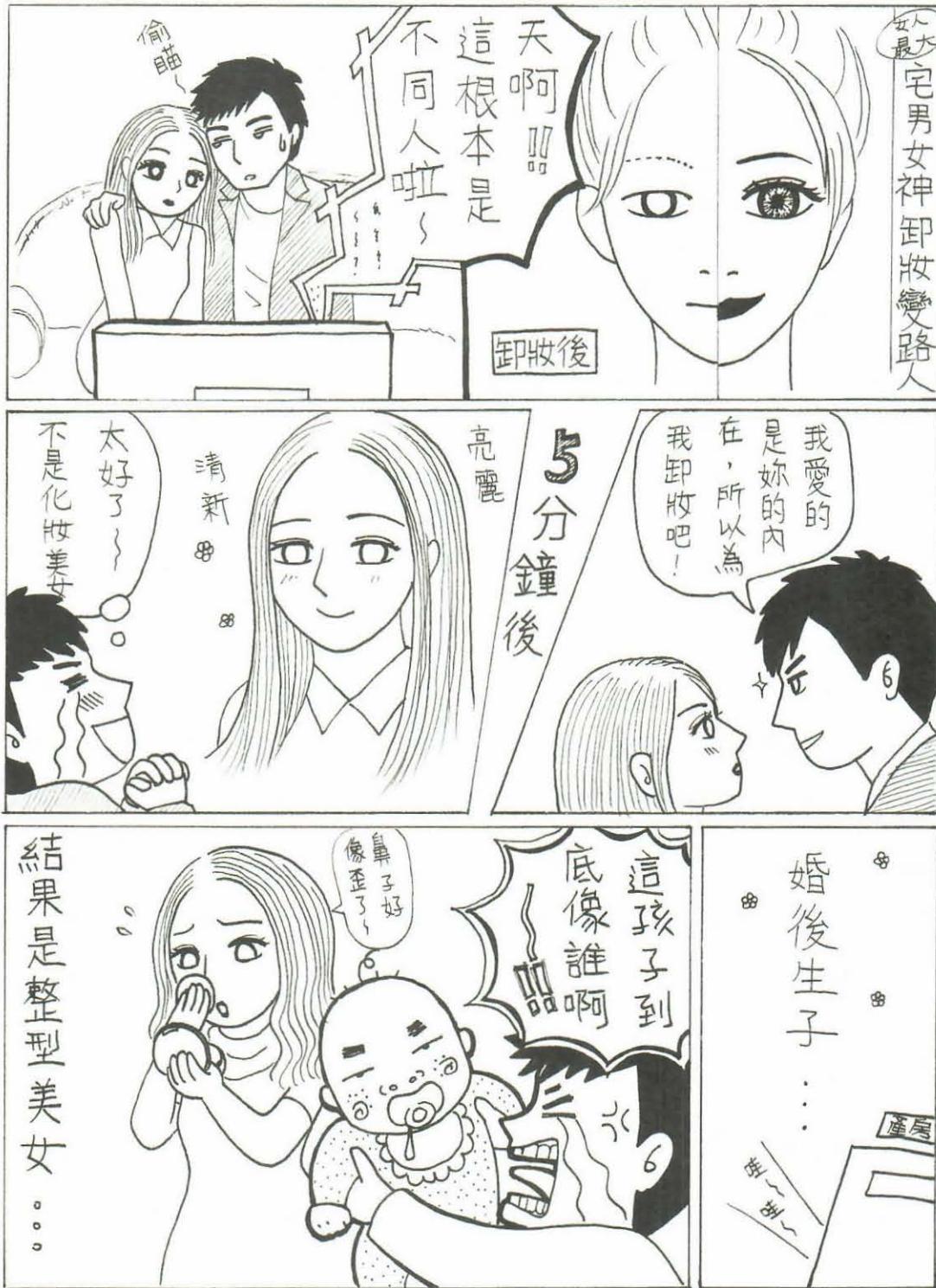
對於第(五)小題，實務上幾乎沒有辦法只加水 21.56 kN 就達飽和，就算施予夯實手段，也无法完全排除空氣，拼命加水會造成總體積增加，部分空氣還是在總體積裡。本小題只是在做理論上的計算練習。

$$\text{由 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{G_s + wG_s}{1+e} \gamma_w$$

$$\text{代入数据得 } 17.64 = \frac{2.65 + 0.1 \times 2.65}{1+e} \times 9.81 \quad \text{解出 } e = 0.621$$

本書觀念著墨較多，欲演算更多考古題，以及水利技師考題，請參閱《土壤力學了沒》。





要活就要動，運動讓人積極正面邁向成功



第三章 土壤分類

體 系 表

- ☆阿太堡限度與指數
- ☆粒徑分布曲線
- ☆統一土壤分類(細顆粒部分)
- ☆統一土壤分類(粗顆粒部分)
- AASHTO分類法

學 習 重 點

1. 量身高或體重之前，得找一些工具，如布尺、鋼捲尺、體重計等等。同理，要將土壤分類之前，也得找一些工具，如阿太堡限度與指數、粒徑分布曲線、目視、嗅覺、觸覺等。
2. 阿太堡先生提出三限度、兩指數(三長兩短)。阿太堡限度一言以蔽之，求細顆粒土壤含水量多寡，對細顆粒土壤行為影響的分界點，分界點就是 SL、PL、LL。分界點左右，細顆粒土壤行為不一樣。
3. 您會將周圍朋友的個性、優缺點分類，其實也是一種利用與互利。一樣的道理，將土壤分類也是為了工程上「好利用」。「利用」一詞本身中性，就像利用腦袋、新台幣、電風扇、原子筆、高鐵等等。
4. 顆粒越細，土壤分類側重於使用阿太堡限度與指數。顆粒越粗，土壤分類側重於使用粒徑分布曲線。對粗細相間的土分類，則阿太堡限度、指數和粒徑分布曲線都要用。
5. 建議要自己畫土壤分類的流程圖，用自己的辦法畫。若自己沒辦法，可參考書裏的流程圖。準備考試就是要自己動手。只動腦不動手的人，較容易落榜。

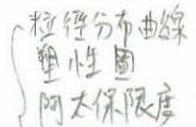
本章的重點就一句話「設法把土壤分類」。

前一章我們學過如何計算單位重。思考一問題，今若從台北與高雄各取一份土樣，經試驗後發覺具有相同單位重，我們可以說這兩份土樣的工程性質相同嗎？當然不可以，出錯的機率實在太大。對比到日常生活中，若張三與李四兩人體重相同，你敢下斷論兩人身高、血型、個性雷同嗎？當然不可以，要論個性，恐怕還要再對兩人進行更精密的測試。

相同的道理，兩份來自不同地點的土樣，到底個性(工程性質)是否類似，我們希望有一套分類、鑑別的程序。分類後被放在同一群裏的土樣，會被貼上一樣的標籤(簡寫一樣)，就會有類似的工程性質，工程師就容易依照工程需求選擇土壤。

我們必須先具備一些預備知識，才有辦法對土壤進行分類。分類所需要的預備知識就是阿太堡限度、指數與粒徑分布曲線，見下兩節。下表顯示分類常用工具，學完統一土壤分類法(Unified Soil Classification System, USCS)後，會對下表更有感覺。USCS 是土木工程師最常用的分類法，總共把土壤分成 26 種，根據分類結果，可以預知土壤的工程性質及可能發生的工程問題。

表 3-1 黏土、粉土、砂土、礫石分類難易比較



	黏土、粉土	砂土、礫石
分類需用到粒徑分布曲線、塑性圖、阿太堡限度、指數。	比較容易分類，分類流程短，可能的答案少，建議 <small>(粒徑圖、阿太堡限度 先熟悉、指數)</small>	分類的流程長，而且分類中還會用到黏土、粉土的分類流程，分類之後可能的答案多，甚至有所謂的雙重符號。

為了分類，故以下各節建立許多新參數。在土壤力學裏，不管任何一章，希望您學過一些參數後，就自問「為什麼要有這個參數，它有什麼功能？」、「參數數值越大或越小，工程意義是什麼？往哪邊靠攏？」、「為什麼要有這個試驗，目的是什麼？」。

粒徑分布曲線 GSD
grain size distribution

§3-1 阿太堡限度與指數

阿太堡限度與指數適用的對象是具有塑性、凝聚性的土壤，例如黏土，或含有黏土礦物的土壤。土壤力學稱的塑性是「加適量水分後，可以搓揉成任意形狀的特質」，異於材力。

對於細顆粒土壤，其力學行為嚴重受含水量影響，例如說，紅土地層(林口、桃園台地、八卦台地)含有黏土，當暴露在烈日下，紅土表現出很好的自立性與承載能力，工地可以垂直開挖不需支撐；但是只要遇到連日下雨，紅土地層就會軟化，工地人人滿褲管泥巴，輪式車輛會打滑，只有履帶車輛如履平地，其自立性與承載能力受水影響大幅下降。

因此，研究細顆粒土壤的工程性質就從含水量多寡切入，對含水量做定量分析，是很直覺的想法。細顆粒土壤，因為粒徑太小，無工程意義，工程上就不再討論其「粒徑」。

為了研究含水量對細顆粒土壤的影響，瑞典土壤力學學者阿太堡(Albert Atterberg, 1846~1916)提出了阿太堡限度、阿太堡指數。阿太堡限度有三個，液性限度(Liquid Limit, LL)、塑性限度(Plastic Limit, PL)、縮性限度(Shrinkage Limit, SL)，利用這三個限度，阿太堡將土壤分成四種稠性(Consistency)，稠性可簡單認知為「軟硬程度」。常用的阿太堡指數是塑性指數(Plastic Index, PI)、液性指數(LI)。不同的地區，貧富分界線不同，不同地區的細粒土壤，其阿太堡限度與指數也不同。三個 L，簡稱三長，兩個 I，簡稱兩短。

現場黏土加水之後(例如遇到下雨)，體積會逐漸膨脹(尤其蒙脫土)，會顯出塑性(可捏塑、搓揉的性質)；黏土太乾燥時(例如數日炎熱)，體積會逐漸收縮，顯出脆性，於是工址的細顆粒土壤，其工程性質隨著含水量變化，我們得先測定出該黏土在含水量多大時，表現像液態；該黏土在含水量多小時，表現像固態。阿太堡限度就是對於某一特定黏土，指出其液體、塑性體、半固體、固體的分界點，如圖 3-1，這四種狀態，就是阿太堡口中的稠性。

阿太堡限度與指數有地域性，不同地區的黏土，阿太堡限度與指數不一樣，得重新取樣試驗才知道，主因也是不同地點的礦物組成不同、粒徑不同、比表面積不同。例如針對基隆河流域某工址，現場的含水量稱為天然含水量 w_n ，取數組試體回試驗室後，試體各加不同的水量，測出液性限度 LL、塑性限度 PL、縮性限度 SL。LL、PL、SL 可視為該區域黏土的「特徵」，不因現場下雨或日曬而改變；而燕巢月世界土壤的 LL、PL、SL 值就和基隆河流域不同。LL、

PL、SL 的物理意義均是含水量。天然含水量 w_n 會因下雨或日曬而改變。

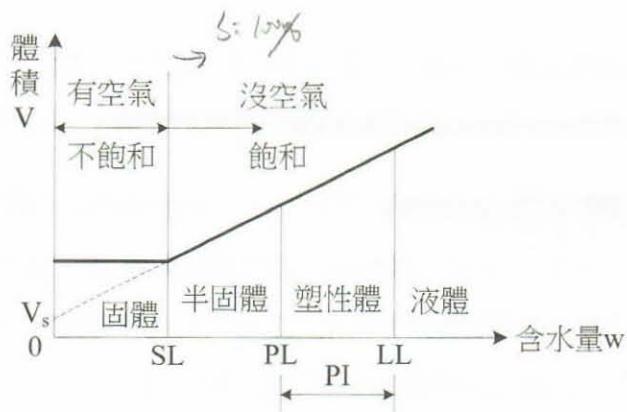


圖 3-1 阿太堡限度與塑性指數

舉例來講，就像不同人身高、體重等「特徵」不同，要測量才知道。不同地區黏土的阿太堡限度與指數也不一樣，要試驗才知道。

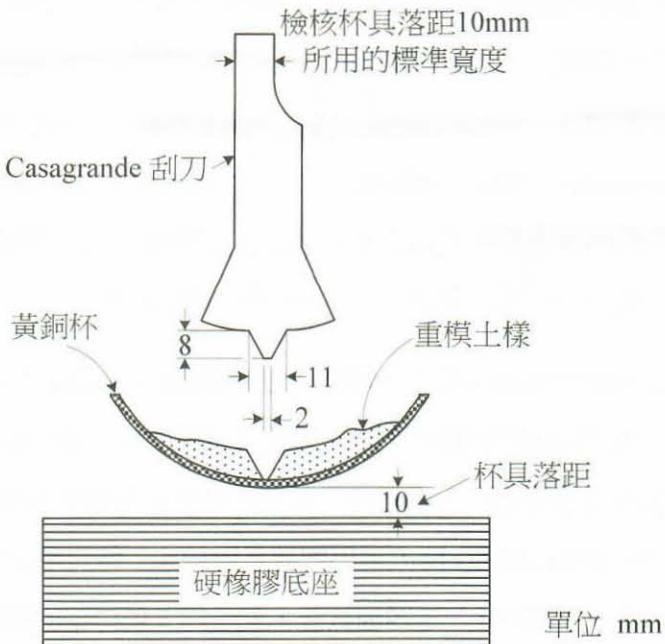


圖 3-2 (a)

在這裡要提一件事，像鋼筋或型鋼這類人造材料，在高雄生產或在台北生產，製程類似，產品工程性質都差不多，與地域無關，但是這種想像不可以移植到細顆粒土壤。台北的細顆粒土壤和高雄的細顆粒土壤，就是完全不同的細顆粒土壤，縱然雙方含水量相同，力學行為還是完全不同。不同地區的黏土，雖然含水量相同(eg : $w=60\%$)，還是會展現出不同的工程性質，

因為它們的礦物組成不同、結構不同、粒徑不同、比表面積不同。

求液性限度(LL)是利用液限儀，見圖 3-2(a)(b)(c)，將土壤放入液限儀中，以特製刮刀刮出小型長縫(縫邊緣宛如小型邊坡)，再以每秒兩轉的速率搖打液限儀，當敲打 25 次且使儀內土壤閉合長度達到 1.3 公分，則此試體的含水量稱為液性限度。由於試驗上非常難做到「敲打 25 次正好使土壤閉合長度達到 1.3 公分」，所以用多組不同含水量 w 的試體，進行本試驗，敲打過程中，當土壤閉合長度達到 1.3 公分時，記錄敲打次數 N，將多組($\log N$, w)描點繪在半對數圖紙上，連線得流性曲線(Flow Curve)，以內插方式對應出打數 25 下所對應的含水量，即為 LL。試體含水量越大(愈溼軟)，打數越少就可以試體閉合長度達到 1.3 公分。含水量越小(愈乾硬)，需要的打數越多。

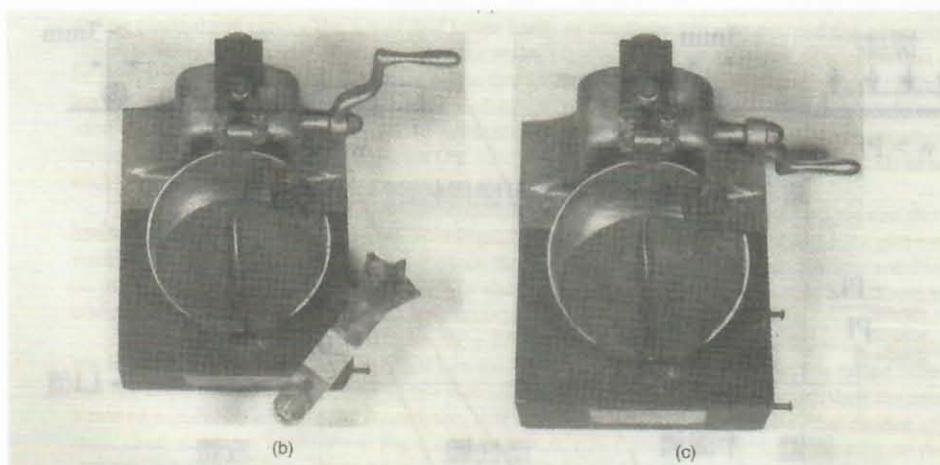


圖 3-2 (b)搖打前土壤未閉合

圖 3-2 (c)搖打後土壤閉合長度達 1.3cm

(引自 Holtz, Kovacs and Sheahan 2011 年)

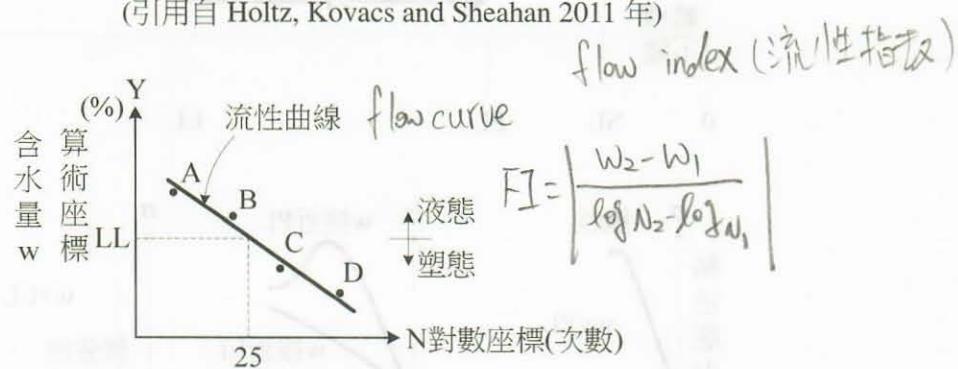


圖 3-2(d)

為什麼要搖打 25 次？因為 Casagrande 認為 LL 狀態對應之剪力強度約 2.5 kPa，一打擊數產

生之剪應力(外力)約 0.1 kPa，故打 25 次恰可使 LL 狀態之「液限儀內小邊坡」破壞。

求塑性限度(PL)是利用毛玻璃，在毛玻璃上反覆搓揉試體，毛玻璃會吸水，試體會愈來愈細，當試體斷裂時的直徑恰好是 3 mm，且斷裂後各段長度介於 3~10 mm，則此試體的含水量稱為塑性限度，見圖 3-3(a)。試體含水量越大，就可以搓揉得越細還不斷；試體含水量越小，顯得比較脆，在直徑較粗時就斷裂。請問略為潮濕的鼻屎可以搓得更細還是乾燥的鼻屎？



圖 3-3 (a)

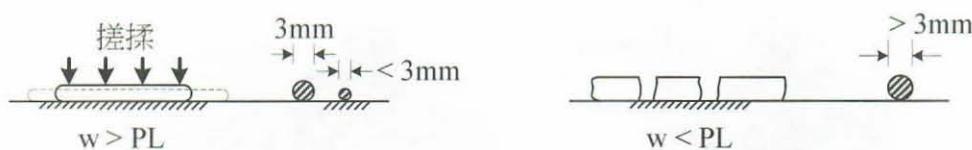


圖 3-3 (b) 含水量高，可搓得較細，如溼的鼻屎

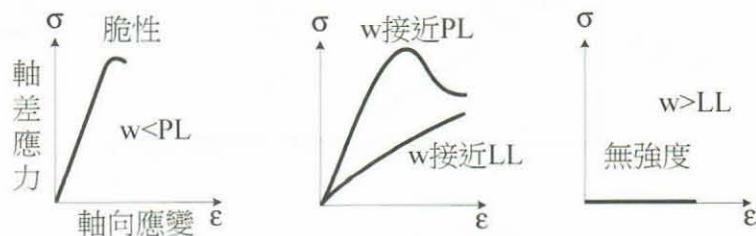
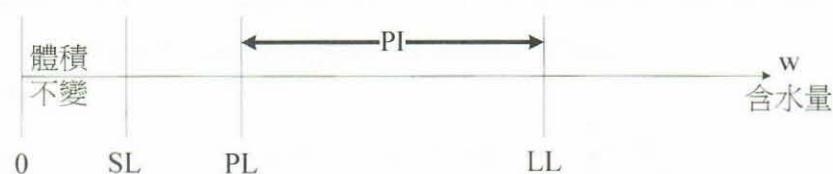


圖 3-4 同一種黏土，在不同含水量狀態下的壓應力-壓應變曲線

縮性限度(SL)是試體在逐漸乾燥過程中，體積不再縮小的最大含水量。或者說是試體在逐漸溼潤過程中，體積維持不變的最大含水量。試體的含水量 w 若大於 SL，試體是飽和的，內無空氣；若小於 SL，試體是不飽和的，有空氣進入試體。

塑性範圍的含水量是 PL~LL，此範圍含水量的黏土最適合捏塑陶瓷，定義塑性指數

$$PI = LL - PL \quad [3.1]$$

PI 值越大，黏土展現塑性的範圍越大，但會造成內摩擦角 ϕ 下降。土樣 PI 值越大，代表土樣內黏土含量越多，造成較大的塑性範圍。

表 3-2 黏土礦物常見的阿太堡指數範圍

礦物名稱	縮性限度 SL	塑性限度 PL	液性限度 LL
高嶺土	25 ~ 29	25 ~ 40	30 ~ 110
伊利土	15 ~ 17	35 ~ 60	60 ~ 120
蒙脫土	8.5 ~ 15	50 ~ 100	100 ~ 900

$$\text{液性指數(Liquidity Index)} LI = I_L \equiv \frac{w_n - PL}{PI} \quad [3.2]$$

當現場含水量 $w_n > LL$ 時(即 $LI > 1$)，現場土壤表現像液態，幾乎沒有強度；當現場含水量 w_n 介於 LL 與 PL 之間時($1 > LI > 0$)，現場土壤表現像塑態；當現場含水量 w_n 介於 PL 與 SL 之間時(即 $LI < 0$)，現場土壤表現像半固態；當現場含水量 $w_n < SL$ 時(即 $LI < 0$)，現場土壤表現像固態。由以上知細顆粒土壤的含水量影響其應力-應變曲線，土壤越乾燥，尖峰強度越明顯，越濕潤則缺乏尖峰強度。黏土含水量多寡，影響應力-應變曲線，導致似乎變成「完全不同材料」。但鋼筋就算泡在水裏拉，也不影響應力-應變曲線。

奧地利人 Arthur Casagrande(1902~1981)發展出塑性圖，細顆粒土壤分類必須用到塑性圖。塑性圖以 LL 為橫軸，PI 為縱軸，圖內 A line 方程式 $PI = 0.73(LL - 20)$ [3.3]

A line 方程式必背。畫 A line 時，其仰角約 36° (因斜率 0.73)，常見有人畫成 45° 或更陡，讀書殊不認真。

U line 方程式 $PI = 0.9(LL - 8)$ ，U 之意為 upper，代表上限，不應有出現在 U line 上方(或說

左方)的土壤。當 $PI < 7$ ，U line 轉為向下垂直線。在 $PI > 7$ 的前提下，A line 以上是黏土，A line 以下是粉土或有機土；土壤的液性限度大於 50 者稱為高塑性，小於等於 50 者稱為低塑性，這樣大約把塑性圖分為四區。但塑性圖有一個陰影區，可說是黏土與粉土的灰色地帶，落於該區的細顆粒土壤稱為 CL-ML，意為「低塑性粉質黏土」或「低塑性黏土質粉土」。陰影區的正下方，是 ML 或 OL。當 $PI < 4$ ，A line 變成虛線，這是什麼意思？就是虛線左右都是“ML or OL”。

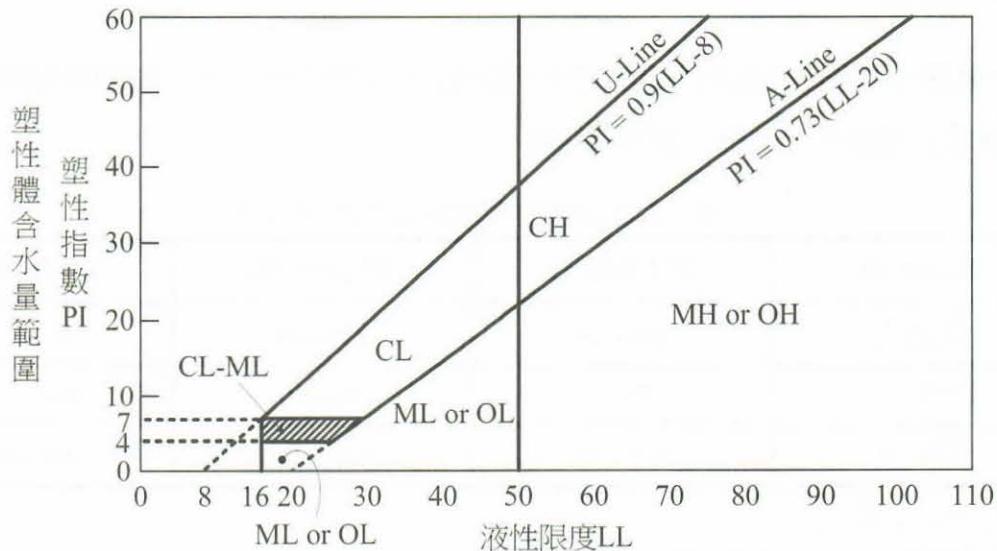


圖 3-5 塑性圖

縮性限度試驗內容很少考。縮性限度值可近似地由黏土的 LL 與 PI 值決定，Casagrande 建議：

- (1) 將 A-line 與 U-line 交點求出，即是 $(-43.5, -46.4)$ ，此點稱為 B。
- (2) 將 B 與黏土的 (LL, PI) 座標點連線，此線與橫軸的交點就是縮性限度 SL。

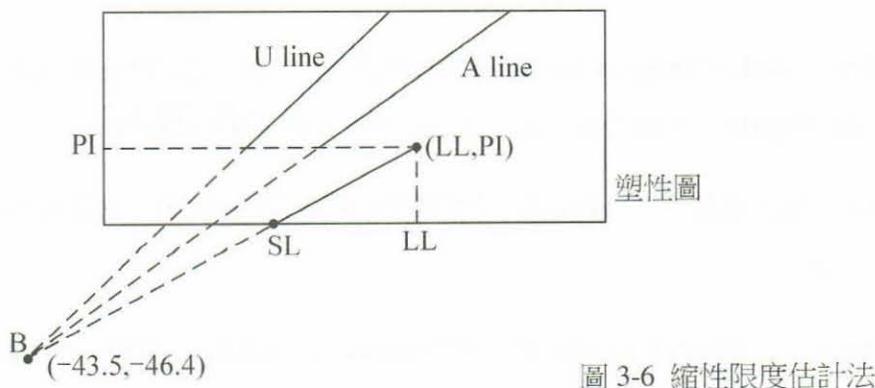


圖 3-6 縮性限度估計法

Alec Skempton(1914~2001)觀察到，對於某一特定黏土，其阿太堡限度受礦物種類及含量影響，且 PI 值正比於細顆粒(指小於 $2 \mu\text{m}$)重量百分比。Skempton 定義活性(Activity)A_c如下：

$$A_c = \frac{\text{PI}(\%)}{< 2\mu\text{m} \text{之黏土含量(重量比 \%)} } \quad [3.4]$$

活性功能：①依活性大小亦可分類細粒土壤(不同地區的黏土，各有其活性值)，②估計膨脹潛能，活性越大，遇水則發(膨脹)。

活性小於 0.75 者為不活潑(inactive)，0.75~1.25 者為中等活潑(normal)，1.25~2.0 者為活潑(active)，大於 2.0 者為極活潑(highly active)。

表 3-3 常見的礦物活性表

礦物	鈉蒙脫土	鈣蒙脫土	伊利土	高嶺土	雲母	方解石	石英
A _c	4~7	1.5	0.5~1.3	0.3~0.5	0.2	0.2	0

另一與 PI 有關的就是正常壓密黏土的不排水剪力強度 s_u ，依經驗公式，

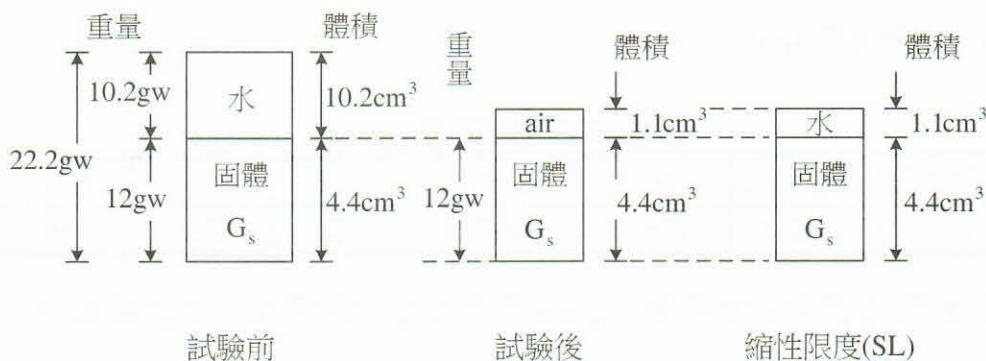
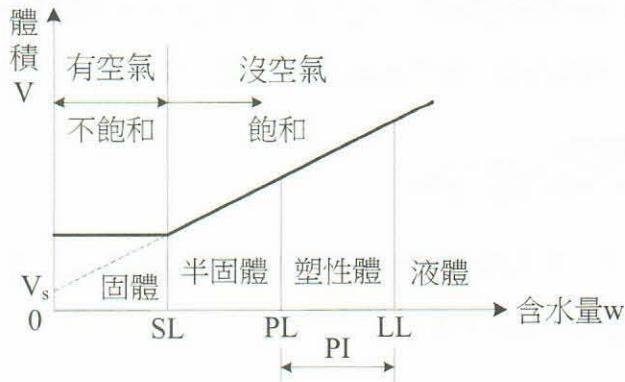
$$\frac{s_u}{\sigma'_0} = 0.11 + 0.0037\text{PI}$$
，故兩種不同黏土比較，在垂直有效應力 σ'_0 相同的前提下，塑性範圍(PI)愈大的黏土，不排水剪力強度愈高。

例 3-1.1 縮性限度

何謂縮性限度(shrinkage limit)？若某土壤進行縮性限度試驗，並得到如下之數據：試驗前之飽和濕土重 22.2 g，體積為 14.6 cm^3 ，而收縮後之乾土重 12.0 g，體積為 5.5 cm^3 。試求此土壤的縮性限度及比重(specific gravity)。
 <99 年土木技師 20 分>



縮性限度(SL)是飽和細顆粒凝聚性土壤在乾燥過程中，體積不再縮小的最大含水量，如圖。換方向講，縮性限度(SL)是細顆粒凝聚性土壤在溼潤加水過程中，體積不再膨脹，維持常數的最大含水量。縮性限度是固體與半固體的分界含水量，也是不飽和與飽和狀態的分界含水量。



試驗後，重量減少 = $22.2 - 12 = 10.2$ gw = 原先水重

所以原先水體積 = 10.2 cm^3

$$\text{原先固體體積} = 14.6 - 10.2 = 4.4 \text{ cm}^3$$

$$\text{原先固體重量} = 22.2 - 10.2 = 12 \text{ gw}$$

$$\gamma_s = \frac{W_s}{V_s} = \frac{12}{4.4} = 2.727 \text{ gw/cm}^3 = 2.727 \text{ tf/m}^3$$

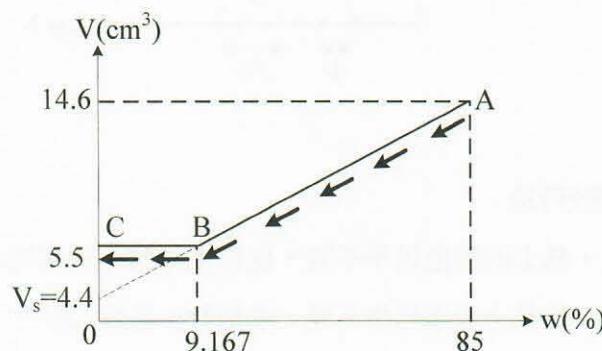
$$\text{所以比重 } G_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_w} = \frac{2.727}{1} = 2.727 \dots \dots \dots \text{Ans.}$$

討論

1. 本題試驗完畢後，會有空氣進入試體，見上圖的「試驗後」。
 2. 比重沒有單位，正處於縮性限度狀態下的試體，是飽和的。縮性限度試驗很少做，

因為誤差容易偏大，此數據對土木工程師提供的資訊很少，也對土壤分類沒幫助。

3. 阿太堡限度與指數的定義必須熟記，這是吃飯的傢伙。靠經驗公式，阿太堡限度與指數可以粗估黏土的壓縮性(C_c)與不排水剪力強度(s_u)。
4. 畫三相圖解題是基本功，體積與重量之間，就靠單位重轉換。
5. 參考下圖，試驗前試體處在 A 點，含水量 $w = \frac{10.2}{12} = 85\%$ 。試驗中，體積不斷縮小，含水量不斷減少，抵達 B 點(即 SL)。過 B 點後試驗仍然繼續，含水量持續減少但體積不再縮小，維持常數 5.5 cm^3 。試驗終了，到達 C 點，試體含水量 $w = 0\%$ 。



含水量對體積變化圖 (未按比例繪製)

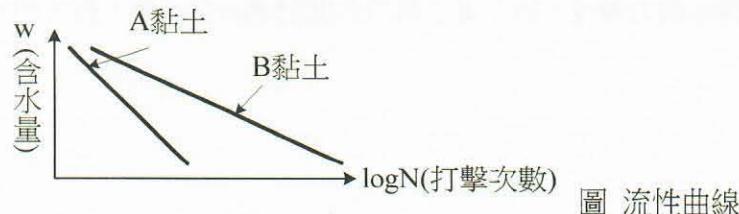
6. 可用 PI 值形容塑性：

PI 範圍	0	1~5	5~10	10~20	20~40	>40
描述	不具塑性	輕微塑性	低塑性	中等塑性	高塑性	極高塑性

例 3-1.2 液性限度

A、B兩種黏土之阿太堡液性限度試驗得流性曲線如圖所示，試問A、B兩種黏土何者對水較敏感（遇水強度損失大）？請由流性曲線來解釋。

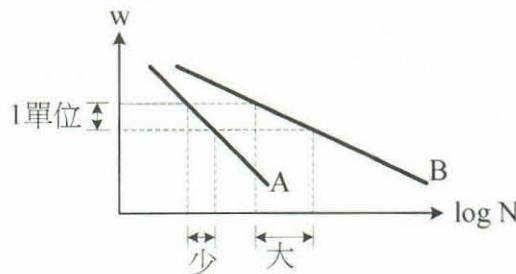
<101年土木高考5分>





流性曲線參考下圖，當 A、B 兩種黏土都有 1 單位的含水量變化時，B 黏土的打擊數變化較 A 大，代表 B 黏土對水較敏感。

依 Casagrande，一打擊數代表之剪力強度約 0.1 kPa，在 Δw 相同的前提下，打數變化大，代表剪力強度遇水變化大，即對水較敏感。



討論

粉土和黏土的分辨技巧是：

- (1) 加水在黏土上，黏土的顏色幾乎不變，但粉土的顏色立刻變暗。道理是水幾乎無法透入黏土顆粒，故黏土表面顏色不變，水相對容易進入粉土內部，故會變色。
- (2) 乾燥的黏土與粉土，粉土比較容易用大力金剛指壓碎，黏土較難。
- (3) 溼的黏土可以搓成很細條狀，像溼的鼻屎一般，但粉土在搓成很細的條狀之前就斷裂了。

在材料力學裡，若兩材料的應力-應變曲線不同，我們直覺地判定這是相異材料。同一工地黏土含水量不同時(如連續下雨或連續晴天)，應力-應變曲線就不同，宛如不同材料。

第六章會學到黏土的不排水剪力強度，基礎工程會學到邊坡的安全係數，綜合這些知識，會體會出黏土的含水量影響其不排水剪力強度，含水量越小則不排水剪力強度越大，就要敲越多下，液限儀內的小邊坡才會破壞並閉合 1.3 cm。所以「敲 25 並且閉合 1.3 cm」其實是對應到一特定的不排水剪力強度，該不排水剪力強度對應的含水量，被人們定義為 LL。

§3-2 粒徑分布曲線 Grain size distribution GSD

大部分的土壤，是由粒徑不一的顆粒所組成。粒徑分布曲線(Grain Size Distribution Curve, GSD)可以對於粗顆粒土壤做更精緻的分類。您在學校有做過搖篩機的試驗吧！一組標準篩，篩眼從大到小往下排列，最底下是底盤。搖篩後計算各篩的「累積通過百分比」，利用半對數圖紙，橫軸為顆粒尺寸，縱軸為累積通過百分比，畫出粒徑分布曲線。某篩的「累積通過百分比」，就是土樣中，比該篩篩眼還小的重量百分比。

注意粒徑分布曲線的橫軸刻度值，有的題目「左大右小」，有的題目「左小右大」。為什麼橫軸要用對數座標？因為粒徑大小分布太廣，用算數座標圖紙將拉很長，變成清明上河圖，殊不合手，用對數座標可以壓縮橫軸(不是壓縮數據)，使圖形斜率明顯，對於判斷級配有幫助。

粒徑分布曲線上，累積通過百分比 10% 對應的尺寸稱為 D_{10} ， D_{10} 又稱有效粒徑(Effective Size)。累積通過百分比 30% 對應的尺寸稱為 D_{30} ， D_{50} 稱為平均粒徑，累積通過百分比 60% 對應的尺寸稱為 D_{60} 。均勻係數(Coefficient of Uniformity) $C_u \equiv \frac{D_{60}}{D_{10}}$ 。[3.5]

均勻係數越接近 1，代表土體各顆粒尺寸均勻相近，稱均勻(Uniform)級配，在土木工程上這常是壞事，這無法達到大顆粒間有中顆粒填充，中顆粒間有小顆粒填充的境界，均勻是不好的。對於優良級配的礫石，統一土壤分類法要求 $C_u \geq 4$ ；對於優良級配的砂，統一土壤分類法要求 $C_u \geq 6$ ，這等於是要求「粒徑分布範圍須夠廣」。(記憶法：砂，Sand，S 形狀像 6)

$$\text{曲率係數(Coefficient of Curvature)} C_d \equiv \frac{D_{30}^2}{D_{10} D_{60}} \quad [3.6]$$

曲率係數名字取得炫，但它跟曲率毫無關係，單位也迥異，曲率的單位是 $[1/L]$ ，但是曲率係數沒有單位。另外，兩批不同的土樣，篩分析之後得到兩條不同的粒徑分布曲線，然若恰巧 D_{10} 相同、 D_{30} 相同、 D_{60} 也相同，則雙方的曲率係數相同，但是斜率、曲線彎曲度根本不同。

C_u 和 C_d 都是 D_{10} 在分母。對於優良級配的礫石與砂，USCS 要求 C_d 介於 1~3。有的書籍以 C_c 、 C_g 或 C_z 代表曲率係數。筆者不習慣以 C_c 代表曲率係數，因為要避開壓縮指數，壓縮指數也使用符號 C_g 。曲率係數又稱級配係數(Coefficient of Gradation) C_g 。

粒徑小於#200的顆粒，無法用篩網分析，需以流體力學阿基米得原理與史托克定律(Stoke's Law)幫忙，用比重計(Hydrometer)進行比重計分析，畫出粒徑分布曲線小於#200的部份。

用比重計求小顆粒的粒徑(或累積通過百分比)是一種十分間接且誤差浮動的作法。比重計原本是被設計來求液體密度，重量固定的比重計在液體裏漂浮的高度和液體的密度有關。為了獲得浮力，比重計會排開相等重量的液體(浮力原理，阿基米得原理)，如果液體的密度較大，所需排開的液體體積就較小，比重計就會浮得比較高。如果液體密度變小(例如穩定液放很久後，上半部分逐漸變澄清，上半部分密度變小)，則比重計就會沉降較深的距離，以獲得所需的浮力來平衡自重。只要比重計表面畫有刻度，則液面對齊的刻度值，必定跟液體密度有一定關係。

一艘船從淡水內陸河流駛入海洋，倘船重量不變，那麼船吃水會變深還是淺？變淺，因為海水密度大。你聽過死海嗎？你可以在死海浮得更高，因為液體密度更大。在土水混合液中，正因為量筒上半部的混合液逐漸澄清變清水，所以比重計緩緩下降。

比重計分析的原理是土顆粒在水中會等速沉降(因合力為零)，大顆粒降速快，小顆粒降速慢(可想像成羽毛在空氣中降速慢)，經過一段時間後，大部分大顆粒會降到量筒下半部，利用比重計讀數與公式算出特定粒徑(相當於篩號)的累積通過百分比。

史托克定律(Stoke's Law)推導為：假定土顆粒為圓球形，半徑 R ，土顆粒在廣大液面的水中受自重 W 、浮力 B 、黏滯力 F 作用而以等速度 v 下沉，考慮 $\sum F_y = 0$ ，得 $W = B + F$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \gamma_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \gamma_w + 6\pi v \eta R$$

$$\text{移項整理得 } \frac{4}{3}R^2(\gamma_s - \gamma_w) = 6v\eta$$

$$\text{又 } R=D/2, \text{ 故 } v = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{18\eta} D^2$$

其中 $D = \text{土顆粒直徑}$

$\gamma_s = \text{土顆粒單位重}$

$\eta = \text{水黏滯度}$

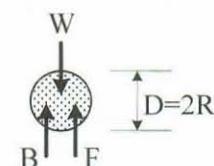


圖 3-7 土顆粒

$v = \text{直徑為 } D \text{ 的顆粒之降速}$

$\gamma_w = \text{水單位重}$

$$\text{前述公式整理得 } D = \sqrt{\frac{18\eta v}{\gamma_s - \gamma_w}} = \sqrt{\frac{18\eta}{\gamma_s - \gamma_w}} \sqrt{\frac{L}{t}}$$

其中 L = 修正後的比重計重心沉降距離，此沉降距離就是直徑 D 顆粒的沉降距離

t = 比重計量測時間

以上推導相對屬於不重要。在#200 篩附近，篩分析做出的結果常和比重計分析做出的結果不符，我們採用篩分析做出的結果，因為比重計分析的推導中有太多過於理想的假設，偏離實際面(實際上非寬廣液面沉降，瓶口內徑<沉降距離、顆粒非球形等等)，且試驗一開始時須先上下翻倒量筒，使懸浮液混合均勻，造成各顆粒沉降的起跑點不一致，會反映成試驗初期比重計讀數不具代表性。由於試驗細節 30 年來只考一次，考題還出錯，故本書不介紹。

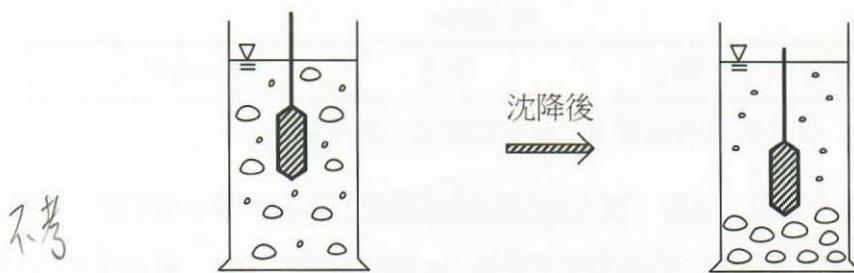


圖 3-8 大顆粒降底，上半部分液體密度變小

天然土壤若目測細顆粒含量佔約 50%左右或以上，應先進行比重計分析，後進行篩分析。原因乃防止細顆粒糾結被誤視為粗顆粒，故先進行比重計分析，利用搖晃、沉降及分散劑將糾結之顆粒團分開成細顆粒。若目測細顆粒含量不足 50%，應先進行篩分析，後進行比重計分析。

優良(Well)級配、均勻(Uniform)級配與跳躍(Gap)級配見圖 3-9。B 級配曲線平緩下降，代表大小顆粒都有，沒有誰特多或誰特少的現象，如此代表土壤的大顆粒之間有中顆粒填充，中顆粒之間有小顆粒填充，整體緻密度高，B 試樣的剪力強度高。圖 3-9 中有顯示 B 試樣的 D_{60} 、 D_{30} ，讀者可看出 B 的 D_{10} 比 0.01 mm 略小。A 試樣有一段「平原區」，平原區的範圍大約在 0.1 mm 到 4.75 mm 之間，在這範圍之間，累積通過百分比竟維持常數(50%)不動，代表 A 試樣缺乏 0.1 mm 到 4.75 mm 之間的顆粒，故為跳躍級配，大的一堆、小的一堆，跳過中的顆粒。C 曲線有一「懸崖區」，懸崖對準橫軸 1 mm，懸崖區的累積通過百分比範圍大約在 40%到

75%之間，表示顆粒過分集中於 1 mm，約有 35%的重量是 1 mm 的顆粒，這叫做均勻級配，均勻地集中在 1 mm。

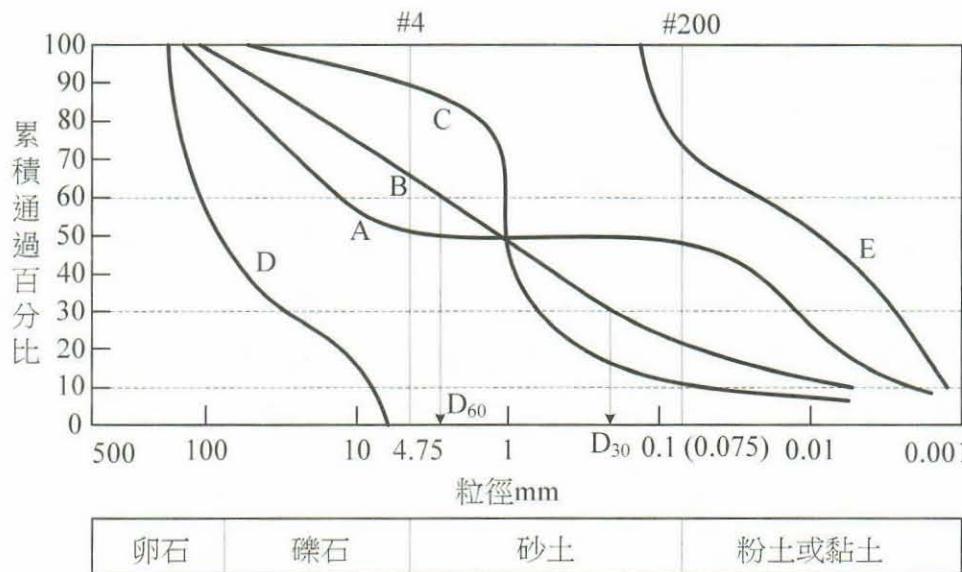


圖 3-9 優良級配 B、跳躍級配 A、均勻級配 C

「跳躍」級配又稱「間隔」級配，讓人聯想到跳遠或者三級跳，選手在空間中會有一長距離水平位移，故「跳躍」級配有一長距離水平位移，A 曲線就有此特徵。優良級配乃大中小顆粒都有，故曲線 B 約略以固定斜率通過橫軸上的大、中、小粒徑。

圖 3-9 的 D 曲線幾乎全在刻度值較大的那一側，其為 gravel(G)可能性較高。請問考生：公園健康步道的鵝卵石是所謂的礫石嗎？答：是，那已經接近礫石的上限，若粒徑超過 7.5 cm，就是卵石(Cobble)了。再提醒一次：一定要把考試的東西融入日常生活中。而 E 曲線幾乎全在刻度值較小的那一側，其為 C、M 或 O 的機率高。

圖 3-9 粒徑分布曲線以固定斜率下降，表示粒徑分布愈廣；粒徑分布曲線愈陡峭，代表粒徑分布愈窄。工程上應儘量避免均勻級配與跳躍級配。不管橫軸刻度左大右小還是左小右大，粒徑分布曲線一定是「正斜率」，橫軸 mm 數字上升，一定對應到縱軸% 數字上升。

土壤概略地被分類為粗顆粒土壤與細顆粒土壤，分界線是 200 號篩(#200)，其篩眼是 75 μm ，也有書寫 74 μm 。粗顆粒土壤包含砂(sand)與礫石(gravel)，砂與礫石的分界線是 4 號篩(#4)，其篩眼是 4.75 mm，4 號篩是指每英吋篩網有 4 個篩孔。細顆粒土壤包含粉土(silt)與黏土(clay)。以人類的生活尺度來講，75 μm 已經難有具體感覺，但是 4.75 mm 接近半公分，讀者應該能對

砂土與礫石的分界點有具體感覺。(簡單講，砂比米粒小，礫石比米粒大。)

我們利用塑性圖和粒徑分布曲線，將土壤分類，這是一個「貼標籤」的動作。性質相近的土壤，會被分類在同一堆，賦予一個名稱，名稱是由統一土壤分類法決定。也就是被貼上相同標籤的土壤，性質相近，便利工程師初步利用^{#1}。

對於粗顆粒土壤，其工程行為嚴重受級配情形影響，對於細顆粒土壤，其工程行為嚴重受含水量影響。讀者要建立一個概念，您在工地遇到的土壤，很難是純粹的礫石、砂土、粉土或黏土，經常是以上四種的比例混合。只不過，後續章節與歷年考古題為了簡單化、理想化、模型化，有時候考的是純粹的砂土或黏土，這並不是真實世界。

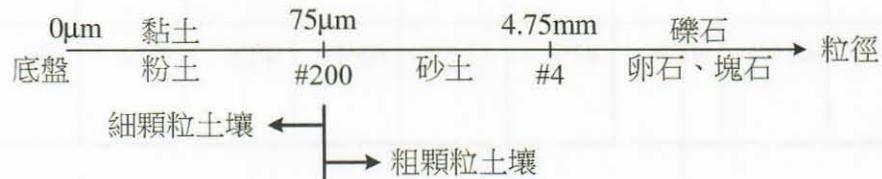


圖 3-10

建築外牆常用的洗石子，該小石子分類是砂還是礫石？別瞎猜了，動手動腳去現場量。

例 3-2.1 累積通過百分比

某土樣由搖篩機試驗後得各篩停留重量如下表，求各篩的累積通過百分比。

篩號	#4	#10	#20	#40	#60	#100	#140	#200	底盤
停留重量(gw)	30	10	15	20	75	95	105	50	25

註 1：在人類社會中，常常有貼標籤的動作。貼標籤的動作是中性的，僅為了好分辨、好利用，節省潛在的成本，增加判斷速度。例如某人若是單車社的成員，則我們猜測他(她)可能熱愛戶外踏青型的運動。某人若有前科，他就被貼上標籤，雇主不願意僱用他，調查時警察認為他嫌疑最大，結婚障礙較大。又例如優良藥廠的商品有 GMP 標籤，優良試驗室有 TAF 認證。再例如歐陽被貼上愛惜羽毛「認真寫書」的標籤，則讀者會直接購買，減少考慮的時間成本，增大自己上榜的機率。



土樣總重 = $30+10+15+20+75+95+105+50+25 = 425\text{ gw}$

累積通過百分比 = 累積通過重量 / 土樣總重

答案見下表最後一列

篩號	#4	#10	#20	#40	#60	#100	#140	#200	底盤
停 留 重 量 (gw)	30	10	15	20	75	95	105	50	25
累 積 通 過 重 量(gw)	395	385	370	350	275	180	75	25	0
累 積 通 過 百 分 比(答 案)	93%	91%	87%	82%	65%	42%	18%	6%	0%

討論

粒徑分布曲線可協助進行液化評估。

例 3-2.2 基本知識

在統一土壤分類系統(USCS)中，針對礫石(gravel)與砂土(sand)兩種顆粒土壤：

- (一) 如何決定級配良好(well-graded, W)與級配不良(poorly-graded, P)？(4 分)
- (二) 並以手繪繪出 GSD(粒徑分佈)曲線，表示良好、均匀(uniform)，以及間隔的級配(gap-graded)差異。(6 分)

<103 年公務高考三級>



(一)對於優良級配的礫石，統一土壤分類要求均勻係數 $C_u \geq 4$ 且曲率係數 C_d 介於 1~3，否則是不良級配礫石。對於優良級配的砂，統一土壤分類要求 $C_u \geq 6$ ，且 C_d 介於 1~3，否則是不良級配砂。

(二)可參考圖 3-9，不重複畫。

§3-3 統一土壤分類(細顆粒部分)

Uniform Soil classification System

細顆粒土壤(Fine-Grained Soil)指的是黏土和粉土。細顆粒土壤主要由阿太堡限度與塑性圖來分類。塑性圖是分類細顆粒土壤的根本圖表。

對於土樣，若通過#200 的重量等於或超過 50%以上，則此土壤被歸類於細顆粒。接著，取通過#40(0.425 mm)的部分，進行液性限度試驗(求 LL)與塑性限度試驗(求 PL)。

細顆粒土壤分類流程如下：

第一，先檢視是否落在塑性圖的「陰影區」。若土壤 PI 介於 4~7 且 LL 介於 16 到 A-line 之間，即塑性圖的陰影區，則分類為 CL-ML，意思是低塑性黏土質粉土或低塑性粉質黏土。

第二，取通過#40 的部分求其 LL，若 $LL \leq 50$ ，則給予符號“L”，形容「低塑性」(Low Plasticity)；LL 若大於 50，則給予符號“H”，形容「高塑性」(High Plasticity)。本步驟在於給予「形容詞」。

第三，取通過#40 的部分求其 LL 與 PI，(LL,PI)座標點位如果落塑性圖在 A line 之上；原則歸類為黏土(Clay)，給予符號“C”。(LL,PI)座標點位如果落在 A line 之下，則歸類為粉土(Silt)或有機土(Organic Soil)，分別給予符號“M”^{註2}或“O”。本步驟在於給予「名詞」。

如何進一步分辨粉土與有機土？判別式“ $\frac{\text{烘乾土壤液性限度(LL}_{\text{oven dried})}{\text{未烘乾土壤液性限度(LL}_{\text{not dried})} < 0.75$ ”可用於決定有機土。有機質在烘乾過程中會蒸散部分質量，如果烘乾後再進行液性限度試驗，所得的 LL 值少於原先 LL 之 75%，則判定土壤為有機土壤。有機土壤常呈暗棕色至黑色，而且有特殊氣味，剪力強度低，適合園藝使用，不適合工程使用。oven 是烘箱、烘爐。

$$\text{液限比(Liquid Limit Ratio)} LLR = \frac{\text{烘乾土壤液性限度(LL}_{\text{oven dried})}{\text{未烘乾土壤液性限度(LL}_{\text{not dried})} \quad [3.7]$$

統一土壤分類裏還有一種土壤叫泥炭土(Peat, 分類符號為 Pt)。有機土(O)和泥炭土有何不

註 2：砂土(Sand)已經使用符號“S”，所以粉土使用符號“M”，M 來自瑞典字 mo，意為「非常細的砂」，或者是 mjäla，意為「粉土」。

同？泥炭土呈黑色，甚至含有樹枝、樹葉、腐爛掉的纖維狀組織，含水量非常高，適於農藝，壓縮性高，強度低，任何一方面均不適合工程用，USCS 並不對其做任何定量測驗，有些原文書甚至認為它不能稱為土壤；但有機土必須以#200 檢驗，還要用塑性圖、判別式檢驗。

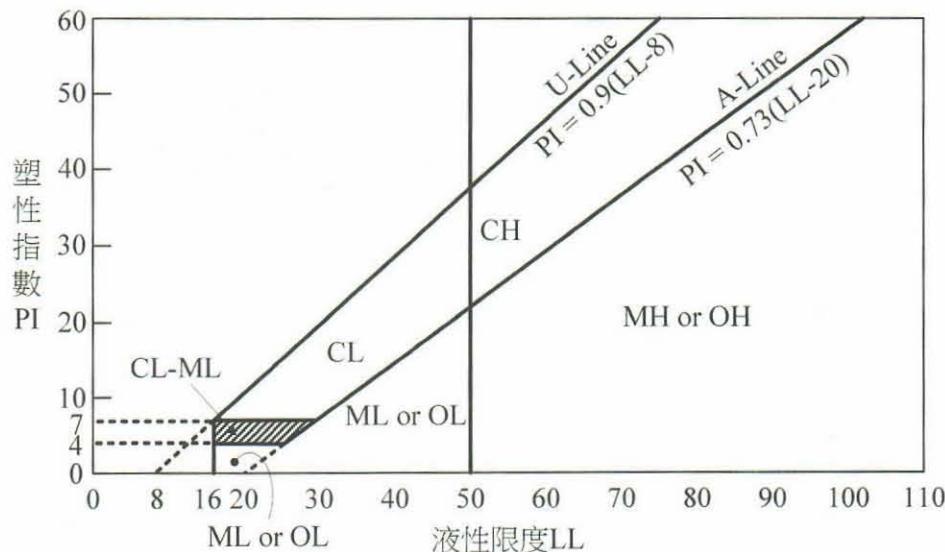


圖 3-11 塑性圖

首先確定通過#200等於或超過50%

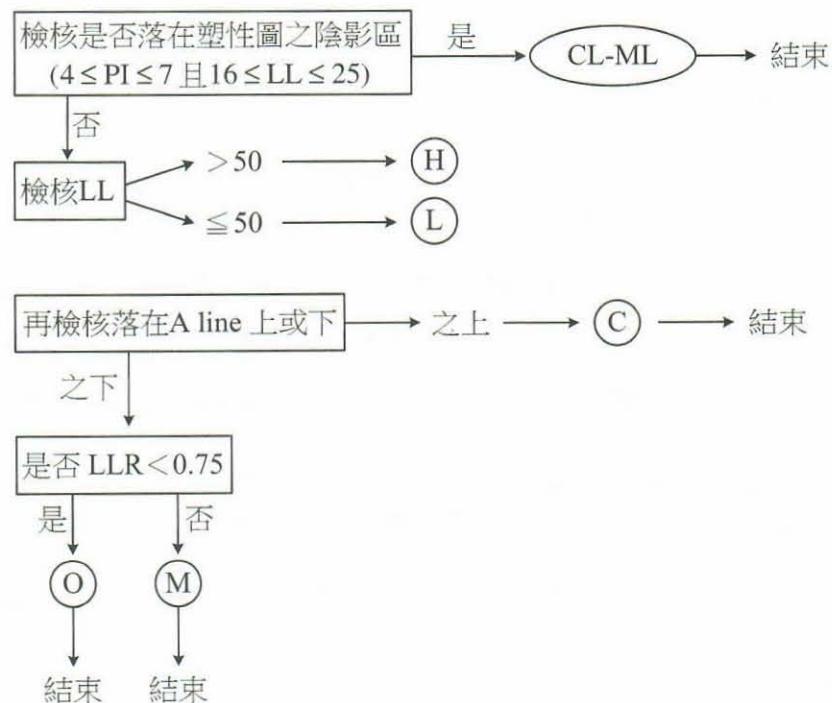


圖 3-12 細粒土壤分類流程圖

泥炭土的有機質重量，通常超過總重的 20%。

結合名詞和形容詞(名詞在前，形容詞在後)，就可以大概估計土壤的工程性質。例如 CH 就是高塑性黏土，黏土滲透性低(不適合做為擋土牆後背填土材料，但或許適合做為土石壩壩心材料)，壓縮性大(有壓密沉陷問題)，剪力強度低(不適合作為路基材料)。MH 就是高塑性粉土，OH 就是高塑性有機土，其餘符號之翻譯可以依樣畫葫蘆。

整體來講，如果土壤絕大部分是由粗顆粒組成，那它的分類過程將會很依賴粒徑分布曲線；如果土壤絕大部分是由細顆粒組成，那它的分類過程將會很依賴塑性圖；如果是混在中間的地帶，那麼同時要依賴粒徑分布曲線與塑性圖。

有些朋友拿細的油性奇異筆，在直尺刻度 0.475 cm 處畫線，告訴我那是什麼意思？

§3-4 統一土壤分類(粗顆粒部分)

粗顆粒土壤(Coarse-Grained Soil)指的是卵石(Cobble)、礫石和砂土。粗顆粒土壤主要由粒徑分布曲線、阿太堡限度與塑性圖來分類。

對於土壤，若留在#200 上的重量超過總重 50%以上，則此土壤被歸類於粗顆粒。

粗顆粒土壤分類流程如下：

第一，取出留在#200 上的土壤，以#4 篩選之，若留在#4 的重量比通過#4 的多，則此土壤被歸為礫石(Gravel)，以符號“G”表之；反之若通過#4 的重量比留在#4 上的多，則此土壤被歸類為砂，以符號“S”表之。本步驟在於給予「名詞」。若剛好一半重量留在#4，則被分類為“S”。

第二、檢驗通過#200 ^{^{註3}}的重量比，此步驟細分三個範疇：(1)通過#200 的重量比小於 5%。

註 3：通過#200 的部份，為細粒料(Fine)，可以用符號 F 代表。

(2)通過#200 的重量比大於 12%。(3)通過#200 的重量比介於 5%~12%。本步驟在於給予「形容詞」。此三範疇詳下段：

(1)若通過#200 的重量小於 5%，則進行粒徑分布曲線分析。對於礫石，若「 $C_u \geq 4$ 且 $1 \leq C_d \leq 3$ 」，稱為「優良級配的」(Well-graded)，給予符號“W”，否則得符號“P”(Poorly-graded，不良級配的)。對於砂土，若「 $C_u \geq 6$ 且 $1 \leq C_d \leq 3$ 」，稱為「優良級配的」，給予符號“W”，否則得符號“P”。

(2)若通過#200 的重量大於 12%，則取通過#40 的部分，進行塑性圖分析，如果點位落在塑性圖 A line 之上，則得形容詞“C”，意即「黏土質的」(clayey)；如果點位落在塑性圖 A line 之下，則得形容詞“M”，意即「粉土質的」(silty)；如果點位落在塑性圖的陰影區，則得 GC-GM(同時具有黏土性質與粉土性質的礫石)或 SC-SM(同時具有黏土性質與粉土性質的砂)^{註4}。

(3)若通過#200 的重量比介於 5%~12%，則須用雙重符號(dual symbol)表示，也就是粒徑分布曲線要做(得 W 或 P)，塑性圖分析也要做(得 C 或 M)。塑性圖分析，若點位落入陰影區(CL-ML)，則選擇“C”，不是選“M”。描述時，須先描述級配優劣，再描述塑性圖結果(口訣：先級配、後粉黏)，故稱雙重符號。對於礫石，依排列組合，有四種可能：GW-GC，GW-GM，GP-GC，GP-GM；對於砂土，依排列組合，也有四種可能：SW-SC，SW-SM，SP-SC，SP-SM。

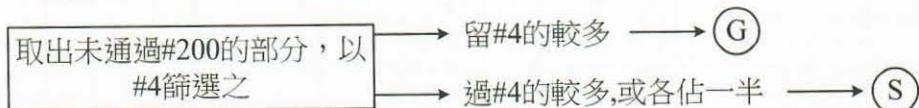
對於形容詞部分，為何細分成三個範疇？

因為細顆粒(指比#200 孔徑小)的含量多寡，會影響整體土壤的工程表現。當細顆粒重量不足 5%，統一土壤分類法就認為細顆粒含量過少，不足以成氣候，尚不能影響整體土壤表現，所以不做塑性圖檢驗，工程性質主要由粗顆粒主控，也就是由粒徑分布曲線主控。當細顆粒重量超過 12%，就認為細顆粒含量過多，能覆滿粗顆粒周圍，降低粗糙度，已經影響整體土壤的工程表現，必須依據塑性圖調查細顆粒性質以協助分類。當細顆粒重量介於 5%~12%，就認為粗、細顆粒的含量均能影響整體土壤的工程表現，必須同時做粒徑分布曲線分析與塑性圖分析，並以雙重符號表達分類結果。

註 4：對於 GC-GM 和 SC-SM，有的原文書寫 GM-GC 和 SM-SC，都算正確。

首先確定通過#200不足50%

名詞部分：



形容詞部分：

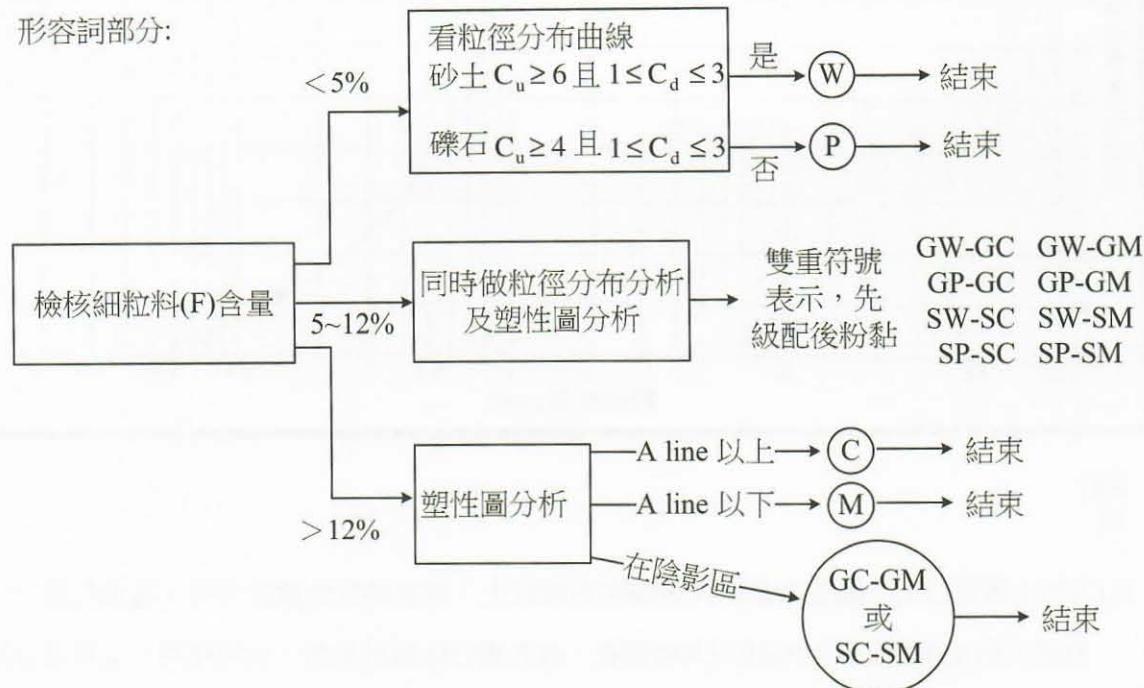


圖 3-13 粗粒土壤分類流程圖

如何翻譯 GW-GC？優良級配的黏土質礫石！GP-GM 呢？不良級配的粉土質礫石！相信其他的雙重符號您也會依樣翻譯了。

試驗步驟很少考

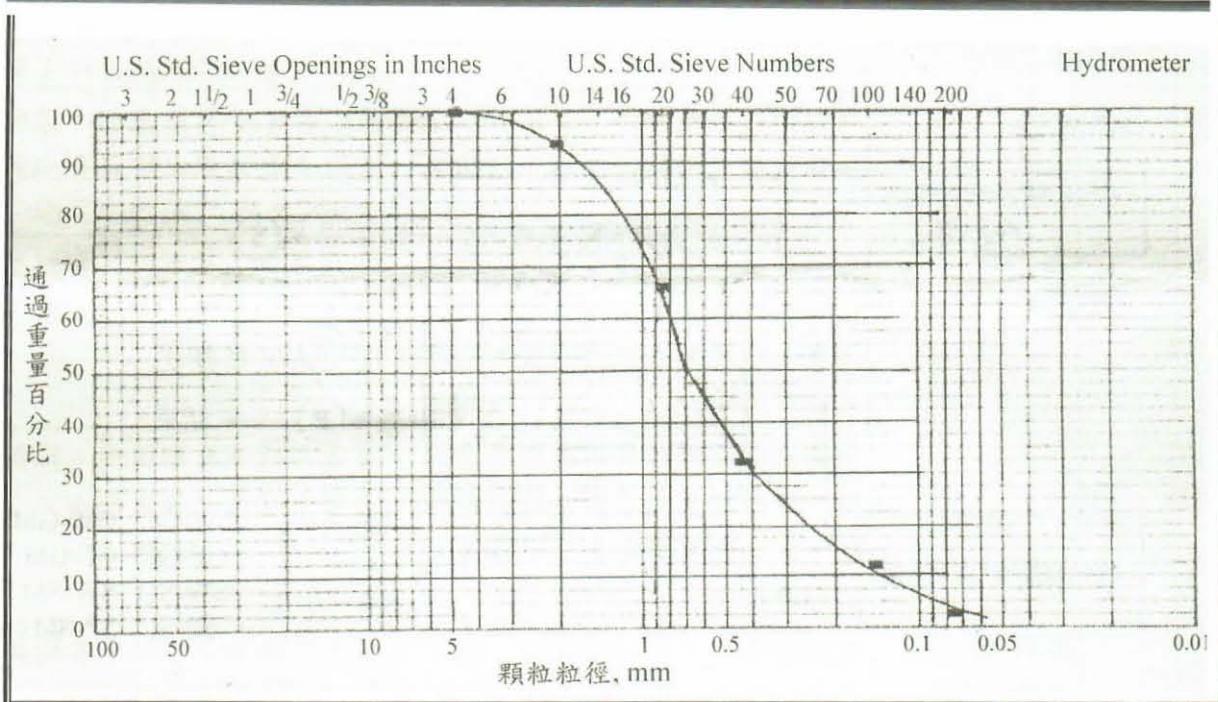
例 3-4.1 土壤分類

試述如何由試驗求得土壤之顆粒粒徑分布曲線？(7分)

D_{50}

某土樣由試驗求得其顆粒粒徑分布曲線如下圖所示，求此試樣之平均粒徑、均勻係數 C_u 及曲率係數 C_d 各為若干？另依美國統一土壤分類法(USCS)，判斷此土壤之級配狀況。(12分)

<100 年鐵路特考>



(1)天然土壤若目測細顆粒含量佔約 50%左右或以上，應先進行比重計分析，後進行篩分析。

原因乃防止細顆粒糾結被誤視為粗顆粒，故先進行比重計分析，利用搖晃、沉降及分散劑將糾結之顆粒團分開成細顆粒。若目測細顆粒含量不足 50%，應先進行篩分析，後進行比重計分析。

以下以「細顆粒含量佔約 50%左右或以上」為例說明：

- 1.準備比重計、量筒、標準篩(#4、#10、#20、#40、#60、#100、#140、#200、底盤)、馬錶等工具。顆粒小於#200的部分以比重計分析，大於#200的部分以篩分析行之。
- 2.先進行比重計分析，以抗凝劑將土樣分散後，將懸浮液置入量筒中加蒸餾水至 1000 cc 刻度，再以手掌壓緊筒口上下翻倒，使懸浮液混合均勻。
- 3.將大量筒置於穩定桌面，開動馬錶計時，放入比重計。記錄不同時間的比重計讀數，求出小於某一尺寸的百分比。
- 4.次進行篩分析，比重計分析結束後，將懸浮液倒入#200 篩中，以水沖洗，至小於#200 的顆粒完全通過，只剩粗粒料。
- 5.將粗粒料烘乾，倒入篩組中，從上而下，篩眼從大到小，搖篩機震盪約 15 分鐘，以刷子

清出各篩中的土，秤其重量，求累積通過百分比，繪製粒徑分布曲線。

(2) 通過#200(橫軸 0.075 mm)的重量百分比為 3% 故為粗顆粒

通過#4 的重量百分比為 100% 故為砂(S)

查圖得 $D_{10} = 0.14 \text{ mm}$, $D_{60} = 0.8 \text{ mm}$, $D_{30} = 0.4 \text{ mm}$

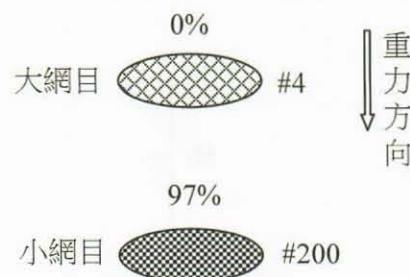
平均粒徑 $D_{50} = 0.7 \text{ mm}$

$$C_u = D_{60} / D_{10} = 0.8 / 0.14 = 5.71 < 6$$

$$C_d = (D_{30})^2 / (D_{10} \times D_{60}) = 0.4^2 / (0.14 \times 0.8) = 1.43 \quad \text{介於 } 1 \sim 3$$

故為不良級配(P)

依據 USCS，此土壤為 SP (不良級配砂)



討論

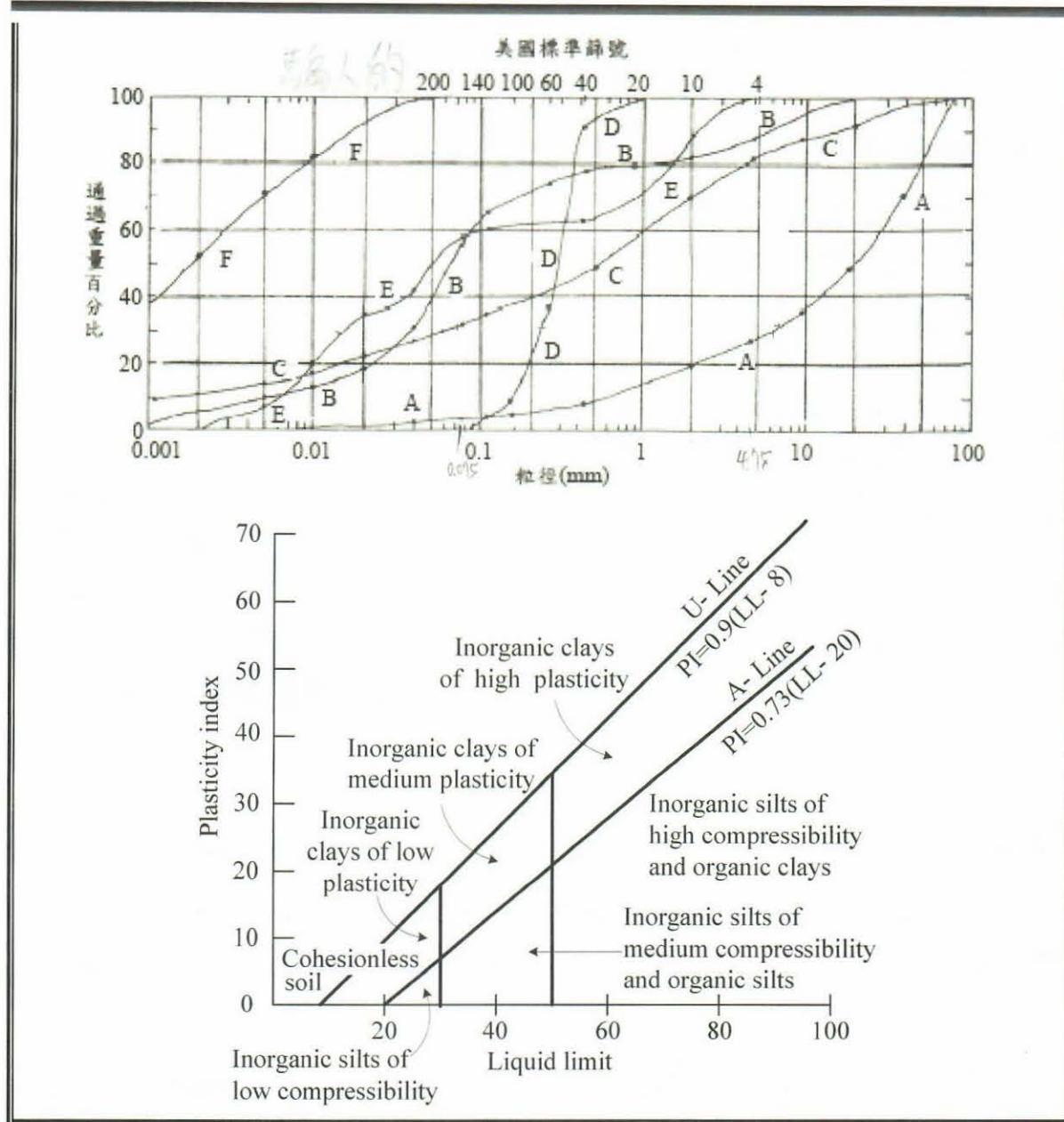
D_{10} 之研判宜細心，若把 D_{10} 判讀成 0.13 mm， C_u 就會變成 6.15，變成優良級配。按照半對數圖製作原理， D_{10} 較精確之值是 0.1414 mm。考試時可畫上圖分析，停留在#200 的量最多，所以是砂土。

認識級配曲線可以幫你選擋土牆後方回填土、路基材料、築堤材料、瀝層材料等等。

例 3-4.2 土壤分類

根據下列顆粒分布曲線及塑性圖，利用USCS分類系統，將土壤A至G分類。注意：G的顆粒分布曲線和F重合。
<修改101年高考二級15分>

性質	Soil A	Soil B	Soil C	Soil D	Soil E	Soil F	Soil G
$w_n(\%)$	27	14	14	11	8	72	52
LL	13	35	35	--	28	60	20
PL	8	29	18	NP	NP	28	14



注意#200 篩眼尺寸為 0.075 mm，勿被題圖縱線蒙蔽

A 土樣：通過#200 約 2.5%，故為 S 或 G

通過#4 約 28%，未過者達 72%，確定為 G

$$C_u = D_{60} / D_{10} = 29 \text{ mm} / 0.5 \text{ mm} = 58 > 4$$

$$C_d = (D_{30})^2 / (D_{10}D_{60}) = \frac{6^2}{0.5 \times 29} = 2.48 \quad \text{介於 } 1 \sim 3 \quad \text{故得“W”}$$

分類為 GW

B 土樣：通過#200 約 53% ，故為 C 或 M 或 O，另須依賴塑性圖分類

$$LL = 35 < 50 \quad \text{故得“L”}$$

$$\text{土樣之 PI} = LL - PL = 35 - 29 = 6$$

$$A \text{ line 之 PI} = 0.73(LL - 20) = 0.73(35 - 20) = 10.95 > 6 \quad \text{故得“M”或“O”}$$

分類為 ML 或 OL

C 土樣：通過#200 約 32% > 12%，故為 S 或 G，另須依賴塑性圖分類

通過#4 約 83%，確定為 S

$$\text{土樣之 PI} = LL - PL = 35 - 18 = 17$$

$$A \text{ line 之 PI} = 0.73(LL - 20) = 0.73(35 - 20) = 10.95 < 17 \quad \text{故得“C”}$$

分類為 SC

D 土樣：通過#200 約 0%，故為 S 或 G

通過#4 約 100%，確定為 S

$$C_u = D_{60} / D_{10} = 0.31 \text{ mm} / 0.16 \text{ mm} = 1.9375 < 6$$

$$C_d = (D_{30})^2 / (D_{10}D_{60}) = \frac{0.22^2}{0.31 \times 0.16} = 0.976 < 1 \quad \text{故得“P”}$$

分類為 SP

E 土樣：通過#200 約 58%，故為 C 或 M 或 O

$$LL = 28 < 50 \quad \text{故得“L”}$$

塑性限度為 NP(non-plastic)，研判做不出塑性限度，也就是得不到「塑性體」的含水量範圍，換言之，此土樣無塑性，取 PI = 0

$$A \text{ line 之 PI} = 0.73(LL - 20) = 0.73(28 - 20) = 5.84 > 0 \quad \text{故得“M”或“O”}$$

分類為 ML 或 OL

F 土樣：通過#200 約 100%，故為 C 或 M 或 O

$$PI = 60 - 28 = 32$$

$$A \text{ line 之 PI} = 0.73(LL - 20) = 0.73(40) = 29.2 < 32 \quad \text{故為“C”}$$

$$LL = 60 > 50 \quad \text{故得“H”}$$

分類為 CH

G 土樣：通過#200 約 100%，故為 C 或 M 或 O

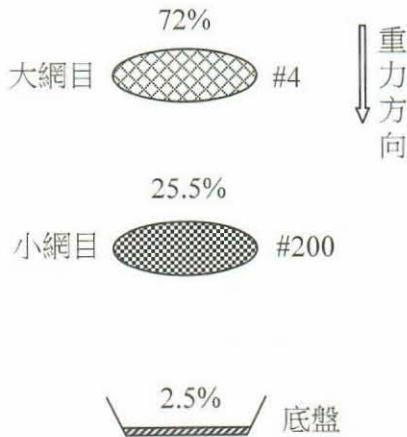
$PI = 20 - 14 = 6$ 介於 4~7

$LL = 20$ 介於 16~25

分類為 CL-ML

討論

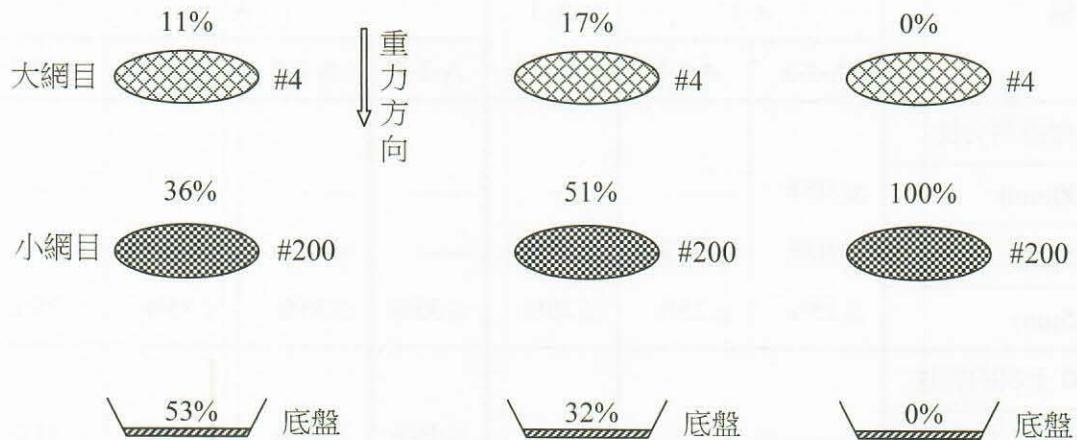
- 通過#200 正好 50%，屬於細粒料，即分類為 C 或 M 或 O。多數情形下，級配曲線對砂土影響較大，含水量對砂土影響較小，但飽和疏鬆砂例外，受動力載重時可能液化。
- 土樣 E，若取 $PL=0$ ，則其 $PI=LL-PL=28-0=28$ ，但是 U line 之 $PI=0.9(LL-8)=0.9(28-8)=18 < 28$ ，不合理，土樣 E 不應在 U line 之上。
- 大部分考古題，如果遇到 $LL=NP$ ，則通常也會出現 $PL=NP$ 。土樣 E 是怪胎，似乎不存在塑性態，只存在液態、半固態、固態，疑是命題不慎。
- 大部分的土壤混著某比例的砂土、粉土與黏土，但是細顆粒只要佔到 5%以上，就可決定整團土壤的工程表現，分類就必須交代之。資本主義社會，富人影響力較大，不也如此嗎？
- 解題時，可畫#200 與#4 示意圖協助判斷，例如土樣 A：通過#200 有 2.5%，通過#4 但無法通過#200 有 $(28-2.5)=25.5\%$ ，殘留在#4 上面有 $(100-28)=72\%$ ，看圖就能「一目了然」，停留在#4 的量最多，明顯為 G。若停留在#200 的量最多，則屬砂(S)。若停留在底盤的量最多，則屬細顆粒。



- 統一土壤分類法把細顆粒分成 8 種名稱(CL-ML、CH、CL、MH、ML、OH、OL、Pt)，

粗顆粒分成 18 種名稱(GW、GP、SW、SP、SC、SM、GC、GM、GC-GM、SC-SM、GW-GC、GW-GM、GP-GC、GP-GM、SW-SC、SW-SM、SP-SC、SP-SM)，總共 26 種名稱。

7. Non-plastic(無塑性)，指不論加多少水，都無法把土樣搓成條狀、棒狀。
8. 題圖 GSD 曲線，橫軸右邊刻度大，故級配曲線愈靠右邊，愈有機會是礫石，如 A。題圖 GSD 曲線，橫軸左邊刻度大，故級配曲線愈靠左邊，愈有機會是黏土，如 F。
9. 法網恢恢，底盤疏而不漏，以下三圖又是哪些土壤呢？



§3-5 AASHTO 分類法 (參考)

AASHTO 是 American Association of State Highway and Transportation Officials，即美國州際公路及運輸協會，該協會也對土壤分類提出一套辦法。從協會名稱可顧名思義，掌管州際公路，故其提出的辦法，特別適用於選擇道路路基材料。粗顆粒土壤適合做道路路基，故 AASHTO 分類法對粗顆粒土壤掌握得比統一土壤分類精準，但在細顆粒土壤的分類上，統一土壤分類就比較仔細了。AASHTO 分類法國考很少考，投資報酬率極低，博士班資格考可能考。

其實 AASHTO 分類法比 USCS 簡單。AASHTO 將土壤分類成 A-1 到 A-7 等 7 類，其中 A-1、A-2 與 A-7 有再進一步細分，其餘無。阿拉伯數字越大，越不宜作為路基。分類依據是篩分析結果、液性限度(LL)、塑性指數(PI)以及分組指數(Group Index, GI)。有機土壤則被編為 A-8。

A-1 到 A-3 是#200 篩的通過百分比 $\leq 35\%$ 的材料，詳見下表。

表 3-4 粗顆粒土壤

一般分類	#200 篩的通過百分比 $\leq 35\%$						
分類名稱	A-1		A-3	A-2			
	A-1-a	A-1-b		A-2-4	A-2-5	A-2-6	A-2-7
篩分析通過百分比							
#10 (2.00mm)	$\leq 50\%$	-----	-----	-----	-----	-----	-----
#40 (425μm)	$\leq 30\%$	$\leq 50\%$	$\geq 51\%$	-----	-----	-----	-----
#200 (75μm)	$\leq 15\%$	$\leq 25\%$	$\leq 10\%$	$\leq 35\%$	$\leq 35\%$	$\leq 35\%$	$\leq 35\%$
通過#40 土料的特性							
液性限度(LL)	-----		-----	$\leq 40\%$	$\geq 41\%$	$\leq 40\%$	$\geq 41\%$
塑性指數(PI)	≤ 6		無塑性	$\leq 10\%$	$\leq 10\%$	$\geq 11\%$	$\geq 11\%$
一般主要構成物	礫石及砂土		細砂	粉土質或黏土質的礫石及細砂			
作為路基的評價	優良至良好					良好至尚可	

A-1 是優良級配，最適合做路基。A-3 是細砂，屬均勻級配，「均勻」並非好事。A-2 是礫石與細砂的混合，但夾有粉土、黏土。A-2 裏分出「A-2-4」，代表「A-2-4」通過#40 土料的特性和「A-4 土壤通過#40 土料的特性」相同，讀者可比對表 3-5。同理，A-2 裏分出的「A-2-6」，其通過#40 土料的特性和「A-6 土壤通過#40 土料的特性」相同。表 3-4 裏，大約地講，越左方的土壤越適合做路基材料，越往右方則逐漸不適合。越往右方，則細粒料(通過#200 的材料)含量越多，塑性指數也越高。

A-4 到 A-7 是#200 篩的通過百分比 $> 35\%$ 的材料，已不適合做路基材料，詳見表 3-5。

表 3-5 細顆粒土壤

一般分類	粉土質土壤、黏土質土壤			
分類名稱	A-4	A-5	A-6	A-7-5
				A-7-6
篩分析通過百分比				
#10 (2.00mm)	-----	-----	-----	-----
#40 (425μm)	-----	-----	-----	-----
#200 (75μm)	≥36%	≥36%	≥36%	≥36%
通過#40 土料的特性				
液性限度(LL)	≤40%	≥41%	≤40%	≥41%
塑性指數(PI)	≤10%	≤10%	≥11%	≥11%
一般主要構成物	粉土質土壤		黏土質土壤	
作為路基的評價	尚可到不良			

上表中 A-7 須細分成 A-7-5、A-7-6。A-7-5 的 PI 值 $\leq LL-30$ ，A-7-6 的 PI 值 $> LL-30$ ，換言之 A-7-6 的塑性範圍比 A-7-5 大，更不適合當路基材料。從上表中也可以看出，黏土質土壤比粉土質土壤更不適合作為路基材料。

實際上記錄分類名稱，必須在分類名稱之後以括弧標註分組指數(Group Index 群指數)，

$$GI = (F-35)[0.2+0.005(LL-40)] + 0.01(F-15)(PI-10) \quad \text{沒考過} \quad [3.8]$$

上式中 F 是通過#200 的重量百分比。GI 值愈小，愈適合做為路基材料，愈大愈不適合做為路基材料， $GI=20$ 就不適合做為路基材料。GI 值若算出為負數，則取零。分組指數的公式只是經驗式，談不上理論推導依據。分組指數有什麼功能？如果沒有分組指數，AASHTO 分類法頂多將土壤分成 12 類而已，堪稱粗糙。有了分組指數，就可以在每一類當中再加數字，細分出細顆粒的影響。分組指數沒有上限，分組指數越大，越不宜作為路基。

成功大學愛考 AASHTO 分類法與 USCS 的比較，如下表。

表 3-6 USCS v.s. AASHTO

比較		USCS	AASHTO	
相同處		1.俱使用篩分析結果、LL 與 PI 協助分類。 2.使用#200 為粗細分界。		
相異處	精緻度	對細顆粒土壤分類較精細	對粗顆粒土壤分類較精細	
	A line	使用 A line 協助分類黏土、粉土	不用 A line，用 PI=10 為界，分類黏土、粉土	
	陰影區	使用塑性圖陰影區	不使用塑性圖陰影區	
	細料影響	以塑性圖分類結果表示細顆粒影響	以分組指數表示細顆粒影響	
	有機土	可分類出有機土，如 OH、OL	不能分類出有機土	
	粗細分界	通過#200 的量，大於等於 50%者，整體為細顆粒。通過#200 的量，小於 50%者，整體為粗顆粒。	通過#200 的量，大於等於 36%者，整體為細顆粒。通過#200 的量，小於 35%者，整體為粗顆粒。	
	LL	側重 50	側重 40、41	
	篩號	側重使用#200、#4	側重使用#200、#40	
	用途	用於路基材料、一般結構物基礎材料、壩基材料、瀘層材料。	多用於路基，其他方面少用。	
	泥炭土	Pt	A-8	
	分類數量	把土壤分成 26 種	若不計 GI，則把土壤分成 12 種	

AASHTO 分類結果和統一土壤分類(USCS)的可能對照結果如下表。

表 3-7

AASHTO	A-2-6	A-2-7	A-3	A-4	A-5	A-6	A-7-5	A-7-6
USCS	GC,SC	GC,SC	SP	ML,OL	MH	CL	CL,OL	CH,OH

例 3-5.1 AASHTO 分類法

請依AASHTO分類法分類下列兩種土壤，並評價其做為路基的可行性。

篩號	土樣1，累積通過%	土樣2，累積通過%
#4	99	24
#10	95	17
#40	88	9
#100	75	5
#200	68	4
LL	47	----
PL	20	----
PI	27	NP(無塑性)



(1) 土樣 1 有 68% 通過#200，超越 35%，故為 A-4 ~ A-7 中的一種

LL=47，故為 A-5 或 A-7

PI=27，故為 A-7

該土壤的 PI = 27 > LL-30 = 47-30 = 17 故為 A-7-6

$$GI = (F-35)[0.2+0.005(LL-40)] + 0.01(F-15)(PI-10)$$

$$= (68-35)[0.2+0.005(47-40)] + 0.01(68-15)(27-10) = 7.755 + 9.01 = 16.765$$

寫成 A-7-6 (16.765) 不適合做為路基

(2) 土樣 2 有 4% 通過#200，未超越 35%，故為 A-1 ~ A-3

土樣 2 有 9% 通過#40，未超越 30%，故為 A-1-a

GI = 0 寫成 A-1-a (0) 適合做為路基

討論

題目給#4 的通過百分比，實際上用不到。請注意土力與基礎考題常有「煙幕彈」數據。

§3-6 歷年考題精選

練 1 基本名詞解釋

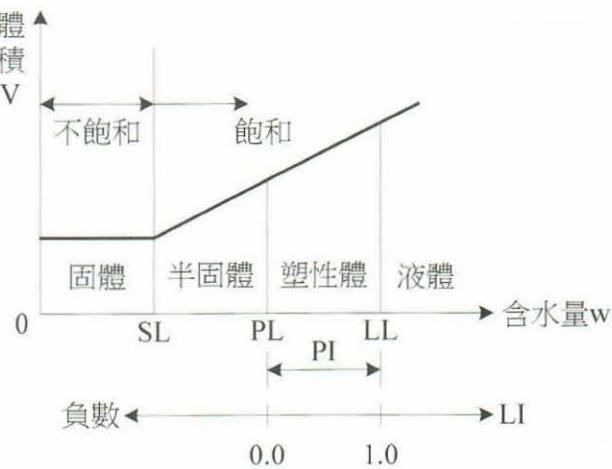
- (一)試說明土壤液性限度 (Liquid Limit, LL) 與塑性限度 (Plastic Limit, PL) 之物理意義。
- (二)某土壤之 $LL = 28.2\%$ ， $PL = 12.5\%$ ，現地含水量為 33% ，試求此現地土壤之液性指數 (Liquidity index)。
- (三)試說明土壤液性指數之物理意義。

<100年地方特考25 分>



(一)不同的土壤，均有其自己的「液性限度」，液性限度的單位同含水量單位，它代表某一特定的含水量，如果工地現場土壤的含水量高於液性限度，則土壤之力學表現宛如液體，抗剪強度低，壓縮量大，不適合做基礎材料。試驗室裏以特定步驟決定液性限度：將試樣放入液限儀內，以每秒兩轉的速率搖打液限儀，若能打擊 25 次恰使土樣閉合長度達 1.3cm ，則該試樣的含水量正好是液性限度。

不同的土壤，均有其自己的「塑性限度」，塑性限度的單位同含水量，它代表土樣「塑性體」和「半固體」的分界點。若工地現場含水量大於塑性限度，則土壤將表現出塑性；若工地現場含水量小於塑性限度，則土壤將表現出半固態。試驗室裏，在毛玻璃上將土壤搓成直徑 3mm 之細土條，且正好土樣斷裂，則該土壤的含水量就是塑性限度。



$$(二) \text{液性指數 } LI = \frac{w_n - PL}{LL - PL} = \frac{33 - 12.5}{28.2 - 12.5} = 1.31$$

(三)土壤的 LI 愈大，代表土壤的現地含水量愈高，行為愈趨近液體。當 LI=1 時，土壤力學表現像液體。當 LI 介於 0~1 之間，力學表現像塑性體。當 LI 為負數，力學表現像半固體或固體。LI 愈低，剪力強度愈大，質地愈脆，壓縮性愈小。

練 2 土壤分類

土樣A、B、C之篩分析及阿太堡限度分析結果如下表所示 (NP：非塑性，NA：無法求取)，請依土壤統一分類法 (USCS) 進行分類—給予分類，並比較三種土壤之壓縮性 (compressibility)、滲透性 (permeability)、作道路基層可行性 (values as base course for pavement)。

<修改100年土木高考三級20分>

土樣編號	礫石含量	砂含量	粉土及黏土含量	液限	塑限	均勻係數	曲率係數
A	62	32	6	NP	NP	5	3
B	22	68	10	19	13	5	2
C	0	24	76	55	32	NA	NA

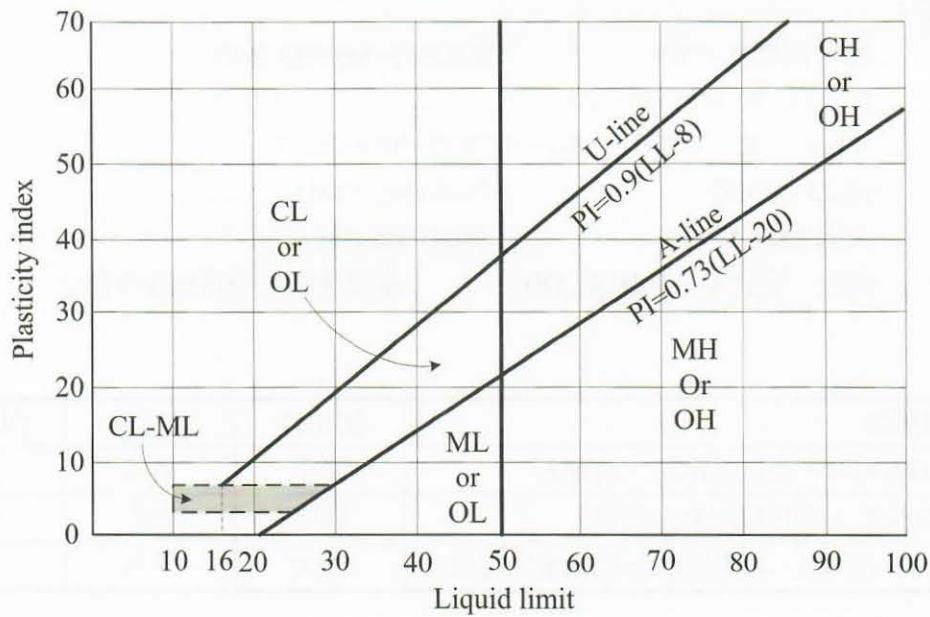


圖 1 塑性圖



(1) 土樣 A :

$$G = 62\%$$

歸類為礫石(G)

$$\text{細料含量 } F = 6\%$$

介於 5%~12% 之間，需用雙重符號描述

$$\text{曲率係數 } C_d = 3$$

滿足 $1 \leq C_d \leq 3$

$$\text{均勻係數 } C_u = 5$$

滿足 $C_u \geq 4$

所以為優良級配(W)

細料無塑性(NP, non-plastic) 所以為粉土(M)

綜上，土樣 A 為 GW-GM 優良級配粉土質礫石

土樣 B :

$$S = 68\%$$

歸類為砂(S)

$$\text{細料含量 } F = 10\%$$

介於 5%~12% 之間，需用雙重符號描述

$$\text{均勻係數 } C_u = 5$$

不滿足 $C_u \geq 6$

所以為不良級配(P)

$$PI = LL - PL = 19 - 13 = 6$$

$$4 \leq PI \leq 7$$

$$LL = 19$$

落於塑性圖陰影區

所以為黏土(C)

綜上，土樣 B 為 SP-SC

不良級配黏土質砂

土樣 C :

$$\text{細料含量 } F = 76\%$$

故為粉土(M)或黏土(C)

$$PI = LL - PL = 55 - 32 = 23$$

$$A \text{ line 之 } PI = 0.73(LL - 20) = 0.73(55 - 20) = 25.55$$

$$因 23 < 25.55$$

所以為粉土(M)

$$\text{又因 } LL = 55 > 50$$

得(H) 或 (O)

綜上，土樣 C 為 MH 或 OH

高塑性粉土或高塑性有機土

(2)

土壤種類	壓縮性	滲透性	剪力強度
A, GW-GM, 優良級配粉土質礫石	最小	最佳	最佳
B, SP-SC, 不良級配黏土質砂	居中	居中	居中
C, MH 或 OH, 高塑性粉土或高塑性有機土	最大	最差	最差

作為路基的材料，其承載力要高，也就是抗剪強度要高；體積變化要小，不宜有蒙脫土

等易吸水膨脹之礦物。

討論

1. 細料含量(Fine Content, FC 或 F)指的是小於#200 之顆粒，黏土及粉土就是細料。
2. NA 是 not available、not applicable，即資訊不足，無法求得、無法引用。NP 是 nonplastic，不具塑性。
3. 有些原文書寫優良級配須滿足 $1 \leq C_d \leq 3$ ，有些寫優良級配須滿足 $1 < C_d < 3$ ，故本題 A 土樣分類似有爭議，本題解以 $1 \leq C_d \leq 3$ 分類之。
4. 跳躍級配並不適合作為路基材料，因為它可能有大顆粒與小顆粒，缺乏中顆粒。很可能在道路使用年限中，因車輛震動、下雨滲入，造成細顆粒從大顆粒之間被逐漸沖走，造成地面凹陷、地底掏空。若有施工不良的下水道通過，接頭漏水可能加速掏空。

練 3 阿太堡試驗

請依序回答下列土壤阿太堡試驗問題：

<102年台科大土力共25分>

- (1) 下圖為臺科大同學正在進行阿太堡試驗，請問圖(a)或(b)何為液性限度試驗，並簡述液性試驗施作過程。(5分)



(a)

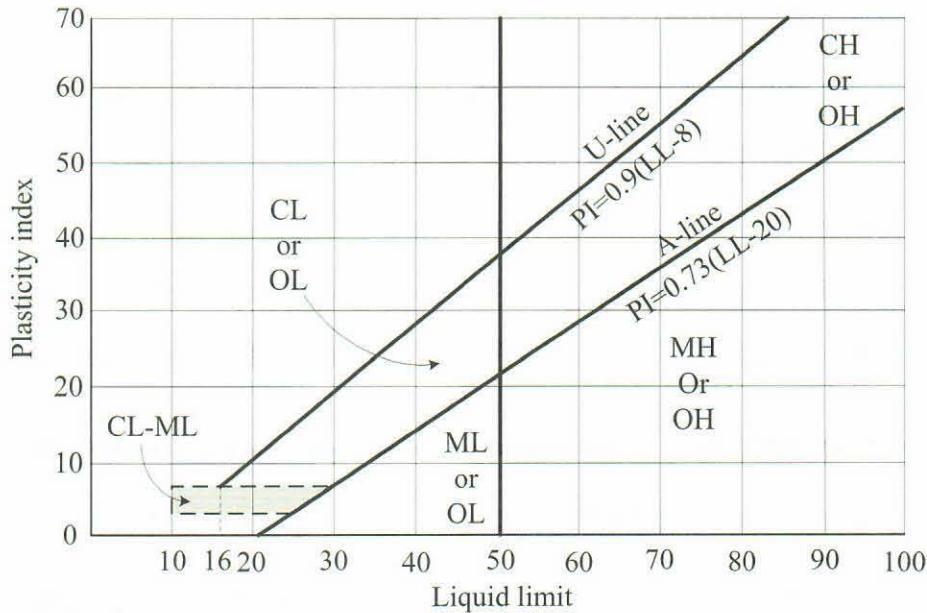


(b)

- (2) 在液性試驗中，若敲擊次數高於目標敲擊次數，這代表目前土壤含水量低或高於液性限度？下組試驗需要加水或是加土使得敲擊次數接近目標值？請畫圖說明如何決定液性限度，標明圖示中X與Y座標的名稱與單位，並在圖上標出目標敲擊次數為何。(5分)
- (3) 在完成阿太堡試驗後，需用下列塑性圖來進行土壤分類，說明塑性圖上A線與U線的用

意為何。(5分)

- (4) 若此土壤無明顯有機腐臭味，其經阿太堡試驗後獲得此土壤之塑性與液性限度為 $PL=20\%$ ， $LL=40\%$ ，利用下列塑性圖，判定此土壤為何種土壤(請同時寫出代號與中文名稱)，說明其土壤物理與工程特質，並舉出一大地工程案例(如基礎或是擋土牆)說明此種土壤可能會造成的工程問題。(10分)



(1) 圖(b)為液性限度試驗，看見液限儀。圖(a)是塑性限度試驗，在毛玻璃上搓成條狀土樣。(施作過程詳下小題)

(2) 目前太乾硬，目前含水量

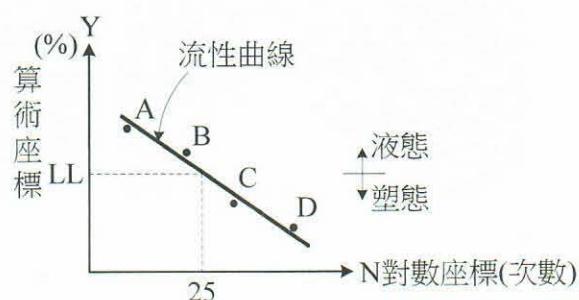
低於液性限度，需要加水。

X：打擊數 N。

Y：含水量 w%。

目標敲擊次數為 25 下。

以進行四次試驗為例說明，每次試驗的試體含水量均不同，土樣在液限儀內以刮刀劃開 1.1 cm 寬(橫向測量)的凹槽，敲擊 N 次後，土樣在縱向閉合長度恰達 1.3 cm，記錄含水量 w%



與打數 N，在半對數圖紙上標出 A 點(log N,w)。

再更換含水量，重複試驗，記錄新的含水量及打數，標出 B 點(log N,w)。

將 A、B、C、D 四點以直線迴歸，找到打數 25 次對應的含水量，該含水量即為所試驗黏土的液性限度 LL。

(3)若土樣落在 A line 以下，會被判定為粉土。

若土樣落在 A line 以上，會被判定為黏土。

若土樣落在 U line 以上，則代表試驗過程有誤，此點位不予採用。

U 是 upper(上界)之意。

利用 A line 及 U line，可以分辨黏土、粉土，以及試驗過程是否有誤。

(4) $LL = 40 < 50$ 故得 L

土壤 PI = LL - PL = 40 - 20 = 20

對於 A line，當 $LL=40$ ，則 A line 的 $PI = 0.73(40-20) = 14.6 < 20$ 故得 C

\Rightarrow 分類為 CL，低塑性黏土。

物理性質：當天然含水量(w_n) $<20\%$ 時，此土壤表現宛如固體或半固體。當 $20\% < w_n < 40\%$ 時，此土壤表現宛如塑性體。當 $w_n > 40\%$ 時，此土壤表現宛如液體。

工程性質：滲透性差，壓縮性比 CH 差，但比砂土、礫石之類大；剪力強度相對算低。

擋土牆後若以 CL 為回填土，則其不易透水的性質容易加大土、水壓力，造成過大的主動土壓力，擋土牆容易滑動或翻覆失敗。基礎下方若為此類土壤，可能無法提供足夠的承載力，以及造成總沉陷量或差異沉陷量過大。

討論

- 筆者大學時唸「土壤力學」時，頗有瞧不起此學科的心態，認為「結構學」、「鋼筋混凝土學」才有學問，「土壤力學」不過是玩泥巴的學問。日後終於證明我是錯的，且自己當年對土力形成的觀念架構也是錯得離譜，這一切來自於自大、閉門造車；後面能轉過來，得力於沉澱自己、多做考古題、多請教老師觀念。建議您多做考題，謙虛常問老師，比較容易形成正確的觀念架構。

2. 例如液性試驗，並不是說張三做出液性限度 $LL=45$ ，就代表全世界的黏土 LL 值均是 45。進行液性試驗所用的 4 個，或 5 個試體，均應來自同一工址，我們欲求出此工址土壤的 LL 值，這些試體，不可有些來自台北，有些來自新竹。我們對來自於同一工址的數個不同試體，增加或減少其水量(改變原始含水量)，看看哪一個含水量，恰可使土體受 25 次搖打後，在液限儀上閉合長度達 1.3 cm，此含水量就是該工址土壤的 LL 。
3. 為何求 LL 時，橫軸要採用對數座標？目的是要在水平橫軸方向壓縮圖形，如此不用耗費太寬的圖紙。在材料力學裏，很少採用 log 座標，在土壤力學裏卻常用 log 座標，目的就是要壓縮圖形，使斜率、曲率明顯，除此之外，無其他目的。
4. 本來筆者以為算式字亂寫、圖(分離體圖)亂畫，是結構組部份考生的專長，不料近日網路回覆朋友大地問題，發現大地組部份考生不遑多讓，我的媽呀，字真雷、圖像閃電，畫圖照樣「大俠舞劍，性之所欲，線之所至，尺是多餘，圓規廢物」。筆者老實回覆「你這種寫法、畫法，多久不改，就多久不會上榜。」因為那種寫法、畫法是個性的外延，那種個性可以推算出不會認真釐清觀念。謹慎的個性，會謹慎的釐清觀念，會謹慎拿直尺、圓規作圖，甚至在圖內就看到答案。

練 4 有機土

試統一土壤分類中 $\frac{\text{烘乾土壤液性限度}(LL_{\text{oven dried}})}{\text{未烘乾土壤液性限度}(LL_{\text{not dried}})} < 0.75$ 之判別式可用於分類何種土壤？

試說明判別式之意義，並列出此種土壤之分類符號和工程性質。 <99 年土木高考 20 分>



- (1) 此判別式可用於分類有機土壤(O)，這種土壤可能是 OL 或 OH，若 $LL \leq 50$ ，則為 OL(低塑性有機土)；若 $LL > 50$ ，則為 OH(高塑性有機土)。
- (2) 有機質在烘乾過程中會蒸散部分質量，當烘乾後進行試驗所得之 LL 少於原先未烘乾之 75%，則判定土壤為有機土壤。有機土壤常呈暗棕色至黑色，而且有特殊氣味，剪力強度低，適合園藝使用，不適合工程使用。

- (3) 對於 OL，若烘乾前之 PI 值 ≥ 4 且烘乾前落於 A line 之上，則為低塑性有機黏土；若烘乾前之 PI 值 < 4 且烘乾前落於 A line 之下，則為低塑性有機粉土。
- (4) 對於 OH，若烘乾前落於 A line 之上，則為高塑性有機黏土；若烘乾前落於 A line 之下，則為高塑性有機粉土。
- (5) 對於有機土壤，若以#200 過篩，殘留重量 $\geq 15\%$ 者，為砂質有機黏土或砂質有機粉土；若殘留重量 $< 15\%$ 者，代表含砂量太少，有機物的比例相對偏高。
- (6) 工程性質之滲透性：高塑性有機土(OH)的滲透性非常低，宛如高塑性黏土(CH)。低塑性有機土(OL)的滲透性比低塑性黏土(CL)高，幾乎和低塑性粉土(ML)相當。有機土和有機土比較，對#200 篩的留篩百分率越高者，砂的含量越多，滲透性較高。
- (7) 工程性質之壓縮性：有機土的壓縮性偏大，OH 尤其大。
- (8) 工程性質之剪力強度：有機土的剪力強度均偏低，不適合作路基材料、基礎材料。有機土也不適合以夯實方式使之緊密。

討論

土壤在烘乾後，含有機質的黏土或粉土之液限值均會降低，此為判斷土壤內存在有機質的指標。對於有機土，欲測定它在 A line 之上還是下，必須在烘乾前測定。注意統一土壤分類並無 OC、OM 之符號。

您在考場遇到這種冷門考題，情緒會不會跳起來？如果會，則這一次您還不是榜首。想一想：別人也是面對這種機車題目，別人沒有比較占便宜啊！如果想通這一層，情緒很快穩定下來，反而在考場上佔心理優勢！為什麼人家說 NBA 季後賽不看好沒經驗的隊伍，因為老將的價值就在於遇到這種機車題目不會慌張，他就是能一秒一秒磨，槍響剎那得分，三分破網弧線送對手回家！

練 5 統一土壤分類

回答下列問題：

- (一)某土樣之孔隙比 e 為0.80，含水量 w 為18%，比重 G_s 為2.70，求此土樣之飽和度為若干%及濕單位重為若干 kN/m^3 ？
- (二)某砂土填方，經輾壓後以砂錐法測得其濕單位重為18.2 kN/m^3 ，含水量 w 為7%，比重 G_s 為2.66，經試驗室測得其最大孔隙比為0.632，最小孔隙比為0.476，試求此填方之相對密度為若干%？並研判此填方之輾壓成果。
- (三)某一砂土樣，由其粒徑分佈曲線求得： $D_{10}=0.15 \text{ mm}$ ， $D_{30}=0.4 \text{ mm}$ ， $D_{50}=0.65 \text{ mm}$ ， $D_{60}=0.8 \text{ mm}$ ， $D_{85}=1.5 \text{ mm}$ ，求此試樣之平均粒徑、均勻係數 C_u 及曲率係數 C_c 各為若干？此土樣是否為級配良好之土壤？
- (四)若某無機質細粒土壤經試驗得細料有40%，其中，顆粒粒徑小於2 μm 的有11%，另其液性限度 LL 為38，塑性限度 PL 為18，若依美國統一土壤分類法，其分類符號應為何？若此土壤之含水量為14%，決定此土壤之液性指數 LI ，並說明其活性(activity)如何？
- (五)承上子題(四)，若此細粒土壤之土層屬正常壓密黏土層，且地下水位位於地表處，經試驗得：比重 $G_s=2.70$ ，孔隙比 $e=0.70$ ，不排水強度 c_u 為24 kPa ，試計算此土壤之取樣深度為若干m？

<102高考三級每小題5 分，共25 分>



(一) $Se = wG_s$

得 $0.8S = 0.18 \times 2.7$

解出 $S = 60.75\%$

$$\gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{2.7 + 0.6075 \times 0.8}{1 + 0.8} \times 9.81 = 17.364 \text{ kN/m}^3$$

(二) $\gamma_m = \gamma_d(1+w) \Rightarrow 18.2 = \gamma_d(1+0.07) \Rightarrow \gamma_d = 17.009 \text{ kN/m}^3$

$$\gamma_s = \gamma_d(1+e) \Rightarrow 2.66 \times 9.81 = 17.009(1+e) \Rightarrow e = 0.5341$$

$$\text{或 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{G_s + wG_s}{1+e} \gamma_w \Rightarrow 18.2 = \frac{2.66 + 0.07 \times 2.66}{1+e} \times 9.81$$

解出 $e = 0.5341$

$$D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} = \frac{0.632 - 0.5341}{0.632 - 0.476} = 62.7\% \quad \text{為中等緊密(medium dense, firm)}$$

若以2.3公斤的鐵鎚打擊直徑1.2 cm的鐵條，容易貫入此土壤30公分。作為路基，則夯

實度仍嫌不夠，若作為公園、綠地的基礎，則夯實度已夠。

D_r	<15%	15%~35%	35%~65%	65%~85%	>85%
分類	非常疏鬆	疏鬆	中等緊密	緊密	非常緊密

☆不同書籍分類法略異

$$(三) C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} = \frac{0.8}{0.15} = \underline{\underline{5.333}} < 6$$

$$C_d = \frac{D_{30}^2}{D_{10}D_{60}} = \frac{0.4^2}{0.15 \times 0.8} = \underline{\underline{1.333}}$$

分類為 SP，不良級配砂，不為級配良好

D_{10} 為有效粒徑， $D_{10}=0.15\text{ mm}$

平均粒徑(mean grain size) $D_{50}=0.65\text{ mm}$ 。土樣中，粒徑小於此值所佔的重量百分比為 50%，粒徑大於此值所佔的重量百分比也是 50%。

(四)題目文字疑有矛盾，「細粒土壤」一般來講常指粉土、黏土為主，此類土壤通過#200 的重量比會 $\geq 50\%$ ，不應是 40%。以下將題目之「細料有 40%」改為「粗料有 40%」求解。

$$PI = LL - PL = 38 - 18 = 20$$

A line 之 $PI = 0.73(LL-20)=0.73(38-20)=13.14 < 20$ ，故在塑性圖 A line 之上，分類得 C

$LL = 38 < 50$ 得“L” 故為 CL，低塑性黏土

$$LI = \frac{w_N - PL}{LL - PL} = \frac{14 - 18}{20} = \underline{\underline{-0.2}} \text{，為固體或半固體，質地脆，手扳易斷裂無延展性}$$

$$A_C = \frac{PI}{< 2\mu\text{m} \text{的重量百分比}} = \frac{20}{11} = \underline{\underline{1.818}}$$

活性愈高，土壤愈易膨脹，此土壤可能含較多的鈣-蒙脫土礦物

【若堅持將土樣分類為 SC 或 GC，則似又與第(五)小題格格不入】

$$(五) 對於 NC，\frac{c_u}{\sigma'_0} = 0.11 + 0.0037PI = 0.11 + 0.0037 \times 20 = 0.184$$

$$\sigma'_0 = \frac{c_u}{0.184} = \frac{24}{0.184} = 130.43\text{kPa}$$

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.7 - 1}{1.7} \times 9.81 = 9.81\text{kN/m}^3$$

$$\sigma'_0 = \gamma' z \Rightarrow 130.43 = 9.81z \Rightarrow z = \underline{\underline{13.3\text{ m}}}$$

討論

- 對於第(二)小題，當土樣通過#200 的重量百分比小於 15%時，此土樣輾壓後應進行相對密度試驗(粗料主控行為)；當土樣通過#200 的重量百分比大於 15%時(細料主控行為)，此土樣輾壓後應進行夯實度試驗。當土樣通過#200 的重量百分比幾乎就是 15% 時，建議這兩種試驗都要做。
 - 夯實度在政府機關的工程契約內，常寫成「壓實度」。
 - 有學者提出「相對密度 $D_r=0\%$ ，大約對應到相對夯實度 $R.C.=80\%$ ；相對密度 $D_r=100\%$ ，大約對應到相對夯實度 $R.C.=100\%$ 。」故有一簡單線性內插公式： $R.C.=80+0.2D_r$ 。按此公式，得 $R.C.=80+0.2D_r = 80+0.2 \times 62.7 = 92.54\%$ 。作為路基， $R.C.$ 應要達 95%以上。現地土壤要輾壓到 $D_r > 85\%$ ，相當困難。
 - Das 的書提出 $D_r = \frac{\gamma_{d,field} - \gamma_{d,min}}{\gamma_{d,max} - \gamma_{d,min}} \cdot \frac{\gamma_{d,max}}{\gamma_{d,field}}$ ①

$$4. \text{ Das 的書提出 } D_r = \frac{\gamma_{d,\text{field}} - \gamma_{d,\text{min}}}{\gamma_{d,\text{max}} - \gamma_{d,\text{min}}} \cdot \frac{\gamma_{d,\text{max}}}{\gamma_{d,\text{field}}} \dots \dots \dots \quad ①$$

聯立①、②兩式，並再令 $R_0 = \frac{\gamma_{d,\min}}{\gamma_{d,\max}}$

$$\text{Das 解出 R.C.} = \frac{R_0}{1 - D_r(1 - R_0)}$$

這種聯立很有問題，因為作密度試驗所得到的 $\gamma_{d,max}$ 並不會等於作夯實試驗所得到的 $\gamma_{d,max}$ ，這兩個 $\gamma_{d,max}$ 實際上是不同的物理狀態，只是不幸名稱相同。若按 Das 所提出的不合理怪公式，則本題 R.C.=96.21%。其他學者(Salgado)有強調，不同的試驗過程，會得到不同的物理狀態。

5. 有介紹平均粒徑(mean grain size)的書不多，《建築物基礎構造設計規範》有寫平均粒徑是 D_{50} ，也就是土樣中，有一半的重量能通過這尺寸的篩眼，另一半重量不能過此篩眼。
 6. LI 可為負數，無須大驚小怪。

練 6 統一土壤分類

依據統一土壤分類，對下列四種土壤進行分類，並比較其滲透性、壓縮性及膨脹性。

土樣 編號	礫石含 量(%)	砂含量 (%)	粉土及黏 土含量(%)	液性限 度(LL)	塑性指 數(PI)	均勻係 數(C_u)	曲率係 數(C_d)
A	29	67	4	NP	NP	3.4	2.6
B	29	60	11	32	16	4.8	2.9
C	0	24	76	60	26	----	----
D	65	32	3	NP	NP	6	2

NP：非塑性土壤，”----”：無法求得。

<89土木技師20分>



- (1) 土樣 A：砂含量 $67\% > 50\%$ ，且砂多於礫石，故得 S。粉土及黏土含量不足 5%，故不需進行塑性圖分析。均勻係數 $C_u=3.4 < 6$ ，故得 P(不良級配)。總結：SP。不良級配砂。
- (2) 土樣 B：砂含量 $60\% > 50\%$ ，且砂多於礫石，故得 S。粉土及黏土含量 11%，介於 5~12%，故需進行塑性圖分析，且為雙重符號。均勻係數 $C_u=4.8 < 6$ ，故得 P(不良級配)。土樣 PI=16 落於 A-line 之上，故得 C。總結：SP-SC。黏土質不良級配砂。
 【當 LL=32 時，A-line 之 PI=0.73(LL-20)=0.73(32-20)=8.76 < 16】
- (3) 土樣 C：粉土及黏土含量 $76\% > 50\%$ ，故得 C 或 M。液性限度 LL=60，故得 H(高塑性)。當 LL=60 時，A-line 之 PI=0.73(LL-20)=0.73(60-20)=29.2 > 26，土樣 C 落在 A-line 之下，故得 M 或 O。總結：MH 或 OH。高塑性粉土或高塑性有機土。
- (4) 土樣 D：礫石含量 $65\% > 50\%$ ，且礫石多於砂，故得 G。粉土及黏土含量不足 5%，故不需進行塑性圖分析。均勻係數 $C_u=6 > 4$ 且曲率係數 $C_d=2$ ，介於 1~3，故得 W(優良級配)。總結：GW。優良級配礫石。

滲透性：GW > SP > SP-SC > MH 或寫 D > A > B > C

壓縮性：MH > SP-SC > SP > GW 或寫 C > B > A > D

膨脹性：MH > SP-SC > SP > GW 或寫 C > B > A > D

討論

剪力強度： $GW > SP > SP-SC > MH$ 。粗粒料較能貢獻剪力強度，請看台鐵鐵軌下方的碎石道碴，它能提供較高的剪力強度承載列車重量，且道碴之間孔隙較大，排水較迅速，軌道才不會淹水，能提高行車安全。

任一個建築工程或土木工程的工地，其土壤必是變化萬端，不只東西南北不一樣，甚至上下也不一樣，一言難盡，可能同時存在粗顆粒、細顆粒與人類的垃圾。所以，很難精準形容一個工地的土壤性質，但是，我們還是得設法找到形容詞、名詞來形容它。換個比喻來講，工地土壤就好像一個「人」(eg : you or me)一樣，一個人可能同時存在一些好習慣(勤儉)與一些壞習慣(貪杯)，偶爾會作一點好事(捐錢給慈濟、弱勢團體)，也偶爾會作一點壞事(在游泳池裡尿尿)，這樣的人，你如何以少量而精準的形容詞形容他(她)？很難吧！但還是要找一些形容詞、名詞來形容他(她)，即對他(她)「貼標籤」。貼標籤是為了「好利用」。

尺寸介於#200 和#4 之間的是砂(sand)，砂及礫石都是粗粒料。

均勻係數 C_u 和曲率係數 C_d 的定義必記，「均勻」是一件好事嗎？就好像 1000 顆乒乓球堆在一起，超均勻，就剪力強度觀點講，不是好事，因剪力強度相對低。

練 7 統一土壤分類

- (1) 請說明粒徑分佈曲線上所求得之有效粒徑 D_{10} 之意義。(5%)
- (2) 已知土樣之體積 $V=9.25 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ，重量 $W=17.56 \times 10^{-2} \text{ kN}$ 。含水量 $w=13.5\%$ ，土粒比重 $G_s=2.65$ 。求此土樣之乾單位重 $\gamma_d=?$ 及孔隙比 $e=?$ (10%)
- (3) 有一土層其土壤分類結果為SP-SM。請簡要敘述此土層之工程特性並說明粒徑分佈特性及細料含量多寡。 (10%)

<103台科大土力>



- (1) 在粒徑分佈曲線上，累積通過百分比 10% 所對應的粒徑稱為有效粒徑 D_{10} 。也就是整體土樣中，粒徑比 D_{10} 還小的顆粒，其重量和佔整體的 10%。對於乾淨細砂，Hazen 提出經驗公式：滲透係數 $k = C_1 D_{10}^2$ 。 D_{10} 可進行土壤液化評估， D_{10} 小於 1 mm 者有液化風險。

$$(2) \gamma_m = W / V = 17.56 \times 10^{-2} / 9.25 \times 10^{-3} = 18.98 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_m = \gamma_d (1+w)$$

$$18.98 = \gamma_d (1+0.135)$$

$$\text{解出 } \underline{\gamma_d = 16.73 \text{ kN/m}^3}$$

$$\gamma_s = \gamma_d (1+e)$$

$$2.65 \times 9.81 = 16.73(1+e)$$

$$\text{解出 } \underline{e = 0.554}$$

(3)滲透性：中等到佳。

壓縮性：壓縮性不明顯，即時沉陷量比例多，壓密沉陷量少，二次壓縮量也少。

剪力強度：屬中等，但仍不足以作為路基。

粒徑分佈特性：該土樣通過#4(4.75 mm)重量比大於等於 50%，該土樣無法滿足「 $C_u \geq 6$ 且 $1 \leq C_d \leq 3$ 」。該土樣之塑性圖分析，落於 A line 之下，且液限比 LLR ≥ 0.75 。

細料含量多寡：通過#200(75 μm)稱為細料，此部分佔全體重量的 5%~12%。

討論

該土樣的細粒料比例雖只佔整體的 5%~12%，但已經影響整體的工程行為，故以雙重符號表示之。這有些像社會上少數有權有勢的人，能有效影響政府的施政方向，影響力不下於人數更多的中產階級。

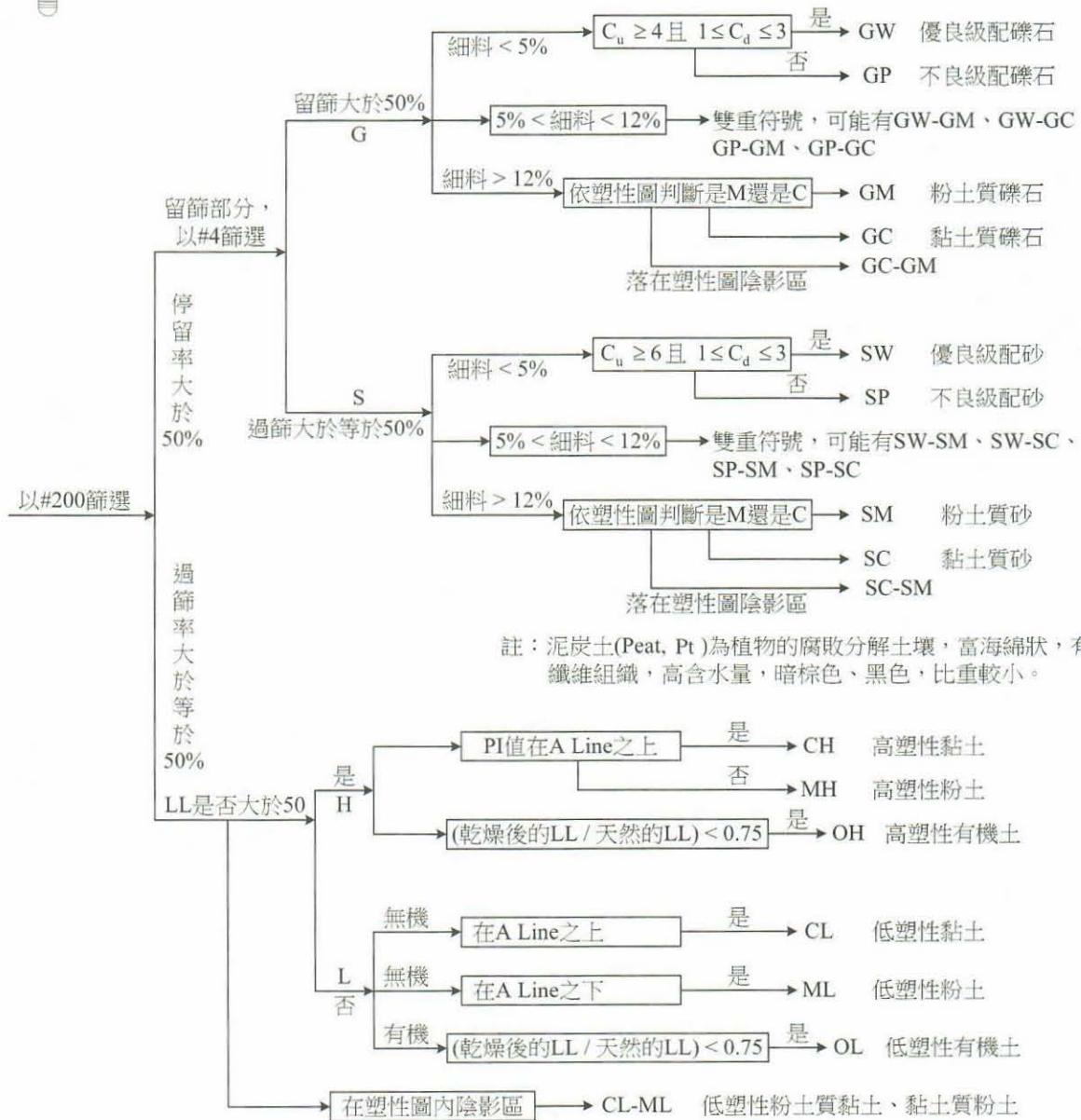
社會只要有貨幣存在，就自動存在有權有勢的人，絕對跑不掉，北韓也有，重點是權和勢怎麼使用。

有考生認為「粒徑越大者，滲透性越高，排水越好，壓縮性應該越大」。此錯矣。卵礫石粒徑大，顆粒之間的孔洞就大，排水良好，但是卵礫石本身很難被壓縮，故應縮性很小。飽和黏土的滲透性低，顆粒極細小，但只要願意等待，俟其內部的超額孔隙水壓排除後，壓密沉陷量就大。

練 8 統一土壤分類

以樹狀圖及其他輔助圖且以文字簡註，說明「統一土壤分類法」(unified soil classification)之分類原則與土壤種類。

<96年高考二級25 分>



討論

統一土壤分類法(USCS)乃土木工程師之必記，要自己練習畫流程圖。分類到頭昏腦脹，你累了嗎？輕鬆一下，你知道為什麼雨水下水道人孔蓋是圓的嗎？這是微軟的入學考題喔。因為

長方形的蓋子容易在坑的對角線掉下去，雨水下水道有時頗深，不容易撈上來。中華電信或台電的坑較淺，尚可用長方形的蓋子，掉下去容易揀。

練 9 統一土壤分類

使用統一土壤分類系統(USCS)對某土壤樣品進行分類的結果為SM, 請說明其係符合哪一些分類準則(criteria) ? (5%)

<104年高考三級>



1. 殘留在#200 的重量超過總重的 50%。
2. 取出殘留在#200 的量，以#4 篩之，通過#4 的量比殘留在#4 的量還多。
3. 通過#200 的重量超過總重的 12%。
4. 取通過#40 的部分進行塑性圖分析，點位(LL, PI)落在 A line 之下。

【探求人生意義與你和我】

有一名國中生「帥哥」，你也知道，人到了那個青黃不接的年紀，所有的問題依舊是問題；不是問題的，也能出問題，只有自己不是問題。

由於學校老師與父母不斷說「你讀書是為你好，將來出社會…」，帥哥聽到耳朵都長繭了，再加上認為學校某些老師與同學總是對自己有「意見」，決定要自力救濟，找到人生的意義。

那個星期五早上，帥哥與母親衝突，不想上學，母親身形已經比九年級的帥哥矮小，根本沒辦法逼他上學，帥爸說「我有事要到竹北一趟，若不想上學，就跟我去吧！」帥哥媽喜出望外，「你趕快帶他去吧，我必須上班了。」

「記得帶你的悠遊卡，我們坐電聯車。」帥爸說。

一路上兩人同車廂但不同座位，而且還堅決地背對背(不是打全壘打那種)。上班族早已下車，車上東南亞的女性乘客說不定比本地人多，兩人依舊無言，窗外風光依舊明媚。

竹北到了，帥爸屁股像被 epoxy 黏住，繼續坐著，帥哥在驚訝之餘，斜視著那位被稱為爸爸的人，電車緩緩地啟動，過了一站又一站，好像沒終點。不，應該是有的，如果屁股一直黏住，到終點新營站，列車長一定會幫忙拔屁股。

看見右手邊好多風車，竹南站到了，帥爸下車。或許是兩人都太疲倦，帥爸不知兒子有沒有下車，帥哥也不知爸爸下車，繼續坐著，列車繼續做它該做的事…，啟動，朝南奔馳。

竹南街上，掛滿競選的旗幟，竟然有 5 人要選鎮長，嘖嘖，忽然想到某人說「垃圾不分藍綠」，「是的，今晚有資源回收。」老人喃喃自語。離火車站不遠的路上，就有人蔬果鋪地叫賣，十足好感情的鄉下，賞完鄉下風光，啖個鐵路便當，老人坐火車回到家，帥哥還沒回來。

帥爸不疾不徐拿書在客廳享用。一小時之後，門打開，又飢餓又累的帥哥火冒三十丈走進來。「還好你有帶悠遊卡，不然你怎麼回來。」帥爸說。

帥哥憤怒說「悠遊卡坐到泰安就沒錢了，你……知……道……嗎？」

「原來探求人生意義是要花錢的。」老人驚訝的合不攏嘴。



第四章 土體中之應力

體 系 表

☆總應力、水壓力與有效應力

- 均質均向地層受點荷重
- 各種均布荷重與壓力球根觀念
- Newmark 應力影響圖
- 局部面積加載之角隅法
- ☆局部面積加載之概算法
- ☆靜止土壓力係數 K_0
- 應力轉換與莫爾圓

學 習 重 點

1. 總應力=孔隙壓力+有效應力。「有效應力」是人為創出來的名詞，土體裏未必量得到。可是這人為創出來的名詞，肩負著壓密理論和強度理論裏最重要的角色。
2. 廣大面積加載或廣大面積開挖，對土體內部應力的改變，也是常考的題目。砂土或礫石排水迅速，動工後，長短期均無超額孔隙水壓。黏土排水慢，動工後產生超額孔隙水壓，請注意畫出長短期的水壓力隨深度的剖面圖，畫不出來，就是觀念有盲點。
3. 壓力球根觀念影響基礎鑽探深度應該多深。
4. 局部面積加載，可用角隅法或概算法求應力增量。考場內概算法較常用。
5. 靜止土壓力係數 K_0 的意義要明瞭，它是透過有效應力定義。
6. 應力轉換的觀念同材料力學，但符號法則不同，造成公式與畫圖細節略異於材力。

本章重點濃縮成一句話「理解土體裡的應力增量怎麼算」。

材料力學和土壤力學都談應力，你預期兩者公式會不會類似？本章主旨旨在於說明地表承受外力，或水位有升降變化時，地表下某一土壤點的垂直應力增量如何計算，又因為加載導致超額孔隙水壓力增加，須時間消散，故黏土計算應力時還有長、短期之分。在材料力學與結構學裏，載重通常是以極緩慢的速率施加在結構體上，但是土力的地表超載，理論上，不管超載面積大小，超載是一次瞬間到位。

為何要計算土壤的應力增量？計算有效應力增量，是分析土壤沉陷量的基石，也是分析土壤是否剪力破壞的必要過程，當外力超越土壤極限承載力，土壤將發生剪力破壞。何謂剪力破壞？拿剪刀剪紙或竊賊以油壓剪剪斷鐵窗都是顯例，剪力破壞會出現兩個相對位移的滑動面。在本章內，學者 Boussinesq 把土壤假設為均質均向、基礎版視為柔性基礎，推導出地表下某一點的應力增量。當然現場土壤不是均質均向，RC 基礎版未必柔性，使用公式、圖表時要有工程師的判斷。

地表超載面積大小當然影響地底下應力增量大小，解題前請先釐清是廣大面積還是局部面積加載。計算局部面積受載造成的應力增量時，如果題目沒有給圖表，也沒給 Boussinesq 系列公式，則常使用 2：1(垂直：水平)應力傳遞法簡算應力增量。

§4-1 總應力、水壓力與有效應力

茲考慮如圖 4-1 之地層，今欲計算地表下深度 z 處 A 點之垂直向應力 σ_v ，方法乃仿國中靜水壓力計算方式，想像單位面積上的虛擬土柱，將單位重 γ_m 乘以深度 z ，得

$$\sigma_v = \gamma_m z \quad [4.1]$$

上式 σ_v 稱為覆土應力(Overburden Pressure)，是總應力(Total Pressure)，以壓應力為正。

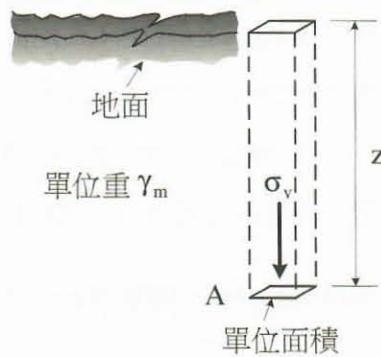


圖 4-1

考慮圖 4-2，如果地層各層次單位重不同，則覆土應力計算方式為 Σ (各層單位重 \times 該層厚度)，即 $\sigma_v = \sum \gamma_i \times h_i$ [4.2]

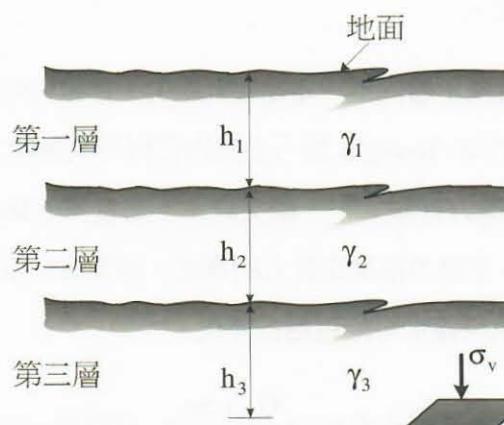


圖 4-2

倘若地層下有靜態水，如圖 4-3，則地下水位面以下的點，該點垂直總應力 $\sigma = \gamma_m \times h_1 + \gamma_{sat} \times h_2$ ，靜態水壓力(Hydrostatic Pore Water Pressure, Static State) $u_{ss} = \gamma_w h_2$ 。依國中物理，靜止水裏的任一點，四面八方的水壓力皆相等。

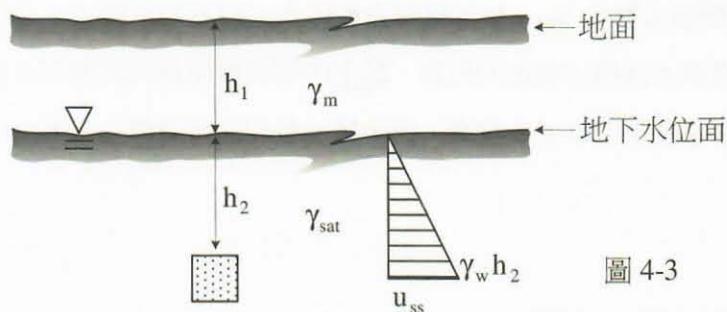


圖 4-3

水壓力 u_w 有三個分量，即靜態水壓力 u_{ss} 、滲流水壓力 u_s 與超額孔隙水壓力 u_e ，都是以壓應力為正。數學式為 $u_w = u_{ss} + u_s + u_e$ [4.3]

水在土壤內有流動，就存在滲流(Seepage)水壓力 u_s ，此值可正可負；土壤裡的水若受到額外力量壓迫且水壓一時之間又無處消散的話，就會產生超額(Excess)孔隙水壓力 u_e ，此值亦可正可負。例如有些羽球選手打球後，拿冰敷袋裝冷水冰敷肩膀，若不壓迫冰敷袋，則袋內的水只呈現靜態水壓力，若壓迫冰敷袋，則袋內的水就多了超額孔隙水壓力。

$$\text{飽和下，定義有效應力(Effective Stress)} \sigma' = \text{總應力} \sigma - \text{水壓力} u_w = \sigma - (u_{ss} + u_s + u_e) \quad [4.4]$$

$$\text{當不存在滲流水壓與超額孔隙水壓時，} \sigma' = \text{總應力} \sigma - \text{水壓力} u_w = \sigma - u_{ss} \quad [4.5]$$

$$\text{定義土壤內某一點的壓力水頭(Pressure Head)} h_p \equiv \frac{u_w}{\gamma_w} = \frac{u_{ss} + u_s + u_e}{\gamma_w} = \frac{\text{總水壓}}{\gamma_w} \quad [4.6]$$

其單位是長度，例如公尺。

有效應力乃人為定義，實際土體內不一定存在此應力。定義有效應力有什麼好處呢？它的好處是工程上方便利用，1925 年 Terzaghi 說「土體內任何可測量的工程性質(eg：滲透性、壓縮性、剪力強度)，均和有效應力有關」^{註 1}，原文詳下。而實際的顆粒接觸應力，根本無法得知。嚴格來講，前述總應力、水壓力都是統計上的算法，因為單位重是統計上平均得到的，而真實的水位線並不是平的，水位線也可能每週在變化。

對於部分飽和土壤，溼土單位重公式 $\gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w$ 常用到。注意砂土毛細水區的水壓力是負數，因為水承受拉力。由於內力乃成對且反向，故拉人者人恆拉之，水受拉就是水在拉土壤，土壤也拉水，毛細水會造成有效應力增加，因為毛細水「拉緊」土壤了。

地表廣大面積加載後，不論長短期，砂土、礫石均能迅速反應水位，迅速排光超額孔隙水壓 u_e ，只留下靜態水壓力 u_{ss} ，故計算時先算砂土、礫石的水壓力，再用總應力扣水壓力得到有效應力。地表廣大面積加載後的短期，黏土內部微觀結構狀況來不及改變，故有效應力來不及改變，含水量、孔隙比來不及改變，仍維持加載前的有效應力，再用總應力扣有效應力得到水壓力。

註 1：Terzaghi 說“All measurable effect of a change of stress, such as compression, distortion and a change of shearing resistance, are exclusively due to changes in the effective stresses.”

地底下土層狀況複雜，地下水可能來自雨水、山裏滲流到山麓腳(或盆地邊緣)的地下水、或來自河流、水庫的滲漏水。圖 4-4 顯示的地層剖面，砂土層①區和②區的地下水來源可能就不同，說不定①區的水壓力比②區還高，造成噴泉或自流井，那麼①區就是拘限含水層。

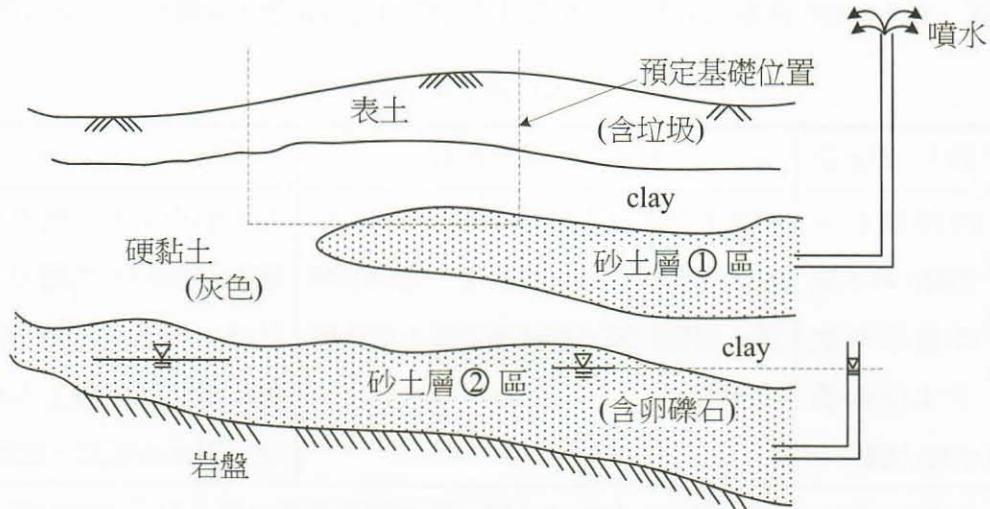


圖 4-4 黏土會阻絕上下水壓力傳遞

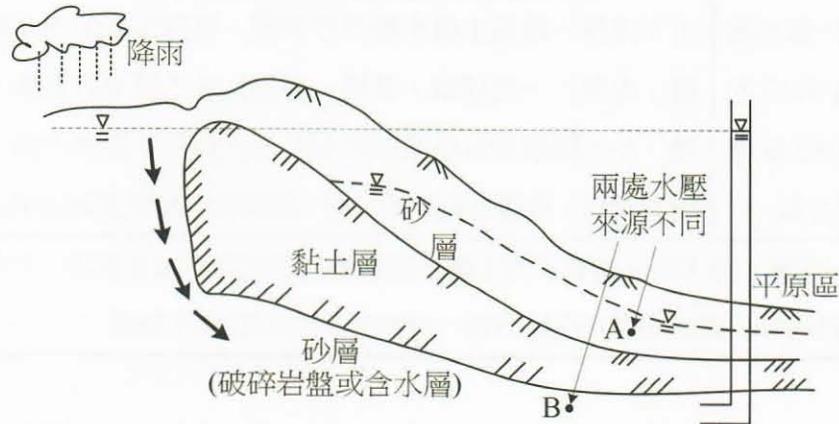


圖 4-5(a) 本圖有兩個獨立的靜態水位面

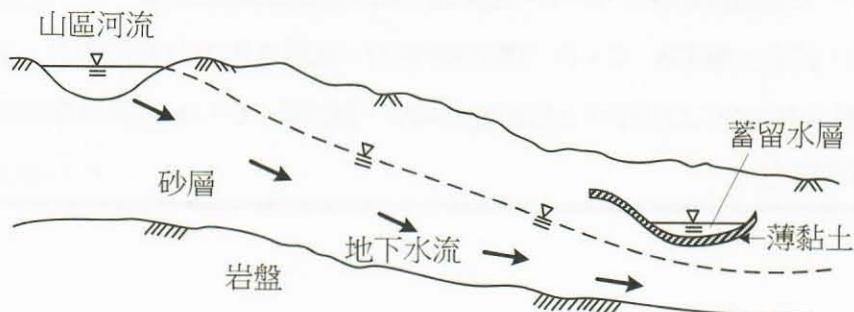


圖 4-5(b)

圖 4-5(a)也是很多考生搞不清楚的地方，所以[例題 4-1]一直解錯。注意看圖 4-5(a)平原區黏土層底下的砂層(或破碎岩盤)，此砂層(或破碎岩盤)水位不受平原區黏土層上方砂層的抽水影響，因為雙方的水壓力來源不一樣。圖 4-5(a)不是亂掰的，見於陽明山、礁溪、關渡等山麓底部處。圖 4-5(a)的 A 點和 B 點，水壓受不同靜態水位面影響，A 處降水，不影響 B 水壓。

表 4-1 畫水壓力圖要領

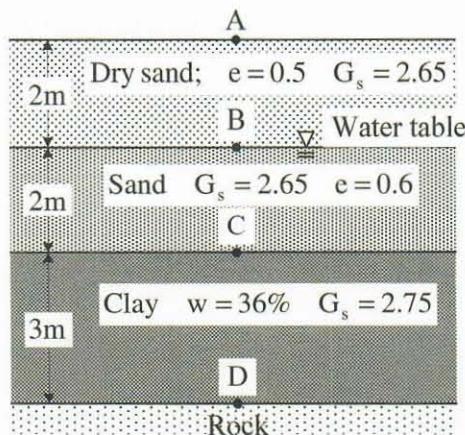
	砂土、礫石層	黏土廣大面積加載	黏土的上或下層透水層抽水
短期	無超額孔隙水壓，依水壓計指示或地下水位面畫水壓力圖。	剛加載完，黏土層有效應力不變，超載全由超額孔隙水壓承受。隨時間漸增，超額孔隙水壓逐漸消散，有效應力漸增。	短期黏土層的水壓力不變，有效應力=總應力-水壓力。下方砂層抽水，下交界面水壓力一定跳躍；若在黏土層上方砂層抽水，上交界面水壓力一定跳躍。
長期	無超額孔隙水壓，依水壓計指示或地下水位面畫水壓力圖。	黏土層上、下的透水層水壓力圖先畫好之後，以「線性內插」的方式將上下連接，繪黏土層水壓力分布圖。整個水壓力剖面圖不會有「斷層跳躍」現象，一定連續。長期，超額孔隙水壓消散完畢，黏土殘留靜態水壓，抽水問題會有穩態滲流水壓 u_s 。使用「線性內插」代表認定黏土為均質材料，滲透係數維持常數，每單位長度的流線消耗掉一樣的總水頭。	

建議：同一題裏，深度剖面若有不同土壤，則砂土、礫石層不論長短期，均無超額孔隙水壓，相對簡單，建議先畫其水壓力圖，再畫黏土的水壓力分布圖。

例 4-1.1 毛細現象

有一工址，土壤剖面如圖所示，e：孔隙比， G_s ：土壤顆粒之比重，w：含水量，AB之間為完全乾砂，試求土壤中B、C、D 三點的總應力、孔隙水壓力及有效應力。當地下水位下降至C位置時，此時BC之間的砂土飽和度為60%，試求B、C、D 三點長期的總應力、孔隙水壓力及有效應力。

<改編地方特考25分>



簡化土層剖面示意圖



(1) 降水前

$$\text{乾砂 } \gamma_s = \gamma_d(1+e) \Rightarrow \gamma_d = \frac{2.65}{1+0.5} = 1.7667 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{溼砂 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \times \gamma_w = \frac{2.65 + 0.6}{1+0.6} \times 1 = 2.03125 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{黏土 } Se = wG_s \Rightarrow 1 \times e = 0.36 \times 2.75 = 0.99$$

$$\text{黏土 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \times \gamma_w = \frac{2.75 + 0.99}{1+0.99} \times 1 = 1.879 \text{ tf/m}^3$$

B 點

$$\sigma_B = \sigma'_B = 2 \times 1.7667 = 3.53 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 0 \text{ tf/m}^2$$

	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
B	3.53	0	3.53
C	7.596	2	5.596
D	13.233	5	8.233

C 點

$$\sigma_C = 2 \times 1.7667 + 2 \times 2.03125 = 7.596 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = 2 \times \gamma_w = 2 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma'_C = \sigma_C - (u_w)_C = 5.596 \text{ tf/m}^2$$

D 點

$$\sigma_D = 7.596 + 3 \times 1.879 = 13.233 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = (2+3) \times \gamma_w = 5 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma'_D = \sigma_D - (u_w)_D = 8.233 \text{ tf/m}^2$$

(2) 降水後長期

$$\text{BC 之間砂層 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.6 \times 0.6}{1+0.6} \times 1 = 1.88125 \text{ tf/m}^3$$

B 下 點

$$\text{總應力 } \sigma_B = 2 \times 1.7667 = 3.53 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = -\gamma_w z_1 \times S = -1 \times 2 \times 0.6 = -1.2 \text{ tf/m}^2 \quad \sigma'_B = \sigma_B - (u_w)_B = 4.73 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_C = 3.53 + 2 \times 1.88125 = 7.2925 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_C = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma'_C = \sigma_C = 7.2925 \text{ tf/m}^2$$

D 點

$$\text{總應力 } \sigma_D = 7.2925 + 3 \times 1.879 = 12.93 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = 5 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma'_D = \sigma_D - (u_w)_D = 7.93 \text{ tf/m}^2$$

	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
B 上	3.53	0	3.53
B 下	3.53	-1.2	4.73
C	7.2925	0	7.2925
D	12.93	5	7.93

討論

1. 降水後，毛細水區域的水壓力為負值，有效應力會增加。負的水壓力代表水是受拉。

第二層溼砂含水量 w = Se/G_s = 0.6 × 0.6 / 2.65 = 13.58%。

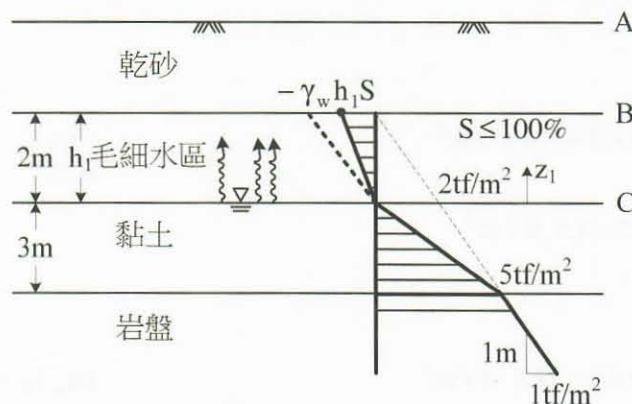
2. ★黏土阻絕砂層和岩盤水壓力的溝通，在砂層抽水，中間黏土阻絕水壓溝通，岩盤水壓力不受影響，請看圖 4-5(a)的 A 與 B。 $(u_w)_D$ 並不是 3 tf/m²，是 5 tf/m²。

3. 降水後短期，應力如下表(unit: tf / m²)

	總應力	水壓力	有效應力
B 上	3.53	0	3.53
B 下	3.53	-1.2	4.73
C 上	7.2925	0	7.2925
C 下	7.2925	2	5.2925
D	12.93	5	7.93

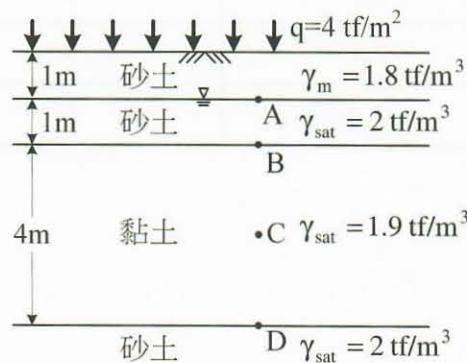
4. 降水後長期，BC 間的溼土單位重 $\gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w$ 。

5. 降水後長期，C 處為水位面，水位面的水壓力為零，從水位面往上計算毛隙水壓力的公式為 $u_w = -\gamma_w z_1 S$ ，S 是飽和度，z₁ 是往上距離。



例 4-1.2 廣大面積超載，黏土層短期內激發正 u_e，有效應力不變

有一工址，土壤剖面如圖所示，請算出地表加載前A、B、C、D四點的總應力、水壓力與有效應力。廣大面積加載 $q = 4 \text{ tf/m}^2$ 之後，請算出加載後短期與長期之A、B、C、D四點的總應力、水壓力與有效應力。(C是B、D中點)





(1) 加載前 A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 1 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.8 - 0 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

B 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 1 + 2 \times 1 = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 3.8 - 1 = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 + 1.9 \times 2 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = (1+2)\gamma_w = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 7.6 - 3 = 4.6 \text{ tf/m}^2$$

D 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 7.6 + 1.9 \times 2 = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = (1+4)\gamma_w = 5 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 11.4 - 5 = 6.4 \text{ tf/m}^2$$

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	1.8	0	1.8
B	3.8	1	2.8
C	7.6	3	4.6
D	11.4	5	6.4

(2) 廣大面積加載後短期

A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 + 4 = 5.8 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 5.8 - 0 = 5.8 \text{ tf/m}^2$$

B 上 點 (此點仍屬砂)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 + 4 = 7.8 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 7.8 - 1 = 6.8 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 + 4 = 7.8 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 2.8 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_B = 7.8 - 2.8 = 5 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 7.6 + 4 = 11.6 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 4.6 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_C = 11.6 - 4.6 = 7 \text{ tf/m}^2$$

D 上 點 (黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 4 = 15.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 6.4 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_D = 15.4 - 6.4 = 9 \text{ tf/m}^2$$

D 下 點 (砂土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 4 = 15.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = (1+4)1 = 5 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 15.4 - 5 = 10.4 \text{ tf/m}^2$$

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	5.8	0	5.8
B 上	7.8	1	6.8
B 下	7.8	5	2.8

C	11.6	7	4.6
D 上	15.4	9	6.4
D 下	15.4	5	10.4

(3)廣大面積加載後長期

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	5.8	0	5.8
B 上	7.8	1	6.8
B 下	7.8	1	6.8
C	11.6	3	8.6
D 上	15.4	5	10.4
D 下	15.4	5	10.4

討論

B 上與 B 下，兩點的屬性完全不同，一者排水快一者排水慢，計算時須予分開。

降水後的長期或加載後的長期，黏土內的超額孔隙水壓已經完全消除，或者滲流水壓力完全達到穩定值，故先算黏土的水壓力，然後用總應力扣水壓力得到有效應力。長期後黏土內部微觀結構已經有所改變，與短期時不同。

加載前，應力分析如下表 (unit : tf/m²)

點位	總應力	水壓力	有效應力
A	1.8	0	1.8
B	3.8	1	2.8
C	7.6	3	4.6
D	11.4	5	6.4

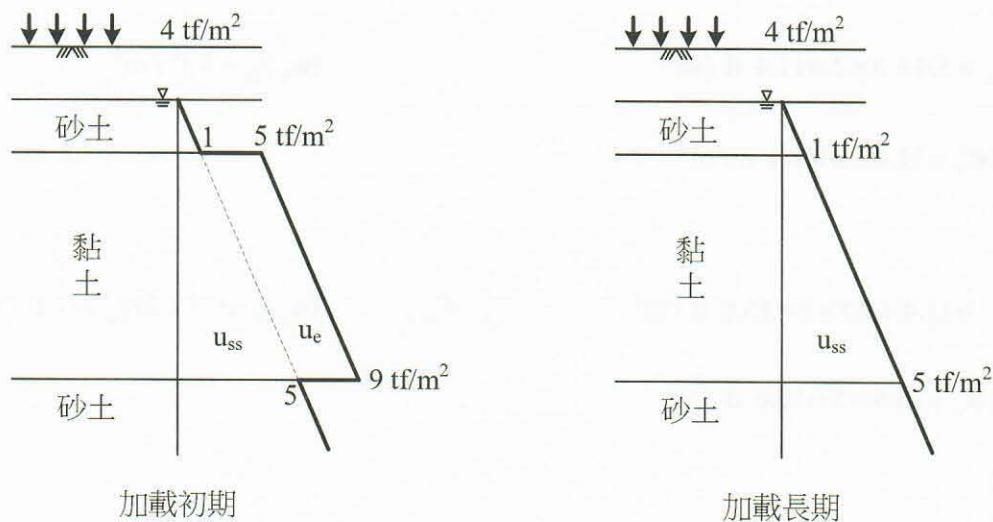
B 下、C 與 D 上，這三點加載後短期的有效應力，可抄加載前的有效應力。人一出生就接觸水(羊水)，人可以三天不吃飯，不能一天沒有水，然考生有多了解水？在日常生活經驗裏，給您一定質量的水，在始終維持液態的條件下，請問要改變它的體積容易還是改變它的壓力容

易？改變壓力容易。1 cm³的液態水，很難壓縮成 0.99 cm³，但你只要把水裝進密封袋子(eg：氣球、保險套)裏，徒手用力擠壓袋子，袋子內的水壓力即刻反應升高。

加載後的表格，可合併成下表 (unit : tf/m²)

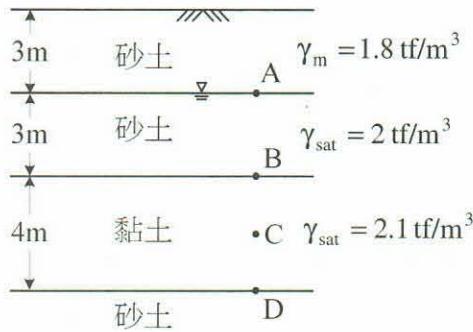
點位	總應力	水壓力		有效應力	
		加載後短期	加載後長期	加載後短期	加載後長期
A	5.8	0	0	5.8	5.8
B 上	7.8	1	1	6.8	6.8
B 下(黏土)	7.8	5	1	2.8	6.8
C(黏土)	11.6	7	3	4.6	8.6
D 上(黏土)	15.4	9	5	6.4	10.4
D 下	15.4	5	5	10.4	10.4

黏土的水壓力才有長短期之分，砂土與礫石則無此分別(因迅速排除超額孔隙水壓)，故黏土、砂土交界面水壓力可能不連續。廣大面積加載初期，黏土層產生矩形超額孔隙水壓 $u_e = 4 \text{ tf/m}^2$ 。黏土加載的初期，黏土來不及排水，體積不變，顆粒結構方式不變，有效應力就不變。水受壓力後，水不容易改變體積，但水的壓力相對容易上升。排水後，體積改變，顆粒結構方式改變，有效應力就改變。



例 4-1.3 廣大面積開挖(解壓)，腦袋活絡，視為加反向載重，激發負 u_e

有一工址，土壤剖面如圖所示，C在B下方2 m。請算出目前A、B、C、D四點的總應力、水壓力與有效應力。倘若地表廣大面積開挖2 m深度之後，請算出開挖後短期與長期之A、B、C、D四點的總應力、水壓力與有效應力。



(1) 挖土前 A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 3 = 5.4 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 5.4 - 0 = 5.4 \text{ tf/m}^2$$

B 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 5.4 + 3 \times 2 = 11.4 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_B = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 11.4 - 3 = 8.4 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 2.1 \times 2 = 15.6 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_C = (3 + 2)\gamma_w = 5 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 15.6 - 5 = 10.6 \text{ tf/m}^2$$

D 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 15.6 + 2.1 \times 2 = 19.8 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_D = (3 + 4)\gamma_w = 7 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 19.8 - 7 = 12.8 \text{ tf/m}^2$$

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	5.4	0	5.4
B	11.4	3	8.4
C	15.6	5	10.6
D	19.8	7	12.8

(2)大面積挖土後短期

A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1 \times 1.8 = 1.8 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.8 - 0 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

B 上 點 (此點仍屬砂)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 + 3 \times 2 = 7.8 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_B = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 7.8 - 3 = 4.8 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 7.8 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 8.4 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_B = 7.8 - 8.4 = -0.6 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 15.6 - 2 \times 1.8 = 12 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 10.6 \text{ tf/m}^2 \quad (u_w)_C = 12 - 10.6 = 1.4 \text{ tf/m}^2$$

D 上 點 (黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 19.8 - 2 \times 1.8 = 16.2 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 12.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = 16.2 - 12.8 = 3.4 \text{ tf/m}^2$$

大面積挖土後短期之應力

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	1.8	0	1.8
B 上	7.8	3	4.8
B 下	7.8	-0.6	8.4
C	12	1.4	10.6
D 上	16.2	3.4	12.8
D 下	16.2	7	9.2

D 下 點 (砂土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 16.2 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = (3 + 4)1 = 7 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 16.2 - 7 = 9.2 \text{ tf/m}^2$$

(3)廣大面積開挖後長期

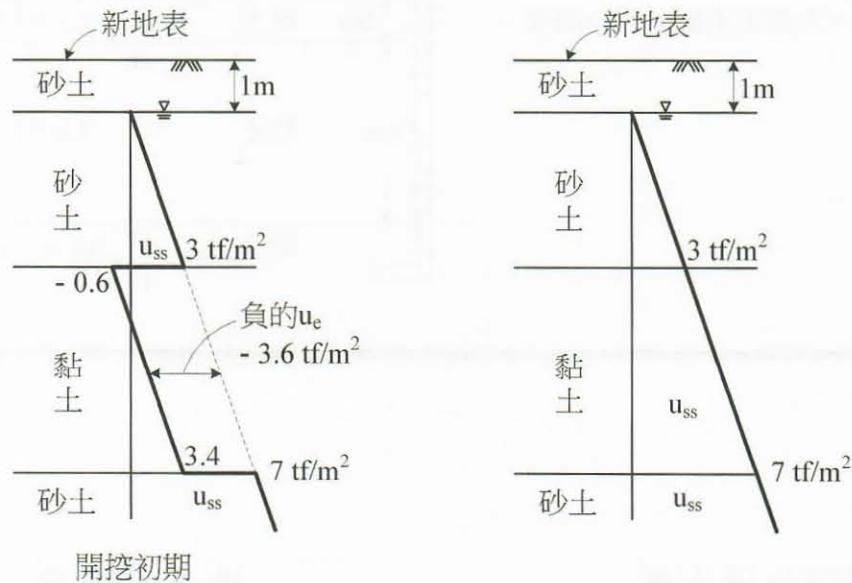
點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	1.8	0	1.8
B 上	7.8	3	4.8
B 下(黏土)	7.8	3	4.8
C(黏土)	12	5	7
D 上(黏土)	16.2	7	9.2
D 下	16.2	7	9.2

討論

廣大面積開挖後的表格，可合併成下表 (unit : tf/m²)

點位	總應力	水壓力		有效應力	
		開挖後短期	開挖後長期	開挖後短期	開挖後長期
A	1.8	0		1.8	
B 上	7.8	3		4.8	
B 下	7.8	-0.6	3	8.4	4.8
C	12	1.4	5	10.6	7
D 上	16.2	3.4	7	12.8	9.2
D 下	16.2	7		9.2	

B 下、C 與 D 上，這三點開挖後短期的有效應力，可抄開挖前的有效應力。廣大面積開挖初期，黏土層產生負的矩形超額孔隙水壓 $u_e = -2 \times 1.8 = -3.6 \text{ tf/m}^2$ 。

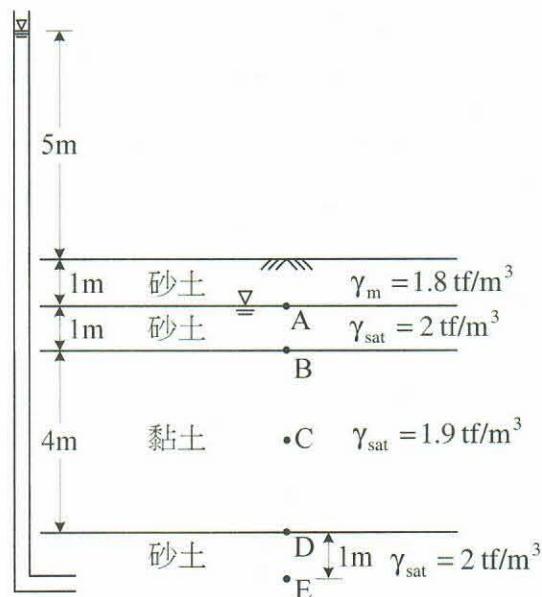


廣大面積開挖，數學上即加「負的廣大面積超載」， $q = -3.6 \text{ tf/m}^2$ ，故瞬間 u_e 增量為 -3.6 tf/m^2 。

例 4-1.4 拘限含水層抽水

有一工址，土壤剖面如圖示，C在B下方2 m。黏土層下方的拘限含水層之水頭高出地表5 m，

- (1) 請算出目前A、B、C、D、E五點的總應力、水壓力與有效應力，還有E點的壓力水頭(又稱管測水頭)，並畫出水壓力分布剖面圖。
- (2) 如果水壓計在拘限含水層內埋得更深，請問水壓計內的液面高度，會更高還是更低？
- (3) 在拘限含水層進行抽水，使得該拘限含水層之水頭從地表上5 m降到低於地表4 m，請算出降水後短期與長期之A、B、C、D、E五點的總應力、水壓力與有效應力，還有E點的壓力水頭，並畫出水壓力分布剖面圖。



(1) 降水前 A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 1 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.8 - 0 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

B 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 + 2 \times 1 = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 3.8 - 1 = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

D 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 1 + 2 \times 1 + 1.9 \times 4 = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = (5 + 1 + 1 + 4)\gamma_w = 11 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 11.4 - 11 = 0.4 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 1 + 2 \times 1 + 1.9 \times 2 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = (1 + 11)/2 = 6 \text{ tf/m}^2$$

【B、D 兩點水壓力和之半】

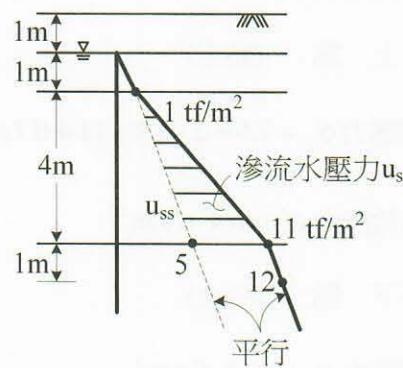
$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 7.6 - 6 = 1.6 \text{ tf/m}^2$$

E 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 2 \times 1 = 13.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_E = (5 + 1 + 1 + 4 + 1)\gamma_w = 12 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 13.4 - 12 = 1.4 \text{ tf/m}^2$$



$$\text{壓力水頭 } h_p = \frac{(u_w)_E}{\gamma_w} = \frac{12}{1} = 12 \text{ m}$$

(2) 設拘限含水層的滲透係數夠大，滲流引發的總水頭損失僅在黏土層中產生，砂層中無總水頭損失，則水壓計液面高度不變。

(3) 降水後短期

A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1 \times 1.8 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.8 - 0 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

B 上 點 (此點仍屬砂)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 + 1 \times 2 = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 3.8 - 1 = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 3.8 - 2.8 = 1 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 + 2 \times 1.9 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = 7.6 - 1.6 = 6 \text{ tf/m}^2$$

D 上 點 (黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 7.6 + 2 \times 1.9 = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 0.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = 11.4 - 0.4 = 11 \text{ tf/m}^2$$

D 下 點 (砂土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = 2 \times 1 = 2 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 11.4 - 2 = 9.4 \text{ tf/m}^2$$

E 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 1 \times 2 = 13.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_E = (2+1)\gamma_w = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 13.4 - 3 = 10.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{壓力水頭 } h_p = \frac{(u_w)_E}{\gamma_w} = \frac{3}{1} = 3 \text{ m}$$

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	1.8	0	1.8
B 上	3.8	1	2.8

B 下	3.8	1	2.8
C	7.6	6	1.6
D 上	11.4	11	0.4
D 下	11.4	2	9.4
E	13.4	3	10.4

降水後長期

A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1 \times 1.8 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.8 - 0 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

B 上 點 (此點仍屬砂)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 + 1 \times 2 = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 3.8 - 1 = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \times 1 = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

(長期後 B 上、B 下均相同)

D 點 (長期後 D 上、D 下均相同)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 7.6 + 2 \times 1.9 = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = 1 \times 2 = 2 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 11.4 - 2 = 9.4 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 + 2 \times 1.9 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = (1 + 2) / 2 = 1.5 \text{ tf/m}^2$$

【B、D 兩點水壓力和之半】

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 7.6 - 1.5 = 6.1 \text{ tf/m}^2$$

E 點

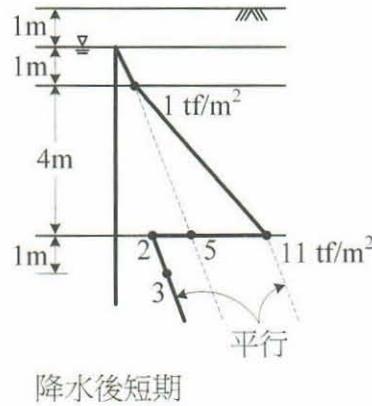
$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 1 \times 2 = 13.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_E = (2+1)\gamma_w = 3 \text{ tf/m}^2$$

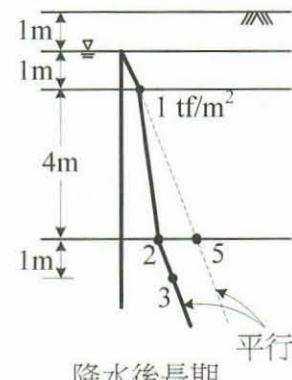
$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 13.4 - 3 = 10.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{壓力水頭 } h_p = \frac{(u_w)_E}{\gamma_w} = \frac{3}{1} = 3 \text{ m}$$

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	1.8	0	1.8
B 上	3.8	1	2.8
B 下	3.8	1	2.8
C	7.6	1.5	6.1
D 上	11.4	2	9.4
D 下	11.4	2	9.4
E	13.4	3	10.4



降水後短期



降水後長期

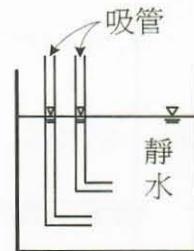
討論

第(1)小題還沒開始抽水，水壓力從上而下是連續直線或折線，不會有斷層式跳躍變化。

降水前，黏土層內的滲流方向乃是向上。降水後長期，黏土內滲流方向向下。降水後長期，D、E 兩點總水頭相等，故 D、E 之間無滲流。總水頭與位置水頭的觀念詳第五章。

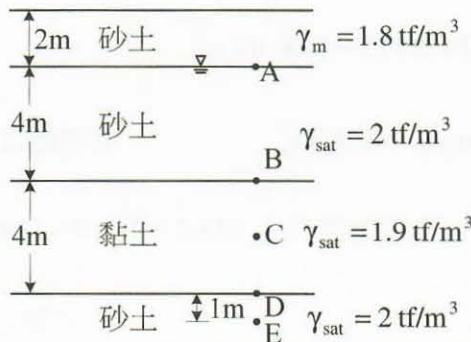
降水後長期，黏土層中點有效應力增加($1.6 \text{ tf/m}^2 \rightarrow 6.1 \text{ tf/m}^2$)，會引起壓密沉陷。

很多考生對水壓計的行為不了解，導致無法解題，其實自己做實驗就可以解惑。你去7-eleven拿兩支有彎頭的吸管，兩支都彎成L狀之後，插入盛有靜止水的杯內，如下圖，一支插的深度比較淺，另一支插的深度比較深，看看兩支吸管內的液面有沒有一樣高？你自己就已經看到答案了。吸管就是小型水壓計呀！



例 4-1.5 地表砂層抽水

有一工址，土壤剖面如圖所示，C在B下方2 m。請算出B、C、D、E四點的總應力、水壓力與有效應力。後來在黏土層上方的砂層抽水，使得該砂層之水位線降低3 m，請算出降水後短期與長期之B、C、D、E四點的總應力、水壓力與有效應力，並畫出水壓力分布剖面圖。



$$(1) \text{ B 點} \quad \text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 2 + 2 \times 4 = 11.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \times 4 = 4 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 11.6 - 4 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{C 點} \quad \text{總應力 } \sigma_v = 11.6 + 2 \times 1.9 = 15.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = 6 \times 1 = 6 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 15.4 - 6 = 9.4 \text{ tf/m}^2$$

D 點 總應力 $\sigma_v = 15.4 + 2 \times 1.9 = 19.2 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_D = 1 \times 8 = 8 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 19.2 - 8 = 11.2 \text{ tf/m}^2$$

E 點 總應力 $\sigma_v = 19.2 + 2 \times 1 = 21.2 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_E = 1 \times 9 = 9 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 21.2 - 9 = 12.2 \text{ tf/m}^2$$

(2) 降水後初期，水位線以上視為溼砂，地表下 5m 皆為溼砂。

B 上 點 (此點仍屬砂) 總應力 $\sigma_v = (2+3)1.8 + 1 \times 2 = 11 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 11 - 1 = 10 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土) 總應力 $\sigma_v = 11 \text{ tf/m}^2$

$$\text{水壓力不變 } (u_w)_B = 4 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 11 - 4 = 7 \text{ tf/m}^2$$

C 點 總應力 $\sigma_v = 11 + 2 \times 1.9 = 14.8 \text{ tf/m}^2$

$$\text{水壓力不變 } (u_w)_C = 6 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 14.8 - 6 = 8.8 \text{ tf/m}^2$$

D 上 點 (黏土) 總應力 $\sigma_v = 14.8 + 2 \times 1.9 = 18.6 \text{ tf/m}^2$

$$\text{水壓力不變 } (u_w)_D = 8 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 18.6 - 8 = 10.6 \text{ tf/m}^2$$

D 下 點 (砂土) 總應力 $\sigma_v = 18.6 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_D = (4+4) \times 1 = 8 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 18.6 - 8 = 10.6 \text{ tf/m}^2$$

E 點 總應力 $\sigma_v = 18.6 + 1 \times 2 = 20.6 \text{ tf/m}^2$

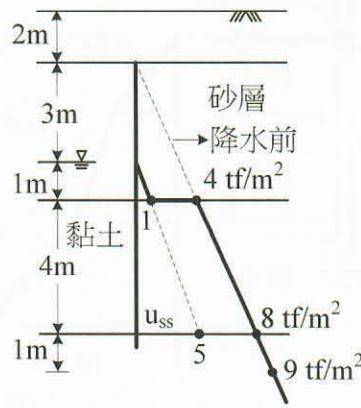
$$(u_w)_E = (4+4+1)\gamma_w = 9 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 20.6 - 9 = 11.6 \text{ tf/m}^2$$

降水後短期

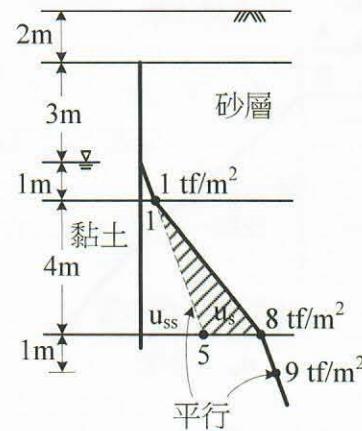
點位	總應力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)
B 上	11	10	1
B 下(黏土)	11	7.0	4.0
C(黏土)	14.8	8.8	6.0
D 上(黏土)	18.6	10.6	8.0
D 下	18.6	10.6	8
E	20.6	11.6	9

降水後長期

點位	總應力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)
B 上	11	10	1
B 下(黏土)	11	10	1
C(黏土)	14.8	10.3	(1+8)/2 = 4.5
D 上(黏土)	18.6	10.6	8
D 下	18.6	10.6	8
E	20.6	11.6	9



降水初期



降水長期

討論

抽水導致砂層水位下降，下降部分，現場可能有毛細現象，但須給飽和度 S 方能計算水壓力，本題沒給 S，毛細程度也可能處處不一，故勉強設 S=0%，若要設 S 為其他值，記得在答

案紙上說清楚。降水 3 m 後，黏土上方的砂土單位重降低 0.2 tf/m^3 ，造成黏土短期總應力降低 0.6 tf/m^2 ，由於短期黏土的水應力不變，所以黏土有效應力就必須降低 0.6 tf/m^2 。

表層砂降水後的初期，黏土層有三角形 u_e (上寬下尖)、三角形 u_s (上尖下寬)及 u_{ss} ，不是矩形的 u_e 。表層砂降水後的初期，因受黏土阻隔而不透水，黏土滲透係數很小，短期像塊鋼鈑，阻絕上下水壓力的「溝通」，底層砂變成拘限含水層，其壓力水頭維持 8 m 而非變成 5 m。換言之，降水後的初期，黏土層下方的砂層之水壓力不受影響，仍維持原值。降水後的長期，黏土層下方的砂層之水壓力仍不受影響，維持原值。換個比喻，黏土像個 20 公分厚的樓版，樓上的人跳舞吵鬧，樓下的人完全聽不到，因為那麼厚的樓版，阻絕了聲音的溝通。

長期後，三角形 u_e 消散完畢，留下三角形 u_s 與 u_{ss} 。

如果題目換個考法，表層砂水位不動，但在黏土底下的砂層抽水，一樣造成黏土層有三角形的 u_e (但屬上尖下寬)，也不是矩形的 u_e 。

圖 4-6 表示，若在上層砂土抽水，使水位從 A 降到 B，則黏土層會產生上寬下尖的超額孔隙水壓圖 u_e ，此 u_e 隨時間而逐漸消散。圖 4-7 表示，若在下層砂土抽水，使下砂土水壓計下降 Δh ，則黏土層會產生上尖下寬的超額孔隙水壓圖 u_e ，此 u_e 隨時間而逐漸消散。

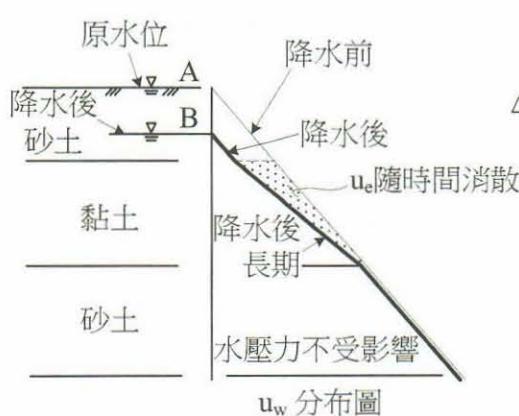


圖 4-6

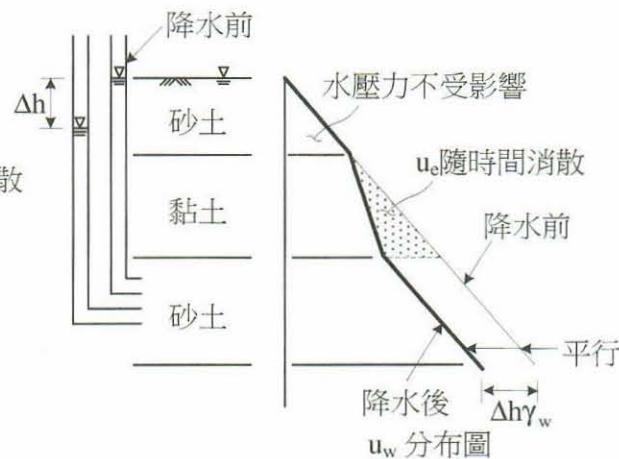


圖 4-7

§4-2 均質均向地層受點荷重 5-2

何謂均質的(homogeneous)？何謂均向的(isotropic)？各校甄試的口試常考(eg：中央大學)，請考生務必要會，並能舉例為佳。均向是在形容一個材料點(土力就是指土壤微素)的特性，如果一個材料點在各方向的力學表現均相同，我們稱此點是「均向的」。例如某一土壤微素 A，它三個方向的滲透係數皆相等， $k_{x,A} = k_{y,A} = k_{z,A}$ ，則可稱 A 點在滲透性是均向的。均向就是「各方向的表現均勻」，其翻譯的確有達意。

均質描述的對象是一大團物體，不是一個點。如果一大團物體裏，任取兩個點，而這兩個點在同一方向的力學表現相同，我們稱此團物體是「均質的」。例如某一土層裏任取微素 A、B 兩點，若 $k_{x,A} = k_{x,B}$ ， $k_{y,A} = k_{y,B}$ ， $k_{z,A} = k_{z,B}$ ，則可稱此土層在滲透性是均質的。均質就是「質地均勻」，翻譯得也妙。「任取」反而是嚴格的要求，讀者不能鍾情、偏好土體裏的某一些點位，「任取」反而變成「毫無例外」之意。舉班級為例，「一年甲班任選兩名學生，血型一定一樣」，這樣反而是很嚴格的要求「全班血型一定要一致」才辦得到。

注意成立均質，不一定須要 $k_{x,A} = k_{y,A} = k_{z,A}$ 。如果發現 $k_{x,A} = k_{x,B} = k_{y,A} = k_{y,B} = k_{z,A} = k_{z,B}$ ，則此土層在滲透性是均質且均向。均質且均向是最簡單的狀況，其力學模型最簡單。

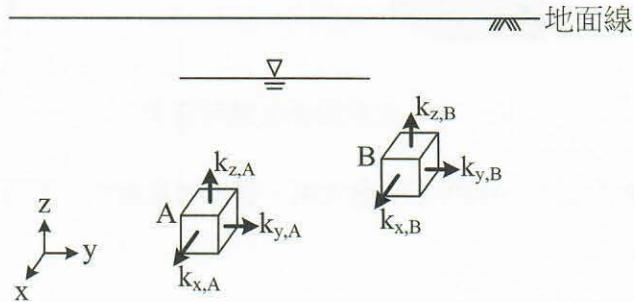


圖 4-8

土體根本就不均質(heterogeneous)不均向(anisotropic)，所以依據均質均向理論出來的公式，常常要加修正係數或安全係數，並且參考其他人的研究結果、處理經驗與檢討報告，形成自己的心得。

參考圖 4-9，法國數學家兼物理學家 Joseph Boussinesq(1842~1929)於 1883 年提出均質均向的半無限域彈性體，承受鉛直點荷重(集中力)時，彈性體內的應力增量 $\Delta\sigma_z$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{L^5} \quad [4.7]$$

此式叫做「基本解」，導出此式宛如打開潘朵拉的盒子(Pandora's box)，宛如人類發明文字，鬼神與研究生夜哭。圖 4-9 裡， $r^2 = x^2 + y^2$ ， $L^2 = r^2 + z^2$ 。

所謂的半無限域彈性體，意指地表上方空無一物，地表下的彈性體(i.e., 土壤)無限大。此半無限域彈性體無重量。式[4.7]的 P 與 $\Delta\sigma_z$ 是線性關係，雙方均為一次方，在材料降伏或破壞以前，可用重疊原理。以下各節，許多應力增量理論解均是導自於公式[4.7]。此公式可謂僅供參考，因為土壤不是均質均向，不是無重量，土層厚度有限更不可能達到半無限域。

從公式[4.7]可以看出，離集中力 P 作用點愈遠，垂直應力增量愈小。

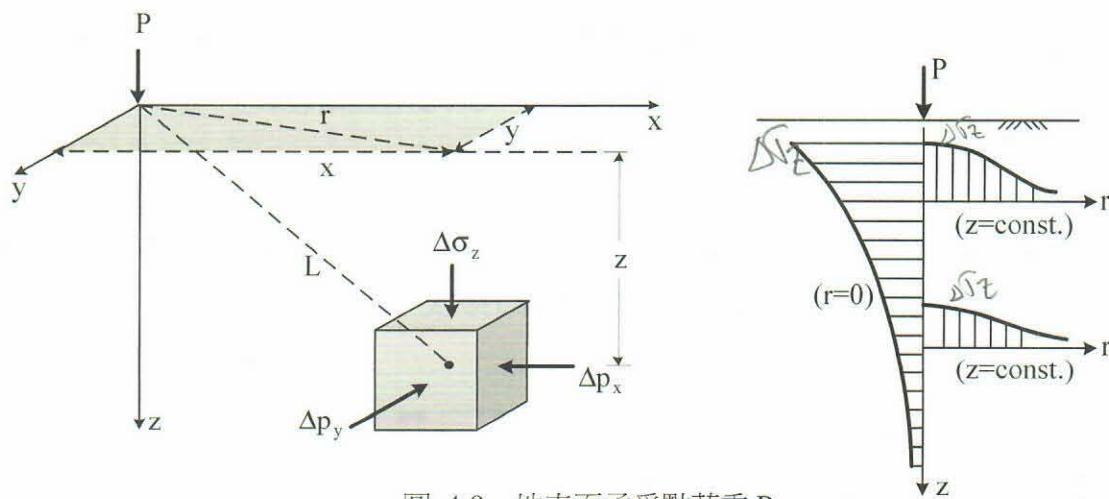


圖 4-9 地表面承受點荷重 P

上右圖顯示，在 P 力正下方($r=0$)深度愈大處，應力增量愈小。在固定($z=\text{const.}$)深度處，離 P 愈遠應力增量愈小。

§4-3 各種均布荷重與壓力球根觀念

考慮下圖，柔性條型基礎(基礎長度出紙面無限長)寬度 B，承受均布載重 q (單位：[力量/面積]， F/L^2)，載重分布長度無限長(條型基礎，長度為出紙面方向，長度 $\rightarrow \infty$)，利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，可以積分算出 P 點垂直應力增量 $\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + 2\delta)]$ [4.8]

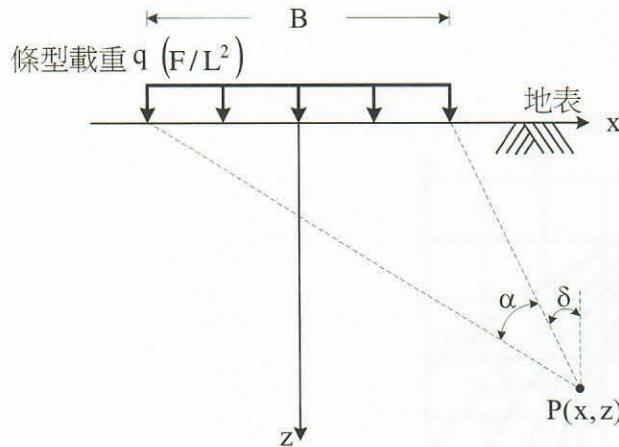


圖 4-10 條型基礎承受均布載重

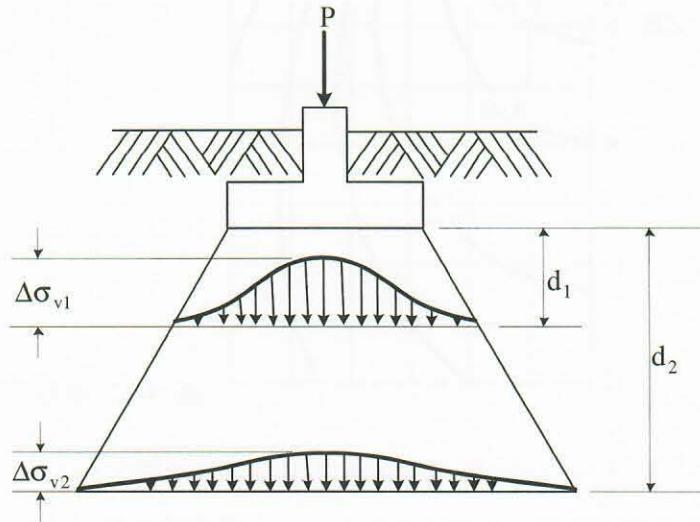


圖 4-11 基腳寬度有限，長度無限

以[4.8]為基石，可導得在同一深度 d 處，條型基礎中心正下方，應力增量會比兩側大，如圖 4-11，此圖亦可看出應力往兩側、往下擴散。條型基礎的分析問題，就是材料力學裡的平面應變(Plane Strain)問題(詳筆者《材料力學論衡》第十一章)，此類型結構體具有某一維尺度特

別長的特徵(eg：長條型基礎、擋土牆、隧道結構體、防波堤、…)，結構體受力後，在此長向之應變經常為零，或極近零；在長向的應力是常數，分析或設計時，常取長向的單位長度進行。

將土壤裏應力增量相同的點連線，可畫出等應力增量線，如圖 4-12，由於看起來像洋蔥球根，故稱壓力球根(Pressure Bulb)、應力球根(Stress Bulb)或等應力線。注意條型基礎中心下方深度 $6B$ 處，應力增量接近 $0.1q$ ，這可代表條型基礎鑽探「至少」應抵達的深度。

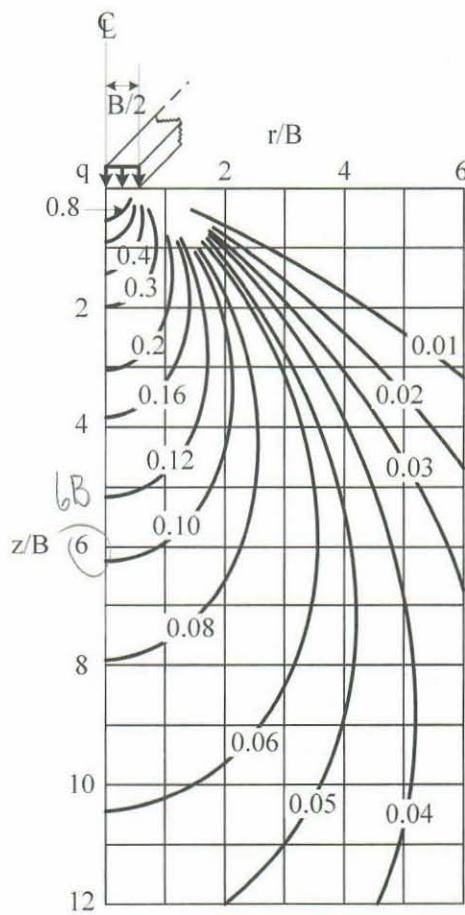


圖 4-12 條型基礎壓力球根

為何剛才說「至少」？因地表下正向應力與剪應力增量大小，不只受載重大小與載重分布情形影響，也受基礎版形狀、基礎版勁度大小、土壤彈性係數、波松比影響，亦受水平、垂直傳遞距離影響。

Boussinesq 認為土體承受垂直外力後，土體內側向可以伸展，也就是側向應變不為零，這是 Boussinesq 的假設。另一學者 Westergaard 則提出不同假設，假設土體承受垂直外力後，土體內側向不可以伸展，也就是側向應變為零，從而導出另一系列公式，因對國考無益，有興趣

者請翻閱相關書籍^{註2}。

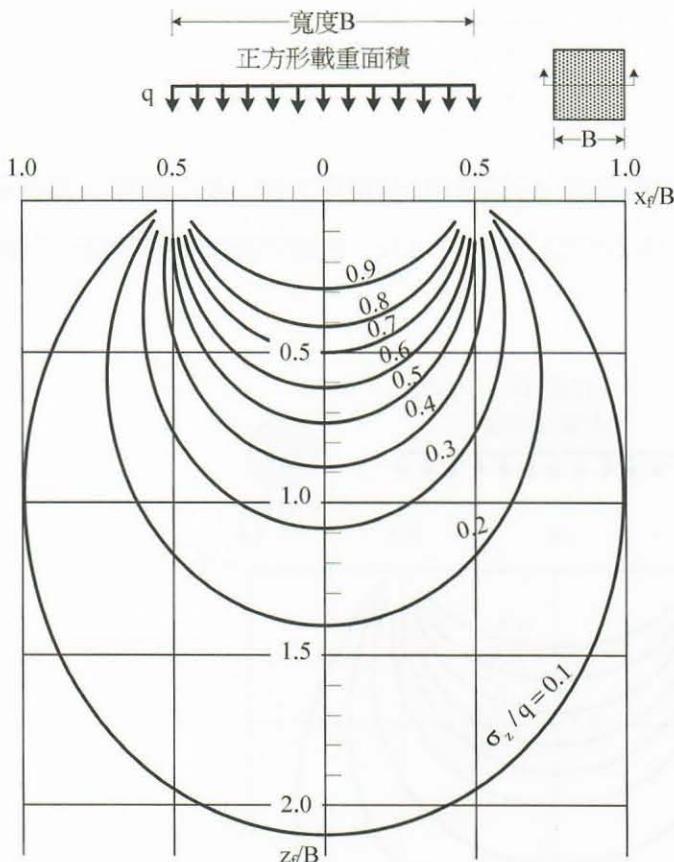


圖 4-13 正方形基礎壓力球根

對於每邊長度 B 之柔性正方形基礎，亦可利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，算出土體的應力增量。將方形基礎中心正下方，應力增量相同的點連線，也可畫出正方形基礎的等應力增量線，如圖 4-13，注意基礎中心下方深度 $2B$ 處，應力增量接近 $0.1q$ ，這暗示正方形基礎鑽探至少應抵達的深度。

考慮圖 4-14，柔性圓形基礎半徑 R ，承受均布載重 q ，利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，可以積分算出圓心正下方 z 深度處之垂直應力增量 $\Delta\sigma_z$

註 2：土壤是高度異向性的材料，不容易推導公式，所以不同學者，建立不同假設以簡化問題，就推導出不同公式，你在土壤力學及基礎工程原文書內會看到超級多的公式，搞不清楚哪些才是考試必背的。想考試，就必須買專業考試用書，例如你手上這本。

$$\Delta\sigma_z = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{3z^3(qrdrd\theta)}{2\pi(r^2+z^2)^{5/2}} = q \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \quad [4.9]$$

將圓形基礎下方應力增量相同的點連線，可以畫出「等壓應力線」(壓力球根)，如圖 4-14，請注意基礎圓心正下方兩倍直徑處，應力增量已經小於 0.1q，這暗示圓形基礎鑽探至少應抵達的深度。

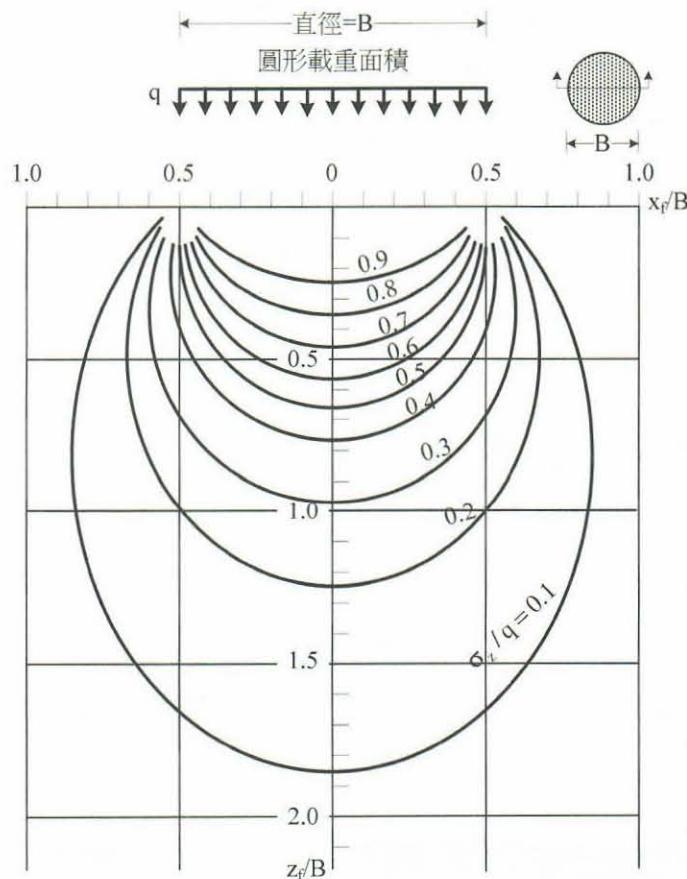


圖 4-14 圓形基礎半徑 R，承受均布載重 q 及其壓力球根

觀察圖 4-13 和圖 4-14，基礎邊緣應力增量和基礎中心點應力增量，在 $2B$ 深度處，雙方約達成相等，當然還是基礎中心點正下方稍大些。依據 Boussinesq 的假設，彙整出圓形、正方形、條型基礎邊緣及中心正下方的應力增量圖如下， q 是基面處應力增量， Z 是從基面起算的

深度。你覺得圖 4-15 有沒有與圖 4-13 矛盾？圖 4-15 與圖 4-14 矛盾？怎麼辦？(觀察在基礎邊緣接地面點的應力增量)

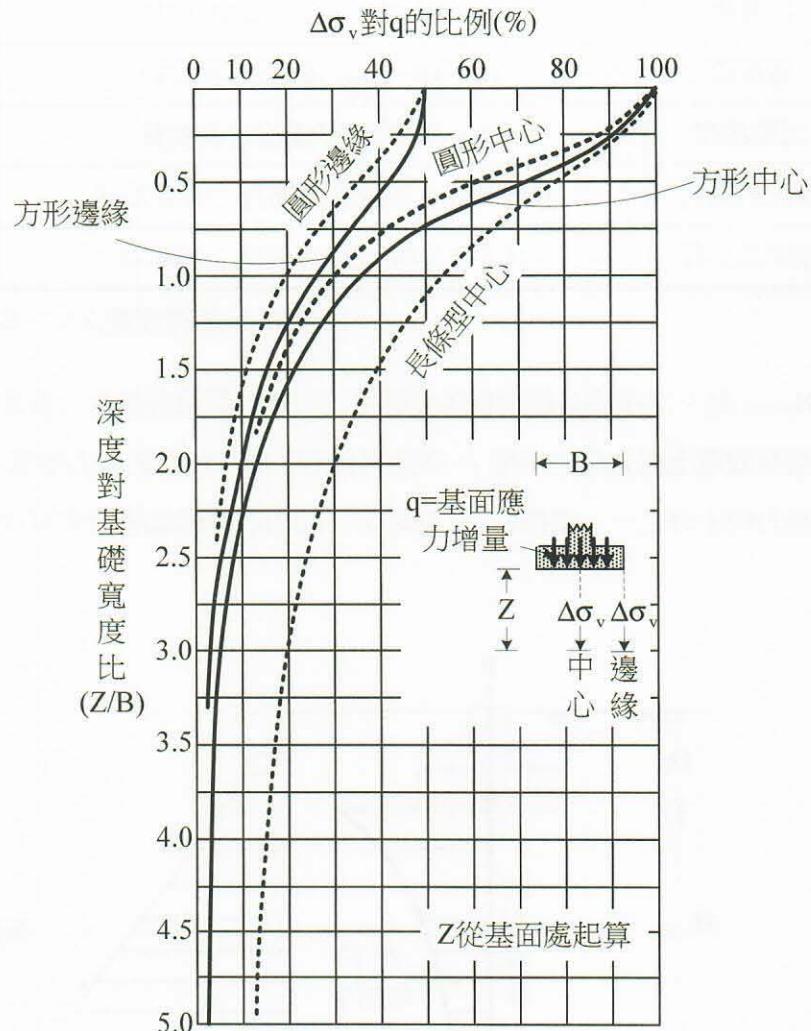


圖 4-15

按照目前我國《建築物基礎構造設計規範》，對於鑽探深度規定如表 4-2。對於孔數規定為「基地鑽探每 600 m^2 鑽一孔。基地面積超過 6000 m^2 者，得視基地地形、地層複雜性及結構設計需求調整調查密度」。5 公頃的基地應鑽幾孔？ $1 \text{ 公頃} = 100 \times 100 \text{ m}^2$
 $5 \text{ 公頃} = 50,000 \text{ m}^2$ ，理論上應鑽 84 孔。

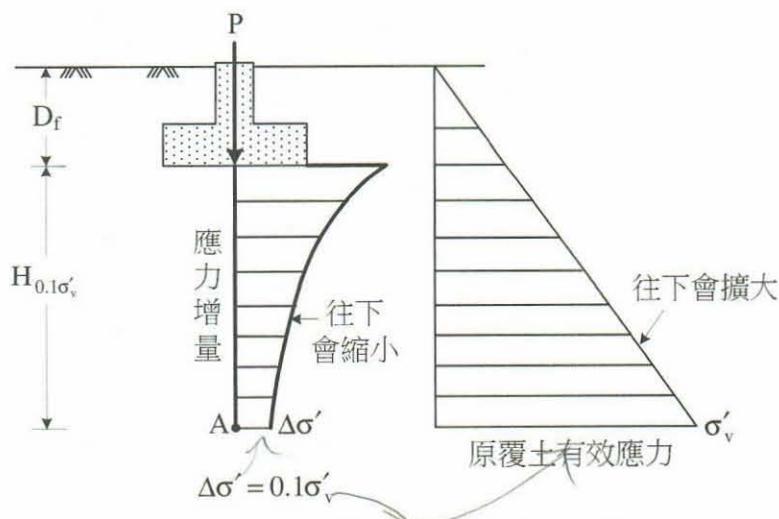
你運動會跑過百米賽跑嗎？一公頃就是 $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ 的面積，約等於一座大學操場面積。

表 4-2

基礎型態	鑽探調查深度
淺基礎	$D_f + 4B$ 或達可確認之承載層
樁基礎	$D_f + 4B$ 或達可確認之承載層
沉箱基礎	$D_f + 3B$ 或達可確認之承載層
浮筏式基礎	$D_f + H_{(0.1\sigma_v')}$ 或達低壓縮性之堅實地層
深開挖工程	$(1.5 \sim 2.5)D_f$ 或達可確認之承載層

※ D_f 是基礎埋置深度， B 是基礎短邊寬

上表裡 $H_{(0.1\sigma_v')}$ 是：浮筏式基礎調查深度應達「因建物載重所產生之垂直應力增量，小於百分之十之地層有效覆土壓力值之深度」，語意可參考下圖，A 點的應力增量，正好等於 A 點原先有效覆土應力的十分之一。鑽探到 A 點以下，應力增量就低於原來有效覆土壓力的十分之一。

圖 4-16 A 點原來覆土有效應力為 σ'_v

壓力球根等應力增量線 $\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 0.1$ 的位置和 $H_{(0.1\sigma_v')}$ 之意義並不同，前者無關土壤原始的有效應力 σ'_v ，後者必須涉及土壤原始的有效應力 σ'_v 。

§4-4 Newmark 應力影響圖 參考 6-1

早年電腦不流行時，利用 Newmark 應力影響圖查應力增量，現在電腦普及，已不用此圖。此圖偶見於作業，考出來的機率相對不大。從公式[4.9]開始整理，

$$\Delta\sigma_z = q \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{3/2}} \right]$$

$$\text{移項得 } \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{3/2}} = 1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q} \quad \text{整理得 } \frac{1}{1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}} = \left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{3/2}$$

$$\text{再整理得 } 1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}} \right)^{2/3}$$

$$\text{最後得 } \frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q} \right)^{-2/3} - 1} \quad [4.10]$$

上式可以簡單看成 $y = \sqrt{(1-x)^{-2/3} - 1}$ ，可輪流令 $x=0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ ，求出相對應的 y 值，列於下表。 x 是「應力增量比」， y 是「半徑深度比」。

表 4-3

$x=\Delta\sigma_z/q$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y=R/z$	0	0.27	0.4	0.518	0.637	0.766	0.918	1.11	1.39	1.908	∞

此表的意思是：假設地表有圓形面積受均布載重 q 作用，如果想測量圓心下深度 z 點的垂直應力增量 $\Delta\sigma_z$ ，且希望應力增量 $\Delta\sigma_z = 0.2q$ ，則圓形均布載重半徑 R 應為 z 的 0.4 倍。

舉個例子，對工程師來講，他關心在圓心下，何處深度應力增量會是 $0.1q$ 。對於圓形基

礎，從上表來看，當 $x=0.1$ 時， $y=0.27$ ，也就是載重分布半徑 R 為深度的 0.27 倍；反過來講，深度是半徑的 3.704 倍($3.704=1/0.27$)，或說深度是基礎直徑的 1.852 倍，這完全等於圖 4-14 壓力球根的結論。

由表 4-3 可畫出影響圖(Influence Chart)，如下圖，方法是在紙上隨意定一段長度 $\overline{AB}=z$ (z 是你有興趣的深度，你想求該深度的垂直應力增量)，依據表 4-3 的 y 值，畫出半徑 R ($R=y\times z=y\times\overline{AB}$)，就得影響圖的各圓圓周，即 $0.27z$ 、 $0.4z$ 、 $0.518z$ 、…、 $1.908z$ 等九個圓周。其次，從圓心以放射線將每個圓均分成 20 等份， $20\times 10=200$ ，圖內就有 200 個小區域，故稱此圖的影響值(Influence Value, IV)是 0.005($0.005=1/200$)。

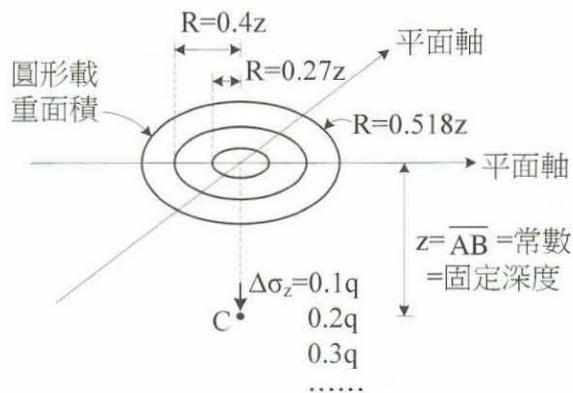


圖 4-16(a)

如果均布載重強度為 q ，載重(基礎面積)佔滿這 200 個格子，將會對圓心下方的 \overline{AB} 深度處產生 $1.0q$ 的應力增量。仔細觀察這 200 個格子，越往外圍格子面積越大，但是載重每佔滿一格，都是對圓心產生 $q/200$ 的應力增量，也就是 $0.005q$ 。如果基礎面積佔滿 28.5 格，將對圓心下方產生 $28.5\times(q/200)$ 的應力增量。

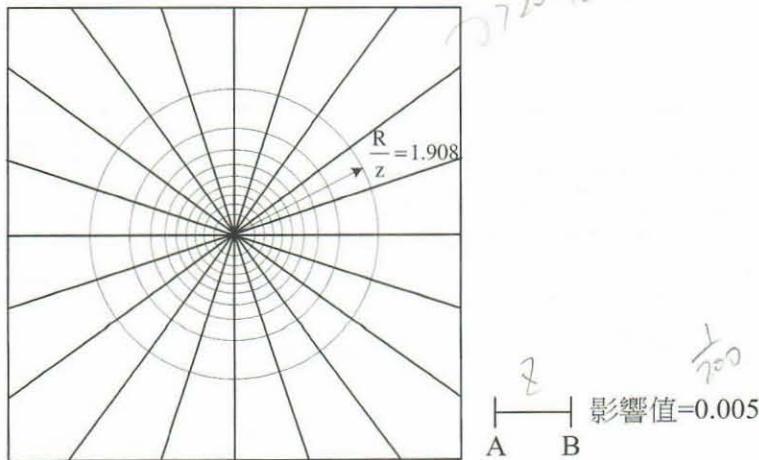


圖 4-17 垂直應力增量之影響圖

如果題目給的圖，總共有 200 小格，則該圖之影響值為 0.005，則求應力增量的公式為

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times q \times M = \frac{\text{所佔格數}}{\text{總格數}} \times q \quad [4.11]$$

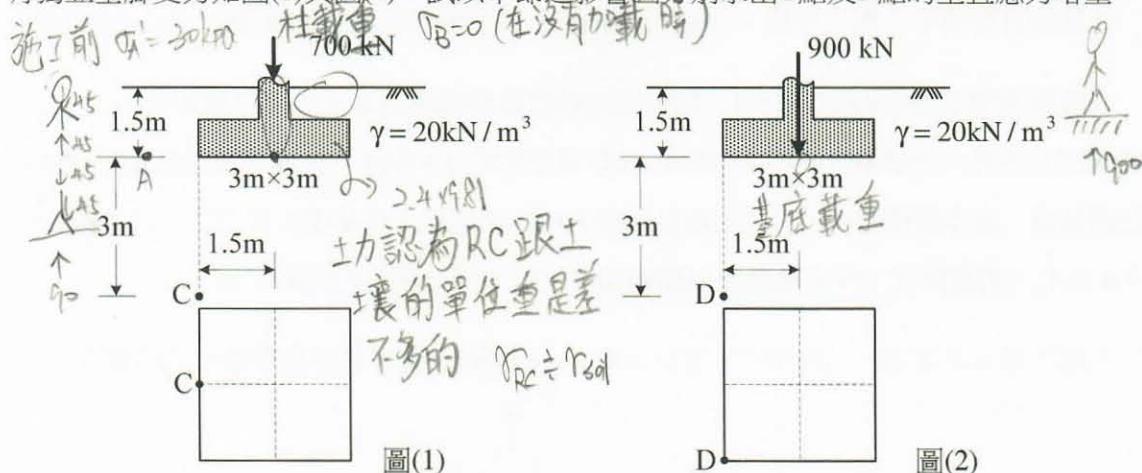
其中 q 是基面應力增量， M 是基礎面積所佔據的方格數。

如果題目給的圖，總共有 n 小格，則該圖之影響值 $IV=1/n$ ，則利用該圖求應力增量的公式為 $\Delta\sigma_z = IV \times q \times M$ [4.12]

以下練習一個例題，讀者若想求某一土壤點 C 的應力增量，平面圖裏的 C 點必須放在影響圖的正中央，至於基礎形狀，則未必落在影響圖的正中央。

例 4-4.1 影響圖之應用

有獨立基腳受力如圖(1)與圖(2)，試以本節之影響圖分別求出 C 點及 D 點的垂直應力增量。



(1) 參考圖 a，用 \overline{AB} 長度代表 3 公尺，C 點置於影響圖圓心，基腳面積約佔 46 格

基面處有效應力增量 $q = 700/3^2 = 77.778 \text{ kPa}$

$$\Delta\sigma_z = IV \times q \times M = 0.005 \times (77.778) \times 46 = 17.89 \text{ kPa}$$

(2) 用 \overline{AB} 長度代表 3 公尺，基面處有效應力增量 $q = (900/3^2) - 1.5 \times 20 = 70 \text{ kPa}$

D 置於圓心，基腳面積約佔 34.7 格， $\Delta\sigma_z = IV \times q \times M = 0.005 \times 70 \times 34.7 = 12.145 \text{ kPa}$

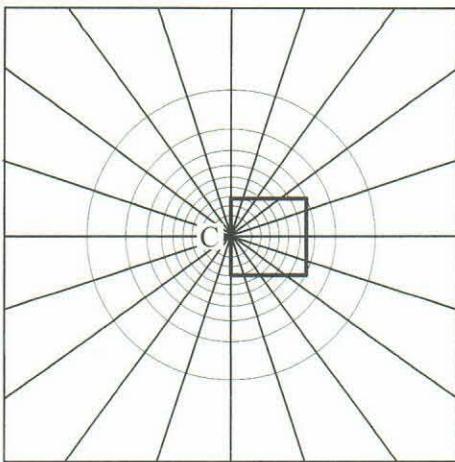


圖 a

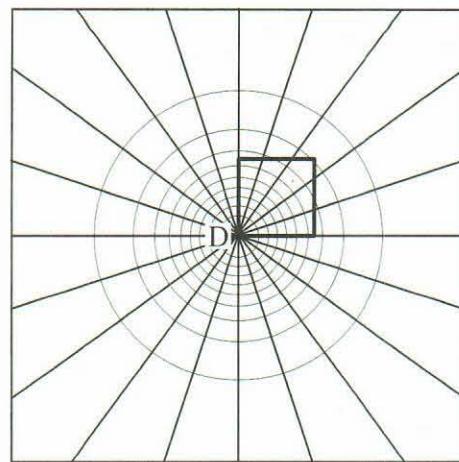


圖 b

討論

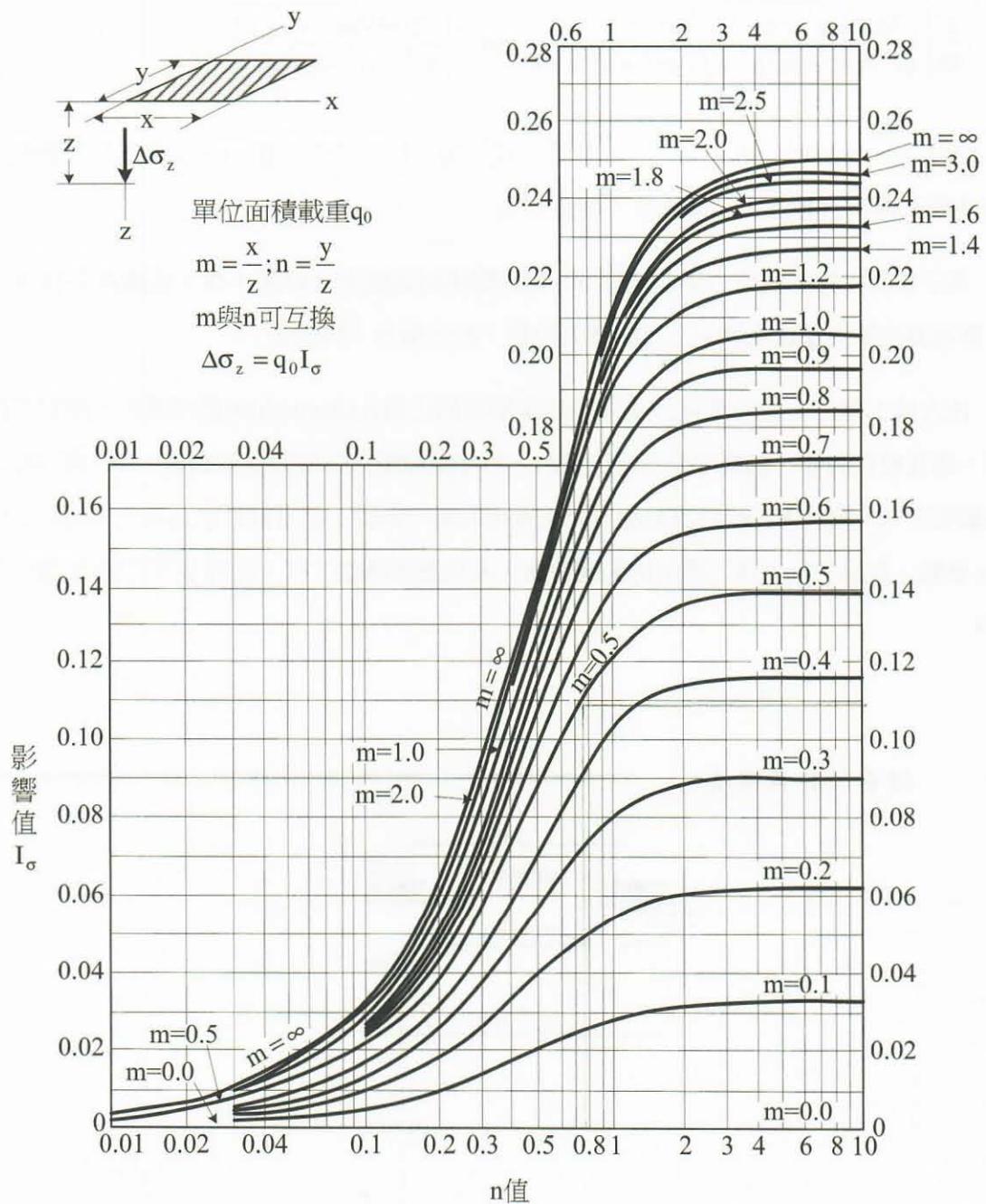
注意題目是要求「應力增量」，係指土壤從施工前(前世)到完工加載後(今生)的應力增量。

一般在大地工程分析及設計時，把土壤的單位重和鋼筋混凝土的單位重視為「差不多」，忽略其間的差異。土壤單位重約 2.0 tf/m^3 ，RC 單位重約 2.4 tf/m^3 ，你要精算其間差異也可以，無法說是錯。除非體積龐大，否則大部分的場合均忽略差異，淺基礎承載力的設計須取安全係數 3.0 以上，相當保守，安全係數足以彌補誤差，故大部分場合均忽略差異。

土壤力學有影響圖，結構學有影響線(Influence Line)，兩者有沒有關係？為什麼？

§4-5 局部面積加載之角隅法 少考6-1 25年1~2次

本節是計算有限面積加載應力增量的算法。考慮圖 4-18，矩形基礎(短邊 x，長邊 y)，承受均布載重 q_0 ，利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，可以積分算出基礎角隅正下方 z 處垂直應力增量 $\Delta\sigma_z$



$$\Delta\sigma_z = \int_{y=0}^{y=L} \int_{x=0}^{x=B} \frac{3z^3(qdxdy)}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = q_0 I_\sigma \quad [4.13]$$

其中無因次之影響值(Influence Value)I_σ=

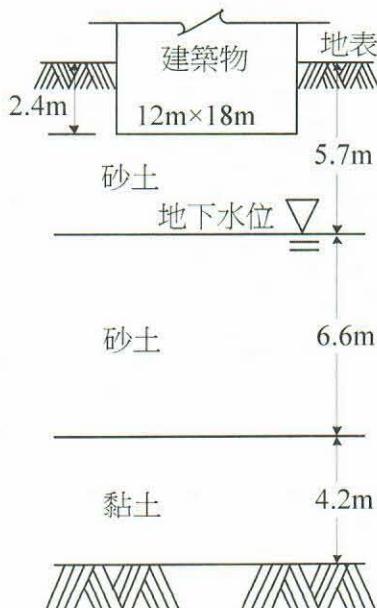
$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1} \left(\frac{m^2 + n^2 + 2}{m^2 + n^2 + 1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 - m^2n^2 + 1} \right) \right]$$

式中 $m = x/z = B/z$, $n = y/z = L/z$, B 是基礎短邊, L 是基礎長邊。 m 與 n 具有互換性, 也就是 B 與 L 具有互換性, 互換後應力增量不變。

為了便利工程師使用, 將 I_o 值與 m 、 n 的關係製成圖表, 如圖 4-18, 依據圖 4-18 查出 I_o 值, 即可算出矩形基礎角隅正下方的應力增量, 此法稱為「角隅法」。

在大地工程中, 許多複雜公式均被前輩學者們正規化(Normalize)畫成圖表, 便利工程師查圖, 這在材料力學、結構中是非常少見的, 不知道你讀書有沒有這種體會。RC 有沒有正規化的圖呢? 有, 短柱 K_n - R_n 設計曲線。而正規化的第一步驟, 經常就是無因次化, 例如上述的 m 、 n 參數, 無因次化之後, 應用的範圍較廣, 未來讀到基礎工程, 此現象更明顯(如邊坡穩定分析)。

例 4-5.1 角隅法



某一建築物採用底部面積為 $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$ 的鋼筋混凝土筏式基礎, 建築物的靜載重及活載重

在筏式基礎底部對土壤所造成之壓力為 115 kN/m^2 。基礎下方有一飽和黏土層，其單位重為 17.3 kN/m^3 ，含水量為 44%，液性限度為 54。假設地下水位以上、地下水位以下砂土之單位重皆為 18.9 kN/m^3 ，試求出此筏式基礎中央點(center)與角落點(corner)之間，因建物載重造成黏土層壓密沉陷所引致之差異沉陷。

<97年高考三級25分>

(註：原題目附圖 4-18，為簡化計算，解題時建議以黏土層中間點之應力值計算沉陷量即可。)



$$(1) \text{ 黏土層 } Se = wG_s \quad 1 \times e = 0.44G_s$$

$$\text{黏土層 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = 17.3 \quad \Rightarrow \frac{\frac{e}{0.44} + e}{1 + e} \times 9.81 = 17.3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{0.44} + 1 \right) e = \frac{17.3}{9.81} (1 + e) \quad \text{解出 } e = 1.1685$$

$$\text{黏土層中點原先應力 } \sigma'_0 = 5.7 \times 18.9 + 6.6(18.9 - 9.81) + 2.1(17.3 - 9.81) = 183.453 \text{ kPa}$$

$$(2) \text{ 基面應力淨增量 } q_0$$

$$q_0 = 115 - 2.4 \times 18.9 = 69.64 \text{ kPa}$$

$$\text{對於基礎角隅 } m = B/z = 12/12 = 1 \quad n = L/z = 18/12 = 1.5$$

$$\text{查圖得 } I_\sigma = 0.197$$

$$\text{應力增量 } \Delta\sigma_z = q_0 \times I_\sigma = 69.64 \times 0.197 = 13.719 \text{ kPa}$$

假設此黏土為正常壓密黏土(NC clay)

$$\text{黏土層壓縮指數 } C_c = 0.009(LL-10) = 0.009(54-10) = 0.396$$

$$\text{角隅沉陷量 } \Delta H_{corner} = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma_z}{\sigma'_0} = \frac{0.396 \times 420}{2.1685} \log \frac{183.453 + 13.719}{183.453} = 2.4 \text{ cm}$$

對於基礎中央，將版平均割成 4 塊，把「基礎中央」變成各塊角隅

$$m = B/z = 6/12 = 0.5$$

$$n = L/z = 9/12 = 0.75$$

查圖得 $I_\sigma = 0.108$

應力增量 $\Delta\sigma_z = 4 \times q_0 \times I_\sigma = 4 \times 69.64 \times 0.108 = 30.084 \text{ kPa}$

$$\text{中央沉陷量 } \Delta H_{\text{center}} = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma_z}{\sigma'_0} = \frac{0.396 \times 420}{2.1685} \log \frac{183.453 + 30.084}{183.453} = 5.06 \text{ cm}$$

差異沉陷量 = $\Delta H_{\text{center}} - \Delta H_{\text{corner}} = 5.06 - 2.4 = 2.66 \text{ cm} \dots\dots\dots\dots\dots \text{Ans.}$

討論

- 1.「角隅法」顧名思義只能用在角隅，所以要切割面積，把版中央變成角隅。廣大面積加載，地底下各點的總應力增量皆相同；局部面積加載，地底下各點的總應力增量不一定相同。
- 2.以上算的是不同黏土點位之間的差異沉陷，可是若牽涉結構體，想算結構體柱位的差異沉陷，情形就複雜多了。結構版有抗彎勁度，若版是筏基(Mat Foundation)，抗彎勁度就很大，假若版底與版底土壤變形連續，則需考慮雙方彈性係數才能求出版變形。
- 3.壓縮指數 C_c 可於研讀第六章之後再來回顧。
- 4.基礎中央應力增量(30.084 kPa)大於基礎角隅的增量(13.719 kPa)。

§4-6 局部面積加載之概算法

本法也是計算有限面積加載應力增量的算法。前幾節的算法均涉及圖表，特徵是可以算出「某一土壤點」的應力增量。有時圖表無法得到，或題目不提供，只好用概算法算某一深度的「平均應力增量」。

概算法有兩種，一是 2:1(垂直：水平)法，另一是 30°擴散法。

2:1 法，認為基礎面的應力，係以垂直 2: 水平 1 的方式往下傳遞，如圖 4-19，由於越往下方面積越大，所以應力增量越小。若基礎面(尺寸 $B \times L$)的應力增量是 Δq ，則在基面下方深度 z 處的平均總應力增量

$$\bar{\Delta q} = \frac{\Delta q \times B \times L}{(B + z)(L + z)} \quad [4.14]$$

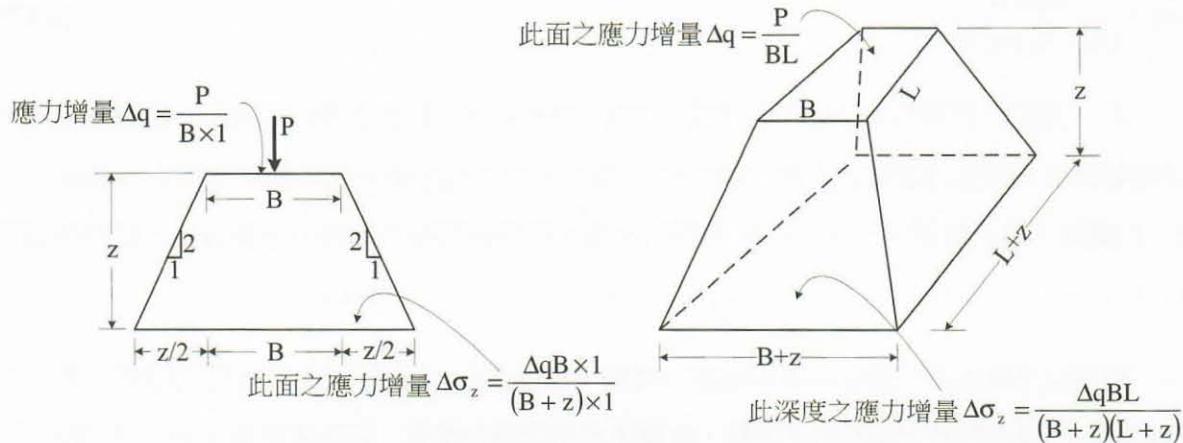


圖 4-19 左圖是條形淺基礎、路堤用

對直徑 B 的圓形基礎，若基礎面的應力增量是 Δq ，則在基面下方深度 h 處的平均總應力

$$\text{增量 } \overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times \frac{\pi}{4} B^2}{\frac{\pi}{4} (B + h)^2} = \frac{\Delta q \times B^2}{(B + h)^2} \quad [4.15]$$

30°擴散法認為基礎面的應力，係以和垂直線夾角 30°的方式向下傳遞，由於越往下方面積越大，所以應力增量越小。若矩形基礎面($B \times L$)的應力增量是 Δq ，則在深度 z 處的總應力增量 $\overline{\Delta q}$

$$\overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times B \times L}{(B + 2z \tan 30^\circ)(L + 2z \tan 30^\circ)} \quad [4.16]$$

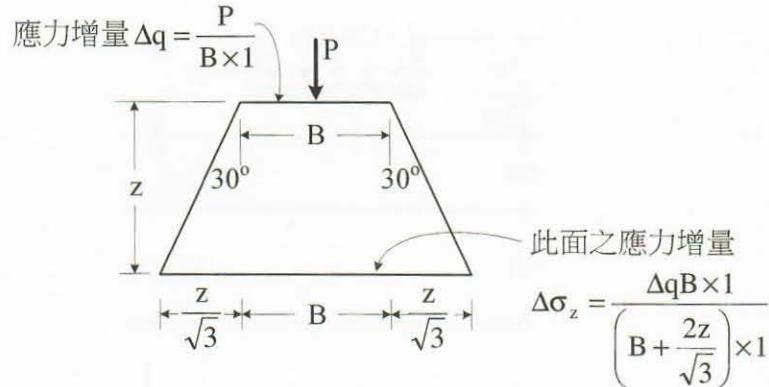


圖 4-20 無限長之條形基礎

對半徑 R 的圓形基礎，若基礎面的應力增量是 Δq ，則在深度 h 處的總應力增量

$$\overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times R^2}{(R + 2h \tan 30^\circ)^2} \quad [4.17]$$

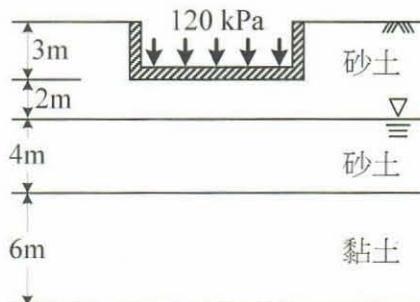
2:1 擴散法相當是以 26.6° 向下擴散，由於 $26.6^\circ < 30^\circ$ ，代表力量作用在較小的面積上，所以前者算出來的應力增量會比 30° 擴散法大。爾後算黏土層的壓密沉陷量較常用 2:1 擴散法。
2:1 擴散法對於基面下 1.0B~4.0B 範圍的土壤，提供尚可接受的應力增量算法，但對基面下 1.0B 內的土壤，算出的應力增量與實際差很多，偏不保守，不宜採用。

概算法乃算出某一深度的平均總應力增量，依此法同一深度的不同點，應力增量一視同仁均相同；角隅法對同一深度的不同點，會算出不同總應力增量。若想求差異沉陷，須依賴角隅法而非概算法。對一矩形筏式基礎，使用 2:1 擴散法，基底面積往下擴散成一「更大矩形」，2:1 擴散法低估了此「更大矩形」中央點的應力增量，但高估了「更大矩形」邊緣點的應力增量。角隅法會算出理論上較正確的應力增量。

例如全班考數學，班上同學分數有高有低，類比成不同土壤點的應力增量有大有小，也就是角隅法會算出各點應力增量不同。2:1 擴散法可說是算出全班平均得分，此平均值一定低估班上最高分，但一定高估班上最低分。

總應力增量=有效應力增量+超額孔隙水壓增量。加載長期後超額孔隙水壓消散完畢，則總應力增量=有效應力增量。

例 4-6.1 應力傳播概算法



某建築物採用底部面積為 $14\text{ m} \times 18\text{ m}$ 的 RC 筏式基礎，建築物的總載重在筏式基礎底部對土壤所造成之壓力為 120 kN/m^2 。基礎下方有一飽和黏土層，試以 2:1 之應力傳播法與 30° 應力傳播法求黏土層中點之總應力增量。設地下水位以上、以下砂土之單位重皆為 19 kN/m^3 。



基面高程處實際應力增量 $120 - 3 \times 19 = 63 \text{ kPa}$

2 : 1 之應力傳播法

$$\text{黏土層中點之總應力增量 } \Delta\sigma_v = \frac{63 \times 14 \times 18}{(14 + 2 + 4 + 3)(18 + 2 + 4 + 3)} = 25.6 \text{ kPa}$$

30° 應力傳播法

$$\text{黏土層中點之總應力增量 } \Delta\sigma_v = \frac{63 \times 14 \times 18}{(14 + 2 \times 9 \tan 30^\circ)(18 + 2 \times 9 \tan 30^\circ)} = 22.92 \text{ kPa}$$

討論

筏基施工時會挖掉一部分土重，此土重可以「補償」、「置換」掉一部分上部結構重，若挖除土重完全等於後來結構重，則黏土層根本不會有任何應力增量，所以不能直接拿結構重算應力增量，要先算出筏基底面(即基面)的淨應力增量，淨應力增量從筏基底部開始往下 2:1 傳播。

力有三要素，大小、方向、作用點，請特別注意作用點。土力及基礎工程題目會有較多「煙霧彈」，材力及結構較少。請問你，地表廣大面積加載的應力傳遞，需要用 2:1 法來算嗎？

例 4-6.2 應力傳播概算法

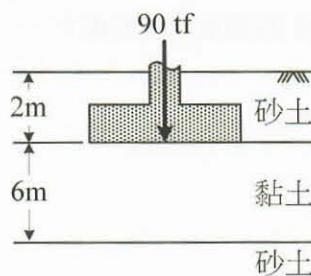


圖 a

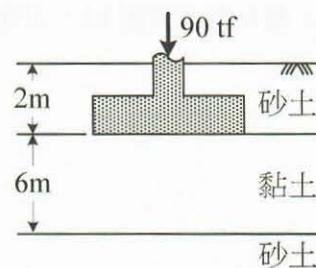


圖 b

有獨立基腳如圖a與圖b，基腳面積均為 $2 \text{ m} \times 2.5 \text{ m}$ ，砂土單位重 2.1 tf/m^3 ，試以 2:1 之應力傳播法求黏土層中點之總應力增量。



$$(1) \text{圖 a 基面處之淨應力增量 } \Delta q = \frac{90}{(2)(2.5)} - 2 \times 2.1 = 13.8 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{黏土層中點之總應力增量 } \Delta \sigma_v = \frac{13.8 \times 2 \times 2.5}{(2+3)(2.5+3)} = 2.51 \text{ tf/m}^2$$

$$(2) \text{圖 b 黏土層中點之總應力增量 } \Delta \sigma_v = \frac{90}{(2+\frac{6}{2})(2.5+\frac{6}{2})} = 3.27 \text{ tf/m}^2$$

討論

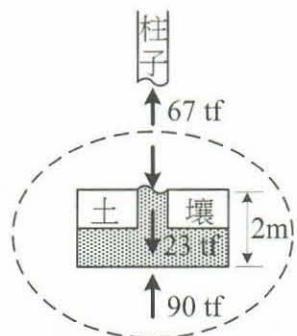


圖 a1 柱荷重 67 tf，版底反力 90 tf

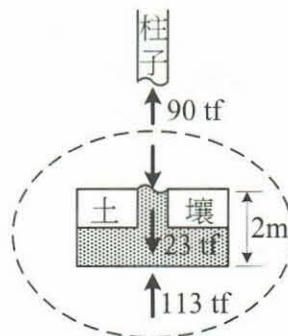


圖 b1 柱荷重 90 tf，版底反力 113 tf

力有三要素：大小、方向、作用點。箭頭作用點不一樣，意義就不一樣。圖 a 是「柱荷重 + 回填土重 + 基腳自重」= 90 tf，圖 b 是柱荷重就已經有 90 tf。對圖 a 來講，柱荷重未達 90 tf。舉例，設圖 a 的柱荷重為 67 tf，回填土加基腳自重為 23 tf，則上部結構與下部結構切分離體後，圖 a 對應到圖 a1，圖 b 對應到圖 b1，可明顯看出圖 b1 的載重狀況較嚴苛。

§4-7 靜止土壓力係數 K_0

前幾個小節，算的都是垂直方向土壓力，可是土壤在地底，水平方向也存在土壓力，稱為側向土壓力(Lateral Earth Pressure)，側向土壓力怎麼算？

側向土壓力的大小，受土壤側向應變大小影響。如果土壤側向受到地殼板塊運動或人為的嚴重推擠，側向土壓力就會大幅上升；如果土壤側向受到地殼開裂、水流沖刷或人為的解壓，側向土壓力就會大幅下降。這兩種狀況我們暫時不討論。

現在討論土壤在廣大面積自然沉積的環境，且僅受上方覆土重壓縮下，當土壤上方的覆土應力(Overburden Earth Pressure)完全傳遞到土壤微素，定義靜止土壓力係數(Coefficient of Earth

$$\text{Pressure at Rest}) K_0, K_0 \equiv \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v} \quad [4.18]$$

其中 σ'_v 是微素垂直向所受的有效應力， σ'_h 是微素水平向所受的有效應力，注意 K_0 必須以有效應力定義，不可用總應力定義。從 $\sigma'_h = K_0 \sigma'_v$ 來看， K_0 宛如沒有單位的「轉換係數」，負責把垂直向的有效應力轉換成水平向的有效應力。

廣大面積自然沉積有個特色，考慮到水平向的變形對稱，土壤微素水平向無法伸張也無法壓縮，也就是 $\epsilon_h = 0$ ，但垂直向會存在應變。

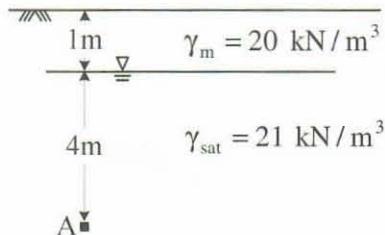
一般土木工程遇到的表土， K_0 範圍是 $0 < K_0 < 1$ ，這代表同深度的水平應力會比垂直應力小。如果有甲、乙兩地，甲地 $K_0=0.7$ ，乙地 $K_0=0.5$ ，我們能從這兩個數據讀出甲、乙兩地有什麼力學上的不同，施工上要注意什麼？ K_0 大，代表側向土壓力比較大，代表土壤比較軟弱，自立性不佳，自己站不住，嚴重地倒在隔壁鄰居身上，所以對鄰居造成很大的側推力。 K_0 小，代表側向土壓力比較小，代表土壤比較堅強，自立性佳，自己就站得住，不太需要靠隔壁鄰居攬扶，所以對鄰居造成很小的側推力。從以上觀之，在自然沉積前提下，甲地土壤較軟弱，若對其開挖，擋土壁體必須設計得較厚，支撐間距必須較緊密，甲地土壤的承載能力可能較不夠。

許多大樓地下室以筏基當基礎，筏式基礎施工時須開挖土壤，一旦解壓就破壞了靜止土壓力狀態。筏基完工且大樓使用數年後，一般工程上認為地下室外牆受內部樓版與梁撐著，幾乎不退縮變形，故地下室外牆所貼的土壤，又逐漸地回到靜止土壓力狀態，所以長期後地下室外

牆所受的土壓力，可以用靜止土壓力估計。

例 4-7.1 求側向土壓力

有土層剖面如圖所示，已知現場 $K_0 = 0.45$ ，求 A 點之側向總應力。



$$\sigma'_v = 1 \times 20 + 4(21 - 9.81) = 64.76 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.45 \times 64.76 = 29.142 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 29.142 + 4 \times 9.81 = 68.382 \text{ kPa}$$

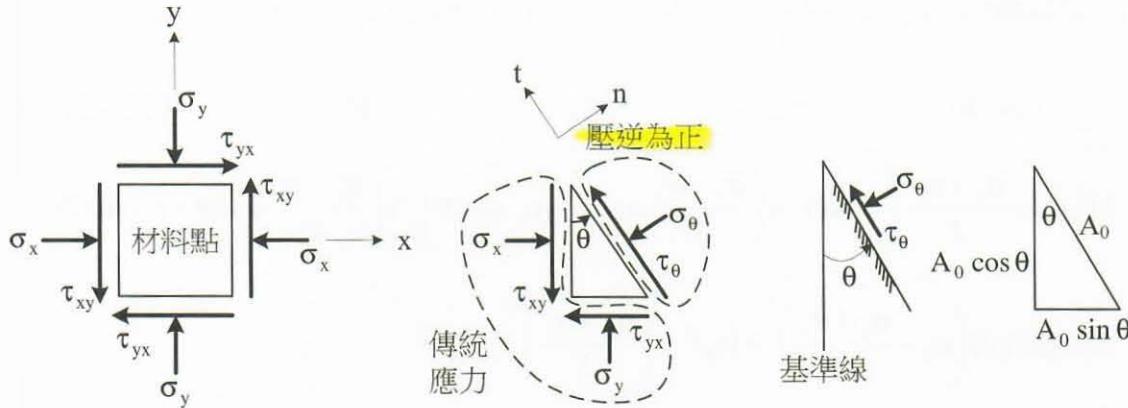
討論

1. 靜止的水，水中某一點，四面八方水壓力皆相等。
2. 側向總應力 = 側向有效應力 + 水壓力。
3. 只有不存在水時，才成立側向總應力 = $K_0 \times$ (垂直向總應力)。

§4-8 應力轉換與莫爾圓

此節觀念來自材料力學，旨在求一受力的材料微素，於不同平面上之應力大小。應力大小和平面傾斜角度有關，應力大小和角度的關係稱為應力轉換公式。應力轉換公式是人發明的，不是神規定的，不同人對於應力正負規定不同、對於符號法則規定不同，對於畫圓時座標軸的正方向規定也不同，導出來的公式就略有不同。但是，每套規定要內在自我諧和(畫圖方法與數學式的調和)。您多翻一些原文書，至少可以找到 5 種不同的公式與畫圖法。本書符號法則和 Das 的土力規定並不相同，您也可以發明自己的一套，自己要負責做到內在諧和。

建議您背一套符號法則(Sign Convention)、公式與畫圖法就好。定義各符號的正方向如圖 4-21 到圖 4-23 所示，本書定義壓應力為正。注意 $\theta=0^\circ$ 是指鉛垂線，鉛垂線稱為基準線， θ 以逆時針轉為正，圖 4-23 之 τ_θ 以繞微素逆時針轉為正，推導公式時，各物理量請畫在正方向。

圖 4-21 $+\tau_{xy}$ 的判讀圖例圖 4-22 $+\sigma_x$ 、 $+\sigma_y$ 判讀圖例圖 4-23 $+\sigma_\theta$ 、 $+\tau_\theta$ 判讀圖例圖 4-24 τ_θ 正負判讀圖例，畫莫爾圓時可使用(τ_{xy} 不適用)

σ_θ 以壓應力為正，對圖 4-22 建立 $\sum F_n = 0$

$$\Rightarrow \sigma_\theta A_0 + \tau_{xy} A_0 \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} A_0 \cos \theta \sin \theta = \sigma_x A_0 \cos^2 \theta + \sigma_y A_0 \sin^2 \theta$$

因 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，又 A_0 可約掉，其餘依恆等式 $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ 、 $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ 、

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta，化簡可得 \boxed{\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta} \quad [4.19]$$

對圖 4-22 建立 $\sum F_t = 0$

$$\Rightarrow \tau_\theta A_0 + \tau_{yx} A_0 \sin^2 \theta + \sigma_y A_0 \cos \theta \sin \theta = \tau_{xy} A_0 \cos^2 \theta + \sigma_x A_0 \cos \theta \sin \theta$$

因 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， A_0 可約掉，餘依前述國中的三角恆等式，化簡可得

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

[4.20]

公式[4.19]與[4.20]構成圓方程式，推導如下：

$$\text{將 } ①^2 + [4.20]^2 \quad \text{等號左邊平方} + \text{等號左邊平方} = \text{等號右邊平方} + \text{等號右邊平方}$$

$$\text{得} \left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{\theta})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right)^2$$

$$\text{展開整理得} \left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{\theta})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

$$\text{令圓半徑 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\text{則得} \left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{\theta})^2 = R^2$$

此為高中明顯的圓方程式

令 σ_θ 代表水平座標軸，向右為正； τ_θ 代表垂直座標軸，向上為正，圓心落在 $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ 。

畫圓時剪應力符號“ τ_0 ”以逆時針為正，順時針為負。

土體裡剪應力為零的平面，稱為主平面(Principle Planes)，作用在主平面的正向應力，稱為主應力(Principle Stresses) σ_1 、 σ_3 。微素所承受的最大剪應力 τ_{max} ，就是應力莫爾圓半徑 R 。

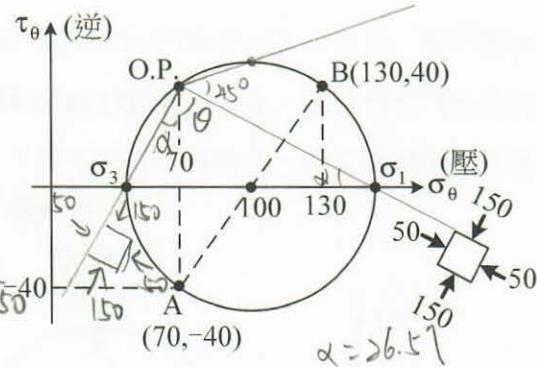
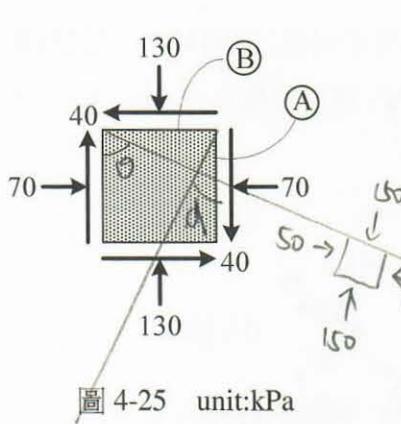
$$\text{最大剪應力 } \tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + (\tau_{xy})^2 \quad [4.21]$$

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \text{圓心座標} + R \quad [4.22]$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \text{圓心座標} - R \quad [4.23]$$

以「厭逆為正」符號法則畫應力莫爾圓，考慮如圖 4-25 的土壤微素，A 面承受壓應力 70

kPa，B 面承受壓應力 130 kPa，微素四周圍剪應力大小 40 kPa。符號法則見圖 4-24，A 面的剪應力係繞微素四周順時針轉，故畫到莫爾圓上須取負數；B 面的剪應力係繞微素四周逆時針轉，故畫到莫爾圓上須取正數。換言之，A 面畫到圓周變成 A 點，A 點為(70,-40)；B 面畫到圓周變成 B 點，B 點為(130,40)。A、B 兩面相夾 90°，畫到圓周上就相差 180°，故圓周 A、B 兩點拉直線就成為直徑，直徑交橫軸於圓心 σ_{avg} ， $\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 100$ kPa。



$$\text{最大剪應力 } \tau_{max} = \text{半徑 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \sqrt{\left(\frac{70 - 130}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 50 \text{ kPa}$$

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \text{圓心位置} + R = 100 + 50 = 150 \text{ kPa}$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \text{圓心位置} - R = 100 - 50 = 50 \text{ kPa}$$

主應力狀態微素繪於圖 4-26，150 kPa 應力的作用面和水平面夾角為 26.57°。因為觀察圓內有一直角三角形，其銳角角度 = $\tan^{-1} \frac{40}{\sigma_1 - 70} = 26.57^\circ$ 。

圓周上有一特殊點叫「平面原點」(Origin of Plane, O.P.)，或稱極點(Pole)，從 O.P. 往平面內任何方向畫直線，交圓周於另一點，此「另一點」的橫、縱座標值($\sigma_\theta, \tau_\theta$)就是平行該直線的平面之受力狀態。一個莫爾圓，只有一個 O.P.。

圖 4-25 的微素，A 平面是鉛垂面，所以從圓周上的 A 點拉鉛垂線，就會交圓周得 O.P.。

這種求 O.P. 的方法，就是反過來利用上一段話 O.P. 的特性以求 O.P.。請讀者嘗試用微素水平面 B 來求 O.P.，你應該殊途同歸，百川歸海，萬流歸宗。

欲了解更多應力轉換與莫爾圓知識，請參考《材料力學論衡》。在材料力學題目案例裏，平面應力狀態居多；在土力與基礎工程題目案例裏，平面應變狀態居多。土壤力學很少單獨考應力轉換與莫爾圓(那就像材力考題囉)，故介紹到此。

某土體微素之應力莫爾圓，給定 O.P. 如圖 4-27，問圖 4-27 的 C 點、D 兩點橫、縱座標值，其意義是什麼？答：與水平方向夾 60° 的 C 平面，承受正向應力 100 kPa，承受剪應力 50 kPa；與水平方向夾 30° 的 D 平面，承受正向應力 143.3 kPa，承受剪應力 25 kPa。請一定要會，因為有人讀到第七章強度線之後，就很神奇忽然不會了。

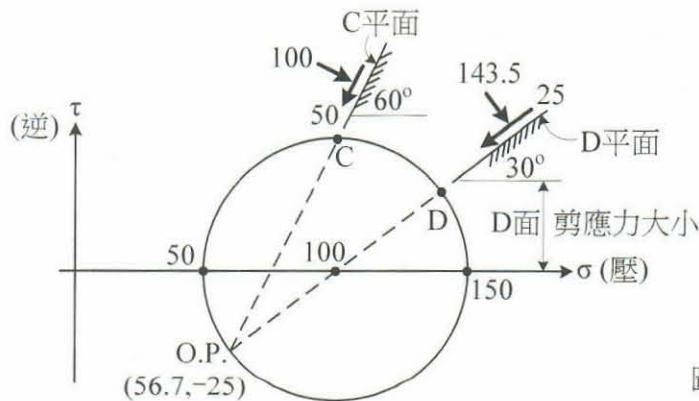


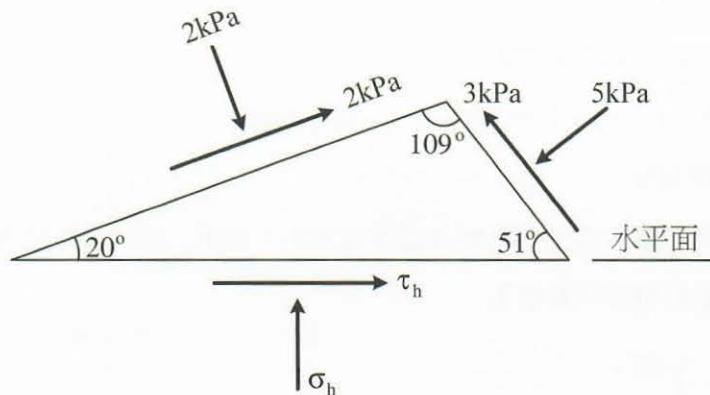
圖 4-27 unit: kPa

至於 C、D 兩平面會不會被應力剪壞？目前無法得知，因為無莫爾-庫侖破壞準則資訊。

表 4-4 土力、材力公式比較

符號法則	應力轉換公式外觀	畫莫爾圓細節
土力用壓逆為正	$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$ $\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$	正向應力軸，向右為壓應力。剪應力軸，向上為逆時針剪應力。
材力用拉逆為正	$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$ $\tau_\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$	正向應力軸，向右為拉應力。剪應力軸，向下為逆時針剪應力。

例 4-8.1 基本練習



某土壤單元承受之應力狀況如圖所示：

<93年結構技師>

- (一) 試求此土壤單元水平面承受之正應力 σ_h 及剪應力 τ_h 的大小。(9分)
(二) 試求最大主應力 σ_1 及最小主應力 σ_3 的大小及作用方向(與水平面的夾角)。(8分)
(三) 試求最大剪應力 τ_{max} 及最小剪應力 τ_{min} 的大小及作用方向(與水平面的夾角)。(8分)



(一) 參考圖 a, $\alpha = 39^\circ$, $\beta = -70^\circ$

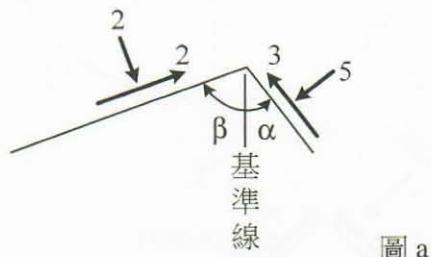


圖 a

$$\Rightarrow \sigma_{\alpha} = 5 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 78^\circ - \tau_{xy} \sin 78^\circ \quad \dots \dots \dots \text{①}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\beta} = 2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-140^\circ) - \tau_{xy} \sin(-140^\circ) \dots \dots \dots \text{②}$$

$$\text{依 } \tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\text{依 } \tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \tau_\alpha = 3 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 78^\circ + \tau_{xy} \cos 78^\circ \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow \tau_\beta = -2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(-140^\circ) + \tau_{xy} \cos(-140^\circ) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

以上四式，任取三式聯立解出

$$\sigma_x = 7.424 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = 1.287 \text{ kPa}, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma_y = 1.287 \text{ kPa}, \quad \tau_h = \tau_{xy} = 0 \text{ kPa}$$

【題圖給三角形微素的三內角與各邊應力大小，如果三內角角度無誤，則應力值僅是四捨五入後的近似值而非真值】

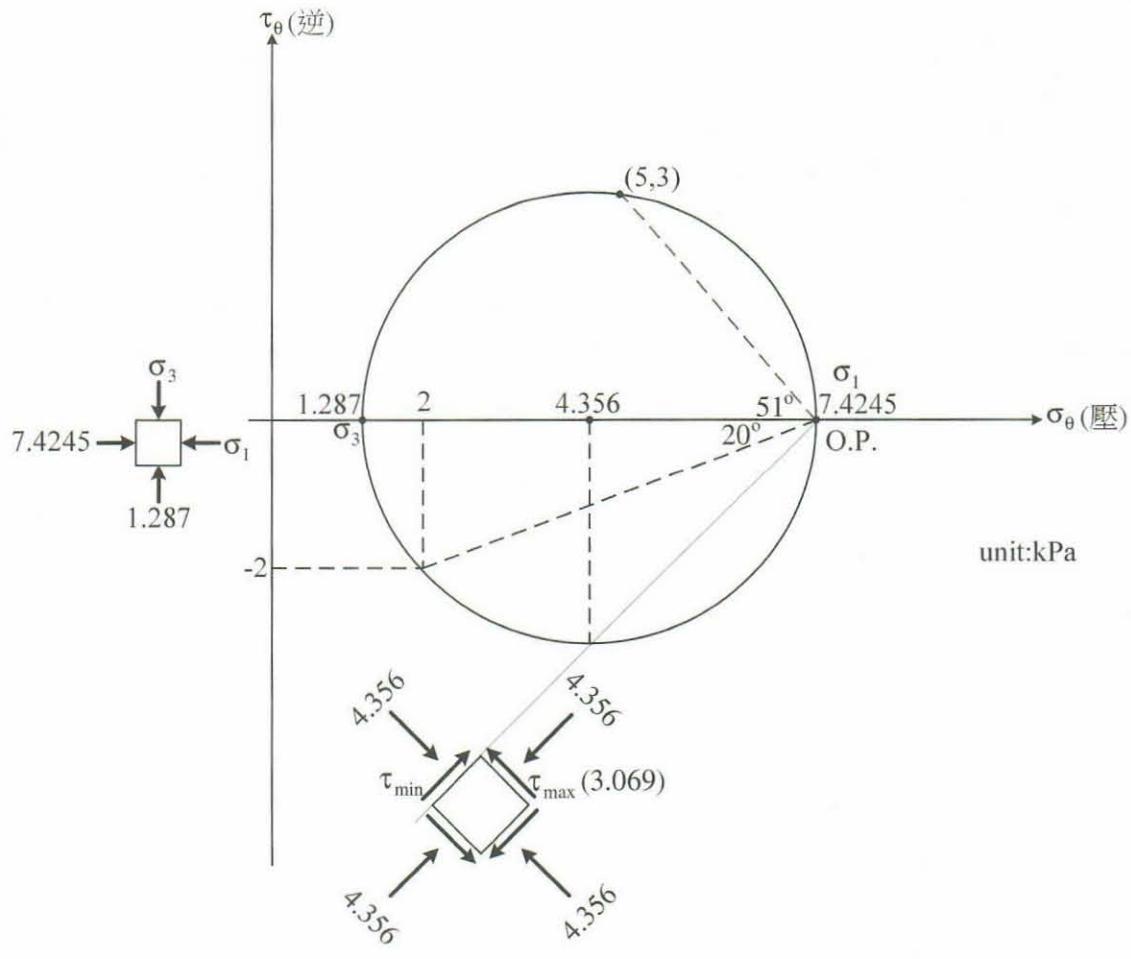


圖 b

$$(二) \because \tau_{xy} = 0 \text{ kPa}$$

$$\therefore \text{最大主應力 } \sigma_1 = \sigma_x = 7.424 \text{ kPa}$$

$$\text{應力箭頭與水平線夾 } 0^\circ$$

最小主應力 $\sigma_3 = \sigma_y = 1.287 \text{ kPa}$

應力箭頭與水平線夾 90°

最大剪應力 $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 3.0685 \text{ kPa}$

(三) 應力莫爾圓如圖 b

最大剪應力 τ_{\max} 及最小剪應力 τ_{\min} 的方向(與水平面的夾角)示於圖 b 內，俱為 45° ，但方向不同。

討論

- 有的書籍畫應力莫爾圓時， τ_θ 軸朝下為正，有的則是朝上為正，考生不要誤以為哪本書錯了，還必須比較雙方符號法則才能判定。您去圖書館找 10 本原文書，搞不好可以看到 5 套以上的符號法則與畫圖方法。建議考生背一套符號法則及其對應的畫圖方法，這樣您的解題方法就內在自我諧和不矛盾，千萬不要胡亂搭配甲老師符號法則與乙老師的畫圖方法。
- 注意本書 θ 的起算線是鉛垂線，以逆時針轉為正。筆者最常被問的問題就是考生拿另一本「起算線是水平線」的書，劈頭就問「為什麼結果不一樣？哪裡錯了？」拜託，請先觀察公式建立前提，再來討論結論。
- 一圖勝千言萬語，閱卷者不一定了解您用的符號法則，難以判定您數學式的正確。繳卷時，圖 b 務必畫出，萬流歸宗，閱卷者一看就懂。
- 本題兩傾斜面相夾 109° ，莫爾圓裡對應的圓心角就是 218° 。
- $(5,3)$ 及 $(2,-2)$ 兩點落於圓周上，從圓心到這兩點的距離相等，設圓心座標為 σ_0 ，由 $R=R$ 得 $\sqrt{(5-\sigma_0)^2 + 3^2} = \sqrt{(\sigma_0-2)^2 + (-2)^2}$ ，解出 $\sigma_0=4.333 \text{ kPa}$ ，看不懂要速購買《材料力學論衡》。圓半徑 $R=\sqrt{(5-\sigma_0)^2 + 3^2} = 3.073 \text{ kPa}=\text{最大剪應力 } \tau_{\max}$ 。 $\sigma_1=\sigma_0+R=7.407 \text{ kPa}$ ， $\sigma_3=\sigma_0-R=1.26 \text{ kPa}$ 。數據與題解不同，是因為題目數據略有矛盾。
- 求最大剪應力？最小剪應力？命題者對力學的體會實在不深。剪應力符號法則的規定影響什麼叫最大、什麼叫最小。舉例：台大教授和成大教授對剪應力不同的規定，可能使得最大變最小、最小變最大，考場來自各校的畢業生都有，這卷要怎麼改？對力學體會深的人知道：對於剪應力，吾人關心它的「大小」而非方向，也就是關心它的

絕對值而非正負號。能不能剪動土壤，是看剪應力大小而非方向，詳情看《材料力學論衡》第九章。被這種題目考到，記得於期限內向考選部反映試題疑義。

7. 正剪力必須造成正剪應力？還是正剪力必須造成負剪應力？這是人為規定的範疇，還是上帝規定的範疇？請回頭看看材料力學書籍，正剪力和正剪應力是各自獨立規定，還是連動規定？
8. 剪力及剪應力的正負是人定義，不是上帝定義。所以正剪力「不一定」造成正剪應力，要看定義過程。目前土木系流行的材力原文書，正剪力和正剪應力各自獨立規定，故有時須以負號調和公式。筆者看過一本應用力學原文書，它把正剪力和正剪應力做連動規定，這不是錯，就只是一種人為規定而已，就像日本、英國規定靠左邊開車。
9. 莫爾圓圓周上任何一點的高度(縱座標值 τ_0)，就是土體某一平面承受的剪應力，不是土體強度。莫爾-庫倫破壞包絡線任一點的高度(τ_f)，物理意義是強度，不是作用應力，部分考生學完兩者，竟整體混亂…？？第七章讀完你就知道。
10. 學完第七章你就知道下表是什麼意思。

	畫出應力莫爾圓與 O.P.	畫出強度線($\tau_f = c + \sigma \tan\phi$)
可以	可以幫你求土體任一平面承受的正向應力與剪應力 (σ_0, τ_0)大小。	可以幫你檢驗(σ_0, τ_0)這組應力，是否造成土體破壞。
沒辦法	沒辦法幫你檢驗(σ_0, τ_0)是否造成土體破壞。	沒辦法幫你求土體任一平面承受的正向應力與剪應力大小。

11. 可建立 $\Sigma F_x = 0$ 以及 $\Sigma F_y = 0$ ，解 σ_h 與 τ_h 。

按正弦定律 $\frac{1}{\sin 109^\circ} = \frac{A_1}{\sin 51^\circ} = \frac{A_2}{\sin 20^\circ}$

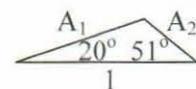
得 $A_1 = 0.82193$ $A_2 = 0.36173$

$\Sigma F_x = 0$ $\tau_h (1) + 2A_1 \cos 20^\circ + 2A_1 \sin 20^\circ = 3A_2 \cos 51^\circ + 5A_2 \sin 51^\circ$

解出 $\tau_h = -0.01844 \text{ kPa} \approx 0 \text{ kPa}$

$\Sigma F_y = 0$ $\sigma_h (1) + 2A_1 \sin 20^\circ + 3A_2 \sin 51^\circ = 2A_1 \cos 20^\circ + 5A_2 \cos 51^\circ$

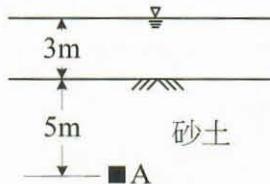
解出 $\sigma_h = 1.2774 \text{ kPa} (\uparrow)$



§4-9 歷年考題精選

練 1 基本計算

如圖所示砂層，水位位於地表上 3 m，土壤比重 $G_s=2.65$ ，孔隙比 $e=0.7$ ，請問地表下 5 m 處 A 點的總應力、水壓力與有效應力的值。後因某原因水位降至地表面，請問地表下 5 m 處 A 點的總應力、水壓力與有效應力的值為何？有效應力會增加嗎？ <改編成大土研 15 分>



$$(1) \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.7}{1 + 0.7} \times 9.81 = 19.33 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{A 點的總應力 } \sigma_A = 3 \times 9.81 + 19.33 \times 5 = 126.08 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的水壓力 } u_w = (3 + 5) \times 9.81 = 78.48 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的有效應力 } \sigma'_A = 126.08 - 78.48 = 47.6 \text{ kPa}$$

$$(2) \text{降水後 A 點的總應力 } \sigma_A = 19.33 \times 5 = 96.65 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的水壓力 } u_w = 5 \times 9.81 = 49.05 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的有效應力 } \sigma'_A = 96.65 - 49.05 = 47.6 \text{ kPa} \quad (\text{有效應力不變動})$$

討論

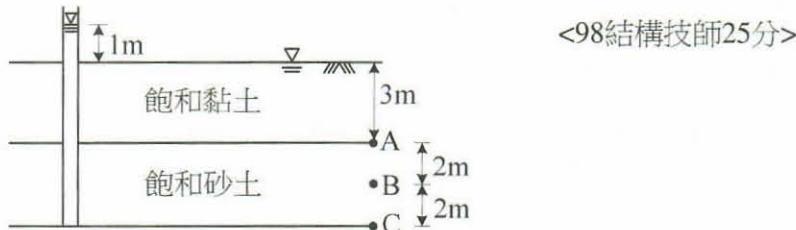
降水前，土壤內沒有滲流，水位升降若在地表上發生，則會影響地表下總應力與水壓力，但有效應力不受影響。水位升降若在地底下發生，則會影響地底下總應力、水壓力與有效應力。在此例學習到：沒有滲流的前提下，地表面上的降水，造成土壤總應力的減少量=水壓力的減少量，故有效應力不變。

在雙向度的滲流問題(見第五章)當中，版樁隔開上下游水位，土壤中有滲流，上下游水位高度差若有變化，會影響土壤中的總應力、水壓力與有效應力。上下游水位高度差若大，某些點的有效應力甚至降為零，形成砂湧(Sand Boiling)。

第四章討論土壤受力之後內部的應力，為何不像材料力學用 $\sigma = \frac{P}{A} + \frac{My}{I}$ 或 $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ 之類的公式來算？你要在各科之間作橫向理解、腦內溝通，才能成為真正榜首。前述兩公式用於均質均向連續體材料製成的桿件，而土壤非均質非均向，孔隙又多，很難被視為連續體，幾乎不能被製成桿件，這樣一來，如何定義斷面？主軸？前述兩公式用於線彈性狀態，土壤的線彈性區實在太小，受力容易進到塑性區，不符公式使用前提。另外，土壤變形不太可能「平面保持平面」。推導材力公式時，有「變形諧和」之要求，即材料不斷裂，受力不產生孔隙，但土壤受力，原先的孔隙可能變大或變小，不符「變形諧和」之要求。且土壤難有所謂的 M-D、V-D、轉角、曲率…，拋磚引玉，還有沒有？

練 2 基本計算

某地層由飽和黏土層及下方之砂土層組成，地下水位於地表面。黏土之含水量 $w = 30\%$ ，孔隙比 $e = 0.8$ ；砂土之土粒比重 $G_s = 2.65$ ，含水量 $w = 18.5\%$ 。砂土層為一受壓水層，經由置於砂土層底部之水壓計測得該點之水頭高於地表面 1.0 m ，如圖所示。試分別求砂土層之頂部、中間、底部，即 A、B、C 三點處之孔隙水壓力及垂直向總應力與有效應力。



$$\text{按 } Se = wG_s$$

$$1 \times 0.8 = 0.3 \times G_s$$

$$\text{解出 } G_s = 2.667$$

$$\text{黏土 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.667 + 0.8}{1 + 0.8} \times 1 = 1.926 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{按 } Se = wG_s$$

$$1 \times e = 0.185 \times 2.65 = 0.49025$$

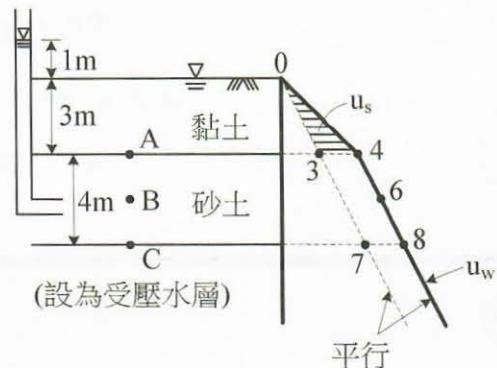
$$\text{砂土 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.49025}{1 + 0.49025} \times 1 = 2.107 \text{ tf/m}^3$$

水壓力分布如圖，單位 tf/m^2

A 點垂直總應力 $\sigma_A = 3 \times 1.926 = 5.778 \text{ tf/m}^2$

水壓力 $u_A = 4 \text{ tf/m}^2$

有效應力 $\sigma'_A = 5.778 - 4 = 1.778 \text{ tf/m}^2$



B 點垂直總應力 $\sigma_B = 5.778 + 2 \times 2.107 = 9.992 \text{ tf/m}^2$

水壓力 $u_B = 6 \text{ tf/m}^2$

有效應力 $\sigma'_B = 9.992 - 6 = 3.992 \text{ tf/m}^2$

C 點垂直總應力 $\sigma_C = 5.778 + 4 \times 2.107 = 14.206 \text{ tf/m}^2$

水壓力 $u_C = 8 \text{ tf/m}^2$

有效應力 $\sigma'_C = 14.206 - 8 = 6.206 \text{ tf/m}^2$

	總應力	水壓力	有效應力
A	5.778	4	1.778
B	9.992	6	3.992
C	14.206	8	6.206

unit : tf/m^2

討論

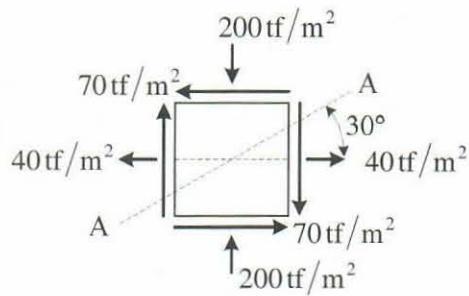
本題重點在於能不能畫出水壓力分布圖。黏土層有向上的滲流水壓力 u_s ，為三角形分布。水壓計的水平段對準 B 點或對準 C 點，水壓計的靜態液面都是在地表上 1.0 m 處。

筆者覺得力學素養真正提高時，一定會(自動)連帶把人文素養提高。筆者認為力學是奠基於人文素養上。

土壤和岩石相比，岩石常為「不連續體」，力學分析上土壤常被視為連續體(雖然悖離真實)，岩石的鉛垂向應力通常不是最大主應力，而自然沉積土壤通常是

練 3 應力轉換與莫爾圓

下圖所示為某元素所承受之應力系統，試求作用在 A-A 平面上之應力。<高考一級 20 分>

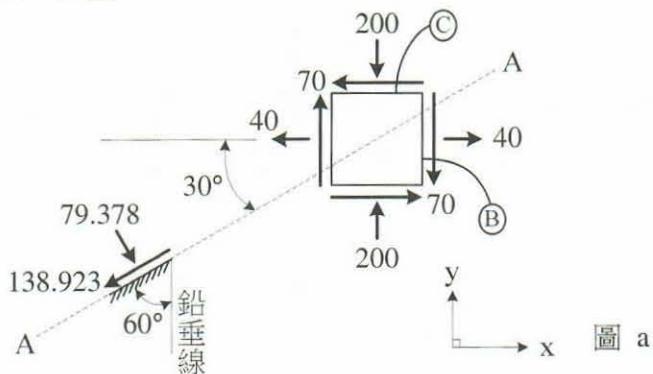


依據「壓逆為正」系統解題

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{-40 + 200}{2} + \frac{-40 - (200)}{2} \cos(-60^\circ \times 2) - (-70) \sin(-60^\circ \times 2) \\ &= 80 - 120 \cos(-120^\circ) + 70 \sin(-120^\circ) = 79.378 \text{ tf/m}^2 \quad (\text{壓應力})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= \frac{-40 - 200}{2} \sin(-120^\circ) + (-70) \cos(-120^\circ) \\ &= -120 \sin(-120^\circ) - 70 \cos(-120^\circ) = 138.923 \text{ tf/m}^2\end{aligned}$$

作用在 A-A 平面之應力，如圖 a。



討論

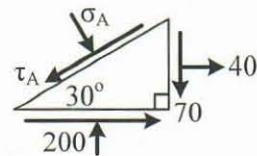
- 不同的書籍，應力轉換公式不同，閱卷老師不曉得你背哪一套公式，也不知道你剪應力的正負號代表什麼方向，所以答案中，宜把 A-A 斜面畫出，將答案畫在斜面上，一圖勝千言萬語，避免發生誤會。

2. 注意本題應力轉換公式的 $\theta = -60^\circ \neq 60^\circ$ 。

3. 參考右圖，設斜邊面積為 1，

使用水平力與垂直力平衡，

$$\text{解出 } \sigma_A = 79.378 \text{ tf/m}^2(\text{压强}), \tau_A = 138.923 \text{ tf/m}^2$$



4. 根據筆者《材料力學論衡》第十章，「拉逆為正」的應力轉換公式如下：

今欲將前述兩公式轉換成「壓逆為正」，方法如下：

因正向應力定義改變，故所有正向應力均前乘-1；剪應力定義沒改變，不前乘-1。由

① 改得

$$-\sigma_{\theta} = \frac{(-\sigma_x) + (-\sigma_y)}{2} + \frac{(-\sigma_x) - (-\sigma_y)}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

整理得

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \dots \quad \text{③}$$

由②得

$$\tau_{\theta} = \frac{(-\sigma_y) - (-\sigma_x)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

整理得

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \dots \quad \text{.....(4)}$$

③與④式，即是「壓逆為正」符號法則下的應力轉換公式。

本題若以「壓逆為正」的應力莫爾圓圖解，如下

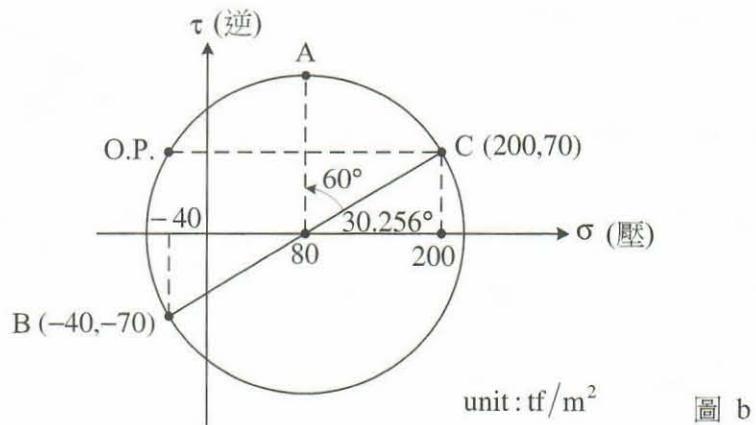
$$\text{應力莫爾圓半徑 } R = \sqrt{\frac{200 - (-40)}{2}^2 + 70^2} = \sqrt{120^2 + 70^2} = 138.924 \text{ tf/m}^2$$

$$A \text{ 細綫座標 } \tau_{\theta} = R \sin(30.256^\circ + 30 \times 2) = 138.924 \sin 90.256^\circ = 138.923 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_{\theta} = 80 + R \cos(30.256^\circ + 30^\circ \times 2) = 80 + 138.924 \cos 90.256^\circ = 79.378 \text{ tf/m}^2$$

請注意，圖 a 內，從 C 平面(微素頂面)轉到 A-A 平面，須逆時針轉 30° ，那麼在應力

莫爾圓圓周，從 C 走到 A，就要繞圓心角 60° 。A 點很靠近圓頂點，但略偏左。



7-1 (沒有上下左右) 5分

練 4 應力轉換公式

某土壤元素承受之應力狀況如下圖所示。

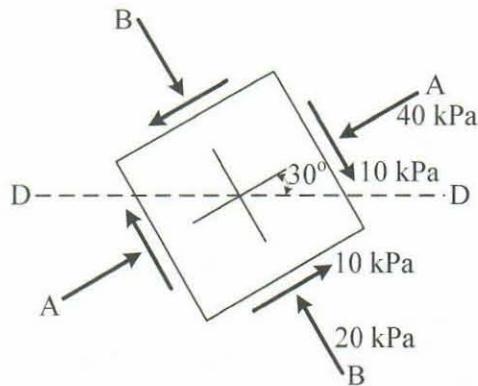
<102高考二級>

(一)請繪出其應力摩爾圓 (Mohr's circle)。(5 分)

(二)請精準計算出其最大及最小主應力的大小及方向 (與水平面之夾角)。(15 分)

(註：粗略圖解答案只能獲得部分分數)

(三)請精準計算出 D-D 平面上的正應力及剪應力。(10 分)



(一) 應力莫爾圓如圖 a。 A(40,-10) B(20,10)

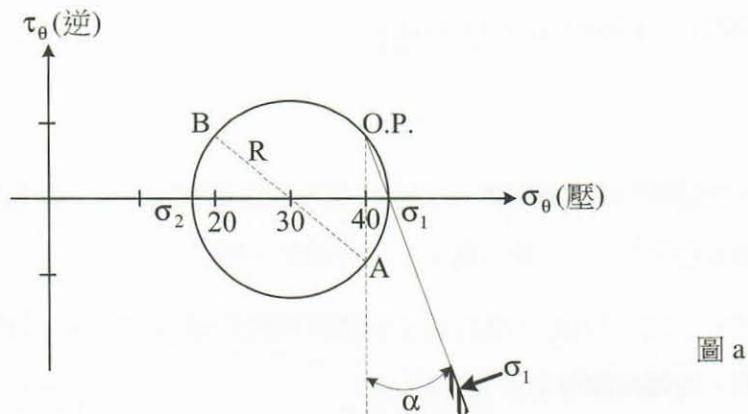


圖 a

$$(二) R = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{avg}} + R = \frac{20 + 40}{2} + 10\sqrt{2} = 44.142 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\text{avg}} - R = 30 - 10\sqrt{2} = 15.858 \text{ kPa}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_1 - 40}{10} = 0.4142 \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

σ_1 箭頭與水平參考線夾角 = $30^\circ + 22.5^\circ = 52.5^\circ$

σ_3 箭頭與水平參考線夾角 = $90^\circ - 52.5^\circ = 37.5^\circ$

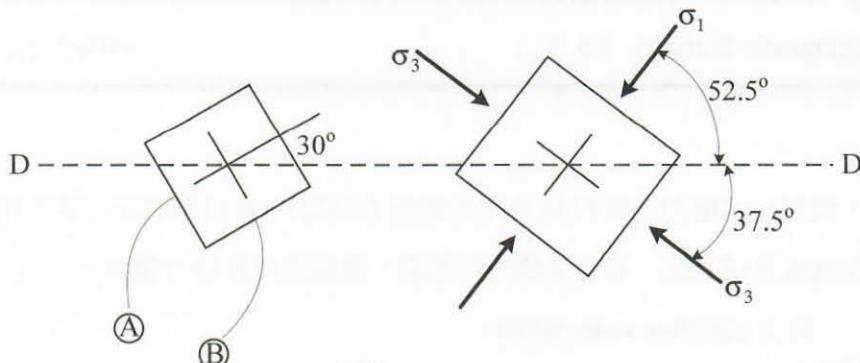


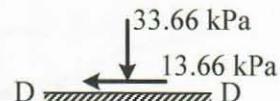
圖 b

(三) 壓逆為正公式

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_D|_{\theta=60^\circ} = \frac{40+20}{2} + \frac{40-20}{2} \cos 120^\circ - (-10) \sin 120^\circ = \underline{\underline{33.66 \text{ kPa}}}$$



$$\tau_D|_{\theta=60^\circ} = \frac{40-20}{2} \sin 120^\circ - 10 \cos 120^\circ = \underline{\underline{13.66 \text{ kPa}}}$$

討論

讀書腦袋要活絡，把題圖順時針轉 30° ，正向應力 A 就作用在鉛垂面，所以圖 a 裡，A 點畫垂直線就得 O.P.，但 α 值要加 30° 才是主應力面，你運動了嗎？

不要把題圖的畫法看得太「我執」，應該來上歐陽的課聽石破天的故事，力學是重精神，而非僅單純文字或圖形，的確是像禪宗。

有考生把莫爾圓和強度線(第七章)分開來學，永不會亂，號稱能懂意義。可是圓與線合併在一張圖裡，問他(她)「為什麼這個平面會破壞？那個平面不會破壞？ 45° 平面為何不破壞？O.P.為什麼在這裡？那個平面承受的剪應力多大？」他就亂了，題目做太少，思考偏淺。

練 7 浸潤面

名詞解釋：浸潤面(Phreatic Surface)（5 分）

<104土木技師>



從地下水壓力大小，反算出水壓力為零的面(指水的錶壓力為零)，就是浸潤面。若不存在受壓含水層，則地下水位面就是浸潤面。若在堤壩內有滲流，最高流線就是浸潤面。

自由水面(free water table)

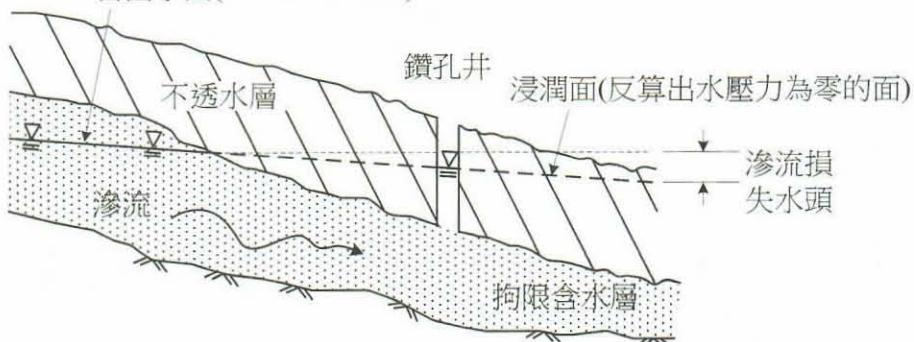


圖 a

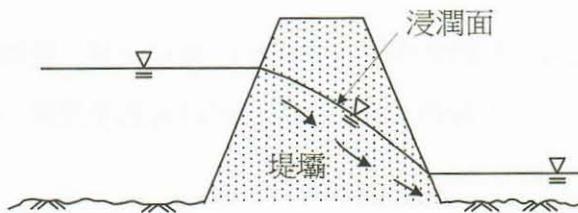


圖 b

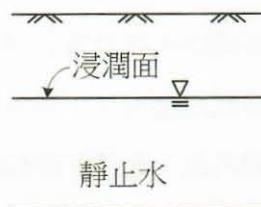


圖 c

討論

測量壓力時，要注意你測出來的數據是錶壓力還是絕對壓力。一般我們指海平面的水壓力為零，這是指水的錶壓力為零。有人注意到海水上面還有一大氣壓，所以他說海平面處水受的壓力應該是一大氣壓，而不是零，這是指絕對壓力是一大氣壓。

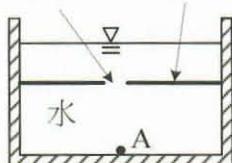
有書說「水壓力為一大氣壓的面，就是浸潤面」，這時水壓力的值是指絕對壓力。

在土壤力學內，測量水壓力時，大部分是用錶壓力，計算壓力水頭時，也是用錶壓力。

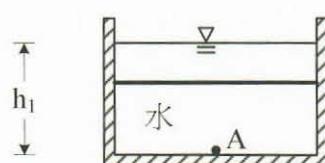
練 8 鐵鉗試驗

- (一) 在一大缸內，有一帶閘門鐵鉗如圖a，往缸內放水，水位升至 h_1 ，問A點水壓力多大？
- (二) 繼上，關閉閘門，如圖b，問A點水壓力多大？
- (三) 繼上，閘門仍關閉，抽光鐵鉗上的水，如圖c，問A點水壓力多大？

開閘門 鐵鉗



圖a



圖b



圖c

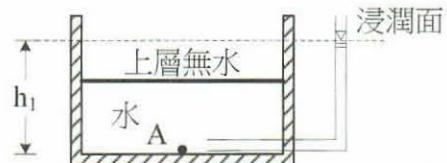


$$(一) u_{w,A} = h_1 \gamma_w$$

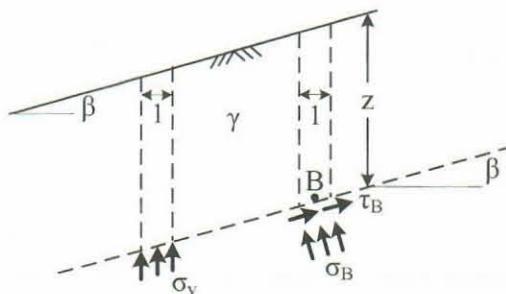
$$(二) u_{w,A} = h_1 \gamma_w$$

(三) $u_{w,A} = h_1 \gamma_w$

鐵鋟完全阻絕水壓力溝通(想想潛水艇內外的水、馬德堡半球內外氣壓)，鬼神沒辦法通知下層的水降低水壓力，下層水壓力被「封存」了。上層抽水後，下層的水自有其浸潤面。鐵鋟扮演的角色，就是不透水的黏土呀！

**練 9 無限邊坡**

有一無限邊坡，坡角 β ，土壤單位重 γ ，請求深度 z 處之 $\sigma_v = ?$ $\sigma_B = ?$ $\tau_B = ?$



虛線內土柱重 $W = 1 \times \gamma \times z$ (↓)

底面積 $A = 1 / \cos\beta$

$$\sigma_v = W / A = \gamma z \cos\beta \quad (\uparrow)$$

$$\sigma_B = \sigma_v \cos\beta = \gamma z \cos^2\beta \quad (\nwarrow)$$

$$\tau_B = \sigma_v \sin\beta = \gamma z \cos\beta \sin\beta \quad (\nearrow)$$

討論

切分離體，要不要考慮虛線側面的剪力 V 與推力 P 呢？不知道請快來上課！

挫折是成功路上忠實朋友，它指出你的不足，決不奉承



第五章 滲透性

體 系 表

- ☆水頭觀念與達西定律(Darcy's Law)
- 室內試驗求滲透係數(定水頭法)
- 室內試驗求滲透係數(變水頭法)
- 室外試驗求滲透係數
- ☆滲流水壓 u_s
- 滲流方向與層面平行
- ☆滲流方向與層面垂直
- ☆雙向度滲流與流線網
- 濾層設計
- ☆砂湧(Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition)
- ☆管湧(Piping)
- ☆上舉(Uplift)

學 習 重 點

1. 總水頭=位置水頭+壓力水頭，總水壓 u_w =靜態水壓力 u_{ss} +滲流水壓力 u_s +超額孔隙水壓 u_e 。
2. 水從總水頭高處往總水頭低處流動。總水壓 u_w / 水單位重 γ_w = 壓力水頭 h_p 。
3. 考題真的會要考生畫流線網，請一定要練習畫，考場可畫 3~4 個流槽。流線網引申出來的滲漏量、水力坡降、某一點有效應力大小、水壓力大小與砂湧安全係數考題也是考場常客。

李白說「抽刀斷水水更流，舉杯消愁愁更愁」，亘古名言，直指水造成的災害，以及土壤力學讀不好，藉酒澆愁只會更愁。做工程有兩大困難因素，一是「人」，二是「水」，水是本章主角。在開挖工程中，砂土受向上水流作用會產生「砂湧」(俗稱流砂)之不穩定現象；止水壁體施工不良產生破洞，流線縮短水夾帶泥砂流出，會形成「管湧」破壞。如果不透水層下方的水壓力過大，超過上方土壤與結構體自重，則可能會發生「上舉」破壞。興建土石壩，對壩底基礎材料、壩身材料的滲透性更須充分掌握，壩體與壩底滲漏量須小，才能有效貯水。壩體蓄水後水壓力增加，設計必須檢討上浮力、管湧、下游滲流出口處水力坡降，以確保壩結構、下游居民生命財產之安全。以上這些，均和水以及土壤的滲透性脫離不了關係。

水對土壤的工程影響層面至鉅，本章主要研究飽和土壤滲透係數(水力傳導係數) k 、水力坡降(水力梯度) i 、流線網、單位時間滲漏量 q 、總水頭 h_t 、位置水頭 h_e 、壓力水頭 h_p 、水壓力 u_w 、砂湧、管湧、上舉、濾層等等。

筆者常常比較材料力學和土壤力學的差異性，土壤力學的壓縮性和剪力強度，均可以在材料力學裏找到對應脈絡而心領神會，但是土壤力學的滲透性，卻是自成一格，因為材料力學不討論材料的透水性質。底下正式進入三大工程性質的滲透性，請專注研讀。

§5-1 水頭觀念與達西定律(Darcy's Law)

在生活中，可以見到水往低處流(eg：水溝的水、流口水、打翻的飲料)，但其實也可以看到水往高處流(eg：噴泉、自流井、水管噴水澆花、地熱的水往上流)的現象。究竟控制水流方向的機制是什麼？答案是「水從總水頭高的地方往總水頭低的地方流」，在土壤裡也是這樣。

流體力學的柏努利定律(Bernoulli's eq.)表示，流體裡任何一點的能量，可以化成「水頭」(Water Head)來表示，流體任何一點，總水頭(Total Head) = 位置水頭(Elevation Head)+壓力水頭(Pressure Head)+速度水頭(Velocity Head)。計及能量損失下，在同一條流線裏，流體從點 B 向點 C 流動，如圖 5-1，柏努利定律形如：

$$\text{位置水頭 } h_{e,B} + \text{壓力水頭 } \frac{u_{w,B}}{\gamma_w} + \text{速度水頭 } \frac{v_B^2}{2g}$$

$$= \text{位置水頭 } h_{e,C} + \text{壓力水頭 } \frac{u_{w,C}}{\gamma_w} + \text{速度水頭 } \frac{v_C^2}{2g} + \text{能量損失 } \Delta h \quad [5.1]$$

若 $\Delta h \neq 0$

$$\Rightarrow h_{e,B} + \frac{u_{w,B}}{\gamma_w} + \frac{v_B^2}{2g} > h_{e,C} + \frac{u_{w,C}}{\gamma_w} + \frac{v_C^2}{2g}$$

在一般工程情形下，土壤裡水流速度甚慢，速度水頭和其他項比起來可忽略，故再簡化成

$$h_{e,B} + \frac{u_{w,B}}{\gamma_w} > h_{e,C} + \frac{u_{w,C}}{\gamma_w}.$$

定義土壤裡的任一點，總水頭 h_{total} = 位置水頭 h_e + 壓力水頭 h_p

[5.2]

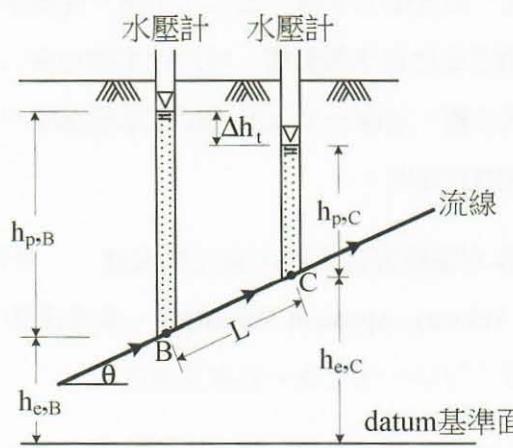


圖 5-1

表 5-1 (請參照圖 5-1)

	$\text{總水頭 } h_t = \text{位置水頭 } h_e + \text{壓力水頭 } h_p (= \frac{u_w}{\gamma_w})$		
B	$h_{e,B} + h_{p,B}$	$h_{e,B}$	$h_{p,B}$ (或寫 $\frac{u_{w,B}}{\gamma_w}$)
C	$h_{e,C} + h_{p,C}$	$h_{e,C}$	$h_{p,C}$ (或寫 $\frac{u_{w,C}}{\gamma_w}$)

圖 5-1 裡，土體裡的水沿流線從 B 點流往 C 點，datum 為基準面，即物理學之零位能面，B、

C 兩點的總水頭如表 5-1。 $h_{e,B} + h_{p,B} > h_{e,C} + h_{p,C}$ ，B 點總水頭比 C 點多 Δh_t ，故水從 B 點往 C 點流，水在流動中，需克服與土顆粒間之摩擦阻力，故水流的總能量遞減。B、C 兩點間之流線長度為 L(不是水平長度 $L \cos\theta$)，定義 B、C 間之平均水力坡降(Hydraulic Gradient)i

$$i \equiv \Delta h_t / L$$

[5.3]

白話講，水力坡降 i 就是每單位長度流線內消耗掉的總水頭，i 無因次，L 是流體走過的距離。若將 L 取無限短，則可得水力坡降 i 的極限定義， $i \equiv \frac{dh_t}{dL}$ 。

其實順著流線方向(eg : x 向)觀察，總水頭的值會越來越小，數學上 $\frac{dh_t}{dx}$ 為負數，故有些書寫成 $i = -\frac{dh_t}{dx}$ ，這樣 i 就恆正。讀不同書也是在矛盾中尋求解決，能解決，功力就上升一層。

基準面就是位置水頭 $h_e = 0$ 的水平面，基準面的位置可以隨人而定，所以對於一固定點而言，人的位置水頭可能不同，但是壓力水頭一定人人相同。從基準面往上算， h_e 為正；往下算， h_e 為負。當然囉，總水頭因受位置水頭影響，所以總水頭也會人人不同。有經驗的出題者為了方便閱卷，會規定基準面位置，這樣一來大家的位置水頭應相同，總水頭也應相同，他比較容易刪掉不同的答案，加快閱卷速度。

土壤內的水流，依據計算或測量方式不同，有三種流速——外視流速(Appearance Velocity, Superficial Velocity, Discharge Velocity, Apparent Velocity)v、滲流速度(Seepage Velocity) v_s 、真實流速(True Velocity)。考試較重要的是外視流速 v 與滲流速度 v_s 。

真實流速乃是水在孔隙中迂迴曲折、左彎右彎及前進的真正速度，這個速度是三者中最快的。但由於土壤的不均質，處處孔隙大小及孔隙結構不同，故我們無法得知真實流速大小，工程上也不需知道，工程上需要知道的是巨觀性質之外視流速 v 與滲流速度 v_s 。

外視流速 v 是法國人達西(Henry Darcy, 1803~1858)提出。外視流速 v 是由土壤單位時間滲流量 q 反算出來。達西進行試驗發現，對於乾淨的砂以及發生黏滯性飽和層流的前提下，在定水頭試驗中(詳下一節)，於一定時間 t 內累積流量 Q， $\frac{Q}{t} = q = vA = kiA$ ，測量流量 Q、時間 t 以及土壤斷面積 A，可計算出外視流速 v，但外視流速 v 並非水的真實流速，它是一種人造(人為定

義)的流速。達西定律是經驗公式，達西在試驗中歸納出外視流速與水力坡降成正比，即

$$v = ki \quad [5.5]$$

$$\text{或 } q = kiA \quad [5.6]$$

以上均可稱為達西定律^{註1}。注意 q 是單位時間內的流量(eg : cm^3/sec)， Q 的單位是體積(eg : cm^3)， k 是比例常數，後稱滲透係數。面積 A 係垂直於流線，非平行於流線。

考慮單位時間內流量 $q = vA$ ，左式宛如把飽和土體全斷面積 A 視為通水斷面，此與事實不符，因土顆粒本身無法透水，所以外視流速 v 是一種人造的流速，方便工程上用。

滲流速度 v_s 是在水中滴入有色液體(染液)，測量有色液體的前進距離與耗時。若在時間 t 內，有色液體前進 L 長度，則滲流速度 $v_s = \frac{L}{t}$ 。在土壤力學內很少進行此試驗，反而常由外視流速 v 計算滲流速度 v_s 。滲流速度 v_s 把飽和土體內孔隙視為連續直線的通水斷面，水只能經過這些孔隙(void)流動，且理想化地認為水是直線流動，這些孔隙構成的面積就是 A_v (見圖 5-3)。如果上游有工廠偷偷排放工業廢水，這些廢水順著地下水流動，抵達下游的時間，需由滲流速度 v_s 來算，而不是外視流速。廢水其實就是「有顏色的染液」。滲流速度並非真實流速，也是一種外視流速，某些原文書觀念有誤，另外一些則正確。

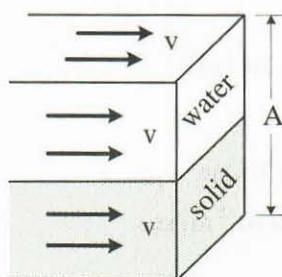


圖 5-2 把土顆粒看成能透水

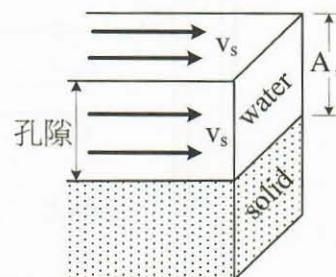


圖 5-3 土粒不透水，把孔隙看成連續直線排列

註 1: 達西定律可用於多孔(porous media)介質中，岩石也可用，其理論基礎源於動量守恆與連續方程式(i.e., 質量守恆)，流體可為水、油或氣體。達西定律適合慢速流動，通常雷諾數小於 1.0 就適用，如地下水流動。此定律是巨觀觀察結果，非微觀描述。在地質水力學、採石油氣工程中皆可見到此定律。

\therefore 單位時間內流量 $q = v \times A = v_s \times A_v$

$$\therefore \text{滲流速度 } v_s = v \times A / A_v = \frac{v}{n} \quad [5.7]$$

其中 n 是孔隙率，因為 $n < 1$ ，所以 $v_s > v$ 。

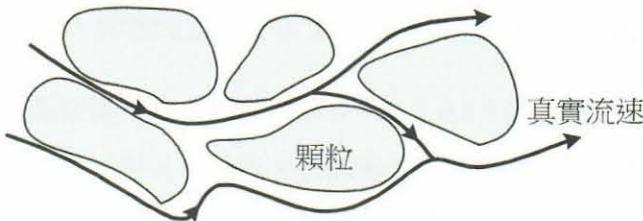
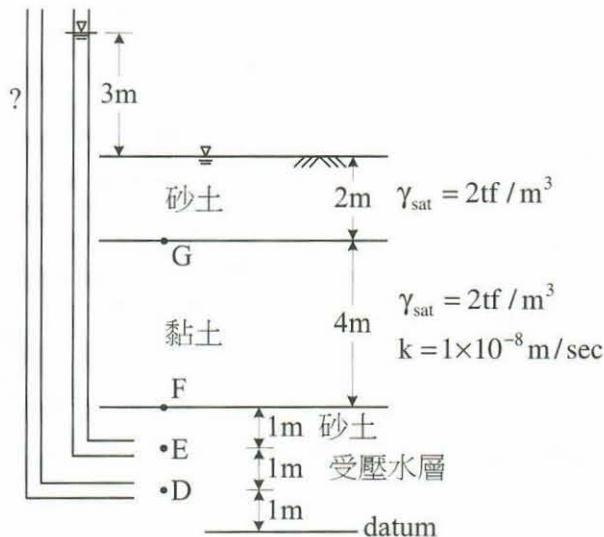


圖 5-4 真實流速處處不同

例 5-1.1 觀念問答

有一工址，土壤剖面如圖所示，設砂土極易透水，不消耗水頭。圖內插有兩支水壓計，一對準E點，發現水壓計的靜止水面在地表上3 m。另一支對準D點，請問哪一支水壓計的水位面會比較高？為什麼？D、E這兩點的總水頭、位置水頭與壓力水頭各是多少？黏土層內的水力坡降是多少？黏土層中點的有效應力是多少？



簡化土層剖面示意圖



兩支水壓計的水位線一樣高。因為水不從D點往E點流動，也不從E點往D點流動，兩點之總

水頭相等，可由減法算出 D 點壓力水頭為 11 m。

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
D	12 (抄 E 點總水頭)		1		(11)
E	(12)		2		10
F	12		3		9
G	9		7		2

註：括弧內為計算所得 單位：m

地表下 2m 處，該點總水頭 = 7+2 = 9 m

黏土層內水力坡降 $i = \Delta h_t / L = (12-9)/4 = 0.75$

滲流方向向上，從 F 到 G

黏土層中點 $\sigma = 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8 \text{ tf/m}^2$

$$\text{中點 } u_w = \frac{2+9}{2} \cdot \gamma_w = 5.5 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma' = 8 - 5.5 = 2.5 \text{ tf/m}^2$$

討論

涉及水頭的題目，務必畫表格求解，位置水頭最容易決定，請先寫下。**水壓計垂直段內的靜水高度，就是該點的壓力水頭**。注意水力坡降 i 是「兩點之間總水頭差距除以流線長度」。

每平方公尺截面，每年的滲流量 $q = kiA = 1 \times 10^{-8} \times 0.75 \times 1 = 7.5 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{sec} = 0.000648 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{day} = 0.2365 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{year}$ 。Datum 是基準面、零位能面。基準面不代表該處位能絕對值是零，位能乃是一相對值，請參考高中物理，或購買筆者《解說工程力學》閱讀第四章與第十章。

你能畫出水壓力 u_w 隨深度的變化圖嗎？

例 5-1.2 滲流速度

某化學工廠打淺井排放廢水，淺井周圍土壤的滲透係數 $k = 0.12 \text{ cm/sec}$ ，土壤孔隙比 $e = 0.91$ ，地下水位在極深之處，廢水不隨地下水流動。在化學工廠下游處 3.2 公里處有一民生用井，考慮廢水的水平流動，水力坡降為 0.006，試問廢水排出後，多久會流到民生用井？

<改編 Coduto 教科書、台大研究所類題>



$$\text{孔隙率 } n = e/(1+e) = 0.91/1.91 = 0.47644$$

$$\text{外視流速 } v = ki = 0.12 \times 0.006 = 0.00072 \text{ cm/sec}$$

$$\text{滲流速度 } v_s = v / n = 0.00072 / 0.47644 = 1.5112 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} = 1.5112 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$$

$$\text{時間 } t = L / v_s = 3200 / (1.5112 \times 10^{-5}) = 211,751,111 \text{ sec} = 2450.8 \text{ days} = \underline{\underline{6.71 \text{ years}}}$$

討論

很多人直覺以為應該用距離除以外視流速得時間，這是年久月深，長久以來對外視流速 v 建立不正確的觀念所致。外視流速是進行定水頭試驗，從蒐集的水量中反算出的「人造流速」，就像網路上的虛擬貨幣一樣，是虛擬流速。

工廠廢水在土壤中流動，就像試驗室裏往土壤滴入有色染液，有色染液逐漸在土壤中擴散、流動。人們測量顏色前進的距離，再除以經過的時間，就得到滲流速度 v_s 。

水未必是從壓力高的地方往壓力低的地方流動。茶杯裡靜止水，杯底水壓力較高，可是水卻沒流動，想一想為什麼？

§5-2 室內試驗求滲透係數(定水頭法)

土壤滲透性的代表參數是滲透係數 k (Coefficient of Permeability, Hydraulic Conductivity)，也有人稱水力傳導係數， k 如何求得？工程參數的求得，通常有三種方法：(1)取樣試驗。(2)現地試驗。(3)經驗公式。一般而言，欲知土壤的工程性質，有三種手段。一是取土樣進試驗室試驗，二是在現地試驗(花費最貴)，三是根據以往統計數據作成經驗公式。在求滲透係數 k 中，很明顯看到這 3 種方法各展其道。

表 5-2

取樣試驗	定水頭試驗
(便宜，但難以完全模擬現場，試體代表性有爭議)	變水頭試驗
	壓密試驗， $k_z = c_v m_v \gamma_w$ (見第六章，只能求垂直向的 k_z)
	Rowe cell Test (可測垂直或水平的 k)

現地試驗 (貴，最具代表性， 大金額工程才用)	現地抽水試驗(須觀測井) 現地灌水試驗(不須觀測井，若現地水位極深，則抽水不經濟) 鑽孔壓水試驗(Packer Test，不須觀測井)
經驗公式 (最便宜)	$k = C_1 D_{10}^2$ (提出者 Hazen) $k = \frac{\gamma_w g}{C \eta_w s^2} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2}$ (提出者 Kozeny, 1927) $k = \frac{\gamma_w g}{C \eta_w s^2} \cdot \frac{e^3}{1+e}$ (提出者 Carman, 1939)

定水頭(Constant Head)試驗裝置如圖 5-5，其目的是算出土壤的滲透係數 k ，由於上、下游水面固定，不隨時間改變，故稱定水頭試驗，為單向度滲流試驗。已知試驗耗時 t 中，累積的流量為 Q 、上下游出水口高度差 Δh_t 、土樣長度 L 以及土壤斷面積 A ，則有

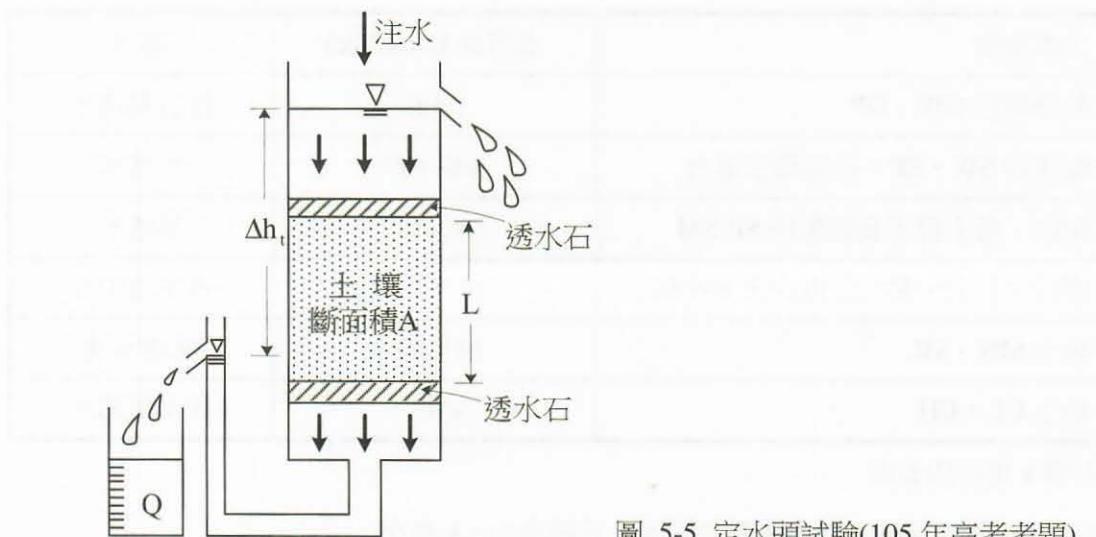


圖 5-5 定水頭試驗(105 年高考考題)

$$Q = qt = k i A t = k \frac{\Delta h_t}{L} A t$$

$$\text{故 } k = \frac{QL}{(\Delta h_t)At} \quad (\text{本試驗須收集水量}) \quad [5.8]$$

此試驗是求出試體沿重力線方向的滲透係數，水平向滲透係數仍未知。

上、下游出水口高度差就是上下游的總水頭差 Δh_t (Why?)。土壤內平均水力坡降 i 是上、下游總水頭差 Δh_t 除以流線長度 L 。本試驗適合對砂土等滲透性高的土壤進行試驗，不適合對黏土等滲透性低的土壤進行試驗。因為黏土滲透性低，需要累積很久的時間 t 才得到一點點流量 Q ，太耗費時間，且因為 Q 小，在燒杯或量瓶中依刻度判讀的誤差會變大；再因為試驗室冷氣吸水或 Q 的自然蒸散，都會使得 k 值誤差變大，所以黏土不適合進行定水頭試驗。

對於乾淨的細砂，Hazen 提出經驗公式： $k = C_1 D_{10}^2$ [5.9]

如果 D_{10} 用 mm 代入，則 C_1 可以取 1.0，得到的 k 單位為 cm/sec。例如 $D_{10} = 0.15$ mm，則 $k = 1 \times (0.15)^2 = 2.25 \times 10^{-2}$ cm/sec。經驗公式常是統計迴歸得到，因次未必諧和，使用者要注意各物理量單位以及對應的係數。純學理導出的公式，因次必定諧和。式[5.9]是迴歸出來的，不要為了因次諧和，而硬掰 C 的單位，若喜歡硬掰，則 SPT-N 值的公式，各係數都有怪單位了。若 D_{10} 與 k 均取 mm 為長度單位，則 C_1 應取 10。

表 5-3

土壤種類	垂直向 k_z (cm/sec)	描述
乾淨礫石 GW、GP	>1.0	極容易透水
乾淨砂 SW、SP，砂與礫石混合	$1.0 \sim 10^{-3}$	易透水
粗砂、粉土質不良級配砂 SP-SM	$10^{-1} \sim 10^{-3}$	易透水
細砂、粉土、黏土之混合土 SM-SC	$10^{-3} \sim 10^{-5}$	透水性中等
粉土 MH、ML	$10^{-5} \sim 10^{-7}$	低透水性
黏土 CL、CH	$<10^{-7}$	非常難透水

影響 k 值的因素有：

- ①土壤的粒徑分布曲線。細顆粒愈多，孔隙愈小， k 愈小。
- ②土壤顆粒形狀與組織結構。不規則形狀與狹長形狀之顆粒，造成水流「繞路」， k 比圓形顆粒更小。組織粗糙比光滑者， k 更小。
- ③土壤礦物組成。不同種類的礦物，其吸附水層厚度不一樣，吸附水層厚度愈大(如蒙脫土)，自由水能流動的空間愈小， k 愈小。
- ④孔隙比。對同一種土壤而言，若增大其孔隙比， k 就變大。
- ⑤飽和度。對同一種土壤而言，若增大其飽和度， k 就變大；氣泡越多，越阻止水流。

⑥層狀土壤之異質性。不同地質時期的沉積物不同，通常水平的 k 比垂直的 k 大，而地層內的裂縫、有機物等等也會影響 k 。

⑦流體性質。如密度、黏滯度，黏滯度愈高， k 愈小。

⑧流動的型態。如層流、紊流。

⑨溫度。溫度愈高， k 愈大。

⑩吸附水層的效果。越厚越難滲透， k 愈小。

以上因素或許是論文寫作的好材料，卻不是國家考試重點，看過即可，不須死背。

為簡單分辨，可視 $k > 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ 為滲透性佳， $k < 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ 為滲透性差。

高考
推導(學術)
技師
↓
現場

§5-3 室內試驗求滲透係數(變水頭法) 前5天再練一次

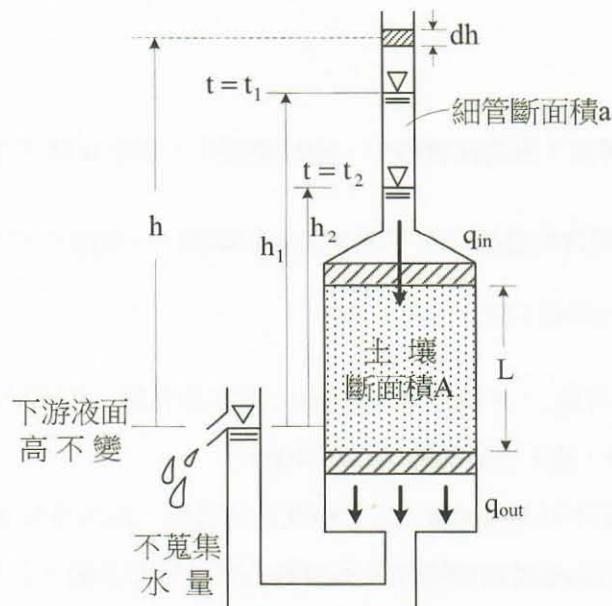


圖 5-6 變水頭試驗(105 高考考題)

變水頭(Falling Head)試驗裝置如圖 5-6，其目的也是要算出土壤的滲透係數 k 。試驗中，下游出水口位置不變，上游細管內液面緩緩下降，上下游的總水頭差隨時間逐漸改變，故稱「變水頭」。裝置的上游有一細管，斷面積 a ，試驗開始的時刻是 t_1 ，結束的時刻是 t_2 ；試驗開始的液面高差是 h_1 ，結束的液面高差是 h_2 、土樣長度 L 以及土壤斷面積 A 。

在試驗中的某一時刻 t ，上下游液面高差為 h ， h 是時間 t 的函數，即 $h=h(t)$ 。在微小的單位時距 dt 內，細管內水位下降 dh ，該單位時距內離開細管而進入土樣的水量 $q_{in} = -\frac{a \cdot dh}{dt}$ ，同時距，土體末端，單位時距離開的水量以達西定律計算得 $q_{out} = k i A = k(\frac{h}{L})A$ 。推導中，把 i 視為 uniform，不隨地點改變而改變，面積 A 係垂直於流線。

設水密度維持常數，質量不減就變成體積不減，依連續方程式， $q_{in} = q_{out}$

$$\Rightarrow -a \cdot \frac{dh}{dt} = k(\frac{h}{L})A \quad \Rightarrow -\frac{dh}{h} = \frac{Ak}{aL} \cdot dt \quad (\text{正數=正數})$$

等號兩邊同時取積分， $-\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{Ak}{aL} \cdot dt$

得 $\ln \frac{h_1}{h_2} = \frac{Ak}{aL} (t_2 - t_1)$

$$\text{故 } k = \frac{aL(\ln \frac{h_1}{h_2})}{A(t_2 - t_1)} = \frac{aL(\ln \frac{h_1}{h_2})}{A\Delta t} \quad [5.10]$$

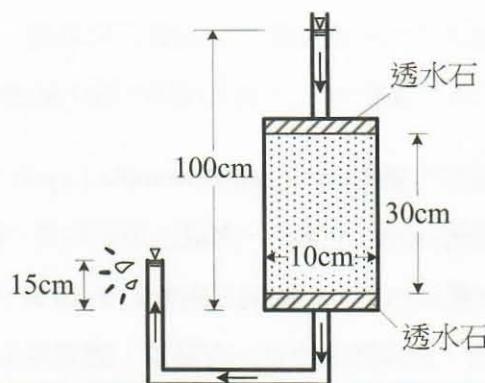
推導中，見到 $q_{in} = -a \frac{dh}{dt}$ ，負號何來？因為在實驗中，隨時間流逝，高度 h 越來越小， $\frac{dh}{dt}$ 是負數， $-\frac{dh}{dt}$ 才是正數。試驗中設計細管的目的是為了讓 h 值能明顯讀出，細管內只要有些許水量進入土體，就可以看出細管內水位明顯下降。

“ q ”的意義是「極短時間內的微小流量」，單位例如 cm^3/sec 。變水頭試驗，不同時刻， h 值會變，不同時間水力坡降 i 的大小不同，故 i 不是穩態(steady state)。

當你騎機車紅燈起步，花 8 秒速度升到 50 km/hr ，這 8 秒就是非穩態，因為速度在變化。8 秒後速度維持定值，就是到達穩態，因為速度這個物理量不再隨時間改變而改變。長期水壓力畫法與抽水問題，我們都是針對穩態求解，亦即避開抽水早期的非穩態與早期的水壓力變化。

例 5-3.1 變水頭試驗

某變水頭試驗裝置如圖，圖示水位均為試驗剛開始時之水位，土壤試體斷面為圓形，其直徑 10 cm，長度 30 cm，細管直徑 2 cm，經過 4 小時試驗後，細管水位下降 10 cm，求土壤的滲透係數(cm/sec)。



$$h_1 = 100 - 15 = 85 \text{ cm}$$

$$h_2 = 85 - 10 = 75 \text{ cm}$$

$$k = \frac{aL(\ln \frac{h_1}{h_2})}{A\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{4}(2)^2 \times 30(\ln \frac{85}{75})}{\frac{\pi}{4}(10)^2 \times 4 \times 3600} = \underline{\underline{1.043 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}}}$$

討論

請注意 h_1 、 h_2 的定義，是從下游水位面起算，不是下方透水石。背公式時，建議連試驗圖形一起背。

室內試驗所用的原狀土壤通常較小，比較不會含有節理、特大孔隙、不連續面或其他弱面，故試體做出來的滲透係數，常常小於現地滲透係數。《邊坡工程設計與施工規範(草案)》提到， $k < 10^{-2} \text{ cm/sec}$ 者，適合使用變水頭試驗， $k \geq 10^{-2} \text{ cm/sec}$ 者，適合使用定水頭試驗。

§5-4 室外試驗求滲透係數

對於比較重要的工程(eg：興建水庫)，必須進行現地試驗，求得現場土壤的滲透係數，而不能僅依賴一個小小試體求出的滲透係數。小試體常無裂縫，大試體容易包含裂縫，一有裂縫，滲透係數急速增加，造成小試體無法代表大現場，雪山隧道新建前誤判施工湧水量即為一例。

如果現場是非拘限含水層(Unconfined Permeable Layer)，如圖 5-7，為求滲透係數，試驗者在主井抽水，並測量觀測井的水位變化，考慮土壤不均質，觀測井可布設成十字狀或 L 字狀，同時方便在兩正交方向觀察水位，相鄰兩孔距離約 5~10 m。試驗者先嘗試以不同抽水速率 q 抽水，若抽水速率 q 過大，則洩降曲線會一直降落，觀測井水位也會一直降落，無法維持不變，這樣就不算達到穩態(Steady State)，也就是抽掉的比補助進來的多，這樣就要降低抽水速率 q 。

什麼叫穩態？就是某物理參數(或力學參數)不隨時間改變而改變，稱為達到穩態。

如果試驗者的抽水速率 q 過小，遠方補助過來的水量較大，地下水位線就不會下降，不同觀測井內的水位會一樣高，這樣就求不出水力坡降(即 $\frac{dh}{dr} = 0$)。

當試驗者嘗試找到一個抽水速率 q ，產生洩降後能使觀測井內水位高度維持不變，則現場就達到穩態，穩態就是指洩降曲線高度不隨時間改變，僅隨地點改變，抽出去的水量和兩側補助進來的一樣多。此時考慮以主井為圓心，半徑為 r 的環狀立面，立面高度 h ，單位時間內從主井抽走的水量等於流入環狀立面的水量，即

$$q = kiA = k \frac{dh}{dr} (2\pi rh) = \text{常數}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\pi kh}{q} dh$$

$$\text{等號兩邊同時取積分，} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{2\pi kh}{q} \cdot dh$$

$$\Rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\pi k}{q} (h_2^2 - h_1^2)$$

$$\text{得 } k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{\pi(h_2^2 - h_1^2)}$$

[5.11]

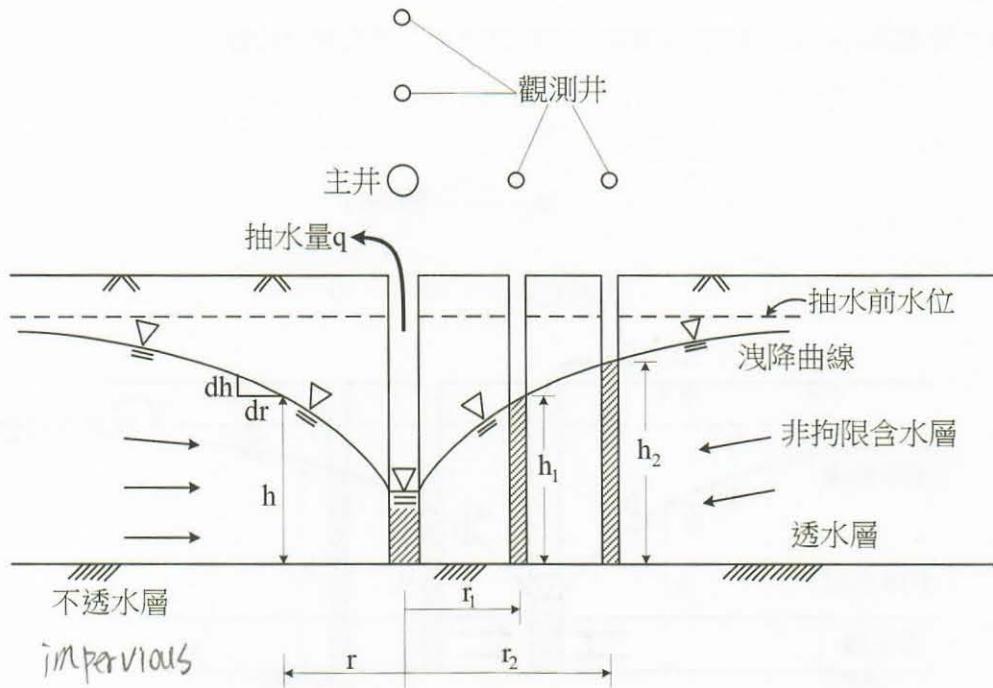


圖 5-7 非拘限含水層，只有一層是不透水層

有朋友問「為何 $i = \frac{dh}{dr}$ ？」參考圖 5-8，B、C 兩點均在地下水位線，兩點的壓力水頭都是零，所以兩點總水頭差 dh 就是垂直高程差 dy ，流線長度是 ds 。在流線很平緩的前提下， $ds \approx dx$ ， $i \equiv \frac{dh}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{dh}{dr}$ 。

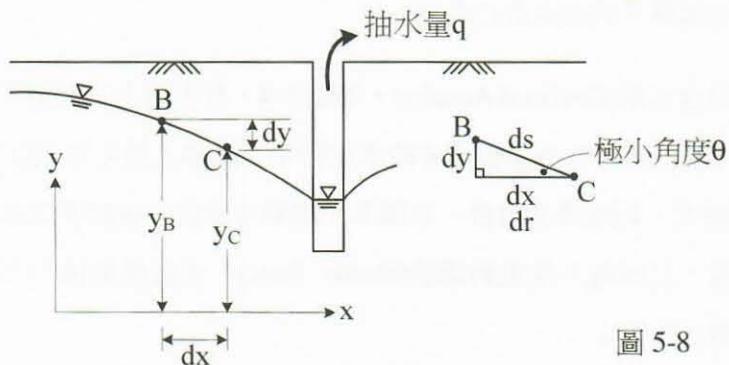


圖 5-8

以上推導有兩點暗示：第一，這代表流線角度愈陡，單位體積滲流力($i\gamma_w$)愈大；第二，現

場若洩降曲線陡峭，則上述結論不適用。

另外，這有沒有讓你想起材料力學，在小變形之下，樑的斜率 $\tan\theta$ 常常用轉角 θ 取代，還有材料力學裏講的斜率，移到結構學的傾角變位法，經常被講成轉角。

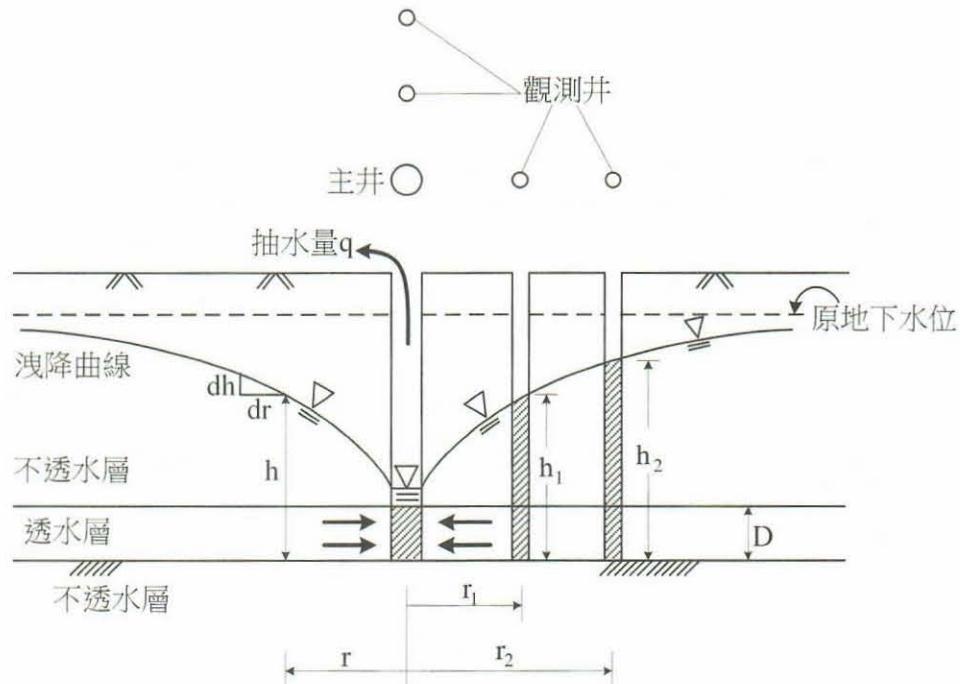


圖 5-9 拘限含水層，上下兩邊都是不透水層

拘限含水層是指某含水地層(eg：砂土層、礫石層)，其上下層次皆為不透水層(eg：黏土層)，不透水層將含水層「包圍」、「拘限」住。拘限含水層不一定有受壓水，若有受壓水且水壓力夠大，則會產生自流井現象。在山麓下的拘限含水層，受到山裏地下水流補助，拘限含水層內水壓力可能比靜態水位面高，形成自流井現象。

如果現場是拘限含水層(Confined Aquifer)，如圖 5-9，含水層上下都是不透水層，為了求滲透係數，試驗者在主井抽水，並測量觀測井的水位變化。試驗人員先嘗試以不同抽水速率 q 抽水，若抽水速率 q 過大，則洩降曲線會一直降落，觀測井水位也會跟著降落，無法維持不變，水力坡降隨時間在變，這樣就不是達到穩態(Steady State)，也就是抽掉的水比四周補助進來的多，這樣就要降低抽水速率 q 。

如果試驗人員選的抽水速率 q 過小，遠水源源不絕迅速補助，地下水位線就不會明顯下降，

不同觀測井內的水位會一樣高，這樣就求不出水力坡降(即 $\frac{dh}{dr} = 0$)。

當試驗人員嘗試找到一個抽水速率 q ，能使觀測井內水位高度維持不變，則現場就達到穩態，穩態就是指洩降曲線不隨時間改變，水力坡降不隨時間改變，僅隨地點改變，抽出去的水量和透水層兩側補助進來的一樣多，此時考慮以主井為圓心，半徑為 r 的環狀立面，此環狀立面高度為 D (拘限含水層厚度)，則有單位時間入流量 $q = kiA = k \frac{dh}{dr} (2\pi r D) = \text{常數}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\pi k D}{q} dh$$

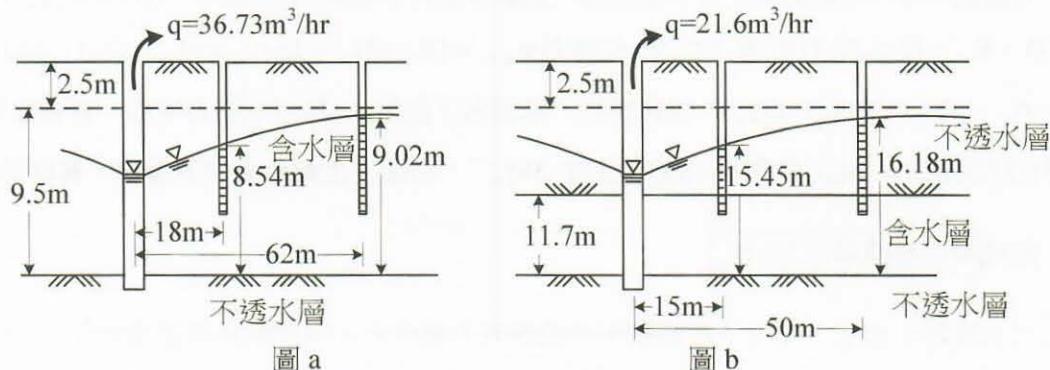
$$\text{等號兩邊同時取積分，} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{2\pi k D}{q} \cdot dh$$

$$\Rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi k D}{q} (h_2 - h_1)$$

$$\text{得 } k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{2\pi D(h_2 - h_1)} \quad [5.12]$$

例 5-4.1 野外抽水求 k

- (1) 某地層如圖 a 所示，原先地下水位在地表下 2.5 m 處，抽水穩定後，抽水量 $q=36.73 \text{ m}^3/\text{hr}$ ，試求此含水層之滲透係數，並研判地層是粗砂還是細砂。<103 土木技師類題 25%>
- (2) 某地層如圖 b 所示，原先地下水位在地表下 2.5 m 處，抽水穩定後，抽水量 $q=21.6 \text{ m}^3/\text{hr}$ ，試求此含水層之滲透係數(請用單位 cm/sec)。





(1)此為非拘限含水層， $q = 36.73/3600 = 0.010203 \text{ m}^3/\text{sec}$

$$k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} = \frac{0.010203 \ln(62/18)}{\pi(9.02^2 - 8.54^2)} = 4.7653 \times 10^{-4} \text{ m/sec} = \underline{0.04765 \text{ cm/sec}} \quad \text{粗砂}$$

(2)此為拘限含水層， $q = 21.6/3600 = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{sec}$

$$k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{2\pi D(h_2 - h_1)} = \frac{6 \times 10^{-3} \ln(50/15)}{2\pi(11.7)(16.18 - 15.45)} = 1.346 \times 10^{-4} \text{ m/sec} = \underline{0.01346 \text{ cm/sec}}$$

討論

現地抽水試驗，應避免抽出之水又流回地層，會影響試驗正確性。《建築物基礎構造設計規範》提出各類土層之滲透係數與適用的降水方法如下表：

含水層	滲透係數(cm/sec)	降水方法
卵礫石層	$>1 \times 10^{-1}$	重力降水、水中開挖(不降水)
粗砂至中砂	$1 \times 10^{-1} \sim 1 \times 10^{-3}$	重力排水、深井、點井、真空抽水井
細砂、粉土、黏土	$1 \times 10^{-3} \sim 1 \times 10^{-5}$	深井、點井、真空抽水井
黏土	$<1 \times 10^{-5}$	電滲法或不降水

§5-5 滲流水壓 u_s

考慮圖 5-10，均質土體上方水位較高，土體承受向下滲流，C 點總應力 $\sigma_C = H_1 \gamma_w + H_2 \gamma_{sat}$ ，C、D、E 三點水壓力相同，C 點水壓力 $u_{w,C} = (H_1 + H_2 - \Delta h)\gamma_w = y\gamma_w$ ，故 C 點有效應力 $\sigma'_C = \sigma_C - u_{w,C} = H_2 \gamma' + \Delta h \gamma_w$ 。在此看到，水流向下使得 C 點有效應力增加，若和土體內的水流靜止狀況相比，現在 C 點有效應力增加“ $\Delta h \gamma_w$ ”。結論：土體承受向下滲流，有助於穩定。

定義單位體積滲流力 = $i\gamma_w$

[5.13]

水力坡降 i 愈大，單位土壤體積所受的滲流力量愈大，同步地外視流速愈大，滲流力就是水流衝擊土壤的力量。水若不流動，無滲流($i=0$)，則無此力量。

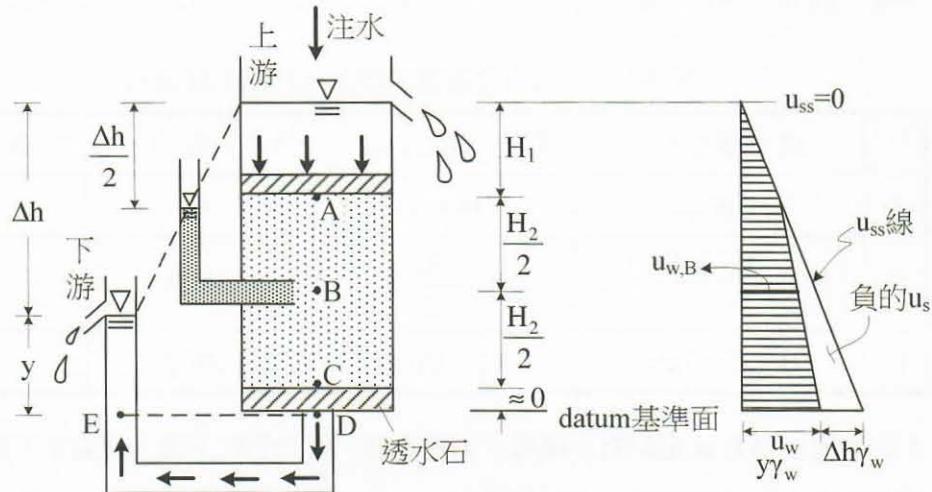
圖 5-10 右圖實線區 u_w 才是真正水壓力

表 5-4

	總水頭 h_t	位置水頭 h_e	壓力水頭 $h_p = \frac{u_w}{\gamma_w}$
A	$H_1 + H_2$	H_2	H_1
B	$H_1 + H_2 - (\Delta h/2)$	$H_2 / 2$	$\left(H_1 + \frac{(H_2 - \Delta h)}{2} \right)$
C	$H_1 + H_2 - \Delta h$	0	$H_1 + H_2 - \Delta h (=y)$
D	$H_1 + H_2 - \Delta h$	0	$H_1 + H_2 - \Delta h (=y)$
E	$H_1 + H_2 - \Delta h$	0	$H_1 + H_2 - \Delta h (=y)$

圖 5-10 裏，均質土壤 A、B、C、D、E 五點的總水頭、位置水頭、壓力水頭大小如表 5-4，B 為 A、C 中點。從 D 點到 E 點，當中無土壤，水流視為不消耗能量，D、E 兩點總水頭相等。因透水石很薄，視 D、C 兩點總水頭相等。(精確來講，D、E 之間有管壁摩擦損失，惟土力不計，意者可參考流體力學。)

若以上游水位面當成靜態水壓力的起算面，則 A、B、C 各點的各種水壓力分量如表 5-5，總水壓力那欄，抄自表 5-4 壓力水頭那一欄乘以水的單位重 γ_w 。水壓力有三個分量(u_{ss} 、 u_s 、 u_e)，這三個分量加起來就是總水壓，壓力水頭 h_p 就是總水壓 u_w 的能量表現。請注意均質土壤(i.e., k=常數)B、C 兩點滲流水壓力 u_s ，可從上、下游總水頭差快速計算。水從 A 流往 C 的過程中，B

正好在一半處，故 B 點滲流水壓力是「上、下游總水頭差之半」乘以水單位重 γ_w 。

表 5-5 上游水位面當成靜態水壓力的起算面

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$H_1 \times \gamma_w$	0	0
B	$\left(H_1 + \frac{(H_2 - \Delta h)}{2} \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2}) \gamma_w$	$(-\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 - \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2) \gamma_w$	$(-\Delta h) \gamma_w$	0

表 5-5 的滲流水壓力 u_s 是絕對正確嗎？其實不然，若我們把下游水位面當成靜態水壓力的起算面，就會得表 5-6，兩表相比，我們發現 u_{ss} 、 u_s 都變了，但總水壓力 u_w 不變。如果題目只有一個靜態水位面，那麼 u_{ss} 、 u_s 的值就只有單一解。

在個別的表裡，上游側的土壤點，其 u_s 值必定大於下游測的土壤點。

表 5-6 下游水位面當成靜態水壓力的起算面

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$(H_1 - \Delta h) \gamma_w$	$(\Delta h) \gamma_w$	0
B	$\left(H_1 + \frac{(H_2 - \Delta h)}{2} \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2} - \Delta h) \gamma_w$	$(\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 - \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2) \gamma_w$	0	0

假如水是往上滲流通過土體呢？

考慮圖 5-11，土體正上方水位較低，均質土體承受向上滲流，C 點總應力 $\sigma_C = H_1 \gamma_w + H_2 \gamma_{sat}$ ，C、D、E 三點水壓力相同，C 點水壓力 $u_{w,C} = (H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$ ，所以 C 點有效應力 $\sigma'_C = \sigma_C - u_{w,C} = H_2 \gamma' - \Delta h \gamma_w$ 。A、B、C、D、E 五點的總水頭、位置水頭、壓力水頭大小列於表 5-7。在這裡我們看到，水流向上使得 C 點有效應力減少，若和土體內的水流靜止狀況相比，現在 C 點有效應力減少 “ $\Delta h \gamma_w$ ”。結論：土體承受向上滲流，有害於穩定。

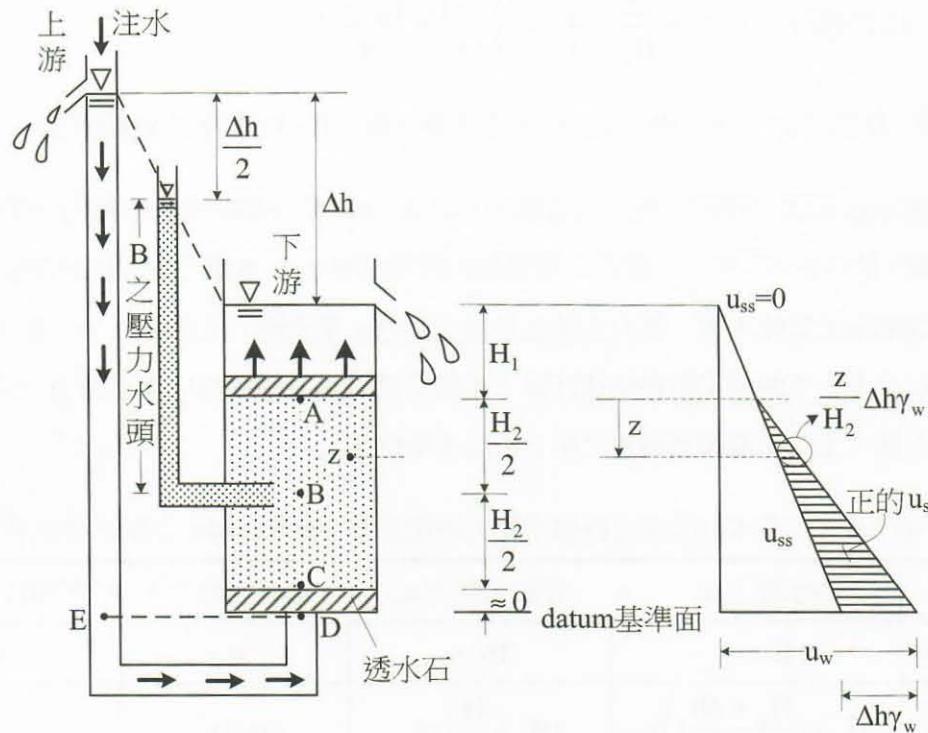
圖 5-11 右圖 u_w 才是真實水壓力

表 5-7

	總水頭 h_t	位置水頭 h_e	壓力水頭 $h_p = \frac{u_w}{\gamma_w}$
A	$H_1 + H_2$	H_2	H_1
B	$H_1 + H_2 + (\Delta h / 2)$	$H_2 / 2$	$\{H_1 + (H_2 + \Delta h) / 2\}$
C	$H_1 + H_2 + \Delta h$	0	$H_1 + H_2 + \Delta h$
D	$H_1 + H_2 + \Delta h$	0	$H_1 + H_2 + \Delta h$
E	$H_1 + H_2 + \Delta h$	0	$H_1 + H_2 + \Delta h$

當上游水位面升得夠高，導致 C 點有效應力降為零時，定義當下的水力坡降為「臨界水力坡降」 i_c （或寫成 i_{cr} ）。

$$\text{當 } \sigma'_C = 0 \text{ 時, } H_2 \gamma' - \Delta h \gamma_w = 0, \text{ 得 } \frac{\Delta h}{H_2} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad [5.14]$$

$$\text{在 } \sigma'_c = 0 \text{ 的前提下, } i_{cr} = i_c \equiv \frac{\Delta h}{H_2} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} \quad [5.15]$$

從 E 點到 D 點，當中無土壤，水流視為不消耗能量，E、D 兩點總水頭相等。

若以下游水位面當成靜態水壓力的起算面，則 A、B、C 各點的各種水壓力分量如表 5-8，總水壓力那欄，抄自表 5-7 壓力水頭那一欄乘以水的單位重 γ_w 。水壓力有三個分量(u_{ss} 、 u_s 、 u_e)，這三個分量加起來就是總水壓，壓力水頭就是總水壓的能量表現。請注意到 A、B 兩點滲流水壓力 u_s ，可以從上、下游總水頭差快速計算。水從 C 流往 A 的過程中，B 正好在一半處，故 B 點滲流水壓力是「上、下游總水頭差之半」乘以水單位重 γ_w 。

表 5-8 下游水位面當成靜態水壓力的起算面 (★Terzaghi 法算砂湧會用到)

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$(H_1) \gamma_w$	0	0
B	$\left(H_1 + \left(\frac{H_2 + \Delta h}{2} \right) \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2}) \gamma_w$	$(\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2) \gamma_w$	$(\Delta h) \gamma_w$	0

$$\text{表 5-8 搭配圖 5-11，得 } z \text{ 點水壓力 } u_w = u_{ss} + u_s = (H_1 + z) \gamma_w + \frac{z}{H_2} \Delta h_t \gamma_w \quad [5.16]$$

表 5-8 的滲流水壓力 u_s 是絕對正確嗎？其實不然，若我們把上游水位面當成靜態水壓力的起算面，就會得表 5-9，兩表相比，我們發現 u_{ss} 、 u_s 都變了，但總水壓力 u_w 不變。如果題目只有一個靜態水位面，那麼 u_{ss} 、 u_s 的值就只有單一解。

表 5-9 上游水位面當成靜態水壓力的起算面

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$(H_1 + \Delta h) \gamma_w$	$-(\Delta h) \gamma_w$	0
B	$\left(H_1 + \left(\frac{H_2 + \Delta h}{2} \right) \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2} + \Delta h) \gamma_w$	$-(\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$	0	0

若題目有兩個靜態水位面，且把下游水位面視為 $u_{ss}=0$ ，則所有的土壤滲流水壓力 u_s 恒正 (Terzaghi 用此法，要會)；若把上游水位面視為 $u_{ss}=0$ ，則所有的土壤滲流水壓力 u_s 恒負。

讀者已經知道總水頭 $h_{total} = h_e + h_p = h_e + \frac{u_w}{\gamma_w} = h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w} + \frac{u_s}{\gamma_w} + \frac{u_e}{\gamma_w}$ 。若超額孔隙水壓 u_e 為零，則上式變成

$$h_{total} = \text{位置水頭 } h_e + \text{壓力水頭 } h_p$$

$$= \text{位置水頭 } h_e + \text{靜態水壓力水頭 } \frac{u_{ss}}{\gamma_w} + \text{滲流水壓力水頭 } \frac{u_s}{\gamma_w}。 \quad [5.17]$$

參考圖 5-12，水從 B 流向 C，B 點比 C 點低 z 公尺，所以 B 的位置水頭比 C 少 z 公尺，但是 B 的靜態水壓力水頭 $h_{ss,B}$ 一定會比 C 的靜態水壓力水頭 $h_{ss,C}$ 多 z 公尺，一來一往互補打平，形成 B、C 兩點的 $(h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w})$ 一定相等，所以 B、C 兩點的總水頭差 Δh ，就是 B、C 兩點的滲流水壓力水頭差，此結論在單向度、雙向度流線網算滲流水壓力中會用到。GWT 是 Ground Water Table，意即地下水位面，或稱狹義的浸潤面(Phreatic Surface)。

又，B、C 之間的水力坡降 $i = \frac{\Delta h_t}{L} = \frac{\Delta h}{L}$ ，L 是傾斜的流線長度。

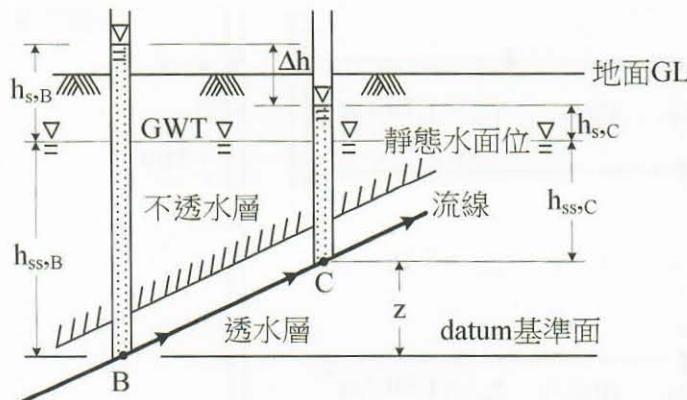


圖 5-12

表 5-10 (配合圖 5-12)

	總水頭 h_{total}	$=$	h_e	$+$	$\frac{u_{ss}}{\gamma_w}$	$+$	$\frac{u_s}{\gamma_w}$
B	$h_{ss,B} + h_{s,B}$		0		$h_{ss,B}$		$h_{s,B}$
C	$z + h_{ss,C} + h_{s,C}$		z		$h_{ss,C}$		$h_{s,C}$

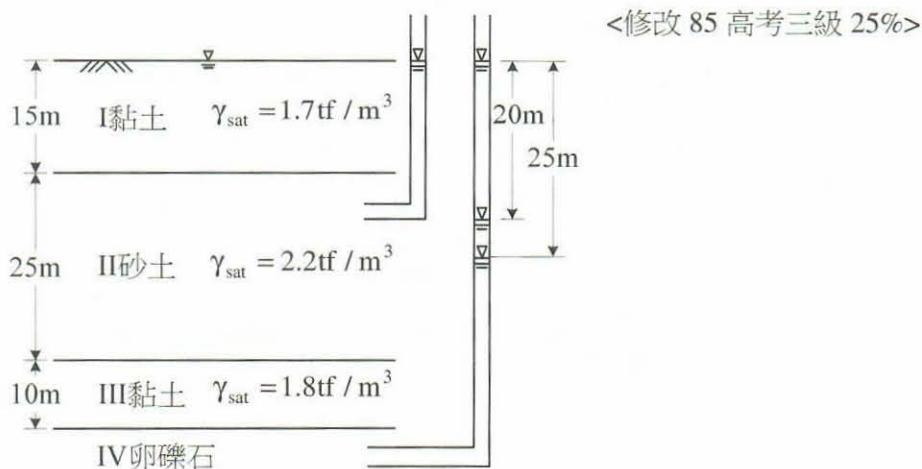
備註： $0 + h_{ss,B} = z + h_{ss,C}$ ，想不通者，看圖 5-12，一來一往互補打平。

就像材力、結構學，彎矩有符號法則，不同定義下，彎矩可能由正變負，算滲流水壓之前也要決定 u_s 為零的面(此觀點類似符號法則)。Terzaghi 以下游水面當成 u_s 為零的面。

例 5-5.1 水壓力分布圖

某土層剖面如下圖所示，其中第一層為黏土層，第二層為砂土層，第三層為黏土層，第四層為透水性相當高的卵礫石層，

- (1)原先，各個土層的地下水壓均在地表面，請求第一層、第三層黏土中點的有效應力。
- (2)後來此處因民生用水的需要，而在卵礫石層抽取地下水。由於長期抽取地下水的緣故，第三層黏土層內部的超額孔隙水壓力已完全消散，使得卵礫石層的水壓下降至地表下 20 m 處，請繪此狀態之水壓力分布圖，並求第一層、第三層黏土中點長期的有效應力。
- (3)後來抽水停止，卵礫石層及黏土層內部的水壓由逐漸恢復至靜態壓力(水壓力均達地表面)，請繪此狀態之水壓力分布圖，並求第一層、第三層黏土中點長期的有效應力。
- (4)後來此處附近的一個開挖工程亦在卵礫石層抽水，使得水壓下降至地表下 25 m 處，試繪此狀態之水壓力分布圖，並求第一層、第三層黏土中點長期的有效應力。



(1) 第一層黏土層中點 $\sigma'_v = 7.5(1.7 - 1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$

第三層黏土層中點 $\sigma'_v = (15 \times 1.7 + 25 \times 2.2 + 5 \times 1.8) - 1(15 + 25 + 5) = 89.5 - 45 = 44.5 \text{ tf/m}^2$

(2)長期水壓力分布如圖 a，第 IV 層水壓力一定要畫

$$\text{第一層黏土層中點 } \sigma'_v = 7.5(1.7-1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{第三層黏土層中點 } u_w = (40+30)/2 = 35 \text{ tf/m}^2 , \quad \sigma'_v = 89.5 - 35 = 54.5 \text{ tf/m}^2$$

(3)水壓力分布如圖 b，第 IV 層水壓力一定要畫

$$\text{第一層黏土層中點 } \sigma'_v = 7.5(1.7-1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{第三層黏土層中點 } u_w = 45 \text{ tf/m}^2 , \quad \sigma'_v = 89.5 - 45 = 44.5 \text{ tf/m}^2$$

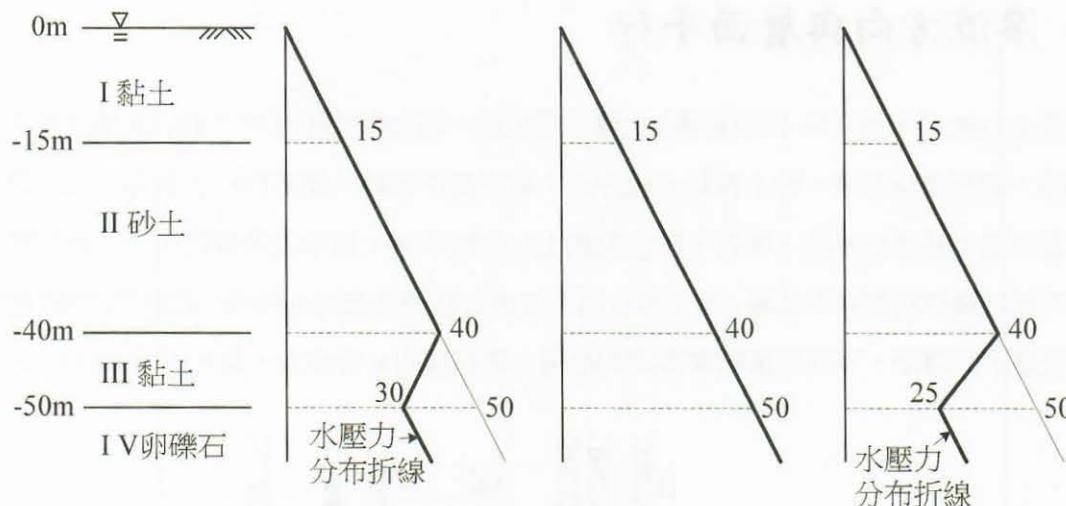


圖 a

圖 b

圖 c

(4)水壓力分布如圖 c，第 IV 層水壓力一定要畫

$$\text{第一層黏土層中點 } \sigma'_v = 7.5(1.7-1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{第三層黏土層中點 } u_w = (25+40)/2 = 32.5 \text{ tf/m}^2 , \quad \sigma'_v = 89.5 - 32.5 = 57 \text{ tf/m}^2$$

(第 IV 層水壓力一定要畫，不畫是「不會畫」，不是漏畫)

討論

題目沒給第 III 層黏土滲透係數，就視其滲透係數極小，像鋼鉗一般不透水，總水頭損失皆在此層中發生。同時假定第 II 層砂的水可以左右補注，其水壓力不受第 IV 層降水影響，當然第 I 層黏土的水壓力更不受影響。第 IV 層長期降水，不會影響地表水位面下降。

到底有沒有真的懂水壓力，畫出水壓力分布圖就知道。這題筆者畢生難忘。85 年高考第一天第一堂第一題就是這題，意者請上網調閱原版考題，題幹很長，當時看到一半心就涼一半，看完題目就覺得過去土壤力學全白唸了，完全不知如何下手，考前號稱「土壤力學已經唸完三遍」，是自我感覺太良好。中午吃便當時，後座考生大言不慚「上午那題土力是我老闆命題」，頗有非該 group 出身者不能得分的洋洋得意。放榜後查號碼榜，該員落榜大吉，才知道考場內會叫的狗不會上榜。筆者雖僥倖上榜，但此卷只得 46 分，心中十分不甘願。

§5-6 滲流方向與層面平行

實際上的地層，經常是不同種類的土壤互層組成。因為在地球歷史久遠的沉積過程中，當水量大時，礫石會留下來，砂土與黏土被沖走；當水量中等時，礫石與砂土會留下來，黏土被沖走；當水量小甚至枯水時，礫石、砂土與黏土均會留下來，故不同地質階段、氣候影響，逐漸形成不同地質材料的水平互層。新北市石門區淡金公路旁隆起的海蝕洞，訴說著沉積的歷史，很明顯就是不同時期，不同沉積物堆積成的地層。礫石層的 k 會較大，黏土層的 k 會較小。

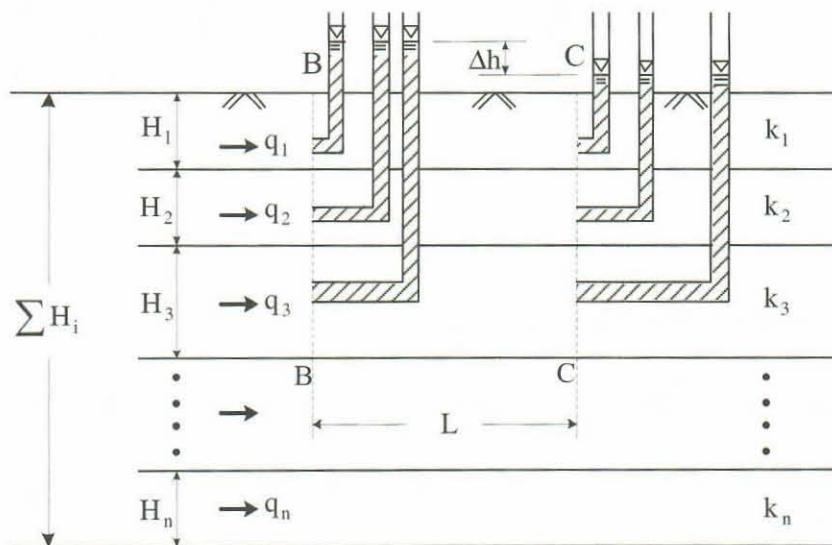


圖 5-13 水流方向平行於土壤層次

當水流方向與土壤層面平行時，如圖 5-13，總流量 q 等於各層次流量的總和，

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

其中 $q_1 = k_1 i_1 H_1$, $q_2 = k_2 i_2 H_2$, ..., $q_n = k_n i_n H_n$

各層水力坡降 i 均相同, $i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i = \Delta h / L$

若有一等效土層總厚度 H , 等值滲透係數 k_x , $H = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n = \sum H_i$, 考慮等效土層和原土層的單位時間滲漏量相等(Why?),

$$\Rightarrow q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\Rightarrow k_x i \sum H_i = k_1 i_1 H_1 + k_2 i_2 H_2 + \dots + k_n i_n H_n \quad \text{可約掉水力坡降 } i$$

$$\Rightarrow k_x \sum H_i = k_1 H_1 + k_2 H_2 + \dots + k_n H_n$$

整理得等值滲透係數

$$k_x = \frac{\sum (H_i k_i)}{\sum H_i} = \frac{H_1}{\sum H_i} k_1 + \frac{H_2}{\sum H_i} k_2 + \dots + \frac{H_n}{\sum H_i} k_n \quad [5.18]$$

口訣：滲流「平行」層面，公式加權「平均」。

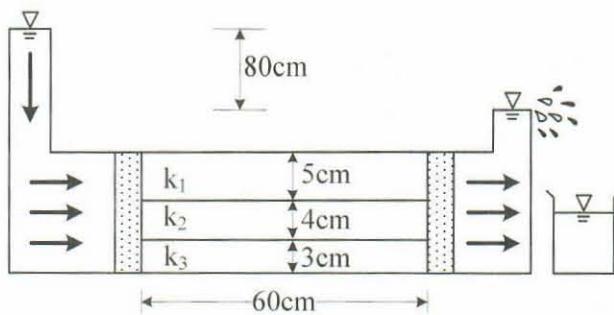
由上式可看出，若某一層 H_i 越厚，或某一層的滲透係數 k_i 越大，均會對 k_x 提供較大的貢獻。

也就是 k_x 受最厚的層次、最大的滲透係數影響最多。另外， $\frac{H_i}{\sum H_i}$ 也可說是各滲透係數的「權重係數」，權重係數 < 1.0 ，第 i 層的 k_i 乘以其權重係數後，累加即得 k_x ，而權重係數的總和是 1.0。

讀者算出 k_x 後， k_x 必然介於 k_{max} 與 k_{min} 之間，可作為簡單檢驗。 k_{max} 是各層次 k_i 中的最大值， k_{min} 是各層次 k_i 中的最小值。

例 5-6.1 流線平行層面

有定水頭裝置如圖所示，上下游水頭差 80 cm，各層土壤 $k_1=3\times10^{-4}$ cm/sec、 $k_2=6\times10^{-3}$ cm/sec、 $k_3=5\times10^{-4}$ cm/sec，試體厚度示於圖內，試體寬度 10 cm，試求等效之滲透係數、三種土壤所受的滲流力以及 3 小時所收集到的水量。



$$(1) k_x = \frac{5}{5+4+3} k_1 + \frac{4}{5+4+3} k_2 + \frac{3}{5+4+3} k_3 = \frac{0.027}{12} = 2.25 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$$

$$(2) \text{土壤 1 承受的滲流力} = (i\gamma_w)V_1 = \frac{80}{60} \times 1 \times 0.05 \times 0.1 \times 0.6 = 0.004 \text{ tf} \quad (\rightarrow)$$

$$\text{土壤 2 承受的滲流力} = (i\gamma_w)V_2 = \frac{80}{60} \times 1 \times 0.04 \times 0.1 \times 0.6 = 0.0032 \text{ tf} \quad (\rightarrow)$$

$$\text{土壤 3 承受的滲流力} = (i\gamma_w)V_3 = \frac{80}{60} \times 1 \times 0.03 \times 0.1 \times 0.6 = 0.0024 \text{ tf} \quad (\rightarrow)$$

$$(3) \text{單位時間滲流量 } q = k_x i A = 2.25 \times 10^{-3} \times \frac{80}{60} \times 12 \times 10 = 0.36 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

$$Q = qt = 0.36 \times 3 \times 3600 = 3888 \text{ cm}^3$$

討論

對均向土壤而言，滲流力沿著滲流方向。單位時間滲流量 $q = k_1 i A_1 + k_2 i A_2 + k_3 i A_3$ ，請讀者依此算算看。滲流力方向同於滲流方向。某建築工地興建地下室而開挖降水，造成附近農民取不到地下水灌溉而抗議。在學校學工程知識是簡單的，到社會上運用，勢必和其他價值觀衝突、競合，這學問更大。工址周圍做好敦親睦鄰，是幫自己剷除困難，實不亞於專業的重要。

§5-7 滲流方向與層面垂直

當水流方向與土壤層面垂直時，如圖 5-14，第一層的總水頭損失是 Δh_1 ，第二層的總水頭損失是 Δh_2 ，第 i 層的總水頭損失是 Δh_i ，而每一層的單位時間內流量都相等(Why?)，即 $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q$ 。

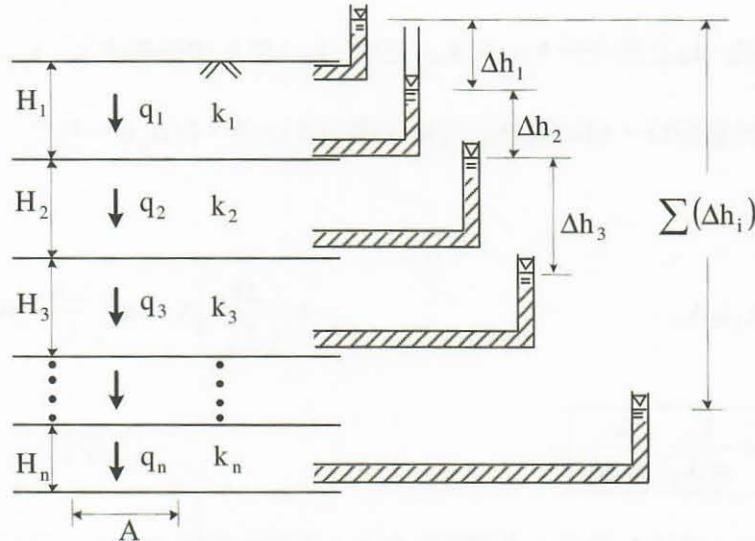


圖 5-14 水流方向垂直土壤層次

考慮一等效土層，厚度為 $\sum H_i$ ， $\sum H_i = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n$ ，等效土層的單位時間滲漏量也是 q ，等值滲透係數為 k_z ，今欲設法求 k_z ：

$$\text{因 } q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q, \text{ 展開得} \Rightarrow k_1 i_1 A = k_2 i_2 A = \dots = k_n i_n A = k_z i A \quad A \text{ 可約掉}$$

$$\Rightarrow k_1 \frac{\Delta h_1}{H_1} = k_2 \frac{\Delta h_2}{H_2} = \dots = k_n \frac{\Delta h_n}{H_n} = k_z \frac{\sum (\Delta h_i)}{\sum H_i} = \text{常數 } C = \text{外視流速 } v$$

$$\Rightarrow \Delta h_1 = \frac{CH_1}{k_1}, \quad \Delta h_2 = \frac{CH_2}{k_2}, \dots, \quad \Delta h_n = \frac{CH_n}{k_n}$$

等效土層的水頭損失為 $\sum (\Delta h_i)$ ，等於各層的水頭損失之和，即 $\sum (\Delta h_i) = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots +$

$$\Delta h_n, \Rightarrow C \frac{\sum H_i}{k_z} = C \frac{H_1}{k_1} + C \frac{H_2}{k_2} + \dots + C \frac{H_n}{k_n}$$

C 可約掉

$$\text{得 } \frac{\sum H_i}{k_z} = \frac{H_1}{k_1} + \frac{H_2}{k_2} + \dots + \frac{H_n}{k_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_i}{k_i} \right)$$

[5.19]

筆者稱呼此公式「Hong-kong 公式」，因見 H 在分子， k 在分母。

讀者算出 k_z 後， k_z 必然介於 k_{\max} 與 k_{\min} 之間。 k_{\max} 是 k_i 中的最大值， k_{\min} 是 k_i 中的最小值。

當水流垂直於層面時，相鄰兩層面的總水頭損失比例，存在著一特定公式。因相鄰兩層面流量相等， $q_1 = q_2$

$$\Rightarrow k_1 i_1 A_1 = k_2 i_2 A_2 \quad \Rightarrow k_1 \left(\frac{\Delta h_1}{L_1} \right) A_1 = k_2 \left(\frac{\Delta h_2}{L_2} \right) A_2$$

$\text{故 } \Delta h_1 : \Delta h_2 = \frac{L_1}{A_1 k_1} : \frac{L_2}{A_2 k_2}$

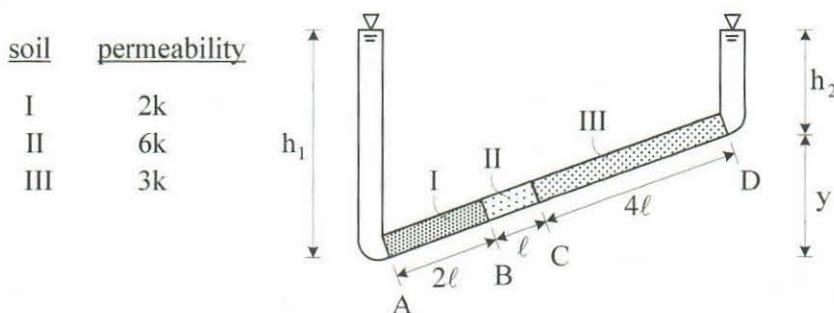
(「搶劫比」公式) [5.20]

此比例式表示：流線 L 愈長，水頭損失愈多；土壤斷面積 A 愈小，消耗能量愈多；滲透係數愈小，水頭損失也愈多。生活類比：在逢甲夜市中往前走 L 越長，體力消耗越多；人潮越洶湧前方孔隙 A 越小，硬擠體力損失越多。

例 5-7.1 流線垂直層面

考慮固定水頭狀況由左流向右，試求(1)點 B 及點 C 之水頭(total head)及(2)土壤中之流速
(flow rate)。

<中興大地組 20%>



(1) ① 滲透係數比 $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 6 : 3$

流線長度比 $L_{AB} : L_{BC} : L_{CD} = 2 : 1 : 4$

水在土壤中流動，會損失總水頭(Total Head)。總水頭的損失量(ΔH_T)，正比於流經的土

壤長度，反比於滲透係數，也反比於流經的土壤斷面積 A。即

$$\Delta H_T \propto \frac{L}{Ak}$$

② 令水流經 AB 段，所損失的總水頭為 $(\Delta H_T)_{AB}$

令水流經 BC 段，所損失的總水頭為 $(\Delta H_T)_{BC}$

令水流經 CD 段，所損失的總水頭為 $(\Delta H_T)_{CD}$

$$\Rightarrow (\Delta H_T)_{AB} : (\Delta H_T)_{BC} : (\Delta H_T)_{CD} = \frac{L_{AB}}{Ak_1} : \frac{L_{BC}}{Ak_2} : \frac{L_{CD}}{Ak_3} = \frac{2}{2k} : \frac{1}{6k} : \frac{4}{3k} = 6 : 1 : 8$$

$$\text{亦即 } (\Delta H_T)_{AB} = \frac{6}{6+1+8} (\Delta H_T) = \frac{2}{5} (\Delta H_T)$$

$$(\Delta H_T)_{BC} = \frac{1}{6+1+8} (\Delta H_T) = \frac{1}{15} (\Delta H_T)$$

$$(\Delta H_T)_{CD} = \frac{8}{6+1+8} (\Delta H_T) = \frac{8}{15} (\Delta H_T)$$

其中 (ΔH_T) 是水從 A 點流到 D 點的全部水頭損失。

③ 令 A 點所在的高程為零位能面，即 A 點的位置水頭訂為零。依斜管比例，可分別得 B、

C、D 點的位置水頭為 $\frac{2}{7}y$ 、 $\frac{3}{7}y$ 及 y ，列於表 a。

表 a

	總水頭	= 位置水頭 +	壓力水頭
A	h_1	0	h_1
B	$(\frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{2}{5}y)$	$\frac{2}{7}y$	$(\frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{4}{35}y)$
C	$(\frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{7}{15}y)$	$\frac{3}{7}y$	$(\frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{4}{105}y)$
D	$h_2 + y$	y	h_2

註：括弧內為計算所得

④ 從 A 點到 D 點，總水頭損失 $\Delta H_T = h_1 - (h_2 + y) = h_1 - h_2 - y$

$$\therefore (\Delta H_T)_{AB} = \frac{2}{5}(h_1 - h_2 - y)$$

$$B\text{ 細壓力水頭} = \left(\frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{2}{5}y\right) - \frac{2}{7}y = \frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{4}{35}y$$

$$C\text{點總水頭} = B\text{點總水頭} - (\Delta H_T)_{BC}$$

$$= \frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{15}(h_1 - h_2 - y) = \frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{7}{15}y \quad \dots \text{Ans.}$$

$$C\text{ 点压力水头} = \left(\frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{7}{15}y \right) - \frac{3}{7}y = \frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{4}{105}y$$

(2) AB 間水力坡降 i_{AB}

$$i_{AB} = \frac{(\Delta H_T)_{AB}}{2\ell} = \frac{1}{5\ell}(h_1 - h_2 - y)$$

$$\therefore \text{流速 } v = (2k)i_{AB} = \frac{0.4k}{\ell} (h_1 - h_2 - y) \dots \text{Ans.}$$

依據連續方程式，各處的流速都是 $\frac{0.4k}{\ell} (h_1 - h_2 - y)$

討論

- 乍看題圖 $h_1 = h_2 + y$ ，這是一種障眼法。倘 $h_1 = h_2 + y$ ，將無法引起滲流。故應 $h_1 > h_2 + y$ 或 $h_1 < h_2 + y$ 方能解題。本題採 $h_1 > h_2 + y$ 進行解答。
 - 計算等效滲透係數 k_{eq}

$$\frac{\sum H}{k_{eq}} = \sum \left(\frac{H}{k} \right) \Rightarrow \frac{7\ell}{k_{eq}} = \frac{2\ell}{k_1} + \frac{\ell}{k_2} + \frac{4\ell}{k_3} = \frac{2\ell}{2k} + \frac{\ell}{6k} + \frac{4\ell}{3k}$$

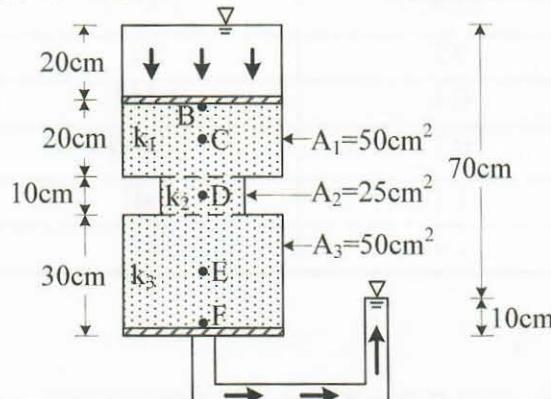
解出 $k_{eq} = 2.8k$

$$\therefore \text{流速 } v = k_{eq} i = 2.8k \left(\frac{\Delta H_T}{\sum L_i} \right) = 2.8k \left(\frac{h_1 - h_2 - y}{7\ell} \right) = \frac{0.4k}{\ell} (h_1 - h_2 - y)$$

k_{eq} 必定介於 k_{max} ($=6k$) 與 k_{min} ($=2k$) 之間。

例 5-7.2 求有效應力

考慮固定水頭狀況， $k_1=2\times10^{-4}$ cm/sec、 $k_2=4\times10^{-4}$ cm/sec、 $k_3=8\times10^{-4}$ cm/sec，各層土壤 $\gamma_{sat}=2.0$ tf/m³，C、D、E 為各層中點，試求 B、C、D、E、F 各點的有效應力與水壓力。



$$(1) (\Delta H_T)_1 : (\Delta H_T)_2 : (\Delta H_T)_3 = \frac{L_1}{A_1 k_1} : \frac{L_2}{A_2 k_2} : \frac{L_3}{A_3 k_3} = \frac{20}{50 \times 2} : \frac{10}{25 \times 4} : \frac{30}{50 \times 8} = 8 : 4 : 3$$

又 $(\Delta H_T)_1 + (\Delta H_T)_2 + (\Delta H_T)_3 = 70$ cm

$$\text{故 } (\Delta H_T)_1 = \frac{8}{15} \times 70 = 37.33 \text{ cm} \quad (\Delta H_T)_2 = 18.67 \text{ cm} \quad (\Delta H_T)_3 = 14 \text{ cm}$$

(2) 設下游液面出口處為 datum，則得下表 (unit : m) 註：括弧是該列最後算得的數字

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
上游液面	0.7		0.7		0
B	(0.7)		0.5		0.2
C	0.513		0.4		(0.113)
D	0.233		0.25		(-0.017)
E	0.07		0.05		(0.02)
F	0		-0.1		(0.1)
下游液面	0		0		0

(3) 各點總應力 $\sigma_B = 0.2 \times 1 = 0.2 \text{ tf/m}^2$

$$\sigma_C = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 2 = 0.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_D = 0.2 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.05 \times 2 = 0.7 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_E = 0.2 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 2 + 0.15 \times 2 = 1.1 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_F = 0.2 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 2 + 0.3 \times 2 = 1.4 \text{ tf/m}^2$$

水壓力 = 壓力水頭 $\times \gamma_w$

有效應力與水壓力如下表 (unit : tf/m²)

點位	總應力	=	水壓力	+	有效應力
B	0.2		0.2		0
C	0.4		0.113		0.287
D	0.7		-0.017		0.717
E	1.1		0.02		1.08
F	1.4		0.1		1.3

討論

請讀者改變 datum 位置，算算看有效應力與水壓力會不會改變。(不會)

流線與層次平行公式 $k_x = \frac{\sum(H_i k_i)}{\sum H_i}$ 顯示： k_x 乃按 H_i 對 k_i 相乘取總和，再除以 H_{total} 得到。

流線與層次垂直公式 $\frac{\sum H_i}{k_z} = \frac{H_{total}}{k_z} = \frac{H_1}{k_1} + \dots + \frac{H_n}{k_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_i}{k_i} \right)$ 顯示： $\frac{1}{k_z}$ 乃按 H_i 對 $\frac{1}{k_i}$ 相乘

取總和，再除以 H_{total} 得到。

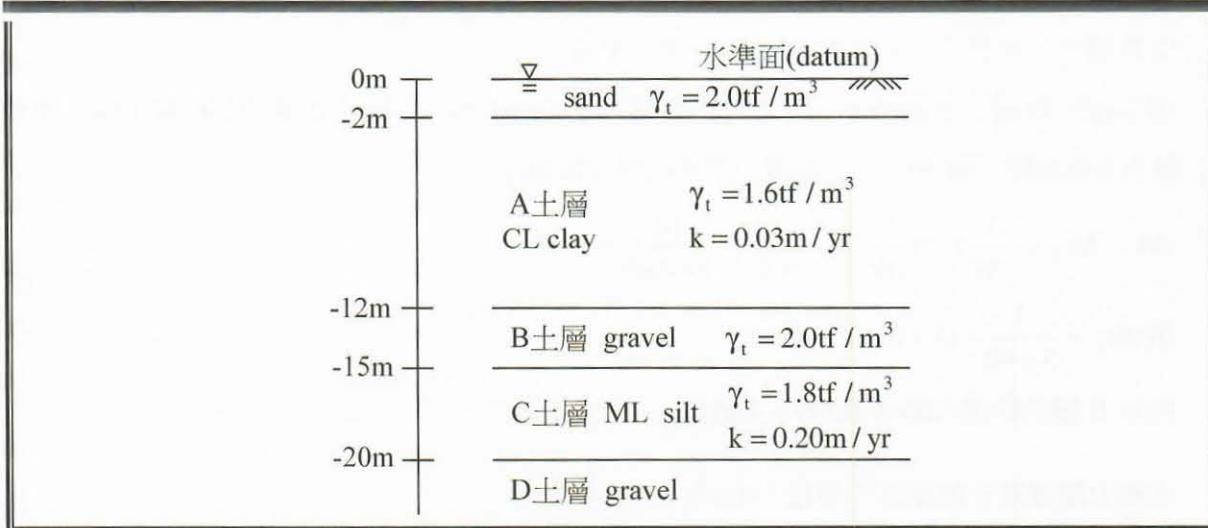
有人認為上下游總水頭差是 $(20+10+30)-10=50 \text{ cm}$ ，對還錯？為什麼？

例 5-7.3 水頭與穩態抽水量

某一地區之地層剖面圖，各層土壤之單位重(γ_l)及滲透係數(k)，如下圖所示。在 B 層中有水井抽水，整層之總水頭高程為 -8 m；D 層為蓄水層(aquifer)，整層之總水頭高程為 +5 m。地下水位面在 0 m 高程處；在表層砂、B 層及 D 層中水頭損失極微，可以不計；水流為垂直方向。

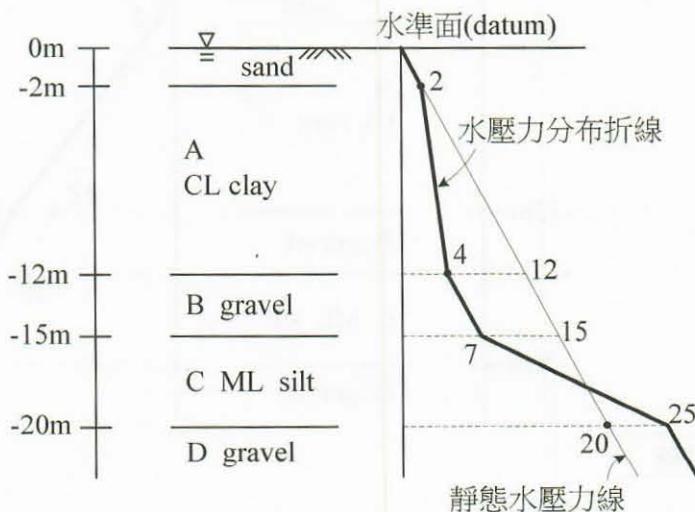
<修改 85 土木技師 30 分>

- (1) 請畫出水壓力隨深度分布圖。
- (2) B 層抽水之流量(取單位為 $\text{m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$)為何？
- (3) 在 A 層中心(高程 -7 m)及 C 層中心(高程 -17.5 m)之垂直有效應力(σ'_v ，取單位： tf/m^2)為何？
- (4) 如果停止 B 層之抽水，平衡後 B 層之總水頭高程為何？並繪水壓力隨深度分布圖。



(1) 水壓力隨深度分布圖如右

(單位 : tf/m^2)



$$(2) q = \sum (kiA) = k_A i_A A + k_C i_C A = 0.03 \left[\frac{0 - (-8)}{12 - 2} \right] \times 1 + 0.2 \left[\frac{5 - (-8)}{20 - 15} \right] \times 1 = 0.024 + 0.52 \\ = 0.544 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$$

$$(3) A \text{ 層中心總應力 } \sigma_v = 2 \times 2 + 5 \times 1.6 = 12 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{水壓力 } u_w = (2+4)/2 = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 12 - 3 = 9 \text{ tf/m}^2$$

$$C \text{ 層中心總應力 } \sigma_v = 2 \times 2 + 10 \times 1.6 + 3 \times 2 + 2.5 \times 1.8 = 30.5 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{水壓力 } u_w = (25+7)/2 = 16 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 30.5 - 16 = 14.5 \text{ tf/m}^2$$

(4) 「平衡後」意指達到長期穩定滲流狀態，也就是水從總水頭最高處流往總水頭最低處，亦即

從 D 層流到表層砂，中間依序經過 C、B、A 層。

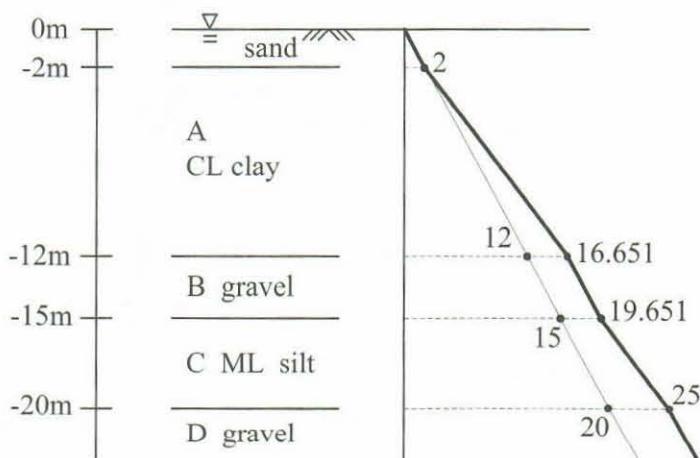
滲流起點 D 層總水頭+5 m，滲流終點表層砂總水頭+0 m，C 層及 A 層會消耗總水頭，在 C 層內消耗掉總水頭 Δh_C ，在 A 層內消耗掉總水頭 Δh_A 。

$$\Delta h_C : \Delta h_A = (\frac{L}{Ak})_C : (\frac{L}{Ak})_A = \frac{5}{1 \times 0.2} : \frac{10}{1 \times 0.03} = 3:40$$

$$\text{故 } \Delta h_C = \frac{3}{3+40} \times (5-0) = 0.349 \text{ m}$$

所以 B 層內的總水頭=5-0.349 = 4.651 m

水壓力隨深度分布圖如下(單位：tf/m²)



討論

- 注意題目規定水流是垂直向。B 層抽水，表層砂的水和 D 層的水就會往 B 層補助，水流垂直於土壤層面。
- 有人問說「我想要多抽一些水量，就多放幾台抽水機，為什麼抽水量一定是 $0.544 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$ ？」因為若多放抽水機抽水，B 層的總水頭就會降到-9 m 或-10 m，而不是題目講的-8 m。抽水量必須是 $0.544 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$ ，才會讓 B 層總水頭穩定維持在-8m。這題目是在考一個穩態問題。
- 綠林好漢喜歡唱「此山是我開，此樹是我栽，要從樹旁過，留下買路財。」今有兩幫土匪佔據牛頭山與虎頭山，兩幫土匪依勢力大小約定：牛頭山因人多，故可劫走旅客原先身上 60%的錢財；虎頭山因人少，只可劫走旅客原先身上 40%的錢財。一倒楣旅客身懷鉅款 500 圓從樹旁過，請問兩幫土匪各劫走多少錢財？

4. 你說「媽的，歐陽你尋我開心，這問題我國小三年級就會算了。」Yes，流線和土壤層面垂直，在兩層中分別消耗總水頭，就是這種小學三年級問題。今水從 D 層流到表層砂，中間只有 C 和 A 層是土匪，B 層透水性良好像超級透水石，C 土匪和 A 土匪搶走的錢財比例是 3：40，這樣還有什麼不會算？
5. 穩態抽水時，為了確定你懂各深度的各種水頭，請練習思考，寫出下表(單位：m)

深度	總水頭	位置水頭	壓力水頭
0 m	0	0	0
-2 m	0	-2	2
-12 m	-8	-12	(4)
-15 m	-8	-15	(7)
-20 m	5	-20	(25)

6. 第(4)小題「停止 B 層之抽水」，短期內水仍從 D 層和砂層向 B 層補助，此乃因 B 的總水頭最低(-8 m)。隨著 B 層的水只進不出，B 層總水頭逐漸升高，-8 m、-7 m、-6 m、…、-1 m、0 m。當 B 層總水頭到達 0 m 時，就只有 D 層水向 B 層補助了，但 B 層的水依舊只進不出，故 B 層總水頭會繼續逐漸升高。一旦 B 層總水頭略大於 0 m，B 層內的水就開始往砂層流動，因為 B 層的總水頭大於砂層，此刻單位時間內流進 B 的量還是大於流出 B 的量。當 B 層總水頭來到 4.651m，單位時間內流進 B 層和流出 B 層的水量達到相同，形成動平衡，這就是第(4)小題要求解的。縱然垂直向水流補充有限，畢竟還是有補充，就算需要 800 年才能達於穩態動平衡，那題目就是在問 800 年後的 B 點總水頭大小。
7. 這題燒成灰我都認得。85 年高考大地工程只考 46 分之後，在不到 3 個月之內，發憤圖強把大地工程重新狂 K 兩遍，想說土技一定要雪恥。結果土技只考 35 分，請意者上網調出 85 年土技考卷自己做做看。越雪恥，恥辱越大，如果是你，還要再拼第三次嗎？再拼，會不會只剩個位分數？還是變成榜首？

§5-8 雙向度滲流與流線網

前一節土壤裡的水流是穩態單向度滲流，現討論穩態的雙向度滲流。假設土壤是完全飽和($S=100\%$)，土壤微素不膨脹也不縮小，考慮圖 5-15 的平面微素，微素垂直紙面的厚度是 dy 。

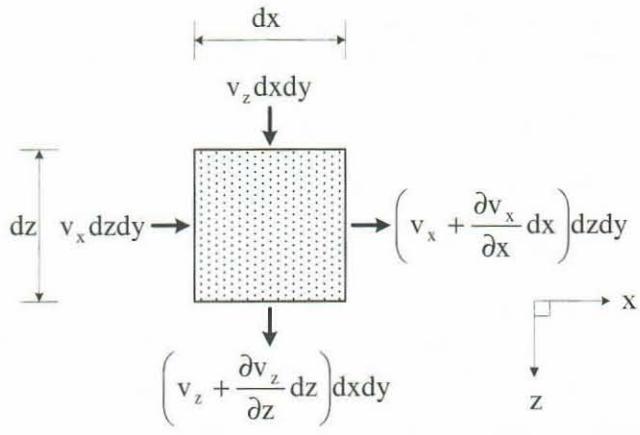


圖 5-15

單位時間內， x 方向流入微素左側面的流量為 $v_x dz dy$ ；單位時間內， z 方向流入微素上側面的流量為 $v_z dx dy$ 。單位時間內， x 方向流出微素右側面的流量為 $(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dz dy$ ；單位時間內， z 方向流出微素下側面的流量為 $(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz) dx dy$ 。

假設水不能被壓縮也不能膨脹(即密度不變)，則單位時間內流出的體積應等於流入的體積(i.e., 質量不減變成體積不減)，得 $(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dz dy + (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz) dx dy = v_x dz dy + v_z dx dy$

$$\text{整理得 } \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = 0$$

$$\text{化簡得 } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{此偏微分方程式與時間 } t \text{ 無關，為穩態問題})$$

物理意義：「土壤內任一點，兩方向的速度函數，均對位移方向微分，總和為零」。

$$\text{因 } v_x = -k_x i_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_z = -k_z i_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\text{故 } k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (h \text{ 是總水頭函數，自變數是 } x \text{ 與 } z) \quad [5.21]$$

【若是單向度滲流，則化簡成 $k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ 】

若土壤是等向性 ($k_x = k_z$)，

$$\text{則 } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{總水頭對位置的二次微分，總和為零}) \quad [5.22]$$

此式稱為 Laplace's equation，它指出雙向度滲流的總水頭函數 $h(x, z)$ 須滿足的條件。若滲流退縮成單向度(z 向)，則 Laplace's equation 退縮成 $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ [5.23]

上式你在定水頭試驗例題見過，很像材力樑變形問題之「樑變形後，曲率處處為零」的問題，即 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ 。

例如簡支樑，樑上無載重，但有一支承發生沉陷，就滿足「樑變形後，曲率處處為零」。

實際地工問題邊界條件複雜，式[5.21]很難求解析解，大部分工程師常用圖解法、數值法求解，而考試就只用圖解法(畫流線網，Flow Net)了。流線網由兩組數學函數組成，即勢能函數(Potential Function) $\Phi(x, z)$ 和流線函數(Stream Function) $\Psi(x, z)$ 。

假設整個土層的土壤乃均質且均向， $k_x = k_z = k$ ，考慮建立函數 $\Phi(x, z)$ ，使其能滿足下兩式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = x \text{ 向的流速} = -k i_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad [a]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = v_z = z \text{ 向的流速} = -k i_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad [b]$$

$$[a] \text{ 對 } x \text{ 再微分，得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad [c]$$

$$[b] \text{ 對 } z \text{ 再微分，得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad [d]$$

$$[c] + [d] \quad \text{得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = -k \times 0 = 0$$

顯然函數 $\Phi(x, z)$ 是 Laplace's eq. 的解。



從[a]可得 $\Phi(x, z) = -kh(x, z) + f(z)$

從[b]可得 $\Phi(x, z) = -kh(x, z) + g(x)$

因為 x 和 z 是獨立且無關的自變數，所以 $f(z)=g(x)=C=\text{常數}$ 。故 $\Phi(x, z) = -kh(x, z) + C$ ，或

$$\text{寫成 } h(x, z) = \frac{1}{k} [C - \Phi(x, z)] \quad [\text{e}]$$

若指定 $h(x, z)=\text{常數 } h_1$ ，則[e]式代表 $x-z$ 平面的一條曲線。對該曲線而言， $\Phi(x, z)$ 也等於一個常數值 Φ_1 ，這就是等勢能線(Equipotential Line)。於是，我們可以對指定一連串的常數 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ_3 、…，就可以畫出一連串的等勢能線，其總水頭值分別為 $h = h_1, h_2, h_3, \dots$ 。

考慮建立函數 $\Psi(x, z)$ ，使其能滿足以下兩式：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_x = x \text{ 向的流速} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad [\text{f}]$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_z = z \text{ 向的流速} = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad [\text{g}]$$

$$\text{比較[a]式及[f]式，得 } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad [\text{h}]$$

$$[\text{h}] \text{式的等號兩側再對 } z \text{ 微分，得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad [\text{i}]$$

$$\text{比較[b]式及[g]式，得 } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad [\text{j}]$$

$$[\text{j}] \text{式的等號兩側再對 } x \text{ 微分，得 } -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad [\text{k}]$$

$$[\text{i}]+[\text{k}] \quad \text{得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = 0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

顯然函數 $\Psi(x, z)$ 也是 Laplace's eq. 的解。

若指定 $\Psi(x, z)$ 等於一連串常數 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots$ ，也會在 $x-z$ 平面得到一連串的曲線，這些曲線就是流線(Flow Line)。注意勢能函數其實是「一組」曲線，流線函數也是「一組」曲線，因為可以指定不同的常數值。能滿足 Laplace's eq. 的函數稱為 Harmonic Function，如

$h(x,z)=3x+5z$ 、 $h(x,z)=e^x \cos z$ 、 $h(x,z)=e^x \sin z$ 、 $h(x,z)=\sin(x+z)$ 、…等等。但實際的雙向度滲流，要考慮到邊界問題，不是亂找個 Harmonic Function 就說是解。

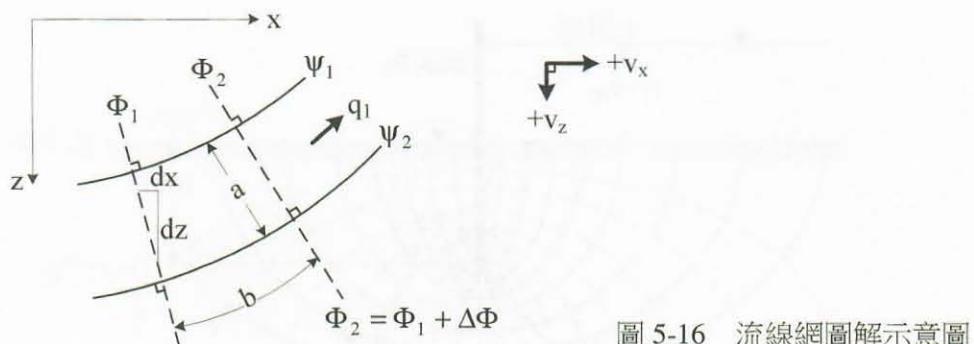
給予定義： $\Phi(x,z) \equiv -kh(x,z) + C$ ，其中 k 是滲透係數， C 是常數。

$$\text{全微分 } d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = -k \frac{\partial h}{\partial x} dx - k \frac{\partial h}{\partial z} dz = -k i_x dx - k i_z dz = v_x dx + v_z dz$$

令勢能函數等於某一常數時，可畫出一條等勢能線，此等勢能線由於勢能不變，故 $d\Phi = 0$ ，即 $v_x dx + v_z dz = 0$ ，換言之 $\frac{dz}{dx} = -\frac{v_x}{v_z} = -\frac{1}{(\frac{v_z}{v_x})}$ 。

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot \frac{v_z}{v_x} = -1 \quad [5.24]$$

$\frac{dz}{dx}$ 是指等勢能線的斜率， $\frac{v_z}{v_x}$ 是流線(Flow Line, Stream Line)的切線方向，換言之，等勢能線和流線垂直正交【此為 103 年公務高考三級考 15 分證明題】。讀者看到這邊已經連續看兩頁數學推導，樑變形問題只有一個自變數 x ，考場會考，但雙向度滲流有兩個自變數(x 與 z)，比樑還難，但技師考試不是考你適不適合唸碩博士，這兩頁推導 30 年來只考過一次。



已知上下游總水頭差為 Δh_t ，若畫了 N_q 個等勢能間格數，則經過每一個等勢能間格，所損失的總水頭為 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，如果在一格之內的流線長度為 b ，則該格的水力坡降 $i = \frac{\Delta h_t}{N_q \cdot b}$ 。

茲取出紙面一單位寬的流槽分析，一個流槽的單位時間流量 q_1 ， $q_1 = kiA = k \frac{\Delta h_t}{N_q \cdot b} a$ ，其中

a 是流槽寬度。若整個流線網有 N_f 個流槽，則流線網的單位時間流量 $q = N_f q_l = k \frac{N_f \Delta h_t}{N_q \cdot b} a$ 。

為了方便計算，畫圖時可選擇 $a = b$ ，則有 $q = k \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t$ [5.25]

注意 q 的單位是「單位寬度、單位時間內的水體積」，如 $m^3/day/m$ 。公式 $q = k \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t$ 其實

導源於 $q = k i A$ ，兩者計算結果必定殊途同歸。

以下列出常見的流線網，這些流線網都是在敘述穩態問題：「某一固定點的物理量不隨時間改變，但物理量可能隨地點改變」。

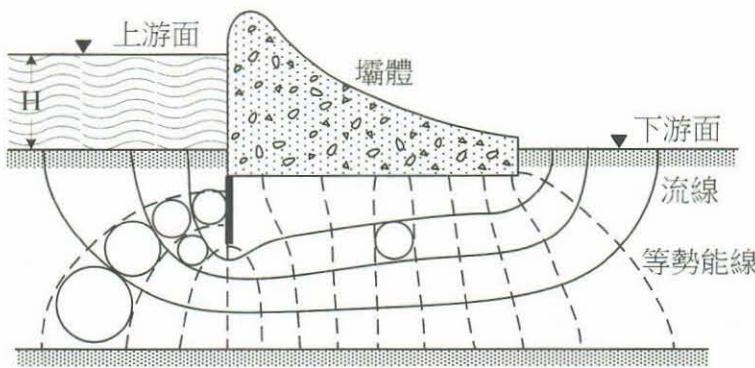


圖 5-17 $N_f = 4$, $N_q = 14$

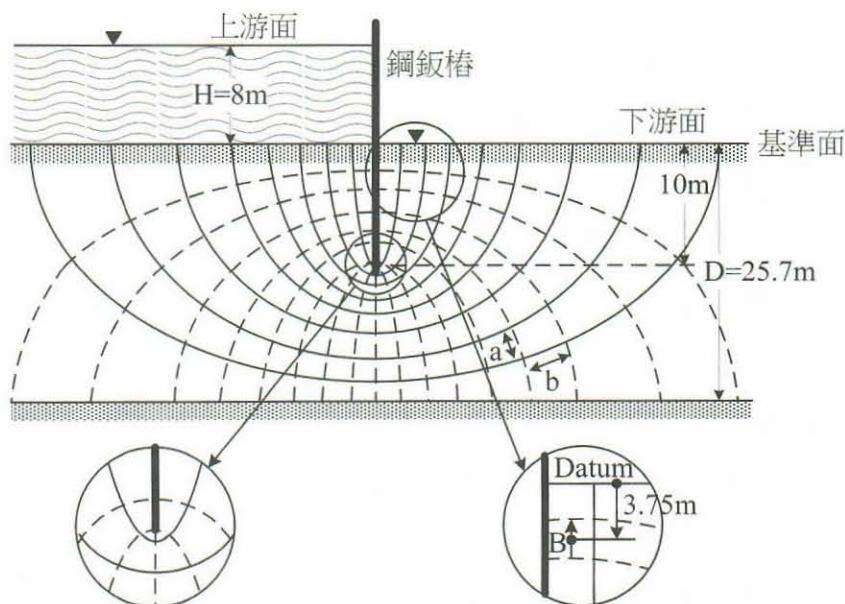
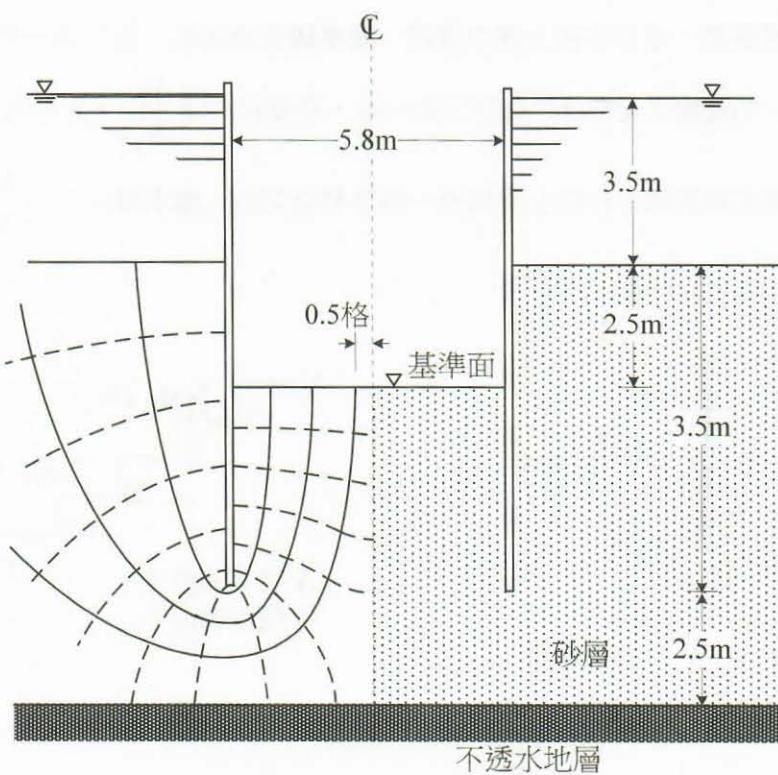
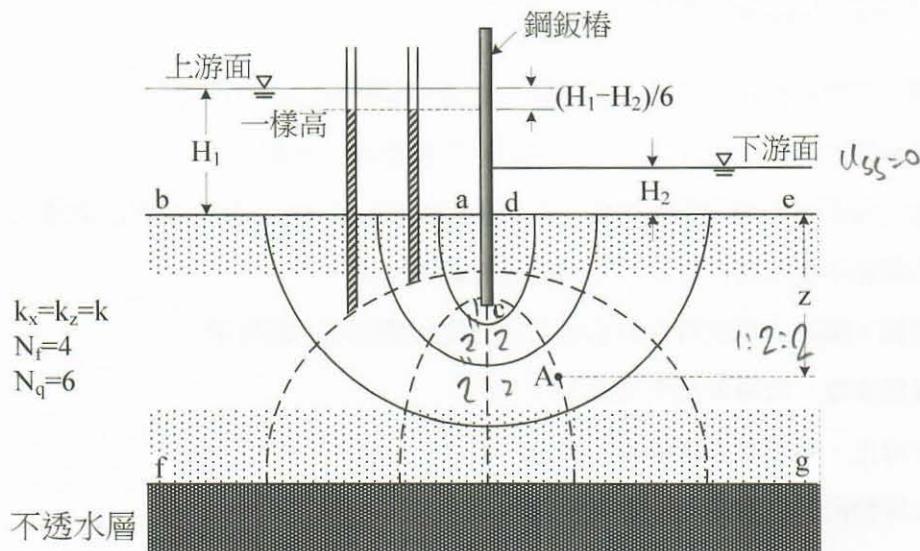


圖 5-18 $N_f = 9$, $N_q = 18$, 流線 10 條，等勢能線 19 條



$$k_J = k_J$$

畫均質均向土壤的流線網時，應記住以下要訣：

- 1.以鉛筆試畫，先畫鋸樁正下方的流線位置，流線和等勢能線應該正交。
- 2.考試時儘量將網格畫成曲邊正方形，使內部儘可能塞進一正圓。
- 3.鋸樁底部之尖端處，因邊界條件複雜，未必滿足 Laplace's eq.，網格未必是曲邊正方形。
- 4.等勢能線必須和不透水邊界正交。等勢能線彼此不交叉。
- 5.若流線網對稱，圍堰內可能有近似水平之等勢能線連結左右鋼板樁。
- 6.不透水邊界是流線。流線彼此不交叉。
- 7.曲線儘量平滑化，不要有尖銳轉折。
- 8.流槽數量和等勢能間格數量不一定要整數。
- 9.建議考試時，流槽數量畫 3~4 個，不致耗時太久，不致精度太差。
- 10.遇到濾層，濾層表面不是等勢能線，流線未必正交於濾層。濾層視為排水迅速，濾層處可視壓力水頭為零，嚴格講是還有靜態水壓力。

上游側總水頭最高，隨著水在土壤中流動，總水頭逐漸消耗，每經過一個等勢能間格，總水頭就下降 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，如此像是走樓梯，每往下走一階，高度就下降 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，此可稱「樓梯理論」。反過來講，下游側總水頭最低，每往上游經過一個等勢能間格，總水頭就上升 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，如此像是走樓梯，每往上走一階，高度就上升 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



圖 5-21 各點總水頭大小關係，「樓梯理論」示意

如果土壤均質但不均向(anisotropic)， $k_x \neq k_z$ ，這樣流線和等勢能線就不會正交，順水流方向的滲透係數 k_e 將介於 k_x 、 k_z 之間。前述[5.20]已經導出 $k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ ，若直接按原始比

例畫壩體與土層斷面，流線和等勢能線不會正交。為了畫出能正交的流線網，我們必須進行「斷面轉換(Transformation)」，簡單講是修正畫圖時 x 方向的長度。建立 $x_T = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}x$ ，將壩體在 x 方

向的長度乘以 $\sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$ ， z 方向長度維持不變。對大部分的地層而言，常是 $k_x > k_z$ ，所以常常是縮

短壩體長度，如果 $k_x = 9k_z$ ，那就是壩體長度變成原來的三分之一，壩高不變，縮短之後再畫流線網，流線和等勢能線就正交，並且在圖上算出 N_f 、 N_q ，計算滲流量的公式也修正為

$$q = k_e \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t = \sqrt{k_x k_z} \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t \quad [5.26]$$

原理說明：

建立 $x_T = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}x$

則 $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x_T} \frac{\partial x_T}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x_T} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$

再對 x 偏微分得 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} \frac{k_z}{k_x}$ (勿忘連鎖律)

將上式代入[5.20]，得 $k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} \frac{k_z}{k_x} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$

化簡得 $\frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ [5.27]

[5.27]就是轉換後的 Laplace's eq.，依 x_T 、 z 為尺度就可以畫出正交的流網圖。轉換後的斷面，流線與等勢能線正交，代表 x 向與 z 向滲透係數變成一致，土壤變成均向，滲透係數變成 $k_e = \sqrt{k_x k_z}$ ，介於 k_x 與 k_z 之間。轉換後才可用 $q = k_e(\Delta h_t)N_f / N_q$ 算滲漏量。

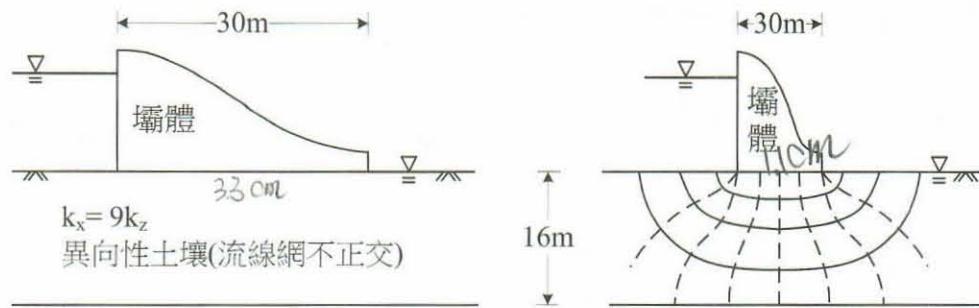


圖 5-22 左圖是轉換前，右圖是轉換後(轉換後水平壓縮壩體)

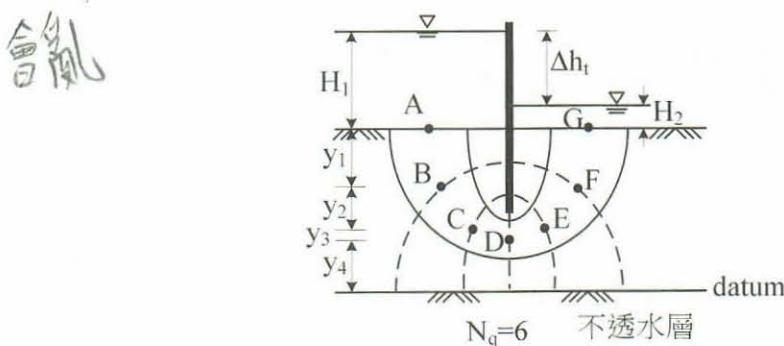
對於上面左右兩圖，轉換前後，壩高度不變，轉換後通常壩體水平方向被壓縮，若 $\sqrt{k_x / k_z} = 2$ ，則水平向壓縮兩倍；若 $\sqrt{k_x / k_z} = 3$ ，則水平向壓縮三倍。

若畫三個流槽，鋼鈑樁底下之流槽寬度約可取 1 : 2 : 2。

例 5-8.1 樓梯理論

有一鋼鈑樁底下之流線網如圖所示，

- (1) 請問 A、B、C、D、E、F、G 各點總水頭、位置水頭、壓力水頭=？
- (2) 請問 A、B、C、D、E、F、G 各點水壓力=？
- (3) 請以下游側水面為靜態水位面，求 A、B、C、D、E、F、G 各點水壓力=？
- (4) 請以 ~~上~~ 游側水面為靜態水位面，求 A、B、C、D、E、F、G 各點水壓力=？

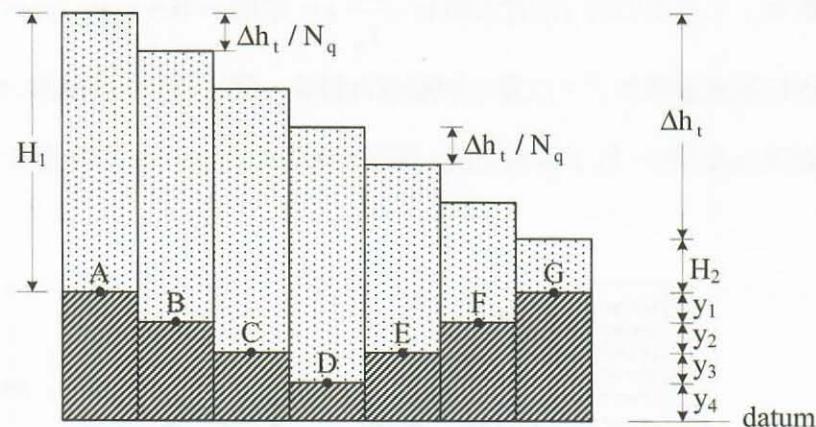


(1)

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
A	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1$		$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$		H_1
B	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$		$y_2 + y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$
C	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$		$y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$
D	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$		y_4		$H_1 + y_1 + y_2 + y_3 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$
E	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$		$y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$
F	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$		$y_2 + y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$
G	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \Delta h_t$		$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$		$H_1 - \Delta h_t (=H_2)$

總水頭柱狀圖圖解如下，位置水頭圖例為斜線，壓力水頭圖例為芝麻點。從上游到下游，

總水頭遞降如下樓梯般，每階下降高度 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



(2) 總水壓力 $u_w = \gamma_w \times (\text{壓力水頭})$

$$u_A = \gamma_w (H_1)$$

$$u_B = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1)$$

$$u_C = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2)$$

$$u_D = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 + y_3 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3)$$

$$u_E = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4)$$

$$u_F = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5)$$

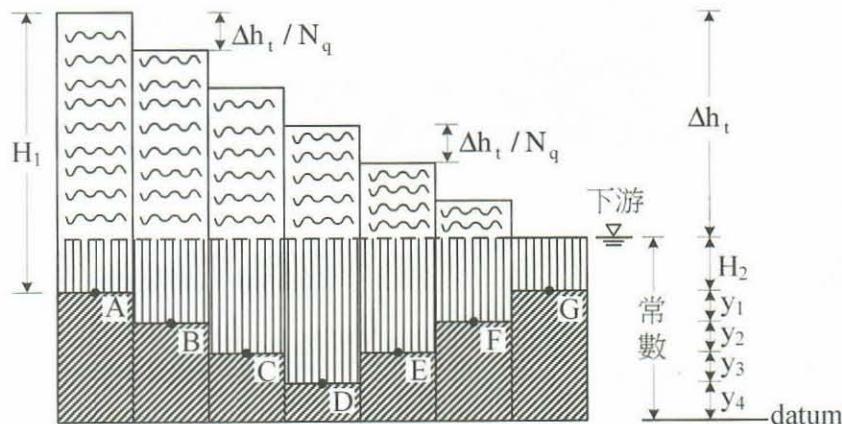
$$u_G = \gamma_w (H_1 - \Delta h_t) = \gamma_w H_2$$

(3) 下游水面當成 $u_{ss} = 0 \text{ tf/m}^2$ 的計算位置

點位	總水頭	= 位置水頭 h_e	$\frac{u_{ss}}{\gamma_w}$	$\frac{u_s}{\gamma_w}$
A	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1$	$y_1+y_2+y_3+y_4$	H_2	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 6 (= \Delta h_t)$
B	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$	$y_2+y_3+y_4$	H_2+y_1	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$
C	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$	y_3+y_4	$H_2+y_1+y_2$	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$
D	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$	y_4	$H_2+y_1+y_2+y_3$	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$
E	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$	y_3+y_4	$H_2+y_1+y_2$	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$
F	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$	$y_2+y_3+y_4$	H_2+y_1	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$
G	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \Delta h_t$	$y_1+y_2+y_3+y_4$	H_2	0

注意觀察：上表各列的 (位置水頭 $h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w}$) = 常數 = $H_2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

總水頭柱狀圖圖解如下，位置水頭圖例為斜線，靜水壓壓力頭圖例為垂直線，滲流水壓壓力頭圖例為波浪線。從下游到上游，滲流水壓力水頭遞升如上樓梯般，每階上升高度 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



$$u_A = \gamma_w (H_2 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 6)$$

$$u_B = \gamma_w (H_2 + y_1 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5)$$

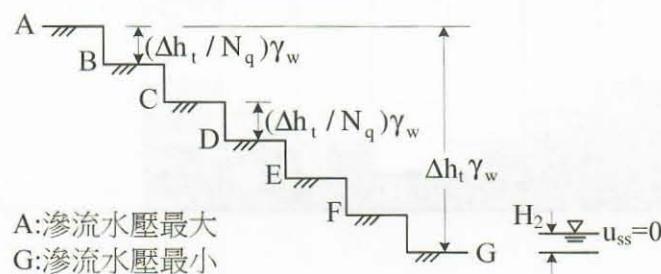
$$u_C = \gamma_w (H_2 + y_1 + y_2 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4)$$

$$u_D = \gamma_w (H_2 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3)$$

$$u_E = \gamma_w (H_2 + y_1 + y_2 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2)$$

$$u_F = \gamma_w (H_2 + y_1 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1)$$

$$u_G = \gamma_w (H_2)$$

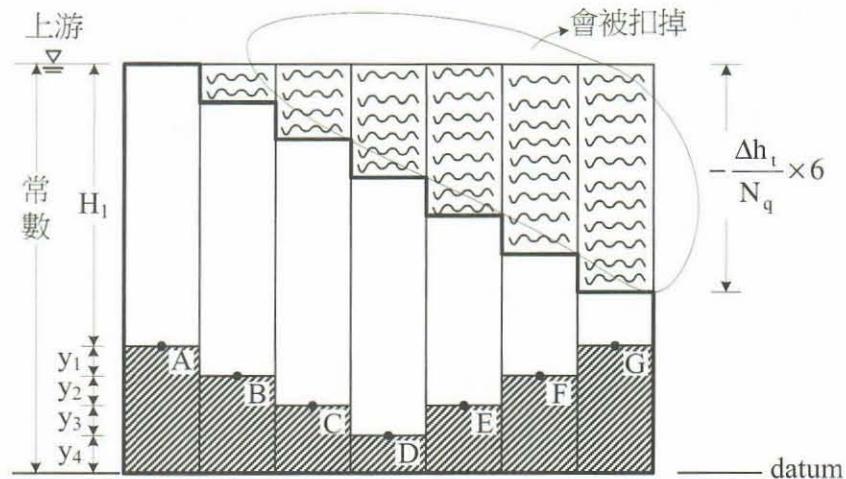


(4) 上游水面當成 $u_{ss} = 0 \text{ tf/m}^2$ 的計算位置

點位	總水頭	= 位置水頭 h_e	$+ \frac{u_{ss}}{\gamma_w}$	$+ \frac{u_s}{\gamma_w}$
A	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1$	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$	H_1	0
B	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$	$y_2 + y_3 + y_4$	$H_1 + y_1$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$
C	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$	$y_3 + y_4$	$H_1 + y_1 + y_2$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$
D	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$	y_4	$H_1 + y_1 + y_2 + y_3$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$
E	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$	$y_3 + y_4$	$H_1 + y_1 + y_2$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$
F	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$	$y_2 + y_3 + y_4$	$H_1 + y_1$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$
G	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \Delta h_t$	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$	H_1	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 6 (= -\Delta h_t)$

注意觀察：上表各列的 (位置水頭 $h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w}$) = 常數 = $H_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

位置水頭圖例為斜線，滲流水壓壓力頭圖例為波浪線。從上游到下游，滲流水壓力水頭遞降如下樓梯般，每階下降高度 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



$$u_A = \gamma_w (H_1)$$

$$u_B = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1)$$

$$u_C = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2)$$

$$u_D = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 + y_3 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3)$$

$$u_E = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4)$$

$$u_F = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5)$$

$$u_G = \gamma_w (H_1 - \Delta h_t) = \gamma_w H_2$$

討論

在「規定下游地面 $u_s=0$ 」的前提下，若從下游往上游算，每經過一等勢能間格， $\frac{u_s}{\gamma_w}$ 的值將逐格遞增 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。在「規定上游地面 $u_s=0$ 」的前提下，若從上游往下游算，每經過一等勢能間格， $\frac{u_s}{\gamma_w}$ 的值將逐格遞降 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。

請注意樓梯理論都是以「等勢能間格數」作為線性內插、走樓梯的依據。由於流線網每一格的流線長度並不一樣，故並不是以流線長度作為線性內插、走樓梯的依據，每一格的平均水力坡降也不一樣。總水頭大小，有依樓梯升降的特質；滲流水頭大小，也有依樓梯升降的特質。

在第(3)和第(4)小題解答表格裏，任兩點間的總水頭差距值就是 $\frac{u_s}{\gamma_w}$ 的差距值，也就是 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。

此例題已經提出三種方法求流線網內任一點的水壓力，你看見了嗎？

①利用「總水頭 = 位置水頭+壓力水頭」來算。(不須算出 u_{ss} 、 u_s)

②訂下游液面 $u_{ss}=0$ ，從下游側靜態水位面來算，從下游往上游走， u_s 為正數。

(須算出 u_{ss} 、 u_s)

③訂上游液面 $u_{ss}=0$ ，從上游側靜態水位面來算，從上游往下游走， u_s 為負數。

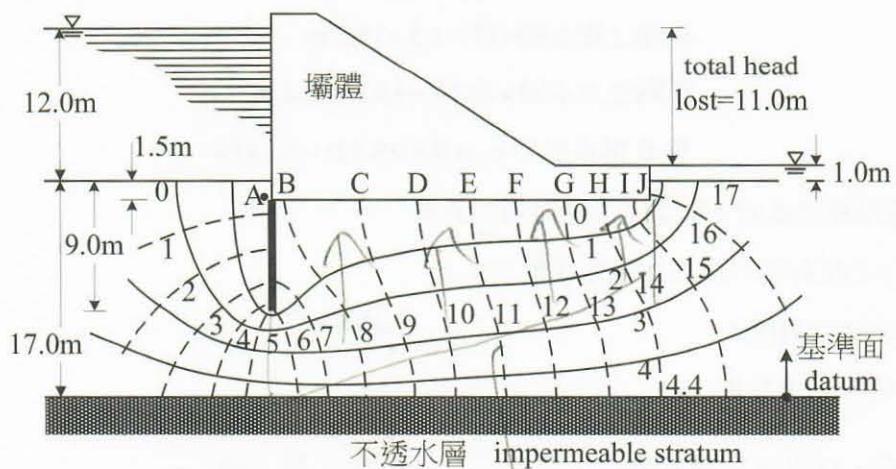
(須算出 u_{ss} 、 u_s)

在 Terzaghi 的砂湧分析，會使用到②的內容。

例 5-8.2 壩體上浮力

有一壩體底下之流線網如圖所示，土壤 $k = 5.2 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$

- (1) 請問流槽數量=？
- (2) 請問等勢能間隔數量=？
- (3) 請問每通過一個等勢能線間格，總水頭損失多少？
- (4) 請問每日之滲漏量 $q=$ ？
- (5) 請求 A、B、C、...J 各點水壓力。(J 是壩體右下角)
- (6) 上、下游之間壩體長度 30 m，請問壩體承受的上浮力=？



(1) $N_f = \underline{4.4}$

(2) $N_q = \underline{17}$

(3) $\frac{\Delta h_t}{N_q} = \frac{11}{17} = \underline{0.647 \text{ m/格}}$

(4) $q = k \frac{N_f}{N_q} (\Delta h_t) = 5.2 \times 10^{-5} \times \frac{4.4}{17} \times 11 = 1.48 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{sec/m} = \underline{12.79 \text{ m}^3/\text{day/m}}$

(5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Φ_i	0.5	8	9	10	11	12	13	14	15	15.7
$u_w(\text{kPa})$	129	82	75	69	63	56	50	44	37	33

從上游往下游算，A 點位在第 0.5 格處($\Phi_i = 0.5$)，B 點位在第 8 格處($\Phi_i = 8$)，…，J 點位在第 15.7 格處($\Phi_i = 15.7$)。

上游液面總水頭 29m，A 點總水頭 $= 29 - 0.5 \times \frac{11}{17} = 28.68 \text{ m}$

A 點位置水頭 $= 17 - 1.5 = 15.5 \text{ m}$

A 點壓力水頭 $= 28.68 - 15.5 = 13.18 \text{ m}$

故 A 點水壓力 $u_w = 9.81(13.18) = \underline{129 \text{ kPa}}$

B 點總水頭 $= 29 - 8 \times \frac{11}{17} = 23.82 \text{ m}$

B 點位置水頭 $= 17 - 1.5 = 15.5 \text{ m}$

B 點壓力水頭 $= 23.82 - 15.5 = 8.32 \text{ m}$

故 B 點水壓力 $u_w = 9.81(8.32) = \underline{82 \text{ kPa}}$

其餘各點算法雷同，算出之水壓力列於上表

(此法不必從靜態水位面找靜態水壓力 u_{ss})

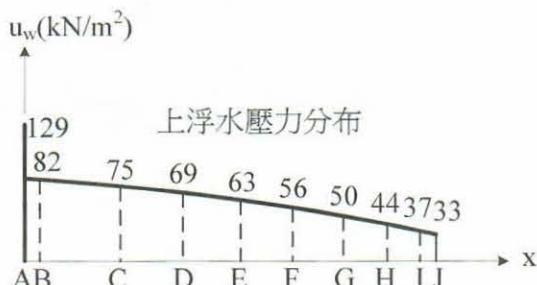
(6) 出紙面每單位寬度，

壩體承受的上浮力 B

$$B = \frac{1}{2} (82 + 33) 30 = \underline{1725 \text{ kN/m}}$$

討論

A 點水壓力也可以這樣算：



$$u_w = u_{ss} + u_s = (12 + 1.5)9.81 - 0.5\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 129 \text{ kPa}$$

$$\text{同理, B 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (12 + 1.5)9.81 - 8\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 82 \text{ kPa}$$

$$\text{依序可得 J 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (12 + 1.5)9.81 - 15.7\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 33 \text{ kPa}$$

這種算法是把上游液面當成靜態水壓力的起算基準, $u_w = u_{ss} - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times m \times \gamma_w$, m 是從上游面算過來的格數。

另外一種算法是把下游液面當成靜態水壓力的起算基準, 要注意 u_s 細節:

$$\text{J 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (1.0 + 1.5)9.81 + (17 - 15.7)\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 33 \text{ kPa}$$

從下游起算, J 點位在第 1.3 格處, $17 - 15.7 = 1.3$ 。

$$\text{I 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (1.0 + 1.5)9.81 + (17 - 15)\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 37 \text{ kPa}$$

$$\text{依序可得 A 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (1.0 + 1.5)9.81 + 16.5\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 129 \text{ kPa}$$

$$u_w = u_{ss} + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times n \times \gamma_w, n \text{ 是從下游面算過來的格數。}$$

讀者應該已經體會到, 不論從上游算或下游算, 水壓力 u_w 不會因算的方向而改變, 所以命題者可以考水壓力 u_w 之值。但是因為有兩個靜態水位面, 造成有兩種 u_{ss} 為零的起算基準, 進而影響 u_s 有兩套答案。既然 u_{ss} 與 u_s 各有兩套答案, 所以命題者比較不會考「 u_s 是多少?」

歐陽獨門心法: 不管從上游算或從下游算 u_w , 明顯計算式都是「內插」的形式。參考下圖, 對 A 點來講, 一左一右有兩個靜態水位面, A 點的水壓力 u_w 是較大的 $H_1 \gamma_w$ 還是較小的 $H_2 \gamma_w$? 都不是, 乃是介於其間, 就用「等勢能間隔數」在 $H_1 \gamma_w$ 、 $H_2 \gamma_w$ 之間線性內插。

若在圖 5-23 的 A 點前方(上游側)有 Φ_i 個等勢能間格數, 則依照線性內插, A 點水壓力 $u_w = H_1 \gamma_w - (H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{\Phi_i}{N_q}$ 。這種算法是把上游水位面當成靜態水壓力 u_{ss} 的計算基準, 所以滲流水壓力 $u_s = -(H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{\Phi_i}{N_q}$ 。

當然也可以從屁股(下游側)算過來，A 點水壓力 $u_w = H_2 \gamma_w + (H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{m}{N_q}$ 。這種算法是把下游水位面當成靜態水壓力 u_{ss} 的計算基準，所以 $u_s = + (H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{m}{N_q}$ 。

考試時，只會問你某一點的水壓力 u_w 是多少，不會問你某一點的 u_s 、 u_{ss} 是多少，請勿窮鑽牛角尖。若算壩體所受的上浮力，是找 u_w 算上浮力。

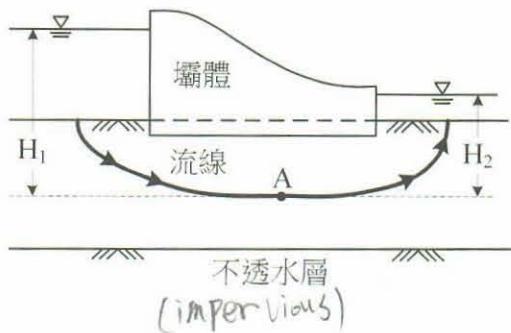


圖 5-23

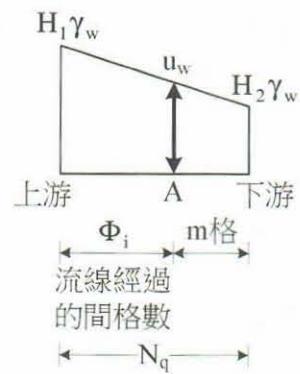


圖 5-24

例 5-8.3 流線網

參考圖 5-18，土壤 $k = 3 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，土壤 $\gamma_{sat} = 2.1 \text{ tf/m}^3$ ，

- (1) 請問流槽數量 = ?
- (2) 請問等勢能間隔數量 = ?
- (3) 請問每通過一個等勢能線間格，總水頭損失多少？
- (4) 請問每日之滲漏量 $q = ?$
- (5) 請求 B 點水壓力與有效應力。



$$(1) N_f = \underline{9}$$

$$(2) N_q = \underline{18}$$

$$(3) 8/18 = \underline{0.444 \text{ m/格}}$$

$$(4) q = k \frac{N_f}{N_q} (\Delta h_t) = 3 \times 10^{-6} \times \frac{9}{18} \times 8 = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = \underline{1.0368 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}}$$

(5)總應力 = $2.1 \times 3.75 = 7.875$ tf/m²

$$\text{水壓力} = 3.75 + \frac{8}{18} \times 1.5 = 4.417 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力} = 7.875 - 4.417 = 3.458 \text{ tf/m}^2$$

討論

畫流線網增加 N_f 的同時，也會增加 N_q ，造成 $\frac{N_f}{N_q}$ 不變，故 q 不變。但上下游水頭差變大， q 會增加。 $\frac{N_f}{N_q}$ 的值稱為形狀因子(Shape Factor)，此值與 k 之大小、上下游水頭差之大小無關。

土壤力學與基礎工程只是加減乘除的學問，還搞不懂這些東西的話，建議不要走考試這條路，自己的資質應該在其他方面，趕快找出自己的人生強項，不要在考試上消磨人生。

愛情是反覆無常還是恆久不變？恐怕各 50%，但考古題 90% 是恆久不變。

(還沒看) §5-9 濾層設計 少

水在土壤中流動，滲流力量可能會把小顆粒從中、大顆粒的空隙之間帶走，形成掏空。小顆粒被沖得差不多時，就換成中顆粒被沖走，唇亡齒則寒，再來換大顆粒被刷走，掏空的範圍愈來愈大。我們希望(1)水能順利流走，就能降低水壓力，水若不能流走，水壓就會越來越大，對結構體或土壤的威脅愈來愈大；(2)水流走的同時，又不要把土壤帶走。

舉濾掛式咖啡為例，當濾紙雙耳掛在杯緣之後，在濾紙內倒入熱水，水能通過濾紙變成好喝的熱咖啡，咖啡渣卻不會通過濾紙掉入杯底。濾層就像濾紙一樣，讓水通過，卻能攔截土壤顆粒。對，濾層就像濾網，紗布、不織布都是濾網、底部有洞用來撈麵的湯杓也是廣義濾網。

我們可以設計濾層(Filter)來保護土壤。一般來講，濾層顆粒比被保護的土壤顆粒還大，也就是濾層本身的滲透係數會比被保護的土壤還大。對於正確設計的濾層，水若碰到濾層，水壓力就會大幅降低，水會迅速流走，也可能造成水位線迅速降低。然而濾層顆粒也不能無限上綱的大，因為濾層間的孔隙也會跟著變大，土壤顆粒反而會通過濾層之間的孔隙被水流帶走形成掏空。

所以，濾層顆粒要夠大(i.e.,孔隙大)，大到水流能順利流走；濾層顆粒又要夠小，小到能卡住土壤顆粒不被帶走。因此濾層粒徑的合理範圍跟被保護土壤的粒徑範圍息息相關，我們須依照被保護土壤的粒徑分布曲線來設計濾層粒徑範圍。我國《建築物基礎構造設計規範》並未寫明濾層之設計準則，美國海軍的規範(NAVFAC 1982a, "DM7.2, Foundations and Earth Structures," U.S., Department of the Navy, Naval Facilities Engineering Command)規定：

- (1) 為防止土壤顆粒被沖走(防止掏空)，濾料直徑須夠小，須

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{85(S)}} < 5$$

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} < 20$$

$$\frac{D_{50(F)}}{D_{50(S)}} < 25$$

- (2) 為防止濾層內蓄積過大滲流水壓力，濾料孔隙須夠大，須

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} > 4$$

- (3) 為防止濾層內部濾料析離(Segregation)，濾料粒徑不應大於 7.6 cm。

- (4) 為防止濾層內細顆粒流動，濾料內能通過#200 的部分，其重量不應超過全濾料重量的 5%。

- (5) 當使用側面有開槽或開孔的排水管排水時，為了防止土壤細粒料被沖進孔裏，槽、孔周圍也須包覆濾料。而為了防止濾料被沖進槽、孔內，須

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{孔直徑}} > 1.0 \sim 1.2$$

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{槽寬度}} > 1.2 \sim 1.4$$

以上的符號， $D_{15(F)}$ 指的是「以濾料進行篩分析試驗，粒徑分布曲線上累積通過百分比 15% 所對應的直徑」， $D_{85(S)}$ 指的是「以被保護的土壤進行篩分析試驗，粒徑分布曲線上累積通過百分

比 85% 所對應的直徑」，其餘符號均可類推。觀察以上規定，注意到分母都是被保護土壤的粒徑，所以濾層的粒徑範圍，乃由被保護的土壤之粒徑範圍決定。

濾層的組成顆粒，當然有大有小，決定濾層的粒徑範圍後，建議將濾層裏的大小顆粒混合，形成大顆粒中有中、小顆粒，如此可互相保護防遭沖刷帶走，混合施工也較方便。目前濾層多搭配擋土牆考問答題，因擋土牆後常配置濾層以利排水，濾層很少考計算題。

實務上，除非進行大工程(興建土石壩)，否則小工程上，濾層已間漸漸被地工織物(Geotextiles，俗稱不織布)取代。不織布的透水性良好，但土壤不能透過，而且便宜，施工快速，使用濾層還要找級配範圍，小工程利潤低，誰願意這樣做呢？

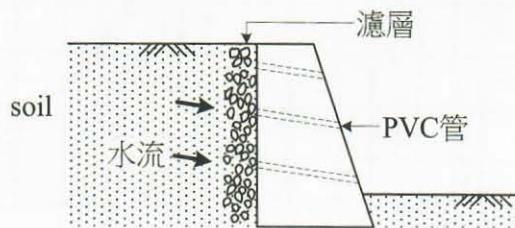
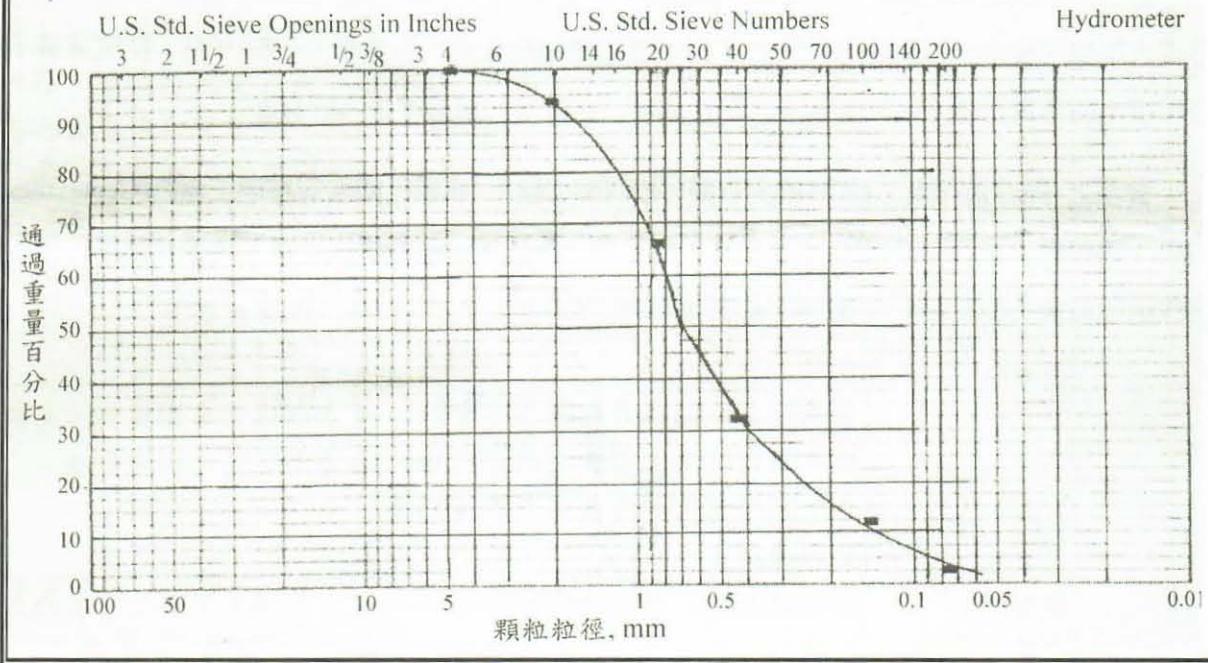


圖 5-25

例 5-9.1 濾層設計

某土樣由試驗求得其顆粒粒徑分布曲線如下圖所示，試說明如何應用土壤顆粒粒徑分布曲線，求取適用供作濾層材料之粒徑曲線範圍。

<100年鐵路特考7分>



查圖得 $D_{15(S)} = 0.19 \text{ mm}$, $D_{50(S)} = 0.7 \text{ mm}$, $D_{85(S)} = 1.4 \text{ mm}$

(1) 為防止土壤顆粒被沖走，濾料直徑須夠小，須 $\frac{D_{15(F)}}{D_{85(S)}} < 5$ ，故 $D_{15(F)} < 5 \times 1.4 = 7 \text{ mm}$

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} < 20 \text{ , 故 } D_{15(F)} < 20 \times 0.19 = 3.8 \text{ mm}$$

$$\frac{D_{50(F)}}{D_{50(S)}} < 25 \text{ , 故 } D_{50(F)} < 25 \times 0.7 = 17.5 \text{ mm}$$

(2) 為防止濾層內蓄積過大滲流水壓力，濾料孔隙須夠大，須 $\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} > 4$ ，故 $D_{15(F)} > 4 \times 0.19 = 0.76 \text{ mm}$

- (3) 為防止濾層內部濾料析離(Segregation)，濾料粒徑不應大於 7.6 cm。
- (4) 為防止濾層內細顆粒流動，濾料內能通過#200 的部分，其重量不應超過全濾料重量的 5%。
- (5) 當使用側面有開槽或開孔的排水管排水時，為了防止土壤細粒料被沖進孔裏，槽、孔周圍也須包覆濾料。而為了防止濾料被沖進槽、孔內，須

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{孔直徑}} > 1.0 \sim 1.2$$

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{槽寬度}} > 1.2 \sim 1.4$$

綜合以上，濾料 $0.76 \text{ mm} < D_{15(F)} < 3.8 \text{ mm}$ ，濾料 $D_{50(F)} < 17.5 \text{ mm}$ ，且任何濾料粒徑不應大於 7.6 cm。若採用直徑 5 cm 之排水管，則濾料 $D_{85(F)} > 5.5 \text{ cm}$

討論

進行濾料設計時，就是在設計 $D_{15(F)}$ 、 $D_{50(F)}$ 、 $D_{85(F)}$ 的範圍。求均勻係數 C_u 、曲率係數 C_d 常用的 D_{10} 、 D_{30} 、 D_{60} 全都用不到。

§5-10 砂湧(Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition)

§5-5 節講到，向上的水流會降低砂土有效應力，降低土壤穩定性。對於無凝聚力的砂土，若承受向上水流作用，當有效應力變成零時，砂土顆粒無法傳遞應力，正向應力為零就沒有抗剪強度，砂宛如懸浮在水中，此稱為砂湧 (Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition) 現象或流砂現象。對於有凝聚性的土壤，縱然正向應力為零，仍存在凝聚力，不容易產生流砂現象。

為什麼砂湧跟「快」(quick)有關？非也，此 quick 並非「快」，而是 “alive” 「活生生的、活躍活潑」之意，表示向上水流使土砂翻滾浮動，似乎有生命般活潑。那為何又跟沸騰(boiling)有關？因為向上的水流通過下游地表面時，流速將較輕砂粒挑湧起，好像煮水沸騰時，水壺內

液面的水被氣泡噴起一樣。

一看到流砂字眼，部分讀者腦袋裏或許浮現電影、小說的情節：旅人與駱駝在沙漠裏，不慎踏入致命的「流沙」，人與牲畜全部陷入砂裏，隨砂向下流動終至滅頂……，最後不知跑到哪裡？如果讀者想研究此情節，本書恐無能為力，筆者也不知此情節是否虛構。土壤力學裏講的砂湧(或流砂)，與前述情節無關，且有力學理論，並非虛構。

《建築物基礎構造設計規範》的文字是「砂湧係指開挖面下為透水性良好之土壤時，由於開挖側抽水使內外部有水頭差而引致滲流現象，當上湧滲流水之壓力大於開挖面底部土壤之有效土重時，滲流水壓力會將開挖面內之土砂湧舉而起，造成破壞」。

雖然砂湧的意義不難懂，但是抗砂湧安全係數的算法不一而足，算出來的 FS 都不一樣，以下一一介紹。

參考§5-5 的圖 5-11，土體上方水位較低，土體承受向上滲流，C 點總應力 $\sigma_C = H_1 \gamma_w + H_2 \gamma_{sat}$

$$C\text{ 點水壓力 } u_{w,C} = (H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$$

$$C\text{ 點有效應力 } \sigma'_C = \sigma_C - u_{w,C} = H_2 \gamma' - \Delta h \times \gamma_w (= \text{分子} - \text{分母}) \quad \text{【參考下式】}$$

$$\text{從上式，定義流砂現象的安全係數 } FS = \frac{H_2 \gamma'}{\Delta h \times \gamma_w} \quad [5.28]$$

$$\begin{aligned} \text{續展開得 } FS &= \frac{H_2 \gamma'}{\Delta h \times \gamma_w} = \frac{\gamma'/\gamma_w}{\frac{\Delta h}{H_2}} = \boxed{\frac{i_c}{i}} = \frac{\boxed{\text{臨界水力坡降}}}{\boxed{\text{目前水力坡降}}} = \frac{\left(\frac{G_s - 1}{1 + e}\right)}{i} = \frac{i_{cr}}{i} \end{aligned} \quad [5.29]$$

臨界水力坡降 i_c 是土壤的特徵(固有特質)，類似強度的概念，僅受 G_s 、 e 影響。「目前水力坡降」 i 是外力，代表目前土壤受水流衝擊的程度，安全係數就是強度與外力的鬥爭。

參考圖 5-26，倘水不流動，則 C 點的有效應力是 $H_2 \gamma'$ ，恰在公式[5.28]分子；倘水向上流動(參考圖 5-11)，C 點的滲流水壓力 u_s 是 $\Delta h \gamma_w$ ，恰在[5.28]分母。此兩值的比值就是砂湧安全係數，這就是 Terzaghi 的想法。滲流水壓力愈大，安全係數愈小。

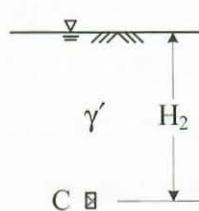


圖 5-26

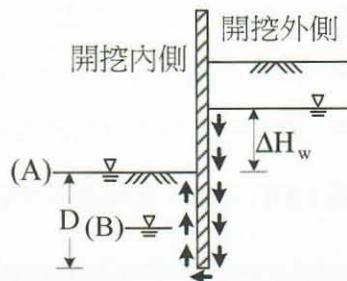


圖 5-27

法一：以上、下游間最短流線的平均水力坡降算 FS(規範方法)

參考圖 5-27，下游側水位在(A)，開挖內外側有水頭差 ΔH_w ，不透水壁體貫入深度為 D，則抗砂湧之 $FS = \frac{i_c}{i_{avg}} = \frac{\text{臨界水力坡降}}{\text{平均水力坡降}} = \frac{\gamma'/\gamma_w}{(\frac{\Delta H_w}{\Delta H_w + 2D})} = \frac{\gamma'(\Delta H_w + 2D)}{\gamma_w(\Delta H_w)}$ [5.30]

依[5.30]，規範規定 $FS \geq 2.0$ 方為合格設計。這種分析不需要畫流線網，簡單方便可能過於樂觀，上式分母水力坡降 i 是最短流線(貼著壁體)的平均水力坡降 i_{avg} 。請注意最短流線上的不同點，水力坡降不相同，壁體底端水力坡降最大，故有「平均值」。什麼叫「貫入深度」？是指壁體比開挖面還低的部分之長度，不是從原地表往下算。

規範畫圖 5-27 時，把下游水位面畫得比開挖面還低，乃畫在(B)，這樣流線長度不就跟式[5.30]矛盾嗎？問得好！原來規範是畫「正常施工不產生砂湧時，開挖面須抽水，保持開挖面乾燥施工」的狀況，通常須維持下游水位面比開挖面低 0.5 m~1.0 m。

水位在(B)比較危險，流線較短，FS 較小，但未必砂湧失敗。水位在(A)，流線較長，FS 較大。臨界砂湧失敗時，開挖側水位面一定上升到(A)，故以(A)寫 FS 表示式，以(B)式表示正常施工位置。

法二：以下游出口處最後一格的水力坡降算 FS

對於雙向度滲流，不太可能每一網格的流線長度一樣長，某格的流線長度越短，該格內水力坡降越大；反之某格的流線長度越長，該格內水力坡降越小。一條完整的流線，不同位置處的水力坡降並不一樣。

若題目有畫出流線網，讀者可以找下游出口處最後一格來分析，因該格有位移空間，最危險。下游出口處最後一格的水力坡降 i 是否會大於整條流線的平均值 i_{avg} ？這要看流線網畫完的結果，也就是跟邊界條件有關。如果下游出口處最後一格的流線很短，該格的水力坡降將很大，把最後一格的水力坡降當 FS 的分母，這樣會求出較小的 FS，設計上偏保守。

這種分析法要畫流線網才能做，不同人畫的流線網會不一樣，答案可能差很多，除非題目統一提供流線網。學理上這種分析較精確不打混仗，但畫圖是麻煩之處。

再強調一次安全係數算法是人定義的，不是神定義的，定義的內涵不同，當然結局不同。

法三：以 Terzaghi 法對砂湧浮動區算 FS

前輩 Terzaghi 對砂湧進行模型試驗，結果顯示不透水壁體的下游側，在離鋼鉗樁 $D \times \frac{D}{2}$ 的範圍內發生砂湧浮動，Terzaghi 提出一種需要流線網來分析此浮動區($D \times \frac{D}{2}$)的安全係數，幾乎每本教科書都有提到，他訂下游水位面為滲流水壓力為零的面。分析圖 5-28 浮動區分離體，向下力 $W = \text{土壤浸水重} W' + \text{水重} W_{water}$ ， W_{water} 是同一分離體體積的水重。向上力 $U = U_{ss} + U_s = u_{ss} \times A + u_s \times A$ 。向上力故意不包含土顆粒提供的反作用力。A 是浮動區底面積。

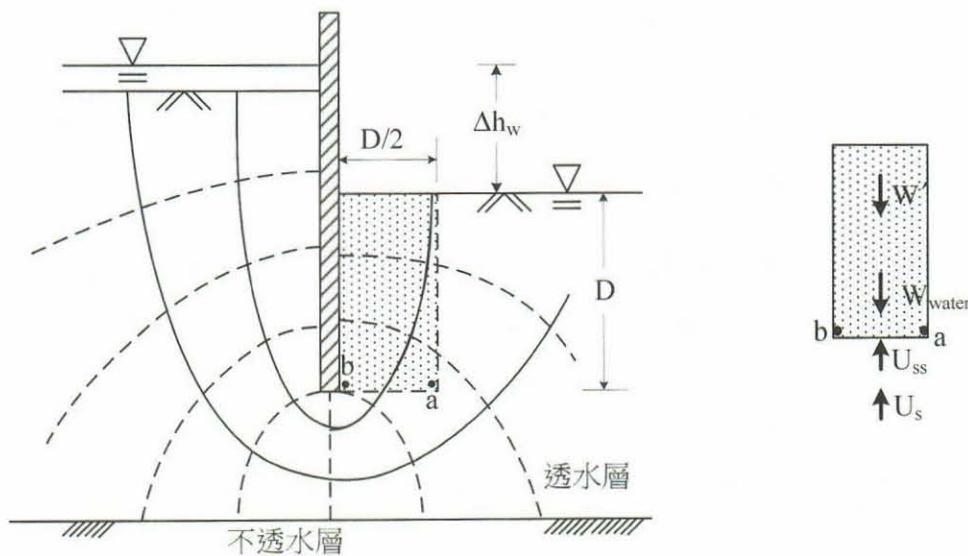


圖 5-28 Terzaghi 砂湧分析

依流體靜力學，向下力的 W_{water} 和向上力的 $u_{ss} \times A$ 大小相等，消掉之後，剩餘的 W' 和 $u_s \times$

$$A \text{ 比較, Terzaghi 抗砂湧安全係數定義為 } FS = \frac{\text{土壤浸水重} W'}{\text{浮動區底面滲流力} U_s} = \frac{W'}{u_s \times A} = \frac{\gamma' D}{u_{s,\text{avg}}} \quad [5.31]$$

上式分母 u_s 可以取砂湧浮動區底部滲流水壓力的平均值。

$$\text{浮動區有效土重 } W' = (\gamma' D^2) / 2$$

$$\text{浮動區底下的滲流力 } U_s = (u_{s,\text{avg}})(D/2)$$

其中 $u_{s,\text{avg}}$ 是浮動區底下平均的滲流水壓力，須依賴流線網來求。取圖 5-28 浮動區底下 a、b 兩點，分別求其滲流水壓力 $u_{s,a}$ 與 $u_{s,b}$ ，則 $u_{s,\text{avg}} = (u_{s,a} + u_{s,b}) / 2$ 。顯然 Terzaghi 定義安全係數是浮動區的有效土重對抗滲流力量。注意 Terzaghi 不是取浮動區底下總水壓力，乃是取滲流水壓力來算。

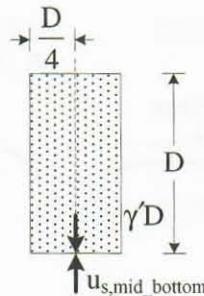


圖 5-29 砂湧浮動區

若要簡單計算，約找浮動區底部寬度一半之處($D/4$)的滲流應力進行分析，即 $FS = \frac{\gamma'D}{u_{s,\text{mid_bottom}}}$ 。
[5.32]

以上對於滲流水壓力的算法，係各原文教科書依據流線網的標準算法。我國規範的解說提出一簡化法計算浮動區底部滲流水壓力： $U_s = (u_{s,\text{avg}})(D/2) = \left[\gamma_w \cdot \frac{\Delta h_w}{2} \right] (D/2)$ ，其中 Δh_w 是上下游液面差距，依此概估法可免畫流線網。

$$FS = \frac{\text{土壤浸水重} W'}{\text{浮動區底面滲流力} U_s} = \frac{\text{土壤浸水重} W'}{\left[\gamma_w \cdot \frac{\Delta h_w}{2} \right] \frac{D}{2}} \text{，規範要求依左式設計時 } FS \geq 1.5 \text{。}$$

計算砂湧安全係數的方法五花八門，本書就出現 4 種，若參加專門技術人員職業考試，可以《建築物基礎構造設計規範》為依據。若參加高考，可於考試後舉證學術上常見的算法，發函給考選部捍衛自己的計算立場。你若擔心自己的方法不受閱卷者青睞，就要 do something，客氣為吃虧之本哪！

對抗砂湧，可以選擇的對策有：

- ① 延長擋土壁體深度，即延長流線，降低水力坡降。
- ② 降低上下游水頭差。
- ③ 分區降水，如圖 5-30。例如可採用井點降水法(Well Point Dewatering)，此法係在地層打入抽水管，抽水管中抽真空，迫使地下水沿管上升排出，特利於砂層抽水降水。
- ④ 開挖區土壤改良，增加 G_s 或降低 e ，即增加 i_{cr} 。
- ⑤ 變更設計，減少開挖深度。
- ⑥ 選擇枯水期施工，開挖面外側的水位會較低，即內外水位差較小。
- ⑦ 基地外側同內側，亦進行抽水，排入邊溝或下水道。

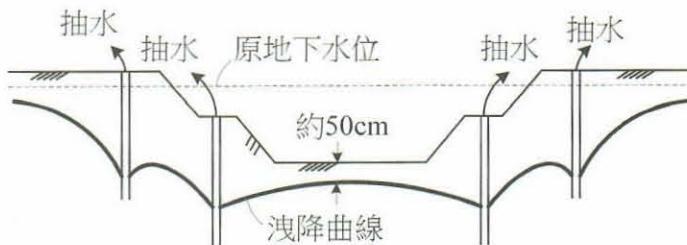


圖 5-30 分區降水示意圖

一般深開挖基地，除因擋土壁體貫入深度不足而引起砂湧外，還可能因以下原因產生砂湧：

- ① 基地鑽探之後的鑽孔，未確實封孔。
- ② 擋土壁體施工不良產生破洞滲漏，縮短滲流路徑。
- ③ 開挖基地內支撐的中間柱施工不良，回填不實，引致中間柱週邊砂湧。

讀完這一節，理解到發生砂湧時的水浮力(靜態水壓力+向上滲流水壓力)，足以將單位重約 2.0 tf/m^3 的飽和土壤托起，而人體的單位重僅約 1.07 tf/m^3 ，所以人若陷入砂湧狀況，應該不可能一直往下沉，反而是想沉卻沉不下去。混凝土塊或鐵塊，當然就沉得下去。

電影裡旅人在沙漠遭「流沙」吞噬的情節，好似沙漠裏的百慕達三角洲，增進生活想像樂趣，其機制就待各位 鈞長、副座細細研究了。

例 5-10.1 求 i_c

假設某砂之比重為 2.65，當其孔隙率分別為 45%、30% 時之臨界水力坡降各為若干？若目前砂土裏的水力坡降為 0.75，請問抗砂湧安全係數各是多少？ <改編91土木高考25分>



$$(1) n = e/(1+e)$$

$$\text{解出孔隙比 } e = 0.818$$

$$0.45 = e/(1+e)$$

$$i_c = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{2.65 - 1}{1 + 0.818} = \underline{\underline{0.91}}$$

$$(2) n = e/(1+e)$$

$$\text{解出孔隙比 } e = 0.4286$$

$$0.3 = e/(1+e)$$

$$i_c = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{2.65 - 1}{1 + 0.4286} = \underline{\underline{1.155}}$$

$$(3) \text{當其孔隙率為 } 45\%, FS = 0.91/0.75 = \underline{\underline{1.21}}$$

$$\text{當其孔隙率為 } 30\%, FS = 1.155/0.75 = \underline{\underline{1.54}}$$

討論

孔隙比越小代表越緊密，相對不容易產生砂湧，該砂土會有較大的臨界水力坡降。注意孔隙比和孔隙率不同，考試時務必「逐字審題、逐字審圖」。網路上有網友提供免費解答，孔隙比和孔隙率看錯字，提供了錯誤答案。免費的東西，消費者要自行評估品質。

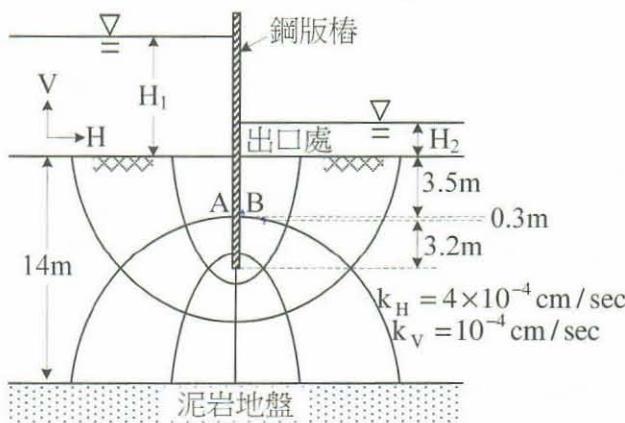
材料力學裏的細長柱有臨界載重 P_{cr} 值，看到臨界水力坡降 i_c 就讓人想到臨界載重 P_{cr} 。材料力學沒有明顯定義完美柱受軸向載重的安全係數如何算，但我們可以很合理的定義成 $FS = \frac{P_{cr}}{\text{目前所承受的軸力}}$ ，例如某細長柱的 $P_{cr}=100$ kN，目前承受軸力 50 kN，我們就可以說目前抗挫屈的安全係數為 2.0。類比地講，某砂土的臨界水力坡降是 1.2，目前承受水力坡降是 0.6，我們就可以說目前抗砂湧的安全係數為 2.0。題外話，材料力學裏瑕疵柱受軸力作用的安全係數就要用正割公式協助計算，詳筆者《材料力學論衡》。

例 5-10.2 流線網+各種水頭

如圖所示，某鋼版樁部分置入14 m 之沉泥質砂土層，假設鋼版樁長15 m且7 m貫入土層中，此沉泥質砂土層之鉛垂向透水係數 $k_v = 10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，水平向透水係數 $k_H = 4 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，土壤之飽和單位重 γ_{sat} 為 19.81 kN/m^3 ，經以非等向透水係數比，將座標比例轉換後，繪得之類比等向透水係數之流網如圖所示，假設上游水位高 $H_1 = 5 \text{ m}$ ，下游水位高 $H_2 = 1 \text{ m}$ ，

- (一) 試利用所繪得之流網計算滲流量 (rate of seepage) 為若干 $\text{m}^3/\text{day}/\text{m}$ ？
- (二) 假設以沉泥質砂土層底部為基準點，試計算版樁兩面中點：A點及B點處之總水頭、壓力水頭、高程水頭及管測水頭各為若干m？
- (三) 試求出口處之水力坡降及其抗砂湧之安全係數為若干？
- (四) 當上游水位上升多高時，下游出口處會發生砂湧。
- (五) 圖中之H : V 座標比例為若干？當座標轉換回復原始座標比例 ($H : V = 1 : 1$) 後，圖中所繪示之流網將會有何改變？

<102年高考三級，每小題5分，共25分>



$$(一) k_e = \sqrt{k_v k_H} = \sqrt{1 \times 4} \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} \text{ cm/sec} = 2 \times 10^{-6} \text{ m/sec}$$

$$q = k_e \times \frac{N_f}{N_q} \times (\Delta h_t) = 2 \times 10^{-6} \times \frac{3}{6} \times 4 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = 0.3456 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}$$

$$(二) 每一格消耗總水頭 = (H_1 - H_2)/N_q = 4/6 = 0.667 \text{ m}$$

位置	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
上游地表面	19		14		5

A	18.333	10.5	(7.833)
版樁底部	17	7	(10)
B	15.667	10.5	(5.167)
下游地表面	15	14	1

單位：m

管測水頭即壓力水頭，數值見上表最右欄位。

(三)抗砂湧安全係數有多種算法，答案不一 (其他解見討論)

$$\text{僅考慮最後一網格出口處，水力坡降 } i = \frac{\Delta h_t}{L} = \frac{0.667}{3.5 + 0.3} = 0.175 \quad (\text{流線長度取中線長})$$

$$i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} = \frac{19.81 - 9.81}{9.81} = 1.019$$

$$FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{1.019}{0.175} = \underline{\underline{5.82}}$$

(四)類似第(三)小題，不同 FS 對應不同答案

僅考慮最後一網格出口處，砂湧時，FS=1.0

$$\Rightarrow i = \frac{\Delta h}{L} = i_{cr}$$

$$\Rightarrow \frac{(H'_1 - H_2)/6}{3.5 + 0.3} = 1.019 \quad H'_1 = H_2 + 1.019 \times 3.8 \times 6 = \underline{\underline{24.23m}}$$

上游水位高度 24.23 m 時，發生砂湧

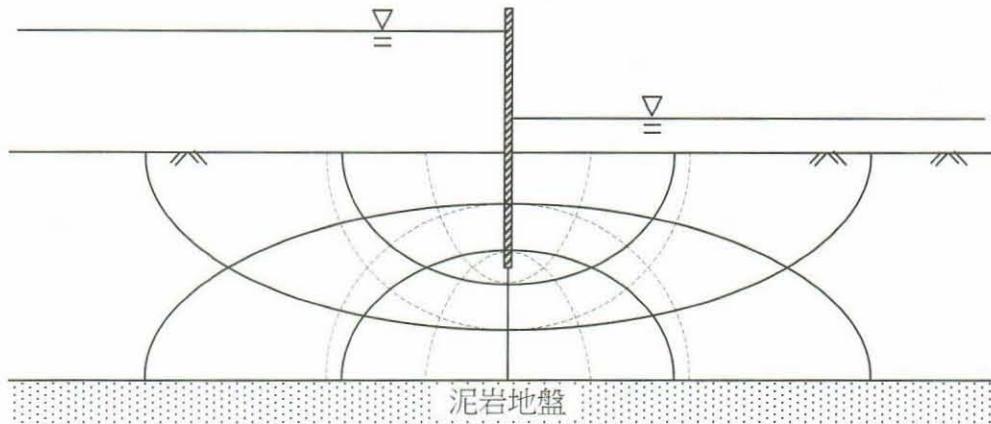
(五)「座標比例」為何意？不同人可能不同解讀。

解讀 1：現場鉛垂方向 10 公尺的距離若在紙上被畫成 2 公分長，則現場水平方向 10 公尺的距離，在紙上只能用 1 公分畫。故 $H:V = 1:2$ 。

解讀 2：流線網轉換後，水平向被壓縮的激烈程度，是垂直向的兩倍。從現地到圖紙，垂直向若被壓縮 1000 倍，則水平向被壓縮 2000 倍，故 $H:V = 2:1$ 。換言之，紙面上 1 cm 若代表現地垂直高度 1000 cm，則 1 cm 同時代表現地水平距離 2000 cm。

換回 $H:V=1:1$ 後，流網將會橫向(水平向)變寬，等勢能線與流線不再正交。

下圖實線為 $H:V=1:1$ 之流線網。



討論

插入水壓計到地底下土壤某一點，所讀出的水位高，是該點的總水頭還是壓力水頭？答：壓力水頭。而壓力水頭是總水壓的最終表現。或者說壓力水頭是靜水壓、滲流水壓和超額孔隙水壓的總和表現。

流線網形狀和上下游水頭差大小無關，只和邊界條件、土壤性質(是否異向性)有關。

遇到鎖在象牙塔裏的恐龍教授，我不比你強，一樣「雖」，這種時候就是你該寄信去考選部的時候。恐龍教授的社會經驗少，有時候你要給他一些社會經驗。我只能從字面上來猜：以壓力計測量水壓時，靜水在壓力計裏上升的高度，就是壓力計測到的水頭。我猜這就叫「管測水頭」，沒錯，等於是壓力水頭。

第(三)小題依《建築物基礎構造設計規範》， $FS = \frac{\gamma'(\Delta H_w + 2D)}{\gamma_w (\Delta H_w)} = \frac{10(4 + 2 \times 7)}{9.81(4)} = 4.59$ ，對嗎？

請想一想流線長度應該多長，呆呆代公式正是誤解公式。

本題鋼版樁貫入深度 7 m，正好是透水層的一半厚，故等勢能線和流線形成「反對稱」，亦即你把題圖旋轉 180°(upside down)，流線好似變成等勢能線，等勢能線變成流線。(把這本書轉 180°，上下顛倒，再看一次。)

抗砂湧安全係數，依《建築物基礎構造設計規範》，考慮最短流線的平均水力坡降

$$i = \frac{\Delta h_t}{L} = \frac{5 - 1}{7 + 7} = \frac{2}{7}$$

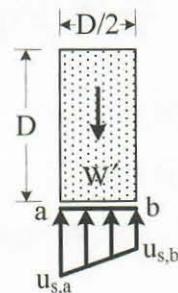
$$\text{得 } FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{1.019}{2/7} = 3.57$$

抗砂湧安全係數，按 Terzaghi 之砂湧分析

$$\text{滲流水壓 } u_{s,a} = 0.667 \times 3 \times 1 = 2 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{滲流水壓 } u_{s,b} = 0.667 \times 1.6 \times 1 = 1.067 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{平均滲流水壓 } u_{s,avg} = (u_{s,a} + u_{s,b})/2 = 1.533 \text{ tf/m}^2$$



$$\text{得 } FS = \frac{W'}{U_s} = \frac{D \times \frac{D}{2} \times \gamma'}{u_{s,avg} \times \frac{D}{2}} = \frac{7 \times 3.5 \times 10}{1.533 \times 9.81 \times 3.5} = \underline{4.65} = \frac{D \times \gamma'}{u_{s,avg}}$$

第(四)小題，考慮最短流線，即《建築物基礎構造設計規範》，砂湧時，FS=1.0

$$FS = 1.0 = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{1.019}{(H_1 - 1)/14}$$

$$\text{解出 } H_1 = \underline{15.266 \text{ m}}$$

第(四)小題，按 Terzaghi 之砂湧分析，令 FS=1

設每一網格消耗總水頭 x 公尺

$$\text{平均滲流水壓 } u_{s,avg} = (u_{s,a} + u_{s,b})/2 = (3x + 1.6x)/2 = 2.3x \text{ tf/m}^2$$

$$FS = 1.0 = \frac{3.5(7)(10)}{2.3x(3.5)(9.81)}$$

$$\text{解出 } x = 3.1 \text{ m}$$

$$\text{上下游總水頭差 } \Delta h_t = 6x = 18.6 \text{ m}$$

$$H_1 = 18.6 + 1 = \underline{19.6 \text{ m}}$$

第(四)小題，應無唯一答案，請參看本章§5-13 歷年考題精選 100 年高考三級題目，建議考生去函考選部捍衛自己立場。大地工程經常無標準答案，不像材料力學、結構學。

如果向上水流通過兩種不同滲透係數的土壤，該如何定義「砂湧」？如何算？

§5-11 管湧(Piping) 工程地質→土體失敗

從「管湧」的原文來看，pipe 的意思是導管、輸送管，文法上 piping 明顯是現在分詞當形容詞用，意思是「正在形成管道的」。到土壤力學裏，此形容詞已經轉成名詞，表示「在土壤中形成管道」的現象。(pile 是樁，pipe 是導管，勿混淆)

在土壤中形成什麼管道？意思是水流在土壤內部流動，將土壤掏空，猶如在土壤內部沖刷出一條「空管」的現象，水流未必一定向上，向下也有可能，請參考圖 5-31、圖 5-32 與圖 5-33。

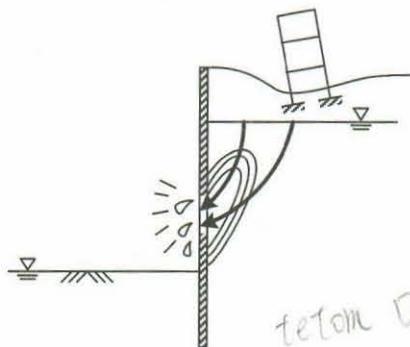


圖 5-31 壁體破洞，流線變短，滲流力變大

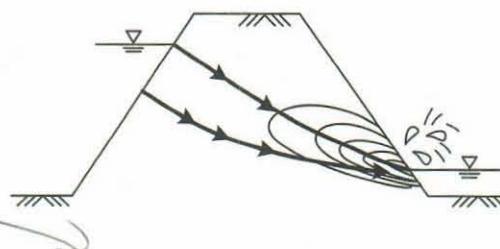


圖 5-32 掏空孔道往上游延伸

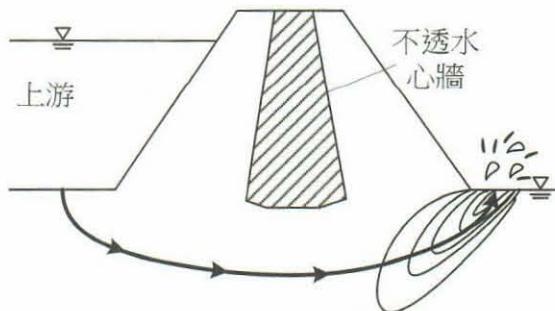


圖 5-33 掏空孔道往上游延伸，好比從下游往上游鑽隧道

為什麼水會將土壤沖刷離開原位置？原因有(1)向上的水流，若水壓力等於總應力，在有效應力為零之下，土壤顆粒宛如懸浮在「土壤湯」裏，無任何抗剪強度阻止移動，尤易發生在砂土中。(2)任何方向的水流，對土壤施予滲流力(Seepage Force)推動，當土壤的邊界條件為「有位移空間」時，土壤即被沖出，形成掏空，最外層土壤沖走位移後，次層的土壤就缺乏保護而有位移空間，唇亡齒寒加骨牌效應，於是沖刷逐漸往土壤內部延伸，流線更短，滲流力更大，猶如沖刷出一條「空管」、「孔穴」的現象，水流可以是平的或朝下，未必要向上。

水力坡降最大之處，未必是最先位移之處，要看有沒有位移空間。

從過去的考古題、學者間不同的習慣用語，以及原文書之間的混用情形來看，「砂湧」與「管湧」有高度的類似性，可能甲教授習慣講的砂湧，在乙教授口中就習慣講成管湧，考生要適應。

防止管湧的對策有：

- (1)降低水力坡降，單位體積滲流力= $i\gamma_w$ ， i 越小，沖刷的滲流力就小。
- (2)降低上下游水頭差。
- (3)設置卵礫石、濾層保護壩趾處土壤及迅速排除水壓，避免滲流線從坡面流出。
- (4)延長流線，如設置截水牆(Cutoff Wall)或於壩體上下游增設護坦(Blanket)，壩體下方進行隔幕灌漿。
- (5)選擇水密性較佳的壁體，確保施工品質，避免產生破洞。
- (6)增設消壓井，降低壩趾處滲流水壓力。

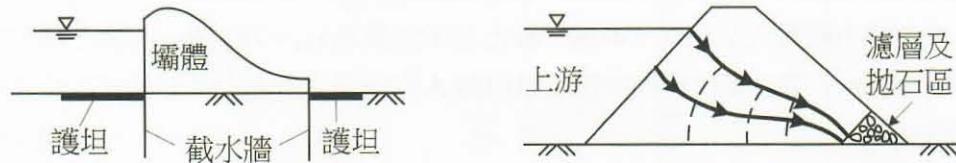


圖 5-34 上下游增設護坦或以拋石、濾層保護壩趾

浸潤線(Phreatic Line)指的常是壩體內滲流位置最高的滲流線，如圖 5-35，浸潤線以下飽和度視為 100%。浸潤面(Phreatic Surface)指的是水壓力和大氣壓力相等的介面，也就是壓力水頭(Pressure Head)為零的面，通常就是水位面，對非拘限含水層(Unconfined Aquifer)，浸潤面的斜率方向就是地下水流動的方向。

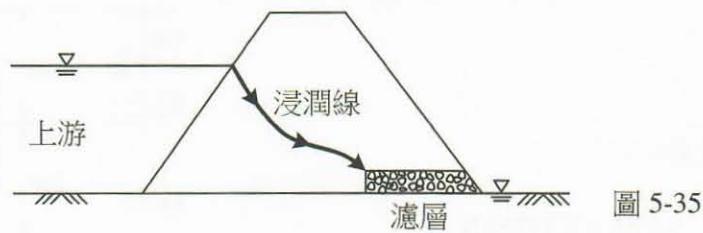


圖 5-35

考名詞解釋時，記得畫圖與寫出公式，評分是相對的，寫最完整的人得滿分，缺東缺西分數就往下遞降。國考答案卷有 8 頁，圖畫大一些也是技巧，可吃較多版面，字不用寫那麼多。

0921567324

表 5-11 管湧、砂湧之異同

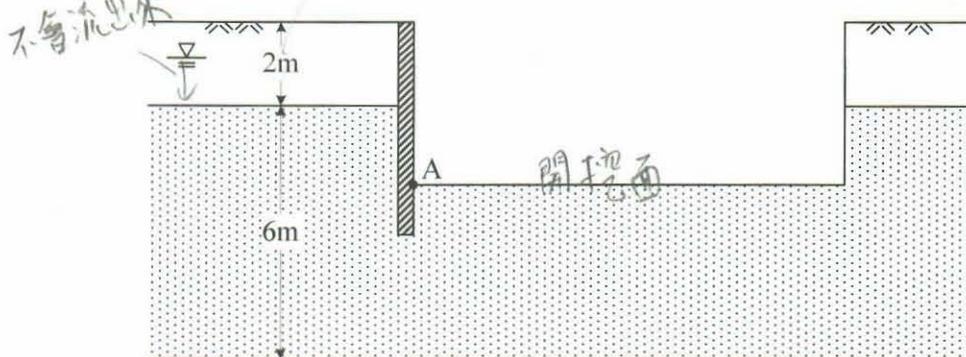
	管湧(Piping)	砂湧(Sand Boiling)
相同	1. 均是水流造成顆粒移動，均與滲流力有關。 2. 從最容易位移之處開始發生，破壞從下游往上游蔓延。 3. 延長流線、降低上下游水頭差，可阻止災害發生。	
相異	1. 水流未必向上，可向上、下、左右。破壞時，土壤可向上、下、左右移動。 2. 有效應力未必為零。 3. 規範未定 FS。	1. 水流向上。破壞時，土壤向上翻滾。 2. 到達臨界水力坡降，有效應力降為零。 3. 規範定 $FS \geq 2.0$ 。

例 5-11.1 求滲流力

有一厚 2 m 之黏土層，其下方為厚 6 m 之砂土層，地下水位位於地表下 1 m 處。今如在該地層開挖至地表下 4 m 後進行建築結構，為便利施工構築，將開挖面內之水位抽降至與開挖面等高，開挖擋土壁貫入至深度 5 m 處。砂土之單位重為 $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$ ；黏土層飽和單位重為 $\gamma_{sat} = 17.5 \text{ kN/m}^3$ ，請計算位於開挖擋土壁內側 A 點所受之滲流力；並檢核此時開挖底面是否有管湧問題？

黏土不放水流

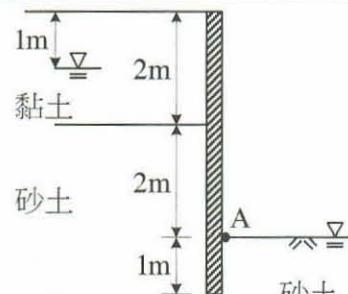
<結構技師 25 分>



(1) A 點單位體積所受滲流力

$$= i\gamma_w = \frac{\Delta h}{L} \gamma_w = \frac{3}{4} \times 9.81 = 7.3575 \text{ kN/m}^3$$

$$(2) FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{\gamma'}{\gamma_w i} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w i} = \frac{18 - 9.81}{9.81 \times 0.75}$$



B 下	3.8	1	2.8
C	7.6	6	1.6
D 上	11.4	11	0.4
D 下	11.4	2	9.4
E	13.4	3	10.4

降水後長期

A 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1 \times 1.8 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_A = 0 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 1.8 - 0 = 1.8 \text{ tf/m}^2$$

B 上 點 (此點仍屬砂)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 1.8 + 1 \times 2 = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 3.8 - 1 = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \times 1 = 1 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 2.8 \text{ tf/m}^2$$

(長期後 B 上、B 下均相同)

D 點 (長期後 D 上、D 下均相同)

$$\text{總應力 } \sigma_v = 7.6 + 2 \times 1.9 = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_D = 1 \times 2 = 2 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 11.4 - 2 = 9.4 \text{ tf/m}^2$$

C 點

$$\text{總應力 } \sigma_v = 3.8 + 2 \times 1.9 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = (1 + 2) / 2 = 1.5 \text{ tf/m}^2$$

【B、D 兩點水壓力和之半】

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 7.6 - 1.5 = 6.1 \text{ tf/m}^2$$

E 點

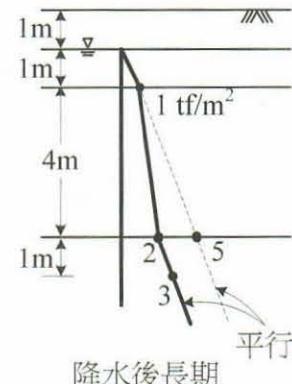
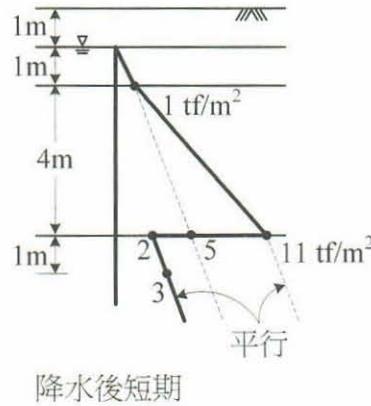
$$\text{總應力 } \sigma_v = 11.4 + 1 \times 2 = 13.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_E = (2+1)\gamma_w = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 13.4 - 3 = 10.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{壓力水頭 } h_p = \frac{(u_w)_E}{\gamma_w} = \frac{3}{1} = 3 \text{ m}$$

點位	總應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)
A	1.8	0	1.8
B 上	3.8	1	2.8
B 下	3.8	1	2.8
C	7.6	1.5	6.1
D 上	11.4	2	9.4
D 下	11.4	2	9.4
E	13.4	3	10.4



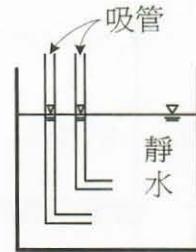
討論

第(1)小題還沒開始抽水，水壓力從上而下是連續直線或折線，不會有斷層式跳躍變化。

降水前，黏土層內的滲流方向乃是向上。降水後長期，黏土內滲流方向向下。降水後長期，D、E 兩點總水頭相等，故 D、E 之間無滲流。總水頭與位置水頭的觀念詳第五章。

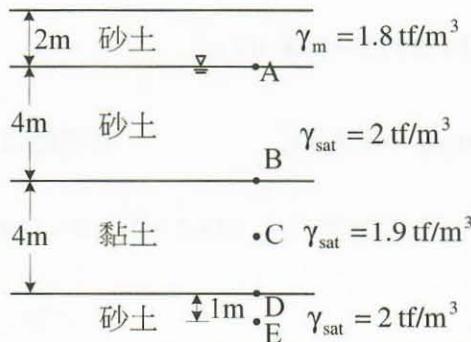
降水後長期，黏土層中點有效應力增加($1.6 \text{ tf/m}^2 \rightarrow 6.1 \text{ tf/m}^2$)，會引起壓密沉陷。

很多考生對水壓計的行為不了解，導致無法解題，其實自己做實驗就可以解惑。你去7-eleven拿兩支有彎頭的吸管，兩支都彎成L狀之後，插入盛有靜止水的杯內，如下圖，一支插的深度比較淺，另一支插的深度比較深，看看兩支吸管內的液面有沒有一樣高？你自己就已經看到答案了。吸管就是小型水壓計呀！



例 4-1.5 地表砂層抽水

有一工址，土壤剖面如圖所示，C在B下方2 m。請算出B、C、D、E四點的總應力、水壓力與有效應力。後來在黏土層上方的砂層抽水，使得該砂層之水位線降低3 m，請算出降水後短期與長期之B、C、D、E四點的總應力、水壓力與有效應力，並畫出水壓力分布剖面圖。



$$(1) \text{ B 點} \quad \text{總應力 } \sigma_v = 1.8 \times 2 + 2 \times 4 = 11.6 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_B = 1 \times 4 = 4 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 11.6 - 4 = 7.6 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{C 點} \quad \text{總應力 } \sigma_v = 11.6 + 2 \times 1.9 = 15.4 \text{ tf/m}^2$$

$$(u_w)_C = 6 \times 1 = 6 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 15.4 - 6 = 9.4 \text{ tf/m}^2$$

D 點 總應力 $\sigma_v = 15.4 + 2 \times 1.9 = 19.2 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_D = 1 \times 8 = 8 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 19.2 - 8 = 11.2 \text{ tf/m}^2$$

E 點 總應力 $\sigma_v = 19.2 + 2 \times 1 = 21.2 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_E = 1 \times 9 = 9 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 21.2 - 9 = 12.2 \text{ tf/m}^2$$

(2) 降水後初期，水位線以上視為溼砂，地表下 5m 皆為溼砂。

B 上 點 (此點仍屬砂) 總應力 $\sigma_v = (2+3)1.8 + 1 \times 2 = 11 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_B = 1 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 11 - 1 = 10 \text{ tf/m}^2$$

B 下 點 (此點已屬黏土) 總應力 $\sigma_v = 11 \text{ tf/m}^2$

$$\text{水壓力不變 } (u_w)_B = 4 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 11 - 4 = 7 \text{ tf/m}^2$$

C 點 總應力 $\sigma_v = 11 + 2 \times 1.9 = 14.8 \text{ tf/m}^2$

$$\text{水壓力不變 } (u_w)_C = 6 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 14.8 - 6 = 8.8 \text{ tf/m}^2$$

D 上 點 (黏土) 總應力 $\sigma_v = 14.8 + 2 \times 1.9 = 18.6 \text{ tf/m}^2$

$$\text{水壓力不變 } (u_w)_D = 8 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 18.6 - 8 = 10.6 \text{ tf/m}^2$$

D 下 點 (砂土) 總應力 $\sigma_v = 18.6 \text{ tf/m}^2$

$$(u_w)_D = (4+4) \times 1 = 8 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 18.6 - 8 = 10.6 \text{ tf/m}^2$$

E 點 總應力 $\sigma_v = 18.6 + 1 \times 2 = 20.6 \text{ tf/m}^2$

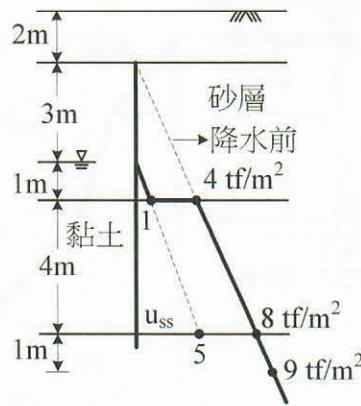
$$(u_w)_E = (4+4+1)\gamma_w = 9 \text{ tf/m}^2 \quad \text{有效應力 } \sigma'_v = 20.6 - 9 = 11.6 \text{ tf/m}^2$$

降水後短期

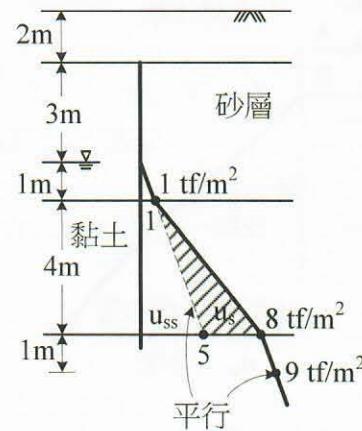
點位	總應力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)
B 上	11	10	1
B 下(黏土)	11	7.0	4.0
C(黏土)	14.8	8.8	6.0
D 上(黏土)	18.6	10.6	8.0
D 下	18.6	10.6	8
E	20.6	11.6	9

降水後長期

點位	總應力(tf/m ²)	有效應力(tf/m ²)	水壓力(tf/m ²)
B 上	11	10	1
B 下(黏土)	11	10	1
C(黏土)	14.8	10.3	(1+8)/2 = 4.5
D 上(黏土)	18.6	10.6	8
D 下	18.6	10.6	8
E	20.6	11.6	9



降水初期



降水長期

討論

抽水導致砂層水位下降，下降部分，現場可能有毛細現象，但須給飽和度 S 方能計算水壓力，本題沒給 S，毛細程度也可能處處不一，故勉強設 S=0%，若要設 S 為其他值，記得在答

案紙上說清楚。降水 3 m 後，黏土上方的砂土單位重降低 0.2 tf/m^3 ，造成黏土短期總應力降低 0.6 tf/m^2 ，由於短期黏土的水應力不變，所以黏土有效應力就必須降低 0.6 tf/m^2 。

表層砂降水後的初期，黏土層有三角形 u_e (上寬下尖)、三角形 u_s (上尖下寬)及 u_{ss} ，不是矩形的 u_e 。表層砂降水後的初期，因受黏土阻隔而不透水，黏土滲透係數很小，短期像塊鋼鈑，阻絕上下水壓力的「溝通」，底層砂變成拘限含水層，其壓力水頭維持 8 m 而非變成 5 m。換言之，降水後的初期，黏土層下方的砂層之水壓力不受影響，仍維持原值。降水後的長期，黏土層下方的砂層之水壓力仍不受影響，維持原值。換個比喻，黏土像個 20 公分厚的樓版，樓上的人跳舞吵鬧，樓下的人完全聽不到，因為那麼厚的樓版，阻絕了聲音的溝通。

長期後，三角形 u_e 消散完畢，留下三角形 u_s 與 u_{ss} 。

如果題目換個考法，表層砂水位不動，但在黏土底下的砂層抽水，一樣造成黏土層有三角形的 u_e (但屬上尖下寬)，也不是矩形的 u_e 。

圖 4-6 表示，若在上層砂土抽水，使水位從 A 降到 B，則黏土層會產生上寬下尖的超額孔隙水壓圖 u_e ，此 u_e 隨時間而逐漸消散。圖 4-7 表示，若在下層砂土抽水，使下砂土水壓計下降 Δh ，則黏土層會產生上尖下寬的超額孔隙水壓圖 u_e ，此 u_e 隨時間而逐漸消散。

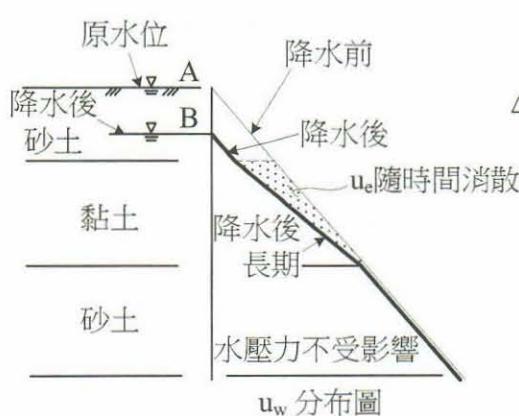


圖 4-6

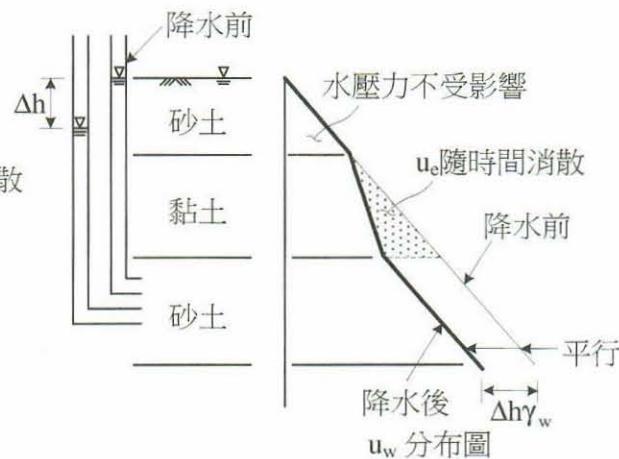


圖 4-7

§4-2 均質均向地層受點荷重 5-2

何謂均質的(homogeneous)？何謂均向的(isotropic)？各校甄試的口試常考(eg：中央大學)，請考生務必要會，並能舉例為佳。均向是在形容一個材料點(土力就是指土壤微素)的特性，如果一個材料點在各方向的力學表現均相同，我們稱此點是「均向的」。例如某一土壤微素 A，它三個方向的滲透係數皆相等， $k_{x,A} = k_{y,A} = k_{z,A}$ ，則可稱 A 點在滲透性是均向的。均向就是「各方向的表現均勻」，其翻譯的確有達意。

均質描述的對象是一大團物體，不是一個點。如果一大團物體裏，任取兩個點，而這兩個點在同一方向的力學表現相同，我們稱此團物體是「均質的」。例如某一土層裏任取微素 A、B 兩點，若 $k_{x,A} = k_{x,B}$ ， $k_{y,A} = k_{y,B}$ ， $k_{z,A} = k_{z,B}$ ，則可稱此土層在滲透性是均質的。均質就是「質地均勻」，翻譯得也妙。「任取」反而是嚴格的要求，讀者不能鍾情、偏好土體裏的某一些點位，「任取」反而變成「毫無例外」之意。舉班級為例，「一年甲班任選兩名學生，血型一定一樣」，這樣反而是很嚴格的要求「全班血型一定要一致」才辦得到。

注意成立均質，不一定須要 $k_{x,A} = k_{y,A} = k_{z,A}$ 。如果發現 $k_{x,A} = k_{x,B} = k_{y,A} = k_{y,B} = k_{z,A} = k_{z,B}$ ，則此土層在滲透性是均質且均向。均質且均向是最簡單的狀況，其力學模型最簡單。

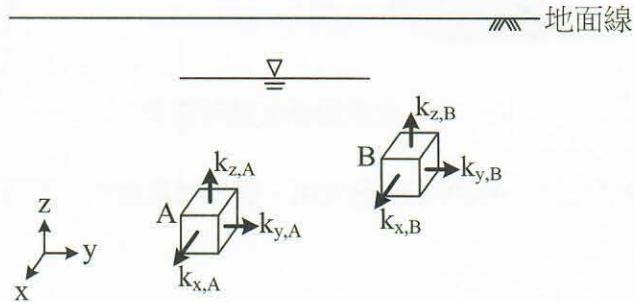


圖 4-8

土體根本就不均質(heterogeneous)不均向(anisotropic)，所以依據均質均向理論出來的公式，常常要加修正係數或安全係數，並且參考其他人的研究結果、處理經驗與檢討報告，形成自己的心得。

參考圖 4-9，法國數學家兼物理學家 Joseph Boussinesq(1842~1929)於 1883 年提出均質均向的半無限域彈性體，承受鉛直點荷重(集中力)時，彈性體內的應力增量 $\Delta\sigma_z$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{L^5} \quad [4.7]$$

此式叫做「基本解」，導出此式宛如打開潘朵拉的盒子(Pandora's box)，宛如人類發明文字，鬼神與研究生夜哭。圖 4-9 裡， $r^2 = x^2 + y^2$ ， $L^2 = r^2 + z^2$ 。

所謂的半無限域彈性體，意指地表上方空無一物，地表下的彈性體(i.e., 土壤)無限大。此半無限域彈性體無重量。式[4.7]的 P 與 $\Delta\sigma_z$ 是線性關係，雙方均為一次方，在材料降伏或破壞以前，可用重疊原理。以下各節，許多應力增量理論解均是導自於公式[4.7]。此公式可謂僅供參考，因為土壤不是均質均向，不是無重量，土層厚度有限更不可能達到半無限域。

從公式[4.7]可以看出，離集中力 P 作用點愈遠，垂直應力增量愈小。

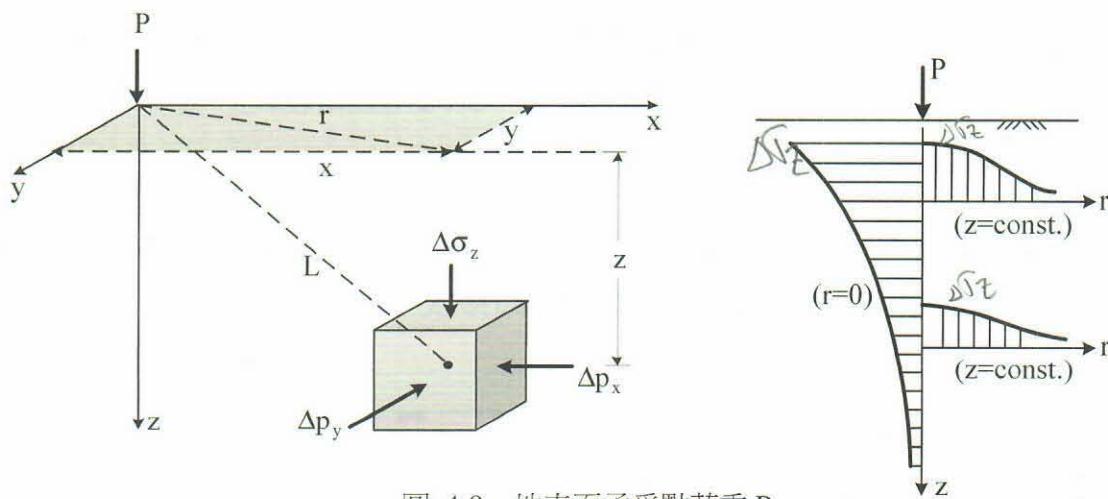


圖 4-9 地表面承受點荷重 P

上右圖顯示，在 P 力正下方($r=0$)深度愈大處，應力增量愈小。在固定($z=\text{const.}$)深度處，離 P 愈遠應力增量愈小。

§4-3 各種均布荷重與壓力球根觀念

考慮下圖，柔性條型基礎(基礎長度出紙面無限長)寬度 B，承受均布載重 q (單位：[力量/面積]， F/L^2)，載重分布長度無限長(條型基礎，長度為出紙面方向，長度 $\rightarrow \infty$)，利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，可以積分算出 P 點垂直應力增量 $\Delta\sigma_z = \frac{q}{\pi} [\alpha + \sin \alpha \cos(\alpha + 2\delta)]$ [4.8]

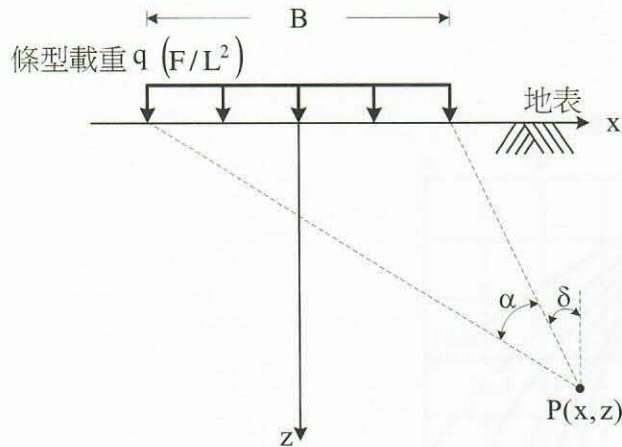


圖 4-10 條型基礎承受均布載重

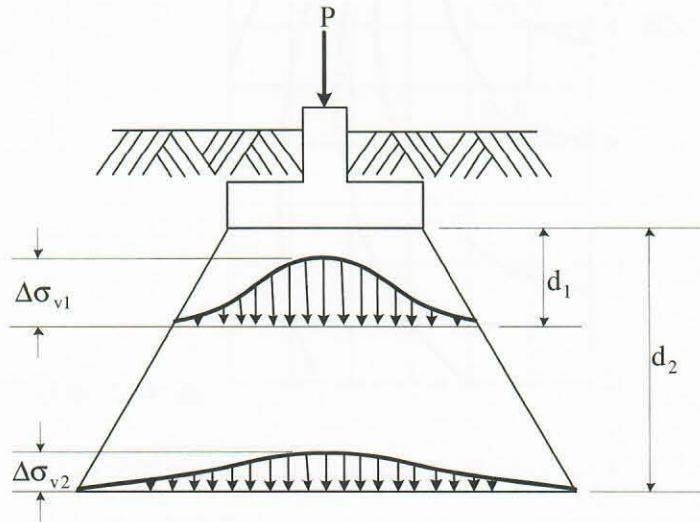


圖 4-11 基腳寬度有限，長度無限

以[4.8]為基石，可導得在同一深度 d 處，條型基礎中心正下方，應力增量會比兩側大，如圖 4-11，此圖亦可看出應力往兩側、往下擴散。條型基礎的分析問題，就是材料力學裡的平面應變(Plane Strain)問題(詳筆者《材料力學論衡》第十一章)，此類型結構體具有某一維尺度特

別長的特徵(eg：長條型基礎、擋土牆、隧道結構體、防波堤、…)，結構體受力後，在此長向之應變經常為零，或極近零；在長向的應力是常數，分析或設計時，常取長向的單位長度進行。

將土壤裏應力增量相同的點連線，可畫出等應力增量線，如圖 4-12，由於看起來像洋蔥球根，故稱壓力球根(Pressure Bulb)、應力球根(Stress Bulb)或等應力線。注意條型基礎中心下方深度 $6B$ 處，應力增量接近 $0.1q$ ，這可代表條型基礎鑽探「至少」應抵達的深度。

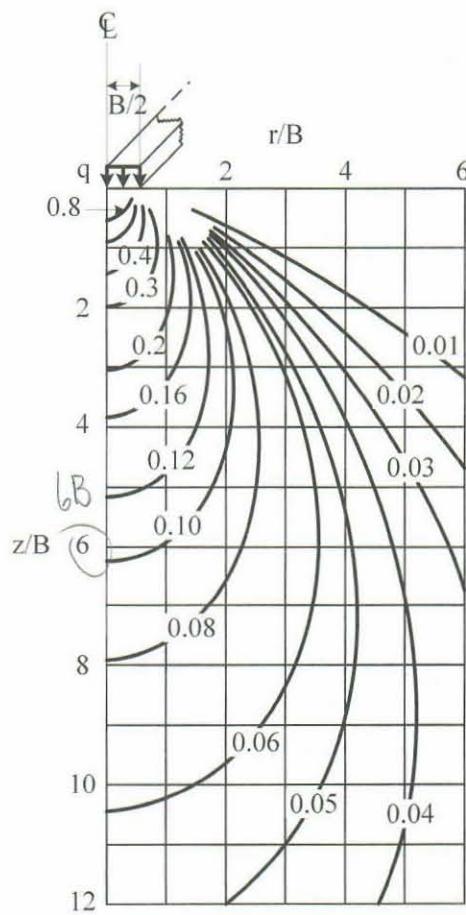


圖 4-12 條型基礎壓力球根

為何剛才說「至少」？因地表下正向應力與剪應力增量大小，不只受載重大小與載重分布情形影響，也受基礎版形狀、基礎版勁度大小、土壤彈性係數、波松比影響，亦受水平、垂直傳遞距離影響。

Boussinesq 認為土體承受垂直外力後，土體內側向可以伸展，也就是側向應變不為零，這是 Boussinesq 的假設。另一學者 Westergaard 則提出不同假設，假設土體承受垂直外力後，土體內側向不可以伸展，也就是側向應變為零，從而導出另一系列公式，因對國考無益，有興趣

者請翻閱相關書籍^{註2}。

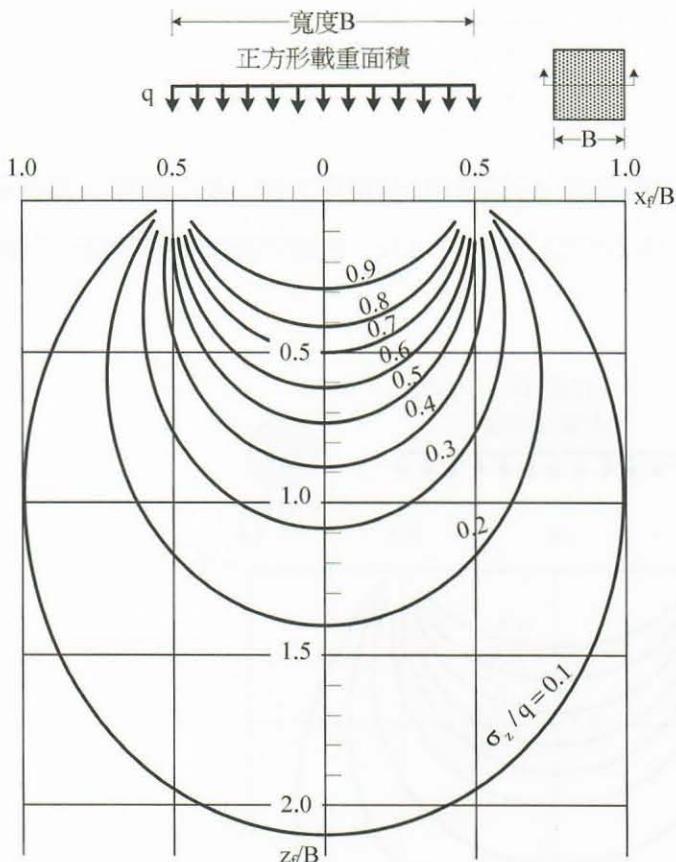


圖 4-13 正方形基礎壓力球根

對於每邊長度 B 之柔性正方形基礎，亦可利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，算出土體的應力增量。將方形基礎中心正下方，應力增量相同的點連線，也可畫出正方形基礎的等應力增量線，如圖 4-13，注意基礎中心下方深度 $2B$ 處，應力增量接近 $0.1q$ ，這暗示正方形基礎鑽探至少應抵達的深度。

考慮圖 4-14，柔性圓形基礎半徑 R ，承受均布載重 q ，利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，可以積分算出圓心正下方 z 深度處之垂直應力增量 $\Delta\sigma_z$

註 2：土壤是高度異向性的材料，不容易推導公式，所以不同學者，建立不同假設以簡化問題，就推導出不同公式，你在土壤力學及基礎工程原文書內會看到超級多的公式，搞不清楚哪些才是考試必背的。想考試，就必須買專業考試用書，例如你手上這本。

$$\Delta\sigma_z = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{3z^3(qrdrd\theta)}{2\pi(r^2+z^2)^{5/2}} = q \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2\right)^{3/2}} \right] \quad [4.9]$$

將圓形基礎下方應力增量相同的點連線，可以畫出「等壓應力線」(壓力球根)，如圖 4-14，請注意基礎圓心正下方兩倍直徑處，應力增量已經小於 0.1q，這暗示圓形基礎鑽探至少應抵達的深度。

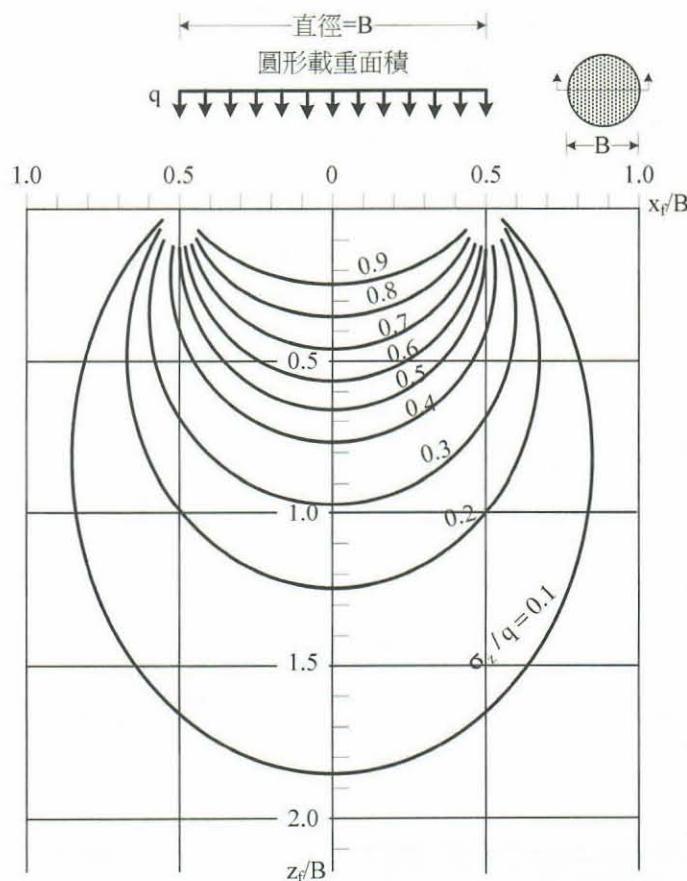


圖 4-14 圓形基礎半徑 R，承受均布載重 q 及其壓力球根

觀察圖 4-13 和圖 4-14，基礎邊緣應力增量和基礎中心點應力增量，在 $2B$ 深度處，雙方約達成相等，當然還是基礎中心點正下方稍大些。依據 Boussinesq 的假設，彙整出圓形、正方形、條型基礎邊緣及中心正下方的應力增量圖如下， q 是基面處應力增量， Z 是從基面起算的

深度。你覺得圖 4-15 有沒有與圖 4-13 矛盾？圖 4-15 與圖 4-14 矛盾？怎麼辦？(觀察在基礎邊緣接地面點的應力增量)

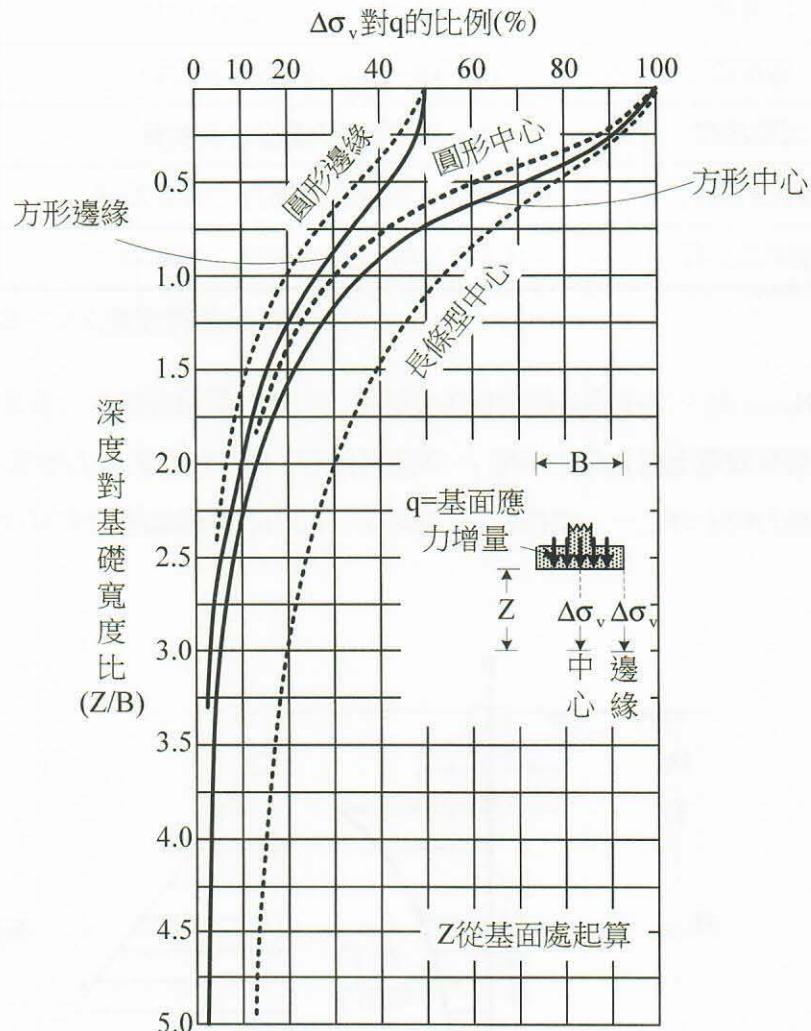


圖 4-15

按照目前我國《建築物基礎構造設計規範》，對於鑽探深度規定如表 4-2。對於孔數規定為「基地鑽探每 600 m^2 鑽一孔。基地面積超過 6000 m^2 者，得視基地地形、地層複雜性及結構設計需求調整調查密度」。5 公頃的基地應鑽幾孔？ $1 \text{ 公頃} = 100 \times 100 \text{ m}^2$
 $5 \text{ 公頃} = 50,000 \text{ m}^2$ ，理論上應鑽 84 孔。

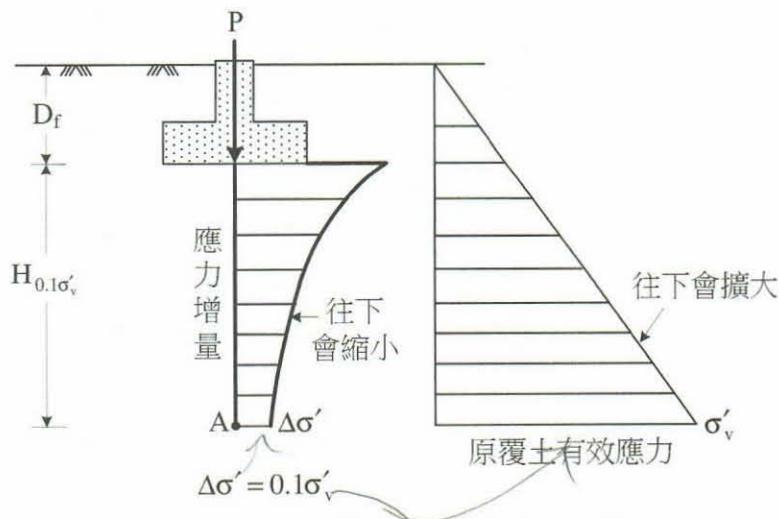
你運動會跑過百米賽跑嗎？一公頃就是 $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ 的面積，約等於一座大學操場面積。

表 4-2

基礎型態	鑽探調查深度
淺基礎	$D_f + 4B$ 或達可確認之承載層
樁基礎	$D_f + 4B$ 或達可確認之承載層
沉箱基礎	$D_f + 3B$ 或達可確認之承載層
浮筏式基礎	$D_f + H_{(0.1\sigma_v')}$ 或達低壓縮性之堅實地層
深開挖工程	$(1.5 \sim 2.5)D_f$ 或達可確認之承載層

※ D_f 是基礎埋置深度， B 是基礎短邊寬

上表裡 $H_{(0.1\sigma_v')}$ 是：浮筏式基礎調查深度應達「因建物載重所產生之垂直應力增量，小於百分之十之地層有效覆土壓力值之深度」，語意可參考下圖，A 點的應力增量，正好等於 A 點原先有效覆土應力的十分之一。鑽探到 A 點以下，應力增量就低於原來有效覆土壓力的十分之一。

圖 4-16 A 點原來覆土有效應力為 σ'_v

壓力球根等應力增量線 $\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 0.1$ 的位置和 $H_{(0.1\sigma_v')}$ 之意義並不同，前者無關土壤原始的有效應力 σ'_v ，後者必須涉及土壤原始的有效應力 σ'_v 。

§4-4 Newmark 應力影響圖 參考 6-1

早年電腦不流行時，利用 Newmark 應力影響圖查應力增量，現在電腦普及，已不用此圖。此圖偶見於作業，考出來的機率相對不大。從公式[4.9]開始整理，

$$\Delta\sigma_z = q \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{3/2}} \right]$$

$$\text{移項得 } \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{3/2}} = 1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q} \quad \text{整理得 } \frac{1}{1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}} = \left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{3/2}$$

$$\text{再整理得 } 1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}} \right)^{2/3}$$

$$\text{最後得 } \frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q} \right)^{-2/3} - 1} \quad [4.10]$$

上式可以簡單看成 $y = \sqrt{(1-x)^{-2/3} - 1}$ ，可輪流令 $x=0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$ ，求出相對應的 y 值，列於下表。 x 是「應力增量比」， y 是「半徑深度比」。

表 4-3

$x=\Delta\sigma_z/q$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y=R/z$	0	0.27	0.4	0.518	0.637	0.766	0.918	1.11	1.39	1.908	∞

此表的意思是：假設地表有圓形面積受均布載重 q 作用，如果想測量圓心下深度 z 點的垂直應力增量 $\Delta\sigma_z$ ，且希望應力增量 $\Delta\sigma_z = 0.2q$ ，則圓形均布載重半徑 R 應為 z 的 0.4 倍。

舉個例子，對工程師來講，他關心在圓心下，何處深度應力增量會是 $0.1q$ 。對於圓形基

礎，從上表來看，當 $x=0.1$ 時， $y=0.27$ ，也就是載重分布半徑 R 為深度的 0.27 倍；反過來講，深度是半徑的 3.704 倍($3.704=1/0.27$)，或說深度是基礎直徑的 1.852 倍，這完全等於圖 4-14 壓力球根的結論。

由表 4-3 可畫出影響圖(Influence Chart)，如下圖，方法是在紙上隨意定一段長度 $\overline{AB}=z$ (z 是你有興趣的深度，你想求該深度的垂直應力增量)，依據表 4-3 的 y 值，畫出半徑 R ($R=y\times z=y\times\overline{AB}$)，就得影響圖的各圓圓周，即 $0.27z$ 、 $0.4z$ 、 $0.518z$ 、…、 $1.908z$ 等九個圓周。其次，從圓心以放射線將每個圓均分成 20 等份， $20\times 10=200$ ，圖內就有 200 個小區域，故稱此圖的影響值(Influence Value, IV)是 0.005($0.005=1/200$)。

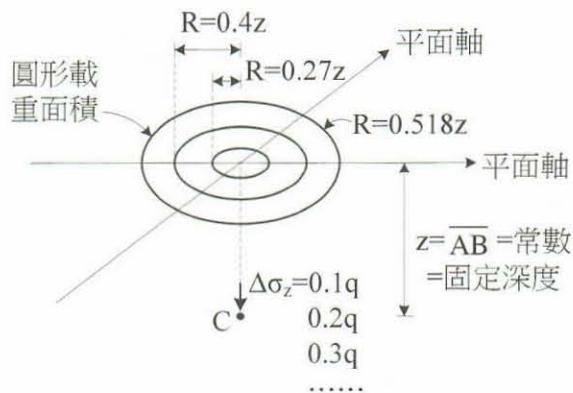


圖 4-16(a)

如果均布載重強度為 q ，載重(基礎面積)佔滿這 200 個格子，將會對圓心下方的 \overline{AB} 深度處產生 $1.0q$ 的應力增量。仔細觀察這 200 個格子，越往外圍格子面積越大，但是載重每佔滿一格，都是對圓心產生 $q/200$ 的應力增量，也就是 $0.005q$ 。如果基礎面積佔滿 28.5 格，將對圓心下方產生 $28.5\times(q/200)$ 的應力增量。

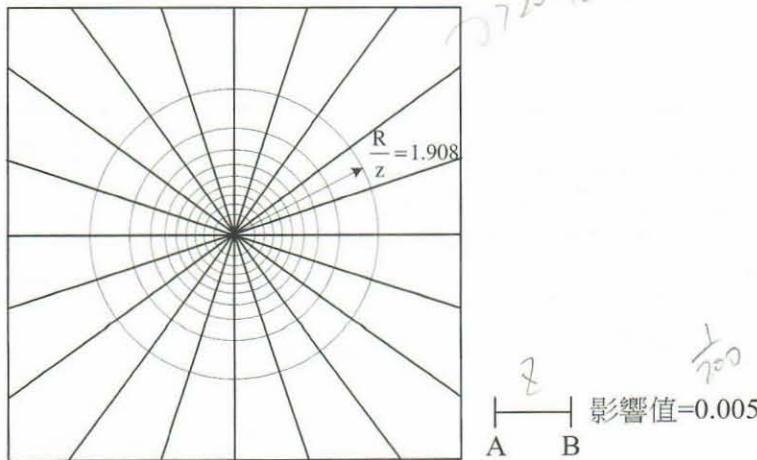


圖 4-17 垂直應力增量之影響圖

如果題目給的圖，總共有 200 小格，則該圖之影響值為 0.005，則求應力增量的公式為

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times q \times M = \frac{\text{所佔格數}}{\text{總格數}} \times q \quad [4.11]$$

其中 q 是基面應力增量， M 是基礎面積所佔據的方格數。

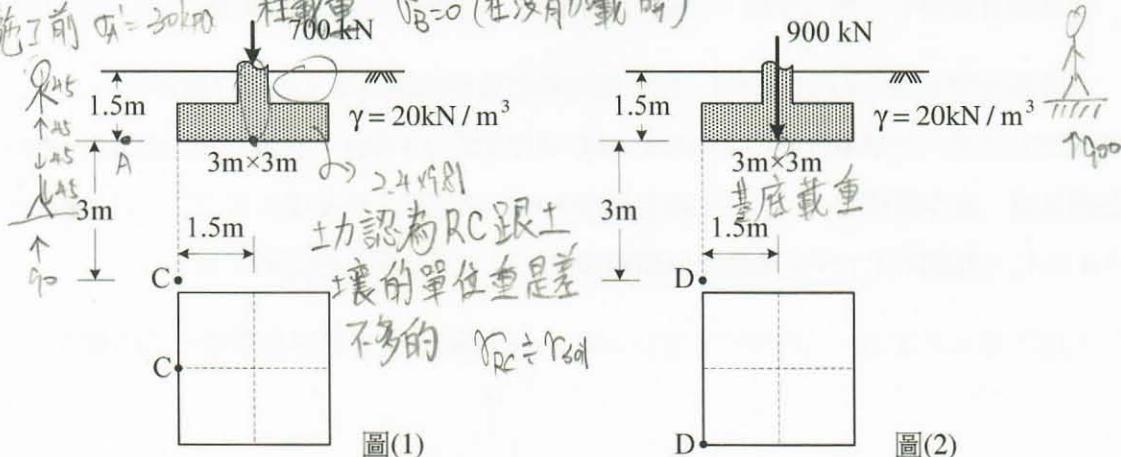
如果題目給的圖，總共有 n 小格，則該圖之影響值 $IV=1/n$ ，則利用該圖求應力增量的公式為 $\Delta\sigma_z = IV \times q \times M$ [4.12]

以下練習一個例題，讀者若想求某一土壤點 C 的應力增量，平面圖裏的 C 點必須放在影響圖的正中央，至於基礎形狀，則未必落在影響圖的正中央。

例 4-4.1 影響圖之應用

有獨立基腳受力如圖(1)與圖(2)，試以本節之影響圖分別求出 C 點及 D 點的垂直應力增量。

~~施工前 $A=30kN$ 柱載重 $B=0$ (在沒有加載時)~~



(1) 參考圖 a，用 \overline{AB} 長度代表 3 公尺，C 點置於影響圖圓心，基腳面積約佔 46 格

基面處有效應力增量 $q = 700/3^2 = 77.778 \text{ kPa}$

$$\Delta\sigma_z = IV \times q \times M = 0.005 \times (77.778) \times 46 = 17.89 \text{ kPa}$$

(2) 用 \overline{AB} 長度代表 3 公尺，基面處有效應力增量 $q = (900/3^2) - 1.5 \times 20 = 70 \text{ kPa}$

D 置於圓心，基腳面積約佔 34.7 格， $\Delta\sigma_z = IV \times q \times M = 0.005 \times 70 \times 34.7 = 12.145 \text{ kPa}$

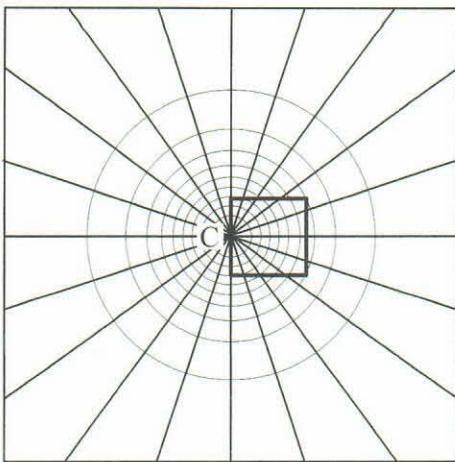


圖 a

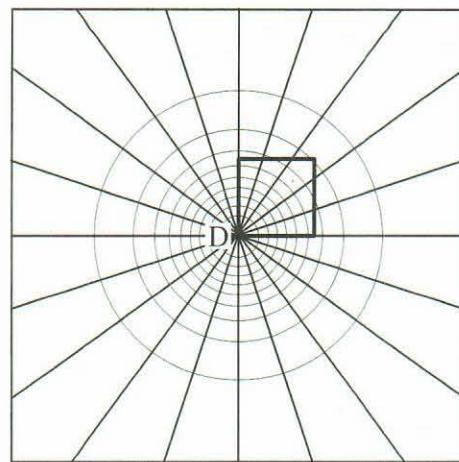


圖 b

討論

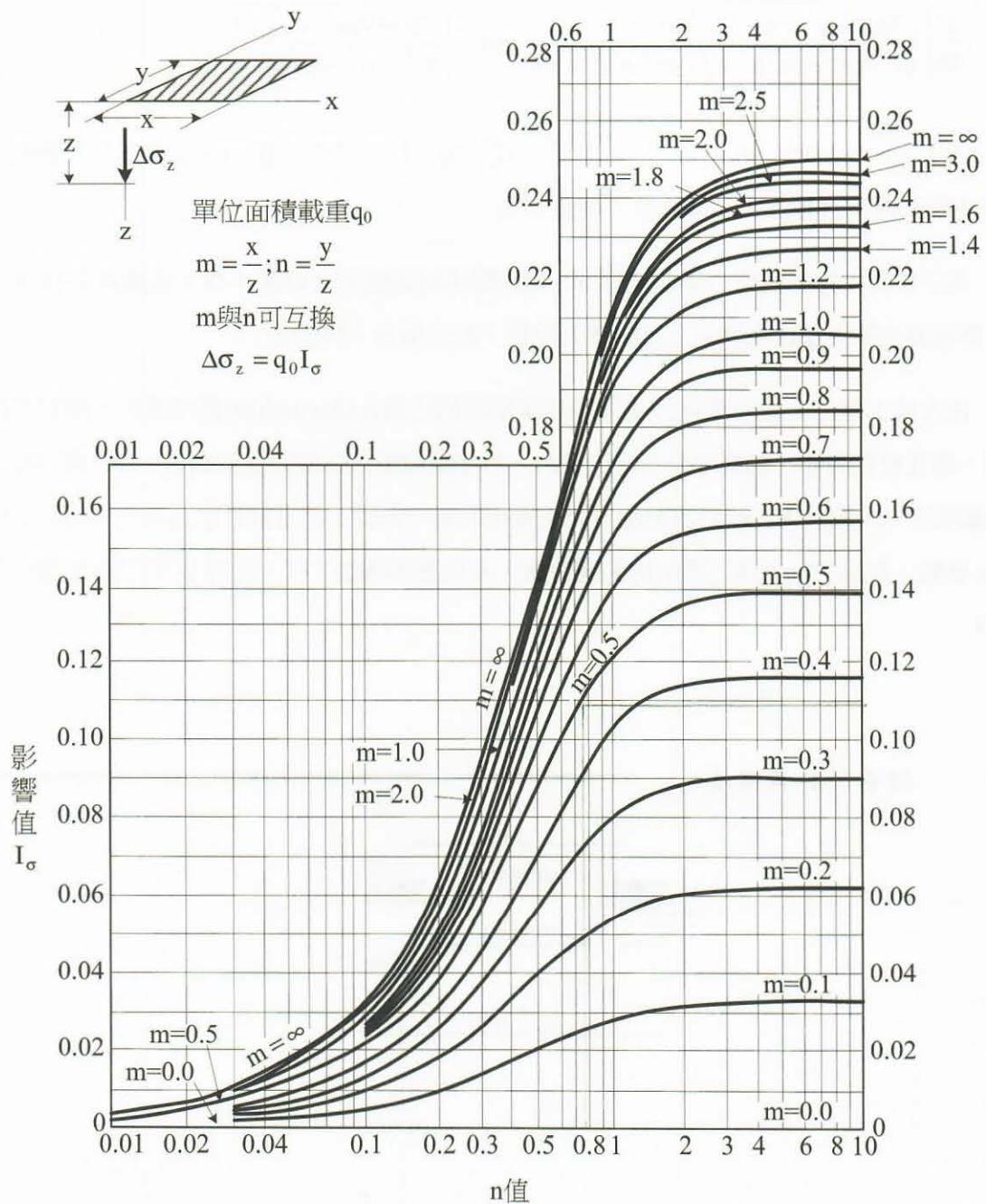
注意題目是要求「應力增量」，係指土壤從施工前(前世)到完工加載後(今生)的應力增量。

一般在大地工程分析及設計時，把土壤的單位重和鋼筋混凝土的單位重視為「差不多」，忽略其間的差異。土壤單位重約 2.0 tf/m^3 ，RC 單位重約 2.4 tf/m^3 ，你要精算其間差異也可以，無法說是錯。除非體積龐大，否則大部分的場合均忽略差異，淺基礎承載力的設計須取安全係數 3.0 以上，相當保守，安全係數足以彌補誤差，故大部分場合均忽略差異。

土壤力學有影響圖，結構學有影響線(Influence Line)，兩者有沒有關係？為什麼？

§4-5 局部面積加載之角隅法 少考6-1 25年1~2次

本節是計算有限面積加載應力增量的算法。考慮圖 4-18，矩形基礎(短邊 x，長邊 y)，承受均布載重 q_0 ，利用 Boussinesq 的解(公式[4.7])，可以積分算出基礎角隅正下方 z 處垂直應力增量 $\Delta\sigma_z$



$$\Delta\sigma_z = \int_{y=0}^{y=L} \int_{x=0}^{x=B} \frac{3z^3(qdxdy)}{2\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = q_0 I_\sigma \quad [4.13]$$

其中無因次之影響值(Influence Value)I_σ=

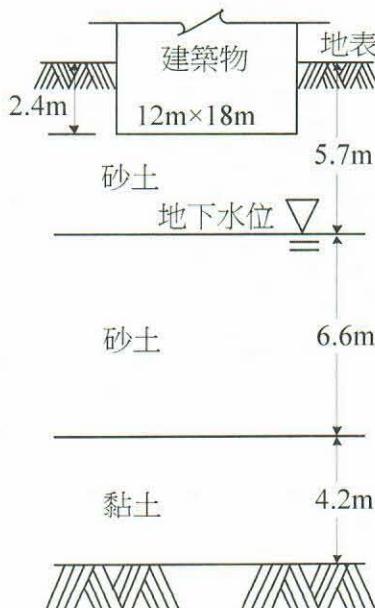
$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1} \left(\frac{m^2 + n^2 + 2}{m^2 + n^2 + 1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{2mn\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}{m^2 + n^2 - m^2n^2 + 1} \right) \right]$$

式中 $m = x/z = B/z$, $n = y/z = L/z$, B 是基礎短邊, L 是基礎長邊。 m 與 n 具有互換性, 也就是 B 與 L 具有互換性, 互換後應力增量不變。

為了便利工程師使用, 將 I_o 值與 m 、 n 的關係製成圖表, 如圖 4-18, 依據圖 4-18 查出 I_o 值, 即可算出矩形基礎角隅正下方的應力增量, 此法稱為「角隅法」。

在大地工程中, 許多複雜公式均被前輩學者們正規化(Normalize)畫成圖表, 便利工程師查圖, 這在材料力學、結構中是非常少見的, 不知道你讀書有沒有這種體會。RC 有沒有正規化的圖呢? 有, 短柱 K_n - R_n 設計曲線。而正規化的第一步驟, 經常就是無因次化, 例如上述的 m 、 n 參數, 無因次化之後, 應用的範圍較廣, 未來讀到基礎工程, 此現象更明顯(如邊坡穩定分析)。

例 4-5.1 角隅法



某一建築物採用底部面積為 $12 \text{ m} \times 18 \text{ m}$ 的鋼筋混凝土筏式基礎, 建築物的靜載重及活載重

在筏式基礎底部對土壤所造成之壓力為 115 kN/m^2 。基礎下方有一飽和黏土層，其單位重為 17.3 kN/m^3 ，含水量為 44%，液性限度為 54。假設地下水位以上、地下水位以下砂土之單位重皆為 18.9 kN/m^3 ，試求出此筏式基礎中央點(center)與角落點(corner)之間，因建物載重造成黏土層壓密沉陷所引致之差異沉陷。

<97年高考三級25分>

(註：原題目附圖 4-18，為簡化計算，解題時建議以黏土層中間點之應力值計算沉陷量即可。)



$$(1) \text{ 黏土層 } Se = wG_s \quad 1 \times e = 0.44G_s$$

$$\text{黏土層 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = 17.3 \quad \Rightarrow \frac{\frac{e}{0.44} + e}{1 + e} \times 9.81 = 17.3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{0.44} + 1 \right) e = \frac{17.3}{9.81} (1 + e) \quad \text{解出 } e = 1.1685$$

$$\text{黏土層中點原先應力 } \sigma'_0 = 5.7 \times 18.9 + 6.6(18.9 - 9.81) + 2.1(17.3 - 9.81) = 183.453 \text{ kPa}$$

$$(2) \text{ 基面應力淨增量 } q_0$$

$$q_0 = 115 - 2.4 \times 18.9 = 69.64 \text{ kPa}$$

$$\text{對於基礎角隅 } m = B/z = 12/12 = 1 \quad n = L/z = 18/12 = 1.5$$

$$\text{查圖得 } I_\sigma = 0.197$$

$$\text{應力增量 } \Delta\sigma_z = q_0 \times I_\sigma = 69.64 \times 0.197 = 13.719 \text{ kPa}$$

假設此黏土為正常壓密黏土(NC clay)

$$\text{黏土層壓縮指數 } C_c = 0.009(LL-10) = 0.009(54-10) = 0.396$$

$$\text{角隅沉陷量 } \Delta H_{corner} = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma_z}{\sigma'_0} = \frac{0.396 \times 420}{2.1685} \log \frac{183.453 + 13.719}{183.453} = 2.4 \text{ cm}$$

對於基礎中央，將版平均割成 4 塊，把「基礎中央」變成各塊角隅

$$m = B/z = 6/12 = 0.5$$

$$n = L/z = 9/12 = 0.75$$

查圖得 $I_\sigma = 0.108$

應力增量 $\Delta\sigma_z = 4 \times q_0 \times I_\sigma = 4 \times 69.64 \times 0.108 = 30.084 \text{ kPa}$

$$\text{中央沉陷量 } \Delta H_{\text{center}} = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma_z}{\sigma'_0} = \frac{0.396 \times 420}{2.1685} \log \frac{183.453 + 30.084}{183.453} = 5.06 \text{ cm}$$

差異沉陷量 = $\Delta H_{\text{center}} - \Delta H_{\text{corner}} = 5.06 - 2.4 = 2.66 \text{ cm} \dots\dots\dots\dots\dots \text{Ans.}$

討論

- 1.「角隅法」顧名思義只能用在角隅，所以要切割面積，把版中央變成角隅。廣大面積加載，地底下各點的總應力增量皆相同；局部面積加載，地底下各點的總應力增量不一定相同。
- 2.以上算的是不同黏土點位之間的差異沉陷，可是若牽涉結構體，想算結構體柱位的差異沉陷，情形就複雜多了。結構版有抗彎勁度，若版是筏基(Mat Foundation)，抗彎勁度就很大，假若版底與版底土壤變形連續，則需考慮雙方彈性係數才能求出版變形。
- 3.壓縮指數 C_c 可於研讀第六章之後再來回顧。
- 4.基礎中央應力增量(30.084 kPa)大於基礎角隅的增量(13.719 kPa)。

§4-6 局部面積加載之概算法

本法也是計算有限面積加載應力增量的算法。前幾節的算法均涉及圖表，特徵是可以算出「某一土壤點」的應力增量。有時圖表無法得到，或題目不提供，只好用概算法算某一深度的「平均應力增量」。

概算法有兩種，一是 2:1(垂直：水平)法，另一是 30°擴散法。

2:1 法，認為基礎面的應力，係以垂直 2: 水平 1 的方式往下傳遞，如圖 4-19，由於越往下方面積越大，所以應力增量越小。若基礎面(尺寸 $B \times L$)的應力增量是 Δq ，則在基面下方深度 z 處的平均總應力增量

$$\bar{\Delta q} = \frac{\Delta q \times B \times L}{(B + z)(L + z)} \quad [4.14]$$

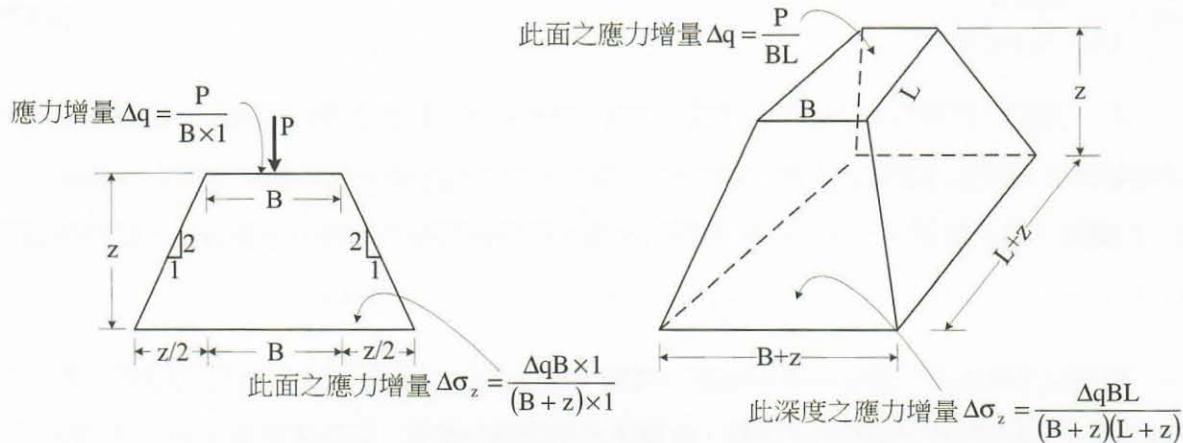


圖 4-19 左圖是條形淺基礎、路堤用

對直徑 B 的圓形基礎，若基礎面的應力增量是 Δq ，則在基面下方深度 h 處的平均總應力

$$\text{增量 } \overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times \frac{\pi}{4} B^2}{\frac{\pi}{4} (B + h)^2} = \frac{\Delta q \times B^2}{(B + h)^2} \quad [4.15]$$

30°擴散法認為基礎面的應力，係以和垂直線夾角 30°的方式向下傳遞，由於越往下方面積越大，所以應力增量越小。若矩形基礎面($B \times L$)的應力增量是 Δq ，則在深度 z 處的總應力增量 $\overline{\Delta q}$ 為

$$\text{增量 } \overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times B \times L}{(B + 2z \tan 30^\circ)(L + 2z \tan 30^\circ)} \quad [4.16]$$

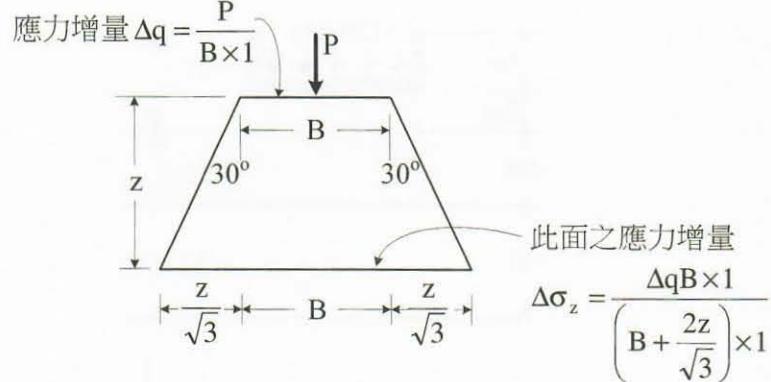


圖 4-20 無限長之條形基礎

對半徑 R 的圓形基礎，若基礎面的應力增量是 Δq ，則在深度 h 處的總應力增量

$$\overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times R^2}{(R + 2h \tan 30^\circ)^2} \quad [4.17]$$

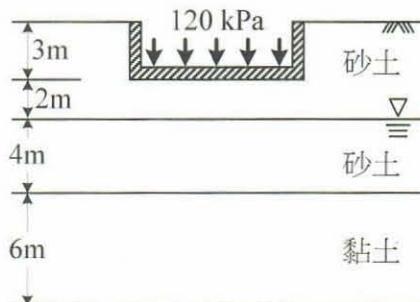
2:1 擴散法相當是以 26.6° 向下擴散，由於 $26.6^\circ < 30^\circ$ ，代表力量作用在較小的面積上，所以前者算出來的應力增量會比 30° 擴散法大。爾後算黏土層的壓密沉陷量較常用 2:1 擴散法。
2:1 擴散法對於基面下 1.0B~4.0B 範圍的土壤，提供尚可接受的應力增量算法，但對基面下 1.0B 內的土壤，算出的應力增量與實際差很多，偏不保守，不宜採用。

概算法乃算出某一深度的平均總應力增量，依此法同一深度的不同點，應力增量一視同仁均相同；角隅法對同一深度的不同點，會算出不同總應力增量。若想求差異沉陷，須依賴角隅法而非概算法。對一矩形筏式基礎，使用 2:1 擴散法，基底面積往下擴散成一「更大矩形」，2:1 擴散法低估了此「更大矩形」中央點的應力增量，但高估了「更大矩形」邊緣點的應力增量。角隅法會算出理論上較正確的應力增量。

例如全班考數學，班上同學分數有高有低，類比成不同土壤點的應力增量有大有小，也就是角隅法會算出各點應力增量不同。2:1 擴散法可說是算出全班平均得分，此平均值一定低估班上最高分，但一定高估班上最低分。

總應力增量=有效應力增量+超額孔隙水壓增量。加載長期後超額孔隙水壓消散完畢，則總應力增量=有效應力增量。

例 4-6.1 應力傳播概算法



某建築物採用底部面積為 $14\text{ m} \times 18\text{ m}$ 的 RC 筏式基礎，建築物的總載重在筏式基礎底部對土壤所造成之壓力為 120 kN/m^2 。基礎下方有一飽和黏土層，試以 2:1 之應力傳播法與 30° 應力傳播法求黏土層中點之總應力增量。設地下水位以上、以下砂土之單位重皆為 19 kN/m^3 。



基面高程處實際應力增量 $120 - 3 \times 19 = 63 \text{ kPa}$

2:1 之應力傳播法

$$\text{黏土層中點之總應力增量 } \Delta\sigma_v = \frac{63 \times 14 \times 18}{(14 + 2 + 4 + 3)(18 + 2 + 4 + 3)} = 25.6 \text{ kPa}$$

30° 應力傳播法

$$\text{黏土層中點之總應力增量 } \Delta\sigma_v = \frac{63 \times 14 \times 18}{(14 + 2 \times 9 \tan 30^\circ)(18 + 2 \times 9 \tan 30^\circ)} = 22.92 \text{ kPa}$$

討論

筏基施工時會挖掉一部分土重，此土重可以「補償」、「置換」掉一部分上部結構重，若挖除土重完全等於後來結構重，則黏土層根本不會有任何應力增量，所以不能直接拿結構重算應力增量，要先算出筏基底面(即基面)的淨應力增量，淨應力增量從筏基底部開始往下 2:1 傳播。

力有三要素，大小、方向、作用點，請特別注意作用點。土力及基礎工程題目會有較多「煙霧彈」，材力及結構較少。請問你，地表廣大面積加載的應力傳遞，需要用 2:1 法來算嗎？

例 4-6.2 應力傳播概算法

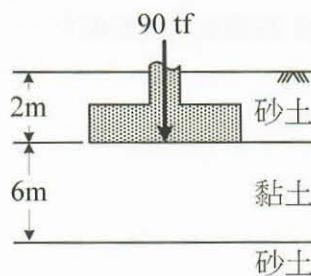


圖 a

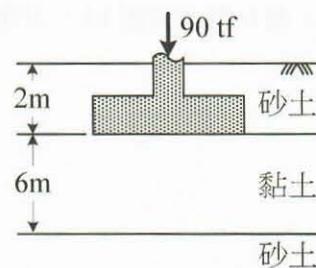


圖 b

有獨立基腳如圖a與圖b，基腳面積均為 $2 \text{ m} \times 2.5 \text{ m}$ ，砂土單位重 2.1 tf/m^3 ，試以 2:1 之應力傳播法求黏土層中點之總應力增量。



$$(1) \text{圖 a 基面處之淨應力增量 } \Delta q = \frac{90}{(2)(2.5)} - 2 \times 2.1 = 13.8 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{黏土層中點之總應力增量 } \Delta \sigma_v = \frac{13.8 \times 2 \times 2.5}{(2+3)(2.5+3)} = 2.51 \text{ tf/m}^2$$

$$(2) \text{圖 b 黏土層中點之總應力增量 } \Delta \sigma_v = \frac{90}{(2+\frac{6}{2})(2.5+\frac{6}{2})} = 3.27 \text{ tf/m}^2$$

討論

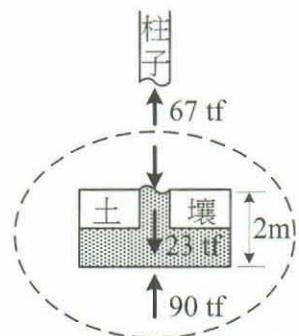


圖 a1 柱荷重 67 tf，版底反力 90 tf

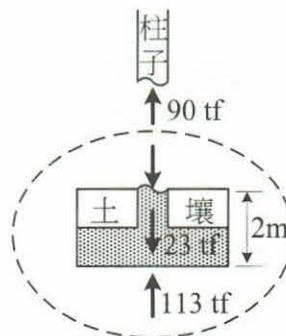


圖 b1 柱荷重 90 tf，版底反力 113 tf

力有三要素：大小、方向、作用點。箭頭作用點不一樣，意義就不一樣。圖 a 是「柱荷重 + 回填土重 + 基腳自重」= 90 tf，圖 b 是柱荷重就已經有 90 tf。對圖 a 來講，柱荷重未達 90 tf。舉例，設圖 a 的柱荷重為 67 tf，回填土加基腳自重為 23 tf，則上部結構與下部結構切分離體後，圖 a 對應到圖 a1，圖 b 對應到圖 b1，可明顯看出圖 b1 的載重狀況較嚴苛。

§4-7 靜止土壓力係數 K_0

前幾個小節，算的都是垂直方向土壓力，可是土壤在地底，水平方向也存在土壓力，稱為側向土壓力(Lateral Earth Pressure)，側向土壓力怎麼算？

側向土壓力的大小，受土壤側向應變大小影響。如果土壤側向受到地殼板塊運動或人為的嚴重推擠，側向土壓力就會大幅上升；如果土壤側向受到地殼開裂、水流沖刷或人為的解壓，側向土壓力就會大幅下降。這兩種狀況我們暫時不討論。

現在討論土壤在廣大面積自然沉積的環境，且僅受上方覆土重壓縮下，當土壤上方的覆土應力(Overburden Earth Pressure)完全傳遞到土壤微素，定義靜止土壓力係數(Coefficient of Earth

$$\text{Pressure at Rest}) K_0, K_0 \equiv \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v} \quad [4.18]$$

其中 σ'_v 是微素垂直向所受的有效應力， σ'_h 是微素水平向所受的有效應力，注意 K_0 必須以有效應力定義，不可用總應力定義。從 $\sigma'_h = K_0 \sigma'_v$ 來看， K_0 宛如沒有單位的「轉換係數」，負責把垂直向的有效應力轉換成水平向的有效應力。

廣大面積自然沉積有個特色，考慮到水平向的變形對稱，土壤微素水平向無法伸張也無法壓縮，也就是 $\epsilon_h = 0$ ，但垂直向會存在應變。

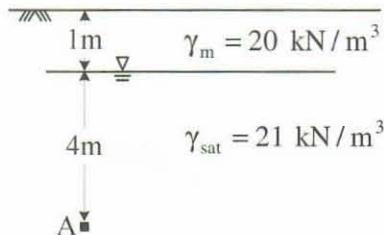
一般土木工程遇到的表土， K_0 範圍是 $0 < K_0 < 1$ ，這代表同深度的水平應力會比垂直應力小。如果有甲、乙兩地，甲地 $K_0=0.7$ ，乙地 $K_0=0.5$ ，我們能從這兩個數據讀出甲、乙兩地有什麼力學上的不同，施工上要注意什麼？ K_0 大，代表側向土壓力比較大，代表土壤比較軟弱，自立性不佳，自己站不住，嚴重地倒在隔壁鄰居身上，所以對鄰居造成很大的側推力。 K_0 小，代表側向土壓力比較小，代表土壤比較堅強，自立性佳，自己就站得住，不太需要靠隔壁鄰居攬扶，所以對鄰居造成很小的側推力。從以上觀之，在自然沉積前提下，甲地土壤較軟弱，若對其開挖，擋土壁體必須設計得較厚，支撐間距必須較緊密，甲地土壤的承載能力可能較不夠。

許多大樓地下室以筏基當基礎，筏式基礎施工時須開挖土壤，一旦解壓就破壞了靜止土壓力狀態。筏基完工且大樓使用數年後，一般工程上認為地下室外牆受內部樓版與梁撐著，幾乎不退縮變形，故地下室外牆所貼的土壤，又逐漸地回到靜止土壓力狀態，所以長期後地下室外

牆所受的土壓力，可以用靜止土壓力估計。

例 4-7.1 求側向土壓力

有土層剖面如圖所示，已知現場 $K_0 = 0.45$ ，求 A 點之側向總應力。



$$\sigma'_v = 1 \times 20 + 4(21 - 9.81) = 64.76 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.45 \times 64.76 = 29.142 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 29.142 + 4 \times 9.81 = 68.382 \text{ kPa}$$

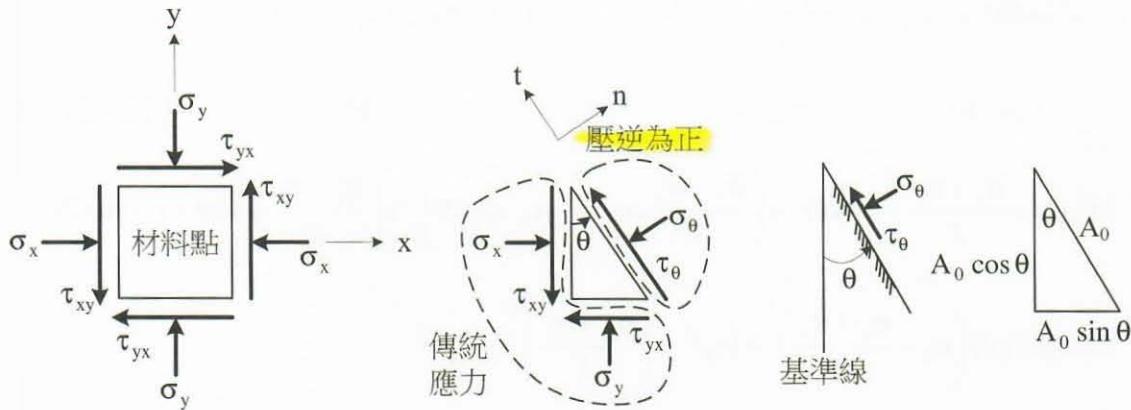
討論

1. 靜止的水，水中某一點，四面八方水壓力皆相等。
2. 側向總應力 = 側向有效應力 + 水壓力。
3. 只有不存在水時，才成立側向總應力 = $K_0 \times$ (垂直向總應力)。

§4-8 應力轉換與莫爾圓

此節觀念來自材料力學，旨在求一受力的材料微素，於不同平面上之應力大小。應力大小和平面傾斜角度有關，應力大小和角度的關係稱為應力轉換公式。應力轉換公式是人發明的，不是神規定的，不同人對於應力正負規定不同、對於符號法則規定不同，對於畫圓時座標軸的正方向規定也不同，導出來的公式就略有不同。但是，每套規定要內在自我諧和(畫圖方法與數學式的調和)。您多翻一些原文書，至少可以找到 5 種不同的公式與畫圖法。本書符號法則和 Das 的土力規定並不相同，您也可以發明自己的一套，自己要負責做到內在諧和。

建議您背一套符號法則(Sign Convention)、公式與畫圖法就好。定義各符號的正方向如圖 4-21 到圖 4-23 所示，本書定義壓應力為正。注意 $\theta=0^\circ$ 是指鉛垂線，鉛垂線稱為基準線， θ 以逆時針轉為正，圖 4-23 之 τ_θ 以繞微素逆時針轉為正，推導公式時，各物理量請畫在正方向。

圖 4-21 $+\tau_{xy}$ 的判讀圖例圖 4-22 $+\sigma_x$ 、 $+\sigma_y$ 判讀圖例圖 4-23 $+\sigma_\theta$ 、 $+\tau_\theta$ 判讀圖例圖 4-24 τ_θ 正負判讀圖例，畫莫爾圓時可使用(τ_{xy} 不適用)

σ_θ 以壓應力為正，對圖 4-22 建立 $\sum F_n = 0$

$$\Rightarrow \sigma_\theta A_0 + \tau_{xy} A_0 \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} A_0 \cos \theta \sin \theta = \sigma_x A_0 \cos^2 \theta + \sigma_y A_0 \sin^2 \theta$$

因 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，又 A_0 可約掉，其餘依恆等式 $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ 、 $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ 、

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{，化簡可得 } \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad [4.19]$$

對圖 4-22 建立 $\sum F_t = 0$

$$\Rightarrow \tau_\theta A_0 + \tau_{yx} A_0 \sin^2 \theta + \sigma_y A_0 \cos \theta \sin \theta = \tau_{xy} A_0 \cos^2 \theta + \sigma_x A_0 \cos \theta \sin \theta$$

因 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， A_0 可約掉，餘依前述國中的三角恆等式，化簡可得

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

[4.20]

公式[4.19]與[4.20]構成圓方程式，推導如下：

$$\text{將 } ①^2 + [4.20]^2 \quad \text{等號左邊平方} + \text{等號左邊平方} = \text{等號右邊平方} + \text{等號右邊平方}$$

$$\text{得} \left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{\theta})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right)^2$$

$$\text{展開整理得} \left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{\theta})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

$$\text{令圆半径 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\text{則得} \left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{\theta})^2 = R^2$$

此為高中明顯的圓方程式

令 σ_x 代表水平座標軸，向右為正； τ_y 代表垂直座標軸，向上為正，圓心落在 $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ 。

畫圓時剪應力符號“ τ_0 ”以逆時針為正，順時針為負。

土體裡剪應力為零的平面，稱為主平面(Principle Planes)，作用在主平面的正向應力，稱為主應力(Principle Stresses) σ_1 、 σ_3 。微素所承受的最大剪應力 τ_{max} ，就是應力莫爾圓半徑 R 。

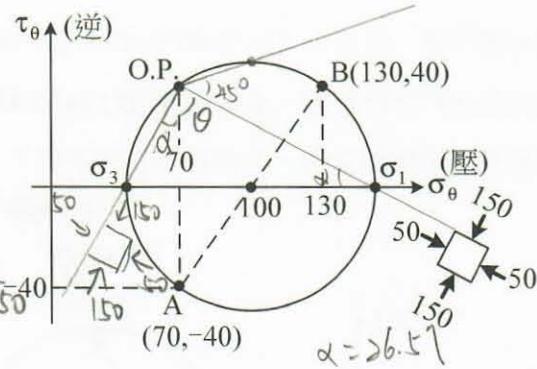
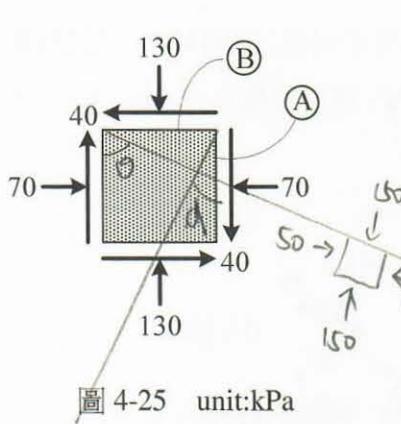
$$\text{最大剪應力 } \tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + (\tau_{xy})^2 \quad [4.21]$$

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \text{圓心座標} + R \quad [4.22]$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \text{圓心座標} - R \quad [4.23]$$

以「順逆為正」，符號法則畫應力莫爾圓，考慮如圖 4-25 的土壤微素，A 面承受壓應力 70

kPa，B 面承受壓應力 130 kPa，微素四周圍剪應力大小 40 kPa。符號法則見圖 4-24，A 面的剪應力係繞微素四周順時針轉，故畫到莫爾圓上須取負數；B 面的剪應力係繞微素四周逆時針轉，故畫到莫爾圓上須取正數。換言之，A 面畫到圓周變成 A 點，A 點為(70,-40)；B 面畫到圓周變成 B 點，B 點為(130,40)。A、B 兩面相夾 90°，畫到圓周上就相差 180°，故圓周 A、B 兩點拉直線就成為直徑，直徑交橫軸於圓心 σ_{avg} ， $\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 100$ kPa。



$$\text{最大剪應力 } \tau_{max} = \text{半徑 } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \sqrt{\left(\frac{70 - 130}{2}\right)^2 + (-40)^2} = 50 \text{ kPa}$$

$$\text{最大主應力 } \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \text{圓心位置} + R = 100 + 50 = 150 \text{ kPa}$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \text{圓心位置} - R = 100 - 50 = 50 \text{ kPa}$$

主應力狀態微素繪於圖 4-26，150 kPa 應力的作用面和水平面夾角為 26.57°。因為觀察圓內有一直角三角形，其銳角角度 = $\tan^{-1} \frac{40}{\sigma_1 - 70} = 26.57^\circ$ 。

圓周上有一特殊點叫「平面原點」(Origin of Plane, O.P.)，或稱極點(Pole)，從 O.P. 往平面內任何方向畫直線，交圓周於另一點，此「另一點」的橫、縱座標值($\sigma_\theta, \tau_\theta$)就是平行該直線的平面之受力狀態。一個莫爾圓，只有一個 O.P.。

圖 4-25 的微素，A 平面是鉛垂面，所以從圓周上的 A 點拉鉛垂線，就會交圓周得 O.P.。

這種求 O.P. 的方法，就是反過來利用上一段話 O.P. 的特性以求 O.P.。請讀者嘗試用微素水平面 B 來求 O.P.，你應該殊途同歸，百川歸海，萬流歸宗。

欲了解更多應力轉換與莫爾圓知識，請參考《材料力學論衡》。在材料力學題目案例裏，平面應力狀態居多；在土力與基礎工程題目案例裏，平面應變狀態居多。土壤力學很少單獨考應力轉換與莫爾圓(那就像材力考題囉)，故介紹到此。

某土體微素之應力莫爾圓，給定 O.P. 如圖 4-27，問圖 4-27 的 C 點、D 兩點橫、縱座標值，其意義是什麼？答：與水平方向夾 60° 的 C 平面，承受正向應力 100 kPa，承受剪應力 50 kPa；與水平方向夾 30° 的 D 平面，承受正向應力 143.3 kPa，承受剪應力 25 kPa。請一定要會，因為有人讀到第七章強度線之後，就很神奇忽然不會了。

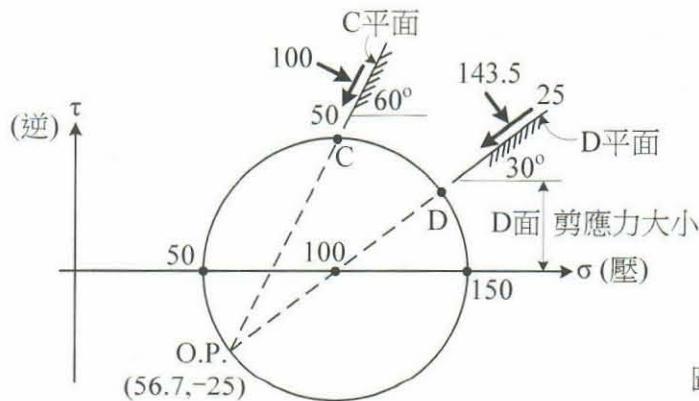


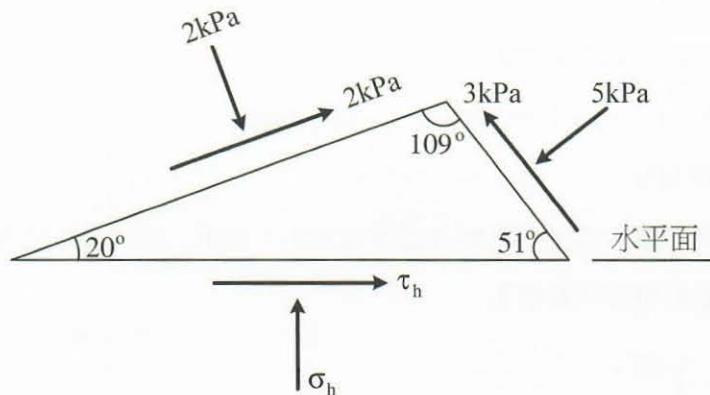
圖 4-27 unit: kPa

至於 C、D 兩平面會不會被應力剪壞？目前無法得知，因為無莫爾-庫侖破壞準則資訊。

表 4-4 土力、材力公式比較

符號法則	應力轉換公式外觀	畫莫爾圓細節
土力用壓逆為正	$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$ $\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$	正向應力軸，向右為壓應力。剪應力軸，向上為逆時針剪應力。
材力用拉逆為正	$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$ $\tau_\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$	正向應力軸，向右為拉應力。剪應力軸，向下為逆時針剪應力。

例 4-8.1 基本練習



某土壤單元承受之應力狀況如圖所示：

<93年結構技師>

- (一) 試求此土壤單元水平面承受之正應力 σ_h 及剪應力 τ_h 的大小。(9分)
(二) 試求最大主應力 σ_1 及最小主應力 σ_3 的大小及作用方向(與水平面的夾角)。(8分)
(三) 試求最大剪應力 τ_{max} 及最小剪應力 τ_{min} 的大小及作用方向(與水平面的夾角)。(8分)



(一) 參考圖 a, $\alpha = 39^\circ$, $\beta = -70^\circ$

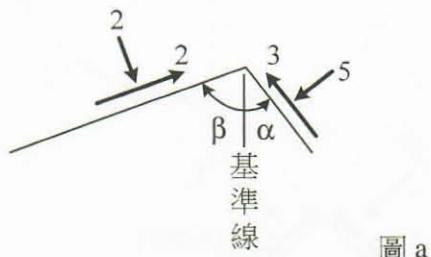


圖 a

$$\Rightarrow \sigma_x = 5 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 78^\circ - \tau_{xy} \sin 78^\circ \quad \dots \dots \dots \text{①}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\beta} = 2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(-140^\circ) - \tau_{xy} \sin(-140^\circ) \dots \dots \dots \text{②}$$

$$\text{依 } \tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\text{依 } \tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \tau_\alpha = 3 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 78^\circ + \tau_{xy} \cos 78^\circ \dots\dots\dots \text{③}$$

$$\Rightarrow \tau_\beta = -2 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(-140^\circ) + \tau_{xy} \cos(-140^\circ) \dots\dots\dots \text{④}$$

以上四式，任取三式聯立解出

$$\sigma_x = 7.424 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = 1.287 \text{ kPa}, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma_y = 1.287 \text{ kPa}, \quad \tau_h = \tau_{xy} = 0 \text{ kPa}$$

【題圖給三角形微素的三內角與各邊應力大小，如果三內角角度無誤，則應力值僅是四捨五入後的近似值而非真值】

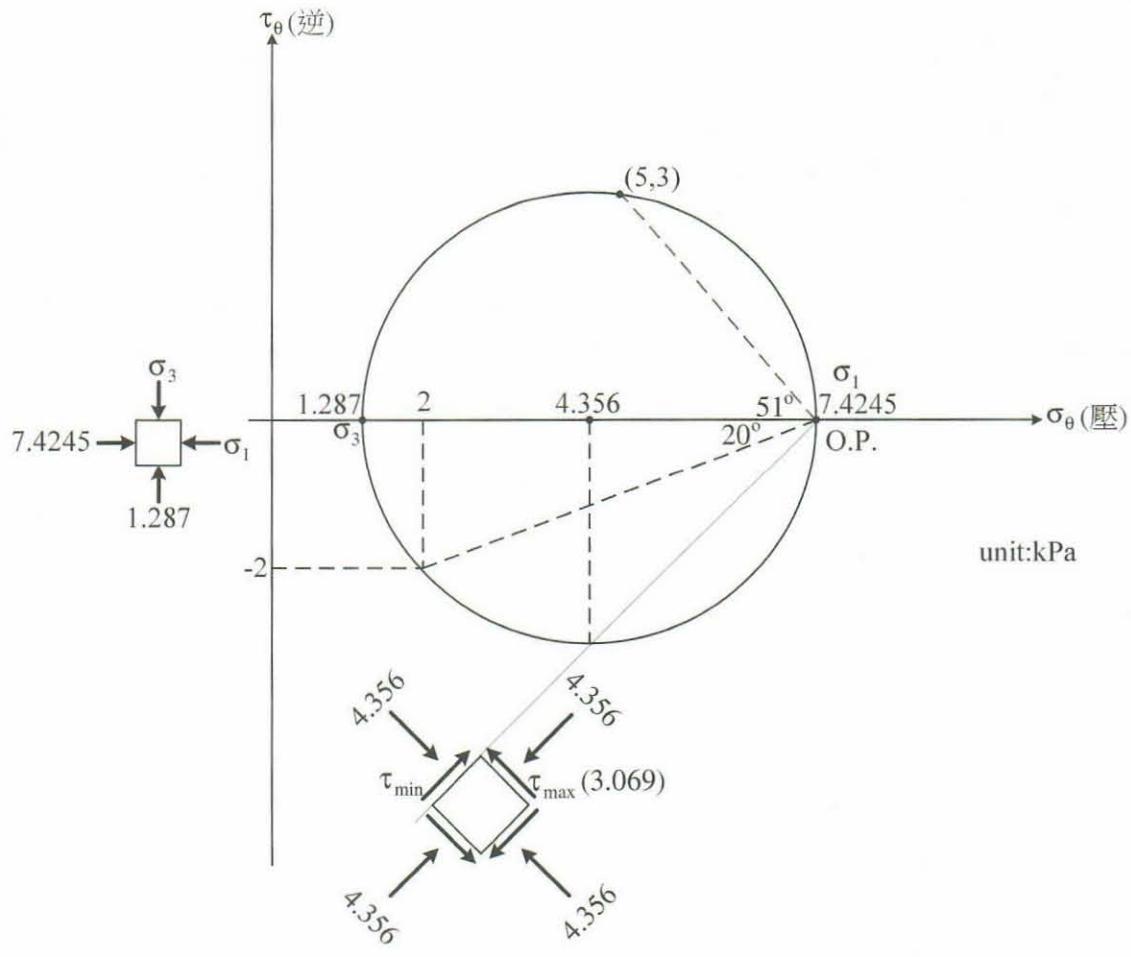


圖 b

$$(二) \because \tau_{xy} = 0 \text{ kPa}$$

$$\therefore \text{最大主應力 } \sigma_1 = \sigma_x = 7.424 \text{ kPa} \quad \text{應力箭頭與水平線夾 } 0^\circ$$

最小主應力 $\sigma_3 = \sigma_y = 1.287 \text{ kPa}$

應力箭頭與水平線夾 90°

最大剪應力 $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 3.0685 \text{ kPa}$

(三) 應力莫爾圓如圖 b

最大剪應力 τ_{\max} 及最小剪應力 τ_{\min} 的方向(與水平面的夾角)示於圖 b 內，俱為 45° ，但方向不同。

討論

- 有的書籍畫應力莫爾圓時， τ_θ 軸朝下為正，有的則是朝上為正，考生不要誤以為哪本書錯了，還必須比較雙方符號法則才能判定。您去圖書館找 10 本原文書，搞不好可以看到 5 套以上的符號法則與畫圖方法。建議考生背一套符號法則及其對應的畫圖方法，這樣您的解題方法就內在自我諧和不矛盾，千萬不要胡亂搭配甲老師符號法則與乙老師的畫圖方法。
- 注意本書 θ 的起算線是鉛垂線，以逆時針轉為正。筆者最常被問的問題就是考生拿另一本「起算線是水平線」的書，劈頭就問「為什麼結果不一樣？哪裡錯了？」拜託，請先觀察公式建立前提，再來討論結論。
- 一圖勝千言萬語，閱卷者不一定了解您用的符號法則，難以判定您數學式的正確。繳卷時，圖 b 務必畫出，萬流歸宗，閱卷者一看就懂。
- 本題兩傾斜面相夾 109° ，莫爾圓裡對應的圓心角就是 218° 。
- $(5,3)$ 及 $(2,-2)$ 兩點落於圓周上，從圓心到這兩點的距離相等，設圓心座標為 σ_0 ，由 $R=R$ 得 $\sqrt{(5-\sigma_0)^2 + 3^2} = \sqrt{(\sigma_0-2)^2 + (-2)^2}$ ，解出 $\sigma_0=4.333 \text{ kPa}$ ，看不懂要速購買《材料力學論衡》。圓半徑 $R=\sqrt{(5-\sigma_0)^2 + 3^2} = 3.073 \text{ kPa}=\text{最大剪應力 } \tau_{\max}$ 。 $\sigma_1=\sigma_0+R=7.407 \text{ kPa}$ ， $\sigma_3=\sigma_0-R=1.26 \text{ kPa}$ 。數據與題解不同，是因為題目數據略有矛盾。
- 求最大剪應力？最小剪應力？命題者對力學的體會實在不深。剪應力符號法則的規定影響什麼叫最大、什麼叫最小。舉例：台大教授和成大教授對剪應力不同的規定，可能使得最大變最小、最小變最大，考場來自各校的畢業生都有，這卷要怎麼改？對力學體會深的人知道：對於剪應力，吾人關心它的「大小」而非方向，也就是關心它的

絕對值而非正負號。能不能剪動土壤，是看剪應力大小而非方向，詳情看《材料力學論衡》第九章。被這種題目考到，記得於期限內向考選部反映試題疑義。

7. 正剪力必須造成正剪應力？還是正剪力必須造成負剪應力？這是人為規定的範疇，還是上帝規定的範疇？請回頭看看材料力學書籍，正剪力和正剪應力是各自獨立規定，還是連動規定？
8. 剪力及剪應力的正負是人定義，不是上帝定義。所以正剪力「不一定」造成正剪應力，要看定義過程。目前土木系流行的材力原文書，正剪力和正剪應力各自獨立規定，故有時須以負號調和公式。筆者看過一本應用力學原文書，它把正剪力和正剪應力做連動規定，這不是錯，就只是一種人為規定而已，就像日本、英國規定靠左邊開車。
9. 莫爾圓圓周上任何一點的高度(縱座標值 τ_0)，就是土體某一平面承受的剪應力，不是土體強度。莫爾-庫倫破壞包絡線任一點的高度(τ_f)，物理意義是強度，不是作用應力，部分考生學完兩者，竟整體混亂…？？第七章讀完你就知道。
10. 學完第七章你就知道下表是什麼意思。

	畫出應力莫爾圓與 O.P.	畫出強度線($\tau_f = c + \sigma \tan\phi$)
可以	可以幫你求土體任一平面承受的正向應力與剪應力 (σ_0, τ_0)大小。	可以幫你檢驗(σ_0, τ_0)這組應力，是否造成土體破壞。
沒辦法	沒辦法幫你檢驗(σ_0, τ_0)是否造成土體破壞。	沒辦法幫你求土體任一平面承受的正向應力與剪應力大小。

11. 可建立 $\Sigma F_x = 0$ 以及 $\Sigma F_y = 0$ ，解 σ_h 與 τ_h 。

按正弦定律 $\frac{1}{\sin 109^\circ} = \frac{A_1}{\sin 51^\circ} = \frac{A_2}{\sin 20^\circ}$

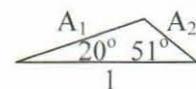
得 $A_1 = 0.82193$ $A_2 = 0.36173$

$\Sigma F_x = 0$ $\tau_h (1) + 2A_1 \cos 20^\circ + 2A_1 \sin 20^\circ = 3A_2 \cos 51^\circ + 5A_2 \sin 51^\circ$

解出 $\tau_h = -0.01844 \text{ kPa} \approx 0 \text{ kPa}$

$\Sigma F_y = 0$ $\sigma_h (1) + 2A_1 \sin 20^\circ + 3A_2 \sin 51^\circ = 2A_1 \cos 20^\circ + 5A_2 \cos 51^\circ$

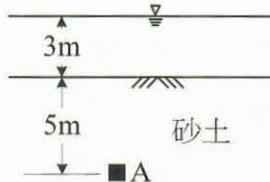
解出 $\sigma_h = 1.2774 \text{ kPa} (\uparrow)$



§4-9 歷年考題精選

練 1 基本計算

如圖所示砂層，水位位於地表上 3 m，土壤比重 $G_s=2.65$ ，孔隙比 $e=0.7$ ，請問地表下 5 m 處 A 點的總應力、水壓力與有效應力的值。後因某原因水位降至地表面，請問地表下 5 m 處 A 點的總應力、水壓力與有效應力的值為何？有效應力會增加嗎？ <改編成大土研 15 分>



$$(1) \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.7}{1 + 0.7} \times 9.81 = 19.33 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{A 點的總應力 } \sigma_A = 3 \times 9.81 + 19.33 \times 5 = 126.08 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的水壓力 } u_w = (3 + 5) \times 9.81 = 78.48 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的有效應力 } \sigma'_A = 126.08 - 78.48 = 47.6 \text{ kPa}$$

$$(2) \text{降水後 A 點的總應力 } \sigma_A = 19.33 \times 5 = 96.65 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的水壓力 } u_w = 5 \times 9.81 = 49.05 \text{ kPa}$$

$$\text{A 點的有效應力 } \sigma'_A = 96.65 - 49.05 = 47.6 \text{ kPa} \quad (\text{有效應力不變動})$$

討論

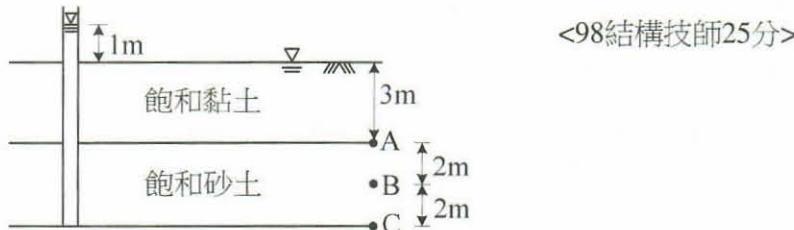
降水前，土壤內沒有滲流，水位升降若在地表上發生，則會影響地表下總應力與水壓力，但有效應力不受影響。水位升降若在地底下發生，則會影響地底下總應力、水壓力與有效應力。在此例學習到：沒有滲流的前提下，地表面上的降水，造成土壤總應力的減少量=水壓力的減少量，故有效應力不變。

在雙向度的滲流問題(見第五章)當中，版樁隔開上下游水位，土壤中有滲流，上下游水位高度差若有變化，會影響土壤中的總應力、水壓力與有效應力。上下游水位高度差若大，某些點的有效應力甚至降為零，形成砂湧(Sand Boiling)。

第四章討論土壤受力之後內部的應力，為何不像材料力學用 $\sigma = \frac{P}{A} + \frac{My}{I}$ 或 $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ 之類的公式來算？你要在各科之間作橫向理解、腦內溝通，才能成為真正榜首。前述兩公式用於均質均向連續體材料製成的桿件，而土壤非均質非均向，孔隙又多，很難被視為連續體，幾乎不能被製成桿件，這樣一來，如何定義斷面？主軸？前述兩公式用於線彈性狀態，土壤的線彈性區實在太小，受力容易進到塑性區，不符公式使用前提。另外，土壤變形不太可能「平面保持平面」。推導材力公式時，有「變形諧和」之要求，即材料不斷裂，受力不產生孔隙，但土壤受力，原先的孔隙可能變大或變小，不符「變形諧和」之要求。且土壤難有所謂的 M-D、V-D、轉角、曲率…，拋磚引玉，還有沒有？

練 2 基本計算

某地層由飽和黏土層及下方之砂土層組成，地下水位於地表面。黏土之含水量 $w = 30\%$ ，孔隙比 $e = 0.8$ ；砂土之土粒比重 $G_s = 2.65$ ，含水量 $w = 18.5\%$ 。砂土層為一受壓水層，經由置於砂土層底部之水壓計測得該點之水頭高於地表面 1.0 m ，如圖所示。試分別求砂土層之頂部、中間、底部，即 A、B、C 三點處之孔隙水壓力及垂直向總應力與有效應力。



$$\text{按 } Se = wG_s$$

$$1 \times 0.8 = 0.3 \times G_s$$

$$\text{解出 } G_s = 2.667$$

$$\text{黏土 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.667 + 0.8}{1 + 0.8} \times 1 = 1.926 \text{ tf/m}^3$$

$$\text{按 } Se = wG_s$$

$$1 \times e = 0.185 \times 2.65 = 0.49025$$

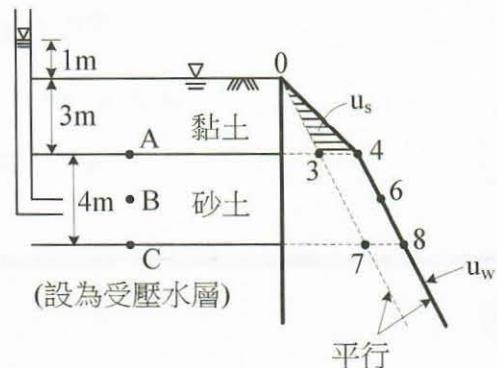
$$\text{砂土 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.49025}{1 + 0.49025} \times 1 = 2.107 \text{ tf/m}^3$$

水壓力分布如圖，單位 tf/m^2

A 點垂直總應力 $\sigma_A = 3 \times 1.926 = 5.778 \text{ tf/m}^2$

水壓力 $u_A = 4 \text{ tf/m}^2$

有效應力 $\sigma'_A = 5.778 - 4 = 1.778 \text{ tf/m}^2$



B 點垂直總應力 $\sigma_B = 5.778 + 2 \times 2.107 = 9.992 \text{ tf/m}^2$

水壓力 $u_B = 6 \text{ tf/m}^2$

有效應力 $\sigma'_B = 9.992 - 6 = 3.992 \text{ tf/m}^2$

C 點垂直總應力 $\sigma_C = 5.778 + 4 \times 2.107 = 14.206 \text{ tf/m}^2$

水壓力 $u_C = 8 \text{ tf/m}^2$

有效應力 $\sigma'_C = 14.206 - 8 = 6.206 \text{ tf/m}^2$

	總應力	水壓力	有效應力
A	5.778	4	1.778
B	9.992	6	3.992
C	14.206	8	6.206

unit : tf/m^2

討論

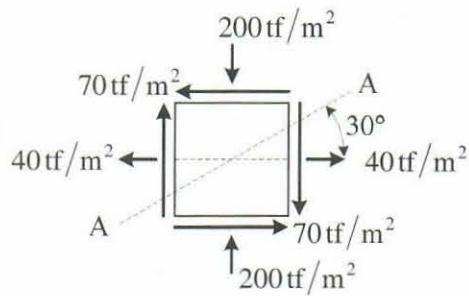
本題重點在於能不能畫出水壓力分布圖。黏土層有向上的滲流水壓力 u_s ，為三角形分布。水壓計的水平段對準 B 點或對準 C 點，水壓計的靜態液面都是在地表上 1.0 m 處。

筆者覺得力學素養真正提高時，一定會(自動)連帶把人文素養提高。筆者認為力學是奠基於人文素養上。

土壤和岩石相比，岩石常為「不連續體」，力學分析上土壤常被視為連續體(雖然悖離真實)，岩石的鉛垂向應力通常不是最大主應力，而自然沉積土壤通常是

練 3 應力轉換與莫爾圓

下圖所示為某元素所承受之應力系統，試求作用在 A-A 平面上之應力。<高考一級 20 分>

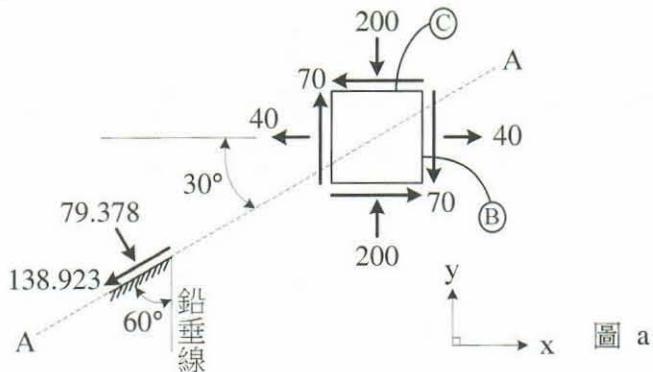


依據「壓逆為正」系統解題

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{-40 + 200}{2} + \frac{-40 - (200)}{2} \cos(-60^\circ \times 2) - (-70) \sin(-60^\circ \times 2) \\ &= 80 - 120 \cos(-120^\circ) + 70 \sin(-120^\circ) = 79.378 \text{ tf/m}^2 \quad (\text{壓應力})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= \frac{-40 - 200}{2} \sin(-120^\circ) + (-70) \cos(-120^\circ) \\ &= -120 \sin(-120^\circ) - 70 \cos(-120^\circ) = 138.923 \text{ tf/m}^2\end{aligned}$$

作用在 A-A 平面之應力，如圖 a。



討論

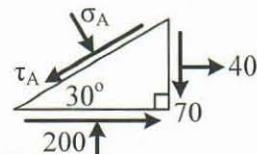
- 不同的書籍，應力轉換公式不同，閱卷老師不曉得你背哪一套公式，也不知道你剪應力的正負號代表什麼方向，所以答案中，宜把 A-A 斜面畫出，將答案畫在斜面上，一圖勝千言萬語，避免發生誤會。

2. 注意本題應力轉換公式的 $\theta = -60^\circ \neq 60^\circ$ 。

3. 參考右圖，設斜邊面積為 1，

使用水平力與垂直力平衡，

$$\text{解出 } \sigma_A = 79.378 \text{ tf/m}^2(\text{壓}), \tau_A = 138.923 \text{ tf/m}^2$$



4. 根據筆者《材料力學論衡》第十章，「拉逆為正」的應力轉換公式如下：

今欲將前述兩公式轉換成「壓逆為正」，方法如下：

因正向應力定義改變，故所有正向應力均前乘-1；剪應力定義沒改變，不前乘-1。由

① 改得

$$-\sigma_{\theta} = \frac{(-\sigma_x) + (-\sigma_y)}{2} + \frac{(-\sigma_x) - (-\sigma_y)}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

整理得

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \dots \quad \text{③}$$

由②得

$$\tau_{\theta} = \frac{(-\sigma_y) - (-\sigma_x)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

整理得

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \dots \quad \text{.....(4)}$$

③與④式，即是「壓逆為正」符號法則下的應力轉換公式。

本題若以「壓逆為正」的應力莫爾圓圖解，如下

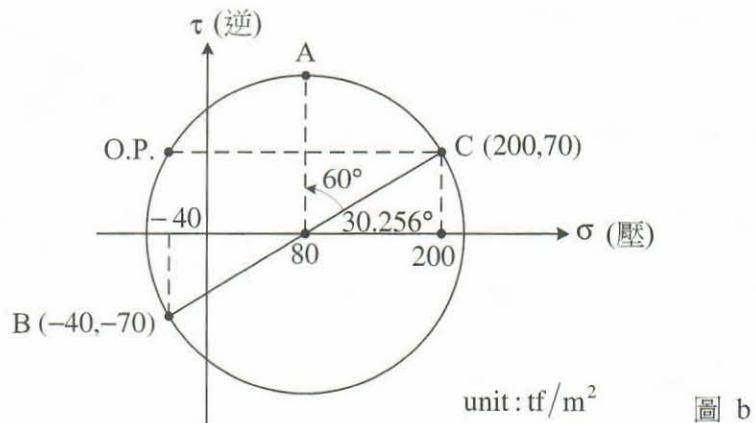
$$\text{應力莫爾圓半徑 } R = \sqrt{\frac{200 - (-40)}{2}^2 + 70^2} = \sqrt{120^2 + 70^2} = 138.924 \text{ tf/m}^2$$

$$A \text{ 細綫座標 } \tau_{\theta} = R \sin(30.256^\circ + 30 \times 2) = 138.924 \sin 90.256^\circ = 138.923 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_{\theta} = 80 + R \cos(30.256^\circ + 30^\circ \times 2) = 80 + 138.924 \cos 90.256^\circ = 79.378 \text{ tf/m}^2$$

請注意，圖 a 內，從 C 平面(微素頂面)轉到 A-A 平面，須逆時針轉 30° ，那麼在應力

莫爾圓圓周，從 C 走到 A，就要繞圓心角 60° 。A 點很靠近圓頂點，但略偏左。



7-1 (沒有上下左右) 5分

練 4 應力轉換公式

某土壤元素承受之應力狀況如下圖所示。

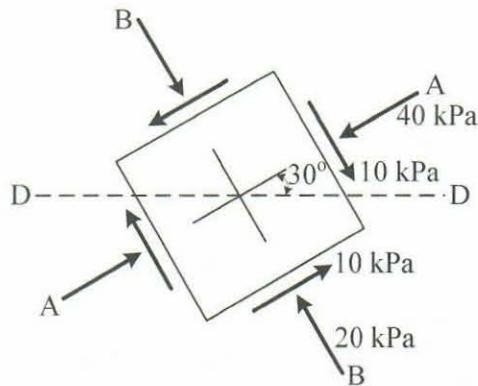
<102高考二級>

(一)請繪出其應力摩爾圓 (Mohr's circle)。(5 分)

(二)請精準計算出其最大及最小主應力的大小及方向 (與水平面之夾角)。(15 分)

(註：粗略圖解答案只能獲得部分分數)

(三)請精準計算出 D-D 平面上的正應力及剪應力。(10 分)



(一) 應力莫爾圓如圖 a。 A(40,-10) B(20,10)

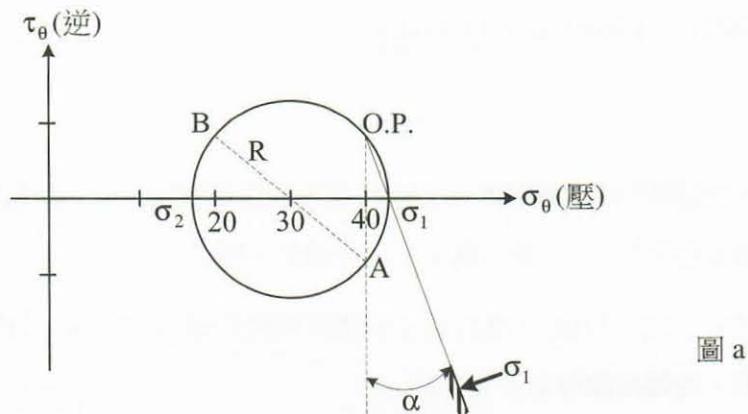


圖 a

$$(二) R = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{avg}} + R = \frac{20 + 40}{2} + 10\sqrt{2} = 44.142 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\text{avg}} - R = 30 - 10\sqrt{2} = 15.858 \text{ kPa}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_1 - 40}{10} = 0.4142 \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

σ_1 箭頭與水平參考線夾角 = $30^\circ + 22.5^\circ = 52.5^\circ$

σ_3 箭頭與水平參考線夾角 = $90^\circ - 52.5^\circ = 37.5^\circ$

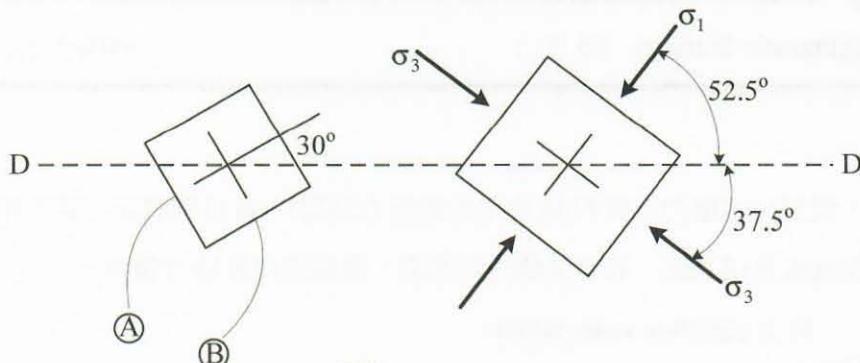


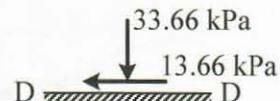
圖 b

(三) 壓逆為正公式

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_D|_{\theta=60^\circ} = \frac{40+20}{2} + \frac{40-20}{2} \cos 120^\circ - (-10) \sin 120^\circ = \underline{\underline{33.66 \text{ kPa}}}$$



$$\tau_D|_{\theta=60^\circ} = \frac{40-20}{2} \sin 120^\circ - 10 \cos 120^\circ = \underline{\underline{13.66 \text{ kPa}}}$$

討論

讀書腦袋要活絡，把題圖順時針轉 30° ，正向應力 A 就作用在鉛垂面，所以圖 a 裡，A 點畫垂直線就得 O.P.，但 α 值要加 30° 才是主應力面，你運動了嗎？

不要把題圖的畫法看得太「我執」，應該來上歐陽的課聽石破天的故事，力學是重精神，而非僅單純文字或圖形，的確是像禪宗。

有考生把莫爾圓和強度線(第七章)分開來學，永不會亂，號稱能懂意義。可是圓與線合併在一張圖裡，問他(她)「為什麼這個平面會破壞？那個平面不會破壞？ 45° 平面為何不破壞？O.P.為什麼在這裡？那個平面承受的剪應力多大？」他就亂了，題目做太少，思考偏淺。

練 7 浸潤面

名詞解釋：浸潤面(Phreatic Surface)（5 分）

<104土木技師>



從地下水壓力大小，反算出水壓力為零的面(指水的錶壓力為零)，就是浸潤面。若不存在受壓含水層，則地下水位面就是浸潤面。若在堤壩內有滲流，最高流線就是浸潤面。

自由水面(free water table)

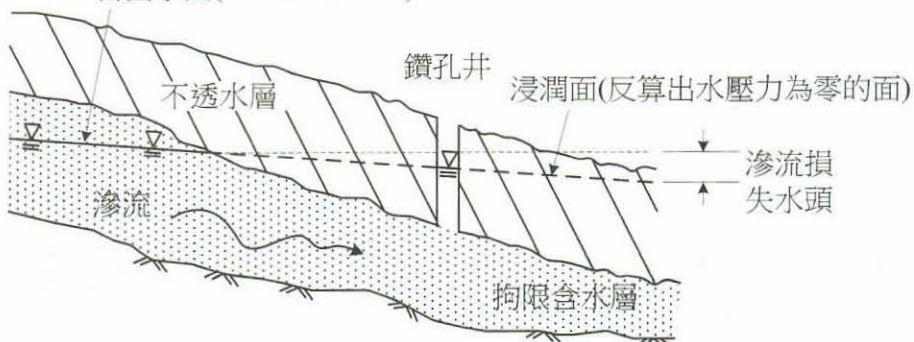


圖 a

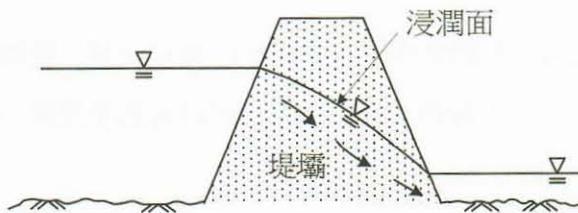


圖 b

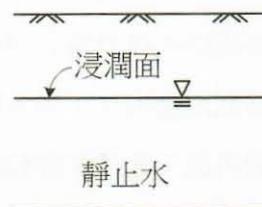


圖 c

討論

測量壓力時，要注意你測出來的數據是錶壓力還是絕對壓力。一般我們指海平面的水壓力為零，這是指水的錶壓力為零。有人注意到海水上面還有一大氣壓，所以他說海平面處水受的壓力應該是一大氣壓，而不是零，這是指絕對壓力是一大氣壓。

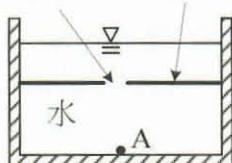
有書說「水壓力為一大氣壓的面，就是浸潤面」，這時水壓力的值是指絕對壓力。

在土壤力學內，測量水壓力時，大部分是用錶壓力，計算壓力水頭時，也是用錶壓力。

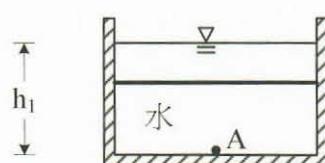
練 8 鐵鉗試驗

- (一) 在一大缸內，有一帶閘門鐵鉗如圖a，往缸內放水，水位升至 h_1 ，問A點水壓力多大？
- (二) 繼上，關閉閘門，如圖b，問A點水壓力多大？
- (三) 繼上，閘門仍關閉，抽光鐵鉗上的水，如圖c，問A點水壓力多大？

開閘門 鐵鉗



圖a



圖b



圖c

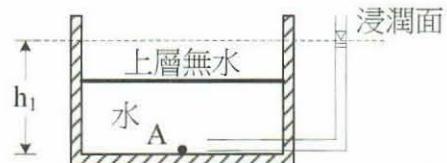


$$(一) u_{w,A} = h_1 \gamma_w$$

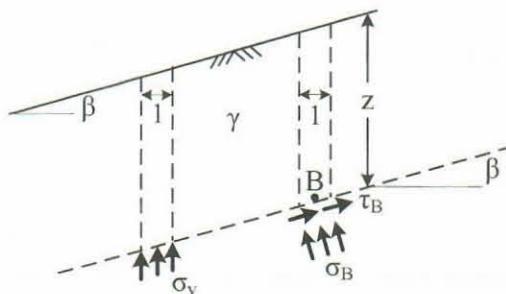
$$(二) u_{w,A} = h_1 \gamma_w$$

(三) $u_{w,A} = h_1 \gamma_w$

鐵鋟完全阻絕水壓力溝通(想想潛水艇內外的水、馬德堡半球內外氣壓)，鬼神沒辦法通知下層的水降低水壓力，下層水壓力被「封存」了。上層抽水後，下層的水自有其浸潤面。鐵鋟扮演的角色，就是不透水的黏土呀！

**練 9 無限邊坡**

有一無限邊坡，坡角 β ，土壤單位重 γ ，請求深度 z 處之 $\sigma_v = ?$ $\sigma_B = ?$ $\tau_B = ?$



虛線內土柱重 $W = 1 \times \gamma \times z$ (↓)

底面積 $A = 1 / \cos\beta$

$$\sigma_v = W / A = \gamma z \cos\beta \quad (\uparrow)$$

$$\sigma_B = \sigma_v \cos\beta = \gamma z \cos^2\beta \quad (\nwarrow)$$

$$\tau_B = \sigma_v \sin\beta = \gamma z \cos\beta \sin\beta \quad (\nearrow)$$

討論

切分離體，要不要考慮虛線側面的剪力 V 與推力 P 呢？不知道請快來上課！

挫折是成功路上忠實朋友，它指出你的不足，決不奉承



第五章 滲透性

體 系 表

- ☆水頭觀念與達西定律(Darcy's Law)
- 室內試驗求滲透係數(定水頭法)
- 室內試驗求滲透係數(變水頭法)
- 室外試驗求滲透係數
- ☆滲流水壓 u_s
- 滲流方向與層面平行
- ☆滲流方向與層面垂直
- ☆雙向度滲流與流線網
- 濾層設計
- ☆砂湧(Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition)
- ☆管湧(Piping)
- ☆上舉(Uplift)

學 習 重 點

1. 總水頭=位置水頭+壓力水頭，總水壓 u_w =靜態水壓力 u_{ss} +滲流水壓力 u_s +超額孔隙水壓 u_e 。
2. 水從總水頭高處往總水頭低處流動。總水壓 u_w / 水單位重 γ_w = 壓力水頭 h_p 。
3. 考題真的會要考生畫流線網，請一定要練習畫，考場可畫 3~4 個流槽。流線網引申出來的滲漏量、水力坡降、某一點有效應力大小、水壓力大小與砂湧安全係數考題也是考場常客。

李白說「抽刀斷水水更流，舉杯消愁愁更愁」，亘古名言，直指水造成的災害，以及土壤力學讀不好，藉酒澆愁只會更愁。做工程有兩大困難因素，一是「人」，二是「水」，水是本章主角。在開挖工程中，砂土受向上水流作用會產生「砂湧」(俗稱流砂)之不穩定現象；止水壁體施工不良產生破洞，流線縮短水夾帶泥砂流出，會形成「管湧」破壞。如果不透水層下方的水壓力過大，超過上方土壤與結構體自重，則可能會發生「上舉」破壞。興建土石壩，對壩底基礎材料、壩身材料的滲透性更須充分掌握，壩體與壩底滲漏量須小，才能有效貯水。壩體蓄水後水壓力增加，設計必須檢討上浮力、管湧、下游滲流出口處水力坡降，以確保壩結構、下游居民生命財產之安全。以上這些，均和水以及土壤的滲透性脫離不了關係。

水對土壤的工程影響層面至鉅，本章主要研究飽和土壤滲透係數(水力傳導係數) k 、水力坡降(水力梯度) i 、流線網、單位時間滲漏量 q 、總水頭 h_t 、位置水頭 h_e 、壓力水頭 h_p 、水壓力 u_w 、砂湧、管湧、上舉、濾層等等。

筆者常常比較材料力學和土壤力學的差異性，土壤力學的壓縮性和剪力強度，均可以在材料力學裏找到對應脈絡而心領神會，但是土壤力學的滲透性，卻是自成一格，因為材料力學不討論材料的透水性質。底下正式進入三大工程性質的滲透性，請專注研讀。

§5-1 水頭觀念與達西定律(Darcy's Law)

在生活中，可以見到水往低處流(eg：水溝的水、流口水、打翻的飲料)，但其實也可以看到水往高處流(eg：噴泉、自流井、水管噴水澆花、地熱的水往上流)的現象。究竟控制水流方向的機制是什麼？答案是「水從總水頭高的地方往總水頭低的地方流」，在土壤裡也是這樣。

流體力學的柏努利定律(Bernoulli's eq.)表示，流體裡任何一點的能量，可以化成「水頭」(Water Head)來表示，流體任何一點，總水頭(Total Head) = 位置水頭(Elevation Head)+壓力水頭(Pressure Head)+速度水頭(Velocity Head)。計及能量損失下，在同一條流線裏，流體從點 B 向點 C 流動，如圖 5-1，柏努利定律形如：

$$\text{位置水頭 } h_{e,B} + \text{壓力水頭 } \frac{u_{w,B}}{\gamma_w} + \text{速度水頭 } \frac{v_B^2}{2g}$$

$$= \text{位置水頭 } h_{e,C} + \text{壓力水頭 } \frac{u_{w,C}}{\gamma_w} + \text{速度水頭 } \frac{v_C^2}{2g} + \text{能量損失 } \Delta h \quad [5.1]$$

若 $\Delta h \neq 0$

$$\Rightarrow h_{e,B} + \frac{u_{w,B}}{\gamma_w} + \frac{v_B^2}{2g} > h_{e,C} + \frac{u_{w,C}}{\gamma_w} + \frac{v_C^2}{2g}$$

在一般工程情形下，土壤裡水流速度甚慢，速度水頭和其他項比起來可忽略，故再簡化成

$$h_{e,B} + \frac{u_{w,B}}{\gamma_w} > h_{e,C} + \frac{u_{w,C}}{\gamma_w}.$$

定義土壤裡的任一點，總水頭 h_{total} = 位置水頭 h_e + 壓力水頭 h_p

[5.2]

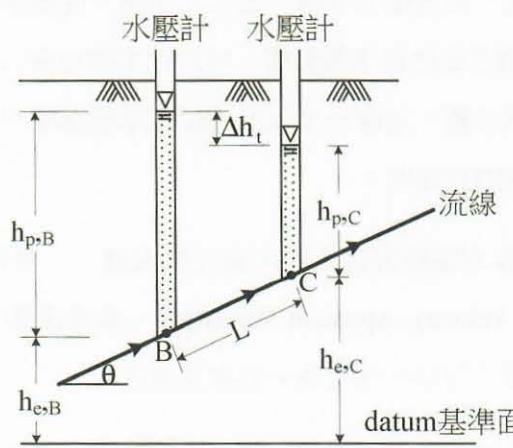


圖 5-1

表 5-1 (請參照圖 5-1)

	$\text{總水頭 } h_t = \text{位置水頭 } h_e + \text{壓力水頭 } h_p (= \frac{u_w}{\gamma_w})$		
B	$h_{e,B} + h_{p,B}$	$h_{e,B}$	$h_{p,B}$ (或寫 $\frac{u_{w,B}}{\gamma_w}$)
C	$h_{e,C} + h_{p,C}$	$h_{e,C}$	$h_{p,C}$ (或寫 $\frac{u_{w,C}}{\gamma_w}$)

圖 5-1 裡，土體裡的水沿流線從 B 點流往 C 點，datum 為基準面，即物理學之零位能面，B、

C 兩點的總水頭如表 5-1。 $h_{e,B} + h_{p,B} > h_{e,C} + h_{p,C}$ ，B 點總水頭比 C 點多 Δh_t ，故水從 B 點往 C 點流，水在流動中，需克服與土顆粒間之摩擦阻力，故水流的總能量遞減。B、C 兩點間之流線長度為 L(不是水平長度 $L \cos\theta$)，定義 B、C 間之平均水力坡降(Hydraulic Gradient)i

$$i \equiv \Delta h_t / L$$

[5.3]

白話講，水力坡降 i 就是每單位長度流線內消耗掉的總水頭，i 無因次，L 是流體走過的距離。若將 L 取無限短，則可得水力坡降 i 的極限定義， $i \equiv \frac{dh_t}{dL}$ 。

其實順著流線方向(eg : x 向)觀察，總水頭的值會越來越小，數學上 $\frac{dh_t}{dx}$ 為負數，故有些書寫成 $i = -\frac{dh_t}{dx}$ ，這樣 i 就恆正。讀不同書也是在矛盾中尋求解決，能解決，功力就上升一層。

基準面就是位置水頭 $h_e = 0$ 的水平面，基準面的位置可以隨人而定，所以對於一固定點而言，人的位置水頭可能不同，但是壓力水頭一定人人相同。從基準面往上算， h_e 為正；往下算， h_e 為負。當然囉，總水頭因受位置水頭影響，所以總水頭也會人人不同。有經驗的出題者為了方便閱卷，會規定基準面位置，這樣一來大家的位置水頭應相同，總水頭也應相同，他比較容易刪掉不同的答案，加快閱卷速度。

土壤內的水流，依據計算或測量方式不同，有三種流速——外視流速(Appearance Velocity, Superficial Velocity, Discharge Velocity, Apparent Velocity)v、滲流速度(Seepage Velocity) v_s 、真實流速(True Velocity)。考試較重要的是外視流速 v 與滲流速度 v_s 。

真實流速乃是水在孔隙中迂迴曲折、左彎右彎及前進的真正速度，這個速度是三者中最快的。但由於土壤的不均質，處處孔隙大小及孔隙結構不同，故我們無法得知真實流速大小，工程上也不需知道，工程上需要知道的是巨觀性質之外視流速 v 與滲流速度 v_s 。

外視流速 v 是法國人達西(Henry Darcy, 1803~1858)提出。外視流速 v 是由土壤單位時間滲流量 q 反算出來。達西進行試驗發現，對於乾淨的砂以及發生黏滯性飽和層流的前提下，在定水頭試驗中(詳下一節)，於一定時間 t 內累積流量 Q， $\frac{Q}{t} = q = vA = kiA$ ，測量流量 Q、時間 t 以及土壤斷面積 A，可計算出外視流速 v，但外視流速 v 並非水的真實流速，它是一種人造(人為定

義)的流速。達西定律是經驗公式，達西在試驗中歸納出外視流速與水力坡降成正比，即

$$v = ki \quad [5.5]$$

$$\text{或 } q = kiA \quad [5.6]$$

以上均可稱為達西定律^{註1}。注意 q 是單位時間內的流量(eg : cm^3/sec)， Q 的單位是體積(eg : cm^3)， k 是比例常數，後稱滲透係數。面積 A 係垂直於流線，非平行於流線。

考慮單位時間內流量 $q = vA$ ，左式宛如把飽和土體全斷面積 A 視為通水斷面，此與事實不符，因土顆粒本身無法透水，所以外視流速 v 是一種人造的流速，方便工程上用。

滲流速度 v_s 是在水中滴入有色液體(染液)，測量有色液體的前進距離與耗時。若在時間 t 內，有色液體前進 L 長度，則滲流速度 $v_s = \frac{L}{t}$ 。在土壤力學內很少進行此試驗，反而常由外視流速 v 計算滲流速度 v_s 。滲流速度 v_s 把飽和土體內孔隙視為連續直線的通水斷面，水只能經過這些孔隙(void)流動，且理想化地認為水是直線流動，這些孔隙構成的面積就是 A_v (見圖 5-3)。如果上游有工廠偷偷排放工業廢水，這些廢水順著地下水流動，抵達下游的時間，需由滲流速度 v_s 來算，而不是外視流速。廢水其實就是「有顏色的染液」。滲流速度並非真實流速，也是一種外視流速，某些原文書觀念有誤，另外一些則正確。

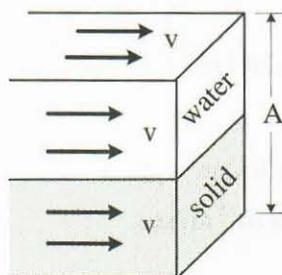


圖 5-2 把土顆粒看成能透水

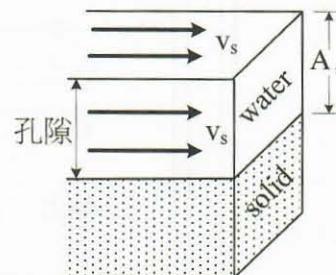


圖 5-3 土粒不透水，把孔隙看成連續直線排列

註 1: 達西定律可用於多孔(porous media)介質中，岩石也可用，其理論基礎源於動量守恆與連續方程式(i.e., 質量守恆)，流體可為水、油或氣體。達西定律適合慢速流動，通常雷諾數小於 1.0 就適用，如地下水流動。此定律是巨觀觀察結果，非微觀描述。在地質水力學、採石油氣工程中皆可見到此定律。

\therefore 單位時間內流量 $q = v \times A = v_s \times A_v$

$$\therefore \text{滲流速度 } v_s = v \times A / A_v = \frac{v}{n} \quad [5.7]$$

其中 n 是孔隙率，因為 $n < 1$ ，所以 $v_s > v$ 。

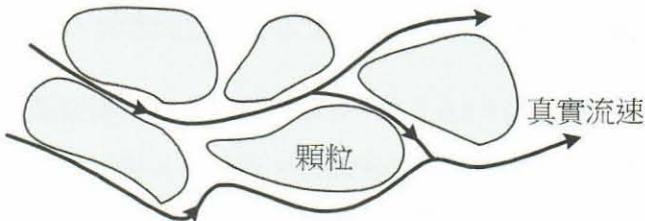
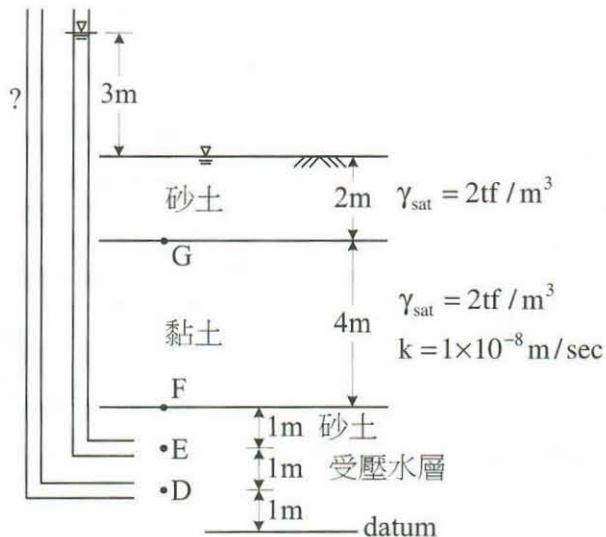


圖 5-4 真實流速處處不同

例 5-1.1 觀念問答

有一工址，土壤剖面如圖所示，設砂土極易透水，不消耗水頭。圖內插有兩支水壓計，一對準E點，發現水壓計的靜止水面在地表上3 m。另一支對準D點，請問哪一支水壓計的水位面會比較高？為什麼？D、E這兩點的總水頭、位置水頭與壓力水頭各是多少？黏土層內的水力坡降是多少？黏土層中點的有效應力是多少？



簡化土層剖面示意圖



兩支水壓計的水位線一樣高。因為水不從D點往E點流動，也不從E點往D點流動，兩點之總

水頭相等，可由減法算出 D 點壓力水頭為 11 m。

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
D	12 (抄 E 點總水頭)		1		(11)
E	(12)		2		10
F	12		3		9
G	9		7		2

註：括弧內為計算所得 單位：m

地表下 2m 處，該點總水頭 = 7+2 = 9 m

黏土層內水力坡降 $i = \Delta h_t / L = (12-9)/4 = 0.75$

滲流方向向上，從 F 到 G

黏土層中點 $\sigma = 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8 \text{ tf/m}^2$

$$\text{中點 } u_w = \frac{2+9}{2} \cdot \gamma_w = 5.5 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma' = 8 - 5.5 = 2.5 \text{ tf/m}^2$$

討論

涉及水頭的題目，務必畫表格求解，位置水頭最容易決定，請先寫下。**水壓計垂直段內的靜水高度，就是該點的壓力水頭**。注意水力坡降 i 是「兩點之間總水頭差距除以流線長度」。

每平方公尺截面，每年的滲流量 $q = kiA = 1 \times 10^{-8} \times 0.75 \times 1 = 7.5 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{sec} = 0.000648 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{day} = 0.2365 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{year}$ 。Datum 是基準面、零位能面。基準面不代表該處位能絕對值是零，位能乃是一相對值，請參考高中物理，或購買筆者《解說工程力學》閱讀第四章與第十章。

你能畫出水壓力 u_w 隨深度的變化圖嗎？

例 5-1.2 滲流速度

某化學工廠打淺井排放廢水，淺井周圍土壤的滲透係數 $k = 0.12 \text{ cm/sec}$ ，土壤孔隙比 $e = 0.91$ ，地下水位在極深之處，廢水不隨地下水流動。在化學工廠下游處 3.2 公里處有一民生用井，考慮廢水的水平流動，水力坡降為 0.006，試問廢水排出後，多久會流到民生用井？

<改編 Coduto 教科書、台大研究所類題>



$$\text{孔隙率 } n = e/(1+e) = 0.91/1.91 = 0.47644$$

$$\text{外視流速 } v = ki = 0.12 \times 0.006 = 0.00072 \text{ cm/sec}$$

$$\text{滲流速度 } v_s = v / n = 0.00072 / 0.47644 = 1.5112 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} = 1.5112 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$$

$$\text{時間 } t = L / v_s = 3200 / (1.5112 \times 10^{-5}) = 211,751,111 \text{ sec} = 2450.8 \text{ days} = \underline{\underline{6.71 \text{ years}}}$$

討論

很多人直覺以為應該用距離除以外視流速得時間，這是年久月深，長久以來對外視流速 v 建立不正確的觀念所致。外視流速是進行定水頭試驗，從蒐集的水量中反算出的「人造流速」，就像網路上的虛擬貨幣一樣，是虛擬流速。

工廠廢水在土壤中流動，就像試驗室裏往土壤滴入有色染液，有色染液逐漸在土壤中擴散、流動。人們測量顏色前進的距離，再除以經過的時間，就得到滲流速度 v_s 。

水未必是從壓力高的地方往壓力低的地方流動。茶杯裡靜止水，杯底水壓力較高，可是水卻沒流動，想一想為什麼？

§5-2 室內試驗求滲透係數(定水頭法)

土壤滲透性的代表參數是滲透係數 k (Coefficient of Permeability, Hydraulic Conductivity)，也有人稱水力傳導係數， k 如何求得？工程參數的求得，通常有三種方法：(1)取樣試驗。(2)現地試驗。(3)經驗公式。一般而言，欲知土壤的工程性質，有三種手段。一是取土樣進試驗室試驗，二是在現地試驗(花費最貴)，三是根據以往統計數據作成經驗公式。在求滲透係數 k 中，很明顯看到這 3 種方法各展其道。

表 5-2

取樣試驗	定水頭試驗
(便宜，但難以完全模擬現場，試體代表性有爭議)	變水頭試驗
	壓密試驗， $k_z = c_v m_v \gamma_w$ (見第六章，只能求垂直向的 k_z)
	Rowe cell Test (可測垂直或水平的 k)

現地試驗 (貴，最具代表性， 大金額工程才用)	現地抽水試驗(須觀測井) 現地灌水試驗(不須觀測井，若現地水位極深，則抽水不經濟) 鑽孔壓水試驗(Packer Test，不須觀測井)
經驗公式 (最便宜)	$k = C_1 D_{10}^2$ (提出者 Hazen) $k = \frac{\gamma_w g}{C \eta_w s^2} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2}$ (提出者 Kozeny, 1927) $k = \frac{\gamma_w g}{C \eta_w s^2} \cdot \frac{e^3}{1+e}$ (提出者 Carman, 1939)

定水頭(Constant Head)試驗裝置如圖 5-5，其目的是算出土壤的滲透係數 k ，由於上、下游水面固定，不隨時間改變，故稱定水頭試驗，為單向度滲流試驗。已知試驗耗時 t 中，累積的流量為 Q 、上下游出水口高度差 Δh_t 、土樣長度 L 以及土壤斷面積 A ，則有

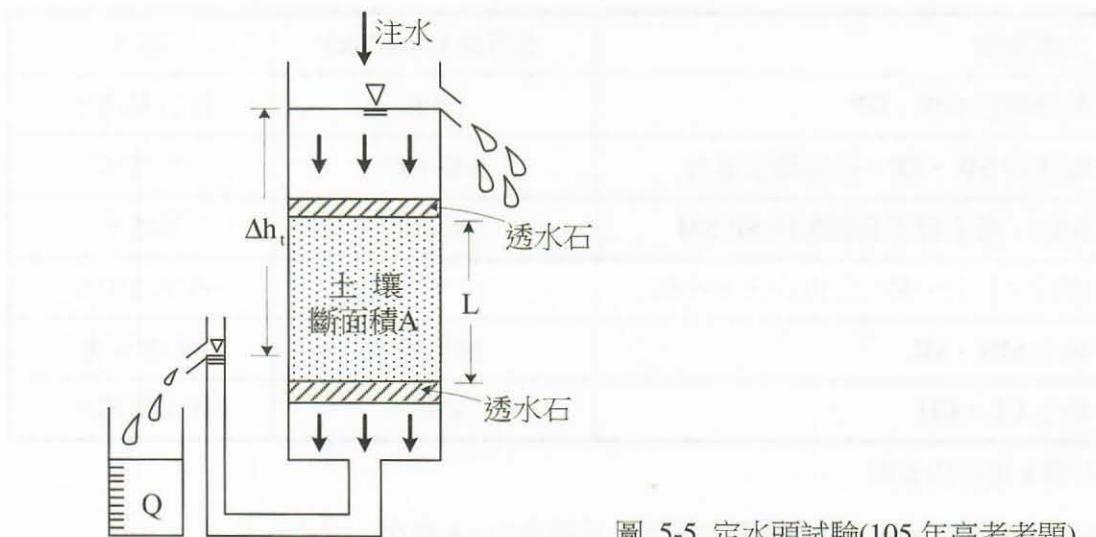


圖 5-5 定水頭試驗(105 年高考考題)

$$Q = qt = k i A t = k \frac{\Delta h_t}{L} A t$$

$$\text{故 } k = \frac{QL}{(\Delta h_t)At} \quad (\text{本試驗須收集水量}) \quad [5.8]$$

此試驗是求出試體沿重力線方向的滲透係數，水平向滲透係數仍未知。

上、下游出水口高度差就是上下游的總水頭差 Δh_t (Why?)。土壤內平均水力坡降 i 是上、下游總水頭差 Δh_t 除以流線長度 L 。本試驗適合對砂土等滲透性高的土壤進行試驗，不適合對黏土等滲透性低的土壤進行試驗。因為黏土滲透性低，需要累積很久的時間 t 才得到一點點流量 Q ，太耗費時間，且因為 Q 小，在燒杯或量瓶中依刻度判讀的誤差會變大；再因為試驗室冷氣吸水或 Q 的自然蒸散，都會使得 k 值誤差變大，所以黏土不適合進行定水頭試驗。

對於乾淨的細砂，Hazen 提出經驗公式： $k = C_1 D_{10}^2$ [5.9]

如果 D_{10} 用 mm 代入，則 C_1 可以取 1.0，得到的 k 單位為 cm/sec。例如 $D_{10} = 0.15$ mm，則 $k = 1 \times (0.15)^2 = 2.25 \times 10^{-2}$ cm/sec。經驗公式常是統計迴歸得到，因次未必諧和，使用者要注意各物理量單位以及對應的係數。純學理導出的公式，因次必定諧和。式[5.9]是迴歸出來的，不要為了因次諧和，而硬掰 C 的單位，若喜歡硬掰，則 SPT-N 值的公式，各係數都有怪單位了。若 D_{10} 與 k 均取 mm 為長度單位，則 C_1 應取 10。

表 5-3

土壤種類	垂直向 k_z (cm/sec)	描述
乾淨礫石 GW、GP	>1.0	極容易透水
乾淨砂 SW、SP，砂與礫石混合	$1.0 \sim 10^{-3}$	易透水
粗砂、粉土質不良級配砂 SP-SM	$10^{-1} \sim 10^{-3}$	易透水
細砂、粉土、黏土之混合土 SM-SC	$10^{-3} \sim 10^{-5}$	透水性中等
粉土 MH、ML	$10^{-5} \sim 10^{-7}$	低透水性
黏土 CL、CH	$<10^{-7}$	非常難透水

影響 k 值的因素有：

- ①土壤的粒徑分布曲線。細顆粒愈多，孔隙愈小， k 愈小。
- ②土壤顆粒形狀與組織結構。不規則形狀與狹長形狀之顆粒，造成水流「繞路」， k 比圓形顆粒更小。組織粗糙比光滑者， k 更小。
- ③土壤礦物組成。不同種類的礦物，其吸附水層厚度不一樣，吸附水層厚度愈大(如蒙脫土)，自由水能流動的空間愈小， k 愈小。
- ④孔隙比。對同一種土壤而言，若增大其孔隙比， k 就變大。
- ⑤飽和度。對同一種土壤而言，若增大其飽和度， k 就變大；氣泡越多，越阻止水流。

⑥層狀土壤之異質性。不同地質時期的沉積物不同，通常水平的 k 比垂直的 k 大，而地層內的裂縫、有機物等等也會影響 k 。

⑦流體性質。如密度、黏滯度，黏滯度愈高， k 愈小。

⑧流動的型態。如層流、紊流。

⑨溫度。溫度愈高， k 愈大。

⑩吸附水層的效果。越厚越難滲透， k 愈小。

以上因素或許是論文寫作的好材料，卻不是國家考試重點，看過即可，不須死背。

為簡單分辨，可視 $k > 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ 為滲透性佳， $k < 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ 為滲透性差。

高考
推導(學術)
技師
↓
現場

§5-3 室內試驗求滲透係數(變水頭法) 前5天再練一次

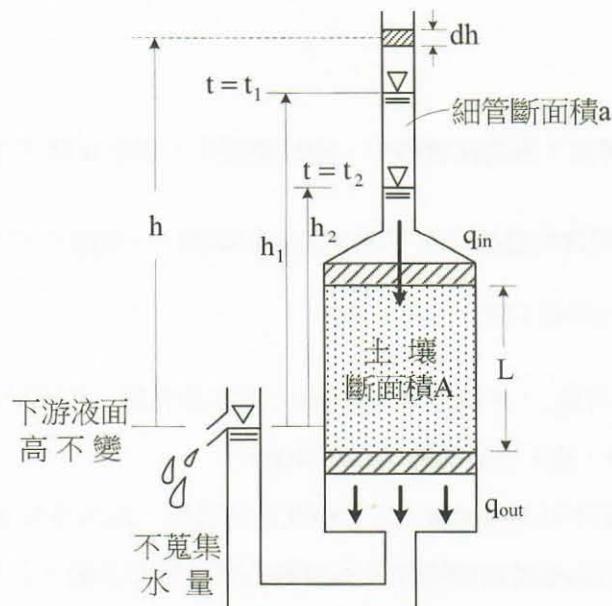


圖 5-6 變水頭試驗(105 高考考題)

變水頭(Falling Head)試驗裝置如圖 5-6，其目的也是要算出土壤的滲透係數 k 。試驗中，下游出水口位置不變，上游細管內液面緩緩下降，上下游的總水頭差隨時間逐漸改變，故稱「變水頭」。裝置的上游有一細管，斷面積 a ，試驗開始的時刻是 t_1 ，結束的時刻是 t_2 ；試驗開始的液面高差是 h_1 ，結束的液面高差是 h_2 、土樣長度 L 以及土壤斷面積 A 。

在試驗中的某一時刻 t ，上下游液面高差為 h ， h 是時間 t 的函數，即 $h=h(t)$ 。在微小的單位時距 dt 內，細管內水位下降 dh ，該單位時距內離開細管而進入土樣的水量 $q_{in} = -\frac{a \cdot dh}{dt}$ ，同時距，土體末端，單位時距離開的水量以達西定律計算得 $q_{out} = k i A = k(\frac{h}{L})A$ 。推導中，把 i 視為 uniform，不隨地點改變而改變，面積 A 係垂直於流線。

設水密度維持常數，質量不減就變成體積不減，依連續方程式， $q_{in} = q_{out}$

$$\Rightarrow -a \cdot \frac{dh}{dt} = k(\frac{h}{L})A \quad \Rightarrow -\frac{dh}{h} = \frac{Ak}{aL} \cdot dt \quad (\text{正數=正數})$$

等號兩邊同時取積分， $-\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{Ak}{aL} \cdot dt$

得 $\ln \frac{h_1}{h_2} = \frac{Ak}{aL} (t_2 - t_1)$

$$\text{故 } k = \frac{aL(\ln \frac{h_1}{h_2})}{A(t_2 - t_1)} = \frac{aL(\ln \frac{h_1}{h_2})}{A\Delta t} \quad [5.10]$$

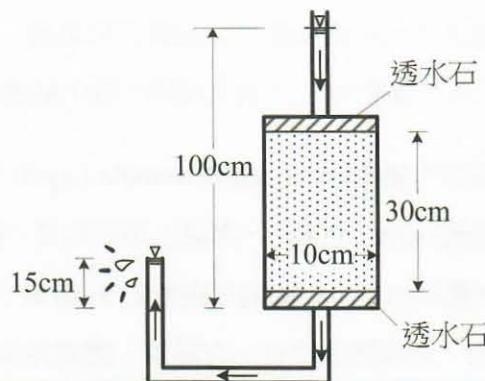
推導中，見到 $q_{in} = -a \frac{dh}{dt}$ ，負號何來？因為在實驗中，隨時間流逝，高度 h 越來越小， $\frac{dh}{dt}$ 是負數， $-\frac{dh}{dt}$ 才是正數。試驗中設計細管的目的是為了讓 h 值能明顯讀出，細管內只要有些許水量進入土體，就可以看出細管內水位明顯下降。

“ q ”的意義是「極短時間內的微小流量」，單位例如 cm^3/sec 。變水頭試驗，不同時刻， h 值會變，不同時間水力坡降 i 的大小不同，故 i 不是穩態(steady state)。

當你騎機車紅燈起步，花 8 秒速度升到 50 km/hr，這 8 秒就是非穩態，因為速度在變化。8 秒後速度維持定值，就是到達穩態，因為速度這個物理量不再隨時間改變而改變。長期水壓力畫法與抽水問題，我們都是針對穩態求解，亦即避開抽水早期的非穩態與早期的水壓力變化。

例 5-3.1 變水頭試驗

某變水頭試驗裝置如圖，圖示水位均為試驗剛開始時之水位，土壤試體斷面為圓形，其直徑 10 cm，長度 30 cm，細管直徑 2 cm，經過 4 小時試驗後，細管水位下降 10 cm，求土壤的滲透係數(cm/sec)。



$$h_1 = 100 - 15 = 85 \text{ cm}$$

$$h_2 = 85 - 10 = 75 \text{ cm}$$

$$k = \frac{aL(\ln \frac{h_1}{h_2})}{A\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{4}(2)^2 \times 30(\ln \frac{85}{75})}{\frac{\pi}{4}(10)^2 \times 4 \times 3600} = \underline{\underline{1.043 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}}}$$

討論

請注意 h_1 、 h_2 的定義，是從下游水位面起算，不是下方透水石。背公式時，建議連試驗圖形一起背。

室內試驗所用的原狀土壤通常較小，比較不會含有節理、特大孔隙、不連續面或其他弱面，故試體做出來的滲透係數，常常小於現地滲透係數。《邊坡工程設計與施工規範(草案)》提到， $k < 10^{-2} \text{ cm/sec}$ 者，適合使用變水頭試驗， $k \geq 10^{-2} \text{ cm/sec}$ 者，適合使用定水頭試驗。

§5-4 室外試驗求滲透係數

對於比較重要的工程(eg：興建水庫)，必須進行現地試驗，求得現場土壤的滲透係數，而不能僅依賴一個小小試體求出的滲透係數。小試體常無裂縫，大試體容易包含裂縫，一有裂縫，滲透係數急速增加，造成小試體無法代表大現場，雪山隧道新建前誤判施工湧水量即為一例。

如果現場是非拘限含水層(Unconfined Permeable Layer)，如圖 5-7，為求滲透係數，試驗者在主井抽水，並測量觀測井的水位變化，考慮土壤不均質，觀測井可布設成十字狀或 L 字狀，同時方便在兩正交方向觀察水位，相鄰兩孔距離約 5~10 m。試驗者先嘗試以不同抽水速率 q 抽水，若抽水速率 q 過大，則洩降曲線會一直降落，觀測井水位也會一直降落，無法維持不變，這樣就不算達到穩態(Steady State)，也就是抽掉的比補助進來的多，這樣就要降低抽水速率 q 。

什麼叫穩態？就是某物理參數(或力學參數)不隨時間改變而改變，稱為達到穩態。

如果試驗者的抽水速率 q 過小，遠方補助過來的水量較大，地下水位線就不會下降，不同觀測井內的水位會一樣高，這樣就求不出水力坡降(即 $\frac{dh}{dr} = 0$)。

當試驗者嘗試找到一個抽水速率 q ，產生洩降後能使觀測井內水位高度維持不變，則現場就達到穩態，穩態就是指洩降曲線高度不隨時間改變，僅隨地點改變，抽出去的水量和兩側補助進來的一樣多。此時考慮以主井為圓心，半徑為 r 的環狀立面，立面高度 h ，單位時間內從主井抽走的水量等於流入環狀立面的水量，即

$$q = kiA = k \frac{dh}{dr} (2\pi rh) = \text{常數}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\pi kh}{q} dh$$

$$\text{等號兩邊同時取積分，} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{2\pi kh}{q} \cdot dh$$

$$\Rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\pi k}{q} (h_2^2 - h_1^2)$$

$$\text{得 } k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{\pi(h_2^2 - h_1^2)}$$

[5.11]

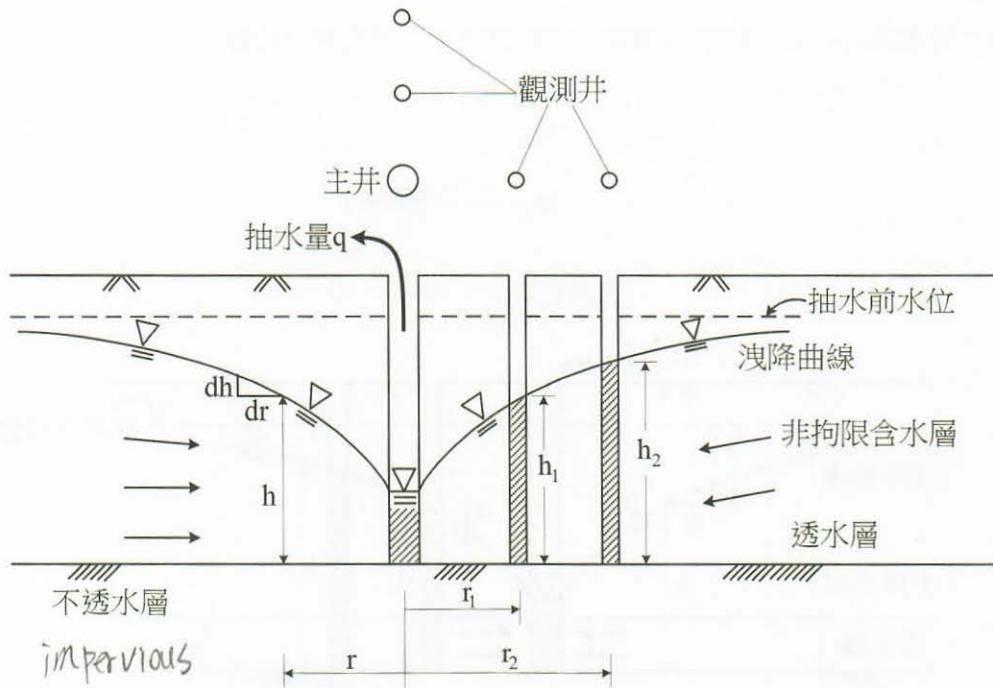


圖 5-7 非拘限含水層，只有一層是不透水層

有朋友問「為何 $i = \frac{dh}{dr}$ ？」參考圖 5-8，B、C 兩點均在地下水位線，兩點的壓力水頭都是零，所以兩點總水頭差 dh 就是垂直高程差 dy ，流線長度是 ds 。在流線很平緩的前提下， $ds \approx dx$ ， $i \equiv \frac{dh}{ds} = \frac{dy}{ds} = \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{dh}{dr}$ 。

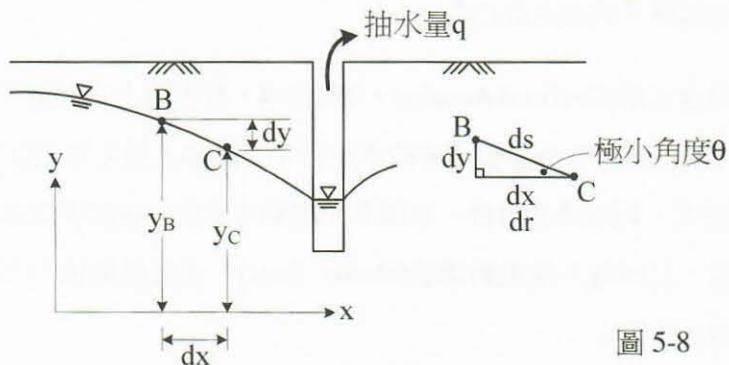


圖 5-8

以上推導有兩點暗示：第一，這代表流線角度愈陡，單位體積滲流力($i\gamma_w$)愈大；第二，現

場若洩降曲線陡峭，則上述結論不適用。

另外，這有沒有讓你想起材料力學，在小變形之下，樑的斜率 $\tan\theta$ 常常用轉角 θ 取代，還有材料力學裏講的斜率，移到結構學的傾角變位法，經常被講成轉角。

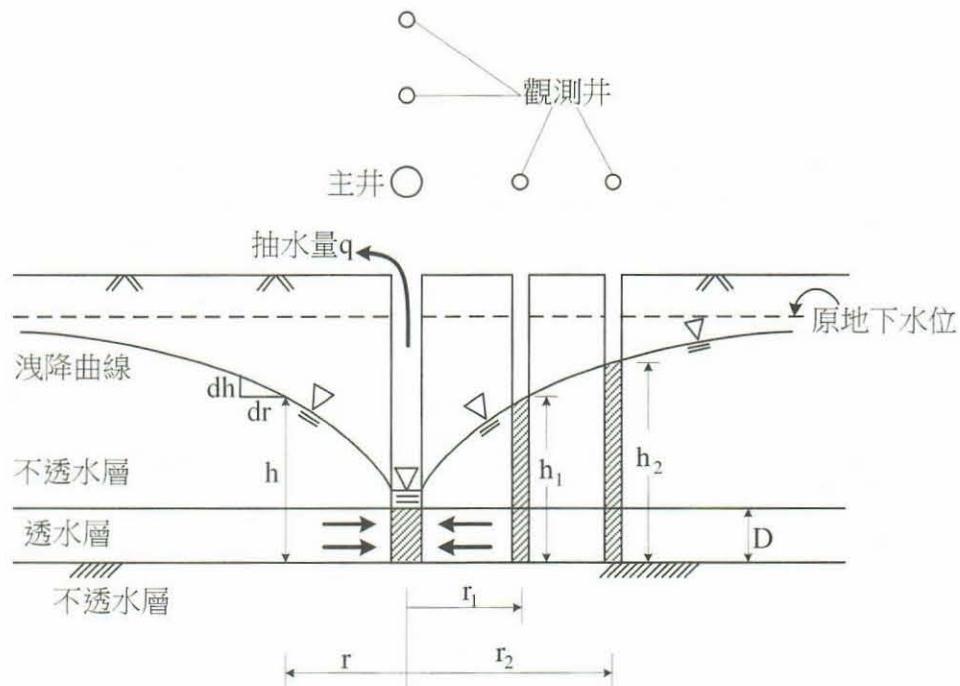


圖 5-9 拘限含水層，上下兩邊都是不透水層

拘限含水層是指某含水地層(eg：砂土層、礫石層)，其上下層次皆為不透水層(eg：黏土層)，不透水層將含水層「包圍」、「拘限」住。拘限含水層不一定有受壓水，若有受壓水且水壓力夠大，則會產生自流井現象。在山麓下的拘限含水層，受到山裏地下水流補助，拘限含水層內水壓力可能比靜態水位面高，形成自流井現象。

如果現場是拘限含水層(Confined Aquifer)，如圖 5-9，含水層上下都是不透水層，為了求滲透係數，試驗者在主井抽水，並測量觀測井的水位變化。試驗人員先嘗試以不同抽水速率 q 抽水，若抽水速率 q 過大，則洩降曲線會一直降落，觀測井水位也會跟著降落，無法維持不變，水力坡降隨時間在變，這樣就不是達到穩態(Steady State)，也就是抽掉的水比四周補助進來的多，這樣就要降低抽水速率 q 。

如果試驗人員選的抽水速率 q 過小，遠水源源不絕迅速補助，地下水位線就不會明顯下降，

不同觀測井內的水位會一樣高，這樣就求不出水力坡降(即 $\frac{dh}{dr} = 0$)。

當試驗人員嘗試找到一個抽水速率 q ，能使觀測井內水位高度維持不變，則現場就達到穩態，穩態就是指洩降曲線不隨時間改變，水力坡降不隨時間改變，僅隨地點改變，抽出去的水量和透水層兩側補助進來的一樣多，此時考慮以主井為圓心，半徑為 r 的環狀立面，此環狀立面高度為 D (拘限含水層厚度)，則有單位時間入流量 $q = kiA = k \frac{dh}{dr} (2\pi r D) = \text{常數}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\pi k D}{q} dh$$

$$\text{等號兩邊同時取積分，} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{h_1}^{h_2} \frac{2\pi k D}{q} \cdot dh$$

$$\Rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi k D}{q} (h_2 - h_1)$$

$$\text{得 } k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{2\pi D(h_2 - h_1)} \quad [5.12]$$

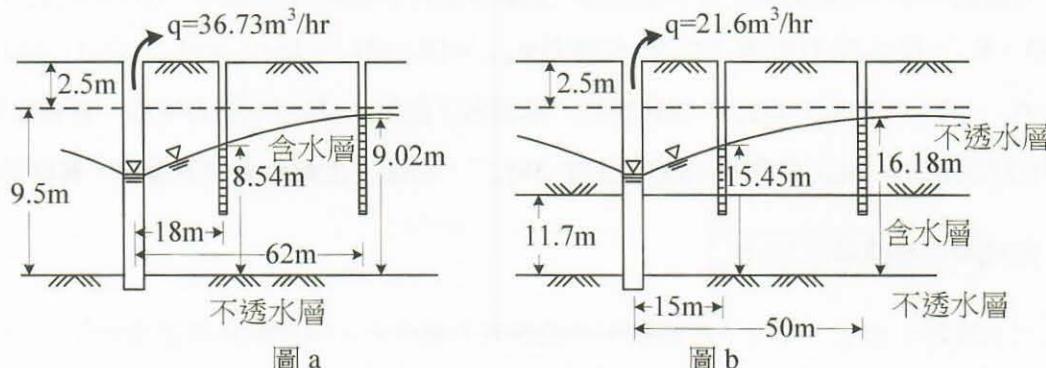
例 5-4.1 野外抽水求 k

(1)某地層如圖 a 所示，原先地下水位在地表下 2.5 m 處，抽水穩定後，抽水量 $q=36.73 \text{ m}^3/\text{hr}$ ，

試求此含水層之滲透係數，並研判地層是粗砂還是細砂。 <103 土木技師類題 25%>

(2)某地層如圖 b 所示，原先地下水位在地表下 2.5 m 處，抽水穩定後，抽水量 $q=21.6 \text{ m}^3/\text{hr}$ ，

試求此含水層之滲透係數(請用單位 cm/sec)。





(1)此為非拘限含水層， $q = 36.73/3600 = 0.010203 \text{ m}^3/\text{sec}$

$$k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} = \frac{0.010203 \ln(62/18)}{\pi(9.02^2 - 8.54^2)} = 4.7653 \times 10^{-4} \text{ m/sec} = \underline{0.04765 \text{ cm/sec}} \quad \text{粗砂}$$

(2)此為拘限含水層， $q = 21.6/3600 = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{sec}$

$$k = \frac{q \ln(r_2 / r_1)}{2\pi D(h_2 - h_1)} = \frac{6 \times 10^{-3} \ln(50/15)}{2\pi(11.7)(16.18 - 15.45)} = 1.346 \times 10^{-4} \text{ m/sec} = \underline{0.01346 \text{ cm/sec}}$$

討論

現地抽水試驗，應避免抽出之水又流回地層，會影響試驗正確性。《建築物基礎構造設計規範》提出各類土層之滲透係數與適用的降水方法如下表：

含水層	滲透係數(cm/sec)	降水方法
卵礫石層	$>1 \times 10^{-1}$	重力降水、水中開挖(不降水)
粗砂至中砂	$1 \times 10^{-1} \sim 1 \times 10^{-3}$	重力排水、深井、點井、真空抽水井
細砂、粉土、黏土	$1 \times 10^{-3} \sim 1 \times 10^{-5}$	深井、點井、真空抽水井
黏土	$<1 \times 10^{-5}$	電滲法或不降水

§5-5 滲流水壓 u_s

考慮圖 5-10，均質土體上方水位較高，土體承受向下滲流，C 點總應力 $\sigma_C = H_1 \gamma_w + H_2 \gamma_{sat}$ ，C、D、E 三點水壓力相同，C 點水壓力 $u_{w,C} = (H_1 + H_2 - \Delta h)\gamma_w = y\gamma_w$ ，故 C 點有效應力 $\sigma'_C = \sigma_C - u_{w,C} = H_2 \gamma' + \Delta h \gamma_w$ 。在此看到，水流向下使得 C 點有效應力增加，若和土體內的水流靜止狀況相比，現在 C 點有效應力增加“ $\Delta h \gamma_w$ ”。結論：土體承受向下滲流，有助於穩定。

定義單位體積滲流力 = $i\gamma_w$

[5.13]

水力坡降 i 愈大，單位土壤體積所受的滲流力量愈大，同步地外視流速愈大，滲流力就是水流衝擊土壤的力量。水若不流動，無滲流($i=0$)，則無此力量。

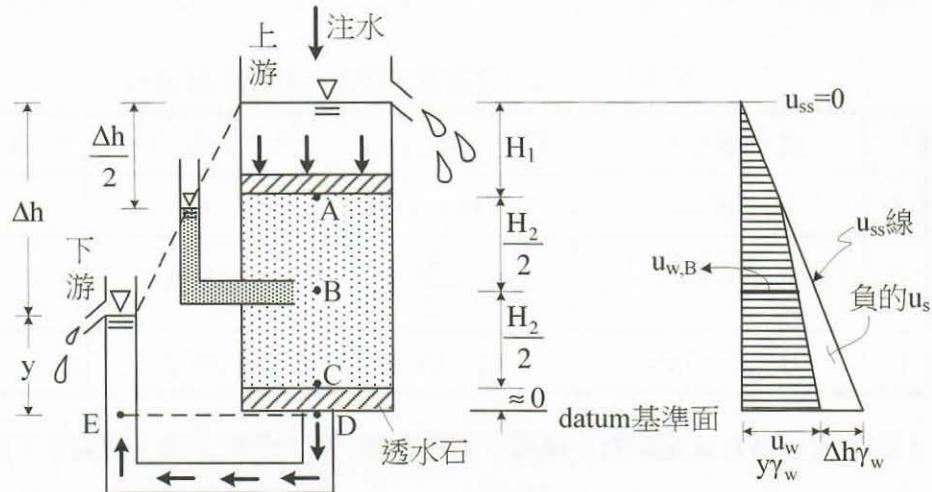
圖 5-10 右圖實線區 u_w 才是真正水壓力

表 5-4

	總水頭 h_t	位置水頭 h_e	壓力水頭 $h_p = \frac{u_w}{\gamma_w}$
A	$H_1 + H_2$	H_2	H_1
B	$H_1 + H_2 - (\Delta h/2)$	$H_2 / 2$	$\left(H_1 + \frac{(H_2 - \Delta h)}{2} \right)$
C	$H_1 + H_2 - \Delta h$	0	$H_1 + H_2 - \Delta h (=y)$
D	$H_1 + H_2 - \Delta h$	0	$H_1 + H_2 - \Delta h (=y)$
E	$H_1 + H_2 - \Delta h$	0	$H_1 + H_2 - \Delta h (=y)$

圖 5-10 裏，均質土壤 A、B、C、D、E 五點的總水頭、位置水頭、壓力水頭大小如表 5-4，B 為 A、C 中點。從 D 點到 E 點，當中無土壤，水流視為不消耗能量，D、E 兩點總水頭相等。因透水石很薄，視 D、C 兩點總水頭相等。(精確來講，D、E 之間有管壁摩擦損失，惟土力不計，意者可參考流體力學。)

若以上游水面當成靜態水壓力的起算面，則 A、B、C 各點的各種水壓力分量如表 5-5，總水壓力那欄，抄自表 5-4 壓力水頭那一欄乘以水的單位重 γ_w 。水壓力有三個分量(u_{ss} 、 u_s 、 u_e)，這三個分量加起來就是總水壓，壓力水頭 h_p 就是總水壓 u_w 的能量表現。請注意均質土壤(i.e., k=常數)B、C 兩點滲流水壓力 u_s ，可從上、下游總水頭差快速計算。水從 A 流往 C 的過程中，B

正好在一半處，故 B 點滲流水壓力是「上、下游總水頭差之半」乘以水單位重 γ_w 。

表 5-5 上游水位面當成靜態水壓力的起算面

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$H_1 \times \gamma_w$	0	0
B	$\left(H_1 + \frac{(H_2 - \Delta h)}{2} \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2}) \gamma_w$	$(-\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 - \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2) \gamma_w$	$(-\Delta h) \gamma_w$	0

表 5-5 的滲流水壓力 u_s 是絕對正確嗎？其實不然，若我們把下游水位面當成靜態水壓力的起算面，就會得表 5-6，兩表相比，我們發現 u_{ss} 、 u_s 都變了，但總水壓力 u_w 不變。如果題目只有一個靜態水位面，那麼 u_{ss} 、 u_s 的值就只有單一解。

在個別的表裡，上游側的土壤點，其 u_s 值必定大於下游測的土壤點。

表 5-6 下游水位面當成靜態水壓力的起算面

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$(H_1 - \Delta h) \gamma_w$	$(\Delta h) \gamma_w$	0
B	$\left(H_1 + \frac{(H_2 - \Delta h)}{2} \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2} - \Delta h) \gamma_w$	$(\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 - \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2) \gamma_w$	0	0

假如水是往上滲流通過土體呢？

考慮圖 5-11，土體正上方水位較低，均質土體承受向上滲流，C 點總應力 $\sigma_C = H_1 \gamma_w + H_2 \gamma_{sat}$ ，C、D、E 三點水壓力相同，C 點水壓力 $u_{w,C} = (H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$ ，所以 C 點有效應力 $\sigma'_C = \sigma_C - u_{w,C} = H_2 \gamma' - \Delta h \gamma_w$ 。A、B、C、D、E 五點的總水頭、位置水頭、壓力水頭大小列於表 5-7。在這裡我們看到，水流向上使得 C 點有效應力減少，若和土體內的水流靜止狀況相比，現在 C 點有效應力減少 “ $\Delta h \gamma_w$ ”。結論：土體承受向上滲流，有害於穩定。

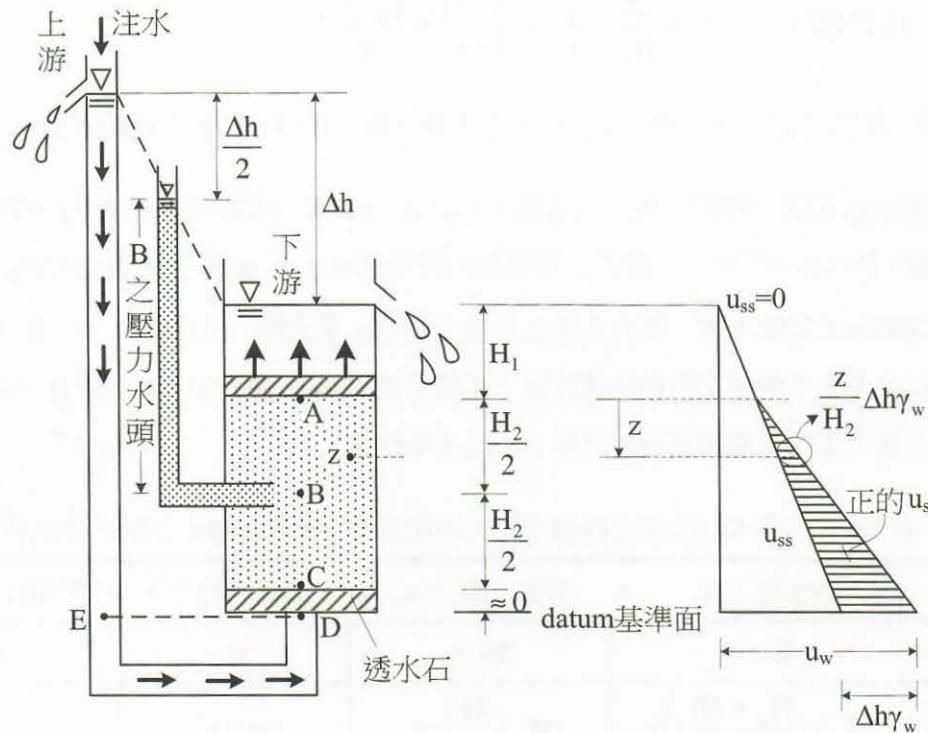
圖 5-11 右圖 u_w 才是真實水壓力

表 5-7

	總水頭 h_t	位置水頭 h_e	壓力水頭 $h_p = \frac{u_w}{\gamma_w}$
A	$H_1 + H_2$	H_2	H_1
B	$H_1 + H_2 + (\Delta h / 2)$	$H_2 / 2$	$\{H_1 + (H_2 + \Delta h) / 2\}$
C	$H_1 + H_2 + \Delta h$	0	$H_1 + H_2 + \Delta h$
D	$H_1 + H_2 + \Delta h$	0	$H_1 + H_2 + \Delta h$
E	$H_1 + H_2 + \Delta h$	0	$H_1 + H_2 + \Delta h$

當上游水位面升得夠高，導致 C 點有效應力降為零時，定義當下的水力坡降為「臨界水力坡降」 i_c （或寫成 i_{cr} ）。

$$\text{當 } \sigma'_C = 0 \text{ 時, } H_2 \gamma' - \Delta h \gamma_w = 0, \text{ 得 } \frac{\Delta h}{H_2} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad [5.14]$$

$$\text{在 } \sigma'_c = 0 \text{ 的前提下, } i_{cr} = i_c \equiv \frac{\Delta h}{H_2} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} \quad [5.15]$$

從 E 點到 D 點，當中無土壤，水流視為不消耗能量，E、D 兩點總水頭相等。

若以下游水位面當成靜態水壓力的起算面，則 A、B、C 各點的各種水壓力分量如表 5-8，總水壓力那欄，抄自表 5-7 壓力水頭那一欄乘以水的單位重 γ_w 。水壓力有三個分量(u_{ss} 、 u_s 、 u_e)，這三個分量加起來就是總水壓，壓力水頭就是總水壓的能量表現。請注意到 A、B 兩點滲流水壓力 u_s ，可以從上、下游總水頭差快速計算。水從 C 流往 A 的過程中，B 正好在一半處，故 B 點滲流水壓力是「上、下游總水頭差之半」乘以水單位重 γ_w 。

表 5-8 下游水位面當成靜態水壓力的起算面 (★Terzaghi 法算砂湧會用到)

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$(H_1) \gamma_w$	0	0
B	$\left(H_1 + \left(\frac{H_2 + \Delta h}{2} \right) \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2}) \gamma_w$	$(\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2) \gamma_w$	$(\Delta h) \gamma_w$	0

$$\text{表 5-8 搭配圖 5-11，得 } z \text{ 點水壓力 } u_w = u_{ss} + u_s = (H_1 + z) \gamma_w + \frac{z}{H_2} \Delta h_t \gamma_w \quad [5.16]$$

表 5-8 的滲流水壓力 u_s 是絕對正確嗎？其實不然，若我們把上游水位面當成靜態水壓力的起算面，就會得表 5-9，兩表相比，我們發現 u_{ss} 、 u_s 都變了，但總水壓力 u_w 不變。如果題目只有一個靜態水位面，那麼 u_{ss} 、 u_s 的值就只有單一解。

表 5-9 上游水位面當成靜態水壓力的起算面

	總水壓力 u_w	= 靜態水壓力 u_{ss}	+ 滲流水壓力 u_s	+ 超額孔隙水壓 u_e
A	$H_1 \times \gamma_w$	$(H_1 + \Delta h) \gamma_w$	$-(\Delta h) \gamma_w$	0
B	$\left(H_1 + \left(\frac{H_2 + \Delta h}{2} \right) \right) \gamma_w$	$(H_1 + \frac{H_2}{2} + \Delta h) \gamma_w$	$-(\Delta h/2) \gamma_w$	0
C	$(H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$	$(H_1 + H_2 + \Delta h) \gamma_w$	0	0

若題目有兩個靜態水位面，且把下游水位面視為 $u_{ss}=0$ ，則所有的土壤滲流水壓力 u_s 恒正 (Terzaghi 用此法，要會)；若把上游水位面視為 $u_{ss}=0$ ，則所有的土壤滲流水壓力 u_s 恒負。

讀者已經知道總水頭 $h_{total} = h_e + h_p = h_e + \frac{u_w}{\gamma_w} = h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w} + \frac{u_s}{\gamma_w} + \frac{u_e}{\gamma_w}$ 。若超額孔隙水壓 u_e 為零，則上式變成

$$h_{total} = \text{位置水頭 } h_e + \text{壓力水頭 } h_p$$

$$= \text{位置水頭 } h_e + \text{靜態水壓力水頭 } \frac{u_{ss}}{\gamma_w} + \text{滲流水壓力水頭 } \frac{u_s}{\gamma_w}。 \quad [5.17]$$

參考圖 5-12，水從 B 流向 C，B 點比 C 點低 z 公尺，所以 B 的位置水頭比 C 少 z 公尺，但是 B 的靜態水壓力水頭 $h_{ss,B}$ 一定會比 C 的靜態水壓力水頭 $h_{ss,C}$ 多 z 公尺，一來一往互補打平，形成 B、C 兩點的 $(h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w})$ 一定相等，所以 B、C 兩點的總水頭差 Δh ，就是 B、C 兩點的滲流水壓力水頭差，此結論在單向度、雙向度流線網算滲流水壓力中會用到。GWT 是 Ground Water Table，意即地下水位面，或稱狹義的浸潤面(Phreatic Surface)。

又，B、C 之間的水力坡降 $i = \frac{\Delta h_t}{L} = \frac{\Delta h}{L}$ ，L 是傾斜的流線長度。

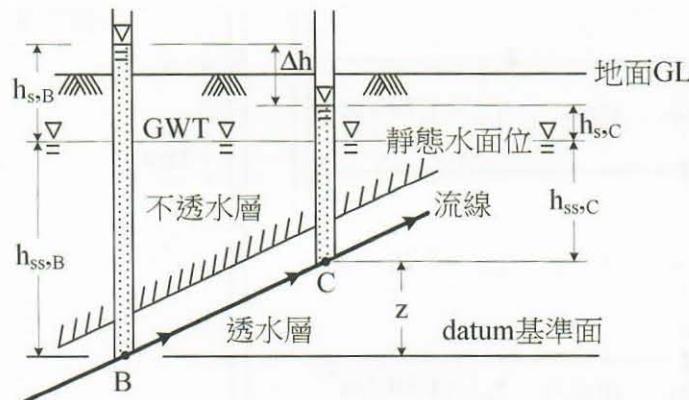


圖 5-12

表 5-10 (配合圖 5-12)

	總水頭 h_{total}	$=$	h_e	$+$	$\frac{u_{ss}}{\gamma_w}$	$+$	$\frac{u_s}{\gamma_w}$
B	$h_{ss,B} + h_{s,B}$		0		$h_{ss,B}$		$h_{s,B}$
C	$z + h_{ss,C} + h_{s,C}$		z		$h_{ss,C}$		$h_{s,C}$

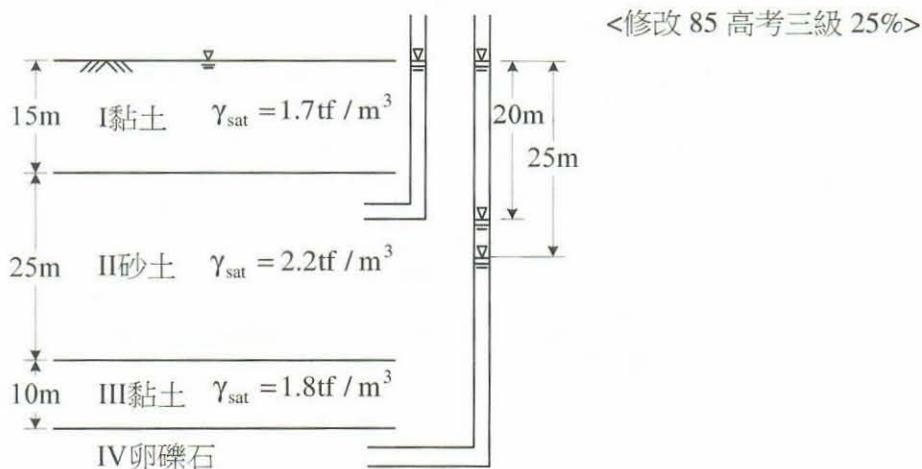
備註： $0 + h_{ss,B} = z + h_{ss,C}$ ，想不通者，看圖 5-12，一來一往互補打平。

就像材力、結構學，彎矩有符號法則，不同定義下，彎矩可能由正變負，算滲流水壓之前也要決定 u_s 為零的面(此觀點類似符號法則)。Terzaghi 以下游水面當成 u_s 為零的面。

例 5-5.1 水壓力分布圖

某土層剖面如下圖所示，其中第一層為黏土層，第二層為砂土層，第三層為黏土層，第四層為透水性相當高的卵礫石層，

- (1)原先，各個土層的地下水壓均在地表面，請求第一層、第三層黏土中點的有效應力。
- (2)後來此處因民生用水的需要，而在卵礫石層抽取地下水。由於長期抽取地下水的緣故，第三層黏土層內部的超額孔隙水壓力已完全消散，使得卵礫石層的水壓下降至地表下 20 m 處，請繪此狀態之水壓力分布圖，並求第一層、第三層黏土中點長期的有效應力。
- (3)後來抽水停止，卵礫石層及黏土層內部的水壓由逐漸恢復至靜態壓力(水壓力均達地表面)，請繪此狀態之水壓力分布圖，並求第一層、第三層黏土中點長期的有效應力。
- (4)後來此處附近的一個開挖工程亦在卵礫石層抽水，使得水壓下降至地表下 25 m 處，試繪此狀態之水壓力分布圖，並求第一層、第三層黏土中點長期的有效應力。



(1) 第一層黏土層中點 $\sigma'_v = 7.5(1.7 - 1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$

第三層黏土層中點 $\sigma'_v = (15 \times 1.7 + 25 \times 2.2 + 5 \times 1.8) - 1(15 + 25 + 5) = 89.5 - 45 = 44.5 \text{ tf/m}^2$

(2)長期水壓力分布如圖 a，第 IV 層水壓力一定要畫

$$\text{第一層黏土層中點 } \sigma'_v = 7.5(1.7-1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{第三層黏土層中點 } u_w = (40+30)/2 = 35 \text{ tf/m}^2 , \quad \sigma'_v = 89.5 - 35 = 54.5 \text{ tf/m}^2$$

(3)水壓力分布如圖 b，第 IV 層水壓力一定要畫

$$\text{第一層黏土層中點 } \sigma'_v = 7.5(1.7-1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{第三層黏土層中點 } u_w = 45 \text{ tf/m}^2 , \quad \sigma'_v = 89.5 - 45 = 44.5 \text{ tf/m}^2$$

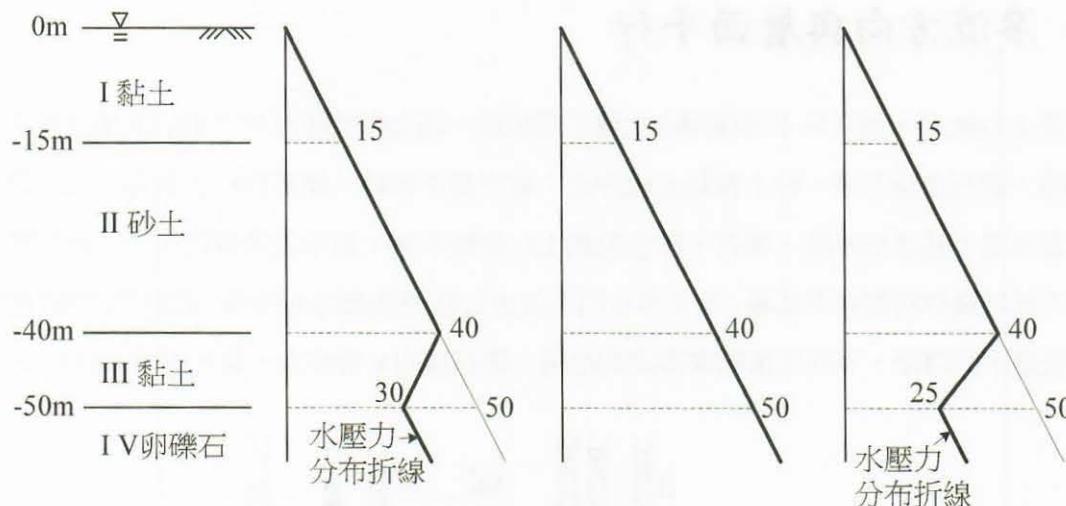


圖 a

圖 b

圖 c

(4)水壓力分布如圖 c，第 IV 層水壓力一定要畫

$$\text{第一層黏土層中點 } \sigma'_v = 7.5(1.7-1) = 5.25 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{第三層黏土層中點 } u_w = (25+40)/2 = 32.5 \text{ tf/m}^2 , \quad \sigma'_v = 89.5 - 32.5 = 57 \text{ tf/m}^2$$

(第 IV 層水壓力一定要畫，不畫是「不會畫」，不是漏畫)

討論

題目沒給第 III 層黏土滲透係數，就視其滲透係數極小，像鋼鈑一般不透水，總水頭損失皆在此層中發生。同時假定第 II 層砂的水可以左右補注，其水壓力不受第 IV 層降水影響，當然第 I 層黏土的水壓力更不受影響。第 IV 層長期降水，不會影響地表水位面下降。

到底有沒有真的懂水壓力，畫出水壓力分布圖就知道。這題筆者畢生難忘。85 年高考第一天第一堂第一題就是這題，意者請上網調閱原版考題，題幹很長，當時看到一半心就涼一半，看完題目就覺得過去土壤力學全白唸了，完全不知如何下手，考前號稱「土壤力學已經唸完三遍」，是自我感覺太良好。中午吃便當時，後座考生大言不慚「上午那題土力是我老闆命題」，頗有非該 group 出身者不能得分的洋洋得意。放榜後查號碼榜，該員落榜大吉，才知道考場內會叫的狗不會上榜。筆者雖僥倖上榜，但此卷只得 46 分，心中十分不甘願。

§5-6 滲流方向與層面平行

實際上的地層，經常是不同種類的土壤互層組成。因為在地球歷史久遠的沉積過程中，當水量大時，礫石會留下來，砂土與黏土被沖走；當水量中等時，礫石與砂土會留下來，黏土被沖走；當水量小甚至枯水時，礫石、砂土與黏土均會留下來，故不同地質階段、氣候影響，逐漸形成不同地質材料的水平互層。新北市石門區淡金公路旁隆起的海蝕洞，訴說著沉積的歷史，很明顯就是不同時期，不同沉積物堆積成的地層。礫石層的 k 會較大，黏土層的 k 會較小。

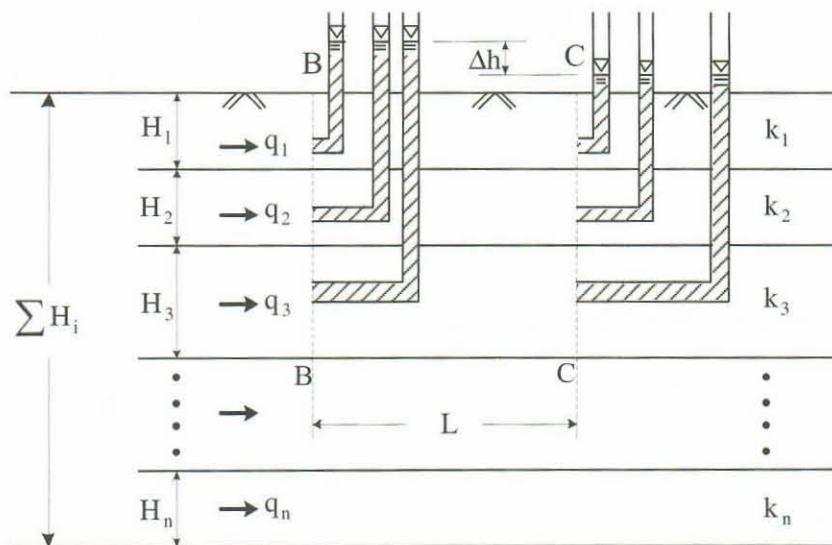


圖 5-13 水流方向平行於土壤層次

當水流方向與土壤層面平行時，如圖 5-13，總流量 q 等於各層次流量的總和，

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

其中 $q_1 = k_1 i_1 H_1$, $q_2 = k_2 i_2 H_2$, ..., $q_n = k_n i_n H_n$

各層水力坡降 i 均相同, $i_1 = i_2 = i_3 = \dots = i = \Delta h / L$

若有一等效土層總厚度 H , 等值滲透係數 k_x , $H = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n = \sum H_i$, 考慮等效土層和原土層的單位時間滲漏量相等(Why?),

$$\Rightarrow q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\Rightarrow k_x i \sum H_i = k_1 i_1 H_1 + k_2 i_2 H_2 + \dots + k_n i_n H_n \quad \text{可約掉水力坡降 } i$$

$$\Rightarrow k_x \sum H_i = k_1 H_1 + k_2 H_2 + \dots + k_n H_n$$

整理得等值滲透係數

$$k_x = \frac{\sum (H_i k_i)}{\sum H_i} = \frac{H_1}{\sum H_i} k_1 + \frac{H_2}{\sum H_i} k_2 + \dots + \frac{H_n}{\sum H_i} k_n \quad [5.18]$$

口訣：滲流「平行」層面，公式加權「平均」。

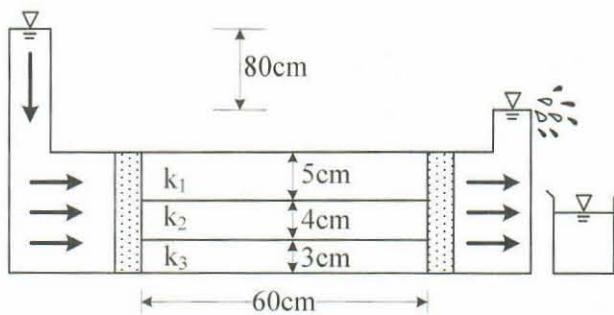
由上式可看出，若某一層 H_i 越厚，或某一層的滲透係數 k_i 越大，均會對 k_x 提供較大的貢獻。

也就是 k_x 受最厚的層次、最大的滲透係數影響最多。另外， $\frac{H_i}{\sum H_i}$ 也可說是各滲透係數的「權重係數」，權重係數 < 1.0 ，第 i 層的 k_i 乘以其權重係數後，累加即得 k_x ，而權重係數的總和是 1.0。

讀者算出 k_x 後， k_x 必然介於 k_{max} 與 k_{min} 之間，可作為簡單檢驗。 k_{max} 是各層次 k_i 中的最大值， k_{min} 是各層次 k_i 中的最小值。

例 5-6.1 流線平行層面

有定水頭裝置如圖所示，上下游水頭差 80 cm，各層土壤 $k_1=3\times10^{-4} \text{ cm/sec}$ 、 $k_2=6\times10^{-3} \text{ cm/sec}$ 、 $k_3=5\times10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，試體厚度示於圖內，試體寬度 10 cm，試求等效之滲透係數、三種土壤所受的滲流力以及 3 小時所收集到的水量。



$$(1) k_x = \frac{5}{5+4+3} k_1 + \frac{4}{5+4+3} k_2 + \frac{3}{5+4+3} k_3 = \frac{0.027}{12} = 2.25 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$$

$$(2) \text{土壤 1 承受的滲流力} = (i\gamma_w)V_1 = \frac{80}{60} \times 1 \times 0.05 \times 0.1 \times 0.6 = 0.004 \text{ tf} \quad (\rightarrow)$$

$$\text{土壤 2 承受的滲流力} = (i\gamma_w)V_2 = \frac{80}{60} \times 1 \times 0.04 \times 0.1 \times 0.6 = 0.0032 \text{ tf} \quad (\rightarrow)$$

$$\text{土壤 3 承受的滲流力} = (i\gamma_w)V_3 = \frac{80}{60} \times 1 \times 0.03 \times 0.1 \times 0.6 = 0.0024 \text{ tf} \quad (\rightarrow)$$

$$(3) \text{單位時間滲流量 } q = k_x i A = 2.25 \times 10^{-3} \times \frac{80}{60} \times 12 \times 10 = 0.36 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

$$Q = qt = 0.36 \times 3 \times 3600 = 3888 \text{ cm}^3$$

討論

對均向土壤而言，滲流力沿著滲流方向。單位時間滲流量 $q = k_1 i A_1 + k_2 i A_2 + k_3 i A_3$ ，請讀者依此算算看。滲流力方向同於滲流方向。某建築工地興建地下室而開挖降水，造成附近農民取不到地下水灌溉而抗議。在學校學工程知識是簡單的，到社會上運用，勢必和其他價值觀衝突、競合，這學問更大。工址周圍做好敦親睦鄰，是幫自己剷除困難，實不亞於專業的重要。

§5-7 滲流方向與層面垂直

當水流方向與土壤層面垂直時，如圖 5-14，第一層的總水頭損失是 Δh_1 ，第二層的總水頭損失是 Δh_2 ，第 i 層的總水頭損失是 Δh_i ，而每一層的單位時間內流量都相等(Why?)，即 $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q$ 。

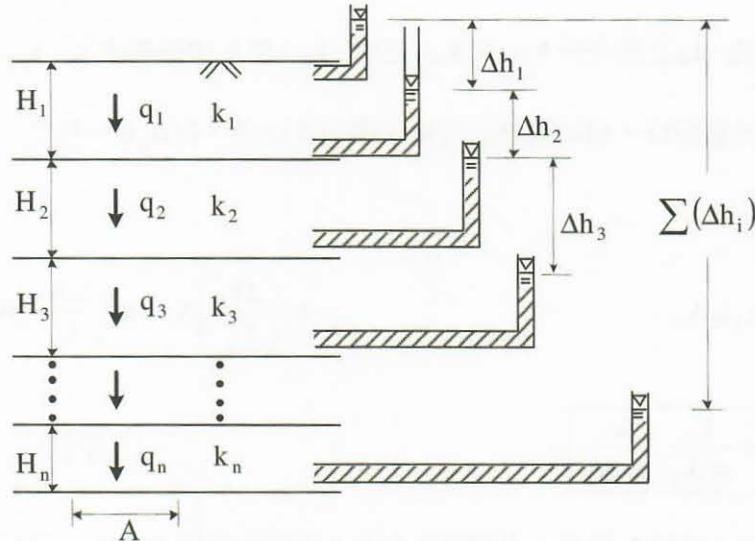


圖 5-14 水流方向垂直土壤層次

考慮一等效土層，厚度為 $\sum H_i$ ， $\sum H_i = H_1 + H_2 + H_3 + \dots + H_n$ ，等效土層的單位時間滲漏量也是 q ，等值滲透係數為 k_z ，今欲設法求 k_z ：

$$\text{因 } q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q, \text{ 展開得} \Rightarrow k_1 i_1 A = k_2 i_2 A = \dots = k_n i_n A = k_z i A \quad A \text{ 可約掉}$$

$$\Rightarrow k_1 \frac{\Delta h_1}{H_1} = k_2 \frac{\Delta h_2}{H_2} = \dots = k_n \frac{\Delta h_n}{H_n} = k_z \frac{\sum (\Delta h_i)}{\sum H_i} = \text{常數 } C = \text{外視流速 } v$$

$$\Rightarrow \Delta h_1 = \frac{CH_1}{k_1}, \quad \Delta h_2 = \frac{CH_2}{k_2}, \dots, \quad \Delta h_n = \frac{CH_n}{k_n}$$

等效土層的水頭損失為 $\sum (\Delta h_i)$ ，等於各層的水頭損失之和，即 $\sum (\Delta h_i) = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots +$

$$\Delta h_n, \Rightarrow C \frac{\sum H_i}{k_z} = C \frac{H_1}{k_1} + C \frac{H_2}{k_2} + \dots + C \frac{H_n}{k_n}$$

C 可約掉

$$\text{得 } \frac{\sum H_i}{k_z} = \frac{H_1}{k_1} + \frac{H_2}{k_2} + \dots + \frac{H_n}{k_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_i}{k_i} \right)$$

[5.19]

筆者稱呼此公式「Hong-kong 公式」，因見 H 在分子， k 在分母。

讀者算出 k_z 後， k_z 必然介於 k_{\max} 與 k_{\min} 之間。 k_{\max} 是 k_i 中的最大值， k_{\min} 是 k_i 中的最小值。

當水流垂直於層面時，相鄰兩層面的總水頭損失比例，存在著一特定公式。因相鄰兩層面流量相等， $q_1 = q_2$

$$\Rightarrow k_1 i_1 A_1 = k_2 i_2 A_2 \quad \Rightarrow k_1 \left(\frac{\Delta h_1}{L_1} \right) A_1 = k_2 \left(\frac{\Delta h_2}{L_2} \right) A_2$$

$\text{故 } \Delta h_1 : \Delta h_2 = \frac{L_1}{A_1 k_1} : \frac{L_2}{A_2 k_2}$

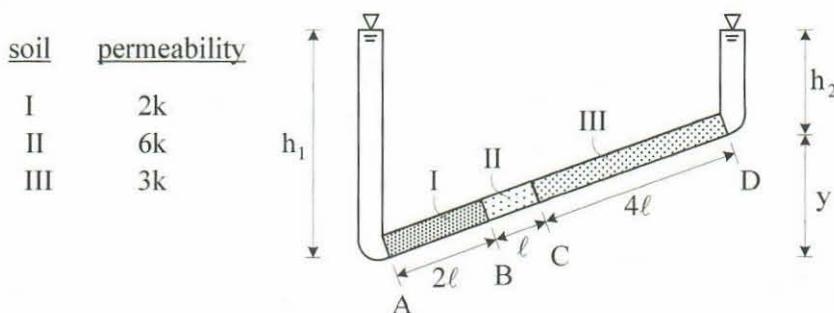
(「搶劫比」公式) [5.20]

此比例式表示：流線 L 愈長，水頭損失愈多；土壤斷面積 A 愈小，消耗能量愈多；滲透係數愈小，水頭損失也愈多。生活類比：在逢甲夜市中往前走 L 越長，體力消耗越多；人潮越洶湧前方孔隙 A 越小，硬擠體力損失越多。

例 5-7.1 流線垂直層面

考慮固定水頭狀況由左流向右，試求(1)點 B 及點 C 之水頭(total head)及(2)土壤中之流速
(flow rate)。

<中興大地組 20%>



(1) ① 滲透係數比 $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 6 : 3$

流線長度比 $L_{AB} : L_{BC} : L_{CD} = 2 : 1 : 4$

水在土壤中流動，會損失總水頭(Total Head)。總水頭的損失量(ΔH_T)，正比於流經的土

壤長度，反比於滲透係數，也反比於流經的土壤斷面積 A。即

$$\Delta H_T \propto \frac{L}{Ak}$$

② 令水流經 AB 段，所損失的總水頭為 $(\Delta H_T)_{AB}$

令水流經 BC 段，所損失的總水頭為 $(\Delta H_T)_{BC}$

令水流經 CD 段，所損失的總水頭為 $(\Delta H_T)_{CD}$

$$\Rightarrow (\Delta H_T)_{AB} : (\Delta H_T)_{BC} : (\Delta H_T)_{CD} = \frac{L_{AB}}{Ak_1} : \frac{L_{BC}}{Ak_2} : \frac{L_{CD}}{Ak_3} = \frac{2}{2k} : \frac{1}{6k} : \frac{4}{3k} = 6 : 1 : 8$$

$$\text{亦即 } (\Delta H_T)_{AB} = \frac{6}{6+1+8} (\Delta H_T) = \frac{2}{5} (\Delta H_T)$$

$$(\Delta H_T)_{BC} = \frac{1}{6+1+8} (\Delta H_T) = \frac{1}{15} (\Delta H_T)$$

$$(\Delta H_T)_{CD} = \frac{8}{6+1+8} (\Delta H_T) = \frac{8}{15} (\Delta H_T)$$

其中 (ΔH_T) 是水從 A 點流到 D 點的全部水頭損失。

③ 令 A 點所在的高程為零位能面，即 A 點的位置水頭訂為零。依斜管比例，可分別得 B、

C、D 點的位置水頭為 $\frac{2}{7}y$ 、 $\frac{3}{7}y$ 及 y ，列於表 a。

表 a

	總水頭	= 位置水頭 +	壓力水頭
A	h_1	0	h_1
B	$(\frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{2}{5}y)$	$\frac{2}{7}y$	$(\frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{4}{35}y)$
C	$(\frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{7}{15}y)$	$\frac{3}{7}y$	$(\frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{4}{105}y)$
D	$h_2 + y$	y	h_2

註：括弧內為計算所得

④ 從 A 點到 D 點，總水頭損失 $\Delta H_T = h_1 - (h_2 + y) = h_1 - h_2 - y$

$$\therefore (\Delta H_T)_{AB} = \frac{2}{5}(h_1 - h_2 - y)$$

$$B\text{ 細壓力水頭} = \left(\frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{2}{5}y\right) - \frac{2}{7}y = \frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{4}{35}y$$

$$C\text{點總水頭} = B\text{點總水頭} - (\Delta H_T)_{BC}$$

$$= \frac{3}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{15}(h_1 - h_2 - y) = \frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{7}{15}y \quad \dots \text{Ans.}$$

$$C\text{ 点压力水头} = \left(\frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{7}{15}y \right) - \frac{3}{7}y = \frac{8}{15}h_1 + \frac{7}{15}h_2 + \frac{4}{105}y$$

(2) AB 間水力坡降 i_{AB}

$$i_{AB} = \frac{(\Delta H_T)_{AB}}{2\ell} = \frac{1}{5\ell}(h_1 - h_2 - y)$$

$$\therefore \text{流速 } v = (2k)i_{AB} = \frac{0.4k}{\ell} (h_1 - h_2 - y) \dots \text{Ans.}$$

依據連續方程式，各處的流速都是 $\frac{0.4k}{\ell} (h_1 - h_2 - y)$

討論

- 乍看題圖 $h_1 = h_2 + y$ ，這是一種障眼法。倘 $h_1 = h_2 + y$ ，將無法引起滲流。故應 $h_1 > h_2 + y$ 或 $h_1 < h_2 + y$ 方能解題。本題採 $h_1 > h_2 + y$ 進行解答。
 - 計算等效滲透係數 k_{eq}

$$\frac{\sum H}{k_{eq}} = \sum \left(\frac{H}{k} \right) \Rightarrow \frac{7\ell}{k_{eq}} = \frac{2\ell}{k_1} + \frac{\ell}{k_2} + \frac{4\ell}{k_3} = \frac{2\ell}{2k} + \frac{\ell}{6k} + \frac{4\ell}{3k}$$

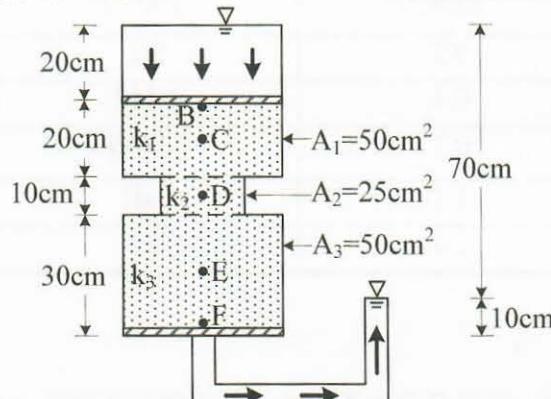
解出 $k_{eq} = 2.8k$

$$\therefore \text{流速 } v = k_{eq} i = 2.8k \left(\frac{\Delta H_T}{\sum L_i} \right) = 2.8k \left(\frac{h_1 - h_2 - y}{7\ell} \right) = \frac{0.4k}{\ell} (h_1 - h_2 - y)$$

k_{eq} 必定介於 k_{max} ($=6k$) 與 k_{min} ($=2k$) 之間。

例 5-7.2 求有效應力

考慮固定水頭狀況， $k_1=2\times10^{-4}$ cm/sec、 $k_2=4\times10^{-4}$ cm/sec、 $k_3=8\times10^{-4}$ cm/sec，各層土壤 $\gamma_{sat}=2.0$ tf/m³，C、D、E 為各層中點，試求 B、C、D、E、F 各點的有效應力與水壓力。



Sol

$$(1) (\Delta H_T)_1 : (\Delta H_T)_2 : (\Delta H_T)_3 = \frac{L_1}{A_1 k_1} : \frac{L_2}{A_2 k_2} : \frac{L_3}{A_3 k_3} = \frac{20}{50 \times 2} : \frac{10}{25 \times 4} : \frac{30}{50 \times 8} = 8 : 4 : 3$$

又 $(\Delta H_T)_1 + (\Delta H_T)_2 + (\Delta H_T)_3 = 70$ cm

$$\text{故 } (\Delta H_T)_1 = \frac{8}{15} \times 70 = 37.33 \text{ cm} \quad (\Delta H_T)_2 = 18.67 \text{ cm} \quad (\Delta H_T)_3 = 14 \text{ cm}$$

(2) 設下游液面出口處為 datum，則得下表 (unit : m) 註：括弧是該列最後算得的數字

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
上游液面	0.7		0.7		0
B	(0.7)		0.5		0.2
C	0.513		0.4		(0.113)
D	0.233		0.25		(-0.017)
E	0.07		0.05		(0.02)
F	0		-0.1		(0.1)
下游液面	0		0		0

(3) 各點總應力 $\sigma_B = 0.2 \times 1 = 0.2$ tf/m²

$$\sigma_C = 0.2 \times 1 + 0.1 \times 2 = 0.4$$
 tf/m²

$$\sigma_D = 0.2 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.05 \times 2 = 0.7$$
 tf/m²

$$\sigma_E = 0.2 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 2 + 0.15 \times 2 = 1.1$$
 tf/m²

$$\sigma_F = 0.2 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.1 \times 2 + 0.3 \times 2 = 1.4 \text{ tf/m}^2$$

水壓力 = 壓力水頭 $\times \gamma_w$

有效應力與水壓力如下表 (unit : tf/m²)

點位	總應力	=	水壓力	+	有效應力
B	0.2		0.2		0
C	0.4		0.113		0.287
D	0.7		-0.017		0.717
E	1.1		0.02		1.08
F	1.4		0.1		1.3

討論

請讀者改變 datum 位置，算算看有效應力與水壓力會不會改變。(不會)

流線與層次平行公式 $k_x = \frac{\sum(H_i k_i)}{\sum H_i}$ 顯示： k_x 乃按 H_i 對 k_i 相乘取總和，再除以 H_{total} 得到。

流線與層次垂直公式 $\frac{\sum H_i}{k_z} = \frac{H_{total}}{k_z} = \frac{H_1}{k_1} + \dots + \frac{H_n}{k_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_i}{k_i} \right)$ 顯示： $\frac{1}{k_z}$ 乃按 H_i 對 $\frac{1}{k_i}$ 相乘

取總和，再除以 H_{total} 得到。

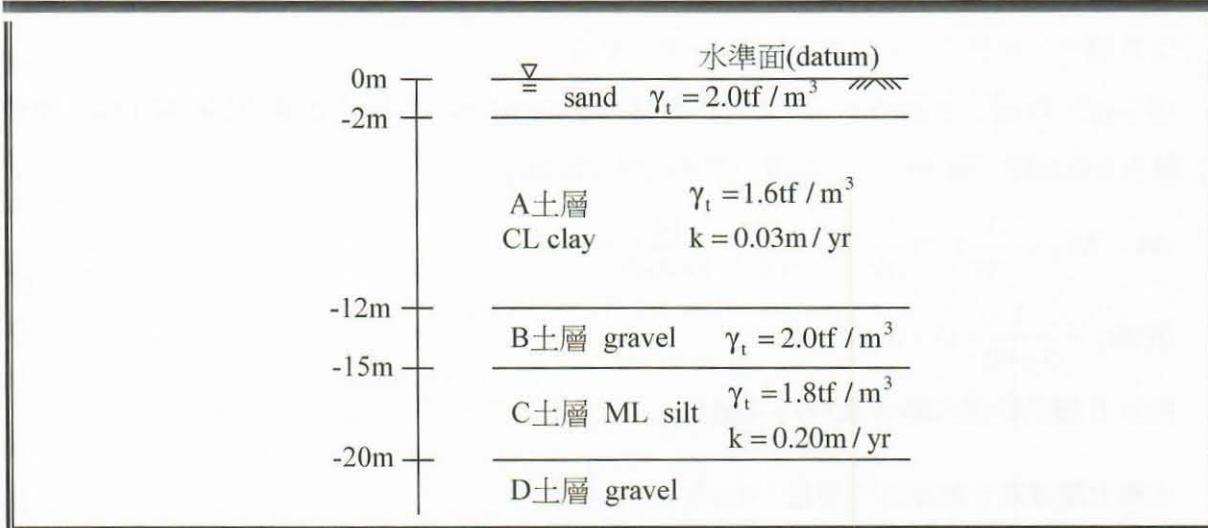
有人認為上下游總水頭差是 $(20+10+30)-10=50 \text{ cm}$ ，對還錯？為什麼？

例 5-7.3 水頭與穩態抽水量

某一地區之地層剖面圖，各層土壤之單位重(γ_l)及滲透係數(k)，如下圖所示。在 B 層中有水井抽水，整層之總水頭高程為 -8 m；D 層為蓄水層(aquifer)，整層之總水頭高程為 +5 m。地下水位面在 0 m 高程處；在表層砂、B 層及 D 層中水頭損失極微，可以不計；水流為垂直方向。

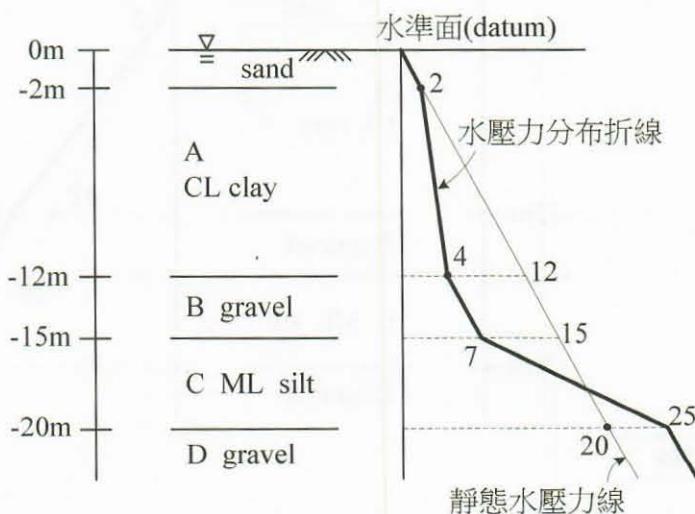
<修改 85 土木技師 30 分>

- (1) 請畫出水壓力隨深度分布圖。
- (2) B 層抽水之流量(取單位為 $\text{m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$)為何？
- (3) 在 A 層中心(高程 -7 m)及 C 層中心(高程 -17.5 m)之垂直有效應力(σ'_v ，取單位： tf/m^2)為何？
- (4) 如果停止 B 層之抽水，平衡後 B 層之總水頭高程為何？並繪水壓力隨深度分布圖。



(1) 水壓力隨深度分布圖如右

(單位 : tf/m^2)



$$(2) q = \sum (kiA) = k_A i_A A + k_C i_C A = 0.03 \left[\frac{0 - (-8)}{12 - 2} \right] \times 1 + 0.2 \left[\frac{5 - (-8)}{20 - 15} \right] \times 1 = 0.024 + 0.52 \\ = 0.544 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$$

$$(3) A \text{ 層中心總應力 } \sigma_v = 2 \times 2 + 5 \times 1.6 = 12 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{水壓力 } u_w = (2+4)/2 = 3 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 12 - 3 = 9 \text{ tf/m}^2$$

$$C \text{ 層中心總應力 } \sigma_v = 2 \times 2 + 10 \times 1.6 + 3 \times 2 + 2.5 \times 1.8 = 30.5 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{水壓力 } u_w = (25+7)/2 = 16 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力 } \sigma'_v = 30.5 - 16 = 14.5 \text{ tf/m}^2$$

(4) 「平衡後」意指達到長期穩定滲流狀態，也就是水從總水頭最高處流往總水頭最低處，亦即

從 D 層流到表層砂，中間依序經過 C、B、A 層。

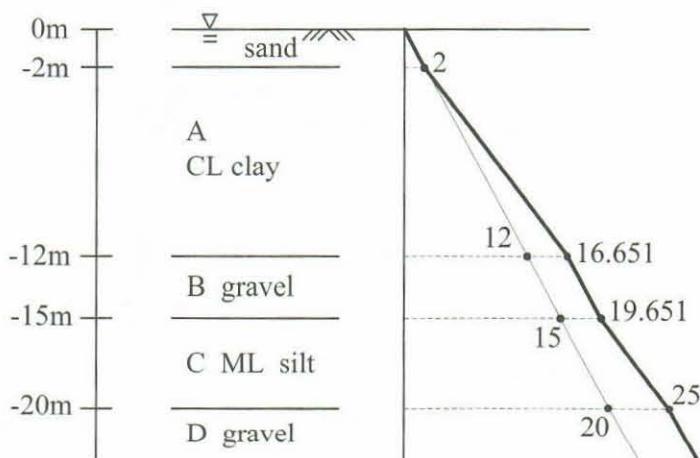
滲流起點 D 層總水頭+5 m，滲流終點表層砂總水頭+0 m，C 層及 A 層會消耗總水頭，在 C 層內消耗掉總水頭 Δh_C ，在 A 層內消耗掉總水頭 Δh_A 。

$$\Delta h_C : \Delta h_A = (\frac{L}{Ak})_C : (\frac{L}{Ak})_A = \frac{5}{1 \times 0.2} : \frac{10}{1 \times 0.03} = 3:40$$

$$\text{故 } \Delta h_C = \frac{3}{3+40} \times (5-0) = 0.349 \text{ m}$$

所以 B 層內的總水頭=5-0.349 = 4.651 m

水壓力隨深度分布圖如下(單位：tf/m²)



討論

- 注意題目規定水流是垂直向。B 層抽水，表層砂的水和 D 層的水就會往 B 層補助，水流垂直於土壤層面。
- 有人問說「我想要多抽一些水量，就多放幾台抽水機，為什麼抽水量一定是 $0.544 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$ ？」因為若多放抽水機抽水，B 層的總水頭就會降到-9 m 或-10 m，而不是題目講的-8 m。抽水量必須是 $0.544 \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{yr}$ ，才會讓 B 層總水頭穩定維持在-8m。這題目是在考一個穩態問題。
- 綠林好漢喜歡唱「此山是我開，此樹是我栽，要從樹旁過，留下買路財。」今有兩幫土匪佔據牛頭山與虎頭山，兩幫土匪依勢力大小約定：牛頭山因人多，故可劫走旅客原先身上 60%的錢財；虎頭山因人少，只可劫走旅客原先身上 40%的錢財。一倒楣旅客身懷鉅款 500 圓從樹旁過，請問兩幫土匪各劫走多少錢財？

4. 你說「媽的，歐陽你尋我開心，這問題我國小三年級就會算了。」Yes，流線和土壤層面垂直，在兩層中分別消耗總水頭，就是這種小學三年級問題。今水從 D 層流到表層砂，中間只有 C 和 A 層是土匪，B 層透水性良好像超級透水石，C 土匪和 A 土匪搶走的錢財比例是 3：40，這樣還有什麼不會算？
5. 穩態抽水時，為了確定你懂各深度的各種水頭，請練習思考，寫出下表(單位：m)

深度	總水頭	位置水頭	壓力水頭
0 m	0	0	0
-2 m	0	-2	2
-12 m	-8	-12	(4)
-15 m	-8	-15	(7)
-20 m	5	-20	(25)

6. 第(4)小題「停止 B 層之抽水」，短期內水仍從 D 層和砂層向 B 層補助，此乃因 B 的總水頭最低(-8 m)。隨著 B 層的水只進不出，B 層總水頭逐漸升高，-8 m、-7 m、-6 m、…、-1 m、0 m。當 B 層總水頭到達 0 m 時，就只有 D 層水向 B 層補助了，但 B 層的水依舊只進不出，故 B 層總水頭會繼續逐漸升高。一旦 B 層總水頭略大於 0 m，B 層內的水就開始往砂層流動，因為 B 層的總水頭大於砂層，此刻單位時間內流進 B 的量還是大於流出 B 的量。當 B 層總水頭來到 4.651m，單位時間內流進 B 層和流出 B 層的水量達到相同，形成動平衡，這就是第(4)小題要求解的。縱然垂直向水流補充有限，畢竟還是有補充，就算需要 800 年才能達於穩態動平衡，那題目就是在問 800 年後的 B 點總水頭大小。
7. 這題燒成灰我都認得。85 年高考大地工程只考 46 分之後，在不到 3 個月之內，發憤圖強把大地工程重新狂 K 兩遍，想說土技一定要雪恥。結果土技只考 35 分，請意者上網調出 85 年土技考卷自己做做看。越雪恥，恥辱越大，如果是你，還要再拼第三次嗎？再拼，會不會只剩個位分數？還是變成榜首？

§5-8 雙向度滲流與流線網

前一節土壤裡的水流是穩態單向度滲流，現討論穩態的雙向度滲流。假設土壤是完全飽和($S=100\%$)，土壤微素不膨脹也不縮小，考慮圖 5-15 的平面微素，微素垂直紙面的厚度是 dy 。

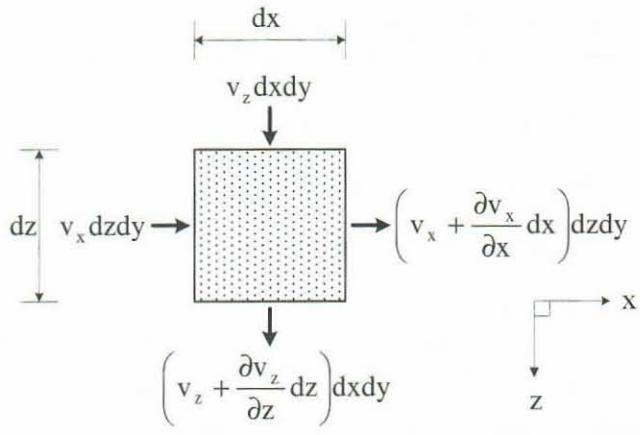


圖 5-15

單位時間內， x 方向流入微素左側面的流量為 $v_x dz dy$ ；單位時間內， z 方向流入微素上側面的流量為 $v_z dx dy$ 。單位時間內， x 方向流出微素右側面的流量為 $(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dz dy$ ；單位時間內， z 方向流出微素下側面的流量為 $(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz) dx dy$ 。

假設水不能被壓縮也不能膨脹(即密度不變)，則單位時間內流出的體積應等於流入的體積(i.e., 質量不減變成體積不減)，得 $(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dz dy + (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz) dx dy = v_x dz dy + v_z dx dy$

$$\text{整理得 } \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = 0$$

$$\text{化簡得 } \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{此偏微分方程式與時間 } t \text{ 無關，為穩態問題})$$

物理意義：「土壤內任一點，兩方向的速度函數，均對位移方向微分，總和為零」。

$$\text{因 } v_x = -k_x i_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_z = -k_z i_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\text{故 } k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (h \text{ 是總水頭函數，自變數是 } x \text{ 與 } z) \quad [5.21]$$

【若是單向度滲流，則化簡成 $k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ 】

若土壤是等向性 ($k_x = k_z$)，

$$\text{則 } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{總水頭對位置的二次微分，總和為零}) \quad [5.22]$$

此式稱為 Laplace's equation，它指出雙向度滲流的總水頭函數 $h(x, z)$ 須滿足的條件。若滲流退縮成單向度(z 向)，則 Laplace's equation 退縮成 $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ [5.23]

上式你在定水頭試驗例題見過，很像材力樑變形問題之「樑變形後，曲率處處為零」的問題，即 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ 。

例如簡支樑，樑上無載重，但有一支承發生沉陷，就滿足「樑變形後，曲率處處為零」。

實際地工問題邊界條件複雜，式[5.21]很難求解析解，大部分工程師常用圖解法、數值法求解，而考試就只用圖解法(畫流線網，Flow Net)了。流線網由兩組數學函數組成，即勢能函數(Potential Function) $\Phi(x, z)$ 和流線函數(Stream Function) $\Psi(x, z)$ 。

假設整個土層的土壤乃均質且均向， $k_x = k_z = k$ ，考慮建立函數 $\Phi(x, z)$ ，使其能滿足下兩式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x = x \text{ 向的流速} = -k i_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad [a]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = v_z = z \text{ 向的流速} = -k i_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad [b]$$

$$[a] \text{ 對 } x \text{ 再微分，得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad [c]$$

$$[b] \text{ 對 } z \text{ 再微分，得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad [d]$$

$$[c] + [d] \quad \text{得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = -k \times 0 = 0$$

顯然函數 $\Phi(x, z)$ 是 Laplace's eq. 的解。



從[a]可得 $\Phi(x, z) = -kh(x, z) + f(z)$

從[b]可得 $\Phi(x, z) = -kh(x, z) + g(x)$

因為 x 和 z 是獨立且無關的自變數，所以 $f(z)=g(x)=C=\text{常數}$ 。故 $\Phi(x, z) = -kh(x, z) + C$ ，或

$$\text{寫成 } h(x, z) = \frac{1}{k} [C - \Phi(x, z)] \quad [\text{e}]$$

若指定 $h(x, z)=\text{常數 } h_1$ ，則[e]式代表 $x-z$ 平面的一條曲線。對該曲線而言， $\Phi(x, z)$ 也等於一個常數值 Φ_1 ，這就是等勢能線(Equipotential Line)。於是，我們可以對指定一連串的常數 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ_3 、…，就可以畫出一連串的等勢能線，其總水頭值分別為 $h = h_1, h_2, h_3, \dots$ 。

考慮建立函數 $\Psi(x, z)$ ，使其能滿足以下兩式：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_x = x \text{ 向的流速} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \quad [\text{f}]$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_z = z \text{ 向的流速} = -k \frac{\partial h}{\partial z} \quad [\text{g}]$$

$$\text{比較[a]式及[f]式，得 } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad [\text{h}]$$

$$[\text{h}] \text{式的等號兩側再對 } z \text{ 微分，得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad [\text{i}]$$

$$\text{比較[b]式及[g]式，得 } \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad [\text{j}]$$

$$[\text{j}] \text{式的等號兩側再對 } x \text{ 微分，得 } -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad [\text{k}]$$

$$[\text{i}]+[\text{k}] \quad \text{得 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = 0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

顯然函數 $\Psi(x, z)$ 也是 Laplace's eq. 的解。

若指定 $\Psi(x, z)$ 等於一連串常數 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \dots$ ，也會在 $x-z$ 平面得到一連串的曲線，這些曲線就是流線(Flow Line)。注意勢能函數其實是「一組」曲線，流線函數也是「一組」曲線，因為可以指定不同的常數值。能滿足 Laplace's eq. 的函數稱為 Harmonic Function，如

$h(x,z)=3x+5z$ 、 $h(x,z)=e^x \cos z$ 、 $h(x,z)=e^x \sin z$ 、 $h(x,z)=\sin(x+z)$ 、…等等。但實際的雙向度滲流，要考慮到邊界問題，不是亂找個 Harmonic Function 就說是解。

給予定義： $\Phi(x,z) \equiv -kh(x,z) + C$ ，其中 k 是滲透係數， C 是常數。

$$\text{全微分 } d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = -k \frac{\partial h}{\partial x} dx - k \frac{\partial h}{\partial z} dz = -k i_x dx - k i_z dz = v_x dx + v_z dz$$

令勢能函數等於某一常數時，可畫出一條等勢能線，此等勢能線由於勢能不變，故 $d\Phi = 0$ ，即 $v_x dx + v_z dz = 0$ ，換言之 $\frac{dz}{dx} = -\frac{v_x}{v_z} = -\frac{1}{(\frac{v_z}{v_x})}$ 。

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot \frac{v_z}{v_x} = -1 \quad [5.24]$$

$\frac{dz}{dx}$ 是指等勢能線的斜率， $\frac{v_z}{v_x}$ 是流線(Flow Line, Stream Line)的切線方向，換言之，等勢能線和流線垂直正交【此為 103 年公務高考三級考 15 分證明題】。讀者看到這邊已經連續看兩頁數學推導，樑變形問題只有一個自變數 x ，考場會考，但雙向度滲流有兩個自變數(x 與 z)，比樑還難，但技師考試不是考你適不適合唸碩博士，這兩頁推導 30 年來只考過一次。

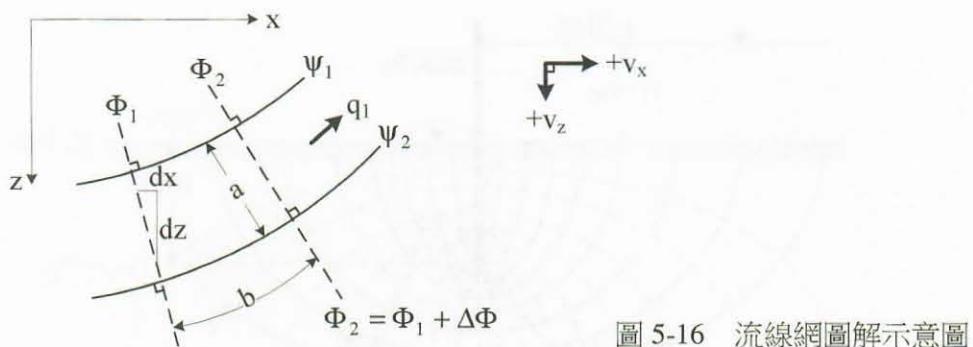


圖 5-16 流線網圖解示意圖

已知上下游總水頭差為 Δh_t ，若畫了 N_q 個等勢能間格數，則經過每一個等勢能間格，所損失的總水頭為 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，如果在一格之內的流線長度為 b ，則該格的水力坡降 $i = \frac{\Delta h_t}{N_q \cdot b}$ 。

茲取出紙面一單位寬的流槽分析，一個流槽的單位時間流量 q_1 ， $q_1 = kiA = k \frac{\Delta h_t}{N_q \cdot b} a$ ，其中

a 是流槽寬度。若整個流線網有 N_f 個流槽，則流線網的單位時間流量 $q = N_f q_l = k \frac{N_f \Delta h_t}{N_q \cdot b} a$ 。

為了方便計算，畫圖時可選擇 $a = b$ ，則有 $q = k \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t$ [5.25]

注意 q 的單位是「單位寬度、單位時間內的水體積」，如 $\text{m}^3/\text{day}/\text{m}$ 。公式 $q = k \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t$ 其實

導源於 $q = kiA$ ，兩者計算結果必定殊途同歸。

以下列出常見的流線網，這些流線網都是在敘述穩態問題：「某一固定點的物理量不隨時間改變，但物理量可能隨地點改變」。

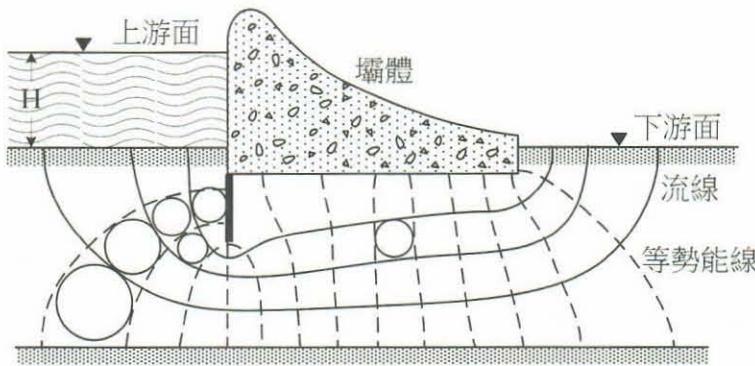


圖 5-17 $N_f = 4$, $N_q = 14$

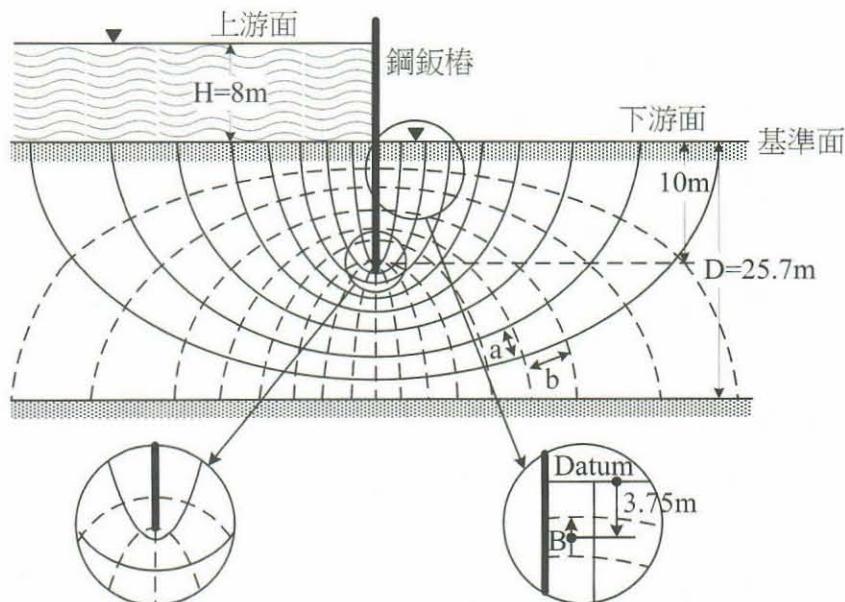
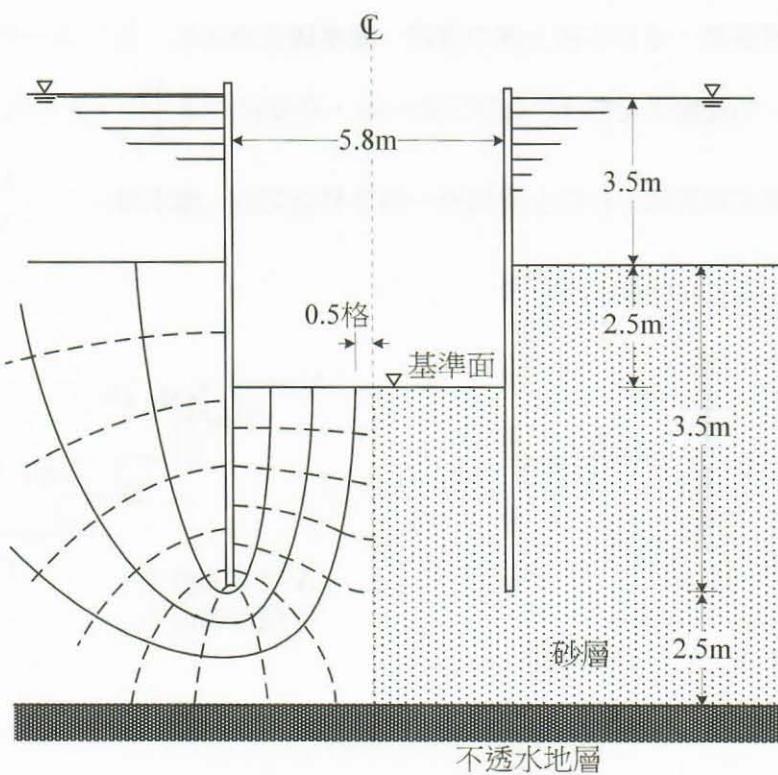
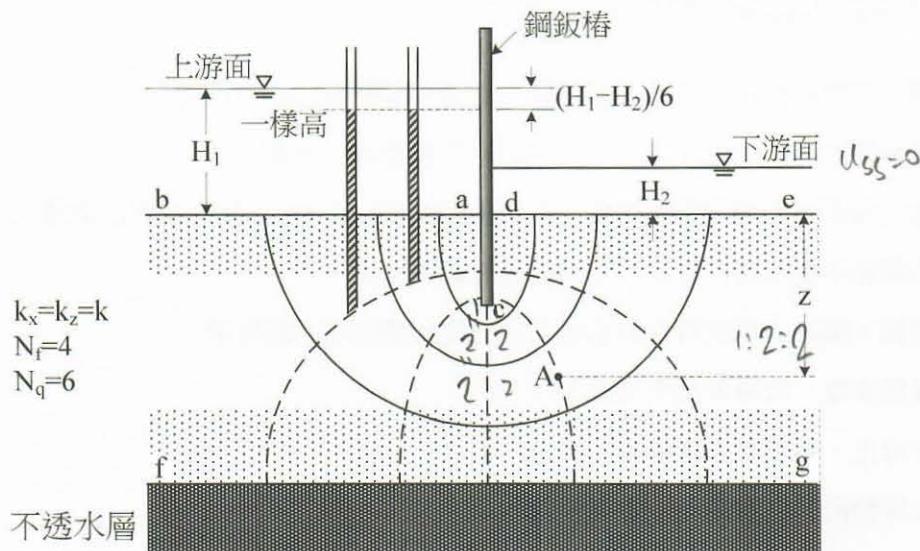


圖 5-18 $N_f = 9$, $N_q = 18$, 流線 10 條，等勢能線 19 條



$$k_J = k_J$$

畫均質均向土壤的流線網時，應記住以下要訣：

- 1.以鉛筆試畫，先畫鋸樁正下方的流線位置，流線和等勢能線應該正交。
- 2.考試時儘量將網格畫成曲邊正方形，使內部儘可能塞進一正圓。
- 3.鋸樁底部之尖端處，因邊界條件複雜，未必滿足 Laplace's eq.，網格未必是曲邊正方形。
- 4.等勢能線必須和不透水邊界正交。等勢能線彼此不交叉。
- 5.若流線網對稱，圍堰內可能有近似水平之等勢能線連結左右鋼板樁。
- 6.不透水邊界是流線。流線彼此不交叉。
- 7.曲線儘量平滑化，不要有尖銳轉折。
- 8.流槽數量和等勢能間格數量不一定要整數。
- 9.建議考試時，流槽數量畫 3~4 個，不致耗時太久，不致精度太差。
- 10.遇到濾層，濾層表面不是等勢能線，流線未必正交於濾層。濾層視為排水迅速，濾層處可視壓力水頭為零，嚴格講是還有靜態水壓力。

上游側總水頭最高，隨著水在土壤中流動，總水頭逐漸消耗，每經過一個等勢能間格，總水頭就下降 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，如此像是走樓梯，每往下走一階，高度就下降 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，此可稱「樓梯理論」。反過來講，下游側總水頭最低，每往上游經過一個等勢能間格，總水頭就上升 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ ，如此像是走樓梯，每往上走一階，高度就上升 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。

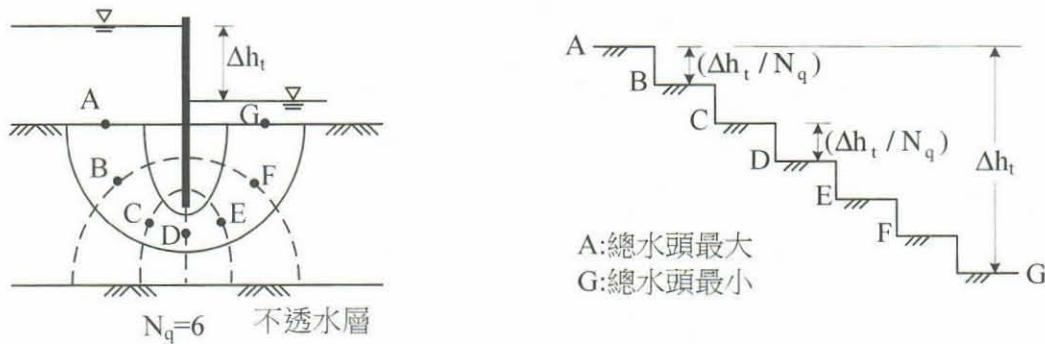


圖 5-21 各點總水頭大小關係，「樓梯理論」示意

如果土壤均質但不均向(anisotropic)， $k_x \neq k_z$ ，這樣流線和等勢能線就不會正交，順水流方向的滲透係數 k_e 將介於 k_x 、 k_z 之間。前述[5.20]已經導出 $k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ ，若直接按原始比

例畫壩體與土層斷面，流線和等勢能線不會正交。為了畫出能正交的流線網，我們必須進行「斷面轉換(Transformation)」，簡單講是修正畫圖時 x 方向的長度。建立 $x_T = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}x$ ，將壩體在 x 方

向的長度乘以 $\sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$ ， z 方向長度維持不變。對大部分的地層而言，常是 $k_x > k_z$ ，所以常常是縮

短壩體長度，如果 $k_x = 9k_z$ ，那就是壩體長度變成原來的三分之一，壩高不變，縮短之後再畫流線網，流線和等勢能線就正交，並且在圖上算出 N_f 、 N_q ，計算滲流量的公式也修正為

$$q = k_e \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t = \sqrt{k_x k_z} \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t \quad [5.26]$$

原理說明：

建立 $x_T = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}x$

則 $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x_T} \frac{\partial x_T}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x_T} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$

再對 x 偏微分得 $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} \frac{k_z}{k_x}$ (勿忘連鎖律)

將上式代入[5.20]，得 $k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} \frac{k_z}{k_x} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$

化簡得 $\frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$ [5.27]

[5.27]就是轉換後的 Laplace's eq.，依 x_T 、 z 為尺度就可以畫出正交的流網圖。轉換後的斷面，流線與等勢能線正交，代表 x 向與 z 向滲透係數變成一致，土壤變成均向，滲透係數變成 $k_e = \sqrt{k_x k_z}$ ，介於 k_x 與 k_z 之間。轉換後才可用 $q = k_e(\Delta h_t)N_f / N_q$ 算滲漏量。

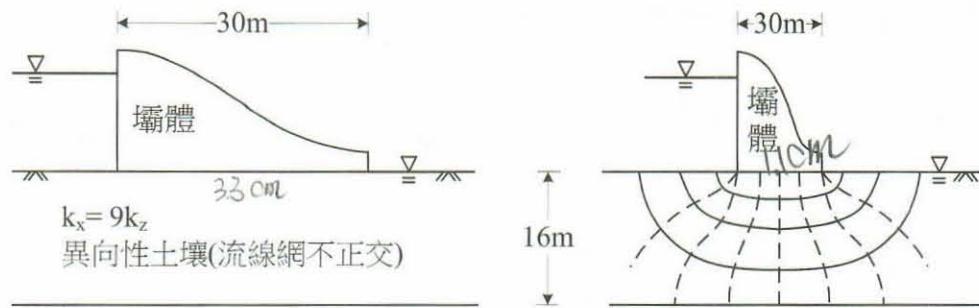


圖 5-22 左圖是轉換前，右圖是轉換後(轉換後水平壓縮壩體)

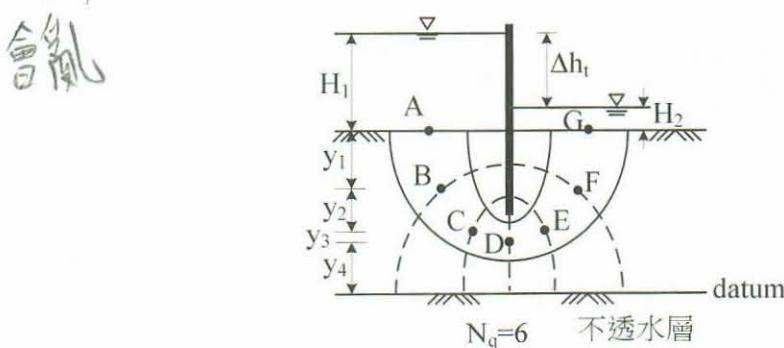
對於上面左右兩圖，轉換前後，壩高度不變，轉換後通常壩體水平方向被壓縮，若 $\sqrt{k_x / k_z} = 2$ ，則水平向壓縮兩倍；若 $\sqrt{k_x / k_z} = 3$ ，則水平向壓縮三倍。

若畫三個流槽，鋼鈑樁底下之流槽寬度約可取 1 : 2 : 2。

例 5-8.1 樓梯理論

有一鋼鈑樁底下之流線網如圖所示，

- (1) 請問 A、B、C、D、E、F、G 各點總水頭、位置水頭、壓力水頭=？
- (2) 請問 A、B、C、D、E、F、G 各點水壓力=？
- (3) 請以下游側水面為靜態水位面，求 A、B、C、D、E、F、G 各點水壓力=？
- (4) 請以 ~~上~~ 游側水面為靜態水位面，求 A、B、C、D、E、F、G 各點水壓力=？

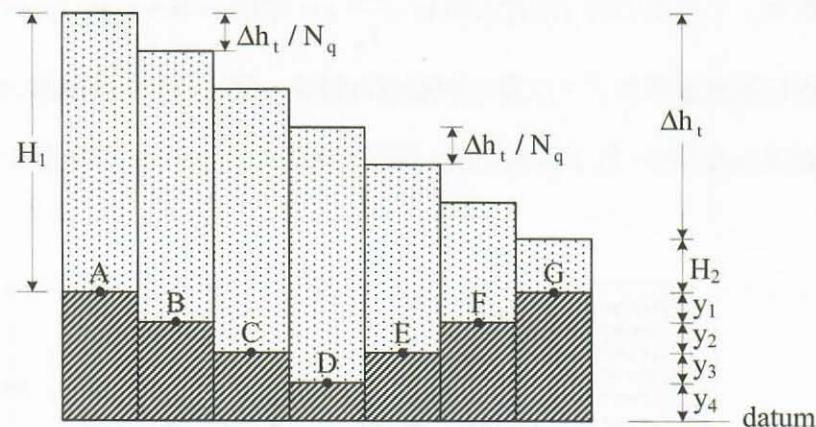


(1)

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
A	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1$		$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$		H_1
B	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$		$y_2 + y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$
C	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$		$y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$
D	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$		y_4		$H_1 + y_1 + y_2 + y_3 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$
E	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$		$y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$
F	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$		$y_2 + y_3 + y_4$		$H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$
G	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \Delta h_t$		$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$		$H_1 - \Delta h_t (=H_2)$

總水頭柱狀圖圖解如下，位置水頭圖例為斜線，壓力水頭圖例為芝麻點。從上游到下游，

總水頭遞降如下樓梯般，每階下降高度 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



(2) 總水壓力 $u_w = \gamma_w \times (\text{壓力水頭})$

$$u_A = \gamma_w (H_1)$$

$$u_B = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1)$$

$$u_C = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2)$$

$$u_D = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 + y_3 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3)$$

$$u_E = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4)$$

$$u_F = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5)$$

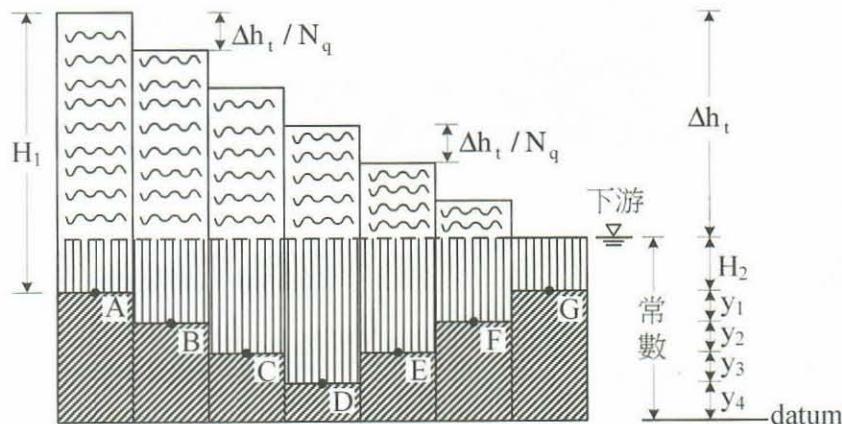
$$u_G = \gamma_w (H_1 - \Delta h_t) = \gamma_w H_2$$

(3) 下游水面當成 $u_{ss} = 0 \text{ tf/m}^2$ 的計算位置

點位	總水頭	= 位置水頭 h_e	$\frac{u_{ss}}{\gamma_w}$	$\frac{u_s}{\gamma_w}$
A	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1$	$y_1+y_2+y_3+y_4$	H_2	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 6 (= \Delta h_t)$
B	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$	$y_2+y_3+y_4$	H_2+y_1	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$
C	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$	y_3+y_4	$H_2+y_1+y_2$	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$
D	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$	y_4	$H_2+y_1+y_2+y_3$	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$
E	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$	y_3+y_4	$H_2+y_1+y_2$	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$
F	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$	$y_2+y_3+y_4$	H_2+y_1	$\frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$
G	$y_1+y_2+y_3+y_4+H_1 - \Delta h_t$	$y_1+y_2+y_3+y_4$	H_2	0

注意觀察：上表各列的 (位置水頭 $h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w}$) = 常數 = $H_2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

總水頭柱狀圖圖解如下，位置水頭圖例為斜線，靜水壓壓力頭圖例為垂直線，滲流水壓壓力頭圖例為波浪線。從下游到上游，滲流水壓力水頭遞升如上樓梯般，每階上升高度 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



$$u_A = \gamma_w (H_2 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 6)$$

$$u_B = \gamma_w (H_2 + y_1 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5)$$

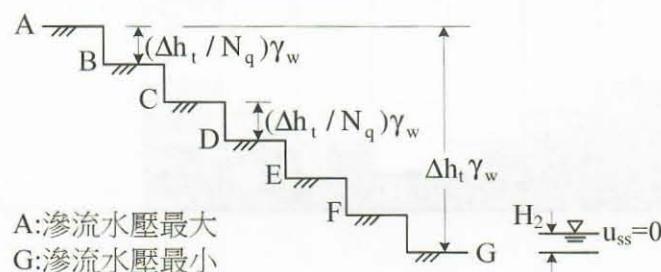
$$u_C = \gamma_w (H_2 + y_1 + y_2 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4)$$

$$u_D = \gamma_w (H_2 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3)$$

$$u_E = \gamma_w (H_2 + y_1 + y_2 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2)$$

$$u_F = \gamma_w (H_2 + y_1 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1)$$

$$u_G = \gamma_w (H_2)$$

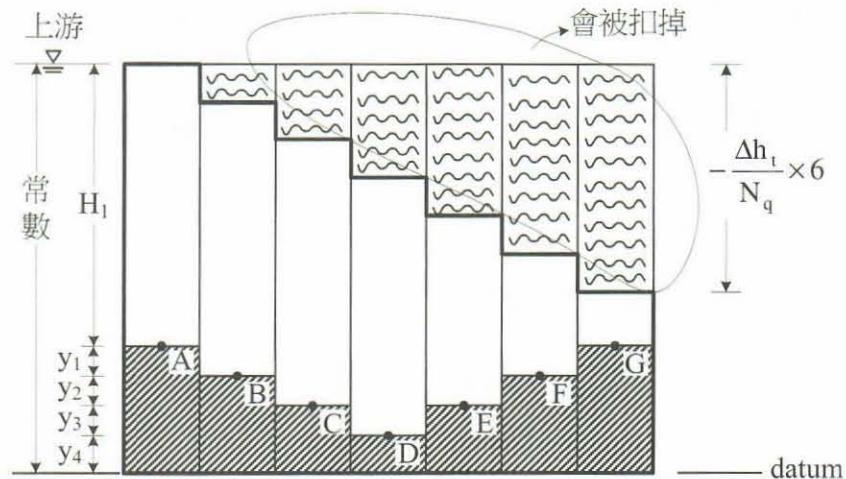


(4) 上游水面當成 $u_{ss} = 0$ tf/m² 的計算位置

點位	總水頭	= 位置水頭 h_e	$+ \frac{u_{ss}}{\gamma_w}$	$+ \frac{u_s}{\gamma_w}$
A	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1$	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$	H_1	0
B	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$	$y_2 + y_3 + y_4$	$H_1 + y_1$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1$
C	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$	$y_3 + y_4$	$H_1 + y_1 + y_2$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2$
D	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$	y_4	$H_1 + y_1 + y_2 + y_3$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3$
E	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$	$y_3 + y_4$	$H_1 + y_1 + y_2$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4$
F	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$	$y_2 + y_3 + y_4$	$H_1 + y_1$	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5$
G	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + H_1 - \Delta h_t$	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$	H_1	$- \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 6 (= -\Delta h_t)$

注意觀察：上表各列的 (位置水頭 $h_e + \frac{u_{ss}}{\gamma_w}$) = 常數 = $H_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

位置水頭圖例為斜線，滲流水壓壓力頭圖例為波浪線。從上游到下游，滲流水壓力水頭遞降如下樓梯般，每階下降高度 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。



$$u_A = \gamma_w (H_1)$$

$$u_B = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1)$$

$$u_C = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 2)$$

$$u_D = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 + y_3 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 3)$$

$$u_E = \gamma_w (H_1 + y_1 + y_2 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 4)$$

$$u_F = \gamma_w (H_1 + y_1 - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 5)$$

$$u_G = \gamma_w (H_1 - \Delta h_t) = \gamma_w H_2$$

討論

在「規定下游地面 $u_s=0$ 」的前提下，若從下游往上游算，每經過一等勢能間格， $\frac{u_s}{\gamma_w}$ 的值將逐格遞增 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。在「規定上游地面 $u_s=0$ 」的前提下，若從上游往下游算，每經過一等勢能間格， $\frac{u_s}{\gamma_w}$ 的值將逐格遞降 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。

請注意樓梯理論都是以「等勢能間格數」作為線性內插、走樓梯的依據。由於流線網每一格的流線長度並不一樣，故並不是以流線長度作為線性內插、走樓梯的依據，每一格的平均水力坡降也不一樣。總水頭大小，有依樓梯升降的特質；滲流水頭大小，也有依樓梯升降的特質。

在第(3)和第(4)小題解答表格裏，任兩點間的總水頭差距值就是 $\frac{u_s}{\gamma_w}$ 的差距值，也就是 $\frac{\Delta h_t}{N_q}$ 。

此例題已經提出三種方法求流線網內任一點的水壓力，你看見了嗎？

①利用「總水頭 = 位置水頭+壓力水頭」來算。(不須算出 u_{ss} 、 u_s)

②訂下游液面 $u_{ss}=0$ ，從下游側靜態水位面來算，從下游往上游走， u_s 為正數。

(須算出 u_{ss} 、 u_s)

③訂上游液面 $u_{ss}=0$ ，從上游側靜態水位面來算，從上游往下游走， u_s 為負數。

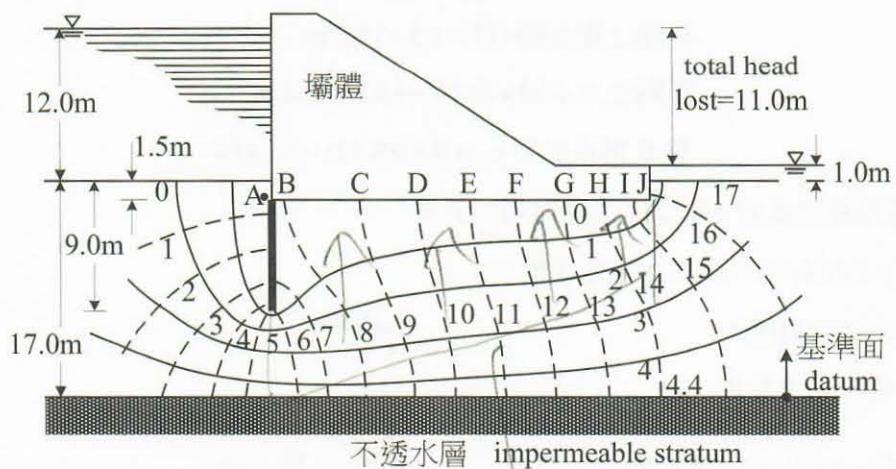
(須算出 u_{ss} 、 u_s)

在 Terzaghi 的砂湧分析，會使用到②的內容。

例 5-8.2 壩體上浮力

有一壩體底下之流線網如圖所示，土壤 $k = 5.2 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$

- (1) 請問流槽數量=？
- (2) 請問等勢能間隔數量=？
- (3) 請問每通過一個等勢能線間格，總水頭損失多少？
- (4) 請問每日之滲漏量 $q=$ ？
- (5) 請求 A、B、C、...J 各點水壓力。(J 是壩體右下角)
- (6) 上、下游之間壩體長度 30 m，請問壩體承受的上浮力=？



浮力

$$(1) N_f = \underline{4.4}$$

(2) $N_q = \underline{17}$

(3) $\frac{\Delta h_t}{N_q} = \frac{11}{17} = \underline{0.647 \text{ m/格}}$

(4) $q = k \frac{N_f}{N_q} (\Delta h_t) = 5.2 \times 10^{-5} \times \frac{4.4}{17} \times 11 = 1.48 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{sec/m} = \underline{12.79 \text{ m}^3/\text{day/m}}$

(5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Φ_i	0.5	8	9	10	11	12	13	14	15	15.7
$u_w(\text{kPa})$	129	82	75	69	63	56	50	44	37	33

從上游往下游算，A 點位在第 0.5 格處($\Phi_i = 0.5$)，B 點位在第 8 格處($\Phi_i = 8$)，…，J 點位在第 15.7 格處($\Phi_i = 15.7$)。

上游液面總水頭 29m，A 點總水頭 $= 29 - 0.5 \times \frac{11}{17} = 28.68 \text{ m}$

A 點位置水頭 $= 17 - 1.5 = 15.5 \text{ m}$

A 點壓力水頭 $= 28.68 - 15.5 = 13.18 \text{ m}$

故 A 點水壓力 $u_w = 9.81(13.18) = \underline{129 \text{ kPa}}$

B 點總水頭 $= 29 - 8 \times \frac{11}{17} = 23.82 \text{ m}$

B 點位置水頭 $= 17 - 1.5 = 15.5 \text{ m}$

B 點壓力水頭 $= 23.82 - 15.5 = 8.32 \text{ m}$

故 B 點水壓力 $u_w = 9.81(8.32) = \underline{82 \text{ kPa}}$

其餘各點算法雷同，算出之水壓力列於上表

(此法不必從靜態水位面找靜態水壓力 u_{ss})

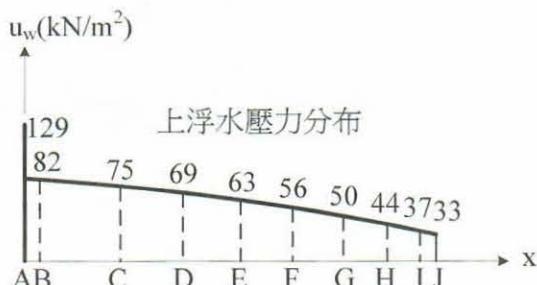
(6) 出紙面每單位寬度，

壩體承受的上浮力 B

$$B = \frac{1}{2} (82 + 33) 30 = \underline{1725 \text{ kN/m}}$$

討論

A 點水壓力也可以這樣算：



$$u_w = u_{ss} + u_s = (12 + 1.5)9.81 - 0.5\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 129 \text{ kPa}$$

$$\text{同理, B 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (12 + 1.5)9.81 - 8\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 82 \text{ kPa}$$

$$\text{依序可得 J 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (12 + 1.5)9.81 - 15.7\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 33 \text{ kPa}$$

這種算法是把上游液面當成靜態水壓力的起算基準, $u_w = u_{ss} - \frac{\Delta h_t}{N_q} \times m \times \gamma_w$, m 是從上游面算過來的格數。

另外一種算法是把下游液面當成靜態水壓力的起算基準, 要注意 u_s 細節:

$$\text{J 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (1.0 + 1.5)9.81 + (17 - 15.7)\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 33 \text{ kPa}$$

從下游起算, J 點位在第 1.3 格處, $17 - 15.7 = 1.3$ 。

$$\text{I 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (1.0 + 1.5)9.81 + (17 - 15)\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 37 \text{ kPa}$$

$$\text{依序可得 A 點水壓力: } u_w = u_{ss} + u_s = (1.0 + 1.5)9.81 + 16.5\left(\frac{11}{17}\right)9.81 = 129 \text{ kPa}$$

$$u_w = u_{ss} + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times n \times \gamma_w, n \text{ 是從下游面算過來的格數。}$$

讀者應該已經體會到, 不論從上游算或下游算, 水壓力 u_w 不會因算的方向而改變, 所以命題者可以考水壓力 u_w 之值。但是因為有兩個靜態水位面, 造成有兩種 u_{ss} 為零的起算基準, 進而影響 u_s 有兩套答案。既然 u_{ss} 與 u_s 各有兩套答案, 所以命題者比較不會考「 u_s 是多少?」

歐陽獨門心法: 不管從上游算或從下游算 u_w , 明顯計算式都是「內插」的形式。參考下圖, 對 A 點來講, 一左一右有兩個靜態水位面, A 點的水壓力 u_w 是較大的 $H_1 \gamma_w$ 還是較小的 $H_2 \gamma_w$? 都不是, 乃是介於其間, 就用「等勢能間隔數」在 $H_1 \gamma_w$ 、 $H_2 \gamma_w$ 之間線性內插。

若在圖 5-23 的 A 點前方(上游側)有 Φ_i 個等勢能間格數, 則依照線性內插, A 點水壓力 $u_w = H_1 \gamma_w - (H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{\Phi_i}{N_q}$ 。這種算法是把上游水位面當成靜態水壓力 u_{ss} 的計算基準, 所以滲流水壓力 $u_s = -(H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{\Phi_i}{N_q}$ 。

當然也可以從屁股(下游側)算過來，A 點水壓力 $u_w = H_2 \gamma_w + (H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{m}{N_q}$ 。這種算法是把下游水位面當成靜態水壓力 u_{ss} 的計算基準，所以 $u_s = + (H_1 \gamma_w - H_2 \gamma_w) \frac{m}{N_q}$ 。

考試時，只會問你某一點的水壓力 u_w 是多少，不會問你某一點的 u_s 、 u_{ss} 是多少，請勿窮鑽牛角尖。若算壩體所受的上浮力，是找 u_w 算上浮力。

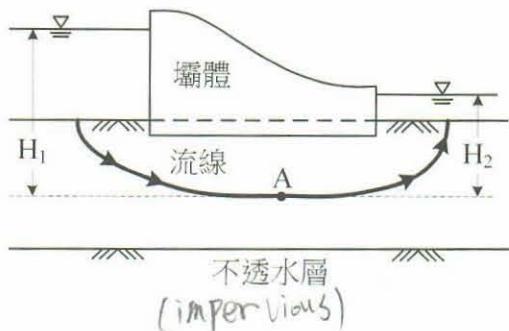


圖 5-23

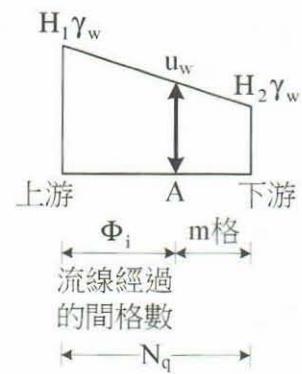


圖 5-24

例 5-8.3 流線網

參考圖 5-18，土壤 $k = 3 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，土壤 $\gamma_{sat} = 2.1 \text{ tf/m}^3$ ，

- (1) 請問流槽數量 = ?
- (2) 請問等勢能間隔數量 = ?
- (3) 請問每通過一個等勢能線間格，總水頭損失多少？
- (4) 請問每日之滲漏量 $q = ?$
- (5) 請求 B 點水壓力與有效應力。



$$(1) N_f = \underline{9}$$

$$(2) N_q = \underline{18}$$

$$(3) 8/18 = \underline{0.444 \text{ m/格}}$$

$$(4) q = k \frac{N_f}{N_q} (\Delta h_t) = 3 \times 10^{-6} \times \frac{9}{18} \times 8 = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = \underline{1.0368 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}}$$

(5)總應力 = $2.1 \times 3.75 = 7.875$ tf/m²

$$\text{水壓力} = 3.75 + \frac{8}{18} \times 1.5 = 4.417 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{有效應力} = 7.875 - 4.417 = 3.458 \text{ tf/m}^2$$

討論

畫流線網增加 N_f 的同時，也會增加 N_q ，造成 $\frac{N_f}{N_q}$ 不變，故 q 不變。但上下游水頭差變大， q 會增加。 $\frac{N_f}{N_q}$ 的值稱為形狀因子(Shape Factor)，此值與 k 之大小、上下游水頭差之大小無關。

土壤力學與基礎工程只是加減乘除的學問，還搞不懂這些東西的話，建議不要走考試這條路，自己的資質應該在其他方面，趕快找出自己的人生強項，不要在考試上消磨人生。

愛情是反覆無常還是恆久不變？恐怕各 50%，但考古題 90% 是恆久不變。

(還沒看) §5-9 濾層設計 少

水在土壤中流動，滲流力量可能會把小顆粒從中、大顆粒的空隙之間帶走，形成掏空。小顆粒被沖得差不多時，就換成中顆粒被沖走，唇亡齒則寒，再來換大顆粒被刷走，掏空的範圍愈來愈大。我們希望(1)水能順利流走，就能降低水壓力，水若不能流走，水壓就會越來越大，對結構體或土壤的威脅愈來愈大；(2)水流走的同時，又不要把土壤帶走。

舉濾掛式咖啡為例，當濾紙雙耳掛在杯緣之後，在濾紙內倒入熱水，水能通過濾紙變成好喝的熱咖啡，咖啡渣卻不會通過濾紙掉入杯底。濾層就像濾紙一樣，讓水通過，卻能攔截土壤顆粒。對，濾層就像濾網，紗布、不織布都是濾網、底部有洞用來撈麵的湯杓也是廣義濾網。

我們可以設計濾層(Filter)來保護土壤。一般來講，濾層顆粒比被保護的土壤顆粒還大，也就是濾層本身的滲透係數會比被保護的土壤還大。對於正確設計的濾層，水若碰到濾層，水壓力就會大幅降低，水會迅速流走，也可能造成水位線迅速降低。然而濾層顆粒也不能無限上綱的大，因為濾層間的孔隙也會跟著變大，土壤顆粒反而會通過濾層之間的孔隙被水流帶走形成掏空。

所以，濾層顆粒要夠大(i.e.,孔隙大)，大到水流能順利流走；濾層顆粒又要夠小，小到能卡住土壤顆粒不被帶走。因此濾層粒徑的合理範圍跟被保護土壤的粒徑範圍息息相關，我們須依照被保護土壤的粒徑分布曲線來設計濾層粒徑範圍。我國《建築物基礎構造設計規範》並未寫明濾層之設計準則，美國海軍的規範(NAVFAC 1982a, "DM7.2, Foundations and Earth Structures," U.S., Department of the Navy, Naval Facilities Engineering Command)規定：

- (1) 為防止土壤顆粒被沖走(防止掏空)，濾料直徑須夠小，須

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{85(S)}} < 5$$

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} < 20$$

$$\frac{D_{50(F)}}{D_{50(S)}} < 25$$

- (2) 為防止濾層內蓄積過大滲流水壓力，濾料孔隙須夠大，須

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} > 4$$

- (3) 為防止濾層內部濾料析離(Segregation)，濾料粒徑不應大於 7.6 cm。

- (4) 為防止濾層內細顆粒流動，濾料內能通過#200 的部分，其重量不應超過全濾料重量的 5%。

- (5) 當使用側面有開槽或開孔的排水管排水時，為了防止土壤細粒料被沖進孔裏，槽、孔周圍也須包覆濾料。而為了防止濾料被沖進槽、孔內，須

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{孔直徑}} > 1.0 \sim 1.2$$

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{槽寬度}} > 1.2 \sim 1.4$$

以上的符號， $D_{15(F)}$ 指的是「以濾料進行篩分析試驗，粒徑分布曲線上累積通過百分比 15% 所對應的直徑」， $D_{85(S)}$ 指的是「以被保護的土壤進行篩分析試驗，粒徑分布曲線上累積通過百分

比 85% 所對應的直徑」，其餘符號均可類推。觀察以上規定，注意到分母都是被保護土壤的粒徑，所以濾層的粒徑範圍，乃由被保護的土壤之粒徑範圍決定。

濾層的組成顆粒，當然有大有小，決定濾層的粒徑範圍後，建議將濾層裏的大小顆粒混合，形成大顆粒中有中、小顆粒，如此可互相保護防遭沖刷帶走，混合施工也較方便。目前濾層多搭配擋土牆考問答題，因擋土牆後常配置濾層以利排水，濾層很少考計算題。

實務上，除非進行大工程(興建土石壩)，否則小工程上，濾層已間漸漸被地工織物(Geotextiles，俗稱不織布)取代。不織布的透水性良好，但土壤不能透過，而且便宜，施工快速，使用濾層還要找級配範圍，小工程利潤低，誰願意這樣做呢？

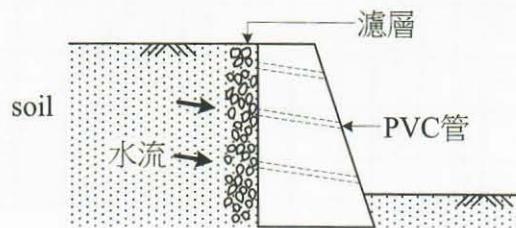
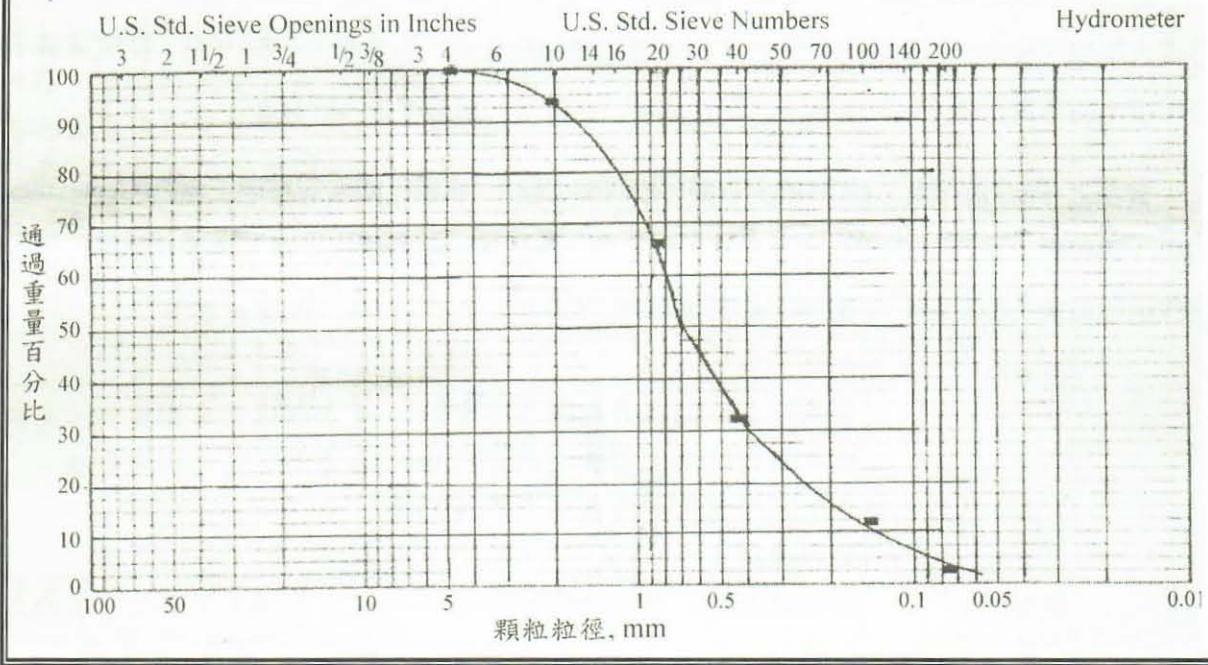


圖 5-25

例 5-9.1 濾層設計

某土樣由試驗求得其顆粒粒徑分布曲線如下圖所示，試說明如何應用土壤顆粒粒徑分布曲線，求取適用供作濾層材料之粒徑曲線範圍。

<100年鐵路特考7分>



查圖得 $D_{15(S)} = 0.19 \text{ mm}$, $D_{50(S)} = 0.7 \text{ mm}$, $D_{85(S)} = 1.4 \text{ mm}$

(1) 為防止土壤顆粒被沖走，濾料直徑須夠小，須 $\frac{D_{15(F)}}{D_{85(S)}} < 5$ ，故 $D_{15(F)} < 5 \times 1.4 = 7 \text{ mm}$

$$\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} < 20, \text{ 故 } D_{15(F)} < 20 \times 0.19 = 3.8 \text{ mm}$$

$$\frac{D_{50(F)}}{D_{50(S)}} < 25, \text{ 故 } D_{50(F)} < 25 \times 0.7 = 17.5 \text{ mm}$$

(2) 為防止濾層內蓄積過大滲流水壓力，濾料孔隙須夠大，須 $\frac{D_{15(F)}}{D_{15(S)}} > 4$ ，故 $D_{15(F)} > 4 \times 0.19 = 0.76 \text{ mm}$

- (3) 為防止濾層內部濾料析離(Segregation)，濾料粒徑不應大於 7.6 cm。
- (4) 為防止濾層內細顆粒流動，濾料內能通過#200 的部分，其重量不應超過全濾料重量的 5%。
- (5) 當使用側面有開槽或開孔的排水管排水時，為了防止土壤細粒料被沖進孔裏，槽、孔周圍也須包覆濾料。而為了防止濾料被沖進槽、孔內，須

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{孔直徑}} > 1.0 \sim 1.2$$

$$\frac{D_{85(F)}}{\text{槽寬度}} > 1.2 \sim 1.4$$

綜合以上，濾料 $0.76 \text{ mm} < D_{15(F)} < 3.8 \text{ mm}$ ，濾料 $D_{50(F)} < 17.5 \text{ mm}$ ，且任何濾料粒徑不應大於 7.6 cm。若採用直徑 5 cm 之排水管，則濾料 $D_{85(F)} > 5.5 \text{ cm}$

討論

進行濾料設計時，就是在設計 $D_{15(F)}$ 、 $D_{50(F)}$ 、 $D_{85(F)}$ 的範圍。求均勻係數 C_u 、曲率係數 C_d 常用的 D_{10} 、 D_{30} 、 D_{60} 全都用不到。

§5-10 砂湧(Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition)

§5-5 節講到，向上的水流會降低砂土有效應力，降低土壤穩定性。對於無凝聚力的砂土，若承受向上水流作用，當有效應力變成零時，砂土顆粒無法傳遞應力，正向應力為零就沒有抗剪強度，砂宛如懸浮在水中，此稱為砂湧 (Sand Boiling, Quick Sand, Quick Condition) 現象或流砂現象。對於有凝聚性的土壤，縱然正向應力為零，仍存在凝聚力，不容易產生流砂現象。

為什麼砂湧跟「快」(quick)有關？非也，此 quick 並非「快」，而是 “alive” 「活生生的、活躍活潑」之意，表示向上水流使土砂翻滾浮動，似乎有生命般活潑。那為何又跟沸騰(boiling)有關？因為向上的水流通過下游地表面時，流速將較輕砂粒挑湧起，好像煮水沸騰時，水壺內

液面的水被氣泡噴起一樣。

一看到流砂字眼，部分讀者腦袋裏或許浮現電影、小說的情節：旅人與駱駝在沙漠裏，不慎踏入致命的「流沙」，人與牲畜全部陷入砂裏，隨砂向下流動終至滅頂…，最後不知跑到哪裡？如果讀者想研究此情節，本書恐無能為力，筆者也不知此情節是否虛構。土壤力學裏講的砂湧(或流砂)，與前述情節無關，且有力學理論，並非虛構。

《建築物基礎構造設計規範》的文字是「砂湧係指開挖面下為透水性良好之土壤時，由於開挖側抽水使內外部有水頭差而引致滲流現象，當上湧滲流水之壓力大於開挖面底部土壤之有效土重時，滲流水壓力會將開挖面內之土砂湧舉而起，造成破壞」。

雖然砂湧的意義不難懂，但是抗砂湧安全係數的算法不一而足，算出來的 FS 都不一樣，以下一一介紹。

參考§5-5 的圖 5-11，土體上方水位較低，土體承受向上滲流，C 點總應力 $\sigma_C = H_1\gamma_w + H_2\gamma_{sat}$

$$C \text{ 點水壓力 } u_{w,C} = (H_1 + H_2 + \Delta h)\gamma_w$$

$$C \text{ 點有效應力 } \sigma'_C = \sigma_C - u_{w,C} = H_2\gamma' - \Delta h \times \gamma_w (= \text{分子} - \text{分母}) \quad \text{【參考下式】}$$

$$\text{從上式，定義流砂現象的安全係數 } FS = \frac{H_2\gamma'}{\Delta h \times \gamma_w} \quad [5.28]$$

$$\begin{aligned} \text{續展開得 } FS &= \frac{H_2\gamma'}{\Delta h \times \gamma_w} = \frac{\gamma'/\gamma_w}{\frac{\Delta h}{H_2}} = \frac{i_c}{i} = \frac{\boxed{\text{臨界水力坡降}}}{\boxed{\text{目前水力坡降}}} = \frac{\left(\frac{G_s - 1}{1 + e}\right)}{i} = \frac{i_{cr}}{i} \end{aligned} \quad [5.29]$$

臨界水力坡降 i_c 是土壤的特徵(固有特質)，類似強度的概念，僅受 G_s 、 e 影響。「目前水力坡降」 i 是外力，代表目前土壤受水流衝擊的程度，安全係數就是強度與外力的鬥爭。

參考圖 5-26，倘水不流動，則 C 點的有效應力是 $H_2\gamma'$ ，恰在公式[5.28]分子；倘水向上流動(參考圖 5-11)，C 點的滲流水壓力 u_s 是 $\Delta h\gamma_w$ ，恰在[5.28]分母。此兩值的比值就是砂湧安全係數，這就是 Terzaghi 的想法。滲流水壓力愈大，安全係數愈小。

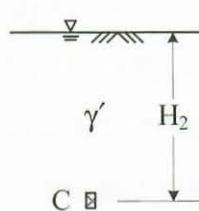


圖 5-26

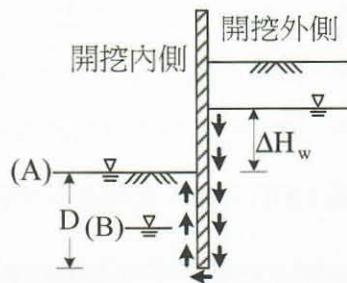


圖 5-27

法一：以上、下游間最短流線的平均水力坡降算 FS(規範方法)

參考圖 5-27，下游側水位在(A)，開挖內外側有水頭差 ΔH_w ，不透水壁體貫入深度為 D，則抗砂湧之 $FS = \frac{i_c}{i_{avg}} = \frac{\text{臨界水力坡降}}{\text{平均水力坡降}} = \frac{\gamma'/\gamma_w}{(\frac{\Delta H_w}{\Delta H_w + 2D})} = \frac{\gamma'(\Delta H_w + 2D)}{\gamma_w(\Delta H_w)}$ [5.30]

依[5.30]，規範規定 $FS \geq 2.0$ 方為合格設計。這種分析不需要畫流線網，簡單方便可能過於樂觀，上式分母水力坡降 i 是最短流線(貼著壁體)的平均水力坡降 i_{avg} 。請注意最短流線上的不同點，水力坡降不相同，壁體底端水力坡降最大，故有「平均值」。什麼叫「貫入深度」？是指壁體比開挖面還低的部分之長度，不是從原地表往下算。

規範畫圖 5-27 時，把下游水位面畫得比開挖面還低，乃畫在(B)，這樣流線長度不就跟式[5.30]矛盾嗎？問得好！原來規範是畫「正常施工不產生砂湧時，開挖面須抽水，保持開挖面乾燥施工」的狀況，通常須維持下游水位面比開挖面低 0.5 m~1.0 m。

水位在(B)比較危險，流線較短，FS 較小，但未必砂湧失敗。水位在(A)，流線較長，FS 較大。臨界砂湧失敗時，開挖側水位面一定上升到(A)，故以(A)寫 FS 表示式，以(B)式表示正常施工位置。

法二：以下游出口處最後一格的水力坡降算 FS

對於雙向度滲流，不太可能每一網格的流線長度一樣長，某格的流線長度越短，該格內水力坡降越大；反之某格的流線長度越長，該格內水力坡降越小。一條完整的流線，不同位置處的水力坡降並不一樣。

若題目有畫出流線網，讀者可以找下游出口處最後一格來分析，因該格有位移空間，最危險。下游出口處最後一格的水力坡降 i 是否會大於整條流線的平均值 i_{avg} ？這要看流線網畫完的結果，也就是跟邊界條件有關。如果下游出口處最後一格的流線很短，該格的水力坡降將很大，把最後一格的水力坡降當 FS 的分母，這樣會求出較小的 FS，設計上偏保守。

這種分析法要畫流線網才能做，不同人畫的流線網會不一樣，答案可能差很多，除非題目統一提供流線網。學理上這種分析較精確不打混仗，但畫圖是麻煩之處。

再強調一次安全係數算法是人定義的，不是神定義的，定義的內涵不同，當然結局不同。

法三：以 Terzaghi 法對砂湧浮動區算 FS

前輩 Terzaghi 對砂湧進行模型試驗，結果顯示不透水壁體的下游側，在離鋼鉗樁 $D \times \frac{D}{2}$ 的範圍內發生砂湧浮動，Terzaghi 提出一種需要流線網來分析此浮動區($D \times \frac{D}{2}$)的安全係數，幾乎每本教科書都有提到，他訂下游水位面為滲流水壓力為零的面。分析圖 5-28 浮動區分離體，向下力 $W = \text{土壤浸水重} W' + \text{水重} W_{water}$ ， W_{water} 是同一分離體體積的水重。向上力 $U = U_{ss} + U_s = u_{ss} \times A + u_s \times A$ 。向上力故意不包含土顆粒提供的反作用力。A 是浮動區底面積。

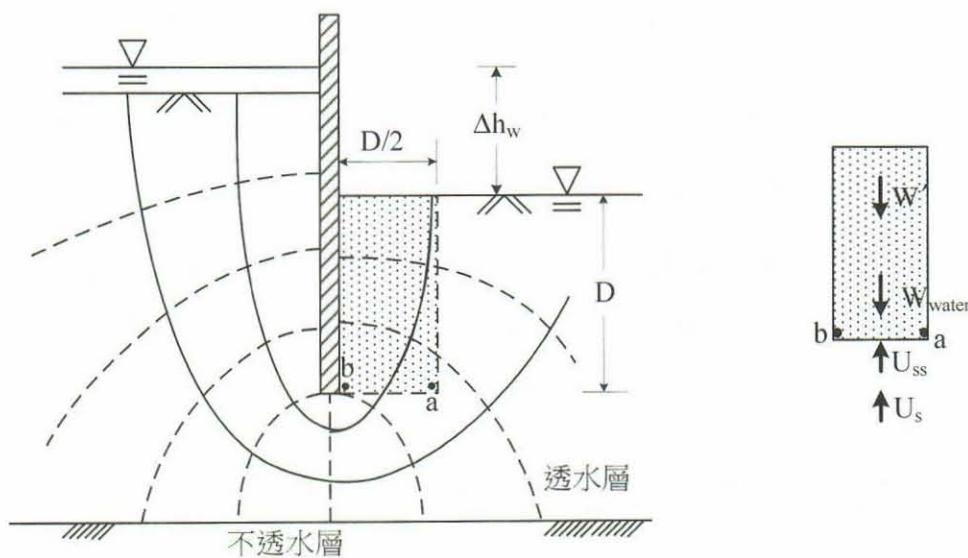


圖 5-28 Terzaghi 砂湧分析

依流體靜力學，向下力的 W_{water} 和向上力的 $u_{ss} \times A$ 大小相等，消掉之後，剩餘的 W' 和 $u_s \times$

$$A \text{ 比較, Terzaghi 抗砂湧安全係數定義為 } FS = \frac{\text{土壤浸水重} W'}{\text{浮動區底面滲流力} U_s} = \frac{W'}{u_s \times A} = \frac{\gamma' D}{u_{s,\text{avg}}} \quad [5.31]$$

上式分母 u_s 可以取砂湧浮動區底部滲流水壓力的平均值。

$$\text{浮動區有效土重 } W' = (\gamma' D^2) / 2$$

$$\text{浮動區底下的滲流力 } U_s = (u_{s,\text{avg}})(D/2)$$

其中 $u_{s,\text{avg}}$ 是浮動區底下平均的滲流水壓力，須依賴流線網來求。取圖 5-28 浮動區底下 a、b 兩點，分別求其滲流水壓力 $u_{s,a}$ 與 $u_{s,b}$ ，則 $u_{s,\text{avg}} = (u_{s,a} + u_{s,b}) / 2$ 。顯然 Terzaghi 定義安全係數是浮動區的有效土重對抗滲流力量。注意 Terzaghi 不是取浮動區底下總水壓力，乃是取滲流水壓力來算。

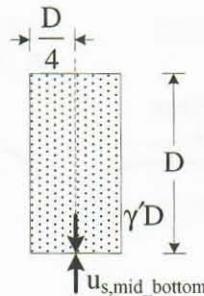


圖 5-29 砂湧浮動區

若要簡單計算，約找浮動區底部寬度一半之處($D/4$)的滲流應力進行分析，即 $FS = \frac{\gamma'D}{u_{s,\text{mid_bottom}}}$ 。
[5.32]

以上對於滲流水壓力的算法，係各原文教科書依據流線網的標準算法。我國規範的解說提出一簡化法計算浮動區底部滲流水壓力： $U_s = (u_{s,\text{avg}})(D/2) = \left[\gamma_w \cdot \frac{\Delta h_w}{2} \right] (D/2)$ ，其中 Δh_w 是上下游液面差距，依此概估法可免畫流線網。

$$FS = \frac{\text{土壤浸水重} W'}{\text{浮動區底面滲流力} U_s} = \frac{\text{土壤浸水重} W'}{\left[\gamma_w \cdot \frac{\Delta h_w}{2} \right] \frac{D}{2}} \text{，規範要求依左式設計時 } FS \geq 1.5 \text{。}$$

計算砂湧安全係數的方法五花八門，本書就出現 4 種，若參加專門技術人員職業考試，可以《建築物基礎構造設計規範》為依據。若參加高考，可於考試後舉證學術上常見的算法，發函給考選部捍衛自己的計算立場。你若擔心自己的方法不受閱卷者青睞，就要 do something，客氣為吃虧之本哪！

對抗砂湧，可以選擇的對策有：

- ① 延長擋土壁體深度，即延長流線，降低水力坡降。
- ② 降低上下游水頭差。
- ③ 分區降水，如圖 5-30。例如可採用井點降水法(Well Point Dewatering)，此法係在地層打入抽水管，抽水管中抽真空，迫使地下水沿管上升排出，特利於砂層抽水降水。
- ④ 開挖區土壤改良，增加 G_s 或降低 e ，即增加 i_{cr} 。
- ⑤ 變更設計，減少開挖深度。
- ⑥ 選擇枯水期施工，開挖面外側的水位會較低，即內外水位差較小。
- ⑦ 基地外側同內側，亦進行抽水，排入邊溝或下水道。

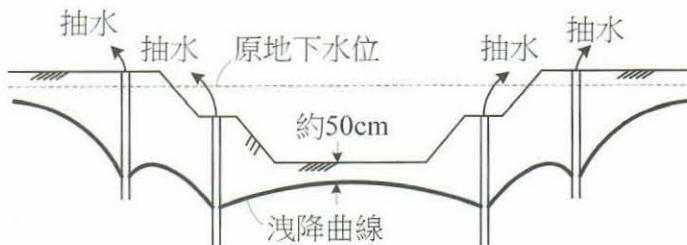


圖 5-30 分區降水示意圖

一般深開挖基地，除因擋土壁體貫入深度不足而引起砂湧外，還可能因以下原因產生砂湧：

- ① 基地鑽探之後的鑽孔，未確實封孔。
- ② 擋土壁體施工不良產生破洞滲漏，縮短滲流路徑。
- ③ 開挖基地內支撐的中間柱施工不良，回填不實，引致中間柱週邊砂湧。

讀完這一節，理解到發生砂湧時的水浮力(靜態水壓力+向上滲流水壓力)，足以將單位重約 2.0 tf/m^3 的飽和土壤托起，而人體的單位重僅約 1.07 tf/m^3 ，所以人若陷入砂湧狀況，應該不可能一直往下沉，反而是想沉卻沉不下去。混凝土塊或鐵塊，當然就沉得下去。

電影裡旅人在沙漠遭「流沙」吞噬的情節，好似沙漠裏的百慕達三角洲，增進生活想像樂趣，其機制就待各位 鈞長、副座細細研究了。

例 5-10.1 求 i_c

假設某砂之比重為 2.65，當其孔隙率分別為 45%、30% 時之臨界水力坡降各為若干？若目前砂土裏的水力坡降為 0.75，請問抗砂湧安全係數各是多少？ <改編91土木高考25分>



$$(1) n = e/(1+e)$$

$$\text{解出孔隙比 } e = 0.818$$

$$0.45 = e/(1+e)$$

$$i_c = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{2.65 - 1}{1 + 0.818} = \underline{\underline{0.91}}$$

$$(2) n = e/(1+e)$$

$$\text{解出孔隙比 } e = 0.4286$$

$$0.3 = e/(1+e)$$

$$i_c = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{2.65 - 1}{1 + 0.4286} = \underline{\underline{1.155}}$$

$$(3) \text{當其孔隙率為 } 45\%, FS = 0.91/0.75 = \underline{\underline{1.21}}$$

$$\text{當其孔隙率為 } 30\%, FS = 1.155/0.75 = \underline{\underline{1.54}}$$

討論

孔隙比越小代表越緊密，相對不容易產生砂湧，該砂土會有較大的臨界水力坡降。注意孔隙比和孔隙率不同，考試時務必「逐字審題、逐字審圖」。網路上有網友提供免費解答，孔隙比和孔隙率看錯字，提供了錯誤答案。免費的東西，消費者要自行評估品質。

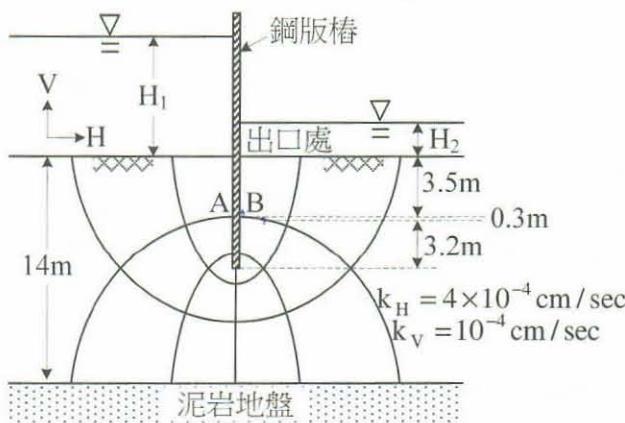
材料力學裏的細長柱有臨界載重 P_{cr} 值，看到臨界水力坡降 i_c 就讓人想到臨界載重 P_{cr} 。材料力學沒有明顯定義完美柱受軸向載重的安全係數如何算，但我們可以很合理的定義成 $FS = \frac{P_{cr}}{\text{目前所承受的軸力}}$ ，例如某細長柱的 $P_{cr}=100$ kN，目前承受軸力 50 kN，我們就可以說目前抗挫屈的安全係數為 2.0。類比地講，某砂土的臨界水力坡降是 1.2，目前承受水力坡降是 0.6，我們就可以說目前抗砂湧的安全係數為 2.0。題外話，材料力學裏瑕疵柱受軸力作用的安全係數就要用正割公式協助計算，詳筆者《材料力學論衡》。

例 5-10.2 流線網+各種水頭

如圖所示，某鋼版樁部分置入14 m 之沉泥質砂土層，假設鋼版樁長15 m且7 m貫入土層中，此沉泥質砂土層之鉛垂向透水係數 $k_v = 10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，水平向透水係數 $k_H = 4 \times 10^{-4} \text{ cm/sec}$ ，土壤之飽和單位重 γ_{sat} 為 19.81 kN/m^3 ，經以非等向透水係數比，將座標比例轉換後，繪得之類比等向透水係數之流網如圖所示，假設上游水位高 $H_1 = 5 \text{ m}$ ，下游水位高 $H_2 = 1 \text{ m}$ ，

- (一) 試利用所繪得之流網計算滲流量 (rate of seepage) 為若干 $\text{m}^3/\text{day}/\text{m}$ ？
- (二) 假設以沉泥質砂土層底部為基準點，試計算版樁兩面中點：A點及B點處之總水頭、壓力水頭、高程水頭及管測水頭各為若干m？
- (三) 試求出口處之水力坡降及其抗砂湧之安全係數為若干？
- (四) 當上游水位上升多高時，下游出口處會發生砂湧。
- (五) 圖中之H : V 座標比例為若干？當座標轉換回復原始座標比例 ($H : V = 1 : 1$) 後，圖中所繪示之流網將會有何改變？

<102年高考三級，每小題5分，共25分>



$$(一) k_e = \sqrt{k_v k_H} = \sqrt{1 \times 4} \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} \text{ cm/sec} = 2 \times 10^{-6} \text{ m/sec}$$

$$q = k_e \times \frac{N_f}{N_q} \times (\Delta h_t) = 2 \times 10^{-6} \times \frac{3}{6} \times 4 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = 0.3456 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}$$

$$(二) 每一格消耗總水頭 = (H_1 - H_2)/N_q = 4/6 = 0.667 \text{ m}$$

位置	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
上游地表面	19		14		5

A	18.333	10.5	(7.833)
版樁底部	17	7	(10)
B	15.667	10.5	(5.167)
下游地表面	15	14	1

單位：m

管測水頭即壓力水頭，數值見上表最右欄位。

(三)抗砂湧安全係數有多種算法，答案不一 (其他解見討論)

$$\text{僅考慮最後一網格出口處，水力坡降 } i = \frac{\Delta h_t}{L} = \frac{0.667}{3.5 + 0.3} = 0.175 \quad (\text{流線長度取中線長})$$

$$i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} = \frac{19.81 - 9.81}{9.81} = 1.019$$

$$FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{1.019}{0.175} = \underline{\underline{5.82}}$$

(四)類似第(三)小題，不同 FS 對應不同答案

僅考慮最後一網格出口處，砂湧時，FS=1.0

$$\Rightarrow i = \frac{\Delta h}{L} = i_{cr}$$

$$\Rightarrow \frac{(H'_1 - H_2)/6}{3.5 + 0.3} = 1.019 \quad H'_1 = H_2 + 1.019 \times 3.8 \times 6 = \underline{\underline{24.23m}}$$

上游水位高度 24.23 m 時，發生砂湧

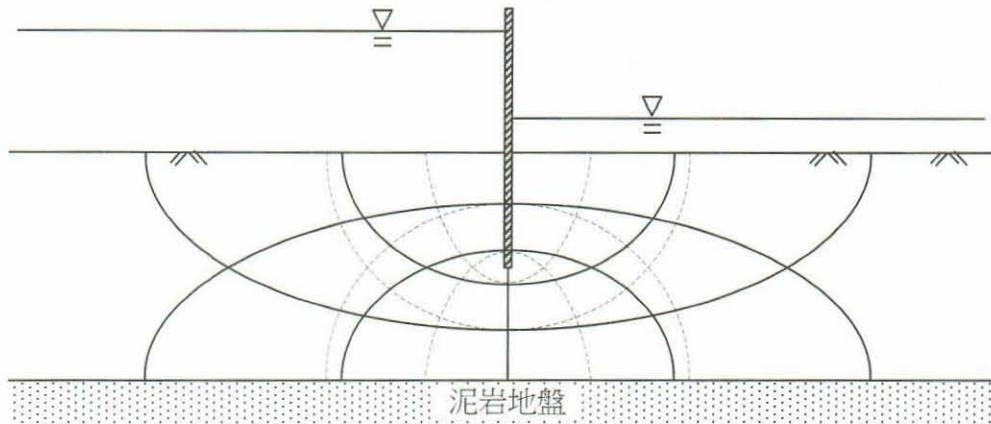
(五)「座標比例」為何意？不同人可能不同解讀。

解讀 1：現場鉛垂方向 10 公尺的距離若在紙上被畫成 2 公分長，則現場水平方向 10 公尺的距離，在紙上只能用 1 公分畫。故 $H:V = 1:2$ 。

解讀 2：流線網轉換後，水平向被壓縮的激烈程度，是垂直向的兩倍。從現地到圖紙，垂直向若被壓縮 1000 倍，則水平向被壓縮 2000 倍，故 $H:V = 2:1$ 。換言之，紙面上 1 cm 若代表現地垂直高度 1000 cm，則 1 cm 同時代表現地水平距離 2000 cm。

換回 $H:V=1:1$ 後，流網將會橫向(水平向)變寬，等勢能線與流線不再正交。

下圖實線為 $H:V=1:1$ 之流線網。



討論

插入水壓計到地底下土壤某一點，所讀出的水位高，是該點的總水頭還是壓力水頭？答：壓力水頭。而壓力水頭是總水壓的最終表現。或者說壓力水頭是靜水壓、滲流水壓和超額孔隙水壓的總和表現。

流線網形狀和上下游水頭差大小無關，只和邊界條件、土壤性質(是否異向性)有關。

遇到鎖在象牙塔裏的恐龍教授，我不比你強，一樣「雖」，這種時候就是你該寄信去考選部的時候。恐龍教授的社會經驗少，有時候你要給他一些社會經驗。我只能從字面上來猜：以壓力計測量水壓時，靜水在壓力計裏上升的高度，就是壓力計測到的水頭。我猜這就叫「管測水頭」，沒錯，等於是壓力水頭。

第(三)小題依《建築物基礎構造設計規範》， $FS = \frac{\gamma'(\Delta H_w + 2D)}{\gamma_w (\Delta H_w)} = \frac{10(4 + 2 \times 7)}{9.81(4)} = 4.59$ ，對嗎？

請想一想流線長度應該多長，呆呆代公式正是誤解公式。

本題鋼版樁貫入深度 7 m，正好是透水層的一半厚，故等勢能線和流線形成「反對稱」，亦即你把題圖旋轉 180°(upside down)，流線好似變成等勢能線，等勢能線變成流線。(把這本書轉 180°，上下顛倒，再看一次。)

抗砂湧安全係數，依《建築物基礎構造設計規範》，考慮最短流線的平均水力坡降

$$i = \frac{\Delta h_t}{L} = \frac{5 - 1}{7 + 7} = \frac{2}{7}$$

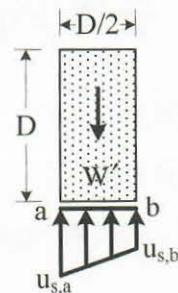
$$\text{得 } FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{1.019}{2/7} = 3.57$$

抗砂湧安全係數，按 Terzaghi 之砂湧分析

$$\text{滲流水壓 } u_{s,a} = 0.667 \times 3 \times 1 = 2 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{滲流水壓 } u_{s,b} = 0.667 \times 1.6 \times 1 = 1.067 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{平均滲流水壓 } u_{s,avg} = (u_{s,a} + u_{s,b})/2 = 1.533 \text{ tf/m}^2$$



$$\text{得 } FS = \frac{W'}{U_s} = \frac{D \times \frac{D}{2} \times \gamma'}{\frac{u_{s,avg}}{2} \times D} = \frac{7 \times 3.5 \times 10}{1.533 \times 9.81 \times 3.5} = \underline{4.65} = \frac{D \times \gamma'}{u_{s,avg}}$$

第(四)小題，考慮最短流線，即《建築物基礎構造設計規範》，砂湧時，FS=1.0

$$FS = 1.0 = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{1.019}{(H_1 - 1)/14}$$

$$\text{解出 } H_1 = \underline{15.266 \text{ m}}$$

第(四)小題，按 Terzaghi 之砂湧分析，令 FS=1

設每一網格消耗總水頭 x 公尺

$$\text{平均滲流水壓 } u_{s,avg} = (u_{s,a} + u_{s,b})/2 = (3x + 1.6x)/2 = 2.3x \text{ tf/m}^2$$

$$FS = 1.0 = \frac{3.5(7)(10)}{2.3x(3.5)(9.81)}$$

$$\text{解出 } x = 3.1 \text{ m}$$

$$\text{上下游總水頭差 } \Delta h_t = 6x = 18.6 \text{ m}$$

$$H_1 = 18.6 + 1 = \underline{19.6 \text{ m}}$$

第(四)小題，應無唯一答案，請參看本章§5-13 歷年考題精選 100 年高考三級題目，建議考生去函考選部捍衛自己立場。大地工程經常無標準答案，不像材料力學、結構學。

如果向上水流通過兩種不同滲透係數的土壤，該如何定義「砂湧」？如何算？

§5-11 管湧(Piping) 工程地質→土體失敗

從「管湧」的原文來看，pipe 的意思是導管、輸送管，文法上 piping 明顯是現在分詞當形容詞用，意思是「正在形成管道的」。到土壤力學裏，此形容詞已經轉成名詞，表示「在土壤中形成管道」的現象。(pile 是樁，pipe 是導管，勿混淆)

在土壤中形成什麼管道？意思是水流在土壤內部流動，將土壤掏空，猶如在土壤內部沖刷出一條「空管」的現象，水流未必一定向上，向下也有可能，請參考圖 5-31、圖 5-32 與圖 5-33。

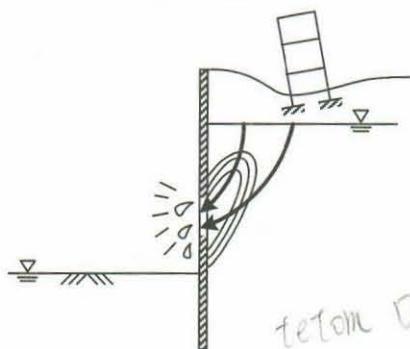


圖 5-31 壁體破洞，流線變短，滲流力變大

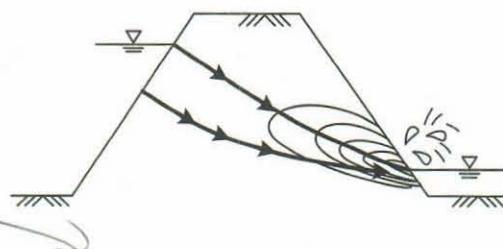


圖 5-32 掏空孔道往上游延伸

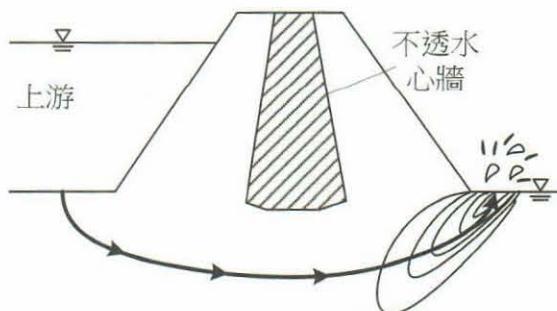


圖 5-33 掏空孔道往上游延伸，好比從下游往上游鑽隧道

為什麼水會將土壤沖刷離開原位置？原因有(1)向上的水流，若水壓力等於總應力，在有效應力為零之下，土壤顆粒宛如懸浮在「土壤湯」裏，無任何抗剪強度阻止移動，尤易發生在砂土中。(2)任何方向的水流，對土壤施予滲流力(Seepage Force)推動，當土壤的邊界條件為「有位移空間」時，土壤即被沖出，形成掏空，最外層土壤沖走位移後，次層的土壤就缺乏保護而有位移空間，唇亡齒寒加骨牌效應，於是沖刷逐漸往土壤內部延伸，流線更短，滲流力更大，猶如沖刷出一條「空管」、「孔穴」的現象，水流可以是平的或朝下，未必要向上。

水力坡降最大之處，未必是最先位移之處，要看有沒有位移空間。

從過去的考古題、學者間不同的習慣用語，以及原文書之間的混用情形來看，「砂湧」與「管湧」有高度的類似性，可能甲教授習慣講的砂湧，在乙教授口中就習慣講成管湧，考生要適應。

防止管湧的對策有：

- (1)降低水力坡降，單位體積滲流力= $i\gamma_w$ ， i 越小，沖刷的滲流力就小。
- (2)降低上下游水頭差。
- (3)設置卵礫石、濾層保護壩趾處土壤及迅速排除水壓，避免滲流線從坡面流出。
- (4)延長流線，如設置截水牆(Cutoff Wall)或於壩體上下游增設護坦(Blanket)，壩體下方進行隔幕灌漿。
- (5)選擇水密性較佳的壁體，確保施工品質，避免產生破洞。
- (6)增設消壓井，降低壩趾處滲流水壓力。

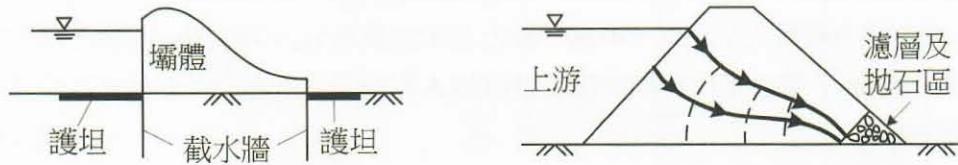


圖 5-34 上下游增設護坦或以拋石、濾層保護壩趾

浸潤線(Phreatic Line)指的常是壩體內滲流位置最高的滲流線，如圖 5-35，浸潤線以下飽和度視為 100%。浸潤面(Phreatic Surface)指的是水壓力和大氣壓力相等的介面，也就是壓力水頭(Pressure Head)為零的面，通常就是水位面，對非拘限含水層(Unconfined Aquifer)，浸潤面的斜率方向就是地下水流動的方向。

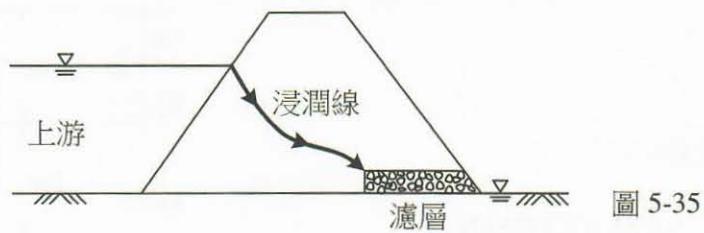


圖 5-35

考名詞解釋時，記得畫圖與寫出公式，評分是相對的，寫最完整的人得滿分，缺東缺西分數就往下遞降。國考答案卷有 8 頁，圖畫大一些也是技巧，可吃較多版面，字不用寫那麼多。

0921567324

表 5-11 管湧、砂湧之異同

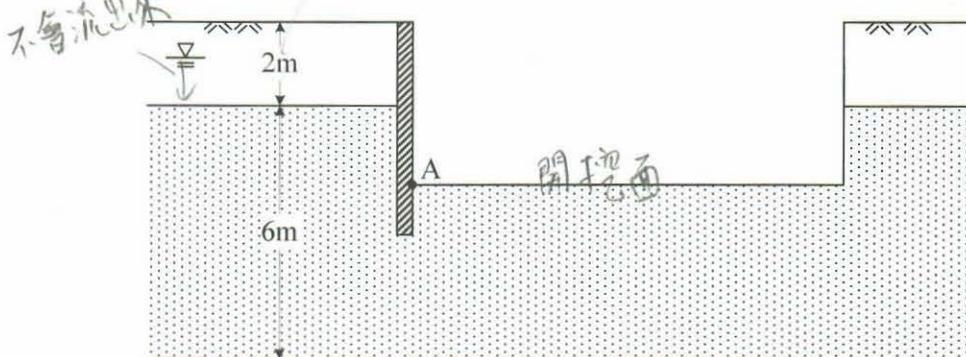
	管湧(Piping)	砂湧(Sand Boiling)
相同	1. 均是水流造成顆粒移動，均與滲流力有關。 2. 從最容易位移之處開始發生，破壞從下游往上游蔓延。 3. 延長流線、降低上下游水頭差，可阻止災害發生。	
相異	1. 水流未必向上，可向上、下、左右。破壞時，土壤可向上、下、左右移動。 2. 有效應力未必為零。 3. 規範未定 FS。	1. 水流向上。破壞時，土壤向上翻滾。 2. 到達臨界水力坡降，有效應力降為零。 3. 規範定 $FS \geq 2.0$ 。

例 5-11.1 求滲流力

有一厚 2 m 之黏土層，其下方為厚 6 m 之砂土層，地下水位位於地表下 1 m 處。今如在該地層開挖至地表下 4 m 後進行建築結構，為便利施工構築，將開挖面內之水位抽降至與開挖面等高，開挖擋土壁貫入至深度 5 m 處。砂土之單位重為 $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$ ；黏土層飽和單位重為 $\gamma_{sat} = 17.5 \text{ kN/m}^3$ ，請計算位於開挖擋土壁內側 A 點所受之滲流力；並檢核此時開挖底面是否有管湧問題？

黏土不放水流

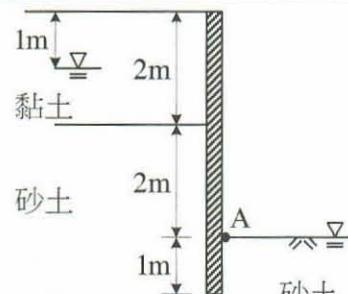
<結構技師 25 分>



(1) A 點單位體積所受滲流力

$$= i\gamma_w = \frac{\Delta h}{L} \gamma_w = \frac{3}{4} \times 9.81 = 7.3575 \text{ kN/m}^3$$

$$(2) FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{\gamma'}{\gamma_w i} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w i} = \frac{18 - 9.81}{9.81 \times 0.75}$$



$$=1.113 < 2.0 \quad \text{N.G.}$$

依規範角度，開挖底面有管湧問題

(其實是砂湧)

討論

$$i_{cr} = \frac{G_s - 1}{1 + e} \text{, 本題用此公式算不出 } i_{cr} \text{, 本題須用 } i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} \text{。}$$

題目講的管湧，意指砂湧。注意計算 A 點滲流力時，必須考慮砂土上還有 1 公尺高的黏土內水位，砂土內的水有受到這 1 公尺水的壓力作用，故 $\Delta h=3 m \neq 2 m$ 。大部分水是由砂土補助過來，流線長應是 4 公尺，非 5 公尺。

[例 5-7.3]，題目給了黏土的滲透係數 k，也可定量算出黏土層的水力坡降 i，要算，也必須算，並且可算出滲流量，題目就是要求滲流量 $q=kiA$ 。[例 5-11.1]，題目沒給黏土的滲透係數，視黏土滲透係數為零($k=0$)。同時，因缺乏黏土 k 對砂土 k 的比例，不能定量算出黏土層消耗掉的總水頭，解題時，黏土相對於砂土視為不透水($q=kiA=0$)。

差就差在有沒有給黏土層的 k。

$$\text{依《建築物基礎構造設計規範》，} FS = \frac{\gamma'(\Delta H_w + 2D)}{\gamma_w(\Delta H_w)} = \frac{8.19(3+2\times1)}{9.81(3)} = 1.39 \text{，對嗎？請想一想}$$

流線長度應該多長，呆呆代公式正是誤解公式。

§5-12 上舉(Uplift) 岩石力学

上舉(Uplift, Blow in, Blow up)又稱湧起，發生的機制可參考圖 5-36，當不透水層(eg：黏土)下的水壓力 u_w 大到能舉起土層重量時，就發生上舉失敗。在施工的開挖階段，有可能因開挖面「越挖越低」導致剩餘土壤自重愈來愈少，再加以不透水層下方水壓力的存在，使得開挖面與不透水層被水壓力 u_w 舉起來。

砂湧分析時，認為水可以往上穿越砂土；上舉分析時，認為水不可以往上穿越黏土。

開挖階段是建築工程最容易失敗的階段，應趕快將地下室與一樓構築完成，增加自重抵抗浮力。若不儘速將地下室與一樓完成，一場午後大雷雨就可能將基礎版不均勻舉起。

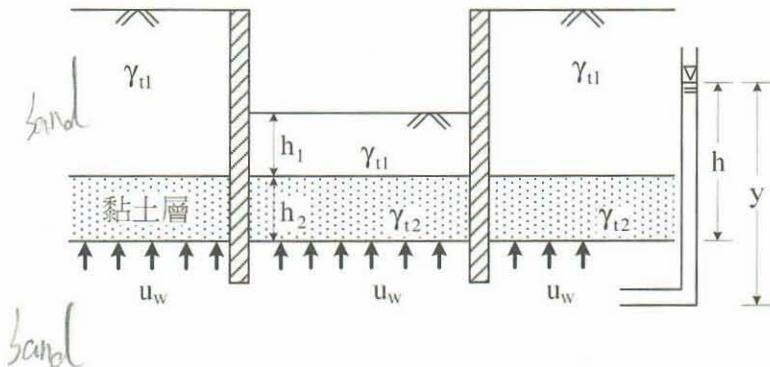


圖 5-36 上舉示意圖

依據《建築物基礎構造設計規範》，為了抵抗上舉，設計時其安全係數

$$FS = \frac{\sum \gamma_i h_i}{u_w} = \frac{\sum \gamma_i h_i}{h \times \gamma_w} = \frac{\gamma_{t1} h_1 + \gamma_{t2} h_2}{h(\gamma_w)} \geq 1.2 \quad [5.33]$$

注意分母不是 $y\gamma_w$ 。

若開挖抗湧起的安全係數略有不足時，可以抬高一樓樓地板高度，減少地下室開挖深度，這樣同時減少一樓淹水的機會。

土壤將被抬起時，土壤與壁體側面會產生摩擦力，而安全係數卻忽略此摩擦力貢獻，此計算法偏保守側。根據以往經驗，國內大地工程的翻譯是一團亂，本小節的「上舉」有教授習慣用「隆起」表示，所以請考生注意判斷題圖與題意，不要被表面的文字矇蔽。「隆起」(Heaving)一辭，在《建築物基礎構造設計規範》乃另有其意，可是在 Terzaghi 等三人合著的書中，“Heave”卻被畫圖成上舉的意義，故國內部分教授習慣用 Heave 表示上舉。

第五章介紹了砂湧、上舉的安全係數。有的 FS 要 ≥ 2 ，有的 FS 要 ≥ 1.2 。請注意砂湧、上舉的破壞機制不一樣，安全係數的內容不一樣。當我們越能肯定掌握某一災變的外力大小、抗力大小、災害的影響層面，我們就可以用較小的安全係數。反之，若不能充分掌握某一災變的外力大小、抗力大小，我們就必須用較大的安全係數。

另一方面，若災變引起的損失(人員、機具、財產、金錢、復舊經費)較大，則也需使用較大的安全係數；若災變引起的損失較小，則可用較小的安全係數。

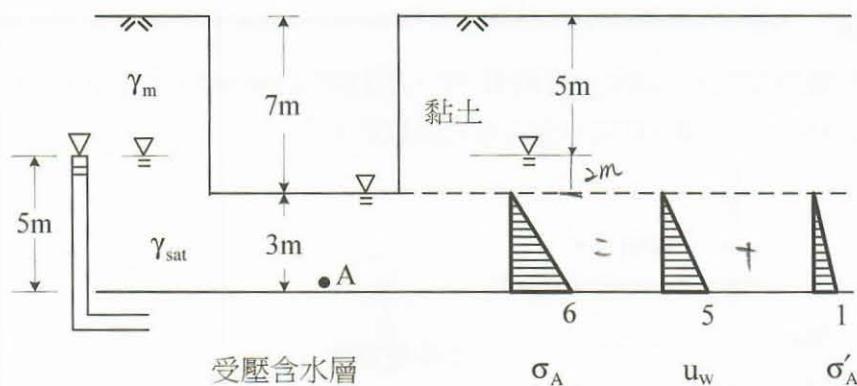
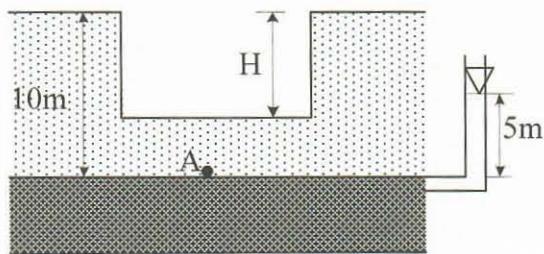
上舉所使用的 FS 最小(只有 1.2)，因為我們①容易得知水壓力大小(插水壓計即可)。②容易確定土層單位重(鑽探取樣即可)。③上舉時，土壤與壁體之間產生摩擦力，我們卻忽略此摩擦力貢獻，故已偏保守，所以規範 FS 只取 1.2。

基工
1

例 5-12.1 隆起(實為上舉)

有一 10 m 厚之黏土層，下為受壓含水層如圖所示，如擬於黏土層中開挖且控制抗隆起之安全係數為 1.2，則其開挖深度 H 應為多少？計算此時 A 點處之總應力、孔隙水壓力、及有效應力，並繪出自開挖面以下至 A 點處之總應力、孔隙水壓力、及有效應力隨深度之分佈圖。

<99 年台大 25 分>



unit : tf/m²

圖 a 長期水壓力分布圖

本題缺少開挖面寬度 B，亦無不排水剪力強度，不像在考隆起(heave)，反倒像在考上舉(uplift)。

題目沒說明黏土層水位狀況，假設黏土層地下水位在地表下 5 m 處。

設本題考上舉(uplift)，設黏土 $\gamma_m = 2.0 \text{ tf/m}^3$ ， $\gamma_{sat} = 2.0 \text{ tf/m}^3$ (大部份土壤)

$$FS = \frac{(10-H)\gamma_{sat}}{u_w} = \frac{(10-H) \times 2}{5 \times 1} = 1.2$$

$$\Rightarrow 10 - H = 3 \quad \text{解出 } H = 7 \text{ m} \dots \text{Ans.}$$

開挖面須乾燥施工，開挖面須抽水使得水位面切齊開挖面。

$$\left. \begin{array}{l} \text{總應力 } \sigma_A = (10 - 7)\gamma_m = 3\gamma_m = 6 \text{ tf/m}^2 \\ u_w = 5 \text{ tf/m}^2 \\ \sigma'_A = \sigma_A - u_w = 1 \text{ tf/m}^2 \end{array} \right\} \dots \text{Ans.}$$

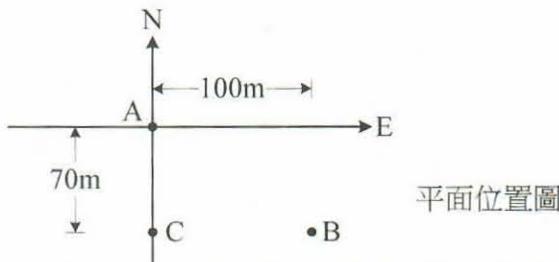
討論

滲流長期穩定之後，A 點的靜態水壓力是 3 tf/m^2 ，滲流水壓力是 2 tf/m^2 ，總水壓力是 5 tf/m^2 。滲流方向是往上。

§5-13 歷年考題精選

練 1 求水壓計讀值

某拘限含水層經廣泛地試驗得知地下水流向為北偏東 70° ，水力坡降 $i=0.045$ 。今在 A 處埋設水壓計測得水位高程 $EL=110 \text{ m}$ ，求 B、C 處水壓計水位高程若干？

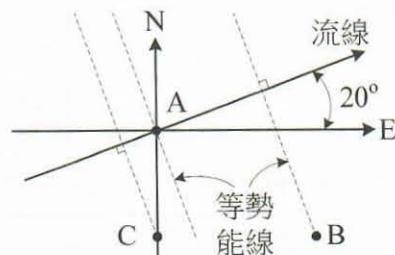


(1) B 水壓計： $\Delta h_{total} = i_x L_x + i_y L_y = (0.045 \cos 20^\circ)(100) + (0.045 \sin 20^\circ)(-70) = 3.15 \text{ m}$

故 B 處水壓計水位高程 = $110 - 3.15 = \underline{106.85 \text{ m}}$

(2) C 水壓計： $\Delta h_{total} = i_x L_x + i_y L_y = (0.045 \cos 20^\circ)(0) + (0.045 \sin 20^\circ)(-70) = -1.08 \text{ m}$

故 C 處水壓計水位高程 = $110 + 1.08 = 111.08\text{ m}$

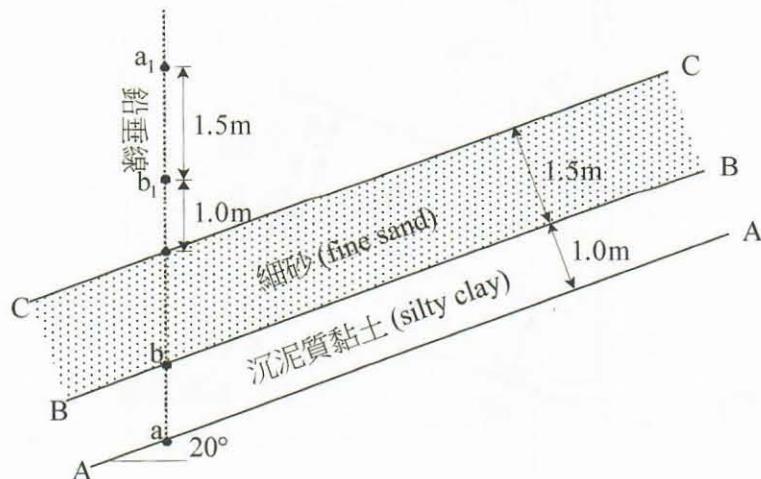


討論

1. 水是從總水頭高處，往總水頭低處流動，請不要解顛倒了。
2. 本題是單向度滲流問題。流線垂直於等勢能線，看得出 C 位置總水頭最大。

練 2 求各種水頭

如下圖AA、BB、CC三平行線為土層之界面且亦為二維滲流之等勢能線（equal-potential lines）；a、b、 a_1 、 b_1 四點位於同一條鉛垂線。



在 a 點及 b 點所量得之自由水位面位置分別在 a_1 點及 b_1 點。細砂層及沉泥質黏土層之滲流係數 (permeability) $k=1.5 \times 10^{-7}\text{ m/sec}$, $k=5 \times 10^{-8}\text{ m/sec}$ 。二種土壤均有： $e=0.72$, $G=2.68$, $S=100\%$ 。求出兩土層分別之總水頭損失，並求出細砂層中水的滲流速度。

<96年高考二級25分>



$$(1) \text{ 總水頭損失比 } (\Delta h)_{\text{clay}} : (\Delta h)_{\text{sand}} = \left(\frac{L}{Ak} \right)_c : \left(\frac{L}{Ak} \right)_s \quad (\text{面積 } A \text{ 條垂直於流線})$$

$$= \frac{1}{1 \times 5 \times 10^{-8}} : \frac{1.5}{1 \times 1.5 \times 10^{-7}} = \frac{10^8}{5} : 10^7 = 2:1$$

計算 a、b 兩點各種水頭，訂 a 為零位能面。

	總水頭 = 位置水頭 + 壓力水頭		
b	H_b	$\frac{1}{\cos 20^\circ}$	$1 + \frac{1.5}{\cos 20^\circ}$
a	H_a	0	$2.5 + \frac{2.5}{\cos 20^\circ}$

$$H_a = 0 + 2.5 + \frac{2.5}{\cos 20^\circ} = 5.1604 \text{ m} = d \text{ 點總水頭 } H_d \quad (\text{參考圖 a})$$

(a、d 在同一條等勢能線)

$$H_b = \frac{1}{\cos 20^\circ} + 1 + \frac{1.5}{\cos 20^\circ} = 3.6604 \text{ m}$$

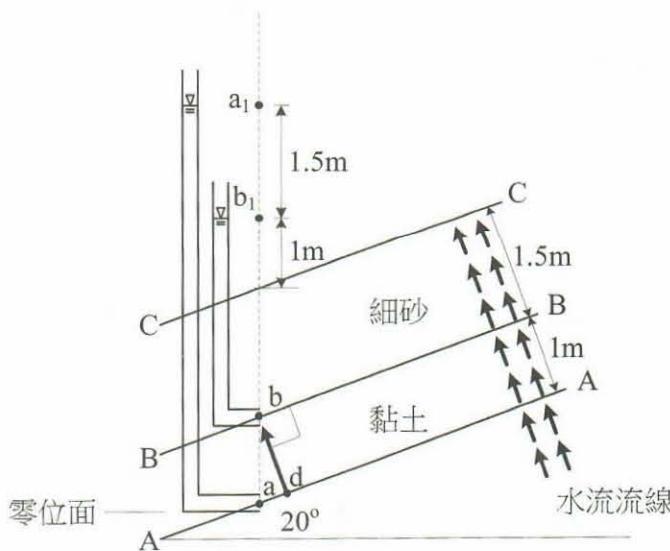


圖 a

參考圖 a，流線從 d 流到 b，消耗總水頭 1.5 m $(5.1604 - 3.6604 = 1.5)$

沉泥質黏土層之總水頭損失 = 1.5 m Ans.

細砂層之總水頭損失 = $1.5 \times \frac{1}{2} = 0.75 \text{ m}$ Ans.

$$(2) n = \frac{e}{1+e} = \frac{0.72}{1.72} = 0.4186$$

$$\text{外視流速 } v = ki = 1.5 \times 10^{-7} \times \frac{(\Delta h)_{\text{sand}}}{L_{\text{sand}}} = 1.5 \times 10^{-7} \times \frac{0.75}{1.5} = 7.5 \times 10^{-8} \text{ m/sec}$$

討論

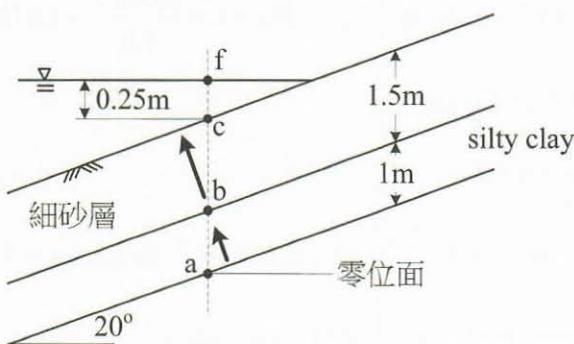
1. 按連續方程式，沉泥質黏土層外視流速必也是 7.5×10^{-8} m/sec。

$$v = ki = 5 \times 10^{-8} \times \frac{(\Delta h)_{\text{clay}}}{L_{\text{clay}}} = 5 \times 10^{-8} \times \frac{1.5}{1} = 7.5 \times 10^{-8} \text{ m/sec.}$$

2. G_s 值用不到。零位能面可能各人所訂位置不同，故「位置水頭」與「總水頭」均是相對值而非絕對值。但壓力水頭不受零位能面影響，不同考生算出來的壓力水頭應該一樣。「總水頭」雖是相對值，但「總水頭差值」卻是絕對值，不受零位能面影響。
 3. 不同土壤，滲透係數(單位:cm/sec)略分如下：

黏土	粉土	砂土	砾石
$<10^{-6}$	$10^{-6} \sim 10^{-3}$	$10^{-3} \sim 1.0$	>1.0

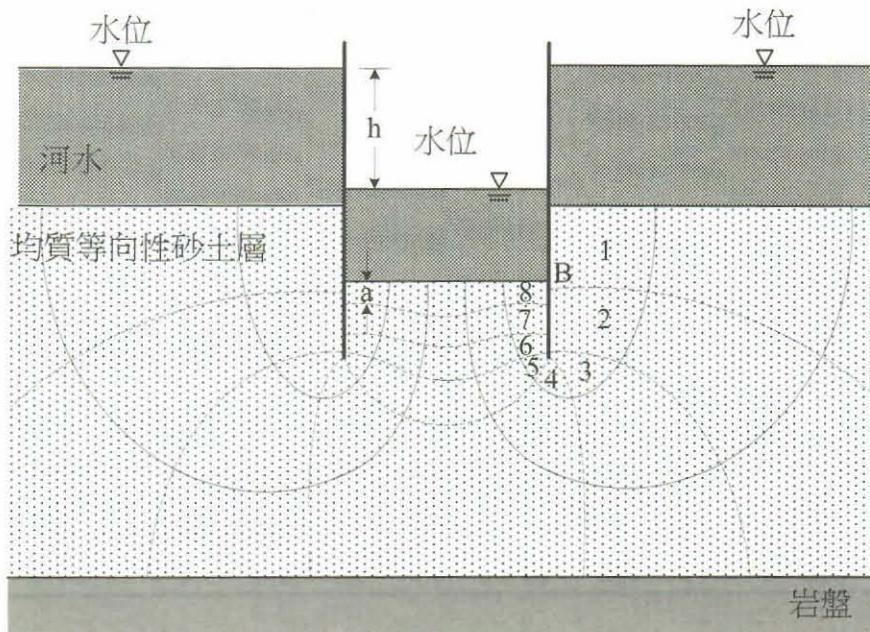
- 流線能不能從 a 流到 b 呢？不能。流線垂直於等勢能線，是通過 d 流到 b。
 - 流線垂直於等勢能線，水流從黏土層流向細砂層，水流方向示意如圖 a。
 - 題目沒有任何數據或符號說明 c-c 平面的水壓力是零，水位關係參考下圖。



練 3 流線網+管湧

在河床上開挖，開挖面內部必須降水以利施工，如果開挖面底部是砂土層，開挖面外河床因洪水又有很高之水位， $h=10\text{ m}$ 、 $k=1\times 10^{-3}\text{ cm/s}$ ，試求圖中位置8之水力坡降值以及單位開挖寬度每日所需的抽水量，並指出圖中最易發生管湧現象的位置與說明土層中滲流所造成管湧現象之原理，以及防治管湧現象發生之方法。

<96土木高考25分>



(一) 第8格之流線長度 a ，依 $h=10\text{ m}$ 之比例求 a ， $a=\frac{10\times 0.3}{1.6}=1.875\text{ m}$

0.3 紣 0.3 cm ，1.6 索 1.6 cm

$$i_8 = \frac{\Delta h_t / N_q}{a} = \frac{10/8}{1.875} = 0.667$$

$$q = k(\Delta h_t) \frac{N_f}{N_q} = \left[1 \times 10^{-5} \times 10 \times \frac{2.5}{8} \right] \times 2 = 6.25 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = 5.4 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}$$

(二) 最易發生管湧現象的位置是「8」，即下游出口處。

(三) 管湧之原理與防治方法，請見書裏章節§5-11。

流線網左右對稱，建議取半分析，看右半側流線網，得 $N_f = 2.5$ ， $N_q = 8$ 。最後算 q 時，不要忘記左半側的貢獻。雖然擋土壁體最底部的水力坡降最大(因為一格之內，流線最短)，但該處沒有位移空間，須待「8」位移之後，「7」方能位移，依此類推。有補習班解錯，請該班信徒棄暗投明，或者「人在曹營心在漢」，購買全套歐陽力學叢書，增加自己上榜機率。

讀者可依比例算距離，求出「貼著壁體的流線之抗管湧 FS」、「第 8 格抗管湧之 FS」、「Terzaghi 法浮動區抗管湧之 FS」。

為什麼滲漏量的單位寫 “ $m^3/day/m$ ” ？何不寫 “ m^3/day ” ？因為我們是取出紙面一公尺寬的剖面進行分析呀！在基礎工程，你會遇到更多「取出紙面一公尺寬的剖面進行分析」的問題，如擋土牆分析設計、視側土壓力分析、條型淺基礎分析設計等等。平面應變問題，也常常取出紙面一公尺寬進行分析設計。

練 4 流線網+滲流力

由圖(一)所示之流線網，請求取以下各問題之答案：

<82 年高考一級 12 分>

- (一)通過流網的流量
- (二)在 A 方格內之水壓 (中點位置)
- (三)在 A 方格中之流速 (中點位置)
- (四)A 點位置之滲透壓力 (Seepage Pressure)
- (五)A 點方格中土壤所受到的滲透力
- (六)以水力梯度 (Hydraulic Gradient) 方法求下游壩趾之抗管湧安全係數

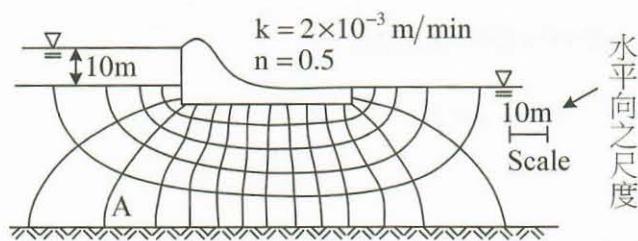


圖 (一)



$$(一) q = k(\Delta h) \frac{N_f}{N_q} = 2 \times 10^{-3} \times 10 \times \frac{5}{14} = 7.143 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}/\text{m}$$

(二) 設不透水層的高度為零位面，參考圖 a

$$A \text{ 點總水頭} = 46 - 2.5 \left(\frac{10}{14} \right) = 44.21 \text{ m}$$

$$A \text{ 點壓力水頭} = \text{總水頭} - \text{位置水頭} = 44.21 - 6 = 38.21 \text{ m}$$

$$\text{所以 } A \text{ 點水壓力} = 38.21 \text{ tf/m}^2$$

	總水頭 = 位置水頭 + 壓力水頭
B	46
A	(44.21)

括弧內為後來計算所得

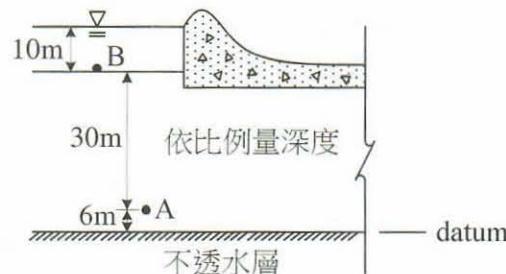


圖 a

(三) 流速 $v = ki$

A 格的寬度(約水平向，即流線長度)13 m

$$i = \frac{(\Delta h)_T}{L} = \frac{(10/14)}{13} = 0.05495$$

$$v = ki = 2 \times 10^{-3} \times 0.05495 = 1.1 \times 10^{-4} \text{ m/min}$$

(四) A 點靜水壓力 $u_{ss} = 40 \text{ tf/m}^2$

(圖 a)

$$\text{所以滲流水壓力 } u_s = u_w - u_{ss} = 38.21 - 40 = -1.79 \text{ tf/m}^2$$

(設上游地面 $u_s = 0 \text{ tf/m}^2$)

(五) 滲透力即滲流力 $= i \times \gamma_w = 0.05495 \times 1 = 0.05495 \text{ tf/m}^3$

依比例尺量 A 納格面積，再取「出紙面單位寬」分析

A 點所在納格，體積約 $13 \times 12 \times 1 = 156 \text{ m}^3$

所以該格所受滲流力 $= 0.05495 \times 156 = 8.572 \text{ tf}$

$$(六) n = \frac{e}{1+e} = 0.5 \quad \text{解出 } e = 1$$

設壩趾處土壤 $G_s = 2.65$

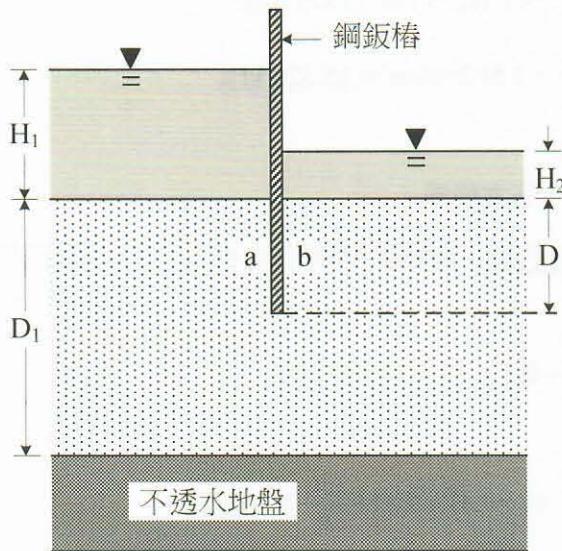
$$i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{G_s - 1}{1+e} = \frac{2.65 - 1}{1+1} = 0.825$$

$$\text{壩趾處，最後一個納格 } i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{(10/14)}{3} = 0.238$$

$$\text{抗管湧 FS} = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{0.825}{0.238} = 3.47$$

練 5 自繪流線網+砂湧

如下圖所示，在河床上施作鋼鈎樁，河床以上為砂層(D_1)，河床以下為岩盤不透水層， $H_1=3\text{ m}$ 、 $D_1=3.75\text{ m}$ 、 $H_2=0.5\text{ m}$ 、 $D=1.5\text{ m}$ 、 $\gamma_{\text{sat}}=20\text{ kN/m}^3$ 、 $k=10^{-3}\text{ cm/sec}$ 。試繪出流網後計算鈎樁單位寬度每日流入之滲流量，並計算鈎樁入土深度中點($D/2$)處上下游水位面a、b之水壓力差。因洪水來襲，河床上游水位暴漲，水位 H_1 提高至多少時，會有流砂現象(quick sand)發生，發生的位置在那裡？提高 H_2 水位，是否可以減緩流砂現象的發生？<100年土木高考 20分>



河床上施作鋼鈎樁之剖面示意圖

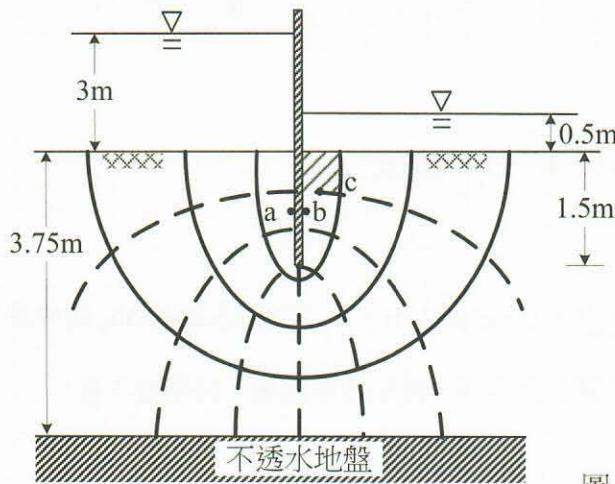


圖 a

(1) 流網圖參考圖 a

$$k = 10^{-3} \text{ cm/sec} = 10^{-5} \text{ m/sec}$$

$$q = k (\Delta h_f) N_f / N_q = 10^{-5} \times 2.5 \times 4 / 8 = 1.25 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = 1.08 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}$$

(2)本小題答案受流線網影響，不同畫法，答案略異。

總水頭差 $\Delta h_t = 3 - 0.5 = 2.5 \text{ m}$

$N_q = 8$ 格

每格之總水頭落差 $= (\Delta h_t) / N_q = 2.5 / 8 = 0.3125 \text{ m/格}$

$$\text{a 點水壓力} = u_{ss} + u_s = (3 + \frac{1.5}{2}) \times 1 - 1.5 \times 0.3125 \times 1 = 3.28125 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{b 點水壓力} = u_{ss} + u_s = (0.5 + \frac{1.5}{2}) \times 1 + 1.5 \times 0.3125 \times 1 = 1.71875 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{a、b 兩點水壓力差} = 3.28125 - 1.71875 = 1.5625 \text{ tf/m}^2 = 15.328 \text{ kPa}$$

(3)本小題答案受流線網影響，不同畫法，答案略異。

最可能發生砂湧位置在鉸樁下游側之地表面，如圖 a 中陰影區。依比例，陰影區底部約在地表下 0.5m(即 c 點)

$$\text{c 點總應力} = 0.5\gamma_w + 0.5\gamma_{sat} = 0.5 \times 9.81 + 0.5 \times 20 = 14.905 \text{ kPa}$$

$$\text{發生砂湧時，c 點 } \sigma' = 0 \text{ kPa} \quad \text{即 } u_w = \sigma$$

$$\text{c 點 } u_w = u_{ss} + u_s = (0.5 + 0.5) \times 9.81 + \frac{\Delta h_t}{N_q} \times 1 \times 9.81 = 9.81 + \frac{\Delta h_t}{8} \times 9.81$$

$$\text{因 } u_w = \sigma \Rightarrow 9.81 + \frac{\Delta h_t}{8} \times 9.81 = 14.905$$

$$\text{解出 } \Delta h_t = 4.15 \text{ m}$$

$$\text{故 } H_l = H_2 + \Delta h_t = 0.5 + 4.15 = 4.65 \text{ m}$$

(4)可減緩砂湧現象發生。提高水位 H_2 ，上下游總水頭差 Δh_t 就會減少，c 點的滲流水壓力就會減少。當水頭差為零時，就無滲流現象，砂湧就不發生。

討論

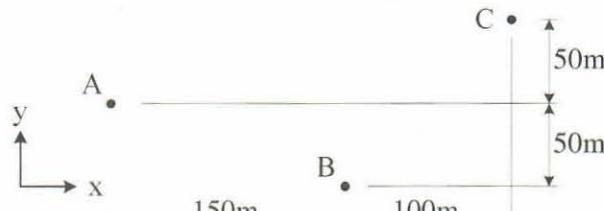
1. 不同流線網畫法，很可能(N_f / N_q)仍為常數，所以不影響滲流量 q 。繪圖時先用鉛筆畫，網格儘量畫成曲線正方形。

2. 流線網格愈緻密(N_f 、 N_q 越多)，求出 a、b 的水壓力愈準確，當然考場內需衡量作圖時間。備考期請取 $N_f=3$ ， $N_q=6$ 練習解之，並與題解比較。
3. 鋼樁底部水力坡降最大，但無位移空間，故該處不發生砂湧。
4. 不同流線網畫法，下游側最後一格的大小就不同，c 的位置就不同，該格的水力坡降就不同，抗流砂的 FS 就不同。
5. 不同流線網畫法，若令下游側最後一格的 $FS=1$ ，則求出的 H_l 就不同。
6. 若按照《建築物基礎構造設計規範》，則 $FS = \frac{i_{cr}}{i} = \frac{\gamma'/\gamma_w}{\Delta h_t/L}$
 $= \frac{(20 - 9.81)/9.81}{(3 - 0.5)/3} = 1.246 < 2.0$ (N.G.)。若令 $FS=1$ 反求 H_l ，則 $FS = 1 = \frac{10.19/9.81}{(H_l - 0.5)/3}$ ，解出 $H_l=3.62$ m，此結果最保守。
7. 畫流線網時，不管畫幾個流槽、等勢能線，經常在鋼樁底部的網格面積最小，下游出口處的網格面積經常比鋼樁底部網格大。這樣造成一個結果：鋼樁底部的水力坡降比下游出口處的大。而《建築物基礎構造設計規範》乃是抓最短流線來算水力坡降，最短流線會通過鋼樁底部與下游出口處，故規範算出的其實是最短流線之「平均水力坡降」。平均水力坡降一定大於最小值(發生在下游出口處， i_{min})，然小於最大值(發生在鋼樁底部， i_{max})。故拿平均水力坡降來算抗砂湧的 FS，其值經常小於拿出口處水力坡降算出的 FS。
8. 考生還可以依 Terzaghi 之砂湧觀念，考慮 $D \times \frac{D}{2}$ 之砂湧浮動區，求抗砂湧之安全係數，以及令 $FS=1$ 反算 H_l 。
9. 求 H_l ，你可以令最後一網格的平均水力坡降 i 恰達到 i_{cr} 來求，也可以令最後一網格底部的有效應力為零來求，此兩法意義相同，故答案相同。
10. 什麼叫安全係數？定義在哪個位置？事涉人為規定，上帝可沒規定。同樣的物理現象，不同人對安全係數規定的內涵不同，當然 FS 值就不同。

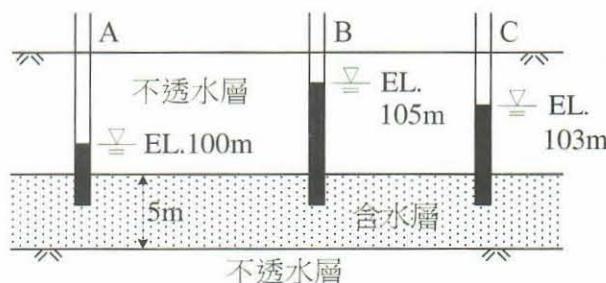
練 6 存在 i_x 、 i_y 之滲流 (三井問題)

有三個水壓計(piezometer)A、B、C置於一拘限含水層(confined aquifer)內，其位置及水頭如圖一所示。此含水層厚5 m，其透水係數為0.1 cm/sec。求此含水層內之：(1)水力坡降，(2)水流方向，(3)輸水率(transmissivity)，(4)單位時間之流量。<90年高考二級25分>

<90年高考二級25分>



(a) 平面圖



(b) 立面圖

四



(1) 設水力坡降 i_x 朝+x 為正，水力坡降 i_y 朝+y 為正。設+x 向是東方。

設 A 為座標原點

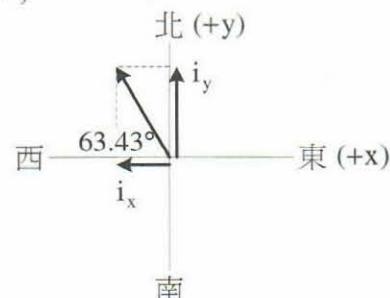
考慮從 A → B : $150i_x + (-50)i_y = 100 - 105 = -5$ ①

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \text{得 } 400i_x = -8 \quad \text{故 } i_x = -0.02 \quad (\leftarrow)$$

將 i_x 代入 ② 解出 $i_y = 0.04$ (↑)

$$\text{水力坡降 } i = \sqrt{i_x^2 + i_y^2} = 0.04472$$

$$(2) \text{水流方向 } \theta = \tan^{-1} \left| \frac{i_y}{i_x} \right| = \tan^{-1} 2 = 63.43^\circ$$



水流方向西偏北 63.43°

(3) 輸水率(transmissivity) $T = kD = 0.1 \times 500 = 50 \text{ cm}^2/\text{sec}$

$$(4) q = kiA = \frac{0.1}{100} \times 0.04472 \times 5 \times 1 = 2.2361 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec}/\text{m} = 19.3196 \text{ m}^3/\text{day}/\text{m}$$

討論

1. 輸水率 $T = kD = \text{滲透係數} \times \text{含水層厚度}$, T 的單位如 cm^2/sec 。
2. 第①式的意義是：考慮水從 A 流向 B，也就是在正 x 方向前進 150 公尺，以及在負 y 方向前進 50 公尺。 $150i_x$ 代表在正 x 方向前進 150 m 消耗掉的水頭。水從 A 流到 B，消耗的總水頭是 $H_A - H_B = 100 - 105 = -5$ 公尺。
3. 此題型出自 Coduto 教科書，本書於民國 89 年台大率先採用，89 年以前考場沒有此題型，故 90 年高考二級可能沒人寫對。包含大地工程及 RC，很多新題型是舶來品，對新資訊吸收速度快的人，才有可能當真正的榜首。
4. 這種三井問題，如何大略判斷水流方向？方向約是從總水頭最高的點往總水頭最低的點流動，即大約從 B 指向 A，肯定對！《土壤力學了沒》有神奇座標轉換解法，請參考！
5. 有很慢的平面圖解法可解本題，因為太慢，故此處不列出。

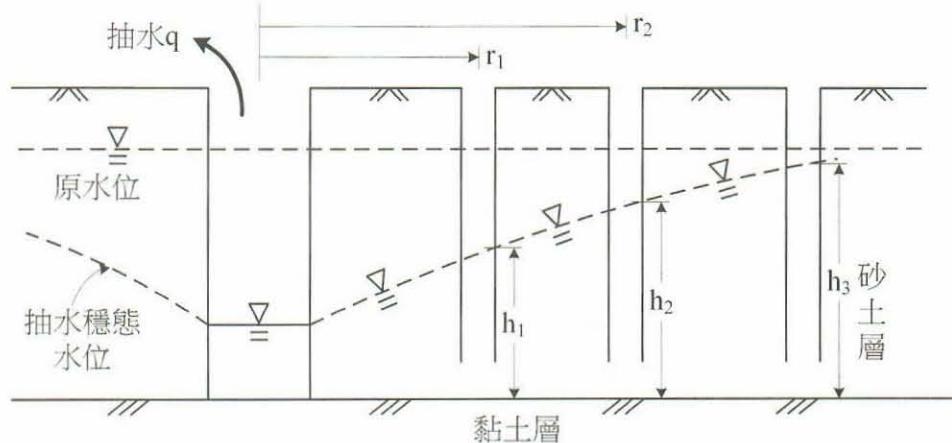
練 7 公式推導

某砂土層覆蓋於不透水的黏土層上，上述砂土層與黏土層均為水平地層，且地下水於砂土層中，地下水位面亦為水平。請說明如何在現地求取此一砂土層的水力傳導係數，並推導計算水力傳導的公式（請於試卷上繪圖，所有符號必須標示於圖中，並以文字加以定義說明）。

<101年土木技師25分>



進行現場無側限水層之抽水試驗，可求水力傳導係數 k ，現場須挖一口抽水之主井，再挖數口觀測井，觀測井平面布設可呈十字狀或 L 狀，每方向 2~3 井。推導如下， q 是抽水穩定後的單位時間抽水量(i.e., 達於穩態，steady state)：



由達西定律 $q = kiA = k\left(\frac{dh}{dr}\right)(2\pi rh)$

從 r_1 積到 r_2 ，水頭從 h_1 升到 h_2

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi k}{q} \int_{h_1}^{h_2} h dh \Rightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\pi k}{q} (h_2^2 - h_1^2)$$

$$\therefore k = \frac{q}{\pi} \frac{\ln(r_2/r_1)}{(h_2^2 - h_1^2)}$$

Q.E.D.推導完畢

討論

$2\pi rh$ 是圓柱體側表面面積。

有位農夫，在烈日下工作久了，頭昏昏腦鈍鈍，熱氣好不逼人。想到前面店家有賣水酒，夏日一杯冰釀好酒正是人生一大快事，遂驅老馬車前往店家暢飲，未料一杯接一杯，竟在店裏醉倒了。掌櫃識得這是隔壁村鍾大，傍晚便將鍾大扶上老馬車，任由老馬車載回鍾大。

老馬果然將鍾大載回自家，這不是老馬有人性或靈性，這完全是老馬識途啊！實際上昏昏沉沉的鍾大，任由路景一幕一幕過腦後，完全不知道發生什麼事。這故事講什麼？講馬車上的鍾大，就是指人生當中的某一階段，終日渾渾噩噩，不知其然，也不知其所以然的那一段歲月啊！

張三說「我準備國考，哪有終日渾渾噩噩，不知其然也不知其所以然。」

李四說『從 r_1 積到 r_2 ，水頭從 h_1 升到 h_2 』，這種說法的物理意義是什麼？到底把什麼東西積出來？』

「…我不知道啊，每本書都這樣積，也不見人懷疑，教授不解釋我也不敢多問…」張三曰。

「那你還說你不是鍾大？這就叫渾噩啊！」李四接道。

「哼，你是不是偷買歐陽寫的書？他又顯靈了麼？」張三不服氣說。

「其實很簡單，這過程的確沒有物理意義，只有數學意義，這過程可以很快把因積分產生的積分常數消掉，快速得到 k 。」李四接著說：

$$\text{從 } q = k \left(\frac{dh}{dr} \right) (2\pi rh)$$

$$\Rightarrow q dr = k(2\pi rh) dh \quad \Rightarrow \int \frac{q}{r} dr = \int k(2\pi h) dh$$

$$\text{積分得 } q(\ln r) = \pi kh^2 + C \dots\dots \textcircled{1} \quad C \text{ 為積分常數}$$

$$\text{B.C.1} \quad h(r_1) = h_1 \quad [\text{h 是函數，r 是自變數}]$$

$$\text{代入 \textcircled{1} 得} \quad q(\ln r_1) = \pi kh_1^2 + C$$

$$\text{解出 } C = q(\ln r_1) - \pi kh_1^2$$

$$\text{B.C.2} \quad h(r_2) = h_2$$

$$\text{代入 \textcircled{1} 得}$$

$$q(\ln r_2) = \pi kh_2^2 + q(\ln r_1) - \pi kh_1^2$$

$$\text{移項解出 } k = \frac{q \ln(r_2/r_1)}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} \quad \text{Q.E.D.}$$

這樣也得到滲透係數 k ，但過程較慢，須解決 C 。倘若利用題解的積分， C 就不會冒出來，過程快多了。

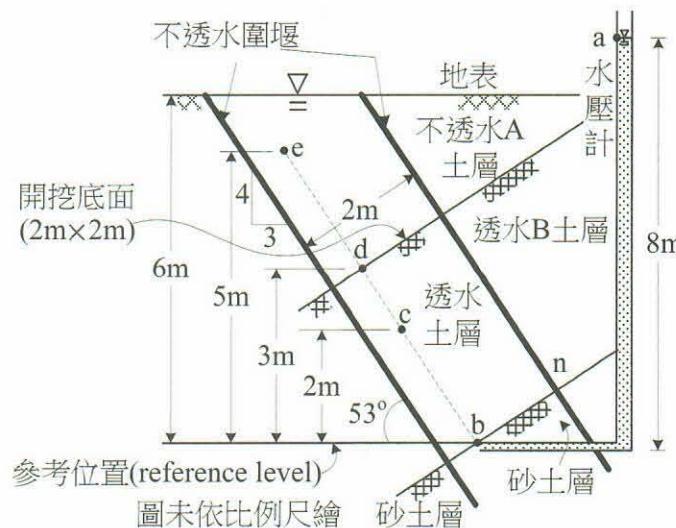
「靠，歐陽書上寫的，對不對？」張三搔搔腦袋。

李四道「他上課早就講過了。鍾大鍾大，你趕快去買齊歐陽的書吧，不然你還不知道考試要落後人家多少。」

練 8 畫流線網+求滲流量

某工地因施工需要在複雜土層進行傾斜向開挖底面為 $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ 正方形之圍堰開挖，如下圖所示，開挖後水在圍堰內土層B之土壤中產生滲流，試求(一)a、b、c、d、e各點之總水頭、高度水頭及壓力水頭各為若干(m)？(二)試繪流經此土壤之流網及計算流經此土壤之平均水力坡降 i_{bd} 為若干？(三)若此土層B之土壤透水係數 $k = 0.005\text{ cm/sec}$ ，試計算其滲流量為若干(m^3/day)？

<100年結構技師25分>



Sol

(一) 設「參考位置」為零位能面(datum)，則答案如下表(unit：公尺)

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
a	8		8		0
b	8		0		8
c	6.667		2		4.667
d	6		3		3
e	6		5		1

水流從 b 流到 d，須消耗總水頭 $\Delta h_t = 8 - 6 = 2\text{ m}$ c 點在 b、d 之間，按長度比例內插，水流從 b 流到 c，須消耗總水頭 $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\text{ m}$

$$\text{故 } c \text{ 點總水頭} = 8 - \frac{4}{3} = 6.667 \text{ m}$$

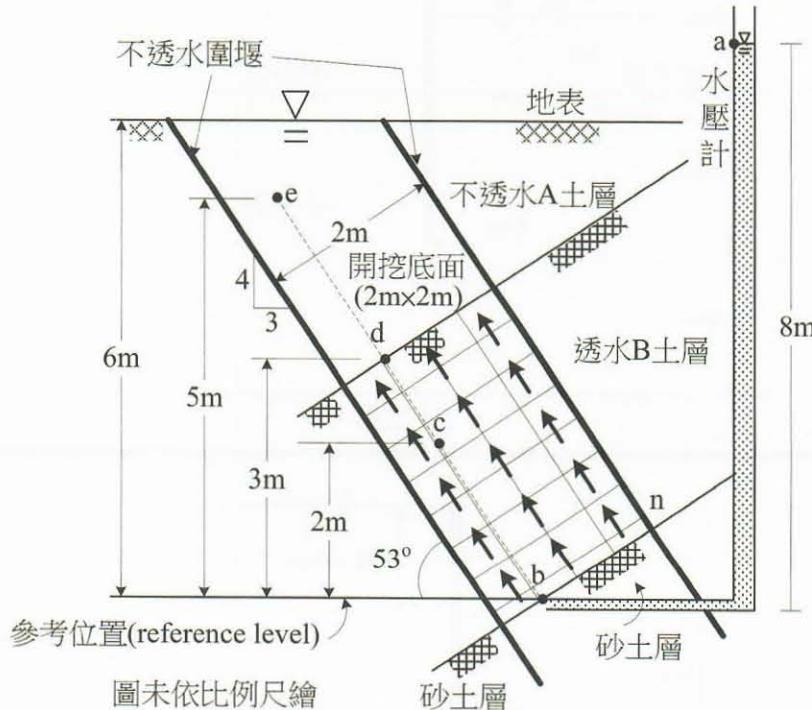
c 點壓力水頭=總水頭-位置水頭=6.667-2 = 4.667 m

$$(二) \text{平均水力坡降 } i_{bd} = \frac{\Delta h_t}{L_{bd}} = \frac{2}{3 \times \frac{5}{4}} = \underline{\underline{0.533}}$$

流網如下圖，4 個流槽，等勢能間隔數=7.5。

$$(三) k = 0.005 \text{ cm/sec} = 0.005 \times 10^{-2} \text{ m/sec}$$

$$q = kiA = 0.005 \times 10^{-2} \times 0.533 \times 2^2 = 1.0667 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec} = \underline{\underline{9.216 \text{ m}^3/\text{day}}}$$



討論

$$q = k \frac{N_f}{N_q} \cdot \Delta h_t \times \text{出紙面寬度} = 0.005 \times 10^{-2} \times \frac{4}{7.5} \times 2 \times 2 = 1.0667 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{sec} = \underline{\underline{9.216 \text{ m}^3/\text{day}}}$$

注意圍堰出紙面的寬度有 2 m。公式 “ $q = kiA$ ” 和 “ $q = k \frac{N_f}{N_q} \cdot \Delta h_t$ ” 本是同根生，殊途必

同歸，答案定相同。

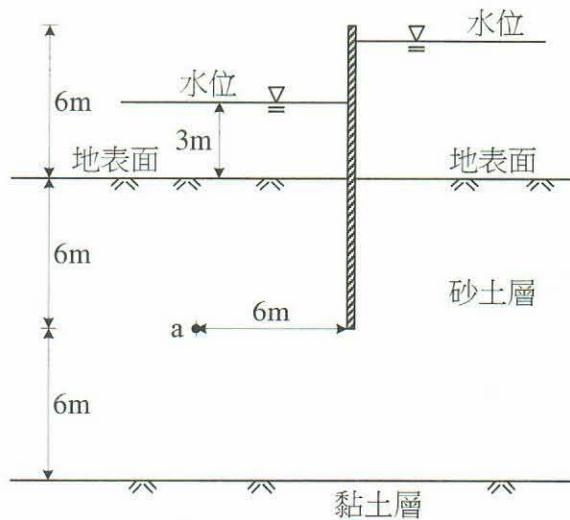
練 9 繪流線網求有效應力

如下圖所示之版樁牆，版樁牆為不透水。因為牆前、後之水位高度不同，土壤將產生滲流。已知土壤的飽和單位重為 20 kN/m^3 ，假設水的單位重為 10 kN/m^3 ，請回答下列問題：

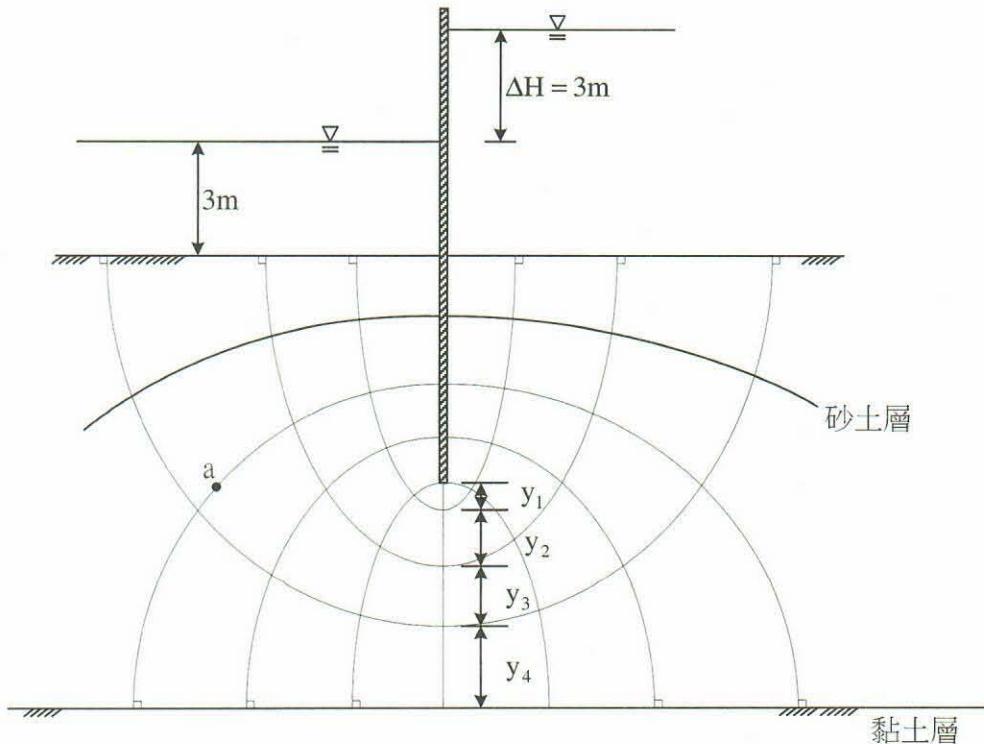
(1) 將下圖繪製於答案卷上，繪製流線網 <99年台科大土壤力學30分>

(2) 利用流線網計算牆趾前方 6 m 處之 a 點之孔隙水壓力(u_w)

(3) 計算 a 點之垂直總應力(σ_v)及有效應力(σ'_v)



(1) 流線網如下



$$(2) \text{每一格之水力坡降} = \frac{\Delta H}{10} = 0.3 \text{ m / 格}$$

從下游算上來：a 點 $u_w = u_{ss} + u_s = 9 \times 1 + 2 \times 0.3 = 9.6 \text{ tf/m}^2 = 96 \text{ kPa}$

從上游算下來：a 點 $u_w = u_{ss} + u_s = 12 \times 1 - 8 \times 0.3 = 9.6 \text{ tf/m}^2 = 96 \text{ kPa}$

$$(3) a \text{ 點垂直總應力 } \sigma_v = 3 \times 10 + 6 \times 20 = 150 \text{ kPa}$$

$$a \text{ 點有效應力 } \sigma'_v = 150 - 96 = 54 \text{ kPa}$$

討論

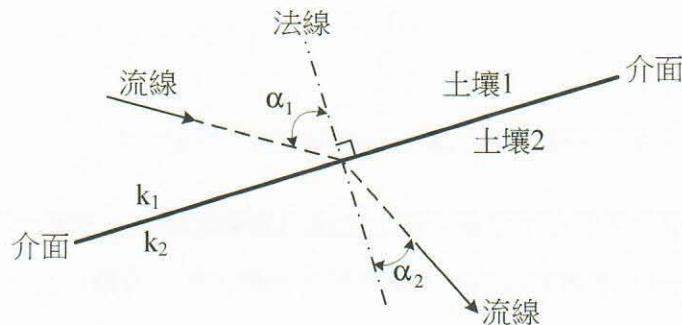
若您要畫 4 個流槽， $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ 可以取 1:2:2:3。先用鉛筆畫，修圖滿意之後，再以原子筆補上。考大地工程，筆者必帶鉛筆、橡皮擦、圓規、量角器、直尺。

有一簡單口訣，適合大部分單向度穩態滲流場合：滲流水壓，上流為正，下流為負。在 a 點的滲流水，有往上的分量，故 a 點的滲流水壓是正數。將基準面訂在黏土層表面，得下表：

	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
上游地表面	18 m		12 m		6 m
a 點	15.6 m		6 m		9.6 m
下游地表面	15 m		12 m		3 m

練 10 流線通過土壤介面

如下圖所示，水流從編號1的土壤流往編號2的土壤。流線對土壤介面法線的夾角分別為 α_1 與 α_2 。請問滲透係數 k_1 和 k_2 之間關係為何？



解法一

考慮流槽如下圖，因連續方程式成立，故 $q_1 = q_2$

$$k_1 i_1 A_1 = k_2 i_2 A_2$$

流線長度取流槽中央的流線長

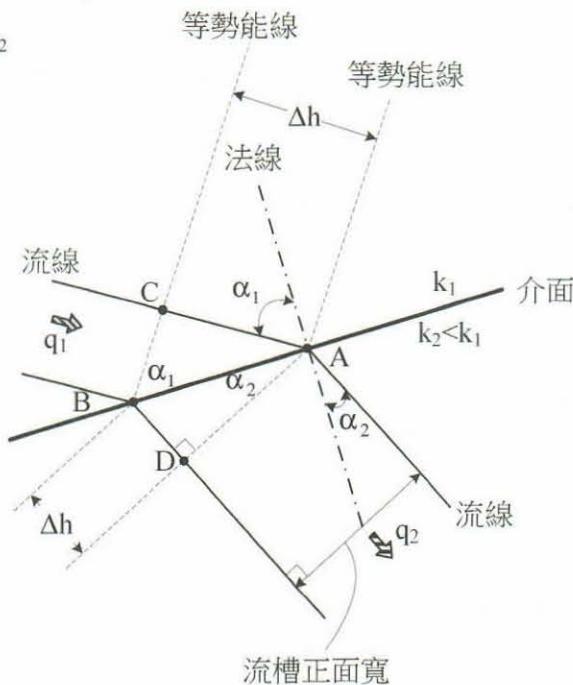
$$\text{展開得 } k_1 \frac{\Delta h}{\frac{1}{2} \overline{AC}} \overline{BC} = k_2 \frac{\Delta h}{\frac{1}{2} \overline{BD}} \overline{AD}$$

$$\text{約分得 } k_1 \frac{\Delta h}{\overline{AC}} \overline{BC} = k_2 \frac{\Delta h}{\overline{BD}} \overline{AD}$$

$$\Rightarrow k_1 \Delta h \cot \alpha_1 = k_2 \Delta h \cot \alpha_2$$

$$\text{再約分 } k_1 \cot \alpha_1 = k_2 \cot \alpha_2$$

$$\text{或寫成 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$$



解法二

考慮 CA 與 BD 兩條流線，C 與 B 同為出發點，A 與 D 同為終點。這兩段流線在同一時間區間

$$\text{內比較，起終點的總水頭差距都是 } \Delta h \text{，故土壤 1 內， } i_1 = \frac{\Delta h}{\overline{AC}} \text{，土壤 2 內， } i_2 = \frac{\Delta h}{\overline{BD}} \text{。}$$

$$\text{按 } k_1 i_1 A_1 = k_2 i_2 A_2 \text{，得 } k_1 \frac{\Delta h}{\overline{AC}} \overline{BC} = k_2 \frac{\Delta h}{\overline{BD}} \overline{AD}$$

$$\text{即可證出 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$$

討論

從以上知道，水流通過兩種不同土壤，流線宛如被「折射」。

滲透係數越小，單位時間在單位截面積上通過的流量就越小。考慮一流槽，為了保證連續方程式的成立(i.e., $q_1=q_2$)，滲透係數小的土壤必須有比較大的「流槽正面寬」，所以滲透係數小的土壤，其流線必定偏向法線以獲得較大正面寬，這是從物理現象推知的結論，而數學公式也支持此一結論。

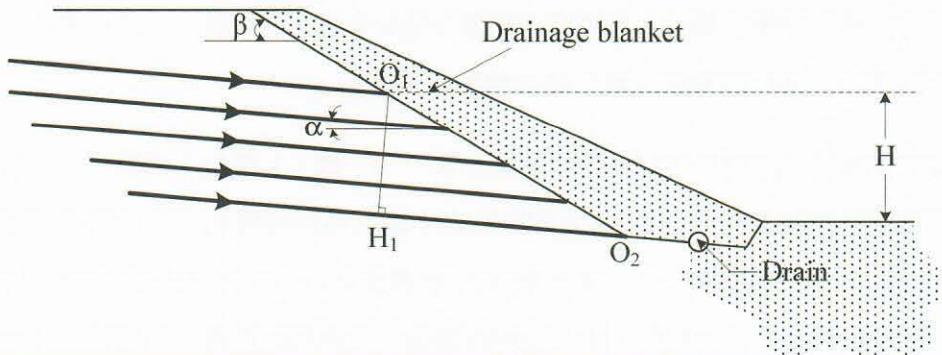
又因為 $q_1=v_1A_1=q_2=v_2A_2$ ，對於滲透係數較小的土壤，已經有較大的流槽正面寬 A，故可推知其流速 v 一定比較慢。⇒ 流速慢，路徑偏向法線。

在高中物理光學裏也有類似土壤力學的結論，光線在兩種介質的界面折射(eg：從空氣進到水中)之後，光在走得較慢的介質中，其路徑會偏向法線，詳情請看司乃耳定律(Snell's Law)。控制土力結論的是「連續方程式」，控制光學結論的是「最短時間原理」(即費馬原理，Fermat Principle)。

練 11 求水力坡降

一均質邊坡與水平之夾角為 β ，邊坡土層之滲透性係數為 k_{soil} 。土層中之滲流水呈直線均勻的方式流動，且水流在接近坡面之排水鋪層(drainage blanket，滲透性係數 k_{drain} 值極大)區域時，水流流線與水平之夾角為 α 。坡面與自由水面線交於 O_1 點，其相當高程為距邊坡坡趾上方 H ，而圖中之 O_1H_1 為等勢能線。邊坡坡面之排水系統由一傾斜之排水鋪層(drainage blanket) 及坡趾之地下排水管(drain) 所組成。試推導邊坡土體內之滲流水，在接近排水鋪層時之水力坡降 $i = ?$

<高考二級15分>

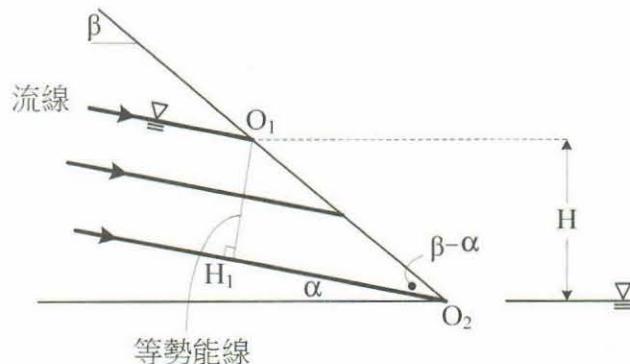


參考下圖， O_1 與 H_1 總水頭相等， O_1 與 O_2 總水頭差距為 H (O_1 較大)，故 H_1 總水頭比 O_2 大 H 。

$$\overline{O_1O_2} = \frac{H}{\sin \beta} \quad \Rightarrow H = \overline{O_1O_2} \sin \beta$$

$$\overline{H_1O_2} = \overline{O_1O_2} \cos(\beta - \alpha)$$

$$\text{從 } H_1 \text{ 到 } O_2 \text{ 的水力坡降 } i = \frac{H}{H_1 O_2} = \frac{H}{O_1 O_2 \cos(\beta - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\underline{\cos(\beta - \alpha)}}$$



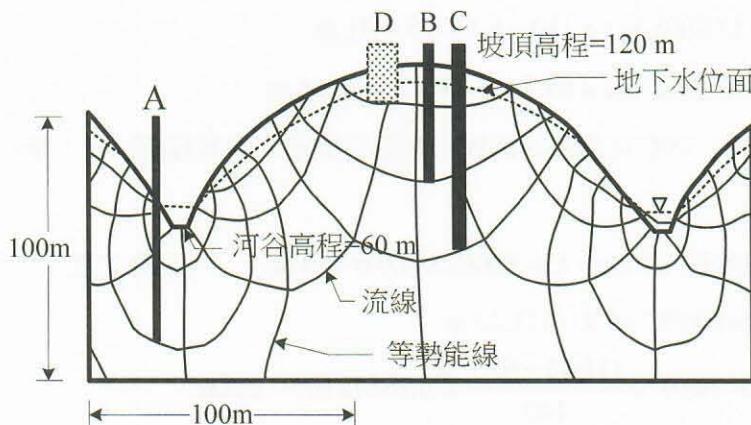
討論

1. 本題答案與 k_{soil} 、 k_{drain} 無關。
2. 達西定律($v=ki$)是透過試驗觀察到的結果，無法由純理論導出，且試驗之水流為層流(Laminar Flow)，紊流不成立達西定律。
3. 在現地抽水試驗中，若遭遇無拘限含水層，抽水會造成洩降曲線在主井處陷最深，該處附近有效應力增量也最大，有效應力增量在曲線各處不同，離井越遠則越小，若現地有既存結構物，進行試驗要注意引發結構物沉陷傾斜。
4. 就像其他學科(eg：材料力學、鋼筋混凝土學、….)一樣，土壤力學裏建立了許多「模型」，但是現地乃複雜多變化，模型得到的結論能不能輕易用到現地？涉及工程師的判斷與經驗，故你常常看到顧問公司之間吵來吵去(學者也是)，在大地工程裏絕對比材料力學明顯。大地材料不均質的程度，比人造材料嚴重，人造材料可透過品管降低不均質程度。你在基地東邊取樣求得滲透係數，基地西邊的土壤未必同意。
5. 粗顆粒土壤比較適合進行現地抽水試驗(求滲透係數)，細顆粒土壤不易從其中抽出水，不適合進行現地抽水試驗。

練 12 流線網

有一均勻緩坡的山丘河谷地區，河谷高程約60 m，坡頂高程約120 m 左右，其坡體內地下水水位及地下水穩態滲流流況，如下圖流網(flow net)所示，地下水位最高處約位於高程110 m 左右，坡體內的滲透係數為 1×10^{-5} m/sec。請說明圖中流網的組成與功用。如果在圖中A、B、C三處分別裝設開放式水壓計，請問其水壓計中的地下水位的高程分別上升至何高程？如果D處房舍下方有污水滲出，請問其從河谷處高程多少的位置滲出？所需的滲流時間約多少時間？

<102土木技師共30分>



(1)流網的組成：流網由流線與等勢能線組成。均質均向的土壤中，流線與等勢能線正交，網格未必要畫成曲邊正方形，曲邊正方形只是便利計算，畫成曲邊長方形亦可。非均向的土壤中，流線與等勢能線不正交。流線乃是流體質點移動的軌跡線。等勢能就是等能量之意。

流網的功用：

- ①可算滲流量。
- ②可算壩底浮力。
- ③可算各網格水力坡降。
- ④可算滲流所需時間。
- ⑤可協助計算砂湧、管湧安全係數。
- ⑥可協助算外視流速。
- ⑦可計算各點的壓力水頭、水壓力、有效應力。

⑧若各流槽寬度相同，則各流槽單位時間流量相等。

⑨同一條等勢能線上各點的總水頭相等。

(2)依比例，河谷高程處的水面位置在 65.7 m (100/3.5×2.3 = 65.7 m)

從地下水位最高處滲流至河谷之河流，總水頭損失=110-65.7 = 44.3 m

$$N_q = 7$$

每一格損失總水頭 = 44.3 / 7 = 6.33 m /格

B 處水壓計內水位高(高程) = 110 - 6.33 × 2 = 97.3 m

C 處水壓計內水位高(高程) = 110 - 6.33 × 3 = 91 m

A 處水壓計內水位高(高程) = 65.7 + 6.33 × 2 = 78.35 m

(3)D 房舍底下之流線，終點在河谷河床底，題圖已標定河谷高程 60 m (下游)

D 之流線總長 L

從圖上量得流線長約 4.9 cm, $L = 100/3.5 \times 4.9 = 140$ m (從 D 之地下水位面量起)

D 處水位面高度 = $100/3.5 \times 3.9 = 111.43$ m

$$\text{外視流速 } v = k_i = 1 \times 10^{-5} \times \frac{111.43 - 65.7}{140} = 3.2664 \times 10^{-6} \text{ m/sec}$$

設土壤孔隙比 0.8

$$n = e / (1+e) = 0.8 / 1.8 = 0.4444$$

$$\text{滲流速度 } v_s = v / n = 7.3495 \times 10^{-6} \text{ m/sec}$$

從 D 處基底量流線長度 $L_l = 100/3.5 \times 4.7 = 134.3$ m

$$\text{所需時間 } t = L_l / v_s = 134.3 / (7.3495 \times 10^{-6}) = 18,273,422 \text{ sec} = 211.5 \text{ days}$$

討論

1. 本題流線畫得很粗糙，流線和等勢能線常不正交，流線和地下水位面也不正交，地下水位線以上竟然還有流線，匪夷所思。
2. 命題者漏給孔隙比，須自行假設。不要以為命題者是神，補習班老師最知道命題者老是漏東漏西，人就是人，不是神。
3. 本題比例尺也粗糙，若少量或多量 0.1 公分，可能衍生相當大的計算誤差。

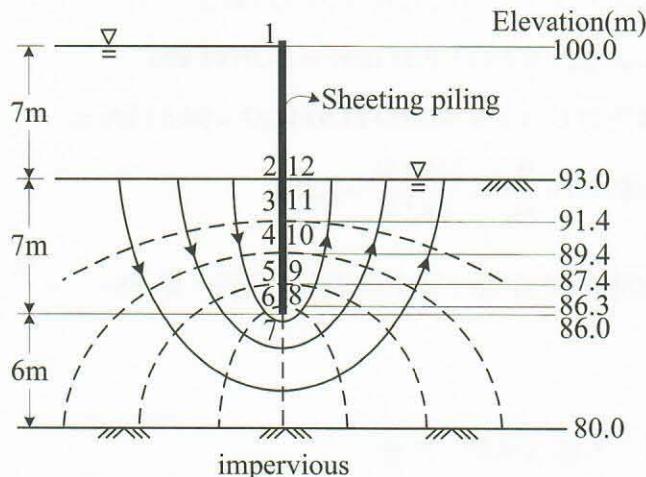
練 13 流線網+滲流率+管湧(砂湧)

如下圖所示之擋水板樁貫入均勻等向之土層 7 m，兩側水位差 7 m，土壤飽和單位重 19 kN/m³，土層之 $k = 5 \times 10^{-4}$ cm/s。
 <97土木技師20分>

(一)求每公尺寬度之滲流率。

(二)求標示 4、10 位置處之水壓力及有效垂直應力。

(三)求板樁前方土壤抵抗管湧之安全係數。



$$(一) q = k \frac{N_f}{N_q} (\Delta h_t) = 5 \times 10^{-4} \times \frac{4}{10} \times 7 = 1.4 \times 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{sec/m} = 1.2096 \text{ m}^3/\text{day/m}$$

(二) 位置 4(上游，高程 89.4 m) 之總應力 $\sigma = 7 \times 9.81 + 19(93 - 89.4) = 137.07 \text{ kPa}$

$$\text{水壓力 } u_w = u_{ss} + u_s = (100 - 89.4) \times 9.81 - 2\left(\frac{7}{10}\right) \times 9.81 = 90.252 \text{ kPa}$$

$$\text{有效應力 } \sigma' = 137.07 - 90.252 = 46.818 \text{ kPa}$$

$$\text{位置 10(下游，高程 89.4 m) 之總應力 } \sigma = 19(93 - 89.4) = 68.4 \text{ kPa}$$

$$\text{水壓力 } u_w = u_{ss} + u_s = (93 - 89.4) \times 9.81 + 2\left(\frac{7}{10}\right) \times 9.81 = 49.05 \text{ kPa}$$

$$\text{有效應力 } \sigma' = 68.4 - 49.05 = 19.35 \text{ kPa}$$

$$(三)(i) \text{ 臨界水力坡降 } i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{\gamma_{sat} - \gamma_w}{\gamma_w} = \frac{19 - 9.81}{9.81} = 0.9368$$

流線經過每一格，總水頭損失為 $7/10 = 0.7 \text{ m}$

下游出口處，最後一格水力坡降 $i = \frac{0.7}{93 - 91.4} = 0.4375$

下游出口處，最後一格抗管湧安全係數 $FS = \frac{i_c}{i} = \frac{0.9368}{0.4375} = 2.14$

(ii)若依照 Terzaghi 砂湧分析，下游側砂湧浮動區為 $D \times \frac{D}{2} = 7m \times 3.5m$

砂湧浮動區土壤有效重 $W' = 7 \times 3.5 \times (19 - 9.81) = 225.155 \text{ kN/m}$

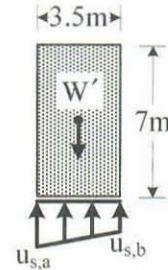
滲流水壓力 $u_{s,a} = 5 \times 0.7 \times 1 = 3.5 \text{ tf/m}^2 = 34.335 \text{ kPa}$

滲流水壓力 $u_{s,b} = 3.2 \times 0.7 \times 1 = 2.24 \text{ tf/m}^2 = 21.9744 \text{ kPa}$

浮動區底下滲流力 $U_s = 3.5(34.335 + 21.9744)/2 = 98.54 \text{ kN/m}$

抗管湧安全係數 $FS = \frac{W'}{U_s} = \frac{225.155}{98.54} = 2.285$

(iii)若依據貼著鋼板樁的流線計算抗管湧安全係數，則 $FS = \frac{i_c}{i} = \frac{0.9368}{7/14} = 1.8736$



討論

“impervious”是「不能滲透的」之意。

基礎工程中，偶爾有求版樁兩側「淨水壓」的問題，其原理還是來自土壤力學的流線網。

圖 a 中版樁左側靜水壓 u_{ss} 較大，滲流向右，取滲流水壓 u_s 為負數，相加之後(實為減法)，接近由流線網算出的水壓力。圖 a 中版樁右側靜水壓 u_{ss} 較小，但滲流向上，取滲流水壓 u_s 為正數， u_{ss} 與 u_s 相加之後，接近由流線網算出的水壓力。圖 b 代表版樁兩側， $u_{ss}+u_s$ 之後的結果，在版樁底端，水壓力應連續，俱是 u_w 。圖 c 代表版樁兩側的總水壓，進行向量相扣之後的「淨水壓」，這是簡易型答案，簡易求解時用。

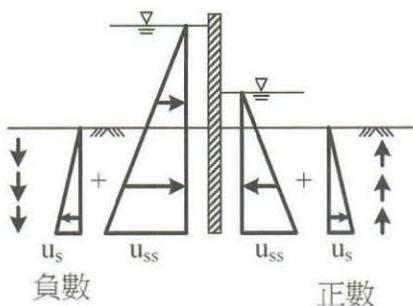


圖 a

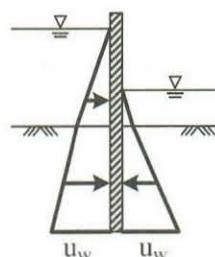


圖 b

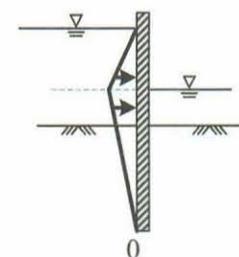


圖 c 淨水壓

練 14 上舉

有一粉土質土層位於厚卵礫石層上，粉土層厚為7 m，此處之地下水位位於地表下1 m，此粉土質土層內開挖至5 m，並將滲入開挖面之地下水予以收集排出而使土層之滲流達到穩態流狀況，求開挖面底部殘餘2 m粉土之水力坡降，假設飽和粉土 $\gamma_{sat}=1.93 \text{ gw/cm}^3$ ，開挖底面之土層是否會有擠入(blow-in)問題？

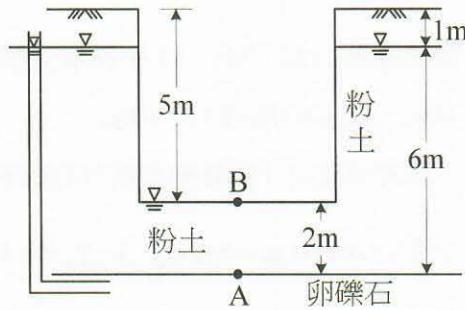


參考右圖，定 A 點位置水頭為零公尺

點位	總水頭 = 位置水頭 + 壓力水頭	
A	6 m	0 m
B	2 m	2 m

$$i = \Delta h_t / L = (6-2) / 2 = 2$$

$$\text{上舉 FS} = \frac{2 \times 1.93}{6 \times 1} = 0.643 < 1.0 \quad \text{有擠入問題}$$

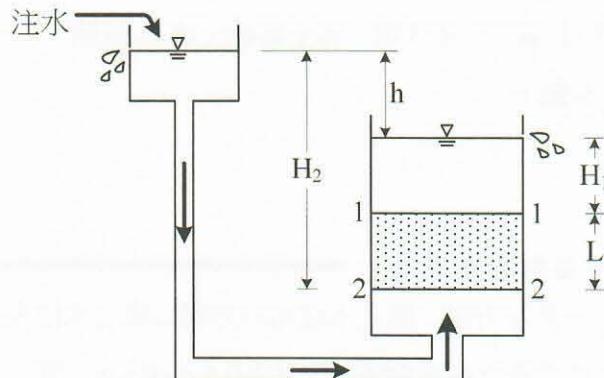


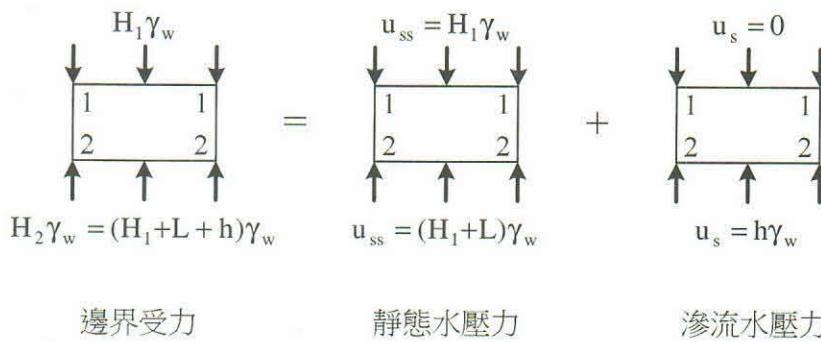
討論

擠入就是上舉，從題意可明顯看出。卵礫石層的壓力水頭是 6 m，不是 2 m，要插水壓計判斷，不是自己「感覺」判斷。本題抗砂湧 $FS = i_{cr} / i = (\gamma' / \gamma_w) / i = (0.93 / 1) / 2 = 0.465$ 。

練 15 圖解說明「單位體積的滲流力」

如下圖所示之定水頭滲流，1122所圍是土壤，可否說明為何單位體積的滲流力被定義成 $i\gamma_w$ ？





將分離體邊界 1122 切出。11 平面承受靜態水壓力 $H_1\gamma_w$ ，但滲流水壓力為零。22 平面承受總水壓力 $H_2\gamma_w$ ， $H_2\gamma_w = (H_1+L)\gamma_w + h\gamma_w$ 。

若以下游液面當成計算靜態水壓力的基準面，則 22 平面承受靜態水壓力 $(H_1+L)\gamma_w$ ，22 平面承受的滲流應力(stress) $u_s = h\gamma_w = \frac{h}{L} \cdot L \cdot \gamma_w = i \cdot L \cdot \gamma_w$ 。通過滲流段後，滲流水壓力就被「消耗」掉。

22 平面承受的「滲流推力」(Force) $J = u_s A = i \cdot L \cdot A \cdot \gamma_w = i \cdot V \cdot \gamma_w$

此「滲流推力」通過土體 1122 之後，消失為零，故單位體積承受的滲流力 $= J / V = i\gamma_w$ ，這是一種徹體力，像重力一樣是徹體力。

討論

上圖並不是力平衡圖，請勿誤解，只是進行力的分解。11 邊界受力小，22 邊界受力大。

重力作用在你身體內每一立方公分，故是「徹體力」，不是邊界力。你用力推牆壁，牆壁和你手掌間交互作用力是邊界力，不是徹體力。

單位體積滲流力大小和土壤單位重無關，和土顆粒比重 G_s 無關，和水頭差有關。臨界水力坡降 i_c 才和土顆粒比重 G_s 有關。

練 16 滲流平行層面與垂直層面

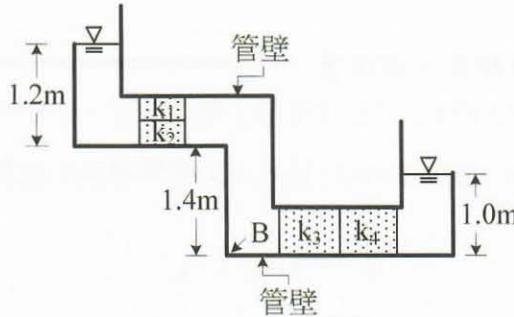
如圖顯示某方管之縱斷面，其左方開口處之水位和右方開口處之水位高程保持不變，且方管內有兩處雙層淤積土壤；該方管之通水橫斷面尺寸為 $0.6 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ 。圖二中各淤積土壤之滲透性皆具等向性，其滲透係數為土壤 1 之 $k_1 = 0.004 \text{ cm/sec}$ 、土壤 2 之 $k_2 = 0.008 \text{ cm/sec}$ 、土壤 3 之

$k_3 = 0.003 \text{ cm/sec}$ 、土壤4之 $k_4 = 0.006 \text{ cm/sec}$ ；且在縱斷面上，土壤1之寬為0.6 m、高為0.3 m，土壤2之寬為0.6 m、高為0.3 m，土壤3之寬為0.8 m、高為0.6 m，土壤4之寬為0.8 m、高為0.6 m。試對下列問題作答：

(一) 計算方管內之滲流量 (單位： m^3/day)。(20分)

(二) 計算方管內B點之水壓力 (單位： kPa)。(5分)

<104高考三級>



$$(一) k_{eq1} = \frac{H_1 k_1 + H_2 k_2}{H_1 + H_2} = \frac{0.3k_1 + 0.3k_2}{0.3 + 0.3} = 0.5k_1 + 0.5k_2 = 0.006 \text{ cm/sec}$$

$$\frac{\Sigma H}{k_{eq2}} = \frac{H_3}{k_3} + \frac{H_4}{k_4} \quad \frac{1.6}{k_{eq2}} = \frac{0.8}{0.003} + \frac{0.8}{0.006}$$

$$k_{eq2} = 0.004 \text{ cm/sec}$$

$$\Delta H_1 + \Delta H_2 = \Delta H_t = 1.4 + 1.2 - 1.0 = 1.6 \text{ m. ①}$$

$$\Delta H_1 : \Delta H_2 = \frac{L_1}{A_1 k_{eq1}} : \frac{L_2}{A_2 k_{eq2}} = \frac{0.6}{1 \times 0.006} : \frac{0.8 + 0.8}{1 \times 0.004} = 0.2 : 0.8 ②$$

聯立①、②，解出 $\Delta H_1 = 1.6 \times 0.2 = 0.32 \text{ m}$

$$q = q_1 = k_{eq1} i_1 A_1 = 0.006 \times 10^{-2} \times \frac{0.32}{0.6} \times 0.6^2 = 1.152 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{sec} = 0.9953 \text{ m}^3/\text{day}$$

(二) 設 B 點位置為 datum，其總水頭 $2.6 - 0.32 = 2.28 \text{ m}$

$$u_{w,B} = h_{w,B} \gamma_w = 2.28 \times 9.81 = 22.367 \text{ kPa}$$

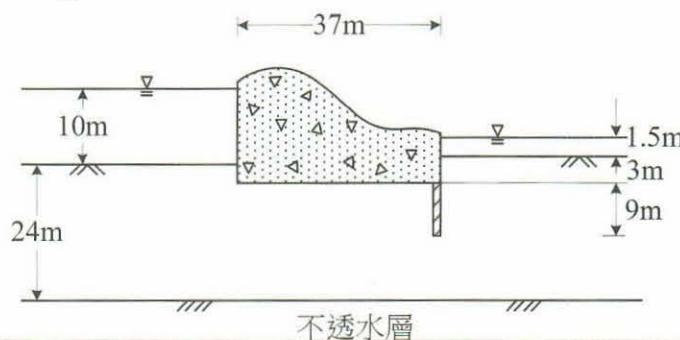
討論

參考下表，B 點壓力水頭為 2.28 m。

點位	總水頭	=	位置水頭	+	壓力水頭
B	2.28		0		h_p
C(上游液面)	2.6		2.6		0

練 17 上舉力、水力坡降、滲流量

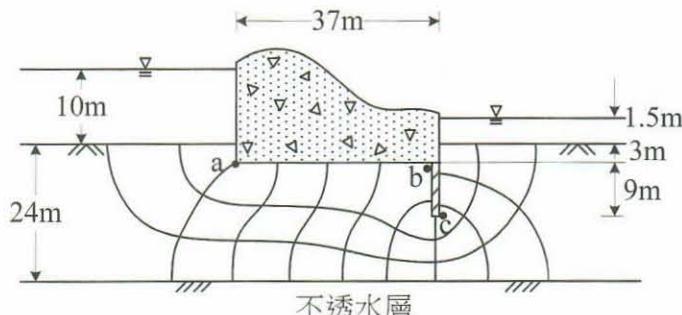
請用流槽數(N_f)為3，繪製以下圖之不透水混凝土堰之流網， $k_e = 1 \times 10^{-3}$ cm/sec，計算其在堰底單位寬度的上舉力(kN/m，uplift force)，最大水力坡降發生的位置與大小，並計算單位寬度每日的滲流量(m³/m/day)。
<104台大土木25%>



(一)流線網如圖。

$$N_q = 9 \quad N_f = 3$$

$$k_e = 1 \times 10^{-3} \text{ cm/sec} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$$



$$q = k_e(\Delta h_t) \frac{N_f}{N_q} = 1 \times 10^{-5} \times (10 - 1.5) \times 3 / 9 = 2.8333 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{m/sec} = 2.448 \text{ m}^3/\text{m/day}$$

$$\text{在截水牆底部右端 } c \text{ 點 } i = i_{\max} = \Delta h_t / L = \frac{(10 - 1.5)}{9} = 0.42$$

$$a \text{ 點水壓力 } u_{w,a} = [(10+3)-1(\frac{10-1.5}{9})]\gamma_w = 12.056 \text{ tf/m}^2$$

$$b \text{ 點水壓力 } u_{w,b} = [(10+3)-4.6(\frac{10-1.5}{9})]\gamma_w = 8.655 \text{ tf/m}^2$$

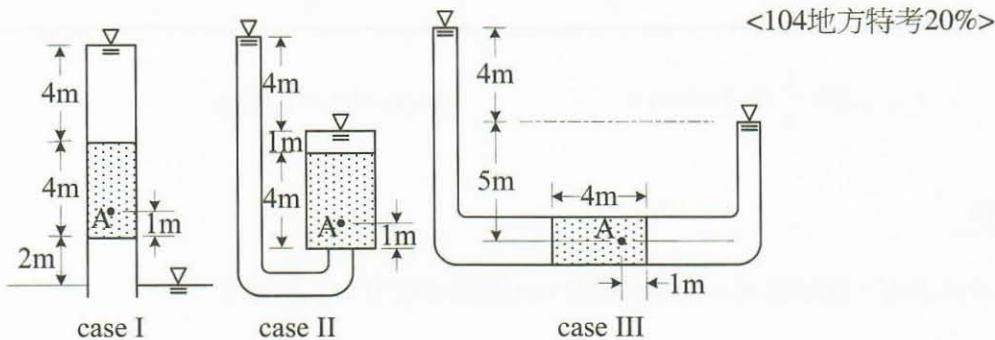
$$U_w = \frac{u_{w,a} + u_{w,b}}{2} \times 37 = 383.164 \text{ tf/m} = 3753 \text{ kN/m}$$

討論

原題目給的線段，比例有矛盾，上下游地表似乎不切齊，問題多，不易畫出合理的流線網，會影響 i_{max} 發生位置與大小，本書已經適度調整比例。

練 18 計算水壓力

對於下圖所示滲流之case I、case II與case III，請計算土壤試體在A點之孔隙水壓。



Case I，以下游面為 datum，表格數據單位為 m

位置	總水頭	位置水頭	壓力水頭
上游面	10	10	0
A 點	2.5	3	(-0.5)
下游面	0	0	0

$$A \text{ 點總水頭} = \frac{1}{4}(10-0)+0=2.5 \text{ m}$$

$$(u_w)_A = (-0.5)\gamma_w = -0.5 \text{ tf/m}^2$$

Case II，以下游面為 datum，表格數據單位為 m

位置	總水頭	位置水頭	壓力水頭
上游面	4	4	0
A 點	3	-4	(7)
下游面	0	0	0

$$A \text{ 點總水頭} = \frac{3}{4}(4-0)+0=3 \text{ m} \quad (u_w)_A = [3-(-4)]\gamma_w = 7 \text{ tf/m}^2$$

Case III，以 A 為 datum，表格數據單位為 m

位置	總水頭	位置水頭	壓力水頭
上游面	9	9	0
A 點	6	0	(6)
下游面	5	5	0

$$A \text{ 點總水頭} = \frac{1}{4}(9-5)+5=6 \text{ m} \quad (u_w)_A = 6\gamma_w = 6 \text{ tf/m}^2$$

討論

請嘗試用「總水壓 u_w =靜態水壓力 u_{ss} +滲流水壓力 u_s 」算算看。

歐陽神解：Case I，土柱頂水壓力 4 tf/m^2 ，土柱底水壓力 -2 tf/m^2 ，線性內差得 A 點水壓力 -0.5 tf/m^2 。Case II，土柱頂水壓力 1 tf/m^2 ，土柱底水壓力 9 tf/m^2 ，線性內差得 A 點水壓力 7 tf/m^2 。Case III，土柱左側水壓力 9 tf/m^2 ，土柱右側水壓力 5 tf/m^2 ，線性內差得 A 點水壓力 6 tf/m^2 。

土壤力學、基礎工程這一科，重視試驗室試驗及現場經驗，但大學生現場經驗趨近零，如何讀好土壤力學、基礎工程？重點在多看文獻資料、多想像、多問(以修正想像)，儘量彌補現場經驗之不足。日後若能留在土木領域，須常跑工地，以建立理論與經驗的「跨海大橋」。

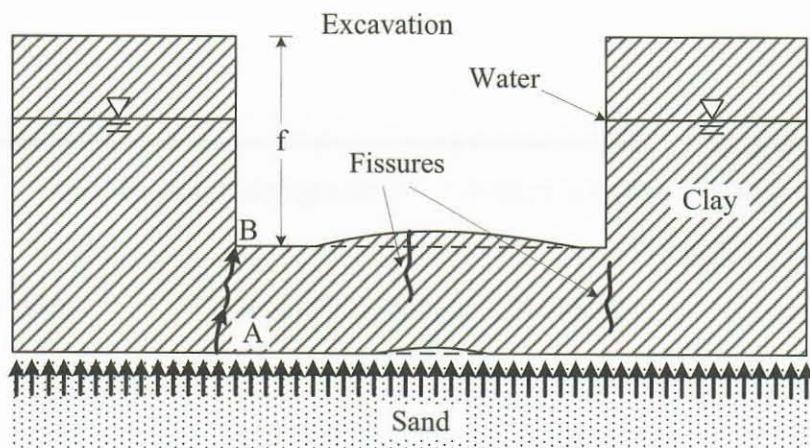
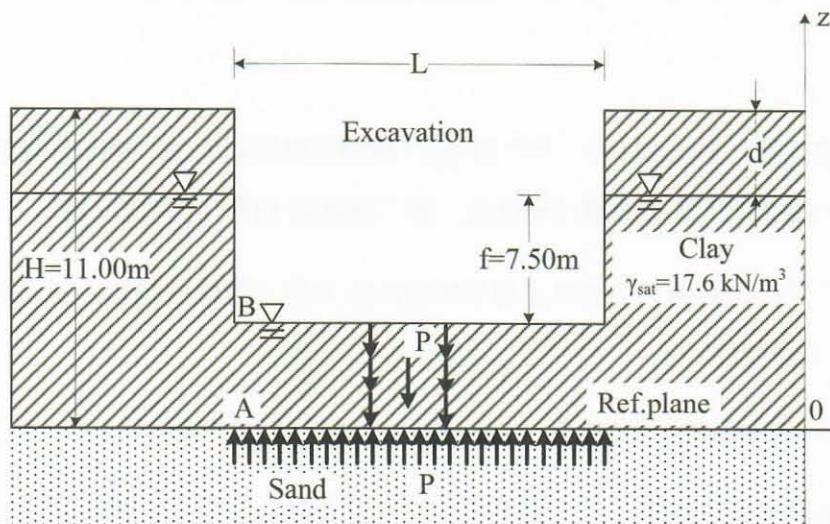
練 19 上舉+流砂

工地鑽探結果顯示由地表至地下11 m為堅硬黏土層（飽和單位體積重 $\gamma_{sat}=17.6 \text{ kN/m}^3$ ），而其下方則轉為砂土層（飽和單位體積重 $\gamma_{sat}=20 \text{ kN/m}^3$ ）。今於工地進行大面積開挖發現，當開挖深度達7.5 m時，開挖面開始產生裂隙（階段-1：clay fissuration），接著向上滲流水（A→B）開始將砂土攜至開挖面上而開始發生流砂（階段-2：quick sand）。請依階段-1及階段-2之土壤滲流力學行為分別計算：

<高考二級15分>

階段-1：裂隙產生時，以及

階段-2：流砂發生時，在開挖面外側應有之地下水水位深度d=？



(1) 裂隙產生時，此時發生上舉(uplift)，A、B 間垂直距離為 3.5 m

$$FS = \frac{\gamma_{sat} h_1}{\gamma_w h_w} = \frac{17.6 \times 3.5}{(11-d)9.81} = 1 \quad \text{解出 } d = 4.72 \text{ m}$$

(2)流砂發生時，黏土裂隙內充滿砂，該時刻砂之水力坡降 = 砂的臨界水力坡降

砂 $\gamma_{\text{sat}}=20 \text{ kN/m}^3$ ，故 $\gamma'=20-9.81=10.19 \text{ kN/m}^3$

$$\text{臨界水力坡降 } i_{cr} = \gamma' / \gamma_w = 10.19 / 9.81 = 1.0387$$

$$A、B \text{ 間水力坡降 } i = \Delta h_1 / L = (7.5 - d) / 3.5$$

令 $i_{cr} = i$ 解出 $d = 3.86 \text{ m}$

※本小題是考黏土裏的裂縫充滿砂，裂縫貫通黏土塊，而砂產生流砂現象。

討論

1. 原題目第一張圖標示的「 $f=7.50\text{ m}$ 」，距離起點疑似有誤，應該從地表面算到開挖面，而不該從地下水位面算到開挖面。第二張圖的 f 標示位置就正確。
 2. 第二張圖的裂隙，畫在黏土層受彎後的張力側，顯見命題教授還是有審慎考量均質黏土的變形行為。
 3. 107 年水利技師又考此題，有練習過本書者，直接上榜。
 4. 上舉檢討簡單到爆，各位男性考生若不能上舉，就毋忘在莒(無望再舉)了。

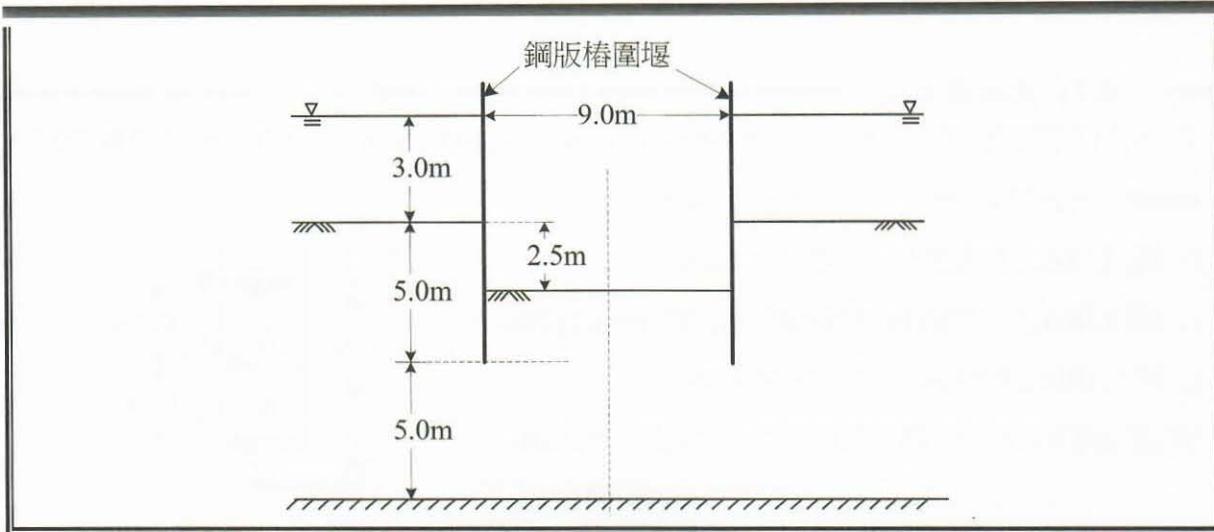
練 20 繪流網

某對稱長條形鋼版樁圍堰，其剖面如圖所示，土壤滲透係數為 4.0×10^{-7} m/s。

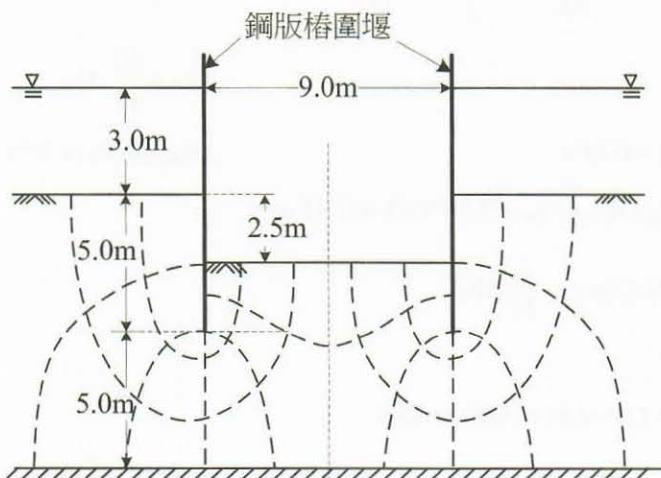
(一)試繪此圍堰之流網圖。(15分)

(二)求每秒每單位公尺流入此圍堰中間之滲流量為何?(10分)

<106年高考三級>



(一) 流線網如下，左右對稱。



$$(二) q = \Delta h_t(k) N_f / N_q = 2[5.5 \times 4 \times 10^{-7} \times 2.5 / 6] = 1.833 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{m/sec}$$

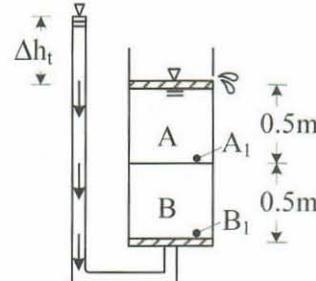
討論

1. 欲求滲漏量 q ，歐陽特別強調對稱之流線網取半計算再乘以 2，毫無懸念果然考出。
2. 注意版樁到版樁之間有等勢能線。

練 21 定水頭試驗

有一定水頭裝置如下，土壤A的滲透係數為 1 cm/sec ， $\gamma_{\text{sat}}=19 \text{ kN/m}^3$ ；土壤B的滲透係數為 0.1 cm/sec ， $\gamma_{\text{sat}}=20 \text{ kN/m}^3$ ，上下游水頭差為 Δh_t 。

- (一)若土壤A之有效應力降為零，試求 Δh_t 。
- (二)若土壤A之水力坡降達到其臨界水力坡降，試求 Δh_t 。
- (三)若土壤B之有效應力降為零，試求 Δh_t 。
- (四)若土壤B之水力坡降達到其臨界水力坡降，試求 Δh_t 。



<改編105台大>



$$(一) \Delta h_A : \Delta h_B = (\frac{L}{A_k})_A : (\frac{L}{A_k})_B = (\frac{1}{1})_A : (\frac{1}{0.1})_B = 1 : 10$$

$$\therefore \Delta h_A = \frac{1}{11} \Delta h_t \quad \Delta h_B = \frac{10}{11} \Delta h_t$$

考慮 A_1 點， $\because \sigma'_{A1} = 0 \text{ kPa}$

$$\therefore u_{w,A1} = \sigma_{A1} = 0.5 \times 19 = 9.5 \text{ kPa}$$

$$A_1 \text{ 點壓力水頭 } h_{p,A1} = u_{w,A1} / \gamma_w = 9.5 / 9.81 = 0.97 \text{ m}$$

$$\Delta h_A = 0.97 - 0.5 = 0.47 \text{ m} = \frac{1}{11} \Delta h_t$$

$$\text{解出 } \Delta h_t = 5.15 \text{ m}$$

$$(二) A 土壤 i_{cr} = \gamma' / \gamma_w = (19 - 9.81) / 9.81 = 0.94$$

$$i_A = \Delta h_A / L$$

代入數據得 $0.94 = \Delta h_A / 0.5$

$$\Rightarrow \Delta h_A = 0.47 \text{ m} = \frac{1}{11} \Delta h_t$$

$$\text{解出 } \Delta h_t = 5.15 \text{ m}$$

$$(三) 考慮 B_1 點， $\because \sigma'_{B1} = 0 \text{ kPa}$$$

$$\therefore u_{w,B1} = \sigma_{B1} = 0.5 \times 19 + 0.5 \times 20 = 19.5 \text{ kPa}$$

$$B_1 \text{ 點壓力水頭 } h_{p,B1} = u_{w,B1} / \gamma_w = 19.5 / 9.81 = 1.99 \text{ m}$$

$$\text{看裝置圖形，} h_{p,B1} = 0.5 + 0.5 + \Delta h_t$$

$$\text{解出 } \Delta h_t = 0.99 \text{ m}$$

$$(四) B 土壤 i_{cr} = \gamma' / \gamma_w = (20 - 9.81) / 9.81 = 1.04$$

$$i_B = \Delta h_B / L$$

代入數據得 $1.04 = \Delta h_A / 0.5$

$$\Rightarrow \Delta h_A = 0.52 \text{ m} = \frac{10}{11} \Delta h_t$$

解出 $\Delta h_t = 0.57 \text{ m}$

討論

上層土壤，當其發生「有效應力降為零」之事件，必定也等於發生「水力坡降值達到臨界水力坡降」。所以第(一)小題的答案必定同於第(二)小題。下層土壤，當其發生「水力坡降值達到臨界水力坡降」之事件，不見得也同步發生「有效應力降為零」。

這種多層不同滲透係數的土壤，如何定義砂湧(Sand Boiling)？教科書沒講，教科書都是提單一土壤定義砂湧(就像 RC 教科書沒教多排拉力筋之下，如何定義 A_{sb})。保守的話，可以定義任一層有效應力降為零即是砂湧；樂觀的話，可以定義上層土壤(i.e., 開挖面)有效應力降為零才是砂湧，這是因為上層才有位移空間。不管如何定義，本題解是把各狀況算得一清二楚。

一般而言，臨界水力坡降約在 1.0 左右，但兩種土壤的水力坡降比 $i_A : i_B = (\frac{\Delta h}{L})_A : (\frac{\Delta h}{L})_B = (\frac{1}{0.5})_A : (\frac{10}{0.5})_B = 1 : 10$ ，只看水力坡降而不看位移條件的話，B 較易砂湧。

你若有興趣，調換 A、B 的滲透係數，其他數字不動，再算算看這四個小題，想想有什麼收穫？

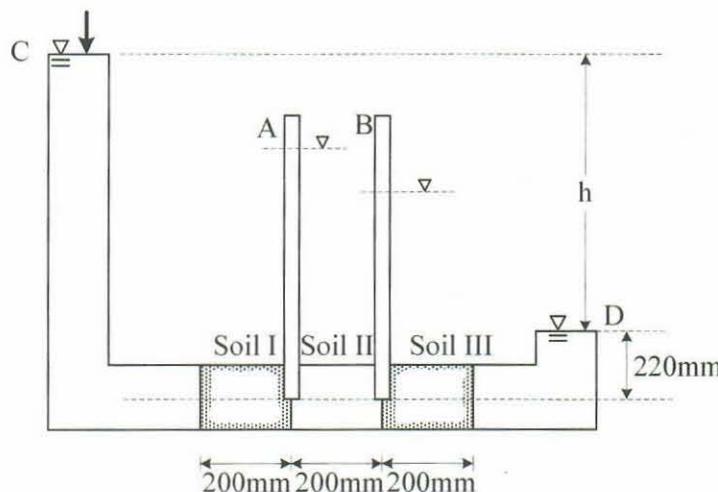
練 22 求滲流速度

滲流試驗剖面圖所示，其中三種不同土層，每層200 mm長，斷面直徑150 mm，在土壤變化處設置水壓計A與B，試體兩端水頭差 h 為500 mm，三種土壤之孔隙率(n)與滲透係數(k)分別為 Soil I : $n=0.5$, $k=5\times 10^{-3}$ (cm/sec)；Soil II : $n=0.6$, $k=5\times 10^{-2}$ (cm/sec)；Soil III : $n=0.4$, $k=5\times 10^{-4}$ (cm/sec)。

(一)決定每小時流經此試體之水量。(5分)

(二)以下游出口處水位為基線，決定土壤 I 出口處之壓力水頭及總水頭。(10分)

(三)決定水壓計B之水柱高度及土壤III之滲流速度(seepage velocity)。(10分) <107土技>



$$(一) \text{滲流垂直土壤層面 } \frac{\Sigma H}{k_e} = \frac{H_1}{k_1} + \frac{H_2}{k_2} + \frac{H_3}{k_3}$$

$$\text{代入數據 } \frac{60}{k_e} = \frac{20}{5(10)^{-3}} + \frac{20}{5(10)^{-2}} + \frac{20}{5(10)^{-4}}$$

解出等值滲透係數 $k_e = 1.3514 \times 10^{-3}$ cm/sec

$$Q = k_e iAt = 1.3514 \times 10^{-3} \times (50/60) \times \frac{\pi}{4} (15)^2 \times 3600 = 716.41 \text{ cm}^3$$

$$(二) \Delta h_1 : \Delta h_2 : \Delta h_3 = \frac{L_1}{A_1 k_1} : \frac{L_2}{A_2 k_2} : \frac{L_3}{A_3 k_3} = \frac{1}{1k_1} : \frac{1}{1k_2} : \frac{1}{1k_3} = 1000 : 100 : 10000 = 10 : 1 : 100$$

$\Delta h_1 = (10/111)50 = 4.5 \text{ cm} = CA$ 之間水位垂直落差

$\Delta h_2 = (1/111)50 = 0.45 \text{ cm} = AB$ 之間水位垂直落差

$\Delta h_3 = (100/111)50 = 45.05 \text{ cm} = BD$ 之間水位垂直落差

土壤 I 出口處總水頭 $= 50 - 4.5 = 45.5 \text{ cm}$

土壤 I 出口處壓力水頭 $= 45.5 + 22 = 67.5 \text{ cm}$

(三)水柱高度 $= 22 + \Delta h_3 = 22 + 45.05 = 67.05 \text{ cm}$

外視流速 $v = k_e i = 1.3514 \times 10^{-3} \times 50 / 60 = 1.1262 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$

滲流速度 $v_s = v / n = 1.1262 \times 10^{-3} / 0.4 = 2.8154 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$

討論

1. 這是總水頭、壓力水頭基本題型。命題者為了加速閱卷速度，定 datum 在下游出口處。三種土壤的外視流速是相同的，但滲流速度不同，因為各有各的 n 。
2. 土壤 III 的滲流速度 v_s 是其外視流速 v 除以 n 。
3. 總水頭損失之「搶劫比」公式，歐陽教法獨一無二，好用又搶分，命題者十分捧場！
4. 您會算土壤 II 的滲流速度與外視流速嗎？
5. 您會算土壤 II 出口處之壓力水頭及總水頭嗎？
6. 滲流垂直土壤層面比較常考還是滲流平行層面？

(答：垂直)

❖ 對自己的興趣，以性命交換，全力以赴 ❖





第六章 壓縮性

體 系 表

- 土壤不同階段的沉陷量
- 單向度壓密試驗
- ☆NC、OC與壓密中土壤
- ☆壓縮指數 C_c 與壓密沉陷量
- Terzaghi單向度壓密理論
- ☆圖解法求壓密係數 c_v
- ☆整層平均壓密度 U_{avg} 與某點壓密比 U_z
- 二次壓縮
- 短期的彈性沉陷量

學 習 重 點

1. 有關壓密沉陷的題目，在土力考古題裏多如繁星，放棄就不必報名了。
2. 請了解什麼是正常壓密黏土 NC、過壓密黏土 OC 與壓密中黏土，如何判斷，以及它們在計算上的差異。透過降水、復水，可以在 NC 與 OC 之間變來變去。
3. 壓縮指數 C_c 、再壓指數 C_r 與壓密係數 c_v 是計算題的大熱門，計算壓密沉陷量請注意應力的起點與終點。
4. 求壓密耗時 t 、整層平均壓密度 $U(=U_{avg})$ 與某點壓密比 U_z 的考題，永遠歷久不衰。求 U_z 需要查超額孔隙水壓消散圖。 U_{avg} 和 U_z 兩者想轉換，靠時間因素 T 。
5. 牽扯到真實時間 t 的唯一公式是 $TH_{dr}^2 = c_v t$ 。

本章重點精煉成一句話「計算黏土層的壓密沉陷量大小與壓密速率」。本章最重要的工程參數，就是壓縮指數 C_c 與 壓密係數 c_v 。

在材料力學裏，等斷面、等長度的鋼棒和鋁棒受一樣的拉力，伸長量會不會一樣？不會，因為雙方的彈性係數不一樣。求伸長量或壓縮量需要彈性係數，彈性係數如何得知？只有做試驗一途，無法數學推導。同樣的道理，不同種類黏土受壓後，壓縮量也不會一樣，欲求其壓縮量，必須先找到類似彈性係數的參數，就是壓縮指數 C_c 與 再壓指數 C_r ， C_c 、 C_r 也是來自試驗得到，非數理推導。

以上是「量」的問題，另外還有「速率」的問題。在試驗室鋼筋受拉時，力量與變形之間視為無遲滯，力量能夠立刻傳遞到鋼筋裡的任一點，鋼筋應力即刻增加，即刻產生變形，幾乎不消耗時間，也沒有水壓力的困擾，當天可拿到試驗報告。但是對於飽和黏土，受超載時，壓應力增量先由超額孔隙水壓承受，有效應力不變，經過數月或數年後，超額孔隙水壓漸漸消散，有效應力才逐漸增加，變形量(壓密量)才發生，顯然不同於鋼筋，黏土要產生壓密，有時間效應，不可能當天拿到報告。對於某些壓密速率進行快的黏土，它的壓密係數 c_v 值大(i.e., 即 k 大)；對於壓密速率進行慢的黏土，它的壓密係數 c_v 值小(i.e., 即 k 小)。 c_v 值要怎麼得呢？擲筊祈禱均沒用，還是要做試驗。

最後是「記憶」的問題，鋼筋加載又卸載，材料本身不會「記住」曾受過的最大應力，但是黏土加載又卸載，黏土本身會「記住」曾受過的最大應力，稱為預壓密應力 σ'_c 或 σ'_p 。

壓密係數 c_v 和滲透係數 k 有正比關係，黏土中 k 值較大者，排水速率相對比 k 小者快，超額孔隙水壓較易排除，壓密速率較快， c_v 就較大。

土壤不均勻沉陷會影響上部結構的使用性，甚至是安全性。維生管線如電線、光纖、自來水管、排水管等等均從馬路底下進入建築物內，倘路面與建築物產生垂直相對位移，就可能扯斷纜線，或造成排水溝水倒流到建築物內。從上部結構的型式來講，磚造結構對差異沉陷的忍耐度就很低(漿體抗拉強度低)，RC 構造則有較高的忍耐度。從基礎的型式來講，筏式基礎比獨立基腳更能忍受差異沉陷。對道路工程來講，路面的沉陷開裂可能導致機車騎士摔傷或老弱婦孺跌倒，引發國賠案件。家住雲林、嘉義附近的讀者當對地層沉陷不陌生，常坐高鐵往返雲林南北的讀者，更應該好好研讀此章，本章說明地層為什麼會沉陷的原因。

§6-1 土壤不同階段的沉陷量

土壤受壓後的總沉陷量(Total Settlement) ΔH_t ，有三個分量：即時沉陷量(Immediate Settlement) ΔH_i 、壓密沉陷量(Consolidation Settlement) ΔH_c 和二次壓縮沉陷量(Secondary Settlement) ΔH_s 。

$$\Delta H_t = \Delta H_i + \Delta H_c + \Delta H_s \quad [6.1]$$

對於滲透係數大的礫石與砂土，承受靜態加載幾乎不產生超額孔隙水壓，就沒有壓密沉陷量，二次沉陷量也很少，其總沉陷量主要來自即時沉陷量。礫石與砂土的即時沉陷量在施工階段就已經發生完畢，完工後再產生的沉陷量非常少。

對於黏土，其總沉陷量主要來自壓密沉陷量，壓密(Consolidation)是指土體內超額孔隙水壓排除，水體積被擠走，造成土壤緊密、體積減小、土體沉陷的現象。計算壓密沉陷量與壓密速率是本章的男女主角。

對於軟弱黏土，受載重後，通常壓密沉陷量最多，即時沉陷量次多，二次壓縮量最少。

對於有機土壤，二次壓縮量會比較大。二次壓縮是指土體內有效應力不變，然土體卻持續變形的現象，亦即材料力學所稱的潛變。工址裏遇到有機土壤、泥炭土，原則上要挖除置換，它們的強度太差，受工程載重後沉陷量太大。

表 6-1

種類	即時沉陷量	壓密沉陷量	二次壓縮量
礫石、砂土	占主要部份	非常少	非常少
黏土	非常少	占主要部份	屬次要部分
有機土壤、腐植土(見於垃圾場)、 泥炭土(Peat)	占主要部份	占主要部份	占主要部份

↓
de 排除

§6-2 單向度壓密試驗

「壓密」這個觀念是 Terzaghi 提出來的，他用圖 6-1 來解釋，果真是一代宗師。有一鋼製外筒內裝水與彈簧，筒口有活塞，活塞有閥門，閥門可選擇開大、開小或關閉來控制水流進出。當活塞頂部沒有載重時，水只承受自身靜態水壓力，彈簧不受力。

圖 6-1(f)乃先關閉活塞的閥門，繼之圖 6-1(g)是加上 20 kgf 的載重，因水無法流出，水壓力升高以承受 20 kgf 的載重，水體積很難被壓縮，故彈簧不縮短，彈簧內力增量為零。

然後打開閥門，如圖 6-1(h)，瞬間水流噴出。水流噴出一段時間之後，如圖 6-1(i)，因為鋼筒內水體積的減少，活塞下降，彈簧縮短，彈簧就有應力增量了。隨著時間流逝，如圖 6-1(j)到圖 6-1(l)，水所承受的壓力越來越少，彈簧所承受的壓力越來越大，一直到水不再流出，水又回到只承受靜態水壓力，重物(20kgf)完全轉嫁到彈簧，由彈簧負荷。

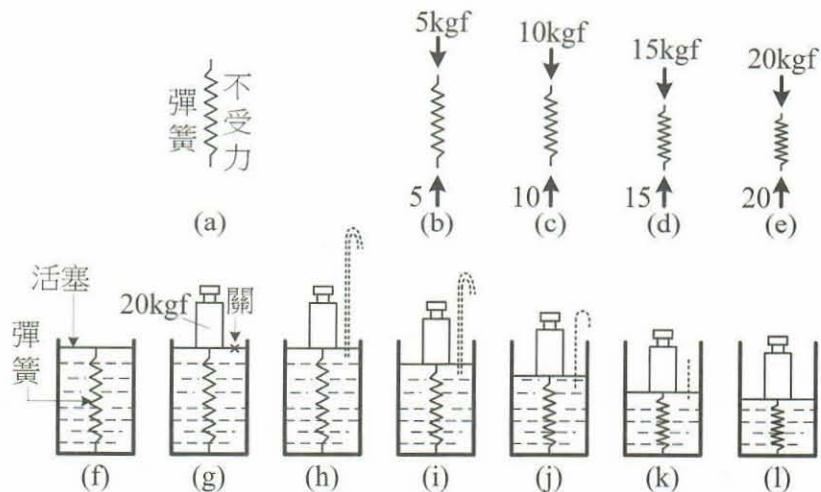


圖 6-1

$$\bar{\sigma} = \bar{u}_w + \sigma'$$

表 6-2 (參考圖 6-1 閱讀)

階段	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)
水負荷重量	0 kgf	20 kgf	20 kgf	15 kgf	10 kgf	5 kgf	0 kgf
彈簧負荷重量	0 kgf	0 kgf	0 kgf	5 kgf	10 kgf	15 kgf	20 kgf
壓密完成百分比	0%	0%	0%	25%	50%	75%	100%

在這個系統中，鋼筒模擬土壤無法側向變形，表示廣大面積加載只能垂直向壓縮。20 kgf 的砝碼是一次放上去的，代表現場加載是一次瞬間完成。彈簧代表土壤顆粒骨架，彈簧受的力代表有效應力增量。閥門開孔大小代表土壤的滲透係數 k ，開孔愈小滲透係數就愈小，排水就愈慢，需要更多時間才能沉陷完畢。加載初期，20 kgf 的載重完全由水承受，代表現場加載初期，超載(Surcharge)全部由超額孔隙水壓承受。水流出閥門代表超額孔隙水壓排除的現象。在鋼筒內的水逐漸流出之際，筒內水所負擔的載重愈來愈少，彈簧所負擔的載重愈來愈多；代表現場的水流逐漸流出之際，超額孔隙水壓的量愈來愈少，有效應力增量愈來愈多。並請注意筒內水所減少的荷重，就恰是彈簧所增加的荷重，也同步代表現場超額孔隙水壓所減少的量，就等於有效應力增量。

最後，你也知道活塞的下降代表地面的下降。惟請注意，降低水位造成的超額孔隙水壓(三角形)，並不適合用活塞系統來說明。

單向度壓密試驗(One-dimensional Consolidation Test, Oedometer Test)的目的就是為了求出壓縮指數 C_c 與壓密係數 c_v 。當然，在試驗中，也有不少副產品(eg：預壓密應力 σ'_c 、膨脹指數 C_s)，它們也常常變成考題。

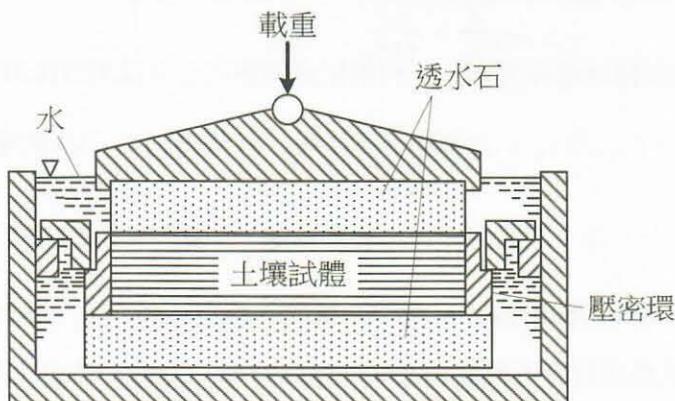


圖 6-2 壓密儀(Oedometer)剖面圖

試驗須取不擾動土樣，不擾動土樣可由薄管(Thin-wall Sample Spoons)以靜態油壓力貫入土層適當深度取得。試體修剪成直徑 / 厚度比例超過 2.5，例如 $D/h=6.35\text{ cm}/2.5\text{ cm}$ ，並備兩塊透水石夾於試體上下端，令試體上下排水。試體呈扁平圓柱狀，乃是為了減少側面摩擦力對沉陷量的影響，摩擦力會阻止試體沉陷，也會阻止試體膨脹。

試驗先加 0.05 kgf/cm^2 的接觸壓力，接觸壓力不視為荷重，隨即加水淹沒試體與透水石。

隨後加壓次序分別為(單位： kgf/cm^2) 0.125 、 0.25 、 0.5 、 1.0 、 2.0 、 4.0 、 8.0 、 16.0 、 32.0 ，此種應力增量稱為 LIR=1.0，是一種幾何級數，即載重增量比 (Load Increase Ratio, LIR) = $\frac{\text{本階載重增量}}{\text{前一階載重大小}} = 1.0$ 。加載方式通常用槓桿原理行之，試驗的應力增量應考慮現場取樣深度未來的應力增量。試驗的最終應力應超過工程新建後，對該深度造成的大應力值。

每一階荷重開始後，在時間(單位：min)分別為 0 、 0.1 、 0.25 、 0.5 、 1.0 、 2.25 、 4.0 、 \dots 、 1440 均需記錄沉陷量。載重一旦有新加，初期的沉陷速率快，後來沉陷速率漸慢，如圖 6-3，宛如籃球員每次比賽，第一節體力最佳跑最快，跑到第四節，就越跑越慢了。

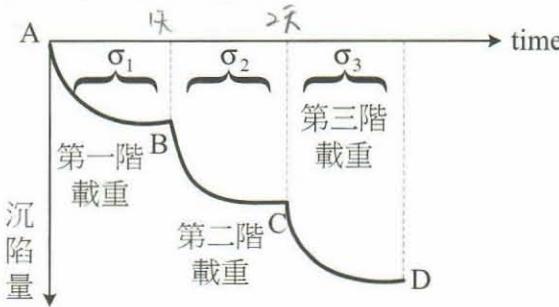


圖 6-3

如果要求「解壓再壓曲線」，則在最大荷重之半的重量壓密完成後，開始解壓。解壓試體會膨脹，亦應記錄變形量。解壓到 0.125 kgf/cm^2 後再度加壓，一直試驗到最大荷重。

$$\epsilon_v = \frac{e_p - e_i}{1 + e_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{\Delta H}{H_0}$$

在試驗中，測微計(Dial Gauge)記錄試體高度變化，利用紀錄資料與公式[2.9]或[6.11]，可以算出孔隙比變化量 Δe 、孔隙比 e 。以孔隙比 e 為算數座標縱軸，有效應力 σ' 為算數座標橫軸，描數點(σ', e)繪在算術座標圖紙上，連平滑曲線即畫出壓縮曲線，如圖 6-4。圖 6-4 的割線斜率稱為壓縮係數(Coefficient of Compressibility) a_v ， a_v 會因為選取的應力區間不同，而有不同值，所以工程上若要使用 a_v ，宜審慎選擇對應工程應力區間的割線斜率。注意縱軸的孔隙比，隨著試驗進行，試體越來越緊密，「壓密壓密」就是越壓越緊密，孔隙比越來越小，故曲線往右下走。圖形割線斜率雖是負數，但實務上為了計算沉陷量，均取其絕對值使用。

$$a_v = \left| \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'} \right| = \frac{e_1 - e_2}{\sigma'_2 - \sigma'_1} \quad [6.2]$$

a_v 的單位是應力的倒數。圖 6-4 有兩個缺點，一是 a_v 並非固定值，隨應力區間而變，造成使用者困擾，試驗時有數階載重，就可以求出數個 a_v 值。二是橫軸為算數座標，由於應力區間

可能很大，而造成橫軸很長，殊不方便利用。土壤力學裡常常遭遇橫軸以算數座標表達而造成太長的現象，把橫軸改對數或數據取平方根後繪圖，是土壤力學裏最常用的壓縮圖形方法，這樣可以讓斜率突顯出來。

$$\text{另外定義體積壓縮係數(Volume Compressibility Coefficient) } m_v = \frac{a_v}{1+e_{n-1}} \quad [6.3]$$

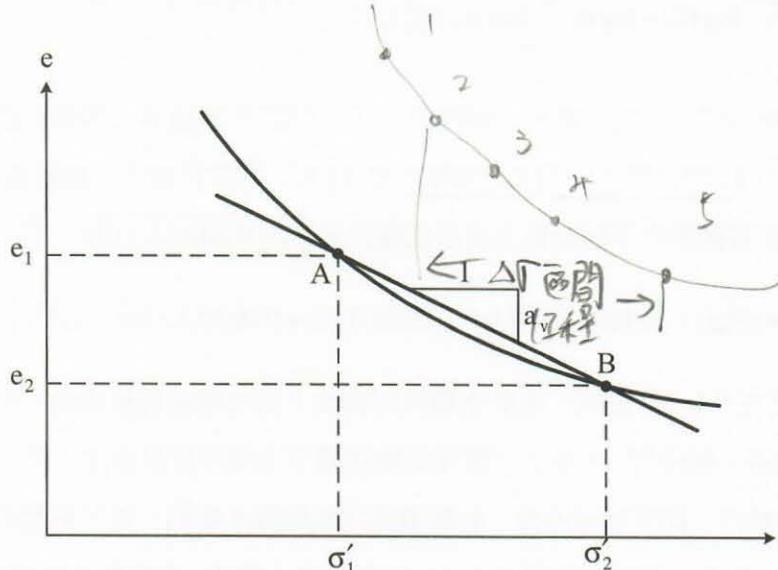


圖 6-4

體積壓縮係數 m_v 是「每一單位應力增量，所引起的體積應變量」， $m_v = \frac{\Delta V / V_0}{\Delta \sigma'} \quad [6.7]$
 $= \frac{\Delta e / (1 + e_0)}{\Delta \sigma'}$ 。 e_{n-1} 是每一階荷重開始前的孔隙比。體積壓縮係數單位也是應力的倒數，試驗時若有數階載重，就會求出多個 m_v 值。 $m_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'} \cdot \frac{1}{1+e_0} = \frac{1}{\Delta \sigma'} \cdot \frac{\Delta e}{1+e_0} = \frac{1}{\Delta \sigma'} \cdot e_v$

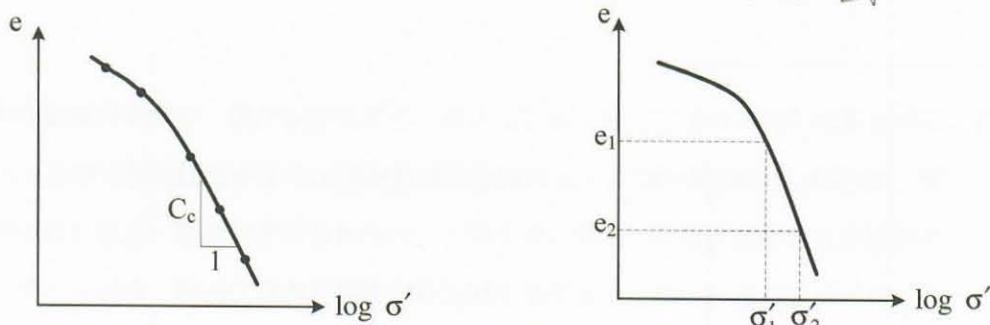


圖 6-5 壓密試驗

現將試驗所得資料繪在半對數圖紙上，橫軸為 $\log \sigma'$ ，縱軸為 e ，描點($\log \sigma', e$)，即畫出

壓密曲線，如圖 6-5。很明顯此圖來自圖 6-4 的橫向壓縮。

經觀察圖 6-5，試驗的後期，曲線的斜率接近常數，便於工程師使用(使用時還是要注意工程應力區間)，可取後期的點位，求出斜率的絕對值 C_c ，此即壓縮指數(Compression Index)。

$$C_c \equiv \left| \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \right| = \frac{e_1 - e_2}{\log \sigma'_2 - \log \sigma'_1} = \frac{e_1 - e_2}{\log(\sigma'_2 / \sigma'_1)} \quad (\text{沒有單位，不受公制英制影響}) \quad [6.4]$$

C_c 值愈大，表示相同應力增量與土層厚度之下，試體較易壓縮，現場的沉陷量愈大。如果和材料力學對比， C_c 類似彈性係數 E 的倒數， C_c 越大，彷彿 E 越小，越容易變形。Terzaghi and Peck (1967) 對正常壓密的不擾動黏土提出經驗公式 $C_c = 0.009(LL-10)$ 考場不會考 [6.5]

Slempston(1944)提出：擾動過後的黏土之經驗式 $C_c = 0.007(LL-10)$ X 不用背沒錯 [6.6]

C_c 的範圍通常在 0.1~1.0 之間。由於土壤有記憶性，若土壤曾被壓縮過，而目前處於解壓狀態，則它會顯現得「較硬註 1」，為了了解在這種狀態下土壤的變形參數，所以在試驗室對試體進行解壓、再壓動作，探究試驗曲線。解壓會導致試體吸水膨脹，對於解壓階段，土壤不太可能循原路徑解壓，因為土壤的彈性區很小，一加壓就進入塑性，再解壓必定留下塑性變形量，故解壓與再壓曲線比原來直接加壓的曲線平緩。定義解壓段的斜率為膨脹指數(Swelling Index) C_s

$$C_s \equiv \left| \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \right| \quad (\text{沒有單位，不受公制英制影響}) \quad [6.7]$$

註 1：這種土壤就被稱為過壓密土壤，對比到人類，就像是受過風霜、職場經驗豐富的中年上班族。這種土壤(或說人)的抗壓性較高，以前遭遇的較高挑戰給予他應變的經驗與豐富的反應知識，未來再遇到壓力較不容易變形。另外一種土壤，它目前所受的應力就是一生迄今為止所受過的最大應力，被稱為正常壓密土壤。正常壓密土壤沒有受過嚴苛的壓力摧殘，對比到人類，就像是媽寶。這種土壤(或說人)的抗壓性較低，遇到壓力較容易變形。

在人類擇偶的過程中，某些女性選擇 OC 型的男人，可能就是看中豐富的應變能力與較優渥的經濟能力，比較能照顧雙方衍生的下一代。或許某些 NC 型的男人讓異性感覺「幼稚」。

膨脹指數也有人用符號 C_e (Expand Index) 表示。

定義再壓段的斜率為 再壓指數(Recompression Index) C_r

$$C_r = \left| \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \right| \quad (\text{沒有單位，不受公制英制影響}) \quad [6.8]$$

解壓與再壓是物理上兩個不同手段，曲線也有別，但差異很小，考試時可認為膨脹指數=再壓指數，即 $C_s = C_e = C_r$ 。

如圖 6-6，試體進行解壓、再壓的平均斜率稱為膨脹指數(Swelling Index) C_s 或再壓指數 C_r ，其斜率較 C_c 緩和，背後物理意義是「因為試體已經變得比較硬，在相同的應力增量下，孔隙比變化較少，沉陷量較少」，工程師利用這特徵，發展出預壓密工法。土壤線彈性區極小，比結構鋼更注重塑性行為，以及卸載後的再壓行為。

講到這裡，你覺得土力的加壓、解壓再壓曲線和材料力學談的應力-應變曲線有何異同？

圖 6-6 逆時針轉 90° 會不會很像材料力學談的應力-應變曲線？座標軸有何異同？

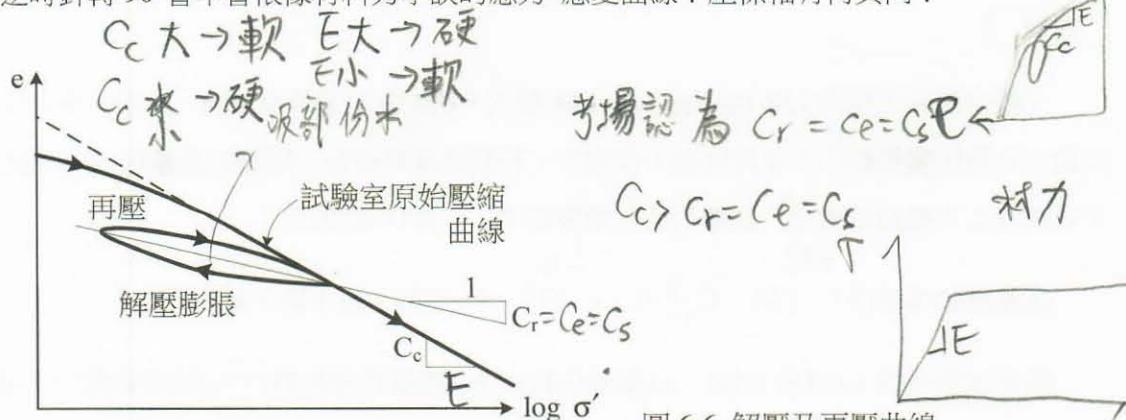


圖 6-6 解壓及再壓曲線

哪些因素會影響壓密試驗的正確性？我們直接看下個例題。

C_c : 壓縮指數
 C_s : 膨脹指數

例 6-2.1 壓密試驗

在試驗室進行水飽和黏土試樣之壓密試驗時，原始壓密曲線當由試驗條件而改變。試述對原始壓密曲線有影響之三種主要條件(如載重增加率不同……)。
<83年高考一級13%>



(1)取樣擾動影響：若完全無擾動，則壓密曲線比較陡峭。試體擾動愈嚴重，壓密曲線愈平緩，曲線往左下角移動，判讀到的 e_0 及 σ'_c 會減小，靈敏性黏土尤其明顯，如圖 a。

(2)載重增量比(LIR)影響：LIR 愈大，愈類似衝擊載重，壓密曲線愈往左下方移動，如圖 b，圖內以現場 LIR 最小。

(3)載重增量延時的影響：延時愈長者，壓密曲線愈往左下方移動，因延時較久，沉陷量包含二次壓縮量，如圖 c。

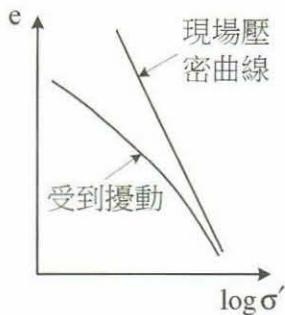


圖 a

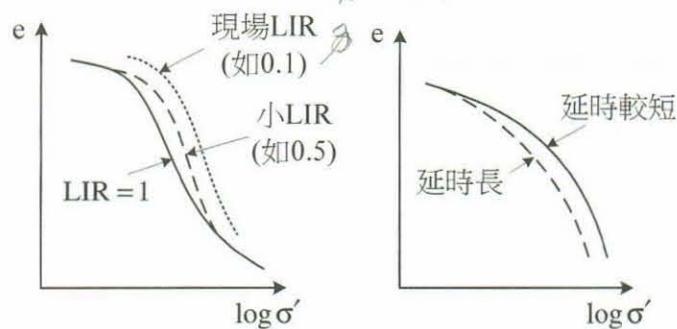


圖 b

真正自然 LIR 很小

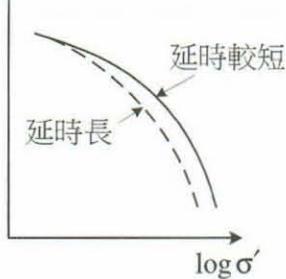


圖 c

討論

一般自然界沉積的 LIR 均小於 1.0。LIR 越大，就越像衝擊載重試驗，在相同應力作用下，試體的孔隙比變得較小。在相同應力作用下，若載重延時較長，則壓密量越能被充分展現，甚至有些許二次壓縮量產生，試體的沉陷量變較大，孔隙比變得較小。

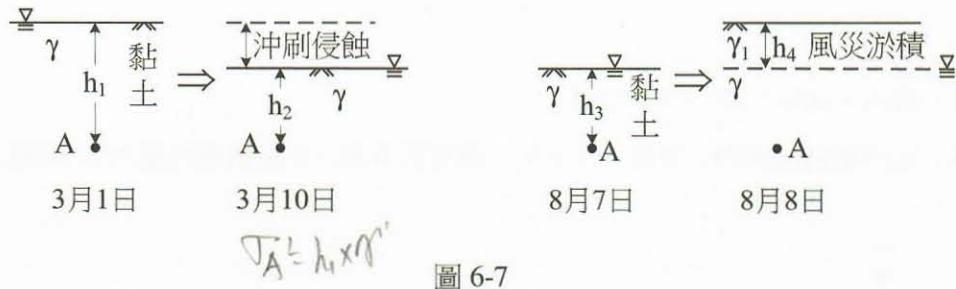
變硬 ↑ k↓
試體擾動後使得 C_c 下降， C_r 上升， c_v 下降， C_a 下降， e_0 下降， σ'_c 下降。
軟

壓密試驗可得 k_z (滲透係數)、 a_v (壓縮係數)、 m_v (體積壓縮係數)、 c_v (壓密係數)、 C_c (壓縮指數)、 C_r (再壓指數)。

夯實(Compaction)是排除土體內空氣，使土壤變得更緊密的過程，可用震動、滾壓、撞擊等方式達成。壓密(Consolidation)是排除黏土內水分，使黏土變得更緊密的過程，可用增大壓力、縮短排水路徑、撞擊等方式加速達成。這兩者的異同在口試時很常考。

§6-3 NC、OC 與壓密中土壤

依據「現在」土層厚度及土壤單位重所算出來的有效應力，可能大於、等於或小於 A 點所受真正的有效應力，詳圖 6-7 與下段說明。



如果地表最近(如 3 月 8 日)曾受過沖刷，目前(如 3 月 10 日)地表低於沖刷前地表，則 A 點可能在「解壓中」，A 點「目前」所受真正的有效應力會大於按照現在^{註 2}土層厚度算出來的 σ_v ($= \sum \gamma'_i h_i = \gamma' h_2$)。例如圖 6-7 左邊，沖刷侵蝕後，短期 A 點的有效應力絕對不可以 3 月 10 日的土層厚度來算。地表解壓後，需要一段時間，土體內有效應力才會減少。

如果地表最近曾淤積過，目前地表是淤積後地表，則 A 點可能在「壓密中」，A 點「目前」所受真正的有效應力會小於 σ_v ($= \sum \gamma'_i h_i = \gamma_1 h_4 + \gamma' h_3$)。例如圖 6-7 右邊，八八風災淤積後，短期 A 點的有效應力絕對不可以 8 月 8 日的土層厚度來算。地表加壓後，需要一段時間，土體內有效應力才會增加。

土壤力學和材料力學不同，地表受力後，尤其對於黏土，需要一段時間消散超額孔隙水壓，土體內有效應力才會增加。材力則無時間效應，外力瞬間傳遞為內力增量，且無水壓力問題。

註 2：我們都曉得，光速有其上限，「目前」地球所接受的光線，其實是約 500 秒前從太陽表面出發的，「現在」從太陽表面出發的光線，「目前還沒抵達地球」，「目前」這詞，讀者須審慎思考時間點。如果我「現在」挖掉表層土壤(尤其黏土)，則「目前」底層土壤的有效應力不會完全同步解壓，需要過一段時間(可能很久)後，有效應力才會完全解壓。同理，如果我「現在」增加表層土壤載重(尤其對黏土)，則「目前」底層土壤的有效應力不會完全同步增壓，需要過一段時間(可能很久)後，應力增量才會完全傳遞。

從半對數座標軸的壓密試驗曲線上，可以判讀出試體當初在現場所受過的最大有效應力，此應力稱為預壓密應力(Preconsolidation Pressure) σ'_c ，也就是土壤試體在其應力歷史上，盤古開天迄今所受過的最大有效應力。判讀法乃 Casagrande 所建議，步驟如下：

1. 尋找曲線上曲率半徑最小的點(A 點)。 (i.e., A 點曲率最大)
2. 過 A 點作水平線及切線。
3. 畫水平線與切線的角平分線。
4. 延伸壓密試驗的直線段，與角平分線交於 B 點，B 點對應的應力即為預壓密應力 σ'_c 。

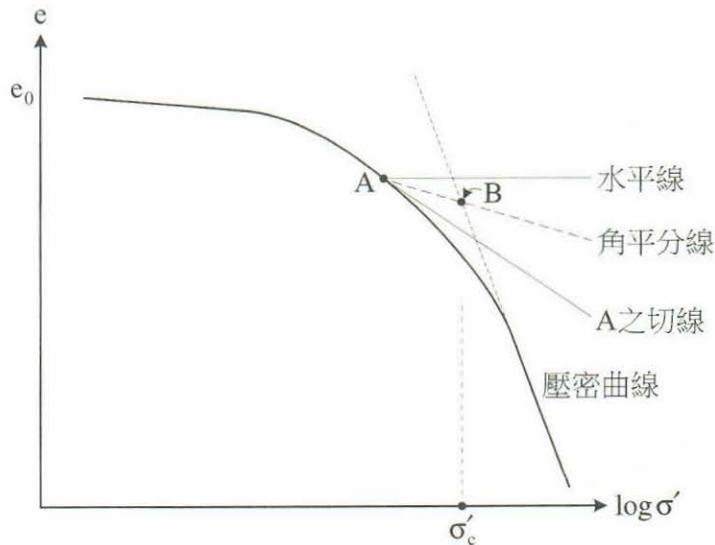


圖 6-8 求預壓密應力 σ'_c (105 年高考三級)

預壓密應力也寫成 σ'_p ，它來自作圖法。在現場，可以依據各土層厚度及各單位重，求出取樣點的 σ'_v 。 $\sigma'_v = \sum \gamma_i h_i$ ，它來自乘法與加法。

若 $\sigma'_v = \sigma'_c$ ，則現場土壤為正常壓密(Normally Consolidated, NC)土壤。黏土在自然沉積的過程中，僅受到自重壓縮，並且完成壓密，未經歷過解壓，這樣的黏土，稱為正常壓密黏土。

若 $\sigma'_v < \sigma'_c$ ，則現場土壤為過壓密(Over Consolidated, OC)土壤，現場處於解壓狀態。例如開挖地下室，開挖面以下的土壤即是 OC。興建地下室，是對 OC 加載。

★若 $\sigma'_v > \sigma'_c$ ，則現場土壤為壓密中(Under Consolidated)土壤，現場土壤正在消散超額孔隙水壓，壓密持續進行中，縱然無後續加載，有效應力仍會上升，持續發生沉陷，或稱「壓密未完成土壤」。“Under Consolidated”即是「正處於壓密狀態」，壓密中之意。

$\sigma'_v > \sigma'_c$ ，合理嗎？拜託，腦袋想想。 (合理)

$$\text{定義過壓密比 } OCR = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = \frac{\text{曾經受過的最大有效應力}}{\text{分層加總算得之有效應力}} \quad [6.9]$$

正常壓密土壤 $OCR=1.0$ ，過壓密土壤 $OCR>1.0$ ，壓密中土壤 $OCR<1.0$ 。

結構組朋友可以這樣理解：某建築物柱的主筋，在 921 集集地震時，應力來到 $0.9f_y$ ，但地震結束後，平常(含今天)受工作載重，應力只有 $0.3f_y$ ，你就可以說這鋼筋的「過壓密比」是 3.0。若後來屋主搭建屋頂違章，導致鋼筋應力升到 $0.45f_y$ ，屆時過壓密比會降到 2.0。

預壓密應力的存在，說明土壤有記憶性，這就是土壤的「非保守性」，結構鋼通常無記憶性。常見產生預壓密應力的原因：①土壤被挖除、河川沖刷解壓。②冰河溶解。③結構物被拆除。④地下水位降低後又升高，如濱臨河、海附近的水位變化，或人為抽水(考題常見手段)。⑤植物吸水之後，水位再升高。⑥地表附近土壤受日曬乾燥之後，水位再升到地表面。前三種是總應力降低，後三種是水壓力變小後再回升，也可能六種複合作用。

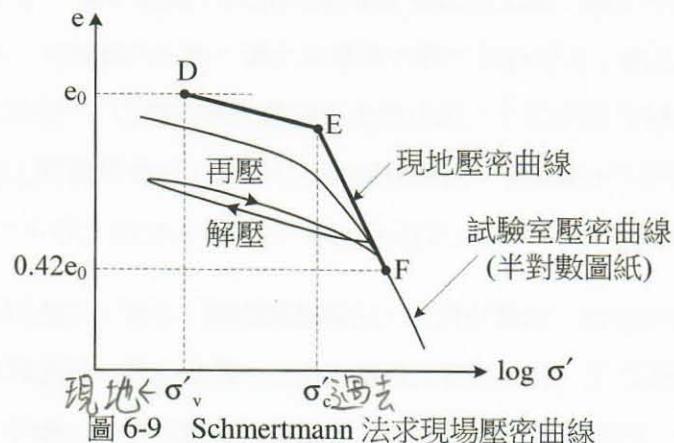


圖 6-9 Schmertmann 法求現場壓密曲線

由於試驗室壓密曲線會被各種因素干擾而不等於現場壓密曲線，工程師希望知道現場壓密曲線，以求正確估計現場沉陷量。Schmertmann 提出圖解法，從試驗室壓密曲線來求現場壓密曲線。Schmertmann 發現不管如何擾動，試驗室壓密曲線會在 $0.42e_0$ 之處和現場壓密曲線重合。

Schmertmann 建議的作圖法如下：

- (1) 在半對數圖紙上，先以 Casagrande 的方法決定預壓密應力 σ'_c 。
- (2) 計算試體取出深度的垂直有效應力 $\sigma'_v = \sum \gamma'_i h_i$ ，並在橫軸上找到 σ'_v 。
- (3) 在孔隙比 e_0 處畫水平線， e_0 就是現地取樣深度處的初始孔隙比^{註3}。 (σ'_v, e_0) 稱為 D 點。
- (4) 從 D 點畫斜線平行解壓再壓曲線，斜線和過 σ'_v 的垂直線交叉於 E 點。
- (5) 找到試驗室壓密曲線上，縱座標為 $0.42e_0$ 的點，該點為 F，將 E 與 F 連線。 \overline{DEF} 就是現場壓密曲線。 \overline{DE} 為過壓密段(因取樣過程是解壓，試驗室回壓)， \overline{EF} 為正常壓密段。

Casagrande 法和Schmertmann 法功能不同，前者求 σ'_c ，後者求現場壓密曲線，不要搞亂。這兩法要背，圖要會畫，考試會要你一五一十寫出來。

思考：如果現場是正常壓密黏土，那做得出 \overline{DE} 段嗎？（可以，試驗室勢必「回壓」）

既然有壓密中土壤，那有沒有「解壓中土壤」？當然有。黏土解壓會吸水體積膨脹(如果有水的話)，也需要一段時間才能完成膨脹，膨脹過程還在持續進行，體積尚未穩定者就是「解壓中土壤」。考試幾乎不考解壓中土壤，勿過慮。

Das 的書是土木系最常用的土力原文書，但此書不教「壓密中土壤」，研究所入學考、國家考試照樣考壓密中土壤，請注意 Das 書的罩門死角。為何 Das 不教壓密中土壤？筆者揣測 Das 認為「壓密中土壤」其實就是一種正常壓密土壤，因為的確成立「壓密中土壤目前所受的有效應力，就是它盤古開天迄今，應力歷史上的最大有效應力」。然而從考試角度來講，筆者認為還是區分出壓密中土壤較好。因為講到壓密中土壤，你會意識到土壤應力將隨時間逐漸增加，應力不會靜止不動；而若只講正常壓密土壤，可能會誤認應力靜止不動，造成計算上失誤。

筆者研究所時參加台大橄欖球校隊，注重重量訓練，手臂、大腿的負重範圍遠超過生活中會遇到的重量，卸載之後，肌肉就變成過壓密黏土，將來負重、或在球場上與對手互撞，自己的變形就很小，對手的變形就很大，台大球隊成績果然優秀很多。棒球、籃球選手也要設法把肌肉變成過壓密黏土。

註 3：土樣收回後，先進行含水量試驗得 w 與溼土單位重 γ_m ，利用恆等式 $\gamma_m = \gamma_d (1+w)$ 求出乾土單位重 γ_d 。次進行比重瓶試驗得土顆粒比重 G_s ，而 $\gamma_s = G_s \gamma_w$ 。最後利用恆等式 $\gamma_s = \gamma_d (1+e)$ 求出初始孔隙比 e_0 。

§6-4 壓縮指數 C_c 與壓密沉陷量

如果我們有了 a_v 或 C_c 值，就可以反算現場飽和正常黏土層受力之後的壓密量。參考圖 6-10，土層原厚度 H_0 ，初始孔隙比 $e_1 (= e_0)$ ，壓密完成後，孔隙比變化量為 Δe ，土層壓密沉陷量 ΔH_c ，按材料力學應變觀念，鉛垂向應變 ε_v

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta H_c}{H_0} = \frac{\Delta V}{V_s + V_v} = \frac{\Delta V / V_s}{1 + e_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} \quad [6.10]$$

$$\text{交叉相乘得 } \Delta H_c = \frac{\Delta e}{1 + e_0} H_0 \quad [6.11]$$

$$\text{而 } a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma'} = \frac{\Delta e}{\sigma'_2 - \sigma'_1} \text{，代入[6.11]式}$$

$$\boxed{\Delta H_c = \frac{a_v}{1 + e_0} H_0 (\Delta \sigma')} \quad [6.12]$$

$$\text{又 } m_v = \frac{a_v}{1 + e_0} \text{，故 } \boxed{\Delta H_c = m_v H_0 (\Delta \sigma')} \quad [6.13]$$

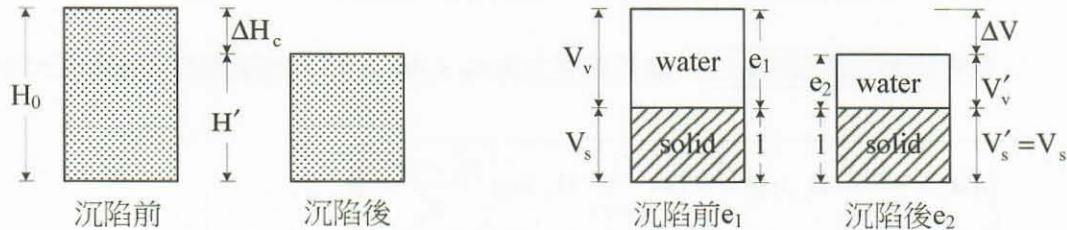


圖 6-10 飽和土樣(無空氣)受壓沉陷，乃因水的排除

$$\text{另外， } C_c \equiv \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} = \frac{\Delta e}{\log \left(\frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} \right)} \text{，代入[6.11]式}$$

$$\boxed{\Delta H_c = \frac{C_c}{1 + e_0} H_0 \log \left(\frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} \right)} \quad [6.14]$$

式[6.14]分母的孔隙比 e_0 和分子的厚度 H_0 ，須同一時間點發生。式[6.14]代表現場孔隙比從 $e_1 (= e_0)$ 降到 e_2 ，詳圖 6-11。理論上，式[6.14]的壓密沉陷量需要無窮久的時間才能全部產生。

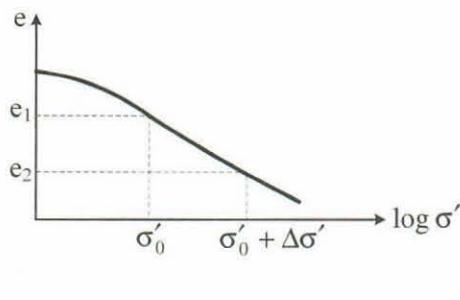


圖 6-11

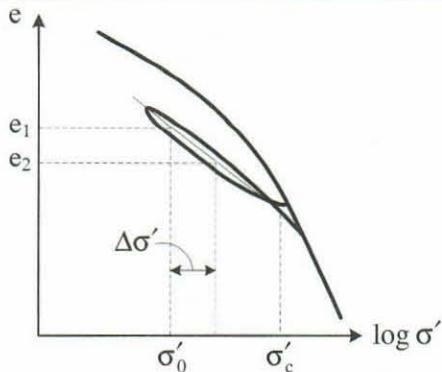


圖 6-12

對於過壓密階段的黏土，倘若其受力後， $\sigma'_0 + \Delta\sigma' \leq \sigma'_c$ ，則其壓縮量計算方式為

$$C_s \equiv \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} = \frac{\Delta e}{\log \left(\frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} \right)}$$

$$\text{得 } \Delta H_c = \frac{C_s}{1 + e_0} H_0 \log \left(\frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} \right)$$

[6.15]

公式[6.15]代表現場孔隙比從 $e_1 (= e_0)$ 降到 e_2 ，詳圖 6-12。

對於過壓密階段的黏土，倘若其受力後 $\sigma'_0 + \Delta\sigma' > \sigma'_c$ ，則其壓縮量計算方式為

$$\Delta H_c = \frac{C_s}{1 + e_0} H_0 \log \left(\frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} \right) + \frac{C_c}{1 + e_0} H_0 \log \left(\frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} \right)$$

[6.16]

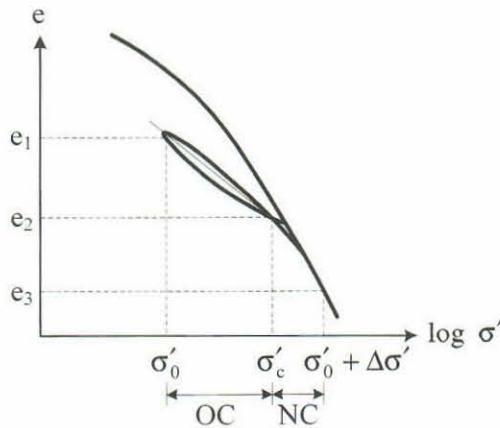


圖 6-13

公式[6.16]代表現場孔隙比從 $e_1 (= e_0)$ 降到 e_3 ，詳圖 6-13，壓密完成時已經是 NC。

如果現場是壓密中土壤，縱使不再給予超載，現場也會發生沉陷；或者不再給予降水，現場也會發生沉陷。如果我們額外給予超載或降水，沉陷量會更大，計算時要特別注意應力起點，這就是考點所在。

對於壓密中土壤，若土壤中點目前的有效應力是 σ'_0 ，受覆土自重穩定後應力會達到 σ'_v ，

$$\text{再因降水或超載穩定後應力會達到 } \sigma'_1, \text{ 則壓密沉陷量為 } \Delta H_c = \frac{C_c}{1+e_0} H_0 \log\left(\frac{\sigma'_1}{\sigma'_0}\right) \quad [6.17]$$

公式[6.17]代表現場應力從 σ'_0 升到 σ'_1 ，詳圖 6-14。注意計算時應力起點是 σ'_0 ，很多考生誤以為是 σ'_v 。

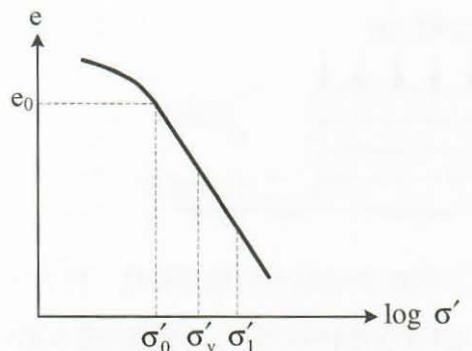


圖 6-14

例 6-4.1 壓密沉陷量

地表下 14.38 m 處有一厚為 8.0 m 之正常壓密黏土層，黏土層之壓縮指數為 0.245，含水量為 40%，黏土顆粒比重為 2.78，黏土層以上至地表為砂層，地下水位高及地表，砂之水中單位重為 10.29 kN/m^3 ，於地表施加載重後黏土層之垂直應力增量為 127.4 kN/m^2 ，試求此黏土層之平均沉陷量。

<101年土木技師25分>



黏土層孔隙比 $e = wG_s / S = 0.4 \times 2.78 / 1 = 1.112$

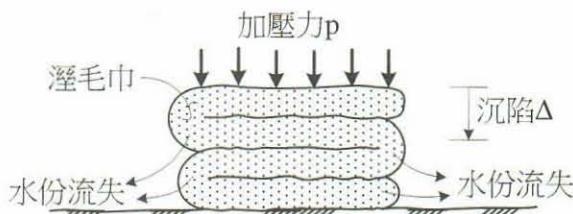
$$\text{黏土層 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.78 - 1}{2.112} \times 9.81 = 8.27 \text{ kN/m}^3$$

黏土層中點初始有效應力 $\sigma'_0 = 14.38 \times 10.29 + 8.27 \times 4 = 181.04 \text{ kPa}$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.245 \times 800}{2.112} \log \frac{181.04 + 127.4}{181.04} = \underline{\underline{21.47\text{cm}}}$$

討論

1. 請讀者試試把黏土層分兩層算總沉陷量，不會等於 21.47 cm，會略大。原因並非小數點進位誤差，而是 log 並非線性函數，不滿足重疊原理使用前提。您若分三層算，總沉陷量會更大一些。
2. 砂土下有黏土，請問地表之砂層厚度是 6.38 m 還是 14.38 m？答案：14.38 m。
3. 對於黏土沉陷量的計算，請注意：①基面應力淨增量怎麼算(要扣掉覆土重)。②黏土受力的應力歷史，亦即它是正常壓密、過壓密還是壓密中，此事涉及要用 C_s 還是 C_c 。
- 4.



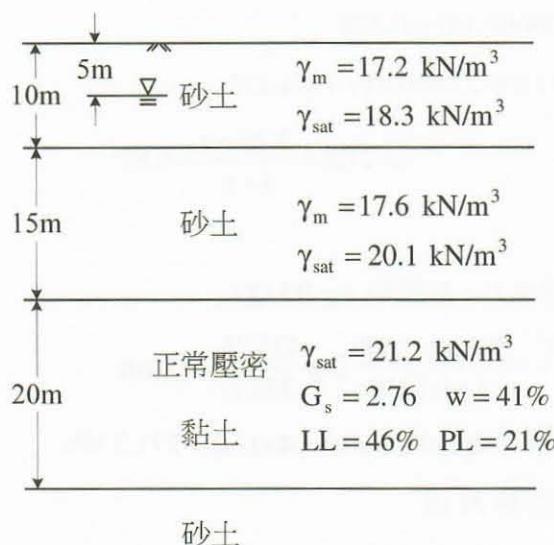
有一個「毛巾試驗」，如圖，可以局部表達黏土的變形特性。把毛巾濕潤飽和後，摺疊數層置好，然後在毛巾頂上加重物(沒重物就用自己討厭的課本壓)，模擬飽和黏土受壓的行為。您會發現您加的壓力越大，毛巾排水的速度越快，排水之後，毛巾就乾扁下陷。毛巾會下陷，就是毛與毛之間的水被排除了，造成毛毛緊密重疊在一起。黏土顆粒之間的水被排除後，顆粒與顆粒靠得更緊，地表就下陷，顆粒間的有效接觸壓應力就增加。5分鐘後再把課本移除(模擬地表沖刷解壓)，毛巾解壓會稍為膨脹一些，並且變成「過壓密毛巾」。如果再把那課本放置回來，這次毛巾的沉陷量會比第一次書壓上來的沉陷量小，幾乎是 100% 模擬黏土行為。什麼是黏土(毛巾)的預壓密應力？就是盤古開天以來，黏土(毛巾)所曾經承受過的最大有效應力。

題外話，毛巾試驗的排水速度，甚至比砂土的排水速度還快，當然也快於黏土的排水速度，我們不是要說明黏土的排水速度，而是要說明黏土層會壓縮下陷的機制。反過來講，要不是毛巾排水速度這麼快，您願意在浴室待多久進行這個試驗？

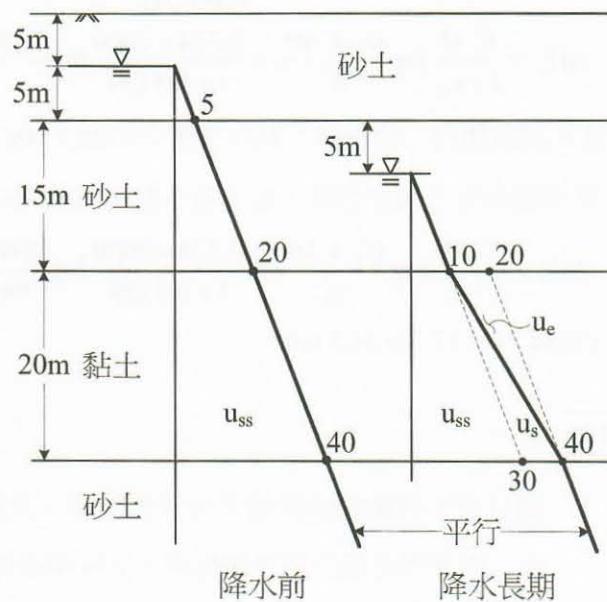
例 6-4.2 三角形超額孔隙水壓

- (1) 參考下圖，若黏土上方砂層水位降至地表下15 m，請問長期後黏土層中點有效應力變化量為若干？地表沉陷量為若干？並請畫出長期後，水壓力隨深度變化圖。
- (2) 若水位在地表下15 m處維持很長一段時間之後，新建大樓，樓荷重 340 kN/m^2 ，開挖至地面下4 m，荷重面積 $A=20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ ，求因新建大樓引起的壓密沉陷量。
- (3) 若同時考慮地下水位下降(由地面下5 m降至15 m處)與基礎荷重之作用時，求壓密土層之壓密沉陷量。

<改編73年土木技師檢覈>



(1)



降水前黏土層中點有效應力

$$\sigma'_0 = 5 \times 17.2 + 5(18.3 - 9.81) + 15(20.1 - 9.81) + 10(21.2 - 9.81) = 396.7 \text{ kPa}$$

降水後長期，水壓力如上圖，三角形之超額孔隙水壓 u_e (上寬下尖)已經消散，留下靜態水壓力 u_{ss} 與滲流水壓力 u_s (上尖下寬)。黏土層中點水壓力 $= (10+40)/2 = 25 \text{ tf/m}^2 = 245.25 \text{ kPa}$

降水後長期，黏土層中點總應力

$$\sigma_0 = 10 \times 17.2 + 5 \times 17.6 + 10 \times 20.1 + 10 \times 21.2 = 673 \text{ kPa}$$

降水後長期黏土層中點有效應力 $= 673 - 245.25 = 427.75 \text{ kPa}$

有效應力增量 $= 427.75 - 396.7 = 31.05 \text{ kPa}$

$$C_c = 0.009(LL-10) = 0.009(46-10) = 0.324$$

題目數據矛盾， $e = G_s w / S = 2.76 \times 0.41 / 1 = 1.132$

$$\text{但 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w \Rightarrow 21.2 = \frac{2.76 + e}{1 + e} \times 9.81$$

解出 $e = 0.5159 \neq 1.132$

因前面已經沿用 γ_{sat} 算總應力，故採用 $e = 0.5159$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.324 \times 2000}{1 + 0.5159} \log \frac{427.75}{396.7} = 14 \text{ cm}$$

(2) 淨基礎接觸壓力(增量) $\Delta q' = \Delta q - \gamma D_f = 340 - 4 \times 17.2 = 271.2 \text{ kPa}$

基礎底部到黏土層中點距離 31 m

$$\text{黏土層中點應力增量 } \Delta\sigma' = \frac{271.2 \times 20^2}{(20 + 31)^2} = 41.71 \text{ kPa}$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.324 \times 2000}{1 + 0.5159} \log \frac{427.75 + 41.71}{427.75} = 17.3 \text{ cm}$$

(3) 降水與新建前，黏土層中點有效應力 $= 396.7 \text{ kPa}$

降水暨新建之後的長期，黏土層中點有效應力 $= 427.75 + 41.71 = 469.46 \text{ kPa}$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.324 \times 2000}{1 + 0.5159} \log \frac{469.46}{396.7} = 31.3 \text{ cm}$$

(或寫 $14 + 17.3 = 31.3 \text{ cm}$)

討論

- 題目黏土層數據給得過多而互相矛盾，此題為中部某教授命題，因為他在校內的期中、期末考也是此套烏龍數據，他採用這烏龍數據至少 25 年了，國考出現數次，受害者無數。

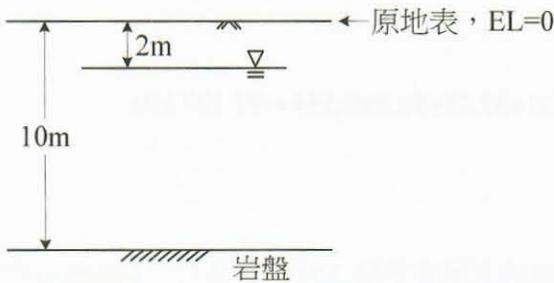
2. 黏土層上方降水，對黏土層產生三角形超額孔隙水壓，不是矩形超額孔隙水壓，請看 Lambe and Whitman 寫的“Soil Mechanics”第 25 章與第 27 章相關理論與例題。

3. $\frac{H_0}{1+e_0} = \frac{H_1}{1+e_1} = \frac{H_2}{1+e_2} = \text{常數}$ 。

例 6-4.3 求填土厚度，水位升高變 OC

有一輕微過壓密黏土，厚10 m位於岩盤上，如圖所示。假設原土層之地表高程為0，今擬於上施加覆土回填，回填土壤為砂土，回填後至土層沉陷完畢，最終地表高程應達+2.5 m，且回填後因地表蒸發量減少而使地下水位升高至原地表面處。計算所需之回填砂土總厚度為何？

黏土性質：含水量w=35%，比重G_s=2.7，壓縮指數C_c=0.6，回脹指數C_r=C_c/5，預壓密應力σ'_c=有效覆土應力σ'₀+10 kPa，砂土之乾、溼單位重均為18.5 kN/m³，參數不足者請自行假設。
<85年高考二級25%>



(1) $Se = wG_s$

$1 \times e = 0.35 \times 2.7 = 0.945$

設黏土 $\gamma_m = \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.7 + 0.945}{1 + 0.945} \times 9.81 = 18.38 \text{ kN/m}^3$

原黏土層中點有效應力 $\sigma'_0 = 2\gamma_m + 3(\gamma_{sat} - \gamma_w) = 2 \times 18.38 + 3(18.38 - 9.81) = 62.47 \text{ kPa}$

預壓密應力 $\sigma'_c = \sigma'_0 + 10 = 72.47 \text{ kPa}$

$C_r = C_c / 5 = 0.6 / 5 = 0.12$

復水 2 m 會降低黏土層中點有效應力，形成過壓密， $\sigma'_v = 5(18.38 - 9.81) = 42.85 \text{ kPa}$

並導致黏土膨脹，地表膨脹。上升量 = $\frac{C_r H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0}{\sigma'_v} = \frac{0.12 \times 10}{1.945} \log \frac{62.47}{42.85} = 0.1 \text{ m}$

(2) 設填土後長期黏土沉陷 ΔH_c 公尺，故填土厚度為 $(2.4 + \Delta H_c)$ 公尺

因填土引發的應力增量 $\Delta\sigma'_1 = 18.5(2.4 + \Delta H_c) = 44.4 + 18.5\Delta H_c$ kPa

填土後長期黏土層中點有效應力 $\sigma''_0 = 42.85 + 44.4 + 18.5\Delta H_c$ kPa

$$= 87.25 + 18.5\Delta H_c \text{ kPa} > 72.47 \text{ kPa}$$

加載後一定變成 NC

$$\Delta H_c = \frac{C_r H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_e H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma''_0}{\sigma'_c} = \frac{0.12 \times 10}{1.945} \log \frac{72.47}{42.85} + \frac{0.6 \times 10}{1.945} \log \frac{87.25 + 18.5\Delta H_c}{72.47}$$

$$\text{整理得 } \Delta H_c = 0.1407 + \frac{6}{1.945} \log \frac{87.25 + 18.5\Delta H_c}{72.47}$$

依試誤法猜 ΔH_c

等號左邊猜一數值	0.6	0.57	0.535
等號右邊計算結果	0.5498	0.5422	0.533

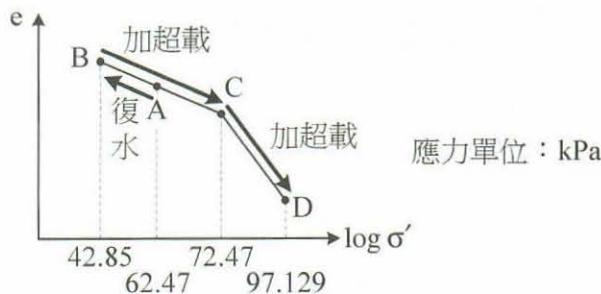
故 $\Delta H_c = 0.534$ m

填土厚度 = $2.4 + 0.534 = 2.934$ m

沉陷穩定後，黏土層中點有效應力 = $87.25 + 18.5 \times 0.534 = 97.129$ kPa

討論

黏土膨脹，對地表上升有貢獻，故填土厚度不是 $2.5 + \Delta H_c$ 公尺，本題極為漂亮。參考下圖，從 A 移動到 B 即是復水膨脹過程，同時地表上升了 0.1 公尺。從 B 移動到 D 則是填土引起的應力移動路線，考慮填土造成的沉陷量 ΔH_c 公尺，所以實際填土厚度是 $2.4 + \Delta H_c$ 公尺。



時間經過無窮久之後，黏土中點有效應力為 97.129 kPa，與「復水」、「加超載」的順序無關。解題，以先算「復水」影響，後算「加超載」影響，較易列式。

上圖軌跡從 A 到 B，再到 A，讀者不要以為地表高度不變。從 A 到 B，不需要填土；從 B 到 A，要填土。

例 6-4.4 求過壓密比

某一個工址現場之土層剖面如下圖所示，現欲回填單位重 20 kN/m^3 ，2 公尺厚的土，用以壓密該工址的土壤。在回填土鋪設前，現場鑽探人員在土層 A 與 B 處取樣，並於實驗室做單向度壓密試驗，試驗結果列於下表：

- (一)回填土鋪設前，A 與 B 處的過壓密比 (Over-consolidation Ratio) 分別為何？
- (二)回填土鋪設後，原土層表面之主要壓密沉陷 (Primary Consolidation) 為何？
- (三)在主要壓密完成後，A 與 B 處的過壓密比分別為何？ <修改102地特三等20%>

Sample	C_c	C_r	e_0	σ'_c (kPa)
A	0.59	0.19	1.90	70
B	0.37	0.14	1.21	180



(一) A 點有效應力 $\sigma'_v = 3 \times 14 + 2(17.5 - 9.81) + 3(13.5 - 9.81) = 68.45 \text{ kPa}$

$$A \text{ 點 } OCR = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = \frac{70}{68.45} = 1.023$$

B 點有效應力 $\sigma'_v = 3 \times 14 + 2(17.5 - 9.81) + 6(13.5 - 9.81) + 2(15 - 9.81) = 89.9 \text{ kPa}$

$$B \text{ 點 } OCR = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = \frac{180}{89.9} = 2.002$$

(二) 設岩層多節理裂縫，長期後排光 u_e 。廣大面積加載，沉陷穩定後，A 點與 B 點的應力增量

$$\Delta\sigma' = 20 \times 2 = 40 \text{ kPa}$$

A 點會變成正常壓密黏土，B 還是過壓密黏土($89.9 + 40 = 129.9 \text{ kPa} < 180 \text{ kPa}$)

$$\Delta H_A = \frac{C_r H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} + \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_v + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} = \frac{0.19 \times 600}{2.9} \log \frac{70}{68.45} + \frac{0.59 \times 600}{2.9} \log \frac{68.45 + 40}{70}$$

$$= 0.382 + 23.209 = 23.59 \text{ cm}$$

$$\Delta H_B = \frac{C_r H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_v + \Delta\sigma'}{\sigma'_v} = \frac{0.14 \times 400}{2.21} \log \frac{89.9 + 40}{89.9} = 4.05 \text{ cm}$$

總壓密沉陷量 $\Delta H_c = 23.59 + 4.05 = 27.64 \text{ cm}$

(三)廣大面積加載，沉陷穩定後 A 點 $OCR = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = \frac{68.45 + 40}{68.45 + 40} = 1.0$

B 點 $OCR = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = \frac{180}{89.9 + 40} = 1.386$

討論

剛加載時，黏土中點有效應力不會立刻上升，故當下 OCR 仍不變。A 點加載前幾乎可視為正常壓密黏土，因為 $68.45 \text{ kPa} \approx 70 \text{ kPa}$ ，Casagrande 作圖法求 σ'_c 總會有些誤差，加載後隨著超額孔隙水壓消散，有效應力漸增，A 點仍是正常壓密黏土。B 點加載前是過壓密黏土，加載後隨著超額孔隙水壓消散，有效應力漸增，過壓密比就越來越小，最後，還是過壓密黏土。

對於壓密量的計算題，「壓密中土壤」的應力起點是較多考生寫錯的地方。

假設張三出生至今，所扛過的最大重量是 60 kgf ，但目前肩上所扛的重量只有 30 kgf ，那張三就像過壓密黏土，其 $OCR = 2.0$ ；若再增加 30 kgf 於張三肩上，那張三就變成正常壓密黏土， $OCR = 60/60 = 1.0$ 。

Casagrande 作圖法是一種「人為規定」，生活中其他人為規定諸如「紅燈停綠燈行」、「棒球規則」、以及所有人類制定的法律。這些東西離真理較遠，都是人訂的，不是神訂的，不是自然法則，隨時可以改。你讀力學，要搞清楚那些公式是人訂的，那些公式不是人訂，而是萬物必須默默遵守的法則。小時候，「發明」與「發現」可以區分得很清楚，因為遭遇的樣本很單純，腦袋也單純。教授對於「發明」與「發現」的分際則是疑惑的，我也是。土壤力學是發明還是發現？

★ K_0 與 OCR 的定義， σ'_v 皆在分母。

§6-5 Terzaghi 單向度壓密理論

我們已經做完單向度壓密試驗，有沒有一個理論來說明超額孔隙水壓消散的機制？人類總是想為周邊發生的事務，不管是自然科學也好，社會科學也好，找個理由(藉口)來說明。就像你坐在樹下被掉落的蘋果砸到，總會想個理由「它為什麼掉下來，而不是飛上去？」

Terzaghi 先前是機械系畢業生，對於熱流消散的理論掌握得很好，跨領域之後，很容易在新領域運用舊思維開花結果。Terzaghi 在 1925 年就以熱流消散的理論為基礎，推導出超額孔隙水壓消散的機制，我們稱為「Terzaghi 單向度壓密理論」。

單向度壓密理論假設：

1. 地面廣大超載是一次瞬間施加完畢。
2. 土壤完全飽和。
3. 水與土顆粒均不可壓縮，土體壓縮來自於水的排出。
4. 達西定律成立。
5. 水的排出與土體壓縮均在單向度進行。
6. 滲透係數 k 維持不變，體積壓縮係數 m_v 維持不變，或說壓縮係數 a_v 維持不變。
7. 有效應力增量與孔隙比變化量，兩者之間為線性關係。

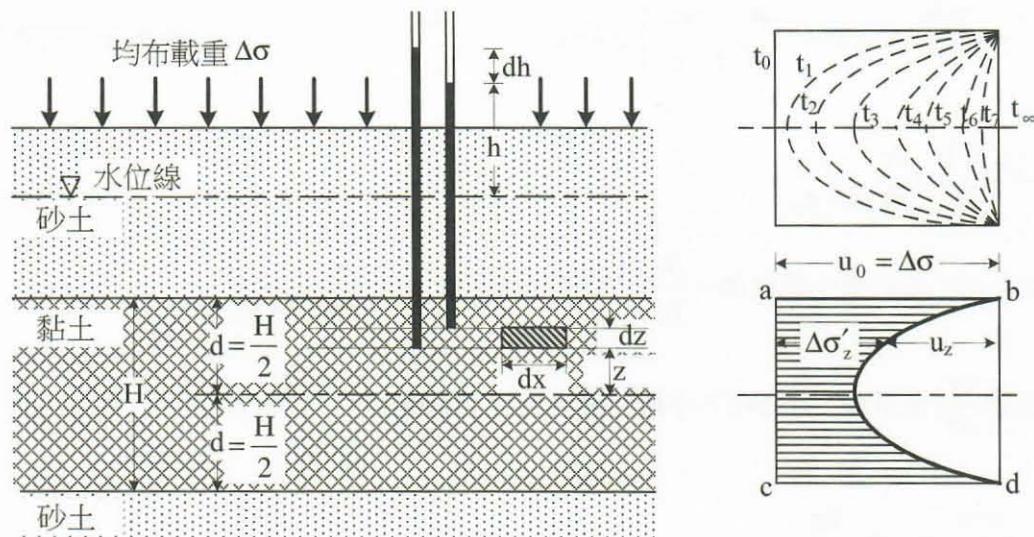


圖 6-15

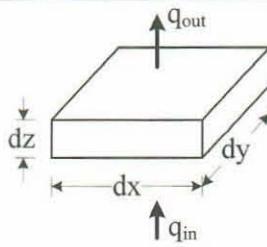


圖 6-16

參考圖 6-15 與圖 6-16，水流從下而上通過微小體積 $dxdydz$ ， z 軸朝上為正。單位時間流

$$\text{入微素的流量 } q_{in} = kiA = -k \frac{\partial h}{\partial z} dxdy, \text{ 流出微素的流量 } q_{out} = kiA = -k \left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz \right) dxdy.$$

$$\text{因此，淨流出量為 } -k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dxdydz \quad (\text{此值為正數，} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \text{ 為負數})$$

$$\text{任何時間點，微素的孔隙體積 } dV_v = \frac{e}{1+e_0} (dV_0) = \frac{e}{1+e_0} dxdydz = e \left(\frac{dxdydz}{1+e_0} \right)$$

$$\text{所以，孔隙體積隨時間的改變量 } \frac{\partial e}{\partial t} \times \left(\frac{dxdydz}{1+e_0} \right) \quad (\text{越壓越密，此值為負數})$$

由於單位時間流出微素的水量必須等於孔隙體積的減少量

$$\text{故 } -k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dxdydz = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{1+e_0} \right) dxdydz \quad (dxdydz \text{ 可同步約掉})$$

$$\Rightarrow k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \cdot \frac{1}{1+e_0} \quad [6.18]$$

$$\text{但是總水頭的微小變量 } \partial h = \frac{\partial u}{\gamma_w}, \text{ 體積壓縮係數 } m_v = -\frac{\partial e}{\partial \sigma'} \cdot \frac{1}{1+e_0}$$

由於 $\frac{\partial e}{\partial \sigma'}$ 是常數，且總應力維持不變，故代入 [6.18] 得

$$k \frac{\partial^2 u}{\gamma_w \partial z^2} = -m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t}$$

$$\text{或 } k \frac{\partial^2 u}{m_v \gamma_w \partial z^2} = -\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{水壓力的降低量就是有效應力增量，故有負號})$$

定義新參數壓密係數(Coefficient of Consolidation) $c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w}$ [6.19]

或寫 $k_z = c_v m_v \gamma_w$ (只有鉛垂向滲透係數可這樣算) [6.20]

$$\text{得 } \frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad [6.21]$$

此式稱為壓密方程式(Differential Equation of Consolidation)。為方便工程師以圖解法解壓密方程式，須將許多參數「無因次化」俾利作圖以擴大應用範圍，故定義許多無因次參數：

定義時間因素(Time Factor) $T = \frac{c_v t}{H_{dr}^2}$ [6.22]

或寫 $TH_{dr}^2 = c_v t$ [6.23]

t 是真實時間，也有書把 T 寫成 T_v ，均可。

定義路徑比(Path Ratio) $Z = \frac{z}{H_{dr}}$ ，定義某點壓密比(Consolidation Ratio) U_z

$$U_z = \frac{u_{e0} - u_e}{u_{e0}} = \frac{\text{該點全部超額孔隙水壓} - \text{目前尚留該點的超額孔隙水壓}}{\text{該點全部超額孔隙水壓}} \\ = \frac{\text{目前有效應力增量}}{\text{全部超額孔隙水壓}} = \frac{\Delta \sigma'_z}{u_{e0}} = \text{深度 } z \text{ 處土壤點的壓密比} \quad [6.24]$$

則[6.21]可改寫成 $\frac{\partial U_z}{\partial T} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}$ [6.25]

許多學者以傅利葉級數(Fourier Series)解[6.25]，數學解看起來學問很大，但大部分對國考無益，此處略之。但推導中提出「整層平均壓密度 U_{avg} 」的概念， U_{avg} 介於 0%~100% 之間，後來學者提出以下兩公式：

$$T = \frac{\pi}{4} U_{avg}^2 \quad \text{for } U_{avg} \leq 60\% \quad [6.26]$$

$$T = 1.781 - 0.933 \times \log(100 - U_{avg}) \quad \text{for } U_{avg} > 60\% \quad [6.27]$$

注意當 $U_{avg}=50\%$ 時，應使用公式[6.26]求 T ，且 U_{avg} 代 0.5 而不是 50，代完得結果 $T_{50}=0.197$ ；當 $U_{avg}=90\%$ 時，應使用公式[6.27]求 T ，且 U_{avg} 代 90 而不是 0.9，代完得結果 $T_{90}=0.848$ 。

時間因素 T 的最大值不是 1.0，當 $U_{avg}=95\%$ 時， $T=1.13$ ；當 $U_{avg}=99.9\%$ 時， $T=2.71$ ；當 $U_{avg}=100\%$ 時， T 趨近無限大。此兩公式在§6-7 會充分討論並應用在計算題。前述傅利葉級數的解已經被畫成圖形以便利工程師使用，圖也在§6-7 節，會查圖比較重要，真的會考查圖。

§6-6 圖解法求壓密係數 c_v

甲、乙兩地不同的黏土層，縱然厚度相同，也在同樣的應力增量作用下，但是雙方沉陷量發生的速率卻可能不同，或許甲地 5 年就發生 10 公分沉陷量，乙地 10 年才發生 10 公分沉陷量，顯然甲地的「沉陷速率」較快。我們得找一個參數來代表「沉陷速率」，道不遠人，就是前一節的 c_v 。所謂速率，牽涉到時間，材料力學就沒有可比擬的參數了，因為材料力學不討論時間因素，考生所背誦的公式沒有一個牽涉到時間 t 。代表黏土沉陷速率快慢的是壓密係數 c_v ， c_v 值越大，壓密進行的速率越快，當然也暗示滲透係數 k 相對大，超額孔隙水壓能較快排除，下標 v 代表垂直向的壓密係數。

c_v 代表壓密的速率， c_v 大者壓密速率快。可是 c_v 如何得到？它和彈性係數 E 與壓縮指數 C_c 一樣，必須仰賴試驗及作圖法得到。

Casagrande 提出對數時間法(Log of Time Method)求 c_v ，此法乃以對數 \log 為橫軸刻度(i.e., 壓縮刻度)，測微計讀值 d 為縱軸，繪出曲線如圖 6-17，此法不能直接記錄 $\log 0$ 。在圖形的前半段，自行取時間 t 及 $4t$ ，找到這兩段時間的測微計讀值差 Δd ，將 d_1 往上移動一個 Δd ，得 d_0 ，此點視為壓密開始。將試驗的中段直線與後段直線延伸，得交點，交點對應縱軸讀值為 d_{100} ，此點視為主要壓密結束，即 $U_{avg}=100\%$ 。

在縱軸上取 $d_{50} = (d_0 + d_{100}) / 2$, d_{50} 對應的橫軸時間刻度值為 t_{50} , 不是 $\log t_{50}$ 。按公式 $T \times H_{dr}^2 = c_v \times t$,

得 $0.197 \times H_{dr}^2 = c_v \times t_{50}$, 將作圖法求出的 t_{50} 代入左式, 即可算出 c_v 。

本作圖法的理論依據是: 在整體壓密度達 60%之前, 公式 $T = \frac{\pi}{4} U^2$ 成立, 而 T 和 t 成正比 (因為 $T \times H_{dr}^2 = c_v \times t$), 所以 U 若加倍, 對應的 T 與 t 必變成 4 倍, 所以才選 $t_2 = 4t_1$, 如此可以反算出壓密開始的讀值 d_0 。

將 d_0 與 d_{100} 取平均得 d_{50} , 表示此法兼有考慮曲線前段與後段壓密過程, 相當是以壓密的中間段表現求 c_v , 即中庸之道。

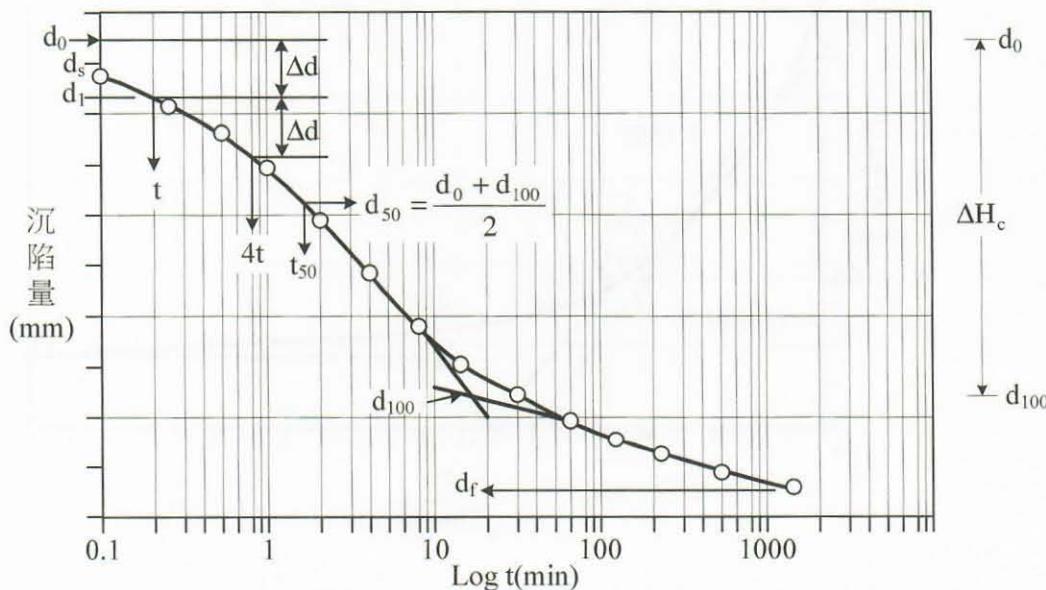


圖 6-17 Casagrande 對數時間法^{註4} (105 高考)

Taylor 提出平方根時間法(Square Root of Time Method)求 c_v , 此法的橫軸刻度每格一樣寬,

註 4 : Casagrande 出現幾次了? 詳見液限儀、預壓密應力、 c_v 、水壓計等等。前幾年朋友幫我校對文章, 指我打錯字了, 是“Cassagrande”才對, 這單字我不可能搞錯, 因為我大學時代以為 Casablanca 是 Casagrande 的孿生兄弟(字頭一樣), Casagrande 是不是《北非諜影》的男主角? “...A kiss is still a kiss in Casablanca...”, 你上 youtube 了嗎?

是算術座標，測微計讀值 d 為縱軸，繪出曲線如圖 6-18。取圖形的前段直線部份，往前後延伸，往前交縱軸得 d_s 點，往後交橫軸得 A 點，以尺量 \overline{OA} 距離，在橫軸上取 B 點使得 $\overline{OB} = 1.15 \overline{OA}$ 。將 B 點與 d_s 連線，交試驗曲線於 C 點，C 點縱座標即為「估定的」 d_{90} ，相當於壓密來到 $U_{avg}=90\%$ ，C 點的橫座標值就是 $\sqrt{t_{90}}$ ，另行平方後才是 t_{90} 。 d_s 是「修正零點」， d_0 是原始試驗數據點。因一開始試驗，包含了壓縮空氣(試體未完全飽和)，數據誤差較大，故捨棄 d_0 不用。

按公式 $T \times H_{dr}^2 = c_v \times t$ ，

得 $0.848 \times H_{dr}^2 = c_v \times t_{90}$ ，將作圖法求出的 t_{90} 代入左式，即可算出 c_v 。

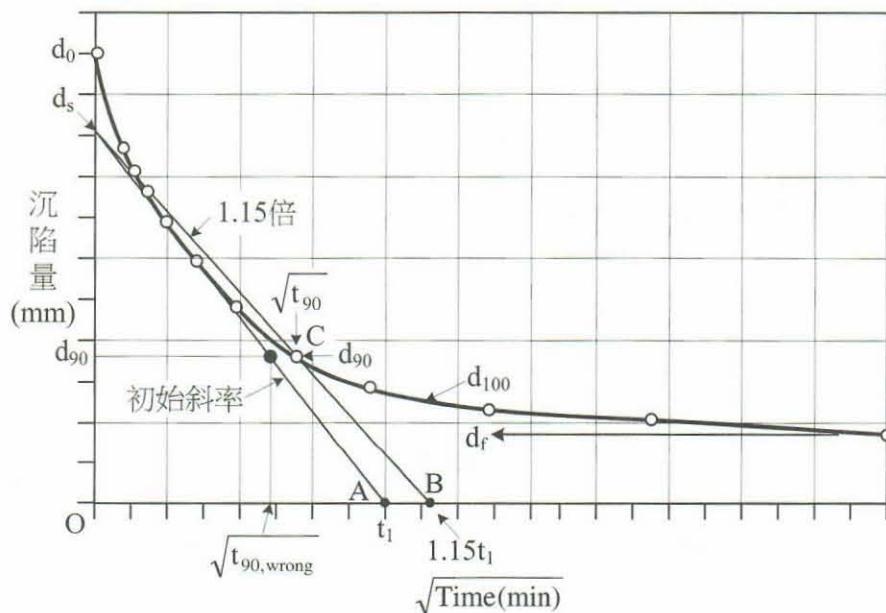


圖 6-18 Taylor 平方根時間法 (105 高考，橫軸是算術座標，本法壓縮數據)

本作圖法理論依據是：在壓密的前期(指 $U < 60\%$)，成立 $T = \frac{\pi}{4} U_{avg}^2$ ， $\Rightarrow \sqrt{T} \propto U_{avg}$ ， $\Rightarrow U_{avg} \propto \sqrt{t}$ ，故壓密前期的線形，橫軸數據與縱軸數據有負斜率之線性關係，但在壓密後期(指 $U > 60\%$)，不可使用公式 $T = \frac{\pi}{4} U^2$ ，若誤用此式求 T_{90} ，將會求出 $T_{90,wrong} = 0.6362$ 。正確的 $T_{90} = 0.848$ ，正確的 T_{90} 比錯誤的 $T_{90,wrong}$ 大 1.333 倍(因 $0.848/0.6362=1.333$)，再考慮 $t \propto T$ ，所以正確的 t_{90} 也比錯誤的 $t_{90,wrong}$ 大 1.333 倍。若考慮數據取開根號，則正確的 $\sqrt{t_{90}}$ 比錯誤的

$\sqrt{t_{90,wrong}}$ 大 1.15 倍(因 $\sqrt{1.333} = 1.15$)，所以才把 $d_s A$ 線向右放大 1.15 倍，放大後的直線就是 $d_s B$ 線。 $d_s B$ 線與曲線的交點 C，代表壓密曲線 d_{90} 的位置。

本作法著重測量試驗的前段壓密過程，所以求出來的 c_v 值比對數時間法大。壓密過程中，壓密係數本來就不是定值(計算題是為了計算方便才把 c_v 視為定值)，壓密前期進行的速率本來就較快，晚期壓縮趨近穩定，壓密速率就會變較慢。壓密儀單向度壓密試驗中，每一階載重開始之初，沉陷速率最快(籃球員第一節跑最快)，代表初階段 c_v 大；每一階載重末段，沉陷速率變慢(籃球員第四節跑最慢)，代表末階段 c_v 小。

這樣想吧：測量張三跑 1000 公尺的速率，張三前 300 公尺跑很快，最後 300 公尺沒「膏」，速度變很慢，測量他前段的速率、後段的速率，得到的速率值並不一樣。這件事情暗示，我們對黏土試體進行試驗求 c_v ，你選擇的時間區間影響你的測量成果。對數時間法，宛如測量張三 500 公尺處的速率，此接近正確的平均速率；平方根時間法，宛如測量前 300 公尺處的速率，將會高估張三整體速度的表現。

請注意，平方根時間雖然採取 t_{90} 來計算，但這並不表示著重於壓密的晚期表現，和「潛變量」更差十萬八千里。平方根時間法求出的「 t_{90} 」，乃是仰賴前期曲線走勢得到的，請注意根源問題。舉例，有甲、乙兩條壓密曲線，這兩條壓密曲線在壓密晚期走勢一模一樣，完全重合，表示雙方實質上的 t_{90} 應該一樣，但若甲線前期曲線比較陡，甲線求得的 A 點會更接近座標原點，甲線「估計」出來的 t_{90} 就會變小，變成從甲線求出的 c_v 會較大。在這裡，你看出是壓密前期行為改變了 c_v ，而非後期行為。換言之，前期沉陷量特快(如甲)，導致算出的 c_v 偏大。

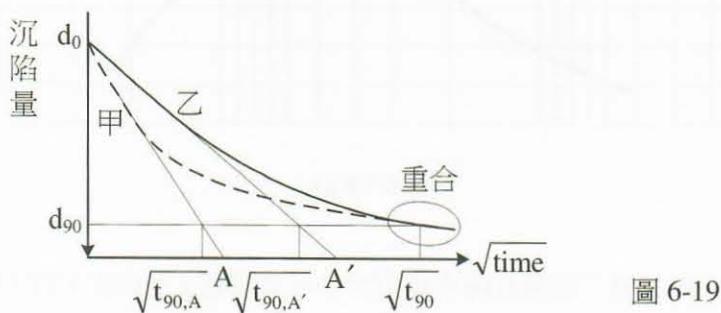


圖 6-19

對數時間法橫軸上讀到的刻度值就是 t_{50} ，不是 $\log t_{50}$ 。平方根時間法橫軸上讀到的刻度值是 $\sqrt{t_{90}}$ ，不是 t_{90} 。對數時間法和平方根時間法都是試驗室決定 c_v 的方法，根據研究顯示，均

小於現地實測的 c_v ，所以用平方根時間法求的 c_v 可能較貼近現場值。

人類估計出來的 t_{90} ，未必是真正的 t_{90} ；就像 RC 裏，人類算出斷面的標稱(計算)彎矩 M_n ，未必是斷面的真正強度。不同學者提出不同作圖法求 c_v ，五花八門的作圖法請參考原文書。

壓密係數的單位較奇特，是 $[L^2/T]$ ，分子是長度的平方，分母是時間，注意係數越大，越有可能是透水層，通常是排水比黏土快的粉土。下表列出部分土壤的 c_v 值：

表 6-3

土壤種類	波士頓藍黏土	有機粉土(OH)	冰湖黏土(CL)	芝加哥粉土質黏土(CL)	墨西哥市黏土(MH)
$c_v(cm^2/sec \times 10^4)$	40 ± 20	2~10	6.5~8.7	8.5	0.9~1.5

筆者不是要大家背 c_v 值，而是要知道低透水性土壤 c_v 的大約範圍。以前曾有考題在黏土層上方畫有一粉土層，未給粉土層的滲透係數，卻給粉土層的 $c_v=0.3 cm^2/sec$ ，這是很大的壓密係數，表示黏土層上方是排水層。參加土木國考，應對土木數據有基本認識，若數據離譜還不自覺，則同志仍須努力。

還有一個因素影響 c_v 值，就是試驗時的壓密應力大小，壓密應力過大或過小，均會求出較小的 c_v 值。

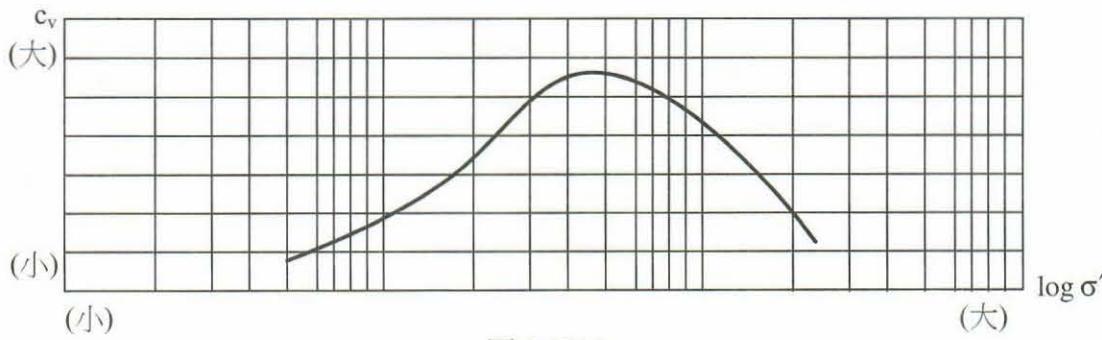


圖 6-19(a)

討論 $\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ，此式表示超額孔隙水壓力大小 u 是位置 z 及時間 t 的函數， u 對 t 微分必得負數，因為 u 隨時間增加而消散， u 值變小。 c_v 恒正，故 u 對 z 的二次微分恒負，高中數學說這叫「函數圖形凹口朝-u 軸」，這正是啤酒肚消散圖的畫法呀！飛鏢曲線凹口朝-u 軸。

§6-7 整層平均壓密度 U_{avg} 與某點壓密比 U_z

壓密速率的題目，有兩種題型，一是求「整層黏土的平均壓密度(Degree of Consolidation)U(或寫成 U_{avg})」，另一是求黏土中某一特定深度(e.g.: 深度 z)的壓密比(Consolidation Ratio) U_z 。類比來說，前者像是求全班考試成績的平均分數，它是一種統計上的平均表現；後者像是求某一位特定同學的考試分數，並非統計上的平均表現。

求整層黏土的平均壓密度(Degree of Consolidation)U， U_{avg}

對於這類題型，可用的公式有三：

$$T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad [6.28]$$

$$T = \frac{\pi}{4} U_{avg}^2 \quad \text{for } U_{avg} \leq 60\% \quad [6.29]$$

$$T = 1.781 - 0.933 \times \log(100 - U_{avg}) \quad \text{for } U_{avg} > 60\% \quad [6.30]$$

其中 T 是時間因素(Time Factor)，沒有單位， $0 \leq T < \infty$ 。 H_{dr} 是最長排水路徑，t 是真實時間。請注意 T 的上限不是 1.0，可以超過 1.0。如果黏土層雙向排水，則最長排水路徑 $H_{dr} =$ 黏土層厚度 H 之半。如果黏土層單向排水，則最長排水路徑 $H_{dr} =$ 黏土層厚度 H。在試驗室裡，壓密試驗黏土試體上下均有透水石，乃雙向排水，題目不需言明。公式[6.29]與[6.30]的 U 是指 U_{avg} 而非 U_z 。公式[6.29]和公式[6.30]僅適用於矩形分布之超額孔隙水壓，三角形的超額孔隙水壓不適用。

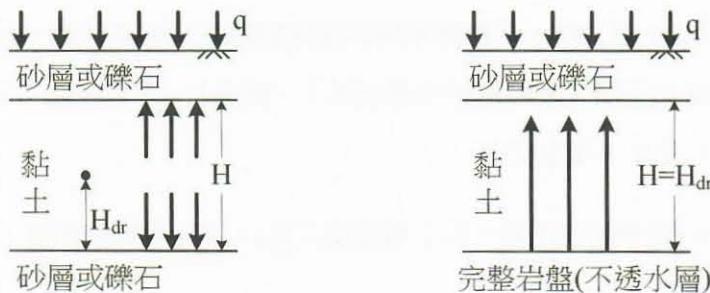


圖 6-20 雙向排水與單向排水

公式[6.28]是土壤力學唯一扯到真實時間 t 與 c_v 的公式，必背。讀完整本土壤力學進考場，

如果題目要求真實時間，就是考公式[6.28]，同額競選，沒有其他候選人。理論上超額孔隙水壓要無窮久才能消散完畢， t 最大可以代無窮大，所以 T 最大是趨近無窮大。

公式[6.29]和[6.30]可以合併畫成圖 6-21，圖 6-21 顯示「統計上的平均壓密度 U 」數值，而不是單一點的壓密比。因為公式[6.29]和[6.30]必須背，所以不在乎題目是否提供圖 6-21。

當整層黏土平均壓密度達到 50% 時， $U = U_{avg} = 50\%$ ， $T_{50} = \frac{\pi}{4} (0.5)^2 = 0.197$ 。當整層黏土平均壓密度達到 90% 時， $U = U_{avg} = 90\%$ ， $T_{90} = 1.781 - 0.933 \times \log(100 - 90) = 0.848$ 。

這兩個常用數據也要記： $T_{50} = 0.197$ ， $T_{60} = 0.283$ ， $T_{90} = 0.848$ 。

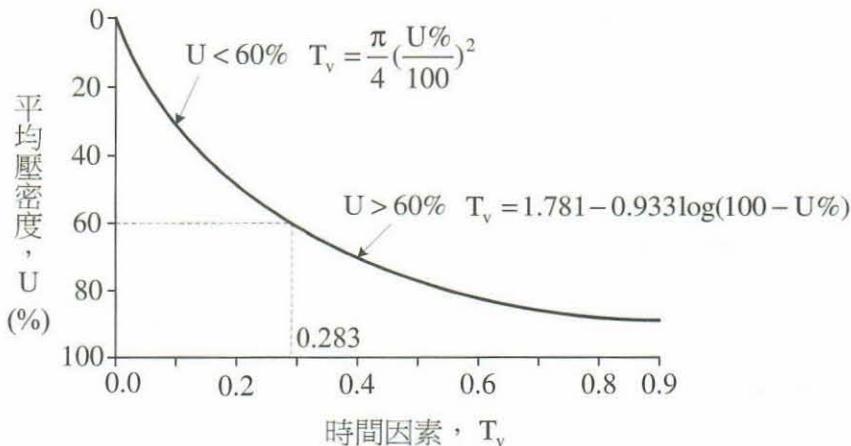


圖 6-21

$$\text{整層黏土的平均壓密度 } U = \frac{\text{目前已經沉陷的壓密量 } \Delta H_{now}}{\text{總壓密量 } \Delta H_{c,ult}} = U_{avg}$$
[6.31]

這公式的物理意義明顯，例如你打算跑完 42 公里的馬拉松，如果你已經完成 35 公里，完成百分比就是 $35/42 = 83.33\%$ ，平均壓密度就像是壓密完成的百分比，就是「目前工程實際進度」。理論上，整層黏土層完成壓密耗時需無限久，實務上，可以認定 $U = 95\%$ 或 99.9% 為黏土層完成主要壓密，沒有一致性規定。

在相同條件下(地表超載不變、黏土層厚度不變)，則在相同壓密度之下，單向排水所需的时间是雙向排水的 4 倍。 $\frac{H_{dr}^2}{(\frac{H_{dr}}{2})^2} = 4$ 。

在相同條件下(地表超載不變、黏土層厚度不變，排水邊界不改變)，則到 t_{90} 所需的時間是 t_{50} 的 4.3 倍。 $\frac{0.848}{0.197} = 4.3$ 。

求某特定深度點 z 的壓密比(Consolidation Ratio) U_z

對於這類題型，須用公式[6.28](=[6.32])及圖 6-22 方能求解，圖 6-22 須由題目提供，它沒辦法化成簡單公式。圖 6-22 外觀像個大矩形，就是代表產生矩形分布的超額孔隙水壓，是由廣大面積加載所造成。圖 6-22 像飛鏢一樣的曲線稱為等時曲線(Isochrone)，它是從 $T=0$ 開始，逐漸內縮 $T=0.1$ 、 $T=0.2$ 、…、 $T=0.9$ 、…到 $T \rightarrow \infty$ 。等時曲線就像等高線，同一條線上的各點處在相同時刻。曲線逐漸內縮，代表超額孔隙水壓逐漸消散，理論上超額孔隙水壓要無窮久才能消散完畢，所以 T 的最大值是無窮大，不是 1.0。

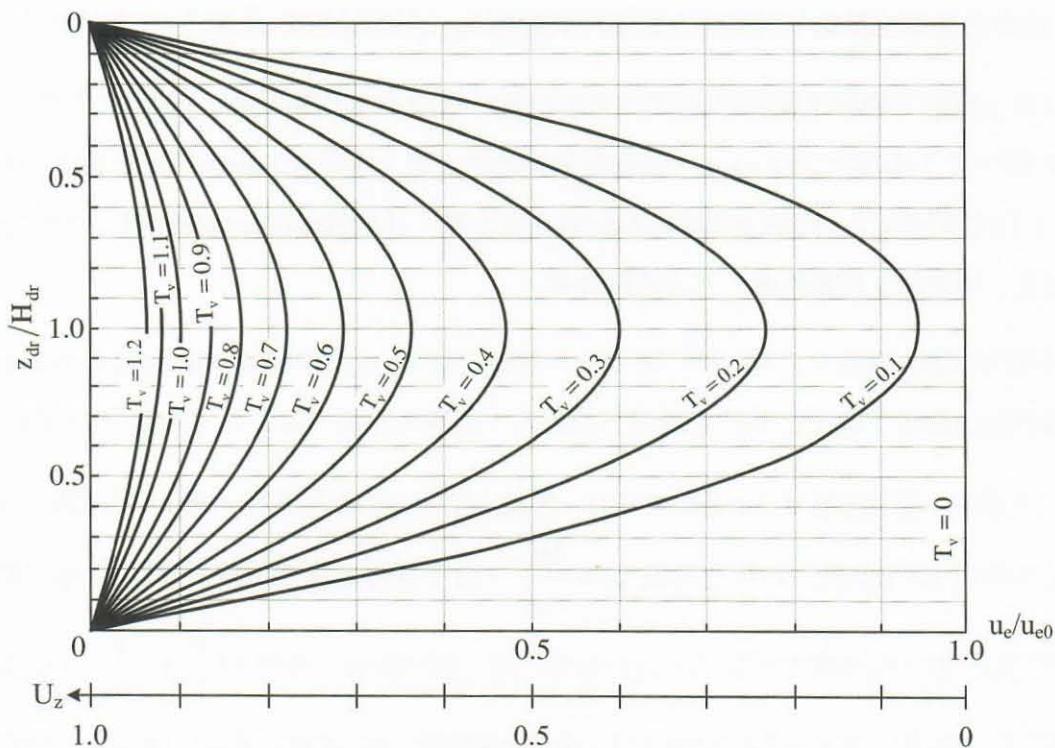


圖 6-22 求某點壓密比 U_z 必用圖(暱稱：啤酒肚消散圖)

等時曲線的編碼 T 和真實時間 t 有關係：

$$T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad (T \text{ 即是 } T_v) \quad [6.32]$$

T 是時間因素， H_{dr} 是最長排水(drain)路徑，未必等於土層厚度，如果黏土層單向排水，則 H_{dr} 恰等於黏土層厚度。 t 是壓密經過的真實時間，單位例如為秒。

筆者喜歡拿材料力學比對土壤力學，材料力學、結構學沒有一個公式扯到時間 t ，因為材料力學與結構學認為應力傳遞不需耗費時間，是即刻完成傳遞。

若黏土層上下邊界均能排水，從圖 6-22 觀察等時曲線變化，上下邊界的 T 很快從 $T=0$ 變化到 $T \rightarrow \infty$ ，其物理意義是黏土層上下邊界處的超額孔隙水壓能「瞬間排掉」，水力坡降無限大。而黏土層中點處的超額孔隙水壓，其消散路徑最遠($H_{dr}=H/2$)，故等時曲線中點總是在「啤酒肚」的最外端(右端)，該處水力坡降為零。「啤酒肚」裡面裝的是超額孔隙水壓(或酒壓)，隨著超額孔隙水壓消散，啤酒肚就逐漸變小。

舉例來講，某教室有前、後兩門，教室內一旦有火警，坐在前、後門邊的同學拔腿就衝出教室。誰會最後衝出教室？就是坐在教室中央的人，必須大家都「消散」了，才輪到他烙跑。

若黏土層的下邊界不能排水(例如為完整岩盤)，那就只能觀察從圖 6-22 的上半圖， 上邊界的 T 很快從 $T=0$ 變化到 $T \rightarrow \infty$ ，其物理意義是黏土層上邊界處的超額孔隙水壓能「瞬間排掉」，水力坡降無限大。而黏土層底部的超額孔隙水壓，其消散路徑最遠($H_{dr}=H$)，故黏土層底部總是在「啤酒肚」的最外端，水力坡降為零。

再舉例來講，某教室只有前門，教室內一旦有火警，坐在前門邊的同學拔腿就衝出教室。誰會最後衝出教室？就是坐在教室最後方的人，必須大家都「瘦」了，才輪到他烙跑。

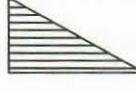
當土壤某一點的壓密比 U_z 達到 40% 時，代表該點的初始超額孔隙水壓 u_{eo} 已消散了 40%，尚剩餘 60% 的 u_{eo} 未消散。所以也可說 $U_z = \frac{\Delta\sigma'_z}{u_{eo}}$ ，分子是有效應力增量，分母 u_{eo} 是初期產生的超額孔隙水壓，有效應力增量乃來自於超額孔隙水壓消散量。同理， $U_z = 1 - \frac{u_e}{u_{eo}}$ ， u_e 是目前的超額孔隙水壓量。當某一點的壓密比 U_z 達到 100% 時， u_{eo} 就完全消散，理論上，耗時需無限久。

也可以用圖形表示整層平均壓密度，即 $U_{avg} = \frac{\text{啤酒肚以外的面積}}{\text{矩形超額孔隙水壓總面積}} = \frac{\text{圖形}}{\text{矩形}}$

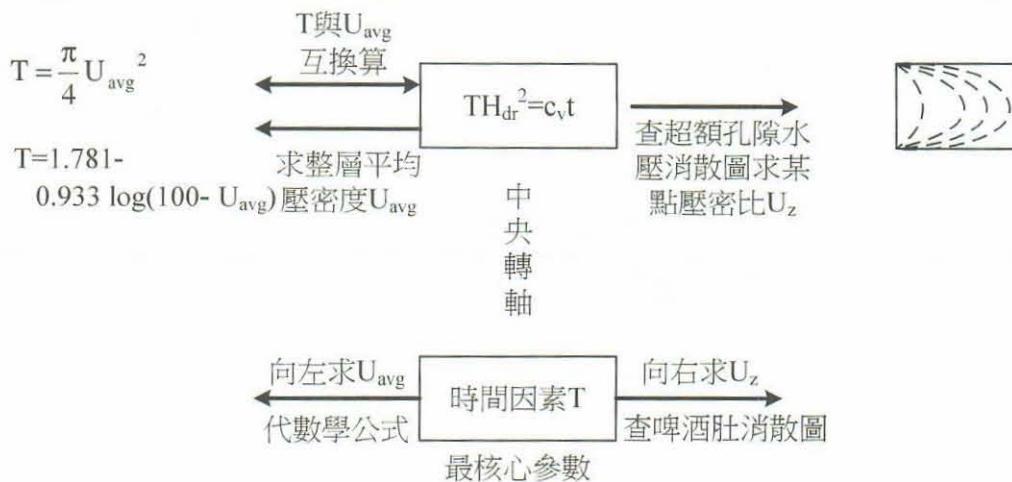
$$= \frac{\text{已經消散的 } u_e \text{ 面積}}{\text{矩形超額孔隙水壓總面積}} = 1 - \frac{\text{啤酒肚裡面的面積}}{\text{矩形超額孔隙水壓總面積}} = 1 - \frac{\text{圖示}}{\text{圖示}}$$

此法意義明顯，惟考試時不實用，因為要數很多小格子才得面積。

表 6-4 產生超額孔隙水壓的因素

產生超額孔隙水壓的因素	初期超額孔隙水壓的形狀	最長排水路徑 H_{dr}	T_{50}	T_{90}
地表廣大面積超載	對黏土層產生矩形超額孔隙水壓分布。 	若上下皆透水層，則 $H_{dr} = H/2$ 。 若有一側不透水，則 $H_{dr} = H$ 。	0.197	0.848
★黏土層上下均有透水層(如砂層、礫石層)，在頂部排水層降水。	對黏土層產生三角形超額孔隙水壓分布，上寬下尖。底部透水層壓力水頭不變。  長期後的穩態滲流，滲流方向向上。	使用 $TH_{dr}^2 = c_v t$ 時， $H_{dr} = H/2 \cdot u_e$ 消散時，上下均透水，故 $H_{dr} = H/2$ 。	0.092	0.72
★黏土層上下均有透水層(如砂層、礫石層)，在底部排水層降水。	對黏土層產生三角形超額孔隙水壓分布，上尖下寬。頂部透水層壓力水頭不變。  長期後的穩態滲流，滲流方向向下。	使用 $TH_{dr}^2 = c_v t$ 時， $H_{dr} = H/2 \cdot u_e$ 消散時，上下均透水，故 $H_{dr} = H/2$ 。	0.294	0.94

本節重點就是求某點壓密比 U_z 與整層平均壓密度 U_{avg} ，整合這兩類題型，必定會發現公式 $T \times H_{dr}^2 = c_v \times t$ 居於中央轉軸地位，筆者戲稱「中央公式」，這兩類題目都要用到此公式，求真實時間 t 也是用此公式。所以從中央出發，向右查超額孔隙水壓消散圖可得 U_z ，向左代兩個公式可得整層平均壓密度 U_{avg} 。而中央轉軸裏的最核心參數則是時間因素 T ，有了 T ，要求 U_{avg} 或 U_z 都可以。

圖 6-23 向左求 U_{avg} ，向右求 U_z

注意黏土層上下均有排水層時，只在上方透水層降水，會產生**三角形超額孔隙水壓分布**，不是**矩形超額孔隙水壓**，並且是雙向排水，有疑問者，筆者知道你在想什麼，請看 Lambe and Whitman 教科書“Soil Mechanics”第 25 到 27 章，以節省自己時間。

第五章滲流問題是穩態問題，時間 t 不是變數，任何物理量不隨時間改變。但本章壓密問題是非穩態問題(Unsteady State)，超額孔隙水壓消散量是時間的函數，故有效應力增量、某點壓密比 U_z 、整層平均壓密度 U_{avg} 都是時間的函數。「非穩態」講的是物理量隨時間改變的現象。

時間就是金錢，尤其有銀行貸款壓力時，故某些大工程的業主希望壓密能愈快完成愈好，黏土層穩定之後可以大興土木創造利潤。有哪些工法可以加速黏土壓密？

- (1) 可以在工址預先填土石預壓，過一段時間之後，底下黏土變得更緊密了，土石卸載之後，黏土變成過壓密黏土，爾後於其上新建結構物所造成的沉陷量就較小。台北捷運的北投機廠即用此法進行加速壓密。
- (2) 大規模降水，給予壓密沉陷的起因，長期可以提高土壤有效應力，增加強度，復水後黏土變成 OC，爾後沉陷量較小。
- (3) 可在工址施作多支垂直的排水砂樁、排水帶或紙樁，這些樁不是提供承載力的樁，而是提供超額孔隙水壓消散的樁，由於這些樁的存在，提供水平向排水路徑，縮短排水路徑可加速壓密沉陷，如圖 6-24。
- (4) 動力壓密工法：利用吊車吊起重物(如鐵球)，令重物自由落體撞擊地表面，產生的震

波有壓縮土層及激發超額孔隙水壓的效果，俟超額孔隙水壓力消散，土壤即更緊密，此法兼有夯實及壓密的效果，如台塑六輕施工就是用此工法。人造震波就像真實地震的震波，發生液化之後的地層會比液化前緊密的道理類似。

- (5) 真空預壓工法：預先在工址上舖設砂土層，並於砂土層上蓋一層不透氣薄膜，薄膜的四周圍必須深埋於土壤內，然後以真空泵浦將砂土層內的空氣抽出，造成膜內真空，由於地球大氣壓力作用而對薄膜產生壓應力。真空預壓荷載的理論最大壓力是 1 atm(約 10 tf/m^2)，但實務上約達 $7\sim 8 \text{ tf/m}^2$ ($70\sim 80\%$ 之效率)，大約等於填土一層樓多高度造成的壓力。

方法可考慮後混搭，更多方法請參考《建築物基礎構造設計規範》第九章。此規範可上內政部營建署網站下載。<http://www.cpami.gov.tw/>

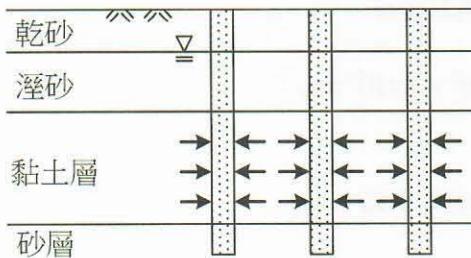


圖 6-24 排水砂樁

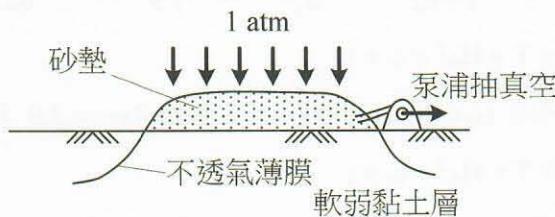
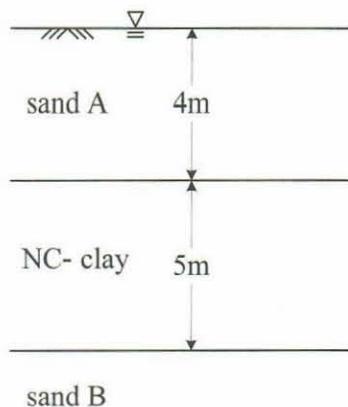


圖 6-25 真空預壓工法

例 6-7.1 壓密速率

有一地層剖面如下，砂土A層 $\gamma_{sat}=19 \text{ kN/m}^3$ ， $\gamma_m=19 \text{ kN/m}^3$ 。正常壓密黏土 $\gamma_{sat}=20 \text{ kN/m}^3$ ， $C_c=0.2$ ， $c_v=0.0001 \text{ cm}^2/\text{sec}$ ， $e_0=0.9$ 。以下三狀況係獨立發生毫無關聯，試問：

- (1) 地表新增廣大面積超載 $q=80 \text{ kPa}$ ，求壓密沉陷量 $=$ ？求達一半壓密沉陷量所需時間 $t_{50}=$ ？求 $t_{90}=$ ？
- (2) $q=0 \text{ kPa}$ ，但砂土A層降水3 m，求壓密沉陷量 $=$ ？求達一半壓密沉陷量所需時間 $t_{50}=$ ？求 $t_{90}=$ ？
- (3) $q=0 \text{ kPa}$ ，但砂土B層壓力水頭降水3 m，求壓密沉陷量 $=$ ？求達一半壓密沉陷量所需時間 $t_{50}=$ ？求 $t_{90}=$ ？



(1) 黏土層中點 $\sigma'_0 = 4(19-9.81) + 2.5(20-9.81) = 62.235 \text{ kPa}$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.2 \times 500}{1.9} \log \frac{62.235 + 80}{62.235} = 18.89 \text{ cm}$$

$$\text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad 0.197(250)^2 = 1 \times 10^{-4} \times t_{50}$$

$$\text{解出 } t_{50} = 123,125,000 \text{ sec} = 1425 \text{ days} = 3.9 \text{ 年}$$

$$\text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad 0.848(250)^2 = 1 \times 10^{-4} \times t_{90}$$

$$\text{解出 } t_{90} = 530,000,000 \text{ sec} = 6134.3 \text{ days} = 16.81 \text{ 年}$$

(2) 降水後長期，黏土層中點總應力 $\sigma_0 = 3(19) + 1(19) + 2.5(20) = 126 \text{ kPa}$

降水後長期，黏土層中點水壓力 $u_w = (1+9)/2 = 5 \text{ tf/m}^2 = 49.05 \text{ kPa}$

【線性內插】

$$\sigma'_0 = 126 - 49.05 = 76.95 \text{ kPa}$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.2 \times 500}{1.9} \log \frac{76.95}{62.235} = 4.85 \text{ cm}$$

$$\text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad 0.092(250)^2 = 1 \times 10^{-4} \times t_{50}$$

$$\text{解出 } t_{50} = 57,500,000 \text{ sec} = 665.5 \text{ days} = 1.82 \text{ 年}$$

$$\text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad 0.72(250)^2 = 1 \times 10^{-4} \times t_{90}$$

$$\text{解出 } t_{90} = 450,000,000 \text{ sec} = 5208 \text{ days} = 14.27 \text{ 年}$$

(3) 降水後長期

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.2 \times 500}{1.9} \log \frac{62.235 + (3/2) \times 9.81}{62.235} = 4.85 \text{ cm}$$

$$\text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad 0.294(250)^2 = 1 \times 10^{-4} \times t_{50}$$

解出 $t_{50} = 183,750,000 \text{ sec} = 2126.7 \text{ days} = \underline{5.83 \text{ 年}}$

$$\text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t \quad 0.94(250)^2 = 1 \times 10^{-4} \times t_{90}$$

解出 $t_{90} = 587,500,000 \text{ sec} = 6800 \text{ days} = \underline{18.63 \text{ 年}}$

討論

廣大面積超載、黏土層上層的砂層降水、黏土層下層的砂層降水，會產生三種獨立不同的超額孔隙水壓模式， t_{50} 和 t_{90} 都不一樣，《解說土壤力學》是第一本辨正清楚的中文書，相信以後其他中文書都會跟隨，至於已經寫錯的中文書，當然會跟著改。

本題上層砂降水後，A 砂層單位重改變，造成黏土層總應力改變，所以不可以說「黏土層超額孔隙水壓的消散量，等於有效應力增量」。本題下層砂降水後，A 砂層單位重不變，造成黏土層總應力不變，所以可以說「黏土層超額孔隙水壓的消散量，等於有效應力增量」。

$$\star \text{廣大面積加載，求 } U_{avg} \text{，使用} \begin{cases} TH_{dr}^2 = c_v t \\ T = \frac{\pi}{4} U^2 & U \leq 60\% \\ T = 1.781 - 0.933 \log(100 - U) & U > 60\% \end{cases}$$

$$\star \text{廣大面積加載，求 } U_z \text{，使用} \begin{cases} TH_{dr}^2 = c_v t \\ \text{啤酒肚消散圖} \end{cases}$$

例 6-7.2 壓密速率

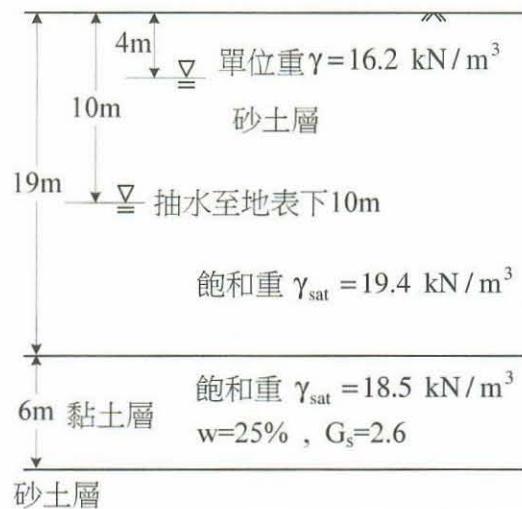
(一)何謂壓縮指數Compression Index C_c ，在公制與英制使用上有何區別？試解釋原因。

(二)如圖所示，地表下方19m 處有一厚為6m 之黏土層，上下為排水性良好之砂土層，地下水原位於地表下方4m，上層砂土屬於地下水位上下有不同單位重，若持續抽取地下水致使水位低至地表下方10m，試利用下表該黏土層之壓縮係數(coefficient of compressibility) a_v 與有效壓密應力之關係，估算該黏土層之最終沉陷量。註：水單位重為 9.8 kN/m^3 。

(三)若該黏土層之壓密係數(coefficient of consolidation) c_v 為 $5.6 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$ ，則達最終沉陷量一半所需時間為若干年？

<95年土木技師20分>

有效壓密應力(kPa)	a_v (1/MPa)
100 ~ 200	4.2
200 ~ 250	1.5
250 ~ 300	0.6



(1) 壓縮指數(Compression Index) $C_c \equiv \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'}$, 為壓密試驗中, 以半對數圖紙記錄孔隙比及有

效應力, 算數座標縱軸為孔隙比, 對數座標橫軸為有效應力, 描點連線繪出壓密曲線, 曲線後半段的斜率呈現定值, 此斜率取正數就是壓縮指數。

C_c 在公制與英制使用上沒有區別, 公制或英制數值一樣。

因為孔隙比 e 沒有單位, 而 $\log \sigma_2 - \log \sigma_1 = \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, 分子和分母的應力單位約掉, 變成 C_c

的分子和分母都沒單位, 故其值不受英制或公制影響。

(2) 黏土 $Se = wG_s$

$$1 \times e = 0.25 \times 2.6 = 0.65$$

$$\gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.6 + 0.65}{1 + 0.65} \times 9.8 = 19.303 \text{ kN/m}^3 \neq 18.5 \text{ kN/m}^3 \quad \text{數據矛盾}$$

使用 $\gamma_{sat} = 18.5 \text{ kN/m}^3$, 反算出 $e = 0.81$

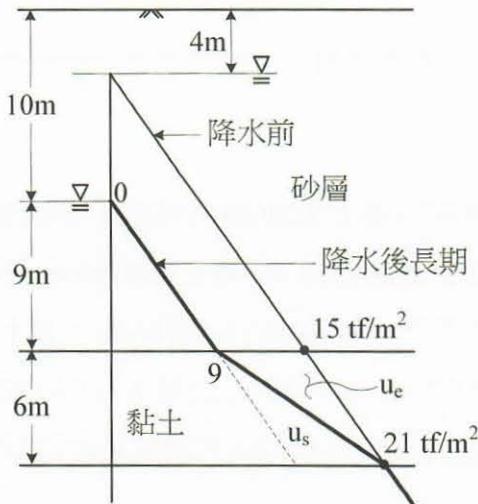
降水前黏土中點有效應力 $\sigma' = 4 \times 16.2 + 15(19.4 - 9.8) + 3(18.5 - 9.8) = 234.9 \text{ kPa} = 0.2349 \text{ MPa}$

降水後長期黏土中點水壓力 $u_w = (9+21)/2 = 15 \text{ tf/m}^2 = 147 \text{ kPa}$

降水後長期黏土中點總應力 $\sigma = 10 \times 16.2 + 9 \times 19.4 + 3 \times 18.5 = 392.1 \text{ kPa}$

降水後黏土中點有效應力 $\sigma' = \sigma - u_w = 392.1 - 147 = 245.1 \text{ kPa} = 0.2451 \text{ MPa}$

$$\Delta H_c = \frac{a_v H}{1 + e} (\Delta \sigma') = \frac{1}{1 + 0.81} (1.5)(600)(0.2451 - 0.2349) = 5.07 \text{ cm}$$



$$(3) \text{按 } T \times H_{dr}^2 = c_v \times t$$

$$0.092(300)^2 = 5.6 \times 10^{-2} \times t$$

解出 $t = 147857 \text{ sec} = 1.71 \text{ days} = \underline{0.0047 \text{ 年}}$

討論

有朋友問降水後長期黏土中點有效應力為何不可這樣算： $\sigma' = 10 \times 16.2 + 9(19.4 - 9.8) + 3(18.5 - 9.8) = 275.4 \text{ kPa}$ ？原因是此法只扣掉靜態水壓力，未扣掉滲流水壓力，故會算出較大的錯誤值。

題目只有說黏土上面的砂層降水，那黏土底下的砂層，壓力水頭就不變，除非題目說黏土底下的砂層也同步降水。所以，是產生三角形的超額孔隙水壓(上寬下尖)，不是矩形的超額孔隙水壓。有懷疑者請先去圖書館借 Lambe and Whitman 教科書看第 25、26、27 章，比較節省討論時間。

如果改成黏土底部的砂層抽水，那就是黏土頂部的砂層壓力水頭不變，會產生三角形的超額孔隙水壓(上尖下寬)，不是矩形的超額孔隙水壓。

本題 u_e 是上寬下尖之三角形，此時 $T_{50}=0.092$ 。若 u_e 是上尖下寬之三角形，此時 $T_{50}=0.294$ 。可參考 Arvind V. Shroff and Dhananjay L. Shah “Soil Mechanics and Geotechnical Engineering”，或 Atkinson and Bransby，或 C.R. Scott 的教科書，命題者擺大烏龍了。

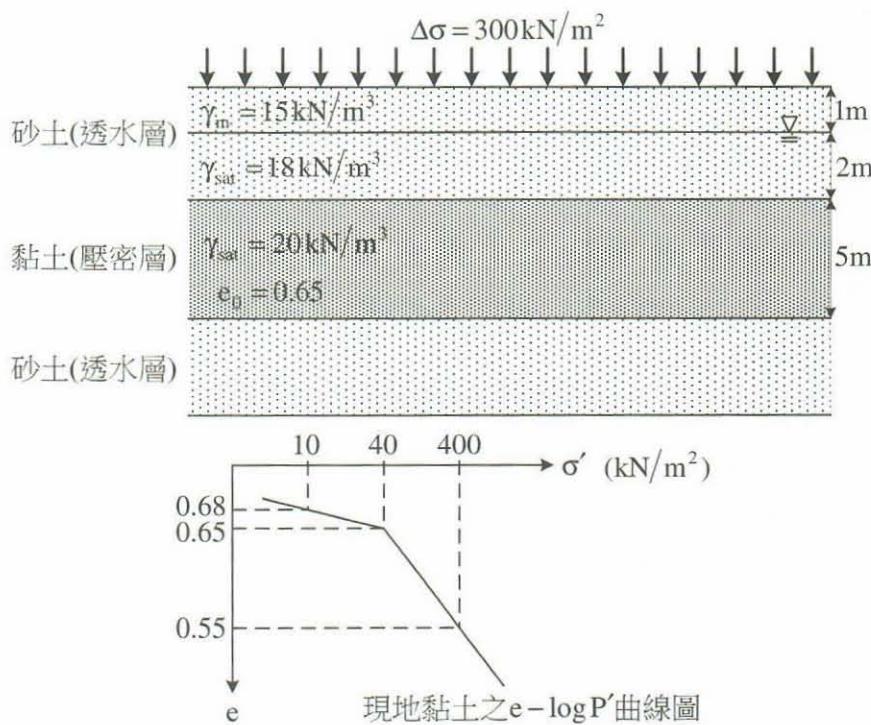
題目黏土壓密係數太大了，命題者沒大地基本數據感覺，又把單位重數據搞成矛盾，你花一年準備考試，他花不到一個晚上準備考題，就這樣一年賠給一個晚上，你甘心嗎？

例 6-7.3 壓密中黏土、求真實時間 t

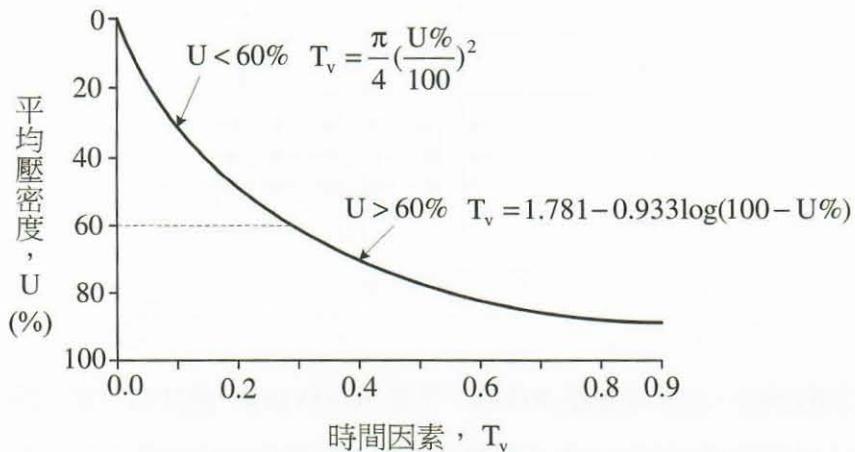
請依序回答下列土壤壓密問題：

<修改100年台科大土力25%>

- (1) 下圖為一黏土層受一結構載重(總應力增加) $\Delta\sigma$ 的示意圖。黏土壓密能雙方向朝上下方砂土排水。現地的地下水位位於地表下方1 m。砂土層厚為3 m，砂土在地下水上方的單位重為 $\gamma_m = 15 \text{ kN/m}^3$ ，地下水下方的單位重為 $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$ 。黏土層厚為 $H=5 \text{ m}$ ，初始的孔隙比 $e_0 = 0.65$ ，黏土單位重為 $\gamma_{sat} = 20 \text{ kN/m}^3$ 。土壤應力因結構載重之增加量為 $\Delta\sigma = 300 \text{ kN/m}^2$ 。在實驗室的壓密試驗下所得到的 $e - \log P'$ 曲線圖如下圖所示。預估黏土的平均沉陷量。 (10 %)



- (2) 一維壓密試驗的結果所獲得壓密係數為 $c_v = 5 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$ ，利用下列所提供的關係式與關係圖，計算到達平均壓密度 $U=50\%$ 時，所需的時間 t 以天為單位表示。 (10 %)



(3) 請建議一種大地工程相關工法用來加速壓密速率、縮短現地黏土壓密排水所需的時間。
(5 %)



(1)由 $e-\log P'$ 曲線判讀，此黏土的預壓密應力 $\sigma'_c = 40$ kPa $(e_0 = 0.65)$

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_v = 1 \times 15 + 2(18 - 9.81) + 2.5(20 - 9.81) = 56.855 \text{ kPa} > 40 \text{ kPa} = \sigma'_c$$

故為壓密中土壤

$$\text{壓縮指數 } C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} = \frac{0.65 - 0.55}{\log 400 - \log 40} = \frac{0.1}{\log 10} = 0.1$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} = \frac{0.1 \times 500}{1 + 0.65} \log \frac{56.855 + 300}{40} = 28.8 \text{ cm} \dots \quad \textcircled{1}$$

$$(2) \text{時間因素 } T_v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{50}{100} \right)^2 = 0.196 \quad (\text{用 } 0.197 \text{ 亦可})$$

$$\text{按 } T_v H_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.196 \times 250^2 = 5 \times 10^{-7} t$$

$$\text{解出 } t = 2.45 \times 10^{10} \text{ sec} = \underline{283564.8 \text{ 天}}$$

(3)可用砂樁排水工法，如下圖。在黏土層內設置排水砂樁，黏土層的超額孔隙水壓可就近向左右排入砂樁，縮短排水路徑，加速壓密沉陷速率，使得有效應力加速提升，黏土層的抗剪強度就會提升。

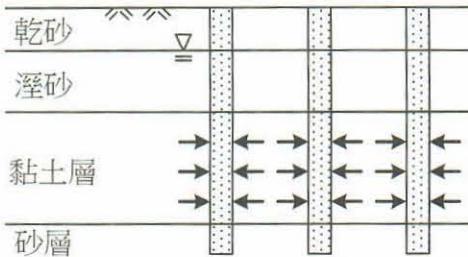


圖 排水砂樁

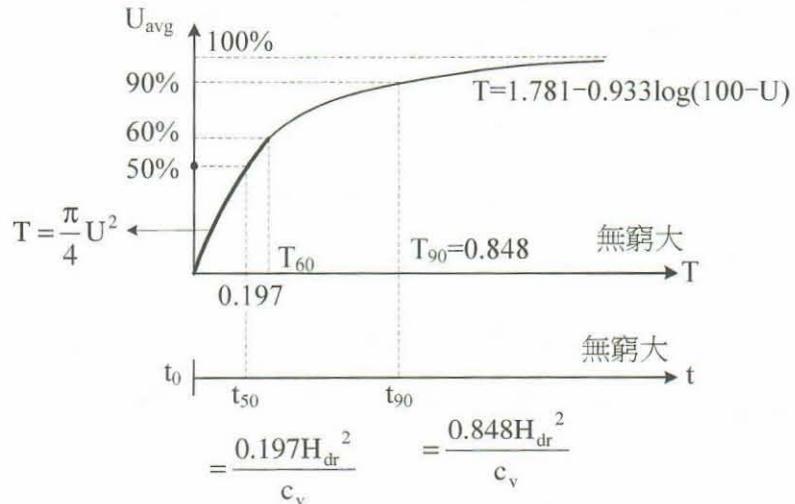
討論

注意計算沉陷量時，應力起點是 40 kPa，不是 56.855 kPa，請問為什麼？請先思考為何預壓密應力竟然小於現地垂直有效應力？預壓密應力不是應該大於或等於於現地垂直有效應力嗎？如果想不通，就是不知道什麼是「壓密中土壤」。地表如果不加 $\Delta\sigma = 300 \text{ kN/m}^2$ ，請問現場會不會產生壓密沉陷？會。因為表土 1 m 厚溼砂的重量，尚未使得黏土層完成壓密沉陷。

$$\text{加載前, 黏土中點 } \text{OCR} = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = 40/56.855 = 0.7. \quad C_r = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'_v} = \frac{0.68 - 0.65}{\log(40/10)} = 0.05.$$

黏土層中點的孔隙比和有效應力呈現「一對一關係」，在同一個時間點， $e_0=0.65$ 對應的應力是 40 kPa，不是 56.855 kPa，勿代錯。試驗曲線顯示孔隙比 0.65 時，有效應力是 40 kPa，而 σ'_v 竟是 56.855 kPa，顯見目前是壓密中。黏土層中點的有效應力到達 56.855 kPa 時，中點孔隙比會比 0.65 更小。

整層平均壓密度 U_{avg} 和時間因素 T 的關係如下圖， T 和 t 的關係也如下圖， $T_{60} \approx 0.283$ 。



例 6-7.4 求 U_z 、 U_{avg} 與 t

如圖1(a)所示有一厚10 m之正常壓密黏土層位於不透水岩盤上，地下水位位於地表，因工程需要，於地表填單位重為20 kN/m³之礫石層5 m高，進行預載荷重（preloading）壓密沉陷，已知黏土層之最初孔隙比 e_0 為0.80，比重 G_s 為2.70，液性限度（LL）為45，壓密係數 c_v 為3 mm²/sec，試求：

<修改99年高考二級每小題5分，共25分>

- (一) 圖中C點欲達75%壓密度，需時間若干天？此時整層平均壓密度 $U_{avg} = ?$
- (二) 此時，B點之壓密度為若干？
- (三) 此時，A, B, C三點之孔隙水壓力各為若干kPa？此時，黏土層的平均水力坡降約為何？
- (四) 需歷經多少時間，此黏土層可完全壓密完成？
- (五) 預估黏土層之地表極限（ultimate）壓密沉陷量為若干m？（提示：計算參數可由經驗公式估算）

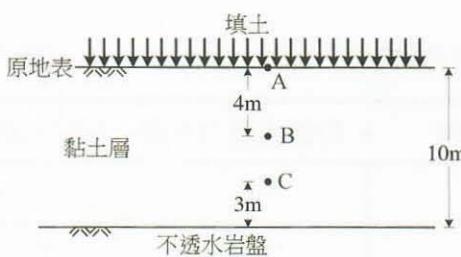


圖1(a)

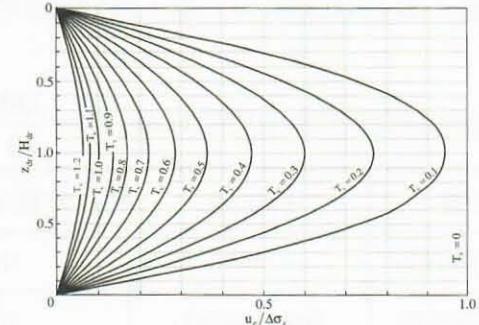


圖1(b)



地表均佈載重 $q = 20 \times 5 = 100$ kPa

(1) 黏土層下方為不透水岩盤，故應查圖 1(b)之上半部。

$$C\text{ 點之深度因數 } Z = \frac{Z_{dr}}{H_{dr}} = \frac{10 - 3}{10} = 0.7 \quad , \quad U_z = 75\%$$

查圖得 $T_v = 0.6 > T_{60} = 0.283$

$$T_v H_{dr}^2 = c_v t \quad \Rightarrow \quad 0.6 \times 10000^2 = 3 \times t \quad \Rightarrow \quad t = 20 \times 10^6 \text{ sec} = 231.48 \text{ days}$$

$$T = 1.781 - 0.933 \log(100 - U_{avg}) = 0.6 \quad \text{解出 } U_{avg} = 81.56\% > 60\% \quad \text{必 O.K.}$$

$$(2) B\text{ 點之 } \frac{Z_{dr}}{H_{dr}} = \frac{4}{10} = 0.4$$

循 $T_v = 0.6$ 查圖 1(b)，得 $U_z = 0.835 = \underline{\underline{83.5\%}}$

(3) A 點位在地表面， $U_z = 100\%$ $\Rightarrow u_e = 0 \text{ kPa}$

$$u_w = u_{ss} + u_e = 0 + 0 = \underline{\underline{0 \text{ kPa}}}$$

B 點 $U_z = 83.5\%$

$$u_w = u_{ss} + u_e = 4 \times 9.81 + (1 - 0.835) \times (20 \times 5) = \underline{\underline{55.74 \text{ kPa}}}$$

C 點 $U_z = 75\%$

$$u_w = u_{ss} + u_e = 7 \times 9.81 + (1 - 0.75) \times (100) = \underline{\underline{93.67 \text{ kPa}}}$$

循 $T_v = 0.6$ 查圖 1(b)，得岩盤處 $U_z = 0.72$

故岩盤處尚殘存超額孔隙水壓 $u_e = 100(1 - 0.72) = 28 \text{ kPa}$

地面處已經沒有超額孔隙水壓，故岩盤到地面之間的總水差距 $\Delta h_t = \frac{28}{9.81} = 2.85 \text{ m}$

岩盤到地面的平均水力坡降 $i = \Delta h_t / L = \frac{2.85}{10} = \underline{\underline{0.285}}$ (此答案即可)

位置	總水頭	=	位置水頭	+ 靜態水壓力水頭 + 超額水壓力水頭
黏土層頂部	10		10	0
黏土層底部	$10 + (28/9.81)$		0	28/9.81

(4) 理論上，黏土層要經歷無窮久的時間，才可完全壓密。

工程上，若視 $U = 99.9\%$ 為完全壓密，則 $T_v = 1.781 - 0.933 \log(100 - 99.9) = 2.714$

按 $T_v H_{dr}^2 = c_v t$

$$\Rightarrow t = \frac{2.714(10000)^2}{3} \text{ sec} = 9.0467 \times 10^7 \text{ sec} = \underline{\underline{1047.07 \text{ days}}}$$

$$(5) \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.7 - 1}{1.8} \times 9.81 = 9.265 \text{ kN/m}^3$$

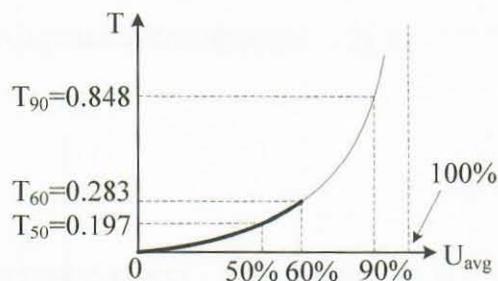
黏土層中點 $\sigma'_o = 5 \times \gamma' = 5 \times 9.265 = 46.325 \text{ kPa}$

$$C_c = 0.009(LL - 10) = 0.009(45 - 10) = 0.315$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_o} \log \frac{\sigma'_o + q}{\sigma'_o} = \frac{0.315 \times 1000}{1.8} \log \frac{146.325}{46.325} = 87.4 \text{ cm} = \underline{\underline{0.874 \text{ m}}}$$

討論

1. $c_v=3 \text{ mm}^2/\text{sec}=0.03 \text{ cm}^2/\text{sec}$, 此「黏土」其實排水相當快，數據有問題，數據應再慢 100 倍。命題者也是人，不是神。
2. 啤酒肚內裝的是超額孔隙水壓。
3. 大寫 Z 代表深度因數，無因次；小寫 z 代表真實深度。
4. 就像對全班進行土壤力學考試，有人分數高有人分數低，U 是「全班平均分數」， U_z 是「某一位特定學生的分數」，U 可能大於 U_z ，也可能小於 U_z 。
5. 也可以用蓋房子比喻， U_{avg} 是「工程總進度」， U_z 是某單一工項之進度 (eg：模板工程進度或水電工程進度)。在同一個時間點(如開工後 3 個月)， U_{avg} 和 U_z 並不會相等，可能模板工程進度(%數)比工程總進度快，但水電工程進度(%數)比工程總進度慢。
6. 題目給予 U_{avg} ，求 U_z ；或題目給予 U_z ，求 U_{avg} ，都是靠時間因素 T 幫忙。
7. 加載後 231.48 天，沉陷量 = $0.8156 \times 0.874 \text{ m} = 0.71 \text{ m}$ ，黏土層剩餘厚度 = $10 - 0.71 = 9.29 \text{ m}$ 。黏土層平均水力坡降 = $\frac{28/9.81}{9.29} = 0.307$ ，這答案較準些，類似取變形後分離體分析。
8. $T_{60} = 0.283$ ，若記這一條，求 U_{avg} 時就不用「猜公式」。 T_{60} 像平衡鋼筋量 A_{sb} 。



§6-8 二次壓縮

按照 Terzaghi 的說法，超額孔隙水壓消散，造成有效應力增加以及孔隙比減少，這樣引起的變形，就是壓密沉陷量。當有效應力穩定後，理當不再沉陷，可是實際上觀察卻發現，當超額孔隙水壓低到儀器測不出來之後，土體卻以很緩慢的速率繼續壓縮，此時有效應力維持常數。有效應力維持不變，然而土體卻持續發生體積改變，這種變形稱為土體的二次壓縮(Secondary Compression)或二次壓密(Secondary Consolidation)。從土壤受載重開始，主要壓密和二次壓縮就一起發生，人們很難界定超額孔隙水壓變成零的時間點。

二次壓縮也就是土壤的潛變(Creep)——應力不變，應變卻隨時間逐漸增加的現象。考場裏，另外一種會潛變的材料就是鋼筋混凝土，詳《解說鋼筋混凝土》、《鋼筋混凝土學了沒》。

二次壓縮發生的主因是黏土顆粒之間結合鍵的壓縮、結構的調整，使顆粒更加緊密。當其他條件相同時，正常壓密黏土的二次壓縮量比過壓密黏土大。對於極高塑性的黏土與有機黏土，二次壓縮量甚至會超過壓密沉陷量。

為了計算土壤的二次壓縮量，抄襲材料力學的觀念，我們一樣要找出類似彈性係數 E 或壓縮指數 C_c 之類的參數。可是 E 或 C_c 都必須依賴應力的變化才能求出，現在應力已經維持常數不變化(記得潛變)，怎麼辦？山不轉路轉，時間不是在流逝嗎？就拿時間當橫軸吧！

參考圖 6-26，以 log 壓縮橫軸刻度，孔隙比 e 為縱軸，繪出土壤孔隙比隨時間變化的曲線。把曲線的兩條直線段延伸，交點所對應的時間 t_p ，可視為超額孔隙水壓消散為零的時刻，由於這是作圖法，每人的估計會不同。定義二次壓縮指數(Secondary Compression Index) C_a

$$C_a = \left| \frac{\Delta e}{\Delta \log t} \right| = \frac{e_p - e_s}{\log t_s - \log t_p} \quad [6.33]$$

C_a 沒有單位，其值不受英制、公制轉換影響，它也是作圖法得到。

若欲計算在時間 t 已經產生之二次壓縮量，公式為

$$\Delta H_s = \frac{C_a}{1 + e_0} H_0 \log \frac{t}{t_p} = \frac{C_a}{1 + e_p} H_p \log \frac{t}{t_p} \quad [6.34]$$

其中 e_0 是初始孔隙比， H_0 是黏土層初始厚度，而時間 t ，當然必須大於 t_p 。使用公式時，分母的孔隙比 e 和分子的厚度 H ，必須發生在同一個時間點。

H_p 是二次壓縮開始時的黏土層厚度， e_p 是二次壓縮開始時的孔隙比。

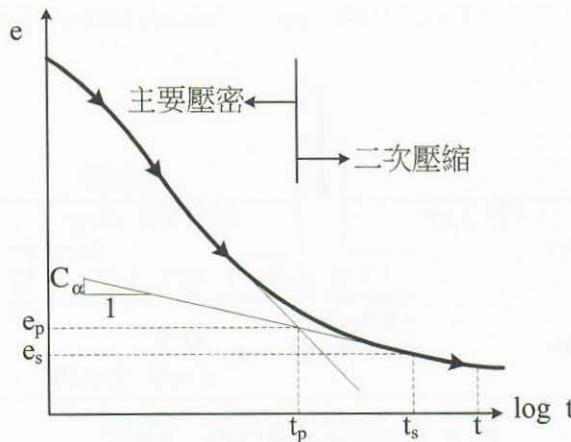


圖 6-26

計算時為了方便，我們有以下的假定：

- (1) C_a 與時間長短無關。
- (2) C_a 與土壤厚度無關。
- (3) C_a 與壓密中的載重增量比(LIR)無關。
- (4) 對固定的土壤， C_a/C_c 的值大約維持常數。

表 6-5

C_a 值	< 0.002	0.002 ~ 0.004	0.004 ~ 0.008	0.008 ~ 0.016	0.016 ~ 0.032
評價	非常低	低	中等	高	非常高

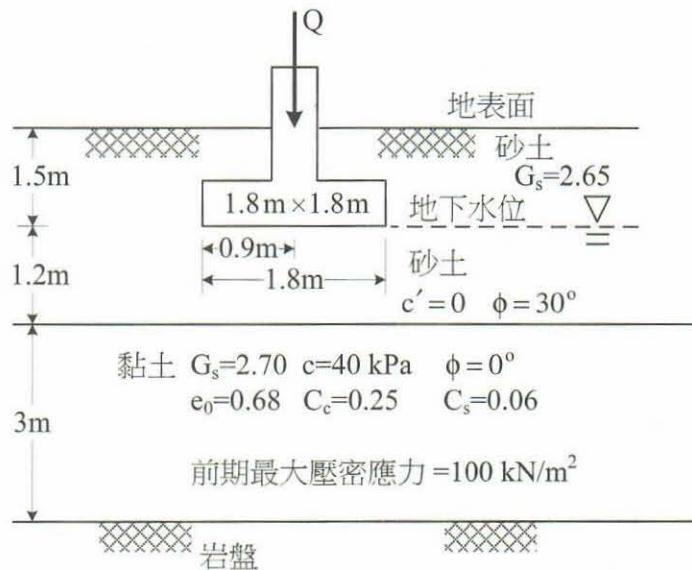
表 6-6

土壤種類	OCR>2 的過壓密黏土	正常壓密黏土	高塑性土壤，有機土
C_a 值	< 0.001	0.005 ~ 0.02	≥ 0.03

土壤力學學到這裡，有多少東西是人為作圖規定，那土壤力學是發明還是發現？

例 6-8.1 二次壓縮

如下圖所示之 $1.8\text{ m} \times 1.8\text{ m}$ 正方基礎承受 Q 為 1 MN 之鉛垂向之正方柱載重，假設砂土層之孔隙比 e 為 0.65 ，比重 G_s 為 2.65 ，地下水位以上砂土之飽和度為 50% ；黏土層之比重 G_s 為 2.70 ，壓縮性指數 C_c 為 0.25 ，回脹性指數 C_s 為 0.06 ，最初孔隙比 e_0 為 0.68 。其他參數如圖中所標示。



(一)假設壓力以 $2:1$ ($V:H$) 分布方式向下傳遞，試計算基礎中心下方黏土層之平均新增鉛垂向應力為若干(kPa)？(二)試計算黏土層之壓密沉陷量為若干(mm)？(三)若 $C_a=C_c/10$ ，且估計主要壓密約 20 年完成，試計算 50 年到時之總沉陷量為若干(mm)？

<修改100年結構技師25分>



(一)計算地下水位以上砂土單位重 γ_m

$$\gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{2.65 + 0.5 \times 0.65}{1+0.65} \times 9.81 = 17.688 \text{ kN/m}^3$$

地下水位以下砂土浸水單位重 γ'

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1+e} \gamma_w = \frac{2.65 - 1}{1+0.65} \times 9.81 = 9.81 \text{ kN/m}^3$$

黏土浸水單位重 γ'

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.7 - 1}{1 + 0.68} \times 9.81 = 9.927 \text{ kN/m}^3$$

黏土層中點有效應力 σ'_0

$$\sigma'_0 = 1.5 \times 17.688 + 1.2 \times 9.81 + 1.5 \times 9.927 = 53.19 \text{ kPa} < \sigma'_c = 100 \text{ kPa} \quad (\text{受 } Q \text{ 前為 OC})$$

上部結構載重 $Q = 1 \text{ MN} = 1000 \text{ kN}$ (箭頭近地表， Q 為柱荷重)

$$\text{黏土層中點應力增量 } \Delta\sigma' = \frac{1000}{(1.8 + 1.2 + 1.5)^2} = \underline{\underline{49.383 \text{ kPa}}}$$

$$\begin{aligned} \text{(二) } \Delta H &= \frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} \\ &= \frac{0.06 \times 300}{1.68} \log \frac{100}{53.19} + \frac{0.25 \times 300}{1.68} \log \frac{53.19 + 49.383}{100} \\ &= 2.94 + 0.49 = 3.43 \text{ cm} = \underline{\underline{34.3 \text{ mm}}} \end{aligned}$$

$$\text{(三) } C_a = C_c / 10 = 0.25 / 10 = 0.025$$

$$\text{二次壓縮量 } \Delta H_s = \frac{C_a H}{1 + e_0} \log \frac{t_p + \Delta t}{t_p} = \frac{0.025 \times 300}{1.68} \log \frac{50}{20} = 1.78 \text{ cm} = 17.8 \text{ mm}$$

$$50 \text{ 年到時之總沉陷量} = 34.3 + 17.8 = \underline{\underline{52.1 \text{ mm}}}$$

討論

$Q=1\text{MN}=1000\text{kN}=102\text{tf}$, 請問 Q 是從 $1.2D+1.6L$ 算出來的嗎？錯，正確是 $Q=102\text{tf}=D+L$ ，因為基礎工程使用工作應力法設計基腳版面積與計算壓密沉陷量。RC 設計鋼筋量、基腳版厚度才使用強度設計法，才用 $P_u=1.2D+1.6L$ ，意者請參考筆者《解說鋼筋混凝土》與《鋼筋混凝土學了沒》(RC 題型精解)。

$$53.19 + 49.383 = 102.573 \text{ kPa} > \sigma'_c, \text{ 壓密完成變 NC}.$$

本題黏土層厚度若改為 100 公尺厚，則公式 $\Delta H = \frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c}$ 裡的 H 要代幾公尺？答案不是 100 公尺。當黏土層某點的應力增量，比該點原有效應力的 10% 還小時，就可不計該點的壓縮量。當圓形或方形基腳座落於黏土表面，依壓力球根觀念，大約在基底下 2B 處，應力增量已經降至超載的 10% 左右。本題基腳寬 1.8 m，考慮黏土層 3.6 m 厚度的壓縮量應已足夠。

§6-9 短期的彈性沉陷量

土壤短期沉陷量很少考。即時沉陷量常常以彈性理論估計，計算即時沉陷量乃假定土壤含水量不變。由於彈性沉陷量多寡除了涉及到載重大小之外，還和基礎、土壤兩者的勁度比例有關，不同的勁度比，應力傳播的大小也不一樣。講到土壤勁度，砂土的彈性係數隨深度增加而增加，黏土的彈性係數，隨深度增加卻僅是緩慢增加。

即時沉陷的成因主要是土壤顆粒的形狀改變(Distortion, Change of Shape)，不是體積改變。卵礫石及砂土因排水快，其沉陷行為在施工階段幾乎發生完畢，意即其即時沉陷量幾乎就是總沉陷量。根據彈性理論，基礎作用在無限深的黏土土壤表面，彈性沉陷量為

$$\delta_i = q_0 BI_s \frac{1-v^2}{E_u} \quad [6.35]$$

其中 q_0 是基礎單位面積上的作用應力淨增量， B 是基礎寬度(或直徑)， v 是波松比(Poisson's Ratio)， E_u 是不排水彈性係數(下標 u 是 undrain，不排水)， I_s 是無因次的影響係數， I_s 包含基礎勁度、基礎埋置深度、基礎形狀、平面尺寸比例等影響。

不排水彈性係數 E_u 受應力大小、孔隙比、應力歷史等影響。既受應力大小影響，所以就是受深度影響。如果飽和黏土層厚度不大，則工程上可視為該厚度的不排水彈性係數 E_u 維持常數不變，但是對於砂土與不飽和黏土，其彈性係數隨深度變化明顯。取樣時對試體的擾動，會降低不排水彈性係數。各種土壤的彈性係數、波松比如下。

表 6-7

土壤種類	彈性係數(kPa)	波松比
軟弱黏土	500 ~ 5000	0.15 ~ 0.25
中等到堅硬黏土	4000 ~ 10,000	0.2 ~ 0.45
堅硬到極硬黏土	7000 ~ 20,000	0.2 ~ 0.5
疏鬆砂	9000 ~ 25,000	0.2 ~ 0.4
緊密砂	45,000 ~ 80,000	0.3 ~ 0.45

黏土的波松比和其含水量有關，對於飽和黏土，工程上認為其波松比 $v = 0.5$ ，還有什麼東

西的波松比接近 0.5？有，就是流體力學裡被視為無法壓縮的流體，而橡膠的波松比接近 0.48。

從應力算沉陷量，思維是 $q \rightarrow \Delta\sigma \rightarrow \Delta\varepsilon \rightarrow \delta$ 。中文說明是：外載重 F 造成接觸面應力增量為 q ，依據彈性力學理論， q 往下傳播到土體，土體內不同深度不同點，得到不同的應力增量 $\Delta\sigma$ 。次依據土壤的組成律，從 $\Delta\sigma$ 算出不同土壤點的應變增量 $\Delta\varepsilon$ 。最後沿著深度積分，把應變增量 $\Delta\varepsilon$ 對微小深度 dz 積分，就可算出有興趣的土層厚度 H 之壓縮量 δ ，這一段靠的是微積分的功力，實際也不好積。若 H 有數百公尺之厚，工程上不會去算數百公尺土層的壓縮量，當土壤元素應力增量小於自己原始有效應力的 10%，工程上就不再計算其壓縮量，不實際了。

算砂土的即時沉陷量，工程上常用 Schmertmann 在 1978 年提出的應變影響因子(Strain Influence Factor) I_z 方法，這是一種擬彈性法，因考題極少，故不選錄。

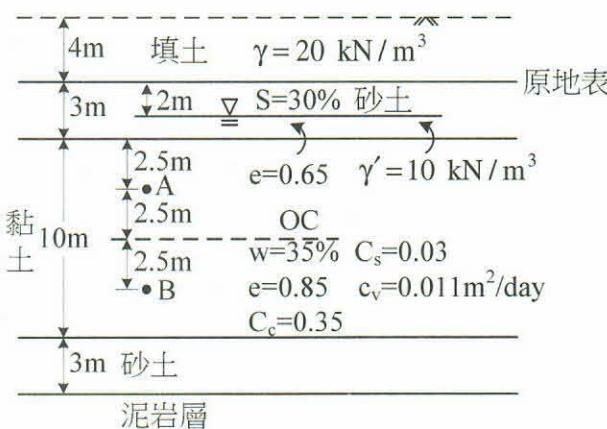
精準計算沉陷量，比精準計算應力增量還難。Terzaghi 就是因為提出壓密理論，合理地計算黏土沉陷量，才被尊稱為土壤力學之父。而那些能算應力的人，如 Boussinesq、Westergaard，後人不稱他們為土壤力學之父。

§6-10 歷年考題精選

練 1 分層計算壓密量

某工地經調查發現，其地層具有一 10 m 厚之過壓密黏土層，此黏土層上方覆有一 3 m 厚之砂土層，而黏土層下方亦有一 3 m 厚之砂土層，再下層則為很深之泥岩層，地下水位位於地表下 2 m。地下水位以上砂土層之飽和度為 30%，砂土層之浸水單位重 γ' 為 10 kN/m^3 ，孔隙比 e 為 0.65。假設此過壓密黏土層之前期最大壓密應力較現存應力大 10 kPa ，黏土層之含水量 w 為 35%，孔隙比 e 為 0.85，經壓密試驗求得其壓縮性指數 C_c 為 0.35，回脹性指數 C_s 為 0.03，壓密係數 c_v 為 $0.011 \text{ m}^2/\text{天}$ 。此工地欲進行以大範圍填土之預載重試驗(preloading test)，填土厚 4 m，單位重為 20 kN/m^3 ，試求：分兩層計算此黏土層之最終壓密沉陷量(ultimate settlement)為若干 m？(13 分) 欲達最終壓密沉陷量之 50%，90%，100%，各需時若干天？

<修改100年鐵路特考>



$$(1) \text{ 砂土浸水單位重 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w$$

$$10 = \frac{G_s - 1}{1 + 0.65} \times 9.81$$

解出 $G_s = 2.682$

$$\text{砂土溼單位重 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.682 + 0.3 \times 0.65}{1 + 0.65} \times 9.81 = 17.11 \text{ kN/m}^3$$

黏土分上下兩層，每層厚度 5m，上層中點為 A，下層中點為 B

$$\text{黏土按 } Se = wG_s$$

$$1 \times 0.85 = 0.35 G_s$$

解出 $G_s = 2.43$

$$\text{黏土 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.43 - 1}{1 + 0.85} \times 9.81 = 7.58 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{A 點 } \sigma'_0 = 2 \times 17.11 + 1 \times 10 + 2.5 \times 7.58 = 63.17 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_c = 63.17 + 10 = 73.17 \text{ kPa}$$

廣大面積填土造成應力增量 $\Delta\sigma' = 4 \times 20 = 80 \text{ kPa}$

$$\begin{aligned} \Delta H_c &= \frac{C_s H}{1 + e} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} = \frac{0.03 \times 500}{1 + 0.85} \log \frac{73.17}{63.17} + \frac{0.35 \times 500}{1 + 0.85} \log \frac{63.17 + 80}{73.17} \\ &= 0.517 + 27.576 = 28.093 \text{ cm} \end{aligned} \quad (\text{上半層黏土})$$

$$\text{B 點 } \sigma'_0 = 2 \times 17.11 + 1 \times 10 + 7.5 \times 7.58 = 101.07 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_c = 101.07 + 10 = 111.07 \text{ kPa}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_c &= \frac{C_s H}{1 + e} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} = \frac{0.03 \times 500}{1 + 0.85} \log \frac{111.07}{101.07} + \frac{0.35 \times 500}{1 + 0.85} \log \frac{101.07 + 80}{111.07} \\ &= 0.332 + 20.078 = 20.41 \text{ cm} \end{aligned} \quad (\text{下半層黏土})$$

故總壓密沉陷量 $\Delta H_c = 28.093 + 20.41 = 48.5 \text{ cm} = \underline{0.485 \text{ m}}$

(2) 達 U_{50}

$$TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.197 \times 5^2 = 0.011t \Rightarrow t = \underline{447.70 \text{ 天}}$$

達 U_{90}

$$TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.848 \times 5^2 = 0.011t \Rightarrow t = \underline{1927.3 \text{ 天}}$$

達 U_{100} ，理論上需無窮久

討論

原題目未附土層剖面，解題要自己畫出來，不然很容易錯。請讀者自行以「一層黏土」計算壓密沉陷量，看看答案會不會變。(會變小)

建議考生平常要運動，筆者高中同學備考期不運動，在以前普考加高考三級總共連考 5 天的年代，終於最後一天沒有體力而看錯符號，把 C_c 和 C_s 互相看錯，造成落榜，隔年才上榜。

其次，考前一天請早早就寢，為明日養足精神。撐到凌晨兩三點的話，你的對手最高興。

練 2 水壓力分布圖

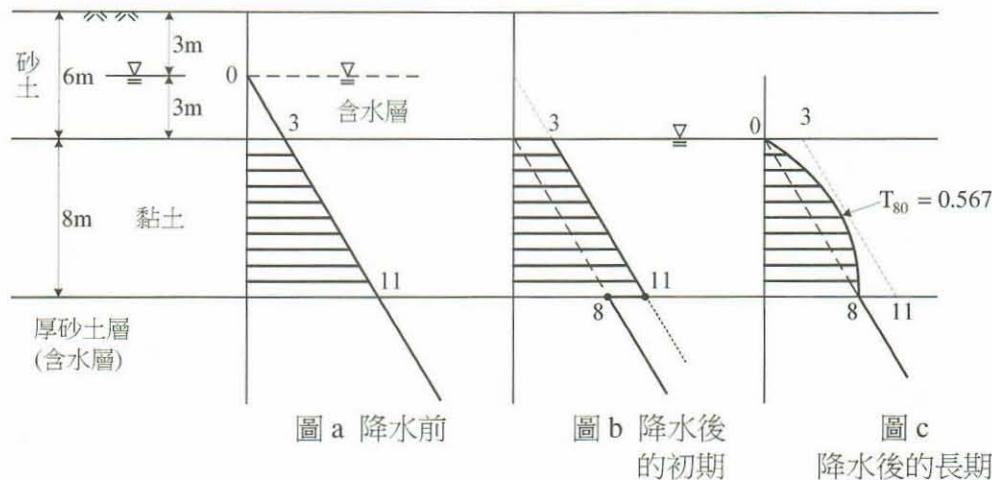
有一厚 8 m 之黏土層，黏土層上方為厚 6 m 之砂土層，其地下水位面位於地表以下 3 m，黏土層下方為厚砂土層，假設初期地下水壓呈靜水壓狀態。如將該地層之含水層內之水頭均一降低至地表以下 6 m，而黏土層之壓密係數 $c_v = 0.5 \text{ m}^2/\text{yr}$ ，

(一) 繪出黏土層尚未降水前之孔隙水壓力分布圖。

(二) 繪出黏土層於降水後瞬間之孔隙水壓力分布圖。

(三) 如欲達排除 80% 之剩餘孔隙水壓力 (excess pore water pressure) 則需多少時間 ($T_{80}=0.567$)，並繪出此時黏土層之孔隙水壓力分布示意圖。 <98 高考二級 25 分>





本題解假設「含水層」是指黏土上下的砂層。

圖 a 之陰影區即為第(一)小題答案，unit: tf/m^2 。

圖 b 之陰影區即為第(二)小題答案，unit: tf/m^2 。

$$\text{按 } TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.567 \times 4^2 = 0.5t \Rightarrow t = 18.144 \text{ years}$$

降水後的長期，黏土層孔隙水壓力分布如圖 c，unit: tf/m^2 。注意黏土層裏的水壓力分布是曲線，任何砂層內均不會有超額孔隙水壓。

討論

1. 第(三)小題的水壓力分布圖只能以曲線畫個大概，注意本黏土層是雙向排水，降水的初期，黏土層頂及底，即已不存在超額孔隙水壓，這是雙向排水的邊界條件，因為邊界處排水最快。
2. 題目說「…含水層內之水頭均一降低至地表以下 6 m」，題解視為「靜態水位面統一降低至地表以下 6 m」，這樣 $T_{80}=0.567$ 。這不是穩態問題，有水壓力消散，就不是穩態問題。
3. 若把題目解讀為只有下層砂土降水，則黏土層內產生向下滲流，對於簡單題目，滲流水壓 u_s 下流為負。降水後，黏土層上部的砂土會持續對黏土層補水，水通過黏土層流到下層砂土，而超額孔隙水壓，短期是三角形分布，上尖下寬，但這樣一來 $T_{80} \neq 0.567$ 。

4. 時間因素 $T_{\min}=0$, $T_{\max}=\infty$ 。題目可不給 T_{80} , 因為考二級的你一定有背公式：

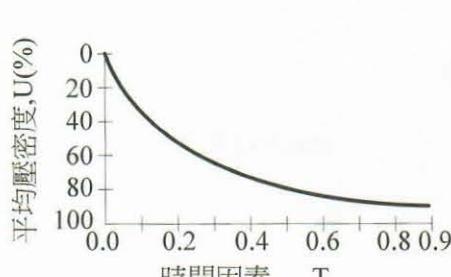
$$T_{80} = 1.781 - 0.933 \log(100 - 80) = 0.567.$$

練 3 整層平均壓密度

有一10 m厚之正常壓密黏土層受一荷重應力增量200 kPa作用，此黏土位於一厚度4 m的砂土下方，黏土層下方則為礫石層，地下水位位於地表。砂土層之土壤飽和單位重(γ_{sat})為20 kN/m³，黏土層之土壤飽和單位重(γ_{sat})為18 kN/m³。由實驗室所得此黏土層2.2 cm厚度試體之雙向排水壓密實驗之 t_{50} 為5 min，土壤之初始孔隙比(e)是0.8，土壤壓縮指數(C_c)為0.3，二次壓縮係數(C_a)為0.01，

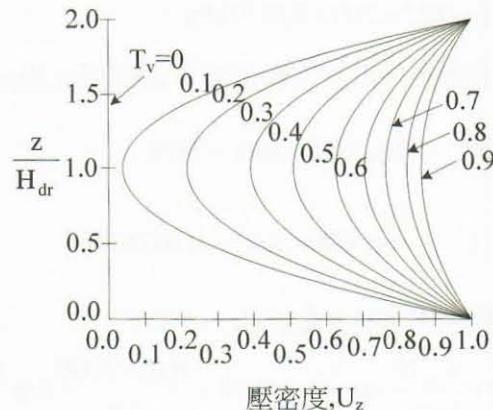
- (1) 試求該黏土層的主要壓密沉陷量是多少？
- (2) 該黏土層中點在現地荷重增量作用2年後的有效應力是多少？
- (3) 此時整個黏土層的平均壓密度(U)是多少？
- (4) 該黏土完成90%主要壓密所須的時間是多少？
- (5) 假設該黏土層完成主要壓密的時間是10年，試問自從受荷重達100年以後地表的總沉陷量是多少？
- (6) 後來以CPT試驗確認黏土層的正中央藏有薄水平排水砂層，請問黏土完成90%主要壓密所須的時間是多少？

<修改100土木技師25分>



[註] T_v : 時間因素, U : 平均壓密度

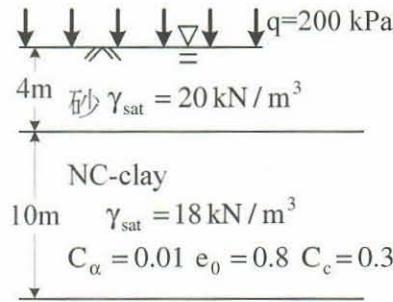
$$T_{50}=0.197, T_{90}=0.848$$



(1) 黏土層中點初始有效應力 σ'_0

$$\sigma'_0 = 4(20 - 9.81) + 5(18 - 9.81) = 81.71 \text{ kPa}$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.3 \times 1000}{1 + 0.8} \log \frac{81.71 + 200}{81.71} = 89.59 \text{ cm}$$



$$(2) \text{ 依據壓密試驗, } TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.197 \times \left(\frac{2.2}{2} \right)^2 = c_v \times 5$$

$$\text{解出 } c_v = 0.047674 \text{ cm}^2/\text{min}$$

考慮現地荷重兩年，按 $TH_{dr}^2 = c_v t$

$$\Rightarrow T \times 500^2 = 0.047674 \times (2 \times 365 \times 24 \times 60)$$

解出 $T = 0.2$

依 $T_v = 0.2$, $\frac{z}{H_{dr}} = 1.0$

查題目所附 U_z 圖，得黏土層中點 $U_z = 0.23$ ，即超額孔隙水壓消散 23%，黏土層中點有效應力 $\sigma'_v = 81.71 + 0.23 \times 200 = 127.71\text{kPa}$

(3) 依 $T_v=0.2$, 查題目所附平均壓密度 U 圖得 $U \approx 50.46\%$

$$\text{或依 } T_v = \frac{\pi}{4} U^2 \quad \text{解出 } U = 50.46\% < 60\% \quad \text{check O.K. !}$$

$$(4) \text{ 按 } TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.848 \times 500^2 = 0.047674t$$

$$\text{解出 } t = 4.4469 \times 10^6 \text{ min} = \underline{\underline{8.46 \text{ 年}}}$$

$$(5) \quad \delta_{\text{total}} = 89.59 + \frac{C_\alpha H}{1 + e_0} \log \frac{t_2}{t_1} = 89.59 + \frac{0.01 \times 1000}{1.8} \log \frac{100}{10} = \underline{\underline{95.15 \text{ cm}}}$$

$$(6) \text{ 按 } TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.848 \times 250^2 = 0.047674t$$

$$\text{解出 } t = 1.11172 \times 10^6 \text{ min} = 2.12 \text{ 年}$$

討論

若以 $T_v = 0.2 = 1.781 - 0.933\log(100-U)$ 試算，則 $U = 49.27\% < 60\%$ ，得知公式使用錯誤。

發現薄排水砂層，等於降低最長排水路徑，會加速壓密速率，但是對於黏土層最終壓密沉陷量幾乎沒影響。

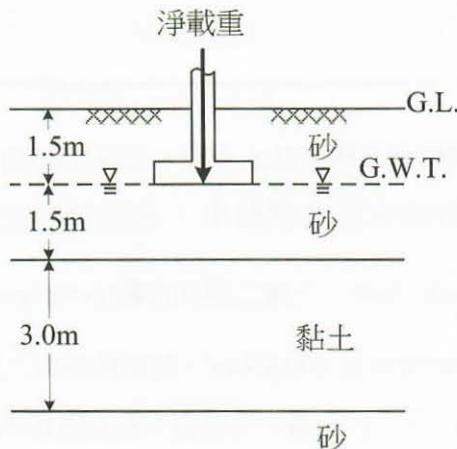
有上過筆者課的考生知道有 4 個押 T 韻的公式： $T = \frac{\pi}{4} U_{avg}^2$ 、 $T = 1.781 - 0.933\log(100-U_{avg})$ 、 $TH_{dr}^2 = c_v t$ 、 $T = 2A_m \tau t$ 。

練 4 壓密沉陷量

下圖中地下水位以上之砂土單位重為 16.1 kN/m^3 ，地下水位以下之飽和砂土單位重為 18.2 kN/m^3 。已知 3 m 厚黏土之飽和單位重為 19.0 kN/m^3 ，初始孔隙比為 0.70 ，壓縮指數 $C_c = 0.27$ ，膨脹指數 $C_s = 0.06$ ，預壓壓力為 100 kN/m^2 。若下圖 $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ 方型淺基礎承受 1000 kN 淨垂直載重。
<100年地特三等25分>

(一) 依據 2:1 應力傳遞近似法，試求在基礎下方黏土層頂部、中央、及底部之垂直應力增加量。

(二) 試求黏土層之壓密沉陷量。



$$(一) \text{黏土層頂部應力增量 } \Delta\sigma_1 = \frac{1000}{(2+1.5)^2} = \underline{\underline{81.633 \text{ kPa}}}$$

$$\text{黏土層中央應力增量 } \Delta\sigma_2 = \frac{1000}{(2+3)^2} = \underline{\underline{40 \text{ kPa}}}$$

$$\text{黏土層底部應力增量 } \Delta\sigma_3 = \frac{1000}{(2+4.5)^2} = \underline{\underline{23.669 \text{ kPa}}}$$

(二) 黏土層中點有效應力增量

$$\sigma'_0 = 1.5 \times 16.1 + 1.5 \times (18.2 - 9.81) + 1.5(19 - 9.81) = 50.52 \text{ kPa} < \sigma'_c = 100 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_0 + \Delta\sigma_2 = 90.52 \text{ kPa} < \sigma'_c$$

$$\Delta H_c = \frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma_2}{\sigma'_0} = \frac{0.06 \times 300}{1.7} \log \frac{90.52}{50.52} = \underline{\underline{2.68 \text{ cm}}}$$

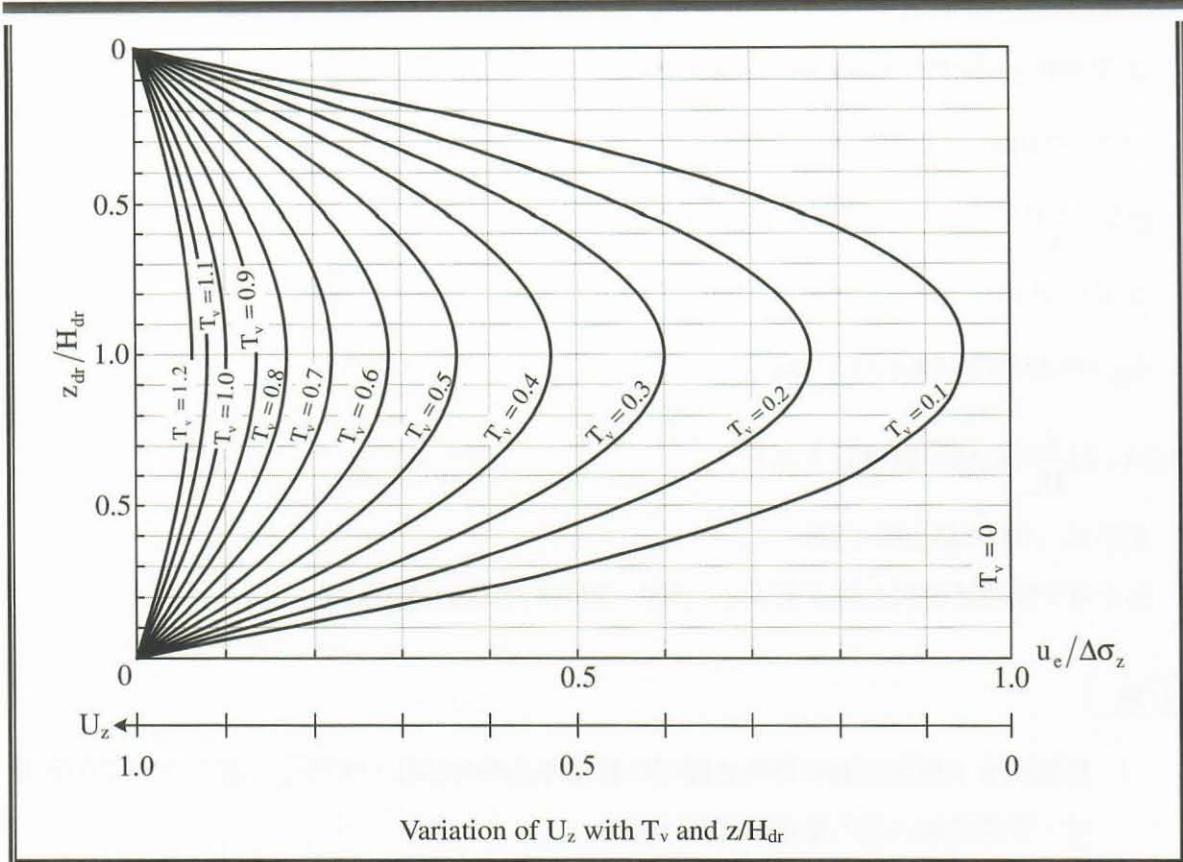
討論

雖然箭頭畫到基面，但題圖特別強調是「淨載重」，淨載重(net load)視為基底處荷重「增量」。題目淨載重即是淨增量，故不扣 $1.5 \times 16.1 = 24.15 \text{ kPa}$ 的應力。

練 5 求黏土內水壓力

有一取自基隆河廢河道之鑽探正常壓密黏土土樣，孔隙比(e)為 1.0，其厚度為 10 公尺，土層底部可以排水，從實驗室壓密實驗中，估計所得之壓密係數(Coefficient of consolidation, c_v)為 $1 \times 10^{-4} \text{ cm}^2 / \text{sec}$ ，土壤之壓縮指數(compression index, C_c)為 0.3。此土壤之現地應力由 200 kN/m^2 增加至 800 kN/m^2 ，請問所造成之壓密沉陷量為多少？請問欲達 45 公分之沉陷所須之時間？黏土層中央位置的超額孔隙水壓值是多少？8 年後所達之沉陷量是多少？黏土層中央位置的超額孔隙水壓值是多少？<102 台大大地組 20 分>

$$U = 0 \text{ to } 60\%, T_v = \frac{\pi}{4} \left(\frac{U\%}{100} \right)^2$$



Sol

$$(1) \Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.3 \times 1000}{1+1} \log \frac{800}{200} = 90.31 \text{ cm}$$

$$(2) U = \frac{45}{90.31} = 0.4983 < 60\%$$

$$T = \frac{\pi}{4} U^2 = \frac{\pi}{4} \times 0.4983^2 = 0.195$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t \quad (\text{雙向排水})$$

$$\Rightarrow 0.195 \times 500^2 = 1 \times 10^{-4} \times t$$

$$\text{解出 } t = 487,520,479 \text{ sec} = 15.46 \text{ years}$$

$$(3) \text{查 } U_z \text{ 對 } \frac{z_{dr}}{H_{dr}} \text{ 曲線，選擇 } T_v = 0.195$$

查得 $U_z \approx 0.225$ (黏土層中點)

$$\Delta u_e = (800 - 200)(1 - 0.225) = 465 \text{ kPa} = \text{黏土層中點殘餘超額孔隙水壓}$$

$$(4) \text{按 } TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$\Rightarrow T(500^2) = 1 \times 10^{-4} \times (8 \times 365 \times 24 \times 3600)$$

$$\Rightarrow T = 0.1009 < T_{60} = 0.283$$

$$\text{故 } T = \frac{\pi}{4} U^2 \quad \Rightarrow 0.1009 = \frac{\pi}{4} U^2$$

$$\Rightarrow U = 35.84\% < 60\%$$

必 O.K. !

$$\delta_{8年} = 0.3584(90.31) = \underline{\underline{32.37 \text{ cm}}}$$

(5)查 U_z 對 $\frac{Z_{dr}}{H_{dr}}$ 曲線，選擇 $T_v \doteq 0.1$

查得 $U_z \doteq 0.05$ (黏土層中點)

黏土層中點殘餘超額孔隙水壓 $\Delta u_e = (800 - 200)(1 - 0.05) = \underline{\underline{570 \text{ kPa}}}$

討論

1. 超額孔隙水壓消散圖的等時曲線可以看成外凸的啤酒肚，啤酒肚內裝的是超額孔隙水壓，等時曲線內裝的是超額孔隙水壓。
2. 出現等時曲線，通常要算 T_v ，確定是「哪一條」曲線。

練 6 求真實時間 t

有一工址，地表為砂土層，地表下10 m以下有一正常壓密的黏土層，厚8 m，其下為不透水層，今取樣在實驗室內進行雙向排水壓密實驗，試體厚為25.4 mm，在當地有效應力壓密完後再增加某荷重增量，完成主要壓密50%所需的時間是1天，試問在相同的應力增量下，在現地完成90%壓密所須的時間是多少？如欲加速現地壓密作用之完成，可以運用那些工法？

<100年台大25分>



(1) 試驗室內儀器的裝置與安排，試體是雙向排水

$$TH_{dr}^2 = c_v t \quad \Rightarrow 0.197 \left(\frac{2.54}{2}\right)^2 = c_v \times 1$$

解出 $c_v = 0.31774 \text{ cm}^2/\text{day}$

現場是單向排水

$$TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.848(800)^2 = 0.31774t$$

解出 $t = 1.7081 \times 10^6 \text{ days} = 4679.6 \text{ years} \dots \dots \dots \text{Ans.}$

(2) 欲加速現場壓密速率，工法相當多，例如：

- ① 預壓密工法：在現地結構物施工前，先進行填土或以其他較大呆載重壓迫土壤，讓黏土開始壓密，當黏土壓密沉陷到設計位置時，再移去填土、呆載重，這時黏土已經變得較緊密了。後續新建結構物，黏土層因結構物重量而引發的沉陷量會較小。
- ② 砂樁排水工法(或排水帶工法)：在現場施作垂直的排水砂樁(直徑 45~60 cm)，樁中心距越 2~6 m，或以垂直導桿打設排水帶(strip drains)，排水帶是高分子材料聚丙烯製成，黏土層內的水分即可往左右排入砂樁或排水帶內，縮短排水路徑，加速黏土壓密沉陷。
- ③ 真空預壓排水工法：在地表面先鋪細砂，細砂上再覆以不透水帆布，將帆布內的空氣抽取掉(形成真空)，空氣壓力即變成呆載重壓迫帆布，再往下壓迫土壤，激發超額孔隙水壓，若能佐以垂直排水帶縮短超額孔隙水壓排水路徑，則壓密速率更快。

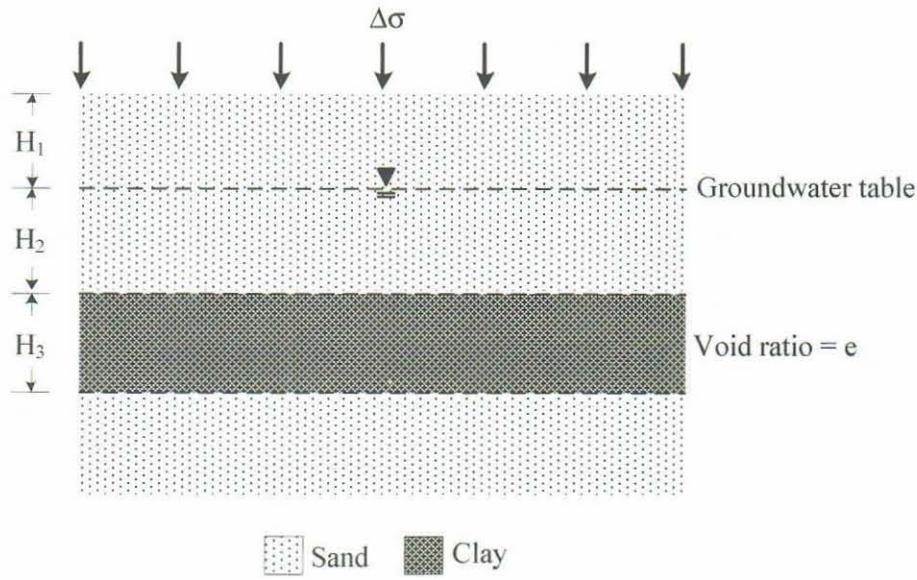
討論

真空預壓排水工法乃是利用大氣壓力協助，把水「擠」出來，但是大氣壓力有限(76 公分汞柱高)，所以擠壓應力有其上限(即 1 atm，約 10 tf/m^2 ，或者說相當於把單位重 2 tf/m^3 的砂疊 5 米高所造成之應力)，所以排水能力有其上限。

練 7 加速壓密工法

今欲對台北基隆河廢河道之軟弱黏土進行預壓密工法改善其性質，現地土壤之剖面如圖所示： $H_1 = 1 \text{ m}$ 、 $H_2 = 1 \text{ m}$ 、 $H_3 = 10 \text{ m}$ 、預壓密工法施加之應力 ($\Delta\sigma$) = 500 kN/m^2 。此砂土層之孔隙比(e) = 0.6， $G_s = 2.68$ ，黏土之孔隙比(e) = 1.2， $G_s = 2.70$ ，液限 (LL = 48)、塑限 (PL = 25)、 $C_c = 0.009(LL - 10)$ ， $c_v = 0.0004 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 。假設該黏土層為正常壓密黏土層，問此預壓密工法可達成之主要壓密沉陷量是多少？壓密完成後黏土層中之孔隙比值為何？完成壓密 90% 所須的時間為何？如果時間過長，現地有何加速壓密進行的工法。

<98 年台大 25%>

(1) 對於砂土層， $\gamma_s = \gamma_d(1+e)$

$$2.68 = \gamma_d (1+0.6)$$

$$\text{解出 } \gamma_d = 1.675 \text{ tf/m}^3 = 16.43175 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.68 - 1}{1 + 0.6} \times 9.81 = 10.3 \text{ kN/m}^3$$

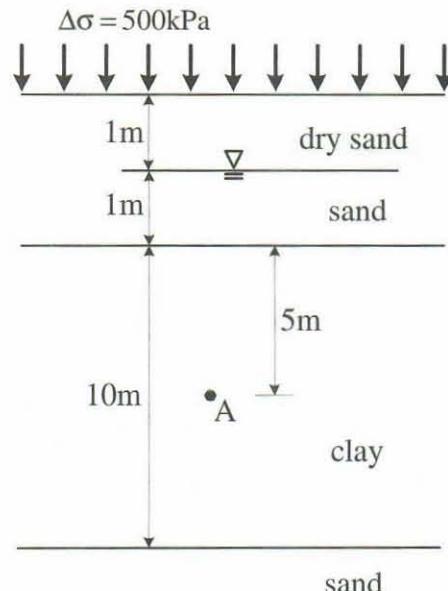
對正常壓密黏土層，

$$\text{壓縮指數 } C_c = 0.009(48-10) = 0.342$$

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.7 - 1}{1 + 1.2} \times 9.81 = 7.58 \text{ kN/m}^3$$

黏土層中點 A 之初始有效應力

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= 1 \times 16.43175 + 1 \times 10.3 + 5 \times 7.58 \\ &= 64.632 \text{ kPa} \end{aligned}$$



$$\text{主要壓密沉陷量 } \Delta H_c = \frac{C_v H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.342 \times 1000}{1+1.2} \log \frac{64.632 + 500}{64.632} = 146.33 \text{ cm}$$

$$(2) \text{ 鉛垂方向應變 } \varepsilon_v = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{\Delta e}{1+e_0} \quad \Rightarrow \frac{146.33}{1000} = \frac{\Delta e}{1+1.2}$$

解出 $\Delta e = 0.3219$

壓密完成後 $e' = e_0 - \Delta e = 0.8781$

$$(3) TH_{dr}^2 = c_v t \quad \Rightarrow 0.848 \times 500^2 = 0.0004t$$

解出 $t = 530 \times 10^6 \text{ sec} = 6134.26 \text{ days} = 16.81 \text{ years}$

(4) 可施作垂直向的排水砂樁或紙樁，縮短黏土排水路徑。或者使用真空預壓密工法，加速孔隙水排除，即可縮短壓密達 90% 所需時間。另外，增大超載也是辦法之一。

討論

壓密完成後，土壤變得更緊密，請問孔隙比是變大還變小？答案是變小，很多人誤以為要變大。孔隙比大，是代表疏鬆、孔隙多。

北部的學校命題，考慮地緣關係，台北盆地、基隆河流域、順向坡容易入題，有志於台大、台科大的朋友，請注意地緣性考題。

練 8 求壓密量與時間

某基地下方有一厚約10 m之正常壓密黏土層，此黏土層壓密係數為 $c_v = 2.5 \text{ m}^2/\text{year}$ ，上下皆可自由排水，欲在此基地加高填土若干公尺，經估算得知其總壓密沉陷為1.0m。

- (1) 請估算平均壓密度達到90%時之壓密沉陷量及所需時間？
- (2) 工程進行後由監測資料得知平均壓密度達到90%之時間比預測值快很多。請用Terzaghi壓密理論說明可能的原因為何？
- (3) 如果黏土層為過壓密，其餘條件不變。請問總壓密沉陷會增加、減少或不變？需以 $e-\log \sigma'$ 圖說明之。

<102台科大土力25分>



(1) 達到 90% 時之壓密沉陷量 = $(\Delta h)_{90\%} = 0.9 \times 1 = 0.9 \text{ m}$

$$\text{按 } TH_{dr}^2 = c_v t \Rightarrow 0.848 \times 5^2 = 2.5t \Rightarrow t = 8.48 \text{ years}$$

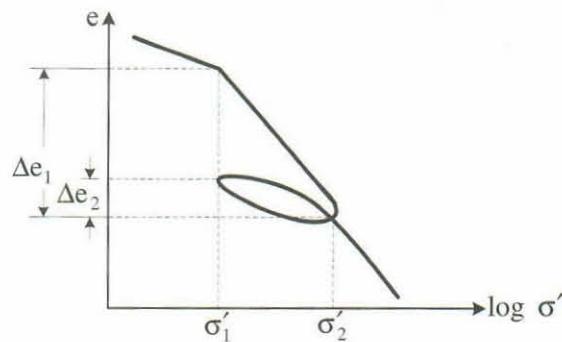
(2) ① 試驗室取樣做出來的 c_v 值因故偏低，可能來自試驗誤差，或作圖判讀誤差。使用對數時間法判讀出來的 c_v 會偏低。

② 現地土壤未若理論上均質，可能存在水平排水砂層。

③ 實際工程的超載大於原先設計的超載。

④ 壓密環內側有摩擦力，阻止沉陷量以及使沉陷速率變慢，故會低估現場沉陷速率。

⑤ Terzaghi 理論是單向度排水，但現場可能三維方向均能排水，導致壓密變快。



(3) 會減少。

對於 NC，當應力從 σ'_1 升到 σ'_2 ，孔隙比變化量為 Δe_1 ；但對 OC，當應力從 σ'_1 升到 σ'_2 ，孔隙比變化量僅為 Δe_2 ($< \Delta e_1$)，OC 的總沉陷量較小。

練 9 Casagrande 圖解法

- (a) 現地在什麼情況下，可以假設黏土為飽和黏土？(註：僅回答飽和度=100%者不給分)
- (b) 要決定某一黏土層是屬正常壓密，或是過壓密，該如何判定？
- (c) 計算過壓密黏土之壓密沉陷量，須要知道那些參數？並加列出計算式。
- (d) 計算壓密速率，須要知道那些參數？並加列出相關計算式。 <101台科大土力25%>

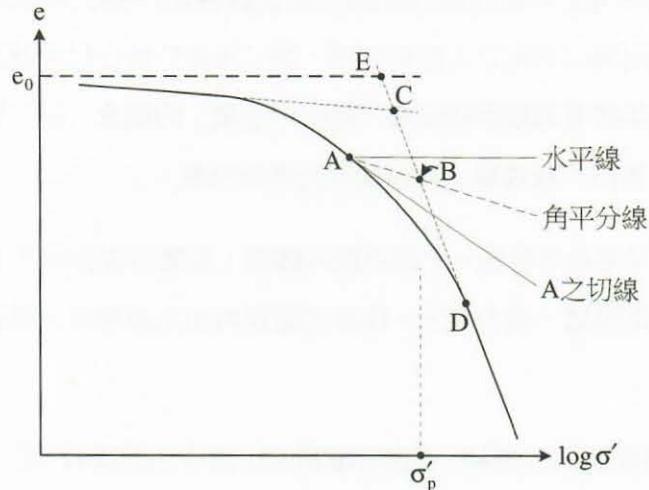


(a) 高緯度國家，冰川融化後下方的土壤可視為飽和；河面湖面以下的黏土可是為飽和；地下

水位以下的黏土，可假設為飽和；數日豪雨後地表黏土亦可視為飽和；或者基礎設計時以保守計算，假設黏土飽和(使用年限中遇到的最糟狀況)，此時有效應力 σ' 最小，不排水剪力強度 s_u 最小，以此設計則偏安全保守。

(b) 取不擾動土樣，進行壓密試驗，得下圖壓密曲線，利用 Casagrande 圖解法求出 σ'_c ，下圖 B

點之橫座標即為預壓密應力 $\sigma'_p (= \sigma'_c)$ 。



令 $\sigma'_v = \sum \gamma_i h_i$ = 分層累加得到的有效應力

若 $\sigma'_v < \sigma'_c$ ，則現場為 OC；若 $\sigma'_v = \sigma'_c$ ，則現場為 NC；若 $\sigma'_v > \sigma'_c$ ，則現場為壓密中土壤
其他方法尚有

① 調閱過去地質資料，若曾受過沖刷解壓，則目前可能為 OC。

② 若過去曾大規模抽水，現今已復水，則目前可能為 OC。

③ 依 NC 的經驗公式 $\frac{s_u}{\sigma'_0} = 0.11 + 0.0037PI$ 研判，若現場 c_u 大於左式求出的 s_u ，為 OC。

④ 若上方建築物或橋梁曾拆除，則目前可能為 OC。

$$(c) \Delta H_c = \frac{C_r H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_c} \quad \text{for } \sigma'_0 + \Delta \sigma' > \sigma'_c$$

$$\Delta H = \frac{C_r H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} \quad \text{for } \sigma'_0 + \Delta \sigma' \leq \sigma'_c$$

依據公式，須知 e_0 、 C_r 、 H 、 σ'_0 、 σ'_c 、 $\Delta \sigma'$ 、 C_c ，方能求出壓密沉陷量

(d) 所謂計算壓密速率，常是估算耗時多久($t=?$)可達 U_{50} 或 U_{90} 。

依據公式， $TH_{dr}^2 = c_v t$ ，欲知 t 須先知最長排水路徑 H_{dr} 與壓密係數 c_v

$$\text{而時間因素 } T = \frac{\pi}{4} U^2 \quad \text{for } U \leq 60\%$$

$$T = 1.781 - 0.933 \log(100-U) \quad \text{for } U > 60\%$$

討論

筆者大學時，有兩位同學(張三、李四)欲報考研究所大地組，張三選擇獨自唸書，李四選擇參加補習班。放榜時李四考上非常理想的志願(今日之台科大)，張三則以不到一題的分數飲恨台科大，只能讀淡水河出海口的私立大學研究所。張三事後分析台科大就是有一題「壓密中土壤」不會寫，因為學校年輕老師剛回國沒教「壓密中土壤」的概念。張三問李四「那一題壓密中土壤你會不會寫？」答曰「我會寫，因為補習班老師有教。」

補習，讓你多花錢，又要舟車勞頓，上課可能打瞌睡，你要不要參加？補習班又教得比學校多，來報名的好像每位都很猛，壓力真大，你參加還要再加上願意消化講義內容，一題一題算，才會出類拔萃。

不參加補習，省錢，時間又自己控制，不會有堆積如山念不完的講義，是不是很有吸引力？也不見得考不好呀！

你的想法與執行細節，還有承擔後果的態度，決定了你的人生如何構成。

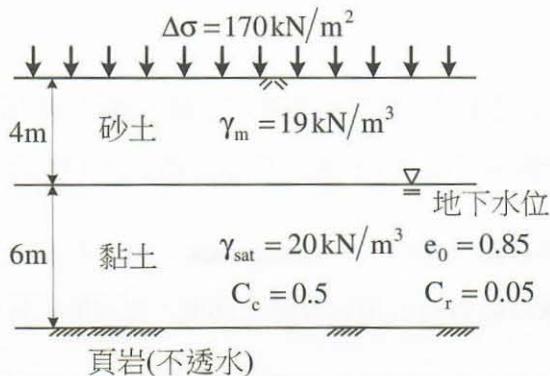
練 10 填土算沉陷量

某基地下方有一厚6 m之壓密黏土層，地層剖面如下圖所示。砂土層之濕土單位重(γ_m)示於圖上，黏土層之初始孔隙比(e_0)、飽和單位重(γ_{sat})、壓縮指數(C_s)、及再壓縮指數(C_r)也示於圖上。水之單位重(γ_w)為9.81 kN/m³。因工程需要，計畫在此基地加高填土若干公尺，經估算得知地表之超荷重(surcharge)為170 kN/m²。

(1)若知黏土層之預壓密應力為200 kN/m²。試估算長期壓密沉陷量 $S_c = ?$

(2)工程進行後由監測資料得知壓密沉陷速率比預期快很多。請從影響壓密速率之主要因素著手來推測可能的原因為何？

<99台科大土力25分>



$$(1) \text{黏土層中點 } \sigma'_0 = 4 \times 19 + 3(20 - 9.81) = 106.57 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_c = 200 \text{ kPa} > \sigma'_0 \quad \therefore \text{為 OC}$$

加載後之長期， $106.57 + 170 = 276.57 \text{ kPa} > 200 \text{ kPa}$

為部分 OC 及部分 NC

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{C_r H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} \\ &= \frac{0.05 \times 600}{1+0.85} \log \frac{200}{106.57} + \frac{0.5 \times 600}{1+0.85} \log \frac{276.57}{200} = 4.43 + 22.83 = 27.26 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$(2) \text{壓密速率公式為 } TH_{dr}^2 = c_v t$$

可能原因有：

- ① c_v 值有誤，可能進行室內壓密試驗時，有操作或判讀或繪圖上的錯誤。
- ② 取樣不具代表性。取樣係取現場一點，能否代表整體土層，不無疑問。
- ③ 現場土層若有薄排水砂層，鑽探時未發現，薄排水砂層會縮短排水路徑。
- ④ 附近可能有其他工程、養殖漁業、工業區工廠深水井或自來水公司深水井進行抽降水作業，導致水壓力降得比預估快，壓密速率就比預期快。
- ⑤ 載重超過預期值。
- ⑥ 低估黏土層厚度。
- ⑦ 頁岩可能有局部裂縫，提供水壓消散路徑，加速壓密。
- ⑧ 滲透係數未若想像中小， k 值大，按 $c_v = \frac{k}{m_v \gamma_w}$ ， c_v 大，會加速壓密。

討論

若 C_c 值、 C_r 值估錯，估得偏低，會低估壓密沉陷量，實際沉陷量較大。然而在觀測上，由於觀測者心裡以較小的總壓密沉陷量來比較，反而會觀測到「壓密速率過快」的現象。

求 c_v 值，其實均是依賴作圖法求得，有 Casagrande 之 $\log t$ 法及 Taylor 之 \sqrt{t} 法。前者求出的 c_v 值會較後者小，若採用前者的 c_v 值估算壓密速率，也可能低估現場壓密速率。

若低估黏土層厚度，就會從監測資料發現壓密沉陷速率比預期略快，舉例說明如下：設 $c_v=1.0\text{m}^2/\text{year}$ ，則預期加載 3 年後，會出現 8.88 cm 沉陷量(計算詳下)。

$$TH_{dr}^2 = c_v t \quad T(6)^2 = 1.0(3)$$

$$\text{解出 } T = 0.08333 < 60\%$$

$$T = \pi U^2 / 4 \quad 0.08333 = \pi U^2 / 4$$

$$\text{解出 } U = 32.57\%$$

$$\Delta H_{\text{預估}} = 0.3257(27.26) = 8.88 \text{ cm}$$

實際上若黏土層厚度 7 m，則黏土層中點有效應力 = $4(19) + 3.5(20 - 9.81) = 111.665 \text{ kPa}$

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{C_r H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} \\ &= \frac{0.05 \times 700}{1 + 0.85} \log \frac{200}{111.665} + \frac{0.5 \times 700}{1 + 0.85} \log \frac{281.665}{200} = 4.79 + 28.13 = 32.92 \text{ cm} \end{aligned}$$

現場實際觀測 3 年

$$TH_{dr}^2 = c_v t \quad T(7)^2 = 1.0(3)$$

$$\text{解出 } T = 0.0612 < 60\%$$

$$T = \pi U^2 / 4 \quad 0.0612 = \pi U^2 / 4$$

$$\text{解出 } U = 27.92\%$$

$$\Delta H_{\text{現場實際發生}} = 0.2792(32.92) = 9.19 \text{ cm} > \Delta H_{\text{預估}}$$

說明完畢

那如果現場觀測 40 年呢？就留給你練習吧！

(觀測值仍大於預估值)

若現場進行 SPT 試驗，每次沖洗會在鑽孔內沖掉約 105 公分的土壤，萬一沖洗掉排水薄層，就可能誤估現場壓密速率，萬一沖洗掉軟弱黏土，就可能誤估現場剪力強度、誤估沉陷量，造成設計偏不保守。

黏土層當中若有夾薄砂層，對排水及壓密速率有顯著影響，但對壓密沉陷量沒有影響。

練 11 求壓密沉陷量

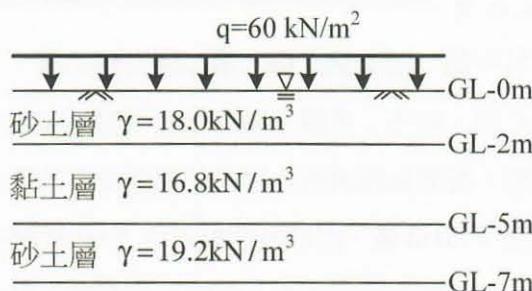
如某工址之地層剖面如圖所示，從中可見地表以下有兩層砂土層和一層黏土層交互出現。

假設於地表施加寬廣之瞬時均佈載重，使得黏土層發生單向度壓密現象；另假設砂土層之壓密壓縮現象可予以忽略。試對下列問題作答：

(一) 黏土層之壓密係數為 $0.002 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、過壓密比 (OCR) 為 1.5、初始孔隙比為 1.0、 C_c 為 0.50、 C_r 為 0.10、 C_a 為 0.020，砂土和黏土之單位重則顯示於圖一內。試計算黏土層發生 15 cm 壓密沉陷量所需之時間（以 day 為單位）。(20 分)

(二) 繼上題，試計算從主要壓密完成時間到 20 年壓密時間之間將發生之二次沉陷量（以 cm 為單位）。(5 分)

註：以平均壓密度等於 98% 的條件來計算主要壓密完成時間。 <104高考三級25分>



(一) 黏土層中點 $\sigma'_0 = 2(18-9.81) + 1.5(16.8-9.81) = 26.865 \text{ kPa}$

黏土層中點 $\sigma'_c = OCR \times \sigma'_0 = 1.5(26.865) = 40.2975 \text{ kPa}$

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{C_s H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_c} \\ &= \frac{0.1 \times 300}{1+1} \log 1.5 + \frac{0.5 \times 300}{1+1} \log \frac{26.865 + 60}{40.2975} = 2.641 + 25.018 = 27.66 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$U_{avg} = 15 / 27.66 = 0.5423 \leq 60\%$$

$$T = \frac{\pi}{4} U_{avg}^2 = \frac{\pi}{4} (0.5423)^2 = 0.231$$

依據 $TH_{dr}^2 = c_v t$

$$0.231(150)^2 = 0.002t \quad \text{解出 } t = 2,598,606 \text{ sec} = 30 \text{ days}$$

(二) $T = 1.783 - 0.933 \log(100-98) = 1.502$

$$\text{依據 } TH_{dr}^2 = c_v t \quad 1.502(150)^2 = 0.002t$$

$$\text{解出 } t = 16,899,064 \text{ sec} = 195.6 \text{ days} = 0.536 \text{ year}$$

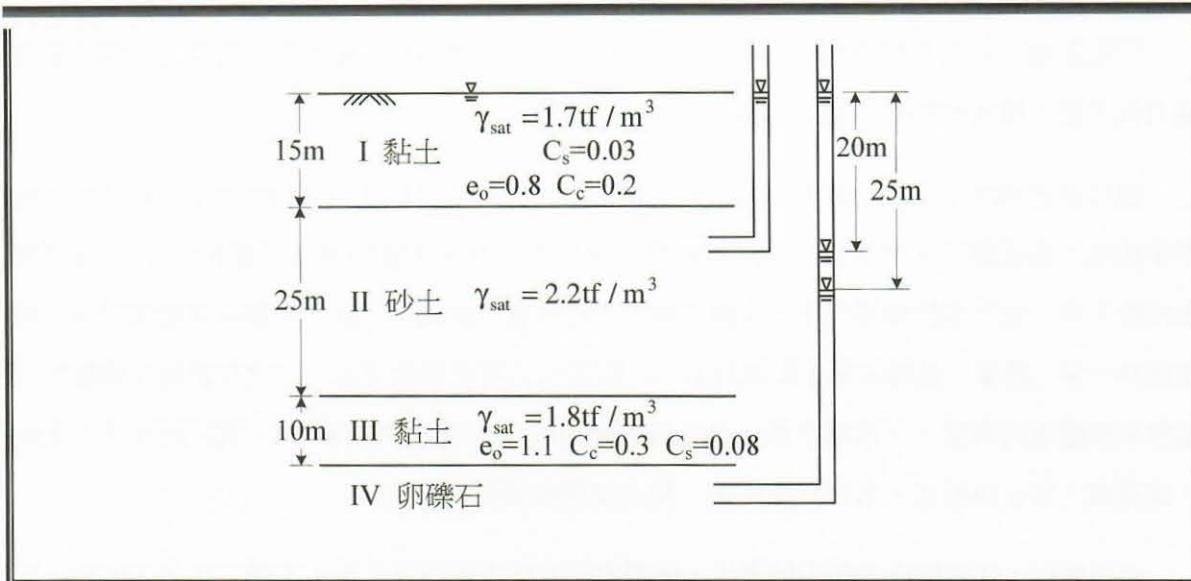
$$\Delta H = \frac{0.02 \times 300}{1+1} \log \frac{20}{0.536} = 4.7 \text{ cm}$$

練 12 升降水改變黏土性質

某土層剖面如下圖所示，其中第一層為黏土層，第二層為砂土層，第三層為黏土層，第四層為透水性相當高的卵礫石層。原先，各個土層的地下水壓均在地表面，且第一、三土層之黏土均處於正常壓密狀態。後來此處因民生用水的需要而在卵礫石層抽取地下水，使得卵礫石層的水壓下降至地表下 20 m 處，由於長期抽取地下水的緣故，第三層(黏土層)內部的超額孔隙水壓力已完全消散。後來抽水停止，卵礫石層及黏土層內部的水壓又逐漸恢復至靜態壓力(水壓力均達地表面)。今在此處附近的一個開挖工程亦在卵礫石層抽水，使得水壓下降至地表下 25 m 處，試問地表因開挖抽水而引致之最大地表沉陷量應為多少？

(假設第二層的水壓始終維持在地表面)

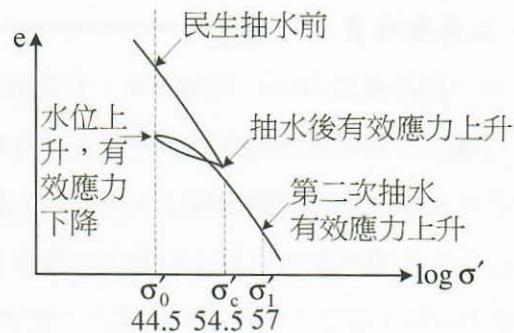
<85 高考三級 25%>



- (1) 民生抽水前，第三層黏土中點有效應力 $\sigma'_0 = 44.5 \text{ tf/m}^2$
- (2) 民生長期抽水後，因第三層 u_e 完全消散之故，第三層黏土中點有效應力增至 54.5 tf/m^2 ，此時是 NC
- (3) 停止民生抽水後，卵礫石層水位回復至地面，第三層黏土變成 OC， $\sigma'_c = 54.5 \text{ tf/m}^2$ ，黏土層中點有效應力降回 $\sigma'_0 = 44.5 \text{ tf/m}^2$
- (4) 開挖工地長期抽水後，俟第三層 u_e 完全消散，黏土層中點有效應力增至 $\sigma'_1 = 57 \text{ tf/m}^2$ ，此時又變回 NC

$$\Delta H_c = \frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_1}{\sigma'_c} = \frac{0.08 \times 1000}{2.1} \log \frac{54.5}{44.5} + \frac{0.3 \times 1000}{2.1} \log \frac{57}{54.5}$$

$$= 3.35 + 2.78 = 6.13 \text{ cm}$$



討論

詳細數據來源請見§5-5 例題。第二層砂土壓力水頭始終不變，導致第一層黏土中點的有效應力就不變，故所有的沉陷量均是第三層黏土所貢獻。

題目常透過地下水位的改變，將原先的黏土改造成另一種黏土。例如實務上，台北盆地內早年抽水，造成地下水位下降，正常壓密黏土層有效應力逐漸增加(此即「壓密中」)；後來禁止抽地下水，地下水位慢慢回升，水壓力增加，有效應力就減小，黏土就變成過壓密黏土。現在雲林一帶，農業、養殖漁業不斷抽地下水，自來水公司也抽地下水，時常有看到高鐵橋墩沉陷愈來愈嚴重的新聞，正常壓密黏土層的有效應力逐漸在增加中(壓密中)。或許將來某一天為了救高鐵，禁止再抽水，水位逐漸恢復，黏土就變成過壓密黏土。

這種過程，經常變成考題考驗考生，能看出端倪的考生不多。考生不要只會呆呆的解，要從出題者角度想「為什麼這樣出題」。

例如本題透過拘限含水層(IV 卵礫石層)水位上升，使得長期後黏土變成 OC。

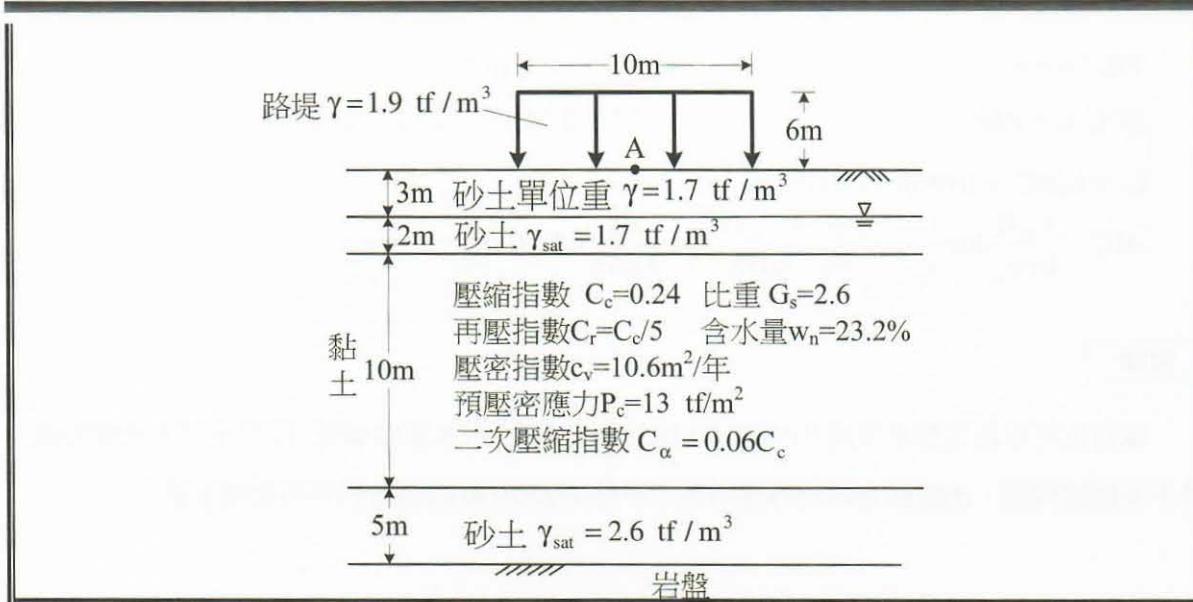
如果本題改為拘限含水層的水位下降，則黏土就會變成壓密中土壤，開始進行壓密，黏土層中點的有效應力會逐漸升高。

卵礫石層之地下水位上升至地表處，黏土厚度會增加，孔隙比增加，有效應力變小。飽和黏土的厚度和孔隙比有一對一關係，代壓密公式時，若改變所代的孔隙比，就要改變所代的厚度。

練 13 二次壓縮量

如下圖所示，有一路堤寬度 10 m，高度 6 m，夯實後土壤單位重 $\gamma=1.9 \text{ tf/m}^3$ ，填築在砂土與黏土層上，土壤之工程性質如圖所示，地下水位在地表下 3 m 處。試問：

- (一)路堤中心下方 A 點，因填築路堤施工，所產生之黏土壓密沉陷量為何？
- (二)若路堤中心下方 A 點所產生之黏土壓密沉陷量達 10 cm 時，須多久時間？
- (三)若壓密度達 95% 時，視為主壓密完成，試求主壓密完成至第 10 年時，在路堤中心下方 A 點處，黏土所產生之二次壓縮量(Secondary Compression)為何？<86 土木技師 25%>

(一) 黏土 $Se = wG_s$

$$1 \times e = 0.232 \times 2.6 = 0.6032$$

$$\gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.6 - 1}{1 + 0.6032} \times 1 = 0.998 \text{ tf/m}^3$$

$$\therefore \sigma'_0 = 3 \times 1.7 + 2(1.7 - 1) + 5 \times 0.998 = 11.49 \text{ tf/m}^2 < \sigma'_c = 13 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{路堤超載 } q = 6 \times 1.9 = 11.4 \text{ tf/m}^2$$

$$\text{黏土中點應力增量 } \Delta\sigma' = \frac{11.4 \times 10}{10 + 3 + 2 + 5} = 5.7 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma'_0 + \Delta\sigma' = 11.49 + 5.7 = 17.19 \text{ tf/m}^2 > \sigma'_c = 13 \text{ tf/m}^2$$

$$C_r = C_c / 5 = 0.24 / 5 = 0.048$$

$$\Delta H_c = \frac{C_r H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} = \frac{0.048 \times 1000}{1.6032} \log \frac{13}{11.49} + \frac{0.24 \times 1000}{1.6032} \log \frac{17.19}{13}$$

$$= 1.605 + 18.164 = 19.77 \text{ cm}$$

(二) $U_{avg} = 10 / 19.77 = 0.506 < 0.6 = 60\%$

$$\text{故 } T = \frac{\pi}{4} U^2 = \frac{\pi}{4} (0.506)^2 = 0.2$$

$$TH_{dr}^2 = c_v \times t$$

$$0.2(5)^2 = 10.6t$$

$$\text{解出 } t = 0.474 \text{ 年} = 173 \text{ 日}$$

(三) $T = 1.781 - 0.933 \log(100 - U) = 1.781 - 0.933 \log(100 - 95) = 1.129$

$$TH_{dr}^2 = c_v \times t$$

$$1.129(5)^2 = 10.6t_p$$

解出 $t_p = 2.662$ 年

耗時 2.662 年完成主要壓密

$$C_a = 0.06C_c = 0.06 \times 0.24 = 0.0144$$

$$\Delta H_s = \frac{C_a H}{1 + e_0} \log \frac{t_{10}}{t_p} = \frac{0.0144 \times 1000}{1 + 0.6032} \log \frac{10}{2.662} = 5.16 \text{ cm}$$

討論

題目也可以指定壓密度達 97% 時，視為主壓密完成，考生要會應變。路堤正下方土壤受壓，是平面應變問題，出紙面方向視為無限長，不是 $1 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ 的長方形有限面積加載。

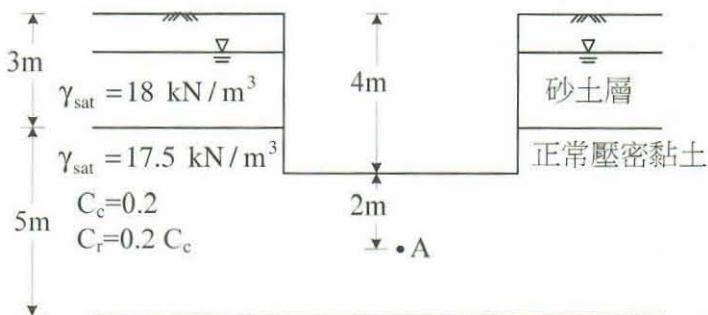
練 14 土壤彈性回脹

有一厚 3 m 之砂土層，其下方為厚 5 m 之正常壓密黏土層，地下水位位於地表下 1 m 處。今如在該地層開挖至地表下 4 m 後進行建築結構，該構造物筏基底部之荷重為 131.5 kN/m^2 ，構造物之寬度遠超過黏土層厚度。砂土位於地下水位以上及以下之單位重均視為 $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$ ；黏土層飽和單位重為 $\gamma_{sat} = 17.5 \text{ kN/m}^3$ ，由試驗得其壓縮係數 $C_c = 0.2$ ，再壓縮係數 $C_r = 1/5 \cdot C_c$ 。建築物中心點下方 2 m 處 A 點，其初始孔隙比為 $e_0 = 0.8$ 。

(一) 若開挖後，建築物興建迅速，求壓密完畢後 A 點孔隙比 = ? 此黏土層於結構物中心點下方處之最終壓縮量為何？

(二) 若開挖至預定深度後，因故基地閒置很長一段時間，求黏土彈性膨脹量 = ? 孔隙比變為多少？後來繼續施工，構造物完成且壓密完畢後，求 A 點孔隙比 = ? 此黏土層於結構物中心點下方處之最終壓縮量為何？

<修改94土木技師25%>





(一) 開挖前 A 點應力 $\sigma'_0 = 1 \times 18 + 2(18 - 9.81) + 3(17.5 - 9.81) = 57.45 \text{ kPa}$

「構造物之寬度遠超過黏土層厚度」表示廣大面積超載，應力不用 2:1 傳遞

完工後筏基基面總應力 = 131.5 kPa

筏基基面到 A 點還有 2 m

壓密完畢後 A 點總應力 = $131.5 + 2(17.5) = 166.5 \text{ kPa}$

壓密完畢後 A 點水壓力 = $5(9.81) = 49.05 \text{ kPa}$

壓密完畢後 A 點有效應力 $\sigma'_2 = 166.5 - 49.05 = 117.45 \text{ kPa}$ 仍為正常壓密黏土

$$C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \quad 0.2 = \frac{0.8 - e_2}{\log 117.45 - \log 57.45}$$

解出 $e_2 = 0.738$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_c} = \frac{0.2 \times 400}{1.8} \log \frac{117.45}{57.45} = 13.8 \text{ cm}$$

(二) 開挖至預定深度後，開挖基地閒置很長一段時間，此為解壓，砂土水會流入。當土壤完全

解壓膨脹完畢，孔隙比會上升到 e_1 ，有效應力會從 57.45 kPa 降到 σ'_1

A 應力 $\sigma'_1 = 2(17.5 - 9.81) = 15.38 \text{ kPa}$ A 總應力 $\sigma = 3 \times 9.81 + 2 \times 17.5 = 64.43 \text{ kPa}$

$$C_r = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \quad \frac{0.2}{5} = \frac{e_1 - 0.8}{\log 57.45 - \log 15.38}$$

解出 $e_1 = 0.823$

$$\text{彈性膨脹量 } \Delta H_c = \frac{C_r H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_1} = \frac{0.04 \times 400}{1.8} \log \frac{57.45}{15.38} = 5.087 \text{ cm}$$

繼續施工，構造物完成且壓密完畢後，A 點孔隙比降回 $e_2 = 0.738$

繼續施工會把彈性膨脹量再壓下去，總壓縮量 = $5.087 + 13.8 = 18.89 \text{ cm}$

討論

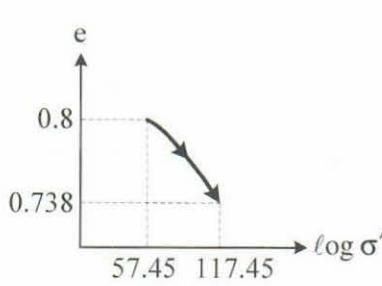
大部分工地地下室開挖後會趕快施作結構體重量，所以黏土「沒時間」彈性膨脹。彈性膨脹就是水倒流回黏土內，這是壓密的反動作，也需要時間，你若不給它時間，它就無法膨脹。本題結構體重量大於挖除土重，若快速興建，土壤就沒時間膨脹，觀測上反而只看得到壓密。
第一小題在算正常壓密黏土的壓縮量。

開挖前 A 點應力 $\sigma'_0 = 57.45 \text{ kPa}$

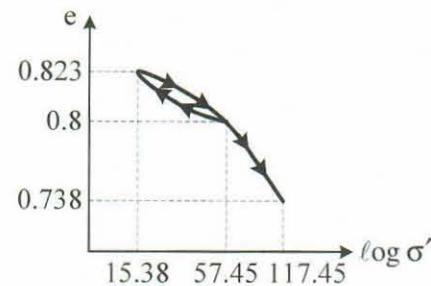
挖除土重 = $3 \times 18 + 1 \times 17.5 = 71.5 \text{ kPa}$

筏基基面應力淨增量 = $131.5 - 71.5 = 60 \text{ kPa}$

壓密完畢後，A 點應力 $\sigma'_0 = 57.45 + 60 = 117.45 \text{ kPa}$



開挖與興建均甚快
第(一)小題



開挖與閒置
興建結構體
第(二)小題

有人說壓密完畢，A 點 $\sigma'_0 = 15.38 + \text{構造物重} = 146.85 \text{ kPa}$ ，對嗎？要不要扣水壓力？

第(二)小題故意設計成開挖後閒置(通常因為資金不足，發不出薪水，下包不願意進場)，那黏土就「有時間」彈性膨脹。彈性膨脹會造成孔隙比上升，有效應力下降，變成過壓密黏土。第(二)小題就是在算過壓密黏土的壓縮量。此兩小題應力變化和孔隙比變化圖如上。

練 15 土壤壓密

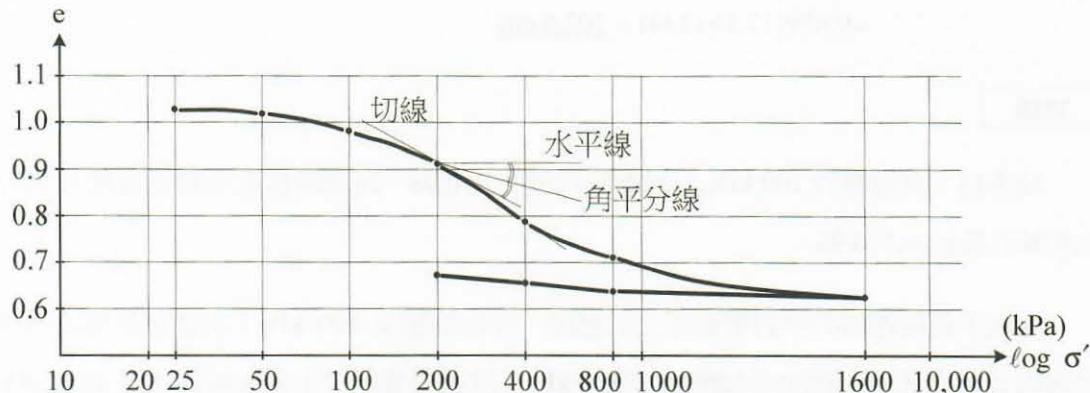
有一厚 20 m 之飽和黏土，飽和密度為 20 kN/m^3 ，地下水位位於地表面，取土層中間試體厚 2.2 cm，進行雙向排水壓密實驗，實驗結果如表所示。請問現地土壤是否為正常壓密黏土，其壓縮指數 C_c 為多少？再壓縮指數 C_s 為多少？今預以上覆砂礫進行預壓密工法，上覆荷重應力為 400 kPa。經查實驗試體在此荷重增量下，達壓密 50% 的時間(t_{50})是 10 分鐘， $T_{50}=0.184$ ，試求該土壤之壓密係數(c_v)為多少？試問現地土層中間土壤要多少時間可以達壓密 50%，此時地表的沉陷量是多少？土層中間的有效應力是多少？條件如有不足，請自行作合理假設。

<103 年台大 25%>

表 雙向排水壓密實驗實驗結果

Pressure, σ' (kPa)	Void ratio, e	Remark	Pressure, σ' (kPa)	Void ratio, e	Remark
25	1.03	Loading	800	0.71	Loading
50	1.02		1600	0.62	
100	0.98		800	0.635	Unloading
200	0.91		400	0.655	
400	0.79		200	0.67	

【原題目附空白半對數圖紙與超額孔隙水壓消散曲線(z/H_{dr} 、 $T_v \sim U_z$ 曲線)，此處略之。】



(1) 假設現場黏土上下均可排水

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_0 = 10(20 - 9.81) = 101.9 \text{ kPa} \doteq 100 \text{ kPa} \quad \text{故 } e_0 \text{ 取 } 0.98$$

依 Casagrande 圖解法 $\sigma'_c \doteq 200 \text{ kPa} > 101.9 \text{ kPa}$ 故現場為過壓密土壤，並非 NC clay

$$C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} = \frac{0.91 - 0.71}{\log 800 - \log 200} = 0.332$$

$$C_s = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} = \frac{0.67 - 0.635}{\log 800 - \log 200} = 0.058$$

(2) 考慮試體 $U_{avg} = 50\%$

$$TH_{dr}^2 = c_v t \quad 0.184(2.2/2)^2 = 10c_v$$

$$\text{解出 } c_v = 0.022264 \text{ cm}^2/\text{min}$$

(3) 考慮現地 10m 深度處土壤微素，查超額孔隙水壓消散圖，

$$U_z = 50\% \text{ 對應之 } T_v = 0.375 > 0.283 = T_{60}$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$0.375(1000)^2 = 0.022264t$$

解出 $t = 16,843,335 \text{ min} = 11697 \text{ days} = 32 \text{ years}$

現地 10 m 深度處土壤微素有效應力增量 $= 400 \times 50\% = 200 \text{ kPa}$

現地 10 m 深度處土壤微素有效應力 $= 101.9 + 200 = 301.9 \text{ kPa}$

$$\text{按照 } T = 1.781 - 0.933 \log(100 - U_{avg})$$

$$0.375 = 1.781 - 0.933 \log(100 - U_{avg})$$

解出 $U_{avg} = 67.9\%$

$$\text{此時地表沉陷量} = 0.679 \times \left[\frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_c} \right]$$

$$= 0.679 \times \left[\frac{0.058 \times 2000}{1 + 0.98} \log \frac{200}{101.9} + \frac{0.332 \times 2000}{1 + 0.98} \log \frac{101.9 + 400}{200} \right]$$

$$= 0.679(17.16 + 134) = 102.6 \text{ cm}$$

討論

依表格，有效應力 100 kPa 所對應的孔隙比為 0.98，而現場黏土中點有效應力 101.9 kPa，故初始孔隙比 $e_0 \approx 0.98$ 。

那能不能從題解的半對數圖紙之解壓段，外插解壓至 100 kPa，對應到孔隙比 0.687 當成地層的 e_0 呢？不行。因為外插解壓至 100 kPa，試體對應的史上最大壓應力是 1600 kPa，可是現場對應的預壓密應力是 200 kPa。

從表格中看出試驗的載重增量比(LIR)是 1.0。 T_{50} 應為 0.197，題目之 0.184 很奇怪。如果你只是想考上技師、高考，你根本不必讀隸美弗定理，你要的是歐陽叢書與加減乘除。

可否用 $C_s = \frac{1.03 - 0.91}{\log 200 - \log 25} = 0.133$ 來算呢？不建議，試驗初期的數據或曲線走勢，受試體修裁、接觸應力等因素干擾，較不準而不用，對數時間法和平方根時間法即為一例。

練 16 土壤抽水壓密

下圖為某工址之沖積層剖面。地水位以上之砂土單位重 $\gamma = 15.8 \text{ kN/m}^3$ ，地水位以下之砂土飽和單位重 $\gamma_{sat} = 19.2 \text{ kN/m}^3$ ，黏土之性質如下： $\gamma_{sat} = 18.1 \text{ kN/m}^3$, $G_s = 2.65$, 過壓密比 $OCR = 1.2$, 壓縮指數 $C_c = 0.22$, 再壓/回脹指數 $C_r = 0.04$, 壓密係數 $c_v = 0.08 \text{ cm}^2/\text{sec}$, 初始孔隙比 $e_0 = 1.1$ 。

地水位原先位於地下 2 m 處，後因局部抽水造成附近地下水位長期性降低，地水位約降至地表下 8 m 處，因而發生地表沉陷。

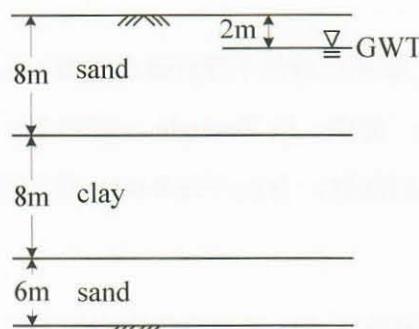
(1)該區地表沉陷之行為是否完全符合 Terzaghi 一維壓密理論之假設條件？說明原因。

若假設 Terzaghi 一維壓密理論勉可適用分析此問題，試估計黏土層

(2)中央於地水位改變前、後分別之有效應力及其最大有效預應力。

(3)因地水位下降而造成之最終沉陷量。

(4)達成 50% 之沉陷需要多久時間(需以天數作答)。(註： $T_{50} = 0.197$)



<103 年交大 10%>



(1)不完全符合 Terzaghi 一維壓密理論之假設條件。Terzaghi 乃假設地表增加廣大面積超載，引發矩形分佈之 u_e ，本題卻是黏土上方抽水行為，產生上寬下尖之三角形 u_e 。

(2)地下水位改變前

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_0 = 2 \times 15.8 + 6(19.2 - 9.81) + 4(18.1 - 9.81) = 121.6 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_c = \text{OCR} \times \sigma'_0 = 1.2 \times 121.6 = 145.32 \text{ kPa}$$

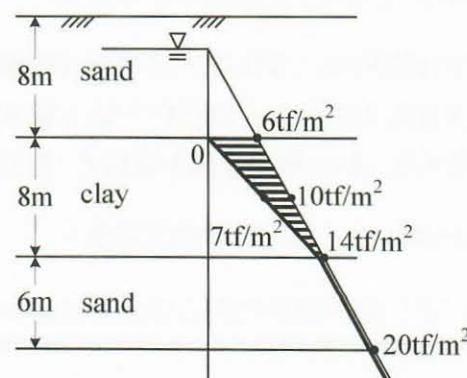
地下水位改變後的長期

$$\text{黏土層中點總應力 } \sigma_0 = 8 \times 15.8 + 4 \times 18.1 = 198.8 \text{ kPa}$$

$$u_w = 7 \text{ tf/m}^2 = 68.67 \text{ kPa}$$

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_0 = 198.8 - 68.67 = 130.13 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_c = 145.32 \text{ kPa}$$



$$(3) \Delta H_c = \frac{C_s H}{1+e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} = \frac{0.04 \times 800}{1+1.1} \log \frac{130.13}{121.6} = 0.45 \text{ cm}$$

(4) 勉強依照 Terzaghi 一維壓密理論，

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$0.197(800/2)^2 = 0.08t$$

$$t = 394000 \text{ sec} = 4.56 \text{ days}$$

討論

注意降水後，總應力改變。

交大林志平教授上課有提到抽水之壓密行為並不等於廣大面積加載之壓密行為，上課 PDF 檔也有提到兩者 T_{50} 並不一樣。本題是「勉強」以 Terzaghi 一維壓密理論來解，所以 T_{50} 才用 0.197，否則應該是 0.092。若考選部考這種題目，你記不住 0.092，那請勉強以 0.197 代入計算，考後發函要求送分。

雲林縣地層下陷的抽水是抽極深層地下水，產生的是上尖下寬之三角形 u_e ，未盡符合 Terzaghi 一維壓密理論。

練 17 土壤壓密沉陷

甲建築物下方有一層厚約 10 m 之黏土，原假設該黏土層可雙向排水，經沉陷分析估計最終之沉陷量將達 0.1 m，且沉陷將會在 1 年後達到 0.05 m。然而經過進一步地層確認，判斷該黏土層之底部不能排水。經地層確認後，

(a) 多久時間才會達到 0.05 m 沉陷？

甲建築物完工多年後，其附近有規模雷同的乙建築物開工，地質條件頗為類似，但經進一步地質調查發現乙建築物下黏土層厚度較甲建築物下方之黏土層厚約 20%，黏土之壓密性質相近，黏土層之底部不能排水，但黏土層中間夾有一厚約 0.1 m 之薄砂層，側向充分延展。

(b) 請估計乙建築物最終沉陷量。

(c) 請比較甲建築物與乙建築物達到 50% 沉陷分別所需時間。

<99 年交大 15%>



(a) 按 $TH_{dr}^2 = c_v t$ 得 $H_{dr}^2 \propto t$

H_{dr} 倍增， t 變為 4 倍

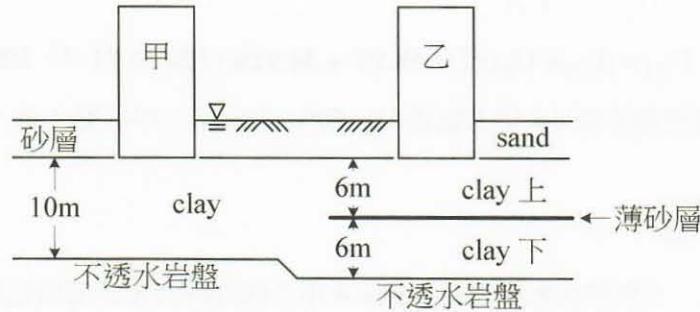
故要 4 年才能達 0.05 m 沉陷

壓密係數 $c_v = TH_{dr}^2 / t = 0.197 \times 10^2 / 4 = 4.925 \text{ m}^2/\text{year}$

(b) 乙的最終沉陷量 $\approx 0.1(1+20\%) = 0.12 \text{ m}$

(c) 參考圖

猜測在 0.8 年



上層黏土(雙向排水)

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$T \times 3^2 = 4.925 \times 0.8$$

$$\text{解出 } T = 0.4378 > T_{60} = \frac{\pi}{4} (0.6)^2 = 0.2827$$

$$\text{按 } T = 1.781 - 0.933 \log(100 - U)$$

$$0.4378 = 1.781 - 0.933 \log(100 - U)$$

$$\text{解出 } U_{top} = 72.48\%$$

下層黏土(單向排水)

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$T \times 6^2 = 4.925 \times 0.8$$

$$\text{解出 } T = 0.1094 < T_{60}$$

$$\text{所以 } U_{bot} = \sqrt{\frac{4T}{\pi}} = 0.3733 = 37.33\%$$

$$U_{avg} = (U_{top} + U_{bot})/2 = (72.48\% + 37.33\%) / 2 = 54.9\% > 50\%$$

猜測在 0.7 年

上層黏土(雙向排水)

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$T \times 3^2 = 4.925 \times 0.7$$

$$\text{解出 } T = 0.3831 > T_{60} = \frac{\pi}{4} (0.6)^2 = 0.2827$$

$$\text{按 } T = 1.781 - 0.933 \log(100-U)$$

$$0.3831 = 1.781 - 0.933 \log(100-U)$$

$$\text{解出 } U_{\text{top}} = 68.5\%$$

下層黏土(單向排水)

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$T \times 6^2 = 4.925 \times 0.7$$

$$\text{解出 } T = 0.09576 < T_{60}$$

$$\text{所以 } U_{\text{bot}} = \sqrt{\frac{4T}{\pi}} = 0.3492 = 34.92\%$$

$$U_{\text{avg}} = (U_{\text{top}} + U_{\text{bot}})/2 = (68.5\% + 34.92\%) / 2 = 51.71 \approx 50\%$$

故乙建築物約要 0.7 年方能達 $U = 50\%$ 之沉陷。甲卻要 4 年，顯見排水之薄砂層能加速壓密

討論

1. 不要問我怎麼知道要猜 0.8 年？我的許多張計算紙已經丟到字紙簍了。
2. 乙的最終沉陷量約是 0.12 m，僅為估計值，因初始中點有效應力不同且 log 非線性函數，故只能概估。

練 18 壓密相關參數計算

某工地地表 10 m 深度處為砂土，10 m 深至 12 m 深為黏土，12 m 深處之下又是砂土，水位在地表，後來降至 10 m 深處，黏土層漸壓密至 1.8m 厚不再有厚度變化，隨即鑽探取樣，從事試驗，結果如下：砂土 $\gamma=2 \text{ tf/m}^3$ ，黏土 $\gamma=1.82 \text{ tf/m}^3$ ， $w=0.4$ ， $G_s=2.71$ ， $c_v=0.5 \text{ m}^2/\text{hr}$ ，

試求黏土在壓密之後的孔隙比 e_1 ，在壓密之前的孔隙比 e_0 ，體積變化係數 m_v ，壓縮指數 C_c ，透水係數 k ，黏土層中央之有效應力增量 $\Delta\sigma'$ 。(條件如有不足，自行做合理假設)

<77 年土木技師檢覈 25%>



壓密完成後才取樣，依 $Se = wG_s$ $1 \times e_1 = 0.4 \times 2.71$ 故 $e_1 = 1.084$

$$\text{垂直應變 } \varepsilon_v = \frac{e_0 - e_1}{1 + e_0} = \frac{\Delta H}{H_0} \quad \frac{e_0 - 1.084}{1 + e_0} = \frac{2 - 1.8}{2}$$

解出 $e_0 = 1.3156$

設降水前與後，砂土 $\gamma_{sat} = \gamma_m = 2 \text{ tf/m}^3$

$$\text{降水前，黏土 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e_0}{1 + e_0} \gamma_w = \frac{2.71 + 1.3156}{1 + 1.3156} \times 1 = 1.74 \text{ tf/m}^3$$

降水前，黏土中點 $\sigma'_v = 10(2-1) + 1(1.74-1) = 10.74 \text{ tf/m}^2$

降水後，黏土中點 $u_w = (0 + 12) / 2 = 6 \text{ tf/m}^2$

降水後，黏土中點總應力 $\sigma_v = 10(2) + 0.9(1.82) = 21.638 \text{ tf/m}^2$

降水後，黏土中點 $\sigma'_v = 21.638 - 6 = 15.638 \text{ tf/m}^2$

黏土層中央之有效應力增量 $\Delta\sigma' = 15.638 - 10.74 = 4.898 \text{ tf/m}^2$

壓縮係數 $a_v = \Delta e / \Delta\sigma' = (1.3156 - 1.084) / 4.898 = 0.0473 \text{ m}^2/\text{tf}$

體積壓縮係數 $m_v = a_v / (1 + e_0) = 0.0473 / 2.3156 = 0.0204 \text{ m}^2/\text{tf}$

$k = c_v m_v \gamma_w = 0.5 \times 0.0204 \times 1 = 0.0102 \text{ m/hr}$

$$\text{壓縮指數 } C_c = \frac{1.3156 - 1.084}{\log 15.638 - \log 10.74} = 1.419$$

討論

檢驗題目數據：壓密後黏土飽和單位重 $\gamma_{sat} = \frac{G_s + e_1}{1 + e_1} \gamma_w = \frac{2.71 + 1.084}{1 + 1.084} \times 1 = 1.8205 \text{ tf/m}^3$ ，合理。

黏土壓密後孔隙比變小，飽和單位重變大，壓密會造成基本指數性質改變。

練 19 含水量、OCR 隨深度變化

有一飽和黏土試樣，取自一黏土層之地表面下 10 m 深的地方，該試樣由實驗室試驗得到以下資料： $C_c = 0.40$ ， $C_r = 0.05$ ， $OCR = 6$ ，含水量 $w = 25\%$ ， $G_s = 2.70$ 。該地層之地下水位與地表面同高，試計算地表下 5 m 深處之含水量及 OCR 的值。<修改 103 年高考二級 20%>



(1) 10 m 處土壤孔隙比 $e = wG_s/S = 0.25(2.7) / 1 = 0.675$

$$10\text{ m 處土壤浸水單位重 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \times \gamma_w = \frac{2.7 - 1}{1 + 0.675} \times 9.81 = 9.956 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{預壓密應力 } \sigma'_c = \text{OCR} \times 99.56 = 597.36 \text{ kPa}$$

$$\text{故地表被移除的超載 } q = 597.36 - 99.56 = 497.825 \text{ kPa}$$

(2) 5 m 處的土壤也是 OC

(整個地層都是 OC)

5 m 處土壤的孔隙比為 e_5

$$5\text{ m 處土壤浸水單位重 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e_5} \times \gamma_w = \frac{1.7}{1 + e_5} \times 9.81 = \frac{16.677}{1 + e_5} \text{ kN/m}^3$$

$$5 \text{ m 處土壤 } \sigma'_v = \frac{16.677}{1+e_s} \times 5 = \frac{83.385}{1+e_s} \text{ kPa} \quad \dots \dots \dots \quad ②$$

$$C_r = 0.05 = \frac{e_s - 0.675}{\log 99.56 - \log \sigma'_v} \quad \dots \dots \quad ③$$

$$\text{聯立} ② \text{ 與 } ③, \text{ 試誤法解出 } e_5 = 0.6902 \quad \sigma_v = \frac{16.677}{1 + 0.6902} \times 5 = 49.334 \text{ kPa}$$

$$5\text{ m 處土壤的含水量 } w = Se/G_s = 1(0.6902) / 2.7 = 25.56\%$$

$$5\text{ m 處土壤 } \text{OCR} = (497.825 + 49.334) / 49.334 = 11.09$$

討論

原題目說「試計算並繪圖表示該黏土之含水量與深度的關係圖，及 OCR 與深度的關係圖。以上兩圖深度請繪到 60 m 深，並標示 $1, 5, 10, 30, 60\text{ m}$ 深等處之含水量及 OCR 的值。」這是很大的計算量，搞不好要寫一天。

隨著深度增加，OCR 減少、 e 變小，含水量 w 也變小。

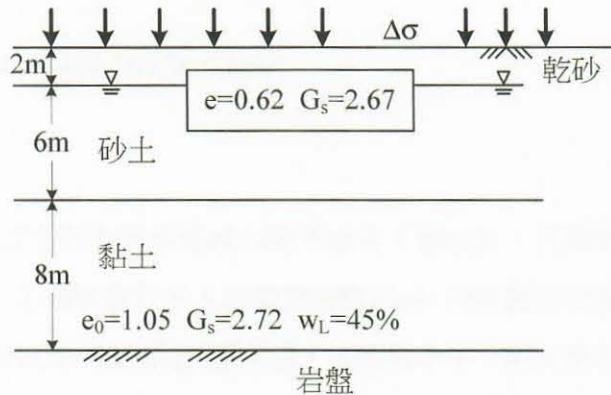
孔隙比隨深度處處變化，①式和②式有沒有問題？要不要用 $\sigma_v = \int_0^z \gamma dz$ ？

練 20 壓密沉陷計算

有一基地土層剖面如圖所示，地下水位於地表下方 2 m，若黏土為正常壓密，於地表施加均佈載重 $\Delta\sigma$ 後，黏土空隙比 (void ratio) e 變為 0.96，試估算現地黏土層主要壓密之沉陷量為何？均佈載重 $\Delta\sigma$ 數值為何？當沉陷量為 20 cm 時，該黏土層之平均壓密度為何？若黏土層之壓密係數 c_v 於壓密過程為定值 $0.005 \text{ cm}^2/\text{sec}$ ，則前述 20 cm 沉陷量，需多久（以天為單位）才能達成？

<103 年結構技師 25%>

【壓縮指數 $C_v = 0.009$ (LL-10)；壓密度 $U > 60\%$ ， $T_v = 1.781 - 0.933\log(100-U\%)$ ， $U = 0\sim60\%$ ， $T_v = \pi U^2 / 4$ 】



$$(1) \varepsilon_v = \frac{e_0 - e'}{1 + e_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{\Delta H}{H_0} \quad \frac{1.05 - 0.96}{1 + 1.05} = \frac{\Delta H}{800}$$

解出 $\Delta H = 35.12 \text{ cm}$

$$(2) \text{乾砂 } \gamma_d = \gamma_s / (1 + e_0) = 2.67 / (1 + 0.62) = 1.648 \text{ tf/m}^3 = 16.168 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{飽和砂 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.67 - 1}{1 + 0.62} \times 9.81 = 10.11 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{飽和黏土 } \gamma' = \frac{G_s - 1}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.72 - 1}{1 + 1.05} \times 9.81 = 8.23 \text{ kN/m}^3$$

黏土中點原先有效應力 $\sigma'_0 = 2 \times 16.168 + 6 \times 10.11 + 4 \times 8.23 = 125.92 \text{ kPa}$

$$C_v = 0.009(LL-10) = 0.009(45-10) = 0.315$$

$$\Delta H = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma}{\sigma'_0}$$

$$35.12 = \frac{0.315 \times 800}{1 + 1.05} \log \frac{125.92 + \Delta \sigma}{125.92}$$

解出 $\Delta \sigma = 117 \text{ kPa}$

$$(3) U_{avg} = 20 / 35.12 = 56.95 \% < 60\%$$

$$(4) T_v = \pi U^2 / 4 = \pi \times 0.5695^2 / 4 = 0.2547$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

設岩盤完整不透水

$$0.2547 \times 800^2 = 0.005t$$

$$\text{解出 } t = 32,602,494 \text{ sec} = 377.3 \text{ days}$$

討論

1. 結構技師考這種題目，送分嘛！各位不要以為準備考試辛苦又多辛苦，人生所有的歡樂是從辛苦中對照而獲得的，每天讓你歡樂你人生就麻痺掉了，好像每晚上夜店一樣。筆者在《解說結構矩陣》中早就闡明，能準備考試是莫大的幸福呀！你如果不能在想法層次上超越你那普通的同儕，那你還有更多辛苦與麻煩。
2. 地球上有很猛的考生問「排光超額孔隙水壓 u_e ，意味著土壤就沒有水嗎？」當然不是，可能還有滲流水壓 u_s ，一定還有靜態水壓 u_{ss} 。
3. 「因為平均壓密度只和時間因素有關，所以土壤壓密速率與土層厚度無關。」請評論這句話。(95 年地方特考)

【Hint : $TH_{dr}^2 = c_v t$ 】

練 21 壓密沉陷量與速率計算

某地表 10 m 厚之砂土層下，有一 8 m 厚之正常壓密黏土層，黏土層下為不透水之基岩層，地下水位在地表下 5 m 處。經鑽探求得：砂土層之孔隙比為 0.67，比重為 2.68，地下水位以上之含水量為 20%；黏土層之含水量為 40%，比重為 2.70，液性限度為 46。

(一) 試計算在地表上大面積填土方 2 m 高時，黏土層之平均最終沉陷量為若干 m？假設此填方之單位重 $\gamma = 17.5 \text{ kN/m}^3$ 。（15 分）

(二) 在此黏土層取 2 cm 厚之試樣進行壓密試驗，若主壓密的 50% 在最初 4 分鐘發生，試求此填方完成其最終沉陷量的 50% 所需之時間為若干天？（10 分） <104 年土木技師>



$$(一) \gamma_s = \gamma_d(1+e)$$

$$2.68 = \gamma_d(1+0.67)$$

$$\text{解出 } \gamma_d = 1.605 \text{ tf/m}^3$$

$$\gamma_m = \gamma_d(1+w) = 1.2\gamma_d = 1.926 \text{ tf/m}^3 = 18.89 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{砂層 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.68 + 0.67}{1+0.67} \times 9.81 = 19.68 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{壓縮指數 } C_c = 0.009(LL-10) = 0.009(46-10) = 0.324$$

$$\text{黏土層 } \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.7 + 1.08}{1+1.08} \times 9.81 = 17.83 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_0 = 5(18.89) + 5(19.68 - 9.81) + 4(17.83 - 9.81) = 175.88 \text{ kPa}$$

$$\text{超載 } \sigma'_0 = 2(17.5) = 35 \text{ kPa}$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.324 \times 800}{1+1.08} \log \frac{175.88 + 35}{175.88} = 9.82 \text{ cm}$$

$$(二) TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$0.197 \times 1^2 = 4c_v$$

$$\text{解出 } c_v = 0.04925 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$0.197(800)^2 = 0.04925t$$

注意工地單向排水

$$\text{解出 } t = 2,560,000 \text{ min} = 1777.8 \text{ days}$$

討論

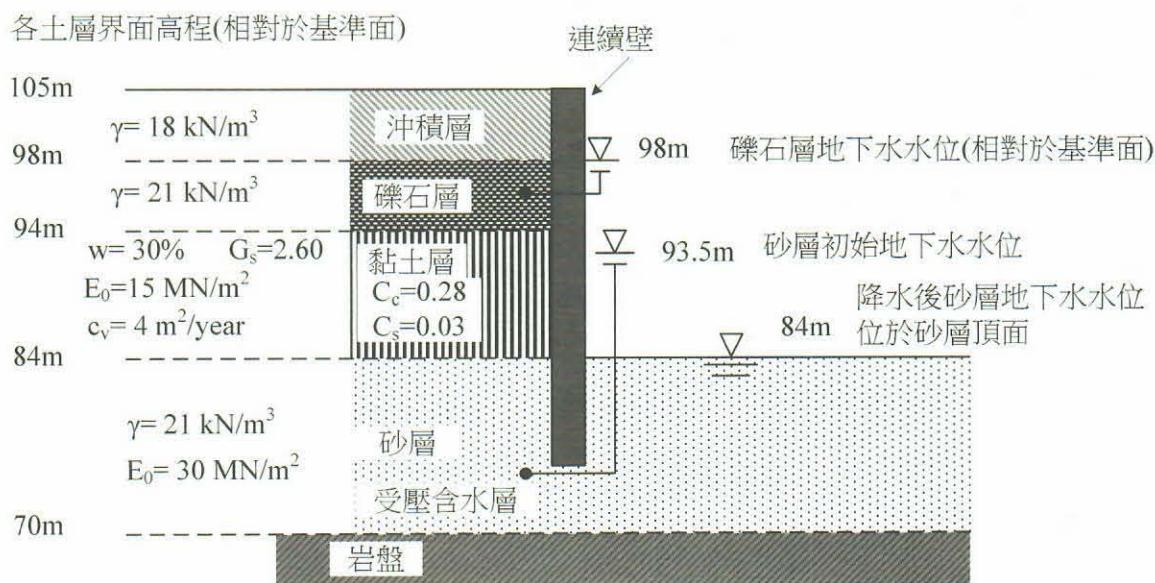
解題請畫土層剖面。壓密試驗一定是雙向度排水，然而其試驗結果(c_v 值等等)可用到單向度排水的工地，只要公式代入正確的最長排水路徑 H_{dr} 即可。

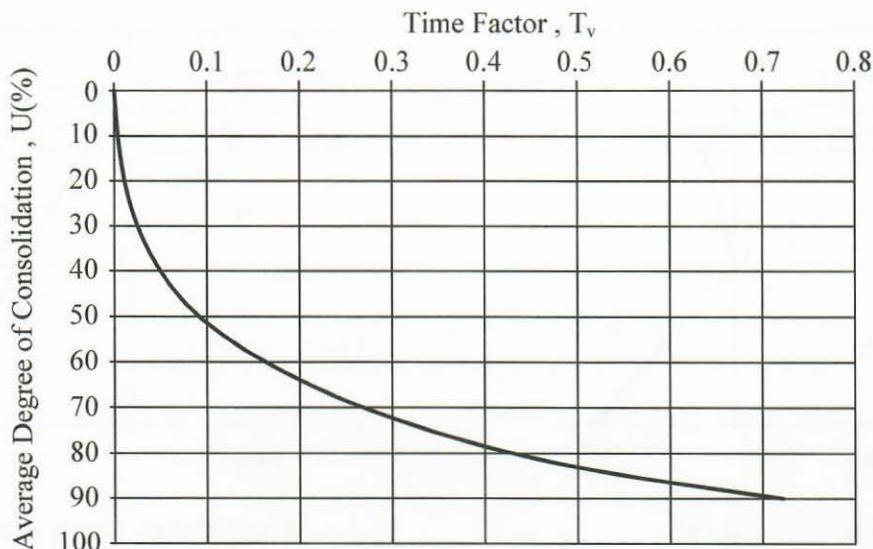
練 22 壓密沉陷量與速率計算

某捷運站工程施工時在連續壁內進行開挖，因此必須將地下水水位降低至砂層頂面（相對於基準面之高程為84 m）。假設在礫石層中的地下水水位不受影響，而且岩盤上的地下水水壓因降水工程只降低了35 kPa，且在開始抽水後維持此定值。現地土壤為正常壓密黏土。黏土比重 (G_s) 為2.60，飽和時重量含水比 (w) 為30%。壓縮指數 (C_c) 0.28，回彈指數 (C_s) 0.03，壓密係數 (c_v) $4 \text{ m}^2/\text{year}$ ，彈性模數 (E_0) 15 MN/m^2 。砂土層彈性模數 (E_0) 30 MN/m^2 。請回答以下問題：

- (一)畫出水壓與有效應力隨深度分布圖，並計算各土層界面上之有效應力與孔隙水壓值：(1)
起始狀況 (第二含水層水壓下降前)；(2)壓密度達50%時；(3)壓密完成時。（13分）
(二)計算連續壁後方砂土層瞬時沉陷量。（6分）
(三)計算連續壁後方壓密完成時地表沉陷量。（6分）

<105年鐵路特考25分>





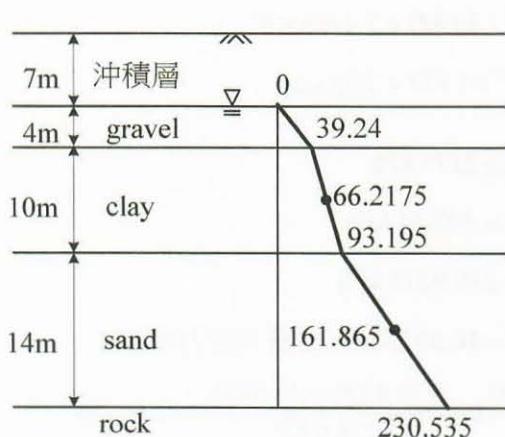
(一)

起始水壓力

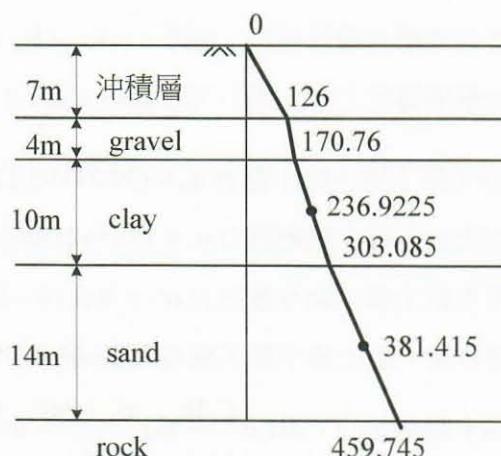
$$(98-94)\gamma_w = 4 \times 9.81 = 39.24 \text{ kPa}$$

$$(93.5-84)\gamma_w = 9.5 \times 9.81 = 93.195 \text{ kPa}$$

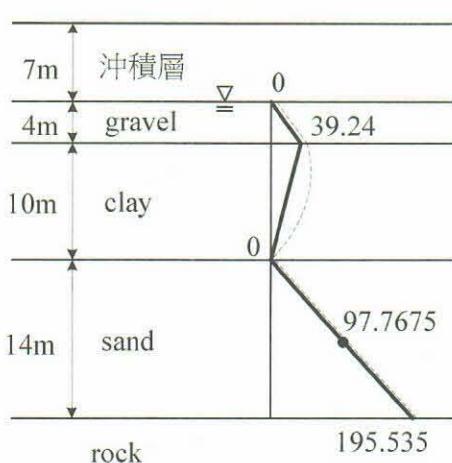
$$(93.5-70)\gamma_w = 23.5 \times 9.81 = 230.535 \text{ kPa}$$

岩盤面水壓力降 35 kPa , $230.535 - 35 = 195.535 \text{ kPa}$ 

起始水壓力分布圖(kPa)

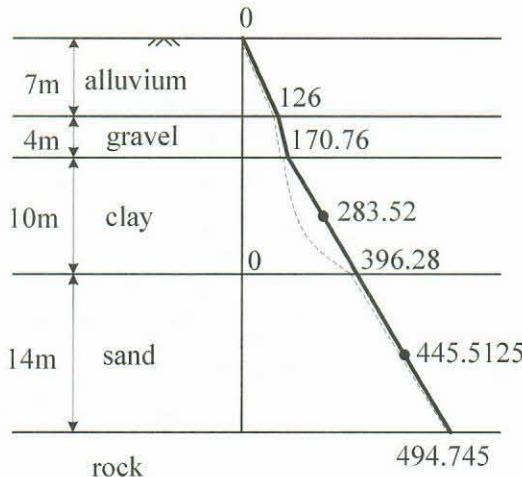


起始有效應力分布圖(kPa)



實線是完成壓密之 u_w (kPa)

虛線是 $U=50\%$ 之 u_w (kPa)



實線是完成壓密之有效應力(kPa)

虛線是 $U=50\%$ 之有效應力(kPa)

$$(二) 黏土層 \quad S_e = wG_s \quad 1 \times e = 0.3 \times 2.6 = 0.78$$

$$\text{黏土層} \quad \gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1 + e} \gamma_w = \frac{2.6 + 0.78}{1 + 0.78} \times 9.81 = 18.628 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{原先砂層中點總應力 } \sigma_v = 18 \times 7 + 21 \times 4 + 18.628 \times 10 + 21 \times 7 = 543.28 \text{ kPa}$$

$$\text{原先砂層中點水壓力 } u_w = (93.195 + 230.535) / 2 = 161.865 \text{ kPa}$$

$$\text{原先砂層中點有效應力 } \sigma'_v = 543.28 - 161.865 = 381.415 \text{ kPa}$$

$$\text{降水後，砂層中點水壓力 } u_w = (0 + 195.535) / 2 = 97.7675 \text{ kPa}$$

$$\text{降水後，砂層中點有效應力 } \sigma'_v = 543.28 - 97.7675 = 445.5125 \text{ kPa}$$

$$\text{砂層中點有效應力增量 } \Delta\sigma'_v = 445.5125 - 381.415 = 64.0975 \text{ kPa}$$

$$\text{此有效應力增量導致之應變 } \varepsilon = \Delta\sigma'_v / E_0 = 64.0975 / 30000 = 2.1366 \times 10^{-3}$$

$$\text{此應變導致之砂土瞬時沉陷量} = \varepsilon \times H_0 = 2.1366 \times 10^{-3} \times 1400 = 2.99 \text{ cm}$$

$$(三) 原先黏土層中點水壓力 $u_w = (39.24 + 93.125) / 2 = 66.2175 \text{ kPa}$$$

$$\text{原先黏土層中點總應力 } \sigma_v = 18 \times 7 + 21 \times 4 + 18.628 \times 5 = 303.14 \text{ kPa}$$

$$\text{原先黏土層中點有效應力 } \sigma'_v = 303.14 - 66.2175 = 236.9225 \text{ kPa}$$

$$\text{降水後，黏土層中點水壓力減量} = 66.2175 - 19.62 = 46.5975 \text{ kPa} = \text{有效應力增量}$$

$$\text{黏土壓密部分，} \Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.28 \times 1000}{1 + 0.78} \log \frac{236.9225 + 46.5975}{236.9225} = 12.66 \text{ cm}$$

$$\text{黏土層中點有效應力增量 } \Delta\sigma'_v = 46.5975 \text{ kPa}$$

此有效應力增量導致之彈性應變 $\epsilon = \Delta\sigma' / E_0 = 46.5975 / 15000 = 3.1065 \times 10^{-3}$

此應變導致之黏土瞬時沉陷量 $= \epsilon \times H_0 = 3.1065 \times 10^{-3} \times 1000 = 3.1065 \text{ cm}$

地表總沉陷量 $= 2.99 + 3.1065 + 12.266 = 18.36 \text{ cm}$

討論

1. 本題其實就是野外打井抽水問題，寫「連續壁」三個字，是讓更多人中計。
2. 解題與流線網無關。
3. 很多參數騙人用的，甚至題目給平均壓密度 U_{avg} 對時間因素 T_v 的曲線，嚇壞一票人，實際解題用不到。該曲線，是在黏土層上方含水層抽水的狀況下，黏土平均壓密度 U_{avg} 對時間因素 T_v 的曲線，一般教科書還不容易查到。但本題是在黏土層下方的含水層抽水，該圖並不適用，也用不到。
4. 考土力及基礎工程，MPa 的數據很少直接用，常是轉成 kPa 再計算。但是材料力學就常用 MPa 與 GPa，因為金屬可承受較大應力。

練 23 壓密沉陷量與速率計算

有一厚 8 m 之正常壓密黏土層位於砂土層上，地下水位於地表下 2 m 處。為加速其沉陷，於上方施加預載厚 6 m 之砂土層，則當壓密達 80% 時，黏土層將產生多少沉陷，且共需多少時間？假設黏土之 $\gamma_{sat} = 17 \text{ kN/m}^3$ ， $e_0 = 0.8$ ， $C_c = 0.27$ ， $c_v = 0.003 \text{ cm}^2/\text{sec}$ ， $T_{80} = 0.567$ ；砂土之 $\gamma_{dry} = 14 \text{ kN/m}^3$ ， $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$ 。

<104 年結構技師 25 分>



超載前，黏土層中點 $\sigma'_0 = 2 \times 17 + 2(17 - 9.81) = 48.38 \text{ kPa}$

應力增量 $\Delta\sigma' = 6 \times 14 = 84 \text{ kPa}$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.27 \times 800}{1 + 0.8} \log \frac{48.38 + 84}{48.38} = 52.46 \text{ cm}$$

$$0.8(\Delta H_c) = 41.97 \text{ cm}$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$0.567(400)^2 = 0.003t$$

$$\text{解出 } t = 30,240,000 \text{ sec} = 350 \text{ days}$$

練 24 壓密沉陷量與速率計算

某一具壓縮性的黏土層厚度為4 m，承受載重壓密1年後，達成50%壓密，發生8 cm的沉陷量。若承受相同的載重，性質相同黏土層之厚度為40 m，請計算1年及4年後，40 m厚黏土層之壓密沉陷量分別為多少？

<102年高考二級25分>



(一)

設為 NC clay，設 $\gamma_{sat} = 19.81 \text{ kN/m}^3$ ，設 $e = 0.8$ ， $C_c = 0.2$

4 m 的中點

$$\sigma'_0 = 2(19.81 - 9.81) = 20 \text{ kPa}$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma}{\sigma'_0} \quad 16 = \frac{0.2 \times 400}{1+0.8} \log \frac{20+q}{20}$$

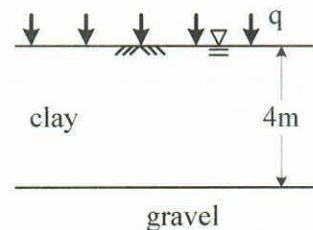
解出超載 $q = 25.817 \text{ kPa}$

設上下皆可排水

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$\Rightarrow 0.197 \times 2^2 = c_v \times 1$$

解出 $c_v = 0.788 \text{ m}^2/\text{year}$



(二)

40 m 的中點

$$\sigma'_0 = 20(19.81 - 9.81) = 200 \text{ kPa}$$

$$\Delta H_c = \frac{C_c H}{1+e} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma}{\sigma'_0} = \frac{0.2 \times 4000}{1+0.8} \log \frac{200+q}{200} = 23.43 \text{ cm}$$

依 $TH_{dr}^2 = c_v t$

$$T \times 20^2 = 0.788 \times 1$$

$$\Rightarrow T = 0.00197 = \frac{\pi}{4} U^2$$

$$\Rightarrow U = 0.05 < 60\% \quad \text{O.K.!}$$

$$(\Delta H_c)_{t=1} = 23.43 \times 0.05 = \underline{\underline{1.17 \text{ cm}}}$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$T \times 20^2 = 0.788 \times 4 \Rightarrow T = 0.00788 = \frac{\pi}{4} U^2$$

$$\Rightarrow U = 0.1 < 60\% \quad \text{O.K.!} \quad (\Delta H_c)_{t=4} = 23.43 \times 0.1 = \underline{\underline{2.34 \text{ cm}}}$$

討論

不可以認為黏土厚度變成 10 倍，壓密沉陷量就會變成 10 倍，因為雙方黏土中點，一開始的有效應力並不一樣大，而且 \log 並非線性函數。

有人不清楚什麼是超額孔隙水壓力？它和靜態水壓力有何分別？您躺過水床嗎？在您還沒躺上去，水床鬆軟軟，裏面的水只有靜態水壓力，如果水床高度 10 公分，水床裡的最大靜水壓約就是 0.1 tf/m^2 。

當您躺上去後(類比地表加超載 q)，水床裡的水壓力就會升高，所升高的部份就是超額孔隙水壓力。如果水床沒破洞，水流不走，這超額孔隙水壓力就一直存在，總水壓 = 靜態水壓力 + 超額孔隙水壓力。如果水床有極為微小的裂縫，水慢慢一點一點滲漏掉，超額孔隙水壓就會逐漸減少，水床就會逐漸變扁，這類比成地表下陷(黏土層壓密)。

如果是摔跤選手躺上去(類比地表加更大超載 q_1)，水床裡的水壓力會升得更高，類比成超額孔隙水壓升得更高。

練 25 壓密沉陷量與時間關係

某建物下方有一黏土層，建物載重施加 200 天後，造成 234 mm 壓密沉陷。依據實驗室壓密試驗結果顯示，此沉陷量對應 30% 的總壓密沉陷量。假設在壓密過程黏土層的壓密係數保持不變，試分別計算此建物載重施加 1 年、2 年、3 年及 4 年造成黏土層之壓密沉陷量。

<107年結構技師25分>



(一) 總壓密沉陷量 $\Delta H_c = 23.4 / 0.3 = 78 \text{ cm}$

依公式 $TH_{dr}^2 = c_v t$

本題 H_{dr} 與 c_v 不動，故 T 與 t 成正比

$$T_{200\text{天}} = T_{30} = \frac{\pi}{4} U^2 = \frac{\pi}{4} (0.3)^2 = 0.0707$$

$$T_1\text{年} = T_{365\text{天}} = 0.0707 \times 365/200 = 0.129 < T_{60} = 0.283$$

$$T_{365\text{天}} = 0.129 = \frac{\pi}{4} U^2 \quad \text{解出 } U_{365\text{天}} = 0.4053$$

$$\Delta H_{365\text{天}} = 0.4053 \times 78 = \underline{31.61\text{ cm}}$$

$$(二) T_2\text{年} = T_{730\text{天}} = 0.0707 \times 730/200 = 0.258 < T_{60} = 0.283$$

$$T_{730\text{天}} = 0.258 = \frac{\pi}{4} U^2 \quad \text{解出 } U_{730\text{天}} = 0.5731$$

$$\Delta H_{730\text{天}} = 0.5731 \times 78 = \underline{44.71\text{ cm}}$$

$$(三) T_3\text{年} = T_{1095\text{天}} = 0.0707 \times 1095/200 = 0.387 > T_{60} = 0.283$$

$$T_{1095\text{天}} = 1.781 - 0.933 \log(100-U) \quad \text{解出 } U_{1095\text{天}} = 68.8\%$$

$$\Delta H_{1095\text{天}} = 0.688 \times 78 = \underline{53.67\text{ cm}}$$

$$(四) T_4\text{年} = T_{1460\text{天}} = 0.0707 \times 1460/200 = 0.516 > T_{60} = 0.283$$

$$T_{1460\text{天}} = 1.781 - 0.933 \log(100-U) \quad \text{解出 } U_{1460\text{天}} = 77.31\%$$

$$\Delta H_{1460\text{天}} = 0.7731 \times 78 = \underline{60.3\text{ cm}}$$

討論

1. 遇到真實時間t，唯一的公式就是 $TH_{dr}^2 = c_v t$ ，這是歐陽上課口訣，別班已抄不回。
2. 背住 $T_{60} = 0.283$ ，考場就不用猜公式。如果不懂歐陽說什麼，須有危機意識，請來上課。
3. 考土壤力學，不要期待考卷給公式，這種期待很容易凸槌。
4. 沉陷速率越到後期越緩慢，時間比1:2:3:4，但沉陷量之比卻更小，4年的沉陷量不是1年的4倍。
5. 4年要算成1460天還是1461天，筆者認為都可以，一千四百多天，差一天不是命題者看的重點。真要吵，難道三年內就不會遇到閏年？
6. 歐陽的土力+基工題庫班課程，猛到連大地技師的難題都算給同學看。歐陽的土木技師地質題庫班課程，猛到連大地技師的地質答案都講解給同學。被歐陽磨過的學員，看107年結技考題，好軟喔，基本上是90分起跳。

【不要當公務員的 N 大理由】

這真的是我寫過最好、最黑色幽默的題目(之一)。

高普特考金榜題名，好像是很多朋友的讀書目標，不管土木、行政、民政、金融等類科。每年放榜時，聽聞媒體報導上榜者喜極而泣、諸親友的羨慕眼神、老父老母終於不用為孩子的下半輩子操心，彷彿一舉成名天下知，令人長了翅膀、吃了春藥，快樂得飛天登仙。

於是，你感到有為者亦若是，天將降大任於自己，決心到補習班朝聖，看著補習班文宣大肆宣揚公務員有多少多少福利、櫃檯琳瑯滿目的榜單與考取經驗談，在腎上腺素協助之下，你大言不慚的指著牆壁說「這個位置我預定下來了，明年請貼我的榜單以及我的榜首經驗談…。」

花開花又落……春去秋又來…兒童相見不相識…笑問客從何處分發來……

兩年過後的今天，你已經度過一年公務人員生涯，有一天收到歐陽的 e-mail 曰「請你提供不要當公務員的五大理由」，你壓抑的情緒終於爆發了，「幹 s(複數要加 s)，何止 5 個理由，50 個理由我都可以送給你。」

族繁不及備載，以下僅列舉一些學長學姊們的苦海意見：

1. 民意高漲的年代，公務員是「心靈慰安婦」，越有品格文化修養的公務員(部長、院長等)，是越高級的女優，而且免費。部分低級沒品的民眾，可以利用電子郵件、FB、line、手機、電話、媒體無限享用免費公娼。任何事情既然免費沒有成本負擔，不用白不用，一定造成浪費亂用。當然，有些民眾的品格、文化修養俱屬上乘。
2. 公務員的長官沒有擔當、沒有肩膀，官字兩張口，要屬下(i.e., you)蓋章時是一副嘴臉，出事時是另一副嘴臉 + 另一種遁辭，在法庭上責任全推給承辦人(i.e., you)。
3. 長官要你為民服務或辦理某業務須「突破法令限制」，由於考績操之在長官，你只好「突破法令限制」，果然次年考績甲等。7 年後，有人檢舉，你被檢調單位約詢，檢調單位說「突破法令限制就是違反法的限制」，登時傻眼，請問公務人員可以「突破法令限制」嗎？身為公務員的你，可以抵抗考績乙等嗎？

4. 你的能力太好，業務太早做完，見你閒，科長立刻調派業務增量給你(注意薪水維持不動)。而隔壁那位一天到晚喊業務多(其實不多)的大伯大嬸，只抱著一件業務做三年，領的薪水竟比你還多。
5. 查緝公務員不法是檢調的優先選項，抓到時加速升遷。土木公共工程的金額龐大，一個工程造價數億元只是一盤小菜，承辦人員或其長官的一個小舉動，可能使廠商損失或得利上百萬，因此各種誘惑絡繹不絕來到，享用時如何不被抓到？如何把持端正？實在令人困擾，為什麼都沒有廠商揪我，也令人困惑。

(廉政署針孔錄影中，請微笑)

6. 公務員是各級民意代表的俎上肉。中央部會的承辦人常被立法委員霸凌；縣市政府的承辦人常被縣市議員霸凌；鄉鎮市公所的承辦人常被市民代表霸凌；霸凌內容大部分要承辦人辦違法、灰色地帶的關說請託案，因為合法的不用人講早就辦完了。
7. 自己常常要打臉自己。本來這路瀝青混凝土剛刷新鋪沒多久，照規定不可以開挖，甲民眾申請開挖，果然被承辦人和科長打槍，理由是「按規定辦理」。乙民眾偕同議員前來申請開挖，承辦人(或科長)立刻打臉自己，立馬同意開挖，理由是「民生必須」。
8. 某年品管班，中央大學教授曰「據吾統計，公務人員被判刑最多的就是『技士』。」
9. 行事懶散、志氣消沉，米蟲的代名詞。業務處理得再快，是那個死薪水；業務慢慢處理，也是那個死薪水，有什麼誘因讓人快快做？做那麼快是趕著去死嗎？所以，造就一個慢吞吞的大環境，新人進來，很容易就受影響而行事懶散、志氣完成壓密沉陷。公務員體系是一個龐大機器，個人只是其中一個很小的齒輪，當其他齒輪不想快轉，個人的徒然快轉就會變空轉，自我內傷磨耗之外，還會被其他齒輪指責。
- 10.無聊、笨、推、拖、踢。公務員常常是一件重複的程序做上萬次，工作內容無聊到爆，好像是生產線上的作業員。有創意者常常被打槍，長官不敢為你的創意背書，甚至檢調質疑你的動機，約你喝咖啡，故保守不出錯為要。也因為無法花招百出，所以逐漸變笨，要變笨才能融入環境。
- 11.要學會無恥才能保官位與升官。某市的交@局長，在市長選舉前信誓旦旦的說「鐵

路高架化最好」。結果現任市長選輸了，新市長一上台，該局長立馬改口「鐵路地下化最好」，官位果然保住。無恥又怎樣？無恥又不必多納稅，捧長官 LP、保官位與升官最重要，官場現形記天天上演哪！

- 12.別人的錯常常算到你頭上。每個月都有公務員因廉潔問題、金錢問題、酒家問題而上媒體，雖然離你十萬八千里，但只要你表明「我是公務員」，人家立刻開幹「就是你們這群公務員…」，你就概括承受。如果是私人企業員工有廉潔、金錢、酒家問題，社會輿論譴伐的力道輕很多。
- 13.加薪幅度低。起薪雖然比業界高，但加薪速度遠低於黏土的排水速度，過 5~10 年，薪水就輸給業界的朋友。如果想賺大錢、開雙 B、住豪宅，不要當公務員。
- 14.有皇親國戚背景的人，業務量少，考績佳，努力辦業務的人氣到吐血沒人憐。
- 15.公務員不是有志難伸，是無法伸，「依法行政」緊箍咒下，不是你想做什麼，你就能做什麼。長官眼中只有升官、選票考量與政治利益，任何長遠政策超過長官法定任期就不必考慮了，公務員只是長官手中的棋子。有志要伸，去民間企業，自己創業。
- 16.民意至上，專業拿來洗內褲用。民意是複數，但現在張三、李四、屁孩隨便叫叫，也說「我是民意」，社會大眾理解民意是複數的人似乎不多，正反意見都叫民意，這種情形之下，施政違反一個人的意見也是違反「民意」，「民意」已經是公用內褲，正面穿完翻反面再穿，民意已經朝民粹傾斜，專業意見拿來洗內褲都不夠資格。
- 17.無理的民眾亂鬧，還要和顏悅色取悅他，公僕做到像公奴。若跟他據理以爭，人很快就黑掉，再加以部分腦殘媒體報導，所以「技①」永遠是黑①，不是紅②。
- 18.福利永遠被檢討。每逢到發放年終獎金時刻，公務員、國營事業員工的績效就準時被拿出來檢討，業界景氣好時也檢討公務員福利，景氣不好時更檢討。
- 19.2018 年對公務員不友善的政黨大砍公務員退休金，並發動國家機器宣傳這是「改革」，營造「抗拒改革是全民公敵」的氛圍，以掩飾無能振興經濟(無能力讓大家賺錢)之實。如果一開始告訴你「你忙了 40 年，要砍你退休金」，你願意進來做嗎？。
- 20.轉業困難。進公務體系後，土木專業逐漸萎縮，變成只會寫公文，未來轉業時，私

人企業很難承認這種經歷是有效的。(超額孔隙水壓太多，有效應力少)

21.封閉自我進修之路。民間企業員工為了增加競爭力，會自我花錢、花下班時間進修學習，因為有加薪升官誘因。但是公務員的研習上課，常常非公費全額支應就不願意去，硬被叫去就去睡覺、滑平板滑手機，因為研習回來之後，無法改變大環境，薪水還是公定價嘛！研習變成一種必須辦的「形式」。

以上空白版面留給歷年上榜者發表(很大吧！等你唷)。

科科科，歐陽你寫那麼多，難道是叫我不要考，讓別人漁翁得利嗎？噓，小聲點，既然你這麼聰明識破，這等智商為何還要考公務員？不要告訴我你打算「人在公門好休息修行」(抱歉又打錯字)、「磨練 EQ」、「我不入地獄，誰入地獄」、「拯救苦海，地獄未空，誓不成佛」。



第七章 剪力強度

體 系 表

- ☆土壤之強度準則
 - ☆直剪試驗(Direct Shear Test)
 - ☆孔隙水壓力參數
 - ☆三軸之CD試驗
 - ☆三軸之CU試驗
 - ☆三軸之SUU試驗
 - ☆無圍壓縮試驗UC
 - 十字片剪試驗VST
 - ☆應力路徑(Stress Path)觀念
 - ☆常見之應力路徑
- 應力路徑應用

學 習 重 點

1. 土壤的強度試驗，幾乎是必考題目。CD、CU、SUU、UC 試驗的計算題一定要會，計算題一定要畫表格釐清思路。在圖書館解完後請畫總應力莫爾圓、有效應力莫爾圓、總應力強度線、有效應力強度線，有一個畫不出來，就是觀念有盲點。
2. 工程有加載或開挖，導致不同土壤產生 u_e 有正也有負，故土壤長短期有效應力與強度不同。各種不同試驗做出來的強度參數不同，這些強度參數在哪些場合使用？常考喔。
3. 應力路徑可以清楚描述土體受力過程，並協助研判工程進行後，土體是否容易破壞。簡單的應力路徑要會畫，該畫 45° 就拿量角器據實以畫。

一針見血講：本章重點是求出土壤在排水與不排水前提下，表現出來的抗剪強度參數(c, ϕ)，還有各種室內試驗所對應的實務(現場)上意義。

土壤力學裏，最常考的章節就是土壤剪力強度(Shear Strength)。基礎工程，就是土壤剪力強度的運用。人造結構物，不論樓房、橋樑、擋土牆、基樁等等，不是座落在岩盤上，就是土壤上。土壤究竟能夠提供多少承載能力？如何測知它的承載能力？哪些因素影響它的承載能力？其答案均藏在土壤的剪力強度裏。在基礎工程裏，擋土牆背後的土壓力大小若干？邊坡是否穩定？建築物下方土壤能提供多少承載力？臨時性擋土設施該貫入多深？承受多少土壓力？基樁提供多少承載力？這些都和土壤的剪力強度參數(c, ϕ)有關。

第七章將教導如何求得土壤剪力強度參數(c, ϕ)及其使用上對應的工程狀況，本章是打開基礎工程的鑰匙，更是鯉魚躍龍門、金榜題名的墊腳石、通關密語。

為了測知土壤的剪力強度參數(c, ϕ)，試驗室內發展出許多試驗，請想想人們不是為了打發閒暇，才發展出許多試驗，而是為了對應各種不同的現地狀況(eg：加載方式、解壓的過程、加解壓方向、排水快慢)，才在試驗室內「複製」現地狀況。試驗室所求得的剪力強度參數(c, ϕ)，只能用在原先所(模擬)對應的現場，而不能夠「一帖藥各種病人都吃」。

為何不討論土壤的「抗拉強度」、「抗壓強度」，卻講土壤的「抗剪強度」呢？因為土壤抗拉能力超弱，人類不會拿土壤來抗拉。土壤承受壓力的能力比承受拉力優秀，所以人類設計讓土壤受壓，例如獨立基脚、筏式基礎壓在土壤上。但是人類觀察到：這些受壓的土壤，破壞時產生相對滑動破壞面，土壤在破壞面兩側相對滑動，就像混凝土圓柱試體受壓，產生 X 狀或 45° 剔裂線的破壞面，破壞面兩側材料是相對滑動，這其實是剪力破壞，所以要研究土壤的抗剪強度。單一土顆粒相當難被壓壞、壓碎，但是容易和另一土顆粒產生相對滑動，這是土顆粒和土顆粒之間的抗剪失敗。土壤的抗剪強度，我們也稱土壤的剪力強度，慣用符號是 τ_f 。

題外話：混凝土圓柱試體的抗壓試驗，破壞時其實是材料發生剪力破壞。

§7-1 土壤之強度準則

「失敗」這個概念，在土壤力學裏指滑動面產生的剪應力(作用力)，大於或等於滑動面的剪力強度(抗剪強度)。在基礎工程裏，則再包含土體變形過大(沉陷量過大)，導致上部結構物或桿件失去服務性，土壤較不可能發生挫屈失敗。

若把土壤和其他土木材料相比，土壤相對屬脆性材料^{註1}，其抗拉的能力最薄弱，抗壓能力最強(單一土顆粒很難被壓碎)，抗剪能力居中，請注意到其抗剪能力比抗壓能力差。土顆粒在被壓碎之前，經常就先烙跑——和隔壁顆粒產生相對滑動。顆粒性材料(eg：砂土)的破壞，很容易發生相對滑動的模式。

人類也發現，對同一種土壤，它的抗剪強度(τ_f)並非定值，若土壤承受的正向應力 σ 越大，它表現出來的抗剪強度(τ_f)就越大，就像你越用力把書本壓在桌面，別人想抽走就越困難，這就是靜力學裏靜摩擦力的理論——最大靜摩擦力 F_{max} 和正向力 N 大小成正比， $F_{max} = N \times \mu_s$ 。法國科學家庫侖(C.A. Coulomb)提出：對於無凝聚性的土壤，抗剪強度 $\tau_f = \sigma \times \tan \phi$ ， ϕ 是土壤的內摩擦角(Internal Friction Angle)， ϕ 是一種「剪力強度參數」， $\tau_f = \sigma \times \tan \phi$ 就是無凝聚性土壤的破壞準則。注意喔，「抗剪強度」 τ_f 不是定值，端賴正向應力 σ 大小而定。這和鋼筋大異其趣，鋼筋的降伏強度(σ_y)或極限強度(σ_u)是定值，並非正向應力的函數。

若土壤有凝聚力(Cohesion) c ，則土壤的抗剪強度 τ_f 為： $\tau_f = c + \sigma \times \tan \phi$ [7.1]

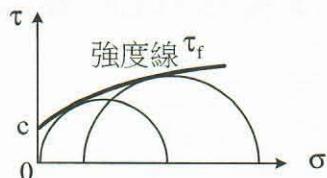


圖 7-1 真實土壤強度準則線

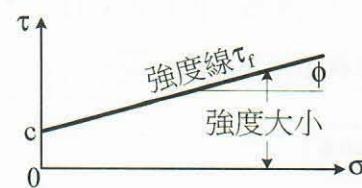


圖 7-2 理想化土壤強度準則線(數學上簡單)

公式[7.1]就是土壤的強度準則，或說破壞準則(Failure Criterion)，它其實是進行剪力試驗後的破壞包絡線之簡化版，非理論導出。圖 7-1 凹口向下，故當正向應力過大時，公式[7.1]偏

註 1：天底下萬般事物都有，這句話不能講絕對正確。某些高塑性黏土，受壓正向應變可以達 20% 還不破壞，這樣延展性已經非常好，而對於砂土，就表現不出這樣的延展性。

危險側(高估強度)。注意 c 和 ϕ 是「剪力強度參數」(Shear Strength Parameters)， τ_f 是剪力強度(或抗剪強度)。公式[7.1]的物理意義是「強度」，其直線圖形白話可稱為強度線。

依據材料力學應力莫爾圓觀念，受力的土壤微素，在不同切平面上所受正向應力不同；不同的正向應力，依據公式[7.1]，就造成不同切平面的抗剪強度(τ_f)不同。

土體裏任何一個微素受力，依據應力莫爾圓的觀念，可畫出專屬的莫爾圓，莫爾圓物理意義是「外力圓」，它表示微素的受力狀況，土體是否破壞，就是看強度與外力的鬥爭結果。當外力圓低於強度線^{註2}，土體就未破壞；當外力圓切到強度線，土體就瀕臨破壞，此時代表某一切平面上的剪應力(指外力)，正好等於抗剪強度 τ_f ；當外力圓超過強度線，土體已經破壞。

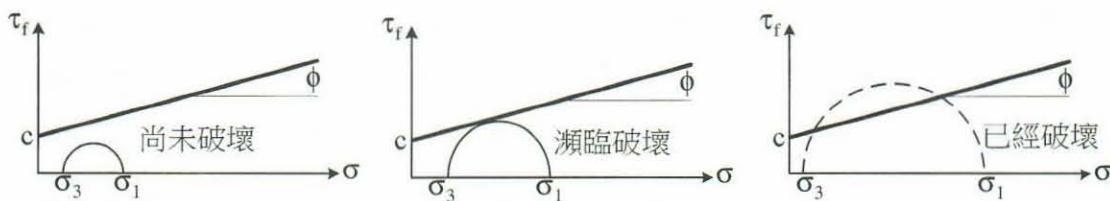


圖 7-3 安全(左)、瀕臨破壞(中)、已經破壞(右)

不同工址的土壤，其剪力強度參數(c, ϕ)不同，直剪試驗或三軸試驗的目的，就是求出 c 與 ϕ ，供工程分析或設計用。 c 的單位是應力，在土壤力學裏，應力是用小寫符號。

由於土顆粒之間摩擦才能提供剪力強度，水與空氣均不能提供抗剪強度，嚴格講公式[7.1]應該以有效應力表達方為正確，即

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi' \quad [7.2]$$

c' 和 ϕ' 是有效(effective)強度參數，或稱排水(drained)強度參數。部分建築師常講靜止角、安息角(Angle of Repose)，如卡車車斗往後仰起傾洩砂土，砂土自然形成的坡角就是靜止角、安息角。這是砂土在最疏鬆狀態下能保持的最陡角度。一般而言，同一種砂土，內摩擦角比安息角略大。若把砂土夯實，則坡角可維持較陡，但無法超過 ϕ' 。

註 2：這句話只能講大概正確，不是精緻正確，因為我們沒有把第四象限的強度線與莫爾圓的下半圓畫出來。

材料力學裏有各種不同的強度準則，土壤所適用的，和鋼筋所適用的不同，欲延伸閱讀者請參考拙著《材料力學論衡》第十二章。在材料力學裏，結構鋼的應力—應變曲線一定先教，因為後續各章節的公式幾乎都用到彈性係數 E 。但是土壤的應力—應變曲線與剪力強度卻是最後一章才教，相當耐人尋味，Why？你有什麼想法呢？因為結構鋼等材料，大部分設計在彈性階段為人類提供服務，因此彈性係數 E 很重要，想知道彈性階段的變形量(eg: $\delta = \frac{NL}{AE}$ 、 $\delta = \frac{PL^3}{3EI}$ 、…等等)、並聯系統力量分配必須靠 E ，這樣才能做分析與設計，故 E 值先教。而土壤的彈性階段不大，工程上受力後常進入塑性階段，土壤又有記憶性，解壓表現常不等於原始的加壓表現，彈性係數並不常用，再者求一般指數性質、土壤分類、滲透性、壓密速率， E 又派不上用場，所以土力裏，土壤應力—應變曲線沒有必要非得提前出現。

對同一工址的試體，針對它進行排水剪力試驗與不排水剪力試驗，所得到的剪力強度參數(c 與 ϕ)不一樣，這就是考試最愛考的，鋼筋並沒有這樣的特性。土壤受力時，來不來得及排除超額孔隙水壓對土壤很重要，嚴重影響土壤表現出來的強度，可是對鋼筋卻沒差，鋼筋泡在水裡拉，或在空氣中拉，強度差別不大。你打算考上榜首嗎？那你各科交錯比較的功力練到哪裡？當然這是一個很高的挑戰，我希望你試試，看歐陽的著作可以事半功倍。

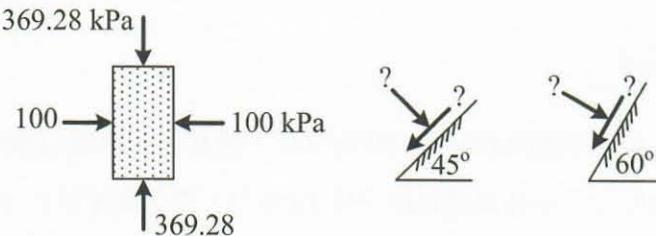
例 7-1.1 建立基本觀念

某土壤經廣泛試驗，得知其破壞準則 $\tau_f = 20 + \sigma \tan 30^\circ$ ，單位 kPa。若試體承受應力如圖，

(一)請問在傾斜 45° 的平面上，正向應力、剪應力(作用力)與剪力強度 τ_f 為若干 kPa？

(二)請問在傾斜 60° 的平面上，正向應力、剪應力(作用力)與剪力強度 τ_f 為若干 kPa？

(三)請問傾斜 45° 的平面與傾斜 60° 的平面，哪個平面的剪應力(作用力)大？哪個平面發生剪力破壞？為什麼？



$$(一) \text{依 } \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{100 + 369.28}{2} + \frac{100 - 369.28}{2} \cos(-90^\circ) - 0 = 234.64 \text{ kPa} \quad (\text{作用力})$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{100 - 369.28}{2} \sin(-90^\circ) + 0 = 134.64 \text{ kPa} \quad (\text{作用力})$$

$$\tau_f = 20 + \sigma \tan 30^\circ = 20 + 234.64 \tan 30^\circ = 155.47 \text{ kPa} \quad (\text{抗剪強度})$$

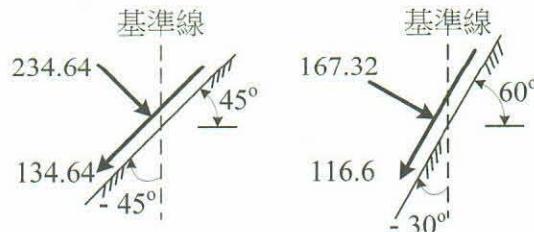
$$(二) \text{依 } \sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{60^\circ} = \frac{100 + 369.28}{2} + \frac{100 - 369.28}{2} \cos(-60^\circ) - 0 = 167.32 \text{ kPa} \quad (\text{作用力})$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tau_{60^\circ} = \frac{100 - 369.28}{2} \sin(-60^\circ) + 0 = 116.6 \text{ kPa} \quad (\text{作用力})$$

$$\tau_f = 20 + \sigma \tan 30^\circ = 20 + 167.32 \tan 30^\circ = 116.6 \text{ kPa} \quad (\text{抗剪強度})$$



(三) 45° 平面，作用的剪應力較大，但破壞面是發生在 60° 的平面。

原因是 60° 的平面雖然剪應力(作用力)較小，但已經到達抗剪強度 τ_f 值了，故先破壞。 45° 的平面雖然剪應力(作用力)較大，但卻低於 45° 平面的抗剪強度 τ_f 值。

討論

若不知道為何出現 -90° 與 -60° ，請查第四章應力莫爾圓的符號法則與基準線角度規定。應力轉換公式只在算微素所受應力(外力，對微素而言)。 τ_f 的意義是強度。

讀者要建立全新觀念：土壤的抗剪強度並非單一定值，而是受有效正向應力影響。兩個不同的傾斜面，因為有效正向應力不同，所以抗剪強度 τ_f 不同。兩個傾斜面來比誰先破壞，不是

受剪應力大的平面先破壞，而是「作用力能夠達到抗剪強度」的平面先破壞。

土體受力若能排水，有效正向應力會上升，導致抗剪強度上升。土體受力若不能排水，有效正向應力無法上升，導致抗剪強度無法上升。

「畫出應力莫爾圓與 O.P.」，能幫助你求出任一平面的(σ, τ)，但莫爾圓無法告訴你這組(σ, τ)是否造成土體沿該平面破壞。「得到強度線方程式」，能幫助你判斷某組(σ, τ)是否造成土體沿該剖面破壞，但無法幫你求任一平面的(σ, τ)值。兩者相輔相成，你才知道任一平面的(σ, τ)是否造成土體破壞。你畫出本題的莫爾圓與強度線了嗎？

§7-2 直剪試驗(Direct Shear Test)

直剪試驗的直剪盒可以是方形或圓形，裝置如圖 7-4，裝置可以選擇排水或不排水，破壞面強制在水平面。若取三個同一工址、初始孔隙比 e 相同的試體，第一個試體給予正向應力達 σ_{v1} 之後，正向應力維持不變，才開始施予側力推動直剪盒，側向位移量是 Δ ，記錄側力大小可算出水平面上的尖峰(Peak)剪應力 τ_{p1} ，以及達大應變時的殘餘(Residual)剪應力 τ_{r1} 。同樣對第二個試體進行類似過程，只不過所加的正向應力是 σ_{v2} ，尖峰剪應力是 τ_{p2} ，殘餘剪應力是 τ_{r2} ；第三個試體所加的正向應力是 σ_{v3} ，尖峰剪應力是 τ_{p3} ，殘餘剪應力是 τ_{r3} 。

依據以上三組試體的(τ, Δ)、(σ_v, τ_p)與(σ_v, τ_r)，可以畫出圖 7-5、圖 7-6 與圖 7-7。圖 7-6 代表土壤在尖峰強度的破壞包絡線，圖 7-7 代表土壤在大應變下，殘餘強度的破壞包絡線。

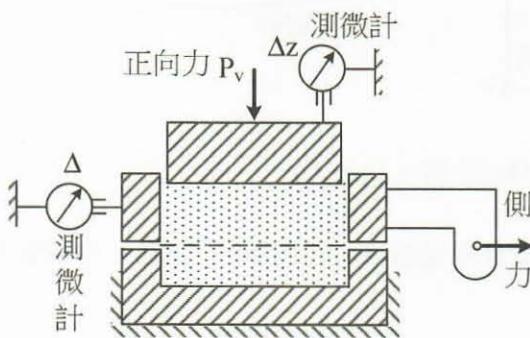


圖 7-4 直剪試驗裝置示意圖

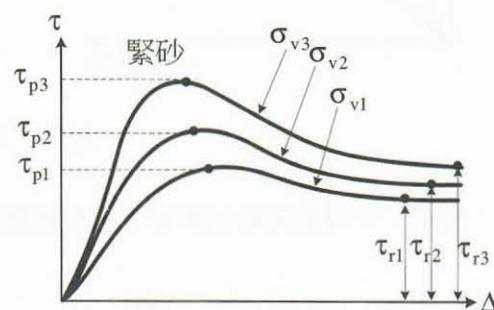


圖 7-5

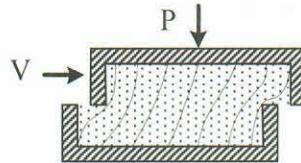


圖 7-5(a) 直剪試驗試體剪應變不均勻(邊緣大)

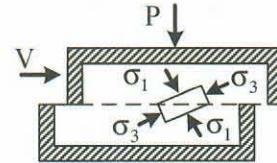


圖 7-5(b)破壞時主應力旋轉

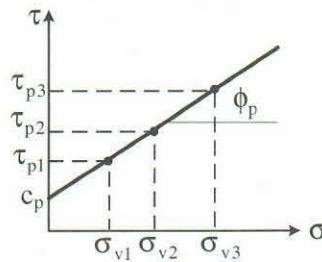


圖 7-6

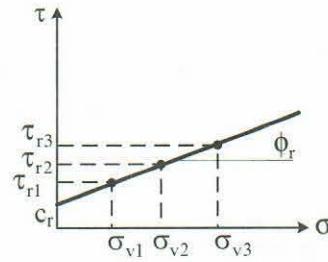


圖 7-7

ϕ_p 是尖峰(peak)內摩擦角， ϕ_r 是殘餘(residual)內摩擦角，對同一種土壤， $\phi_r < \phi_p$ 。對於漸進式破壞(Progressive Failure)^{註3}的邊坡，失敗前夕，部分土壤已經經歷大應變，該部分土壤強度表現出來的內摩擦角是 ϕ_r ，工程師不可樂觀的以 ϕ_p 估計剪力強度。

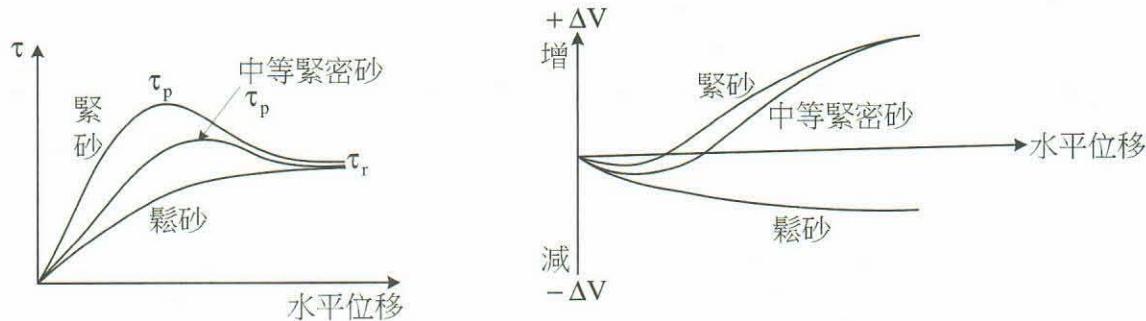


圖 7-8 直剪試驗(在排水狀況下)

緊砂、中等緊密砂與鬆砂，直剪試驗時應配合現場選擇可排水條件。緊砂、中等緊密砂試

註 3：漸進式破壞指破壞面係逐漸形成，非一氣呵成的破壞，破壞面上，不同點的應變不一樣，不同點展現出來的抗剪強度不一樣，該使用的剪力強度參數也不一樣，分析困難度提高。

驗中會出現尖峰強度，鬆砂無尖峰強度。來自同一工址的緊砂、中等緊密砂與鬆砂，大應變時會達相同的殘餘強度 τ_r ，如圖 7-8。因為排水，故試體體積會變化，緊砂、中等緊密砂與鬆砂一開始體積都會減少，但緊砂、中等緊密砂在大應變時體積會增加，此稱剪脹性(Dilatancy)。

直剪試驗中，又區分快剪(Quick, Q)、慢剪(Slow, S)、壓密快剪(R)三種。按英文字母順序，Q 與 S 之間是 R，所以取壓密快剪的代號為 R。

快剪(Quick, Q)：意指側向剪動速率快，讓試體在剪動階段來不及排水，模擬現場黏土層迅速加載，來不及排除超額孔隙水壓的狀況，求此狀況下對應的強度參數。由於不欲使試體排水，故應該使用無孔洞的夾土鉗。砂土不應使用快剪，因現場砂土一般來得及排水。

慢剪(Slow, S)：意指側向剪動速率慢，讓試體在剪動階段可以排水，模擬現場砂土層受載，可以排除超額孔隙水壓的狀況，求此狀況下對應的強度參數。如果黏土層受載的速率很緩慢，導致受載所產生的超額孔隙水壓來得及排除，那也可以用慢剪試驗求強度參數。由於欲使試體排水，故應使用有孔洞的夾土鉗。^{註4}

壓密快剪(R)：先讓試體在正向應力下完成排水壓密，再迅速剪動，讓試體在剪動階段來不及排除超額孔隙水壓，模擬現場黏土層壓密完成後，迅速加載，來不及排除超額孔隙水壓的狀況，求此狀況下對應的強度參數。

直剪試驗的優點是：

1. 迅速、操作簡單，尤其對於粒狀土壤。
2. 可直接計算破壞面的剪應力(平均值)。
3. 所花經費少。
4. 砂土不易準備三軸試驗的試體，砂土比較容易針對直剪試驗準備試體。
5. 若土壤與結構物水平基底面產生相對滑動，則直剪試驗結果可應用之。

直剪試驗的缺點是：

1. 無法測量孔隙水壓，對排水的控制，不如三軸試驗。

註 4：請不要以為砂土「排水快」，故應使用快剪，其實應該使用慢剪，方能在試驗中排除超額孔隙水壓。

同理，不要推論「黏土排水慢，故使用慢剪」。

2. 破壞面由人為強制定在水平面，而水平面未必是試體內最弱的面。
3. 破壞並非均勻產生，是先從直剪盒的邊緣剪裂，最後才是盒中央剪裂，為漸進式破壞。
4. 盒的邊緣，應力集中明顯，應力並非均勻分佈。
5. 對黏土的試驗誤差大。
6. 會產生主應力旋轉(Rotation of Principle Stresses)^{#5}，想知道主應力的方向，非得先知道破壞包絡線不可，而破壞包絡線卻須等到數個試體破壞後，才能迴歸畫出。
7. 剪動時，土壤的水平有效斷面積不斷在改變，影響應力計算精確度。

底下討論有一莫爾圓正好切到強度線，請問在此特殊狀況(瀕臨失敗)，強度參數 c 、 ϕ 與微素外力(主應力) σ_1 、 σ_3 四者有何關係？

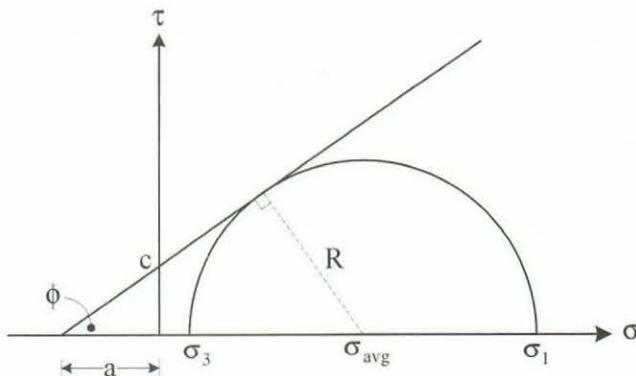


圖 7-9

$$\text{圓半徑 } R = (a + \sigma_{\text{avg}}) \sin \phi = \left(\frac{c}{\tan \phi} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \phi = c \cos \phi + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \phi$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2R = \sigma_3 + 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi$$

$$\text{移項得 } \sigma_1(1 - \sin \phi) = \sigma_3(1 + \sin \phi) + 2c \cos \phi$$

$$\text{整理得 } \sigma_1 = \sigma_3 \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} + 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

$$\boxed{\text{再整理得 } \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi}{2}) + 2c \tan(45^\circ + \frac{\phi}{2})} \quad [7.3]$$

註 5：主應力旋轉的意思：主應力從水平、垂直方向，旋轉到某個傾斜方向。三軸試驗破壞時的主應力正好是在水平、垂直方向，故主應力不旋轉。直剪試驗破壞時水平面有剪應力，主應力不在水平、垂直方向，而是旋轉到和水平面夾 $45^\circ \pm (\phi/2)$ ，請強者自行證證看。《解說基礎工程》有解。

亦可寫成 $\sigma_1 = \sigma_3 K_p + 2c\sqrt{K_p}$ ， K_p 稱被動土壓力係數。

$$\text{若以有效應力表達, } \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) \quad [7.4]$$

上式稱為土壤力學憲法第一條或稱一級方程式(Formula 1)，媲美結構學的傾角變位法公式，黑白郎君看到說「別人的失敗就是我的快樂」(因為土壤失敗)，金庸迷說「段正淳，納命來」(終結試體性命)，都是沒背就應該節省報名費的公式。

國中數學三角學知識：

$$\begin{aligned} \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} &= \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \cos^2 \frac{\phi}{2} - 2\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}} = \frac{(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})^2}{(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})^2} = \left[\frac{(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})}{(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})} \right]^2 \\ &= \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi}{2}} \right]^2 = \left[\frac{\sin 45^\circ \cos \frac{\phi}{2} + \cos 45^\circ \sin \frac{\phi}{2}}{\cos 45^\circ \cos \frac{\phi}{2} - \sin 45^\circ \sin \frac{\phi}{2}} \right]^2 = \left[\frac{\sin(45^\circ + \frac{\phi}{2})}{\cos(45^\circ + \frac{\phi}{2})} \right]^2 \\ &= \tan^2(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \end{aligned} \quad [7.5]$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos\phi}{1-\sin\phi} &= \frac{2\cos^2 \frac{\phi}{2} - 1}{\sin^2 \frac{\phi}{2} + \cos^2 \frac{\phi}{2} - 2\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}} = \frac{2\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} - \cos^2 \frac{\phi}{2}}{(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})^2} = \frac{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}{(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})^2} \\ &= \frac{(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})}{(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})^2} = \frac{\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\phi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\phi}{2}} = \frac{\sin(45^\circ + \frac{\phi}{2})}{\cos(45^\circ + \frac{\phi}{2})} \\ &= \tan(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \end{aligned} \quad [7.6]$$

三角函數恆等式：

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad [7.7]$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad [7.8]$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \quad [7.9]$$

學理上直剪試驗會有兩個破壞面，一個是水平面，另外一個和水平面夾 $90^\circ - \phi'$ ($= \alpha_f$)，其

方位受剪動方向影響，不要畫錯，可參考下圖，圓周左上方切線必須和半徑垂直，故 $\lambda + \phi' = 90^\circ$ ，又因等腰三角形有 $\lambda = \alpha_f$ ，是故證出 $\alpha_f = 90^\circ - \phi'$ 。

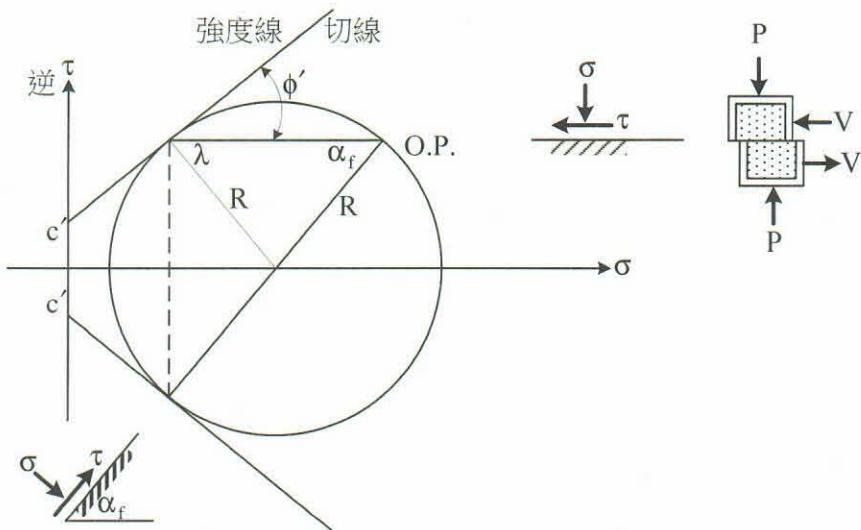


圖 7-10

例 7-2.1 直剪試驗

某風乾砂土試體進行直接剪力試驗，試驗時施加 60 kPa 之垂直正向應力，假設此砂土之內摩擦角 ϕ 為 31 度，試驗時，砂土之破壞面為水平面，試求：

- (一) 試體受剪破壞時，所需作用在破壞面上之剪應力為若干 kPa？
- (二) 假設剪應力作用方向在試體頂部是由右向左，試以莫爾圓 (Mohr's circle) 繪出上項之結果，並在莫爾圓上標示破壞點及極點 (pole) 位置 (需標示座標值)，以及兩組破壞面之方向 (角度)。
- (三) 試求其最大主應力 (major principal stress) 及最小主應力 (minor principal stress) 之作用方向及大小分別為若干 kPa？

<99年高考二級25分>



莫爾圓是一個完整的圓，畫出下半圓，就有另一個破壞面。

$$(1) \text{ 參考圖 a, } \tau_f = 60 \tan 31^\circ = 36.052 \text{ kPa}$$

$$(2) \overline{OA} = \sqrt{60^2 + 36.052^2} = 70 \text{ kPa}$$

$$\text{圓心座標值 } \sigma_{\text{avg}} = \frac{\overline{OA}}{\cos \phi} = 81.662 \text{ kPa}$$

$$\text{求極點座標: } 81.662 + (81.662 - 60) = 103.324 \text{ kPa}$$

極點(Pole)位置 $(103.324, 36.052)$

破壞點有 A、B 兩點，A 位置 $(60, 36.052)$ ，B 位置 $(60, -36.052)$

$$\alpha = 90 - \phi' = 59^\circ$$

破壞面有兩組，即 O.P. 往 A 連線及 O.P. 往 B 連線

一組是水平面，另一組與水平面夾 59° ，如圖 a 示。

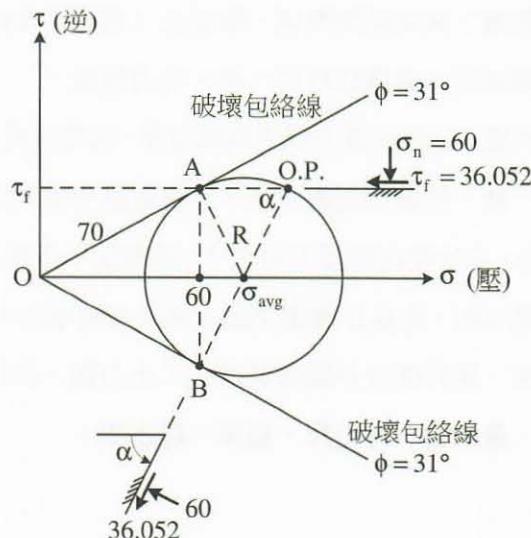


圖 a unit: kPa

$$(3) \text{ 最大主應力 } \sigma_1 = \sigma_{\text{avg}} + R = 81.662 + 70 \tan 31^\circ = 123.72 \text{ kPa}$$

$$\text{最小主應力 } \sigma_3 = \sigma_{\text{avg}} - R = 81.662 - 70 \tan 31^\circ = 39.602 \text{ kPa}$$

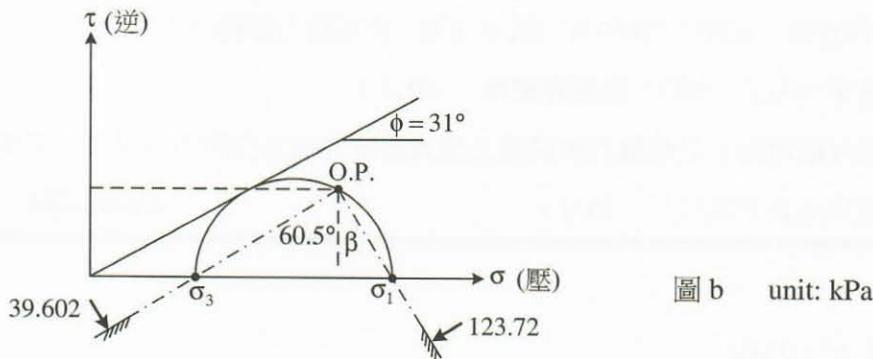


圖 b unit: kPa

$$\text{參考圖 b, } \tan \beta = \frac{123.72 - 103.324}{36.052} = 0.5657$$

$$\Rightarrow \beta = 29.5^\circ$$

$$90^\circ - \beta = 60.5^\circ$$

最大主應力箭頭與水平面夾 29.5° ，如圖 b。

最小主應力箭頭與水平面夾 60.5° ，如圖 b。

討論

- 在圖 a 中，有一破壞面與水平夾 α 角， $\alpha = 90^\circ - \phi' = 59^\circ$ ，注意此 $\alpha \neq 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = 60.5^\circ$ 。

只有當應力莫爾圓的 O.P.，落在 σ_3 這點時，才成立公式 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2}$ 。本題不屬於此情形。

- 土壤力學最常強調莫爾－庫侖破壞準則，筆者之《材料力學論衡》第 12 章對莫爾－庫侖破壞準則有精緻說明，會讓您耳目一新，功力精進。
- 莫爾圓是一個完整的圓，只是土壤力學裏為求方便，常常只畫上半圓，考生要懷疑「為什麼不像材料力學一樣，把整個圓畫出來？」也就是考生要建立跨學科比較的本領，質疑「在這裡可以的，為什麼在那裡不可以？」若畫出下半圓，就可得另一條破壞面。
- 依「壓逆為正」符號法則，您能正確畫出圖 a 裏兩個破壞面上的剪應力方向嗎？有些原文書作者甚至畫錯，顯見部分外國學者落入「土力強，但材力不強」的窘狀。
- 進考場請攜帶圓規、量角器、方格尺、鉛筆、橡皮擦。

例 7-2.2 直剪試驗

有某一乾砂試樣，進行三軸壓密慢剪 (S-type) 試驗，試體破壞時之旁束壓力 $\sigma_3 = 105 \text{ kPa}$ ，垂直軸向壓力 $\sigma_1 = 385 \text{ kPa}$ 。同一乾砂試樣在相同孔隙比下，亦進行直接剪力試驗，試體直徑為 6 cm，試驗時施加之正向力為 850 N。試求在進行直接剪力試驗時：

(一) 施加之剪力應至少為若干 N 時，試體會破壞？(9分)

(二) 試分別求作用在破壞面上之剪應力和試體之最大剪應力及其作用方向（與水平面之夾角），繪圖說明並標示其值。(16分)

<100年鐵路特考>



(一)因為乾砂，所以 $c' = 0 \text{ kPa}$

參考圖 a，半徑 $R = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = 140 \text{ kPa}$

圓心座標 $\sigma_{avg} = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 = 245 \text{ kPa}$

$$\sin \phi' = \frac{R}{\sigma_{avg}} = \frac{140}{245} = 0.5714$$

解出 $\phi' = 34.85^\circ$

$$\text{正向應力 } \sigma = \frac{P}{A} = \frac{850}{\pi(0.06)^2 / 4} = 300626 \text{ N/m}^2 = 300.626 \text{ kPa}$$

$$\tau_f = \sigma \tan \phi' = 209.33 \text{ kPa}$$

$$\text{剪力 } V = A \times \tau_f = \frac{\pi}{4} (0.06)^2 \times 209.33 = 0.592 \text{ kN} = 592 \text{ N} \dots \text{Ans(—)}$$

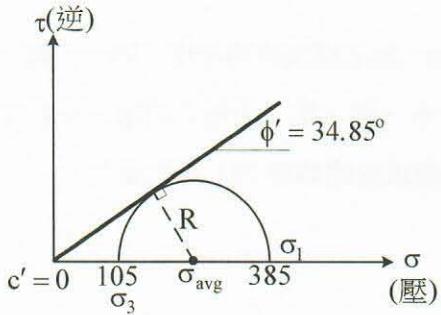


圖 a

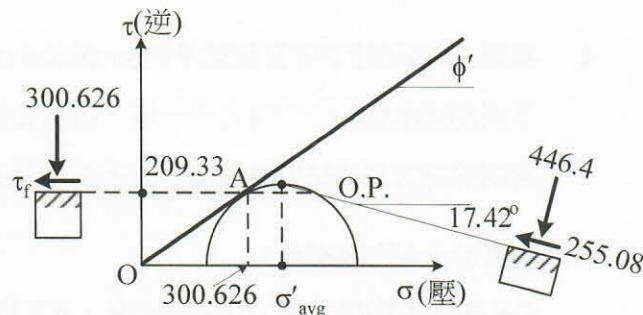


圖 b

(二) 參考圖 b，按畢氏定理， $\overline{OA} = \sqrt{300.626^2 + 209.33^2} = 366.33 \text{ kPa}$

$$\text{半徑 } R' = \tau_{max} = \overline{OA} \tan \phi' = 255.08 \text{ kPa}$$

$$\text{圓心座標 } \sigma'_{avg} = \frac{\overline{OA}}{\cos \phi'} = 446.4 \text{ kPa}$$

最大剪應力的作用面與水平線夾 β 角

$$\tan \beta = \frac{255.08 - 209.33}{446.4 - 300.626} = 0.3138 \quad \text{解出 } \beta = 17.42^\circ$$

水平破壞面上之剪應力和試體之最大剪應力及其作用方向如圖 b

討論

- 第(一)小題，可用公式 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$

$$\Rightarrow 385 = 105 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 0, \text{ 照樣解出 } \phi' = 34.85^\circ.$$

- 第(一)小題，可速算 $V = P \tan \phi' = 850 \tan 34.85^\circ = 592 \text{ N}$ 。

3. 土壤和鋼筋的破壞準則不一樣，鋼筋的破壞準則和正向應力無關，土壤卻有關。土體內受剪應力最大的面，未必是破壞面，因為該面的抗剪強度 τ_f 可能更高，例如承受 $\tau_{max}=255.08 \text{ kPa}$ 的平面不是破壞面，因為該平面的抗剪強度 $= 446.4 \tan 34.85^\circ = 310.8 \text{ kPa}$ 比較高。土體內受剪應力較小面，可能是破壞面，因為該面的抗剪強度 τ_f 可能比其他面更小，例如承受較小剪應力 209.33 kPa 的平面發生破壞，因為該面的抗剪強度也正好 $= 300.626 \tan 34.85^\circ = 209.33 \text{ kPa}$ 。
4. 莫爾-庫侖破壞準則是經驗準則(empirical criterion)，無法理論推導證明。同一土體，不同剖面承受的正向應力不一樣，抗剪強度 τ_f 就不一樣。某一面是否破壞，是看該面的剪應力到達抗剪強度 τ_f 了沒，而不是看「該面承受的剪應力比其他面大」。
5. 影響砂土 ϕ 的因素有：
 - ①孔隙比或相對密度。孔隙比上升， ϕ 下降。
 - ②顆粒形狀。多角狀者， ϕ 上升。
 - ③粒徑分布曲線。均勻係數 C_u 上升， ϕ 上升。
 - ④顆粒表面粗糙度。粗糙度上升， ϕ 上升。
 - ⑤含水量 w 。含水量上升， ϕ 輕微下降。
 - ⑥中間主應力 σ_2 。平面應變狀態下的 ϕ 角比三軸試驗求出的 ϕ 角略大。
 - ⑦顆粒大小。但若孔隙比不變，則無影響。過壓密比或預壓密應力，沒有顯著影響。
6. 人類設法在試驗室重建現場環境，但難以重建成完全相同，所以重大工程就會辦理現地試驗，此最準，但最昂貴。

§7-3 孔隙水壓力參數

先前提過單向度壓密試驗，試驗中，土體置於壓密環內，側向無法變形(真不能變形嗎？)，承受垂直向應力增量 $\Delta\sigma_1$ ，因此引發之超額孔隙水壓為 Δu ，定義孔隙水壓力參數 C ，

$$C \equiv \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_1} \quad [7.10]$$

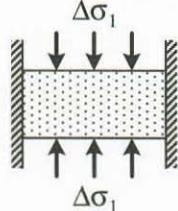


圖 7-11 孔隙水壓力參數 C (試體側向不變形)

若試體飽和度 $S=100\%$ 時， $C=1.0$ 。 C 參數很少考，只有 C 參數土體是側向無法變形，底下 B 、 D 、 A 參數的土體側向均可變形。

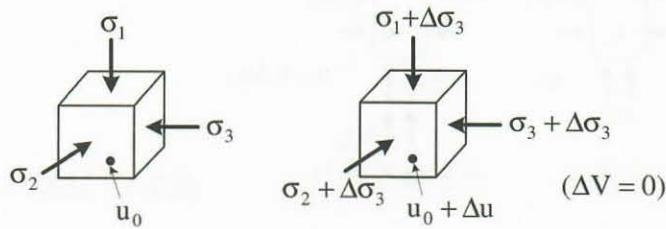


圖 7-12

參考圖 7-12，以柔軟薄膜圍覆的土體承受總應力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，初始水壓力為 u_0 。倘給予各方向均勻之圍壓增量 $\Delta\sigma_3$ ，且不允許試體排水^{註6}，則試體裏會激發超額孔隙水壓 Δu 。Skempton 提出孔隙水壓力參數 B ，

$$B \equiv \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_3} = \frac{\Delta u_b}{\Delta\sigma_3} \quad [7.11]$$

用薄膜包覆，代表允許試體變形，這就是要模擬現場破壞時，土體能變形的狀況。 B 值介於 0~1。飽和土體($S=100\%$)， $B=1$ ；若 $S=0\%$ ，則 $B=0$ 。現場水位線以下的飽和黏土，經取樣解壓及擾動，試體有些許膨脹，送到試驗室時，飽和度已非 100%。為了使試驗結果具有現地

註 6：不允許試體排水，工程上就視為試體體積無法變化，即 $\Delta V=0$ 。

意義，須把試體「還原」回現場 $S=100\%$ 的狀況，故試驗開始前會先對試體加「反水壓」(Back Pressure) u_{back} ，反水壓是加在薄膜內側，目的把試體裏的空氣溶解進水裡，提高飽和度，也就是提高 B 值。當 B 提升到 0.95 以上，一般認為已達飽和。為何加反水壓不會把試體脹破？原因是必須同時提高室壓(Cell Pressure)，室壓是加在薄膜外側，薄膜外壓要比內壓大，就不會破。

參考圖 7-13，以柔性薄膜圍覆的未必飽和土體，各方向承受均勻之圍壓 σ_3 且完成壓密，初始靜態水壓力為 u_0 ，不存在超額孔隙水壓。倘給予軸向應力增量 $\Delta\sigma_d$ ，且不允許試體排水，則試體裏會激發超額孔隙水壓 Δu_d 。此時定義孔隙水壓力參數 D ^{註7}，

$$D \equiv \frac{\Delta u_d}{\Delta\sigma_d} = A \times B \quad [7.12]$$

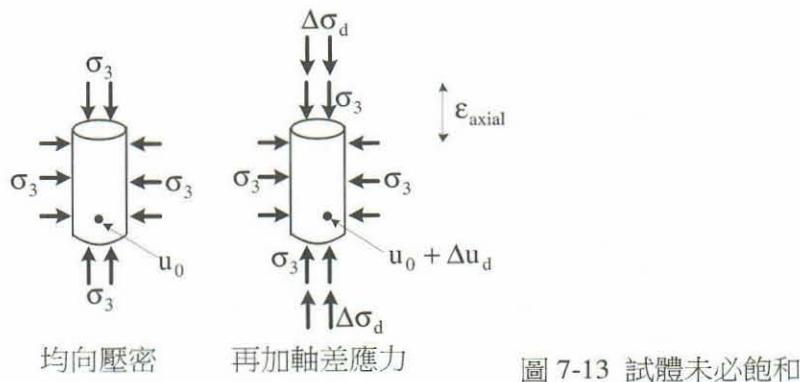


圖 7-13 試體未必飽和

如果把圖 7-13 的試體改為飽和，則定義 $A \equiv \frac{\Delta u_d}{\Delta\sigma_d}$ 。

A 也是 Skempton 提出的孔隙水壓力參數。當土體飽和度 $S=100\%$ 時， $B=1$ ， $D=A$ 。控制邊界條件為不排水，關閉閥門，對於非常疏鬆的砂土或敏感度很高的黏土， A 值會大於 1.0，因為軸差應力會使得土壤結構崩潰。對於輕度過壓密黏土， A 值僅略大於零；嚴重過壓密黏土， A 值是負數，OCR 愈高， A 值負得愈大；對於正常過壓密黏土， A 值是 0~1 之間的正數。

在三軸壓縮試驗的過程中，人類發現 A 值不是常數， A 隨著軸差應力大小而變化。在試體破壞時的 A 值，特稱 A_f ，下標 f 代表失敗(Failure)之意。考試時，為了簡化計算，通常題目會給固定 A 值。

註 7：有的原文書用 \bar{A} 表示 D ，即 $\bar{A}=D=AB$ 。

表 7-1 某些土壤的 A_f 值

土壤種類	A_f
高敏感(high sensitivity)黏土，不排水之極疏鬆砂	0.75~1.5
正常壓密黏土	0.5~1.0
夯實後砂性黏土	0.25~0.75
輕度過壓密黏土	0~0.5
夯實後的礫石質黏土(compacted clay-gravels)	-0.25~0.25
高度過壓密黏土	-0.5~0

倘若加圍壓與加軸差應力皆不允許排水，則產生的超額孔隙水壓

$$\Delta u_e = \Delta u_b + \Delta u_d = B\Delta\sigma_3 + D\Delta\sigma_d = [B\Delta\sigma_3 + AB(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \quad [7.13]$$

表 7-2

孔隙水壓力參數	邊界狀況與受力	定義
C	土壤側向不可變形，故以剛性外環模擬之。在不排水前提下，給予軸向應力增量 $\Delta\sigma_1$ ，對應產生水壓力增量 Δu 。單向度壓密試驗之壓密環即接近此狀況。	$C \equiv \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_1}$
B	土壤四周邊界均可變形，故以柔性薄膜模擬之。在不排水前提下，給予四面八方相等的圍壓 $\Delta\sigma_3$ ，對應產生水壓力增量 Δu 。考試時常考飽和土體，其 $B=1$ 。	$B \equiv \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_3}$
D	土壤四周邊界均可變形，故以柔性薄膜模擬之。試體(未必飽和)在不排水與允許側向變形前提下，給予軸向應力增量 $\Delta\sigma_d$ ，對應產生水壓力增量 Δu_d 。D 可想像成「軸差」，deviator, difference 之意。	$D \equiv \frac{\Delta u_d}{\Delta\sigma_d} = A \times B$
A	邊界均可變形，故以柔性薄膜模擬之。飽和試體先受均勻圍壓壓密之後，關閉排水閘門，在不排水與允許側向變形前提下，給予軸向應力增量 $\Delta\sigma_d$ ，對應產生水壓力增量 Δu 。	$A \equiv \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_d}$

注意在不排水的狀況才會產生超額孔隙水壓力，所以上面四個參數的排水條件都是「不排水」。土壤為非線彈性材料，所以孔隙水壓力參數並非常數，其值與試驗時的應力大小有關。

7-3.1 計算解壓引發之水壓

某正常壓密飽和黏土試體自地表下9 m處取出，其有效覆土壓力為225 kPa且靜止土壓力係數 K_0 為0.8，若因取樣而引致Skempton孔隙水壓力參數A為0.75，試估計該試體從取樣管取出時，其孔隙水壓將會改變多少？（假設地下水位位於地表面） <97年高考三級25分>



(1)取樣前， $\sigma'_v = 225$ kPa

$$\sigma'_h = K_0 \times \sigma'_v = 0.8 \times 225 = 180 \text{ kPa}$$

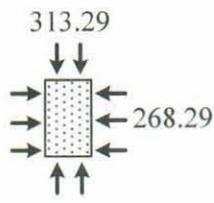
$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 180 + 9 \times 9.81 = 268.29 \text{ kPa}$$

$$\sigma_v = \sigma'_v + u_w = 225 + 9 \times 9.81 = 313.29 \text{ kPa}$$

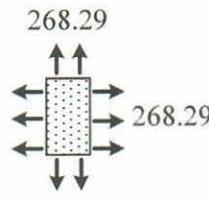
(2)對正常壓密飽和黏土，解壓產生負的超額孔隙水壓

$$u_e = -(268.29 \times B) - (313.29 - 268.29)D = -268.29 \times 1 - (313.29 - 268.29)(0.75 \times 1) = -302.04 \text{ kPa}$$

試體解壓到地表，孔隙水壓會減少 302.04 kPa



原先總應力



先解除均向圍壓



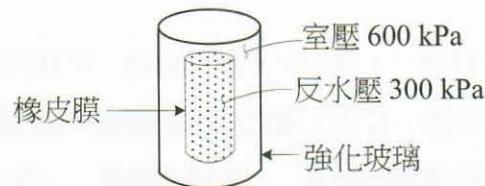
再解除軸差應力

討論

1. 試體取到地表後，殘餘孔隙水壓 $u_r = u_{ss} + u_e = 9 \times 9.81 + (-302.04) = -213.75$ kPa
2. 解壓過程，先解除均向圍壓 268.29 kPa，再解除軸差應力 45 kPa，總應力即降為零。

7-3.2 求 A 與 B

土壤三軸壓縮試驗中，試體首先在 600 kN/m^2 之圍壓(cell pressure)中進行壓密，試體內之反水壓(back pressure)為 300 kN/m^2 。壓密完成後，關掉試體排水並將圍壓調升至 720 kN/m^2 ，而此時量得試體之孔隙水壓為 410 kN/m^2 。隨後，在相同圍壓下，啟動軸壓(axial pressure)，使軸差應力(deviator stress)達至 550 kN/m^2 ，此時量得試體之孔隙水壓為 565 kN/m^2 。試計算 Skempton 之孔隙水壓係數 A 和 B(pore pressure coefficient A, B)。<94年第一次土技檢覈20分>



(1) 下表中，總應力 = 總水壓力 + 有效應力，總水壓力 = 反水壓 u_{back} + 超額孔隙水壓 u_e 。

步驟	總應力	[橡皮模內總水壓力 = $u_{back} + u_e$]	有效應力
第一次圍壓(排水，壓密)	$\sigma_1 = \sigma_3 = 600$	$[300 = 300 + 0]$	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 600 - 300 = 300$
第二次圍壓(不排水)	$\sigma_1 = \sigma_3 = 720$	$[410 = 300 + 110]$	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 720 - 410 = 310$
軸差應力(不排水)	$\sigma_1 = 720 + 550 = 1270$ $\sigma_3 = 720$	$[565 = 300 + 265]$	$\sigma'_1 = 1270 - 565 = 705$ $\sigma'_3 = 720 - 565 = 155$

unit: kPa

$$(2) B = \frac{110 - 0}{720 - 600} = 0.9167$$

$$D = AB = 0.9167A = \frac{265 - 110}{550} = 0.2818 \quad \text{解出 } A = 0.307$$

討論

- 此為筆者戲稱之 CUU 試驗。繪製表格是成功關鍵，表格寫得出來，表示掌握題目各

數據意義，分數肯定入袋。畫「圖」容易把自己搞混亂，不要考完後的心得是「千金難買早知道」。

2. 軸向是試體的長向，橫向是試體的短向，三軸試體像混凝土圓柱試體的縮小版。
3. 試體並非完全飽和，故第二次加圍壓不排水，仍會造成有效應力些微上升。部分飽和的試體，加圍壓不排水下，有效應力及水壓力都會上升。
4. 注意 $A \neq 0.2818$, $B \neq 1$ 。
5. 張三和李四在某大學修習土壤力學，張三偷跑，寒暑假就預先去補習班聽歐陽課程。開學後，因一連串放假，校內土壤力學教得很慢，教授到考前一周才大量趕課，下課時說「期中考考到今天教的地方。」李四哀號道「一周內我怎麼消化得完？」考後發卷，果然考得不理想。李四看到張三成績亮眼，問「你怎麼讀得完？」張三曰「歐陽上課早就說過了，上週教授對你『加載』，一周內你根本無法排除超額孔隙水壓，有效知識(有效應力)無法增加，你抗剪強度就上不來。而我從暑假就開始加載、以及消散超額孔隙水壓， u_e 早就消散完畢了，有效應力比你多很多，抗剪強度比你大，當然分數比你高。」
6. 考生不要覺得 17% 的技師錄取率很低，這是在保障你呀！民國 60 年，大學錄取率只有 8%，大學生還沒畢業就有 3、4 個工作等他，搶他。民國 80 年，大學錄取率升到 33%，大學生畢業要努力找工作。後來民意掛帥廣設大學，整個社會不敢違背「民意」，民國 100 年大學錄取率升到逼近 100%，是復興基地的奇蹟，共產黨辦不到，大學生畢業即失業，還被媒體說「有學歷沒能力」。今天大學生滿街都是，你會覺得大學文憑稀奇嗎？當民意把技師錄取率抬高到接近人人有獎的水準，也就是技師證書沒有價值的時候。
7. 「民意」盲不盲目？你若問我，我會說至少有一半以上是盲目的。另外，盲不盲目也是時間的函數、價值觀的函數。大家激情的時候，你若看到有一身影離隊走出，貌似孤單，別懷疑，那就是我，人多容易失去理性思考的空間。人多，有人會用情感勒索你的理性思考。

§7-4 三軸之 CD 試驗

你有手機嗎？你的手機不小心從書桌掉到地上，會不會整個報銷失敗？不會吧！你相信工廠在設計過程中，一定有做過「模擬手機不小心從桌上掉落的試驗」，以確保你的手機不小心掉落之後，還能正常運作。

你看過賣汽車的電視廣告嗎？某廠牌為了證明縱使不小心發生正面撞擊意外，乘員還是可以保住生命，所以廣告裏的車就以時速 100 多公里衝撞牆壁，測量車體各處產生的撞擊力，檢驗安全帶、安全氣囊是否發揮作用，當然也要測量假人頸椎的受力，評估人體能否承受。

以上這兩個例子都是情境模擬，你所設計的東西，必須在發生所模擬的事故時，依然可靠。如何保證可靠？就是把真實世界發生的意外，在試驗室裏模擬出來，把意外搬到試驗室來，在試驗室裏「拷問」你所設計的東西。這種簡單的觀念，就是土壤剪力試驗要用的觀念。

我們把將來土壤在現場受力與排水的狀態，移植到試驗室來。如果現場加載慢而短期內土壤可以排除超額孔隙水壓，那就應該取有意義深度(破壞弧通過該深度)的土樣到試驗室，在試驗室進行排水試驗，求排水試驗下得到的強度參數，這就對應現場的剪力強度參數，用這參數求現場剪力強度。一般三軸試驗的試體，直徑常為 5 cm、7 cm 或 10 cm。

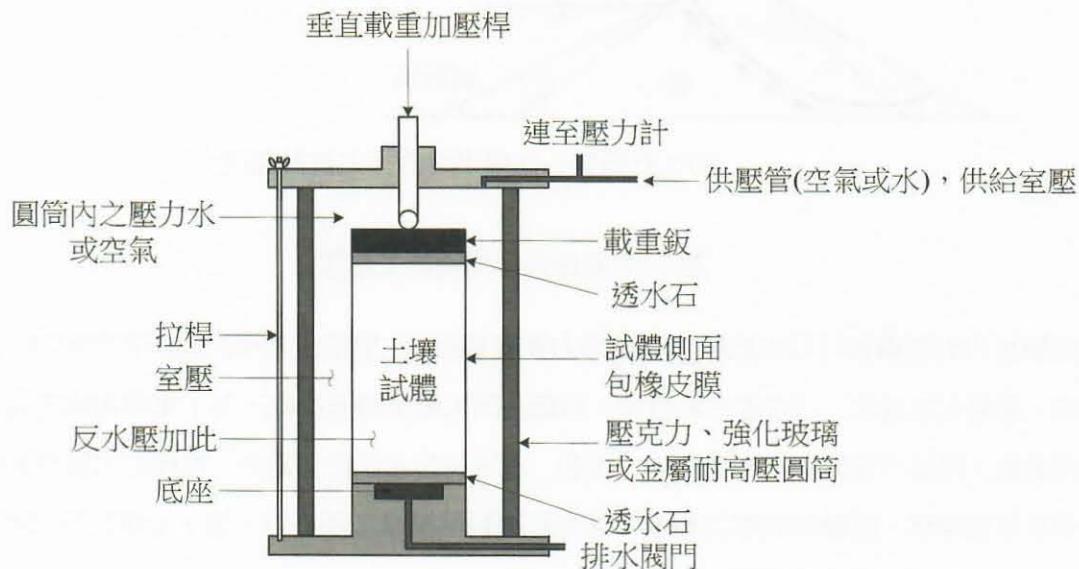


圖 7-14

這一節要講三軸試驗的「壓密(Consolidation)-排水(Drain)試驗」，簡稱 CD 試驗。CD test 乃是先以等向(指側面、頂面、底面)圍壓 σ_3 將試體壓密，壓密應力大小應該對應到現場壓密應力，此階段當然排水閥門須開啟方能壓密，水從試體頂部、底部排出。完成壓密後，閥門仍維持開啟，施加軸差應力(Deviator Stress) $\Delta\sigma_d$ ，直至試體破壞，破壞時試體 $u_e = 0$ ，這一步驟可能耗時須數天。

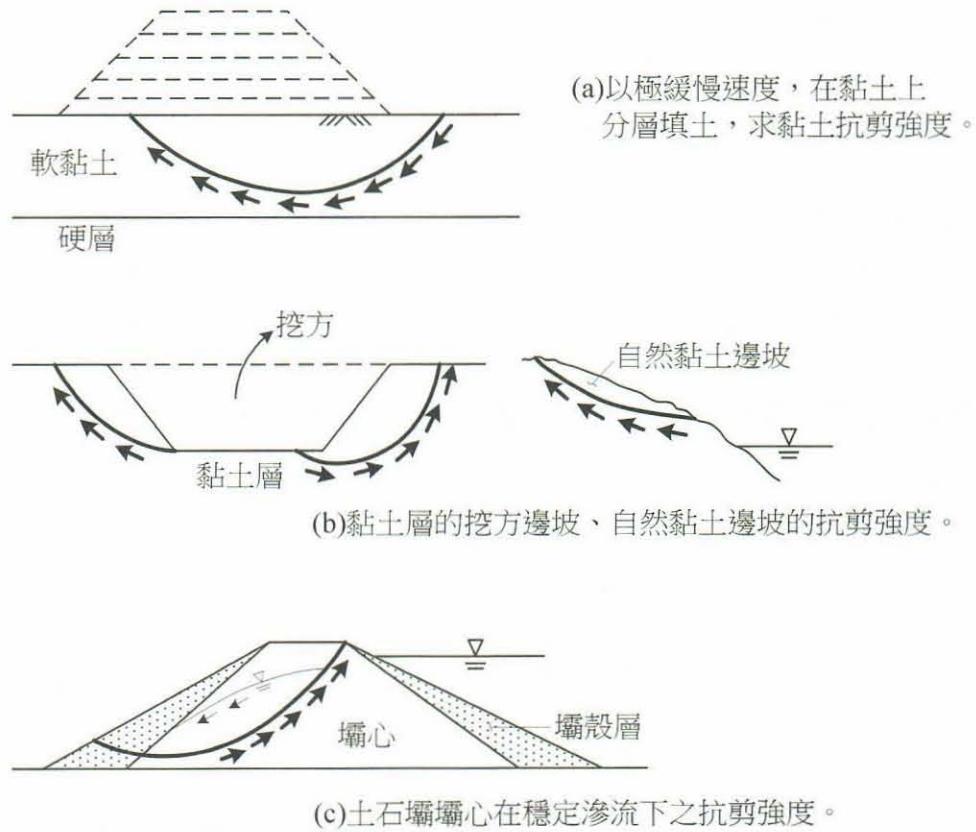


圖 7-15 虛線表示即將施工位置

試驗室內對試體進行排水試驗求試體剪力強度參數，主要是因為那試體所在的現場，工程進行時，現場可以排水，或現場加載很慢，超額孔隙水壓來得及排除，為了求得現場表現出來的強度參數，所以才在試驗室內儘可能「複製」現場的排水條件。當然，取樣的位置應該考慮破壞面發生的深度，試驗時的應力範圍，也要對應到現場施工前、中、後，土壤的應力範圍，如此求出來的強度參數才有意義。

適合採用 CD 試驗的工址類型：

- ①現場是砂土、礫石或某些排水快的粉土，加載後排水迅速，欲評估現場剪力強度。
- ②現場是黏土，但是加載速率比超額孔隙水壓 u_e 消散速率還慢，如極緩慢填築路堤，欲評估現場剪力強度。
- ③評估填方邊坡、挖方邊坡長期後的 FS。長期後，已無 u_e 。挖方邊坡長期最危險。
- ④評估基礎長期穩定的 FS。長期後，已無 u_e 。
- ⑤評估長期穩態滲流下，土體的抗剪強度，如土石壩下方土壤、壩心土壤的抗剪強度。

對於鬆砂、緊砂、正常壓密黏土或過壓密黏土，在三軸排水試驗時，軸差應力(Deviator Stress)對軸向應變的圖形如圖 7-16，通常加軸差應力時，才開始測量軸向應變。緊砂與 OC，因其較緊密，受剪時顆粒須「爬坡」翻越鄰近顆粒，位能要提高，此導致尖峰強度出現，過了尖峰強度，仍須克服橫移摩擦力；鬆砂與 NC，因其較疏鬆，受剪時顆粒不須爬坡翻越鄰近顆粒，克服橫移摩擦力即可，故無尖峰強度出現。某工址的 NC，若夯打成 OC 之後，將同一來源的 NC 與 OC 進行 CD 試驗，會發現大變形時，兩者破壞軸差應力趨近相同。但是不同來源的 NC 和 OC，進行 CD 試驗大變形時，兩者破壞軸差應力並不會相同，讀者不要誤會圖 7-16 的意義。不要以為「金門取到的 NC 和台東的 OC，在大應變時會有接近的殘餘強度」。

因排水，故加軸差應力階段體積會變化，體積對正向應變的圖形如圖 7-17。對於緊砂或 OC，在小應變階段，試體體積會稍有減小，隨應變漸增接著體積膨脹，這稱為剪脹性(Dilatancy)，乃是由於顆粒 A、C、E 翻越，位置重新排列之故，必須在排水前提受剪，才會膨脹。對於鬆砂或 NC，在加軸差應力階段，試體體積總是逐漸減小，此稱剪縮性，也就是孔隙比越來越小，試體越壓越緊密，故抗剪能力緩慢升高(軸差應力緩慢變大)。

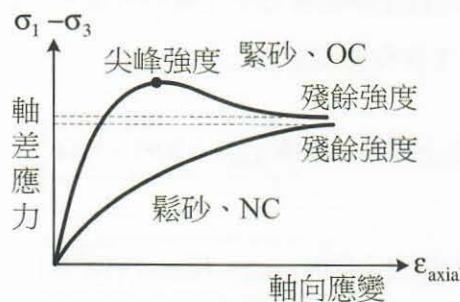


圖 7-16

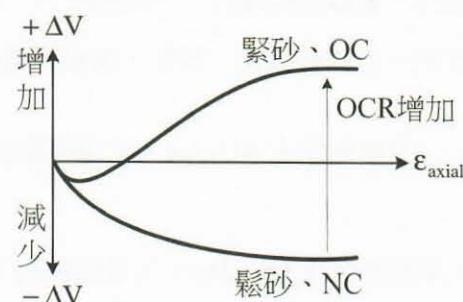


圖 7-17

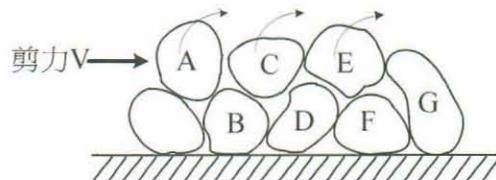


圖 7-18 剪脹性示意圖

對於正常壓密黏土或砂土，排水試驗的強度線外插延伸後會通過座標原點，即凝聚力 $c = 0$ kPa。對於過壓密黏土，排水強度線不會通過座標原點，即凝聚力 $c > 0$ kPa。試驗中無法直接作出 c 值，因為試驗室辦不到「正向應力為零」的受力狀態， c 值是外插推估的。

在 1936 年，Arthur Casagrande 進行一系列的砂土排水三軸試驗，他發現，同一種砂土，在初始相對密度不同的情形之下(即有疏鬆、緊密之分別)，鬆砂一開始孔隙比 e_L ，緊砂一開始孔隙比 e_D ，進行相同圍壓的三軸排水試驗，在破壞時(軸向應變相當大)，疏鬆砂及緊密砂最後的孔隙比竟相同，此孔隙比稱臨界孔隙比 e_c ，如下圖示。臨界孔隙比大小受圍壓大小影響。

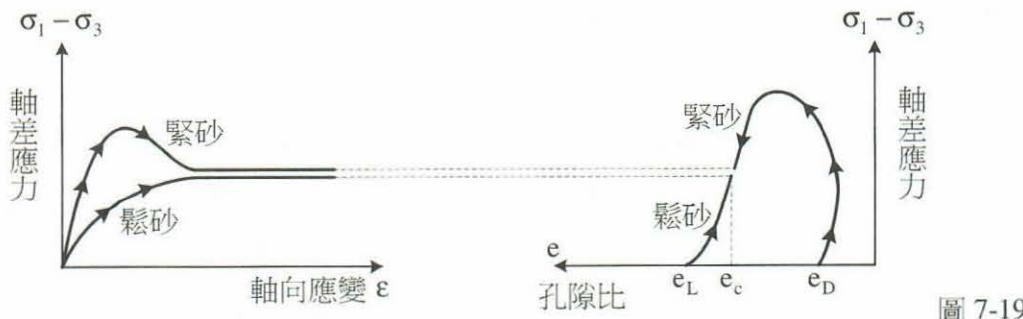


圖 7-19

鬆砂的孔隙比，一開始較大，在 CD 試驗加軸差應力中， e 逐漸變小，表示體積逐漸收縮，這叫剪縮性；緊砂的孔隙比，一開始較小，在 CD 試驗加軸差應力中先變小再變大，即體積先收縮再膨脹，這叫剪脹性。當然，前提要能排水，才會有體積變化。

對於正常壓密黏土 NC clay，可用經驗式：靜止土壓力係數 $K_{0(NC)} = 0.95 - \sin \phi'$ [7.14]

對於過壓密黏土 OC clay，可用經驗式：靜止土壓力係數 $K_{0(OC)} = K_{0(NC)} \sqrt{OCR}$ [7.15]

對於砂土，可用經驗式：靜止土壓力係數 $K_0 = 1 - \sin \phi'$ [7.16]

前三式均表達：土壤內摩擦角 ϕ' 愈高，自立性愈佳，越不需要「倚靠」在鄰居身上，故側向土壓力係數越小。 ϕ' 愈低，自立性愈差，嚴重「靠」在鄰居身上， K_0 越大，側土壓越大。

以上三式均是學者提出的經驗公式，無理論證明。

目前到此，有材力經驗的優秀讀者可能想問「奇怪，材力常用 $\sigma-\epsilon$ 為座標軸，表達材料受力和變形關係，為啥土力卻愛用軸差應力 $\sigma_d-\epsilon$ 為座標軸，表達材料受力和變形關係呢？」Good Question，其實材力的單拉或單壓試驗也是用 $\sigma_d-\epsilon$ 為座標軸表示，因為 $\sigma_3=0$ 之故， $\sigma_d=\sigma_1$ ，才讓某些人看不見真相。試體若只承受四面八方均勻圍壓 σ_3 ，宛如海平面下 10 公里深的海床上石頭承受均勻巨大水壓，永遠壓不壞，變形也很小，根本不貯存形變能，試體永不壞，詳情見《材料力學論衡》第十二章。故要扣掉均勻圍壓 σ_3 ，以 $\sigma_d-\epsilon$ 為座標軸研究受力與變形關係才對。你學校的教授會教你這些嗎？考生若沒買歐陽的書，讀到碩士班畢業體會得到嗎？趕快大量搜購歐陽書籍吧！還有更多知識落榜者從沒想過。

表 7-3 CD 試驗解題必勝表格

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣到地表	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	u_r	$\sigma'_v = \sigma'_h = -u_r$
加圍壓 σ_3	$\sigma_v = \sigma_h = \sigma_3$	0	$\sigma'_v = \sigma'_h = \sigma_3$
加軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\sigma_h = \sigma_3$ $\sigma_v = \sigma_3 + \Delta\sigma_d$	0	$\sigma'_h = \sigma_3$ $\sigma'_v = \sigma_3 + \Delta\sigma_d$

上表為完整型表格，只要會寫出總應力與孔隙壓力即可，有效應力那欄用減法來求，「寫出表格=得分」。注意加圍壓那列， $\sigma_v = \sigma_3$ ，不是 $\sigma_v = 0$ ，試體頂底都要加圍壓。若題目簡單，可以只寫「加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 」那一列。

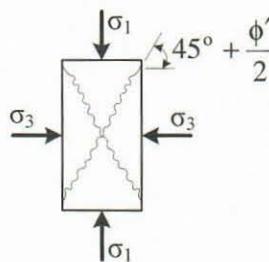


圖 7-20 最大主應力在軸向

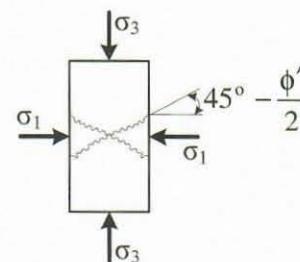


圖 7-21 最大主應力在側向

CD 試驗考題是最簡單的三軸試驗，因為排水，故一直沒有超額孔隙水壓，理論上試體還存在靜態水壓力，但試體一般不高，所以忽略靜態水壓力。對於大型試體，應該考慮靜態水壓力。試體破壞時，若主應力 σ_1 在軸向，則破壞面和水平夾角 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2}$ 。共軛破壞面夾角的銳角角平分線，指的就是 σ_1 方向。 σ_1 方向就是銳角角平分線方向。

圖 7-22(a)為一土壤微素瀕臨破壞時的應力莫爾圓，莫爾圓圓周上的各點，代表該微素在不同方向的應力狀態，其中有一點 A 的座標值是 (σ_n, τ_1) ，代表微素內部有一剖面，正承受 σ_n 的正向應力以及 τ_1 的剪應力(作用力)。A 有外力的概念，這一段跟你材料力學的火侯有關。

圖 7-22(b)為一土壤的破壞準則(i.e.,破壞包絡線)，其中有一點 B 的座標值是 (σ_n, τ_f) ，代表土體若有一剖面承受 σ_n 的正向應力，則該剖面的最大抗剪能力是 τ_f 。B 有強度的概念。

圖 7-22(c)裡面，A 與 B 重合，代表在仰角 α_f 的平面，承受正向應力 σ_n ，外力(τ_1)恰等於強度(τ_f)，故仰角 α_f 的平面瀕臨被剪動。

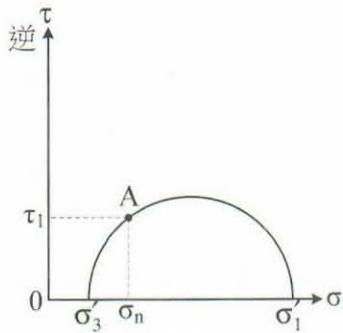


圖 7-22(a)

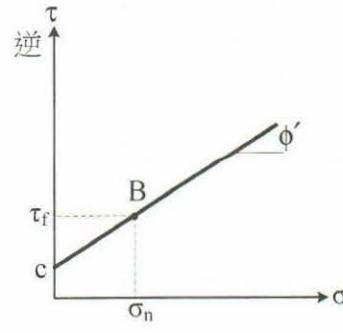


圖 7-22(b)

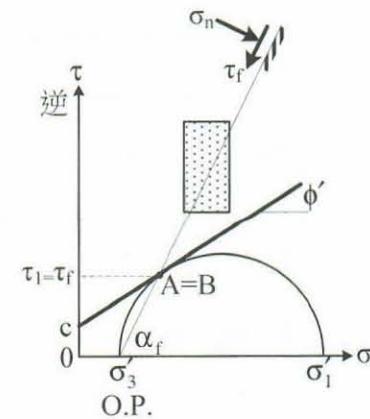


圖 7-22(c)

例 7-4.1 CD 試驗

如果一組黏土樣品之三軸等向排水剪力試驗結果如下： <修改94年第2次三等特考>

樣品一：圍壓 $\sigma_3' = 20 \text{ kN/m}^2$ ；軸差應力 $\Delta(\sigma_d)_f = 100 \text{ kN/m}^2$

樣品二：圍壓 $\sigma_3' = 60 \text{ kN/m}^2$ ；軸差應力 $\Delta(\sigma_d)_f = 220 \text{ kN/m}^2$

(一) 試計算有效剪力強度(c' , ϕ')各多少? (10 分)

(二)圖解有效剪力強度(c' ， ϕ')各多少？(10分)

(三)敍明理由判斷此為那一類土壤。(5分)

(四)對於樣品二，求破壞面與水平夾角=？作用於破壞面之正向應力及剪應力=？



$$(-) \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$\text{樣品一: } 20+100=20 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$\text{樣品二: } 60+220=60 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

由②-① 解出 $K_p = 4$ ，故 $\phi' = 36.87^\circ$

$\phi' = 36.87^\circ$ 代回①，解出 $c' = 10 \text{ kPa}$

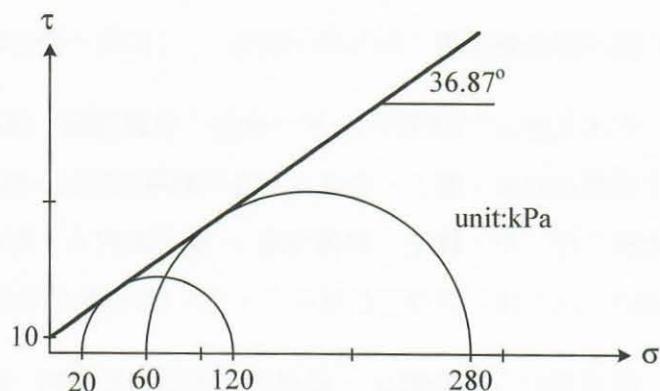
(二)以圓規及直尺仔細畫兩莫爾圓，畫公切線，由圖上判讀出， $c' = 10 \text{ kPa}$ ， $\phi' = 36.87^\circ$

(要帶量角器判讀角度)

(三) $c' \neq 0$ kPa，故為過壓密黏土。

$$(四) \alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = \underline{63.43^\circ}$$

$$\begin{cases} \tau = 10 + \sigma \tan 36.87^\circ \\ \tau = (\sigma - 60) \tan 63.43^\circ \end{cases}$$



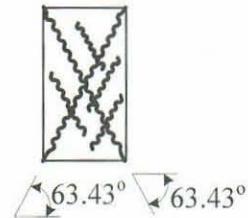
聯立兩條直線方程式，解出 $\sigma = 104 \text{ kPa}$ ， $\tau = 88 \text{ kPa}$

討論

要決定兩個未知數 c' 與 ϕ' ，所以需要兩個破壞試體。若題目給三個以上的破壞試體，就要用迴歸求剪力強度參數。可是目前國考不能攜帶可迴歸之計算機，所以出三個試體的機會很小，若考出來，只好用作圖法求概略值。

在基礎工程會教被動土壓力係數 $K_p = \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$ 。

試體破壞角度示意如右，乃一組共軛破壞面。



對於第(四)小題， $\sigma_{avg} = (60+280)/2 = 170 \text{ kPa}$ ，半徑 $R = (280-60)/2 = 110 \text{ kPa}$ 。

$$\sigma_n = 170 - R \sin \phi' = 104 \text{ kPa}, \quad \tau_f = R \cos \phi' = 88 \text{ kPa}.$$

假如工地土壤為 NC-clay，因取樣為解壓，圍壓降至零，進試驗室後為過壓密試體，後續進行 CD 試驗，若壓密應力不及現場壓密應力就開始加軸差應力，那麼就是對 OC 試體做試驗，會展現出凝聚力 c 。必須試驗室壓密應力大於等於現場壓密應力，才是對正常壓密黏土做試驗。

完全相同的數個試體，直剪試驗做出來的排水內摩擦角會比三軸試驗大 $0^\circ \sim 3^\circ$ 。

人生場景裡有個「包裹理論」，就像立法院的包裹立法，要嘛你就是整個包裹拿走，不然就整個放棄，沒有打開挑三揀四的餘地。有某大學生平常不知道怎麼讀書的，快要考研究所之前寫 e-mail 道「請救救我，如何在短期內考上◎◎研究所。」顯然快要畢業了，對人生道理領悟很少。考生平常的讀書態度、生活作息，是和成績單綁在一起、放在同一個包裹裏，沒有辦法打開某個包裹挑選「每天樂不思蜀」，又在同一個包裹挑選「金榜題名」。

你未來選太太(或先生)，也一樣是「包裹理論」發揮作用，選了◎小姐，就是把她的優缺點全部囊括回家；選了一位美女，或許她頤指氣使，但你沒辦法切段，只帶走自己想要的。你未來選工作，也一樣是「包裹理論」，選了高收入，可能就要忍耐超時工作或身體打壞；選甲賀做輕可的工作，就要忍耐低收入，你一樣沒辦法切段，只帶走自己想要的。

最簡單的「包裹理論」，就是因和果皆被放在同一箱子裏。

例 7-4.2 CD 試驗基本觀念

某均勻正常壓密黏土層於深度10 m位置取樣，進行三軸壓密排水試驗(CD test)，相關資料列於下：地下水位在地表，均勻正常壓密黏土的 ρ_{sat} (飽和密度)=19.8 kN/m³。假設 $\phi' = 25^\circ$ ：

(一)試求 $K_0 = ?$ (5分)

(二)請正確規劃CD試驗的三組試樣所需施加的靜水壓密應力(hydrostatic consolidation)，並說明選取壓密應力的理由與考量為何？(10分)

(三)夾角為 $\phi' = 25^\circ$ 的莫爾圓破壞包絡線，是否通過原點？即 c' (凝聚力)=0。試問為何此正常壓密的黏土凝聚力「 c' 」可視為「零」？ (10分)

<103年高考三級>



$$(一) K_0 = 0.95 - \sin \phi' = 0.527$$

$$(二) \text{現地取樣點垂直方向有效應力} = 10(19.8 - 9.8) = 100 \text{ kPa}$$

$$\text{取樣點水平方向有效應力} = K_0 \sigma'_v = 0.527 \times 100 = 52.7 \text{ kPa}$$

$$\text{平均主應力} = (\sigma'_v + 2\sigma'_h) / 3 = (100 + 52.7 \times 2) / 3 = 68.5 \text{ kPa} \quad (\text{有 2 個水平向})$$

假設地下室開挖 4 米，開挖面為了乾燥施工，黏土宜降水至對齊開挖面，剩餘土厚度 6 米，開挖長期後取樣點垂直方向有效應力= $6(19.8 - 9.8) = 60 \text{ kPa}$ ，假設水平有效應力不變。

$$\text{平均主應力} = (\sigma'_v + 2\sigma'_h) / 3 = (60 + 52.7 \times 2) / 3 = 55.1 \text{ kPa}$$

選取三個壓密應力 $\sigma'_{3c} = 55.1 \text{ kPa}$ 、 $\sigma'_{3c} = 68.5 \text{ kPa}$ 、所有呆載重、活載重均到位之後的平均主應力當成壓密應力。

另一種觀點：壓密應力的選取與工程性質有關，若開挖後軸向加載相當大，也有觀點以 $\sigma'_{3c} = 68.5 \text{ kPa}$ 、 $\sigma'_{3c} = 137 \text{ kPa}$ 、 $\sigma'_{3c} = 274 \text{ kPa}$ 當作壓密應力(壓密應力再提高 2 倍、4 倍)，這樣能夠讓破壞莫爾圓散布夠遠，在此工程範圍內， c 與 ϕ' 較具代表性。

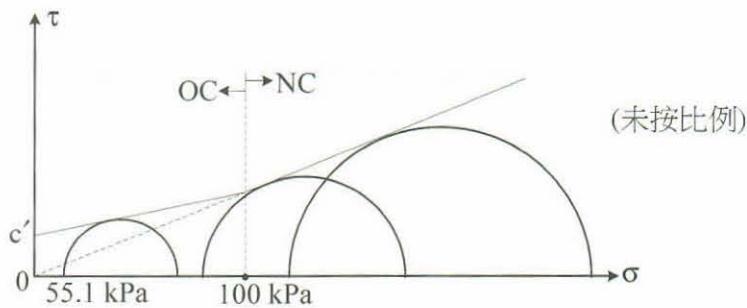
考量點是要畫出 OC 與 NC 強度包絡線：

①地下室開挖是卸載，土壤變成 OC，欲了解 OC 下的凝聚力與內摩擦角，試體須垂直向

解壓至 $\sigma'_v = 60 \text{ kPa}$ ，再加軸差應力至破壞，得破壞時莫爾圓，求 OC 段的破壞包絡線。

②因為取樣解壓造成試體內部有效應力變動，通常造成有效應力減小，如果不把試體的垂
直向有效應力提升到 100 kPa，則試體是 OC clay，NC 和 OC 的分界點就是 100 kPa，
垂直應力 100 kPa 的左右，包絡線斜率並不一樣。實務上壓密應力還是以均向壓密應力
(Isotropic Consolidation)為主流，故取三個方向主應力的平均值為壓密應力。

③最後考慮到呆載重、活載重均到位之後，對地下 10 米處造成的最終有效應力，把三個
主應力的平均值求出，以此有效應力作為壓密應力，再加軸差應力至破壞，得破壞時
莫爾圓，求 NC 下的的破壞包絡線。



(三)對於位於地面的正常壓密黏土，如下圖 A 點，因其所受的正向應力是零(接觸空氣)，沒有
正向應力壓迫，就沒有互鎖作用、膠結物質也沒有被正向應力緊壓產生如膠水般的凝聚
力，故位於地面的正常壓密黏土沒有抗剪能力， $(\sigma, \tau_f) = (0, 0)$ ；換言之， $c' = 0 \text{ kPa}$ 。
對於地面以下的正常壓密黏土，如 B 點，因其所受的正向應力已經不是零，在非零的正向
應力壓迫下，造成互鎖作用、膠結物質被正向應力緊壓產生如膠水般的凝聚力，以後開挖
解壓變成 OC，凝聚力也不會消失，故 OC 存在非零之凝聚力。



討論

工地現場底下的土體，常是處在異向壓密(Anisotropic Consolidation)的狀態，此狀態也稱
 K_0 壓密(K_0 Consolidated)狀態，也就是軸向應力較大，但兩個側向的應力較小，注意側向有兩

個。而一般試驗室較少做異向壓密，大部分作均向壓密(Isotropic Consolidation)，這時就是把現場三個主應力的平均應力(Mean Stress) σ'_m 求出， $\sigma'_m = (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) / 3$ ，以平均應力當成試驗室壓密應力(Consolidation Stress) σ'_c 。「壓密應力」一詞，應指有效應力。

膠結物質必須被緊緊壓迫過才能產生凝聚力，膠結物質如果沒有被緊緊壓迫過，則不能產生凝聚力。用膠水來形容黏土之間的膠結物質，只能達 50% 的相似度。在信封表面塗膠水再放郵票，縱然不用力壓郵票，膠水依然有膠結力黏住郵票，但正向應力為零的 NC，辦不到這回事。在信封表面塗膠水再放郵票，用力壓郵票再解壓，膠水有膠結力黏住郵票，黏土解壓就代表變成 OC 了，OC 就有膠水般的凝聚力了。

§7-5 三軸之 CU 試驗

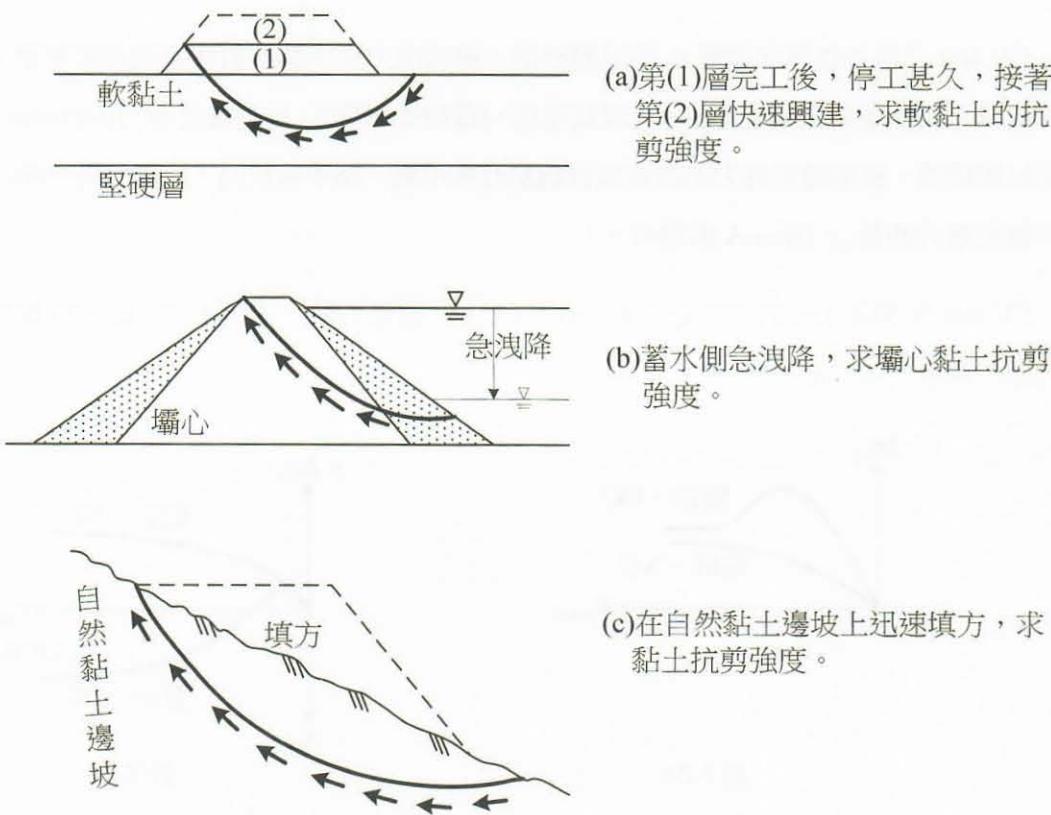


圖 7-23 虛線表示即將施工位置

所謂 CU 試驗，乃是試驗室內對試體進行等向壓密(Consolidation)不排水(Undrain)試驗(CU test)，求試體剪力強度參數(c_{cu}, ϕ_{cu})。本試驗乃考慮試體所取自的現場，土壤已經完成壓密，當後續工程進行時，現場加載速度相對快，快過超額孔隙水壓消散速度，或說超額孔隙水壓來不及排除，為了求得現場表現出來的強度參數，所以才在試驗室內儘可能「複製」現場一切條件。當然，試驗時取壓密應力大小和應力增量範圍，也要對應到現場施工前、中、後，土壤的應力範圍，如此求出來的參數(c_{cu}, ϕ_{cu})才有意義。適合採用 CU 試驗的工址類型如下：

- ①現場工址是黏土，第一層築堤後停工甚久，黏土壓密後極迅速填築第二層路堤，導致來不及排水，求此狀態下黏土的抗剪強度。
- ②水庫壩心黏土已經壓密穩定，忽然蓄水側水位急速洩降，壩心來不及排水，分析壩心黏土的抗剪強度。
- ③邊坡黏土已經壓密穩定，忽然受到爆炸或地震影響，分析邊坡的穩定性。
- ④邊坡黏土已經壓密穩定，忽然受到迅速填方，分析黏土抗剪強度。

CU test 乃是先以等向圍壓 σ_3 將試體壓密，壓密應力大小應該對應到現場壓密應力，此階段當然排水閥門須開啟方能壓密。完成壓密後，關閉排水閥門，施加軸差應力(Deviator Stress)，直至試體破壞。施加軸差應力階段會激發超額孔隙水壓，請不要以為「超額孔隙水壓的增量會等於軸差應力的量」，因為 A 通常 ≠ 1。

CU test 和 SUU test 的差別是初始條件，CU test 破壞的那一次填土前， $u_e = 0$ ；SUU test 破壞的那一次填土前， $u_e \neq 0$ 。

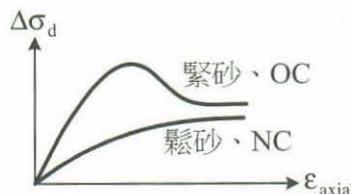


圖 7-24

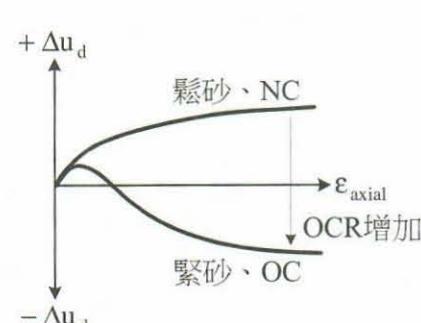


圖 7-25

對於鬆砂、緊砂、正常壓密黏土或過壓密黏土，在三軸壓密不排水試驗時，軸差應力($\Delta\sigma_d$)對正向應變(ε_{axial})的圖形如圖 7-24。緊砂和 OC，因緻密故，在小應變時近似脆性材料，有尖峰

強度，如 CD 試驗般，大應變時，只剩殘餘強度。鬆砂和 NC，因疏鬆故，無尖峰強度，如 CD 試驗般。圖 7-24 與圖 7-15 極類似。

因不排水，故加軸差應力階段體積維持常數，但體積會變形(扭曲 distortion，形成類似酒桶狀，中間胖)，超額孔隙水壓力對正向應變的圖形如圖 7-25。

加軸差應力時(俗稱「受剪」)，對於緊砂或 OC，在小應變階段，超額孔隙水壓是正值(很多人忘記這點)，隨著應變增大，接下來變成負值，如圖 7-25。其原因是加軸差應力到大應變時，若能排水，緊砂或過壓密黏土的體積會膨脹，但現在不能膨脹了(現在是不排水)，其剪脹性被禁止，故產生負的超額孔隙水壓。負的超額孔隙水壓代表拉力，即水拉住土壤，不使其體積膨脹。讀者可想像：竊賊被警察追到死巷底，竊賊欲攀跳上圍牆(模擬顆粒欲翻越鄰近顆粒頂部)，賊手攀住牆頂，但警員一躍抱住其大腿用力往下拉令其無法往上爬，竊賊掛在牆壁仍掙扎想往上爬，雙方形成力平衡，而且交界面是拉力平衡，警察就是代表水。產生負的超額孔隙水壓，代表 A 值是負數。

對於鬆砂或 NC，先加 σ'_3 圍壓壓密，再加軸差應力不排水，會產生正的超額孔隙水壓，所以試體破壞時，總應力莫爾圓(T,total)在有效應力莫爾圓(E,effective)右邊，破壞時 σ'_3 小於 σ'_{3c} ，如圖 7-26。前一節在排水試驗裏(CD)，加軸差應力導致鬆砂或 NC 體積減少，現在 CU 試驗禁止體積減少，也就是「剪縮性」被禁止，也就是水產生正超額孔隙壓力抵抗外力的壓縮。

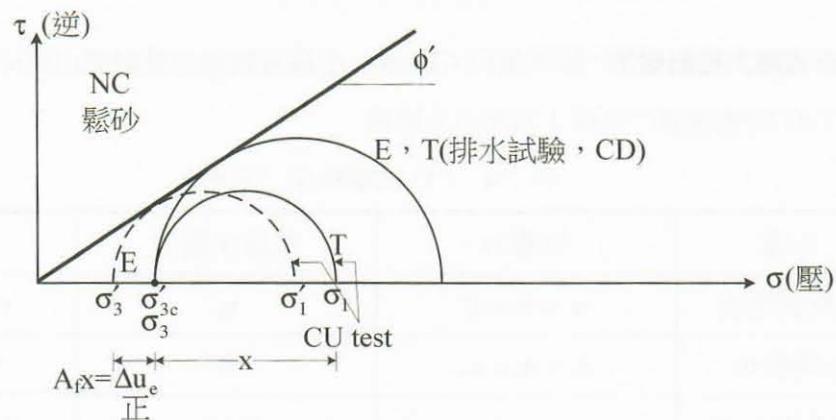


圖 7-26 以 NC、鬆砂為例

若以 σ'_{3c} 壓密後，仍維持閥門開啟，加軸差應力可排水(變成 CD test)，則有效應力會上升，抗剪強度會增加，破壞時莫爾圓會較 CU test 大，總應力莫爾圓和有效應力莫爾圓重合(因超額

孔隙水壓為零)，如圖 7-26。

不管進行哪一種試驗，其實都是有效應力控制破壞，縱然進行 CU test，也是有效應力莫爾圓切到有效應力強度線而破壞，也就是圖 7-26 的虛線圓切到有效應力強度線而破壞。總應力強度參數 c_{cu} 、 ϕ_{cu} 並不能決定 CD 試驗破壞時的總應力破爾圓位置，但 c' 、 ϕ' 可決定任何試驗破壞時的有效應力莫爾圓位置。 c_{cu} 也可寫成 c_T ， ϕ_{cu} 也可寫成 ϕ_T 。

對於緊砂或嚴重過壓密黏土，先加 σ'_{3c} 圍壓壓密，再加軸差應力不排水，會產生負的超額孔隙水壓，所以試體破壞時，總應力莫爾圓(T,total)在有效應力莫爾圓(E,effective)左邊， σ'_3 大於 σ'_{3c} ，如圖 7-27。如果加軸差應力時，閥門依舊開啟，可排水(變成 CD test)，則破壞時莫爾圓會較 CU test 小，總應力莫爾圓和有效應力莫爾圓重合(因超額孔隙水壓為零)，如圖 7-27。

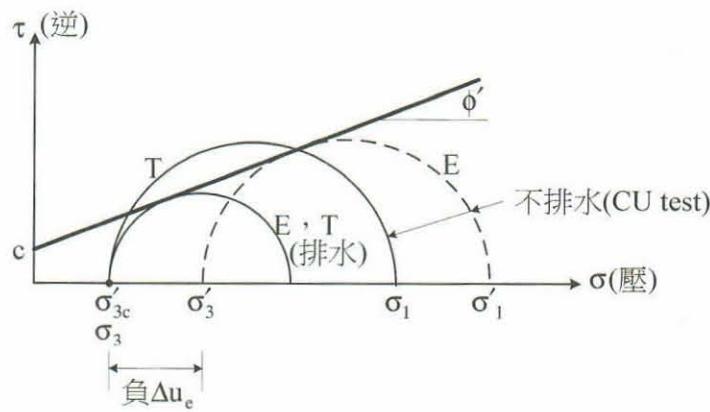


圖 7-27 以 OC 為例

總是有效應力控制破壞，縱然進行 CU test，也是有效應力莫爾圓切到排水強度線而破壞，也就是圖 7-27 的虛線圓切到排水強度線而破壞。

表 7-4 CU 試驗解題必勝表格

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣到地表	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	u_r	$\sigma'_v = \sigma'_h = -u_r$
加圍壓 σ_3	$\sigma_v = \sigma_h = \sigma_3$	0	$\sigma'_v = \sigma'_h = \sigma_3$
加軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\sigma_h = \sigma_3$ $\sigma_v = \sigma_3 + \Delta\sigma_d$	$D\Delta\sigma_d$	$\sigma'_h = \sigma_3 - D\Delta\sigma_d$ $\sigma'_v = \sigma_3 + \Delta\sigma_d - D\Delta\sigma_d$

上表為完整型表格，只要會寫出總應力與孔隙水壓力即可，有效應力那欄用減法來求，「寫

出表格=得分」。若題目簡單，可以只寫「加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 」那一列，為簡易型表格。

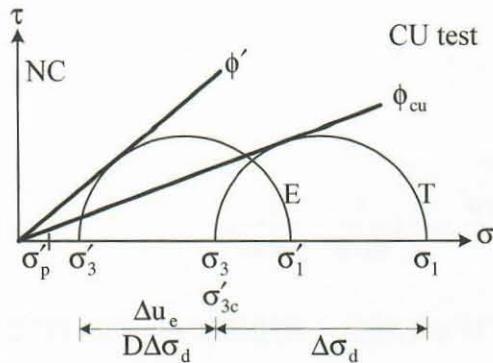


圖 7-28(a)

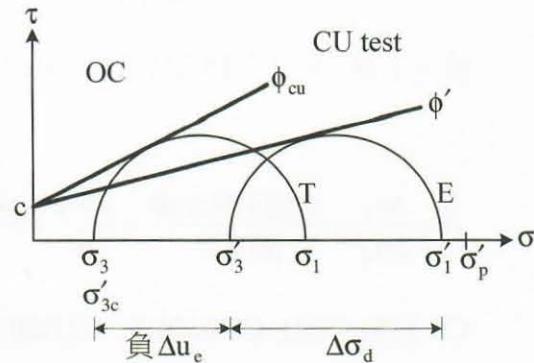


圖 7-28(b)

正常壓密黏土 $c_{cu} = 0 \text{ kPa}$, 純砂土 $c_{cu} = 0 \text{ kPa}$ 。以 NC clay 舉例, CU 試驗先加圍壓 σ'_{3c} 壓密，再加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 直到破壞，破壞時，有效應力莫爾圓(E)與總應力莫爾圓(T)平移關係如圖 7-28(a)。

表 7-5 現場 NC 受力 v.s. NC 試體在 CU 試驗受軸差應力

受力類型	σ_v	σ'_v	u_e
現場飽和 NC 廣大面積垂直加載，短期	增加	不變	增加
現場飽和 NC 廣大面積垂直加載，長期	增加	增加	消散至零
現場飽和 NC 廣大面積垂直開挖，短期	減少	不變	負數
現場飽和 NC 廣大面積垂直開挖，長期	減少	減少	消散至零
NC 飽和試體軸向加壓至破壞之時	增加較多	增加較少	增加
NC 飽和試體軸向解壓至破壞之時	減少	減少較多	正數

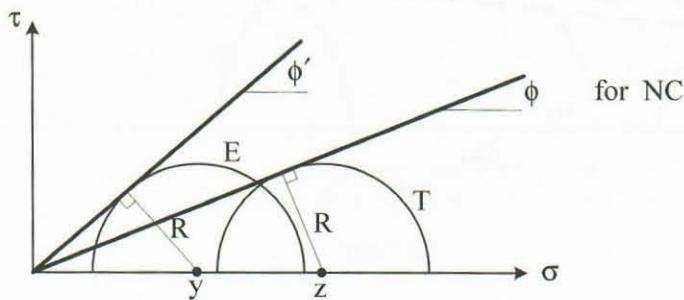


圖 7-29

孔隙水壓力參數 $A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right)$ ，證明如下：

參考上圖，依三角形幾何關係， $\sin \phi = \frac{R}{z}$ ， $\sin \phi' = \frac{R}{y}$

$$A = \frac{\Delta u_e}{\Delta \sigma_d} = \frac{\text{兩圓平移距離}}{\text{圓直徑}} = \frac{z - y}{2R} = \frac{\frac{R}{\sin \phi} - \frac{R}{\sin \phi'}}{2R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) \quad [7.17]$$

CU 試驗考題比 CD 試驗多，因為觀念多了不排水的部分，教授超想考，而且有效應力莫爾圓不重合於總應力莫爾圓。建議平常解題，要畫出這兩個莫爾圓，衝擊自己知識的盲點，才不會在考場上被衝擊。CU test 試體破壞時，若主應力 σ_1 在軸向，則破壞面和水平夾角 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} \neq 45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}$ ，是有效應力控制破壞。

圖 7-30 顯示在預壓密應力(σ'_p)前後，有效應力強度線和總應力強度線的不同型態。試體所加的壓密應力，若未超過 σ'_p ，則此試體是 OC；試體所加的壓密應力，若超過 σ'_p ，則此試體是 NC。在 NC 工址取出的試體，在試驗室若未將壓密應力提升到現地應力，則此試體是 OC。 z' 點是有效應力強度線的轉折點， z 點是總應力強度線的轉折點，並請注意，在 NC 階段，加軸壓破壞時水壓力為正數，總應力莫爾圓 T 在有效應力莫爾圓 E 的右邊；在 OC 階段，加軸壓破壞時水壓力為負數，總應力莫爾圓 T 在有效應力莫爾圓 E 的左邊。

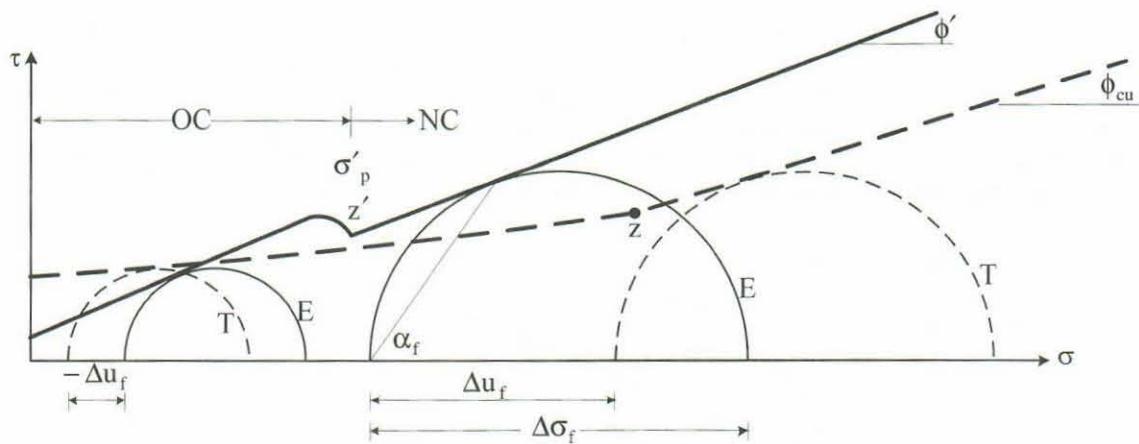


圖 7-30

例 7-5.1 CD 與 CU 試驗

有一土壤樣品，進行壓密排水試驗，在圍壓為50 kPa的條件下壓密，在軸差應力150 kPa時破壞；在圍壓為150 kPa的條件下壓密，在軸差應力450 kPa時破壞。試決定此土樣之抗剪參數之凝聚力及摩擦抗剪角，並求出破壞面上的角度與作用於破壞面之正向應力與剪應力大小。同一土樣，若進行壓密不排水試驗，在圍壓為200 kPa的條件下壓密，接著進行不排水剪動，破壞時之超額孔隙水壓為75 kPa，試問破壞時之軸差應力為多少？同一土樣，若進行壓密不排水試驗，在圍壓為400 kPa的條件下壓密，接著進行不排水剪動，破壞時之超額孔隙水壓與軸差應力各自為多少？

<100年土木高考20分>



(1)進行 CD 試驗，兩組試體破壞時數據如下：(簡易型表格，unit : kPa)

	σ_3	$\Delta\sigma_d$	σ_1	σ'_3	σ'_1
試體 1	50	150	200	50	200
試體 2	150	450	600	150	600

兩組數據分別代入 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right)$

由②-①，解出 $\phi' = 36.87^\circ$

再將 ϕ' 代入①，得 $c' = 0$ kPa

$$\text{破壞面與水平面夾角 } \alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = 63.43^\circ$$

第一組試體破壞時，莫爾圓如圖 a

參考圖 a，聯立 $\begin{cases} \tau_f = \sigma \tan 36.87^\circ \\ \tau_f = (\sigma - 50) \tan \alpha_f = (\sigma - 50) \tan 63.43^\circ \end{cases}$

$$\text{解出破壞面 } \sigma = 80 \text{ kPa} \quad \tau_f = 60 \text{ kPa}$$

第二組試體破壞時，莫爾圓如圖 b

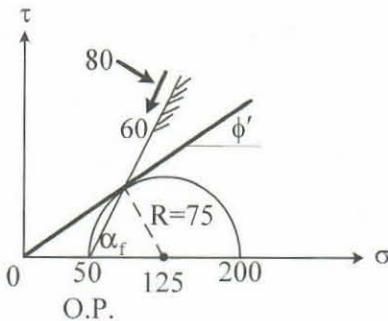


圖 a

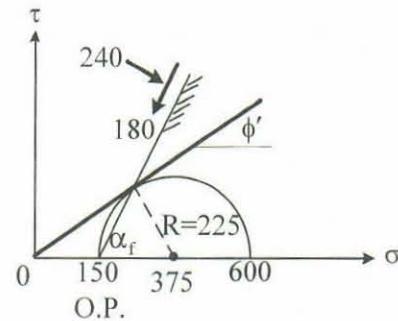


圖 b

參考圖 b，聯立 $\begin{cases} \tau_f = \sigma \tan 36.87^\circ \\ \tau_f = (\sigma - 150) \tan \alpha_f = (\sigma - 150) \tan 63.43^\circ \end{cases}$

解出破壞面 $\sigma = 240 \text{ kPa}$ $\tau_f = 180 \text{ kPa}$

(2) 進行 CU 試驗，試體破壞時數據如下：(unit : kPa)

	總應力	孔隙水壓力	有效應力
加圍壓	$\sigma_3 = \sigma_1 = 200$	0	$\sigma'_3 = \sigma'_1 = 200$
加軸差應力 x	$\sigma_1 = 200 + x$, $\sigma_3 = 200$	75	$\sigma'_1 = 125 + x$, $\sigma'_3 = 125$

依 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$

得 $125 + x = 125 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{36.87^\circ}{2} \right) + 0$

解出軸差應力 $x = 375 \text{ kPa}$

水壓力參數 $A = \frac{\Delta u_e}{\Delta \sigma_d} = \frac{75}{375} = 0.2$

(3) 進行 CU 試驗，試體破壞時數據如下：(unit : kPa)

	總應力	孔隙水壓力(橡皮膜內)	有效應力
加圍壓	$\sigma_3 = \sigma_1 = 400$	0	$\sigma'_3 = \sigma'_1 = 400$
加軸差應力 x	$\sigma_1 = 400 + x$ $\sigma_3 = 400$	$u = Dx = ABx$ $= Ax = 0.2x$	$\sigma'_1 = 400 + 0.8x$ $\sigma'_3 = 400 - 0.2x$

依 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$

得 $400 + 0.8x = 4(400 - 0.2x) + 0$

解出軸差應力 $x = 750 \text{ kPa}$

超額孔隙水壓力 $u_e = Ax = 0.2x = 150 \text{ kPa}$

討論

1. 在第(2)步驟，可依解出之數據代入 $\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}\right) + 2c_{cu} \tan\left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}\right)$ ，寫出
 $200 + 375 = 200 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}\right) + 0$ ，解出 $\phi_{cu} = 28.94^\circ$ 。
2. 在第(3)步驟，可再依 $\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}\right) + 2c_{cu} \tan\left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}\right)$ ，寫出
 $400 + x = 400 \tan^2\left(45^\circ + \frac{28.94^\circ}{2}\right) + 0$ ，解出 $x = 750 \text{ kPa}$ 。
3. 「同一土樣」，抗剪強度參數 c' 及 ϕ' 就不變， c_{cu} 與 ϕ_{cu} 也不變，但抗剪強度 τ_f 會變。
4. 在圖 a 中，強度線方程式是 $\tau_f = \sigma \tan 36.87^\circ$ ，破壞面的直線方程式是 $\tau_f = (\sigma - 50) \tan \alpha_f = (\sigma - 50) \tan 63.43^\circ$ ，兩直線的交點，正好是強度線與莫爾圓的交點。交點座標正是破壞面的正向應力及剪應力。圖 b 亦然。
5. 圖 a 中，圓心座標值 $= (200+50)/2 = 125 \text{ kPa}$ ，半徑 $R = (200-50)/2 = 75 \text{ kPa}$ ，破壞面正向應力 $\sigma = 125 - 75 \sin 36.87^\circ = 80 \text{ kPa}$ ， $\tau_f = 75 \cos 36.87^\circ = 60 \text{ kPa}$ 。
6. 圖 b 中，圓心座標值 $= (600+150)/2 = 375 \text{ kPa}$ ，半徑 $R = (600-150)/2 = 225 \text{ kPa}$ ，破壞面正向應力 $\sigma = 375 - 225 \sin 36.87^\circ = 240 \text{ kPa}$ ， $\tau_f = 225 \cos 36.87^\circ = 180 \text{ kPa}$ 。
7. $A_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin 28.94^\circ} - \frac{1}{\sin 36.87^\circ} \right) = 0.2$ 。
8. 排水壓密，莫爾圓收斂成一個點，半徑為零，試體任何剖面的剪應力都是零。加軸差應力導致莫爾圓半徑產生，大部分剖面都產生(承受)剪應力，故加軸差應力俗稱「受剪」。
9. 當題目沒特別指明時，請自行假設試體是飽和狀態， $B=1.0$ 。當題目出現「圍壓」字眼，須從前後文判斷該圍壓數據是總應力還是有效應力。

10. 有時考題出現 CIU(Consolidated Isotropically Undrained)試驗，就是加均向圍壓壓密，再關閉閥門加軸差應力，就是本節所講的 CU 試驗。另有 CAU(Consolidated Anisotropically Undrained)試驗，就是加異向圍壓壓密，再關閉閥門加軸差應力，目前無考題。
11. 砂土易崩散，不易取得不擾動試體供三軸試驗用，砂土宜進行現地試驗。
12. 三軸 CD 試驗並不滿足平面應變條件，但條型淺基礎、極長擋土牆下方的土壤變形卻是平面應變狀態，這樣可以把三軸 CD 試驗的 ϕ 代入現場嗎？理論上不可以，但強強代入會得較保守的設計結果，因為同一土壤，平面應變試驗條件下，表現出來的 ϕ 更大，約大 10%左右。
13. CD 試驗允許試體體積改變、形狀改變(Distortion)；直剪試驗也產生試體形狀改變，但允許體積改變的量較少。
14. 黏性土壤在大面積加載(K_0 狀態，側向無法變形)之行為與三軸試驗(側向可變形)之行為並不一樣。就算是過壓密土壤，在大面積加載下，體積還是會減少(以 C_r 算沉陷量)，不會產生剪脹，產生正的 u_e ，並逐漸消散；但在 CD 試驗下，體積卻會膨脹(剪脅性)。

例 7-5.2 CU 試驗

某正常壓密黏土，由三軸壓密不排水試驗 (CU) 之結果，得總應力摩擦角 $\phi_{cu} = 25^\circ$ ，有效應力摩擦角 $\phi'_{cu} = 30^\circ$ 。

- (一)若從事三軸壓密不排水試驗 (CU)，已知破壞時之軸差應力為 150 kPa，求初始有效圍壓、破壞時超額孔隙水壓力、破壞面與水平面之夾角、 $A_f = ?$
- (二)若從事三軸壓密不排水試驗 (CU)，壓密應力 200 kPa，圍壓不變而軸向解壓至破壞，求破壞時之有效垂直應力及超額孔隙水壓力、破壞面與水平面之夾角。

<修改97年土木技師20分>



(一) NC, $c_{cu} = 0$ kPa

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right)$$

$$\sigma_3 + 150 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{25^\circ}{2} \right) + 0$$

解出有效初始圍壓 $\sigma_3 = 102.465 \text{ kPa}$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 150 = 252.465 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$252.465 - u_e = (102.465 - u_e) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{30^\circ}{2} \right) + 0$$

解出 $u_e = 27.465 \text{ kPa}$

$$A_f = u_e / \Delta \sigma_d = 27.465 / 150 = 0.1831$$

$$\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = 60^\circ$$

$$(二) \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right)$$

$$\sigma_1 = \sigma_h = 200 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{25^\circ}{2} \right) + 0$$

解出 $\sigma_3 = \sigma_v = 81.172 \text{ kPa}$

$$\Delta u_e = A_f \times \Delta \sigma_d = 0.1831 \times (200 - 81.172) = 21.76 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \Delta u_e = 81.172 - 21.76 = 59.412 \text{ kPa}$$

$$\alpha_f = 45^\circ - \frac{\phi'}{2} = 30^\circ$$

(此公式可見筆者《解說基礎工程》第一章)

討論

大面積開挖正常壓密黏土(尚未至破壞)，會產生 $-u_e$ ，詳第四章例題。

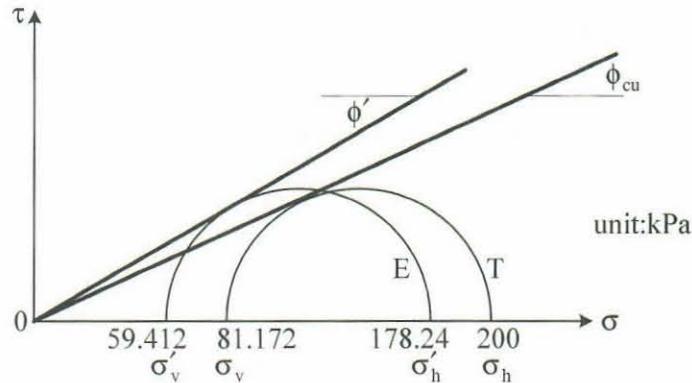
$$A_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin 25^\circ} - \frac{1}{\sin 30^\circ} \right) = 0.1831.$$

同一種土壤，若 OCR 增加，則 A_f 變小，甚至成為負數。

第(二)小題，正常壓密黏土試體軸向解壓，過程中(尚未破壞)會先產生 $-u_e$ ，但繼續解壓 u_e 轉變成零，破壞時是產生 $+u_e$ 。試驗室以橡皮膜包試體，相對於現場易變形，現場左右有拘束，

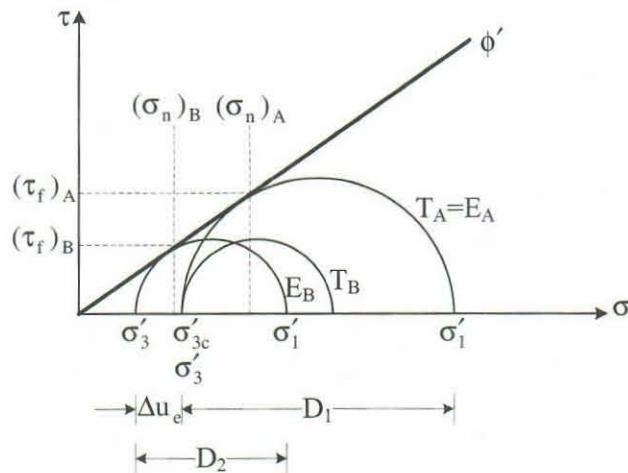
比較不易大變形。第(二)小題， σ_1 在水平向， σ_3 在垂直向，故破壞面與水平面之夾角 $\alpha_f = 45^\circ - \frac{\phi'}{2}$ 。檢核 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right)$ ，得

$$200 - 21.76 = (81.172 - 21.76) \tan^2\left(45^\circ + \frac{30^\circ}{2}\right) + 0, \text{ 等號成立無誤。}$$



例 7-5.3 建立觀念

某工址地層為飽和正常壓密黏土，從同一深度取出兩相同試體後，A試體進行CD試驗，B試體進行CU試驗，所加圍壓 σ'_{3c} 均同於現地壓密應力，請問哪一試體破壞時的軸差應力較大？哪一試體破壞面的正向應力較大？哪一試體破壞面的剪應力較大？以上均請附理由。



- (1) A 試體破壞時的軸差應力較大。A 試體破壞面的正向應力較大。A 試體破壞面的剪應力較大。

- (2) A 試體進行 CD 試驗，故加完圍壓之後的 σ'_{3c} ，就是實際破壞時的 σ'_3 。但是 B 試體進行 CU 試驗，加完圍壓 σ'_{3c} 後，再加軸差應力產生正的 u_e ，導致破壞時的 σ'_3 小於 σ'_{3c} ，意即 B 試體的有效應力莫爾圓比 A 左移，半徑勢必較小，也就是破壞時 B 的軸差應力較小。A 與 B 試體，加完圍壓 σ'_{3c} 之後，莫爾圓均收斂在橫軸 σ'_{3c} 點位，半徑為零。A 試體加軸差應力 D_1 而破壞，B 試體加軸差應力 D_2 而破壞。 σ'_{3c} 是 A 試體破壞時的最小主應力； σ'_{3c} 是 B 試體破壞時，總應力莫爾圓的最小主應力，卻不是有效應力莫爾圓的最小主應力。
- (3) B 試體的有效應力莫爾圓與其強度線之切點，比 A 試體切點更往左下方移動，故 B 試體破壞面的正向應力、剪應力均 A 較小。

討論

對於 B 試體， $\Delta u_e = D_2 \times D$ 。飽和正常壓密黏土，若能讓其受剪時排水，破壞面的抗剪強度會比不排水狀態還大。

某砂土 CU 試驗，破壞時產生 $u_e = 40$ kPa，請問是鬆砂還是緊砂？答：資訊不足無法判斷。若 $\Delta \sigma_d = 20$ kPa，則 $A_f = 2$ ，為鬆砂。若 $\Delta \sigma_d = 200$ kPa，則 $A_f = 0.2$ ，為緊砂。

通常遇到地震、爆炸、水庫內邊坡急洩降，才會用 c_{cu} 、 ϕ_{cu} 求土壤抗剪強度。若是多樓層灌漿或橋柱高度多次灌漿，並不用 c_{cu} 、 ϕ_{cu} 求土壤抗剪強度。

黑白郎君南宮恨有言「把郎ㄟ希敗，丟戲哇ㄟ快樂。」黑白郎君正是莫爾-庫侖排水強度準則線(c' 、 ϕ')的代言人，有效應力莫爾圓碰到黑白郎君就失敗了。有朋友認為總應力莫爾圓碰到(c_{cu} 、 ϕ_{cu})強度線也是破壞，故(c_{cu} 、 ϕ_{cu})強度線也是控制破壞的幕後藏鏡人。這想法只有一半是正確的，另一半錯。因為進行 CU 試驗時，的確是總應力莫爾圓切到(c_{cu} 、 ϕ_{cu})強度線而破壞，但 SUU 試驗時，不是總應力莫爾圓切到(c_{cu} 、 ϕ_{cu})強度線而破壞。

SUU 試驗詳下一節，而在 SUU 試驗中，依然是有效應力莫爾圓碰到黑白郎君(i.e., 排水強度準則線)就失敗了。故黑白郎君才是到處控制各種破壞的萬惡罪魁呀！

例 7-5.4 傳說中的 CUU 試驗

有一正常壓密黏土進行壓密不排水(CU)試驗，此土樣首先以圍壓500 kPa和背水壓力(back pressure)250 kPa做同向壓密。壓密完成後，關閉排水閥，將圍壓增至700 kPa，以檢核試體之飽和度，經檢核，試體完全飽和，此土樣緊接著以此圍壓進行增加軸向壓力直至試體破壞為止。試驗過程發現，土壤在破壞時，主應力差為190 kPa，總孔隙水壓力為590 kPa，試求：

- (一)破壞時之最大和最小有效主應力。
- (二)破壞時之有效內摩擦角 ϕ' (假設 $c'=0$ kPa)。
- (三)在土壤受剪前之孔隙水壓力為若干？
- (四)破壞時之孔隙水壓力參數 $A_f=$ ？
- (五)求 $\phi_{cu}=?$

<改編93年成大土研20%>



(一)

步驟	總應力	[橡皮膜內總水壓力 = $u_{back} + u_e$]	有效應力
壓密(排水，但還存 有反水壓)	$\sigma_1=\sigma_3=500$	$[250 = 250 + 0]$	$\sigma'_1=\sigma'_3=$ $500-250=250$
關閥門加圍壓(不排 水)	$\sigma_1=\sigma_3=700$	$[450 = 250 + 200]$	$\sigma'_1=\sigma'_3=$ $700-450=250$
加軸差應力(不排水)	$\sigma_1=700+190=890$ $\sigma_3=700$	$[590 = 250 + 340]$	$\sigma'_1=890-590=300$ $\sigma'_3=700-590=110$

※以上步驟類似 C + U + U，故戲稱 CUU 試驗

破壞時， $\sigma'_1=300$ kPa， $\sigma'_3=110$ kPa

$$(二) \quad \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right)$$

$$300 = 110 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 0 \qquad \text{解出 } \underline{\phi' = 27.61^\circ}$$

(三)450 kPa

$$(四) A_f = \Delta u_e / \Delta \sigma_d = (340 - 200) / 190 = 0.737$$

$$(五) A_f = 0.737 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) = 0.5 \left(\frac{1}{\sin \phi_{cu}} - \frac{1}{\sin 27.61^\circ} \right) \quad \text{解出 } \underline{\underline{\phi_{cu} = 16^\circ}}$$

討論

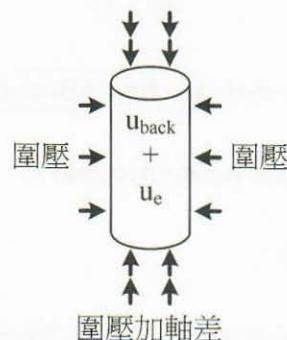
寫出表格=得分。寫不出表格=沒分。本試驗共三個步驟(C+U+U)，若把每個步驟的反水壓250 kPa均扣掉，則每一步驟的總應力也要扣250 kPa，每一步驟的有效應力不變，強度參數不變， A_f 不變。

有人用 $\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right)$ ，得 $890 = 700 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 0$ ，解出 $\phi_{cu} = 6.86^\circ$ ，對不對？錯。正確應該是 $890 - 250 - 200 = (700 - 250 - 200) \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 0$ ，解出 $\phi_{cu} = 16^\circ$ 。要扣 u_{back} (=250 kPa)，要扣加圍壓不排水引起的200 kPa，才是應代入公式的總應力。

所有試驗，破壞時的有效應力莫爾圓一定切到 c' 、 ϕ' 強度線。但 CD、SUU、UC 試驗破壞時的總應力莫爾圓，不會切到 c_{cu} 、 ϕ_{cu} 強度線。故我們說「有效應力參數控制破壞」。

加反水壓(back pressure)的目的乃是使試體飽和。從地下水位線以下取出的試體，因膨脹故，飽和度降至低於 100%以下，為模擬真實現場，故試體外包橡皮模之後，會在橡皮膜內側打反水壓，強迫空氣溶於水中，提高飽和度至接近 100%。又為了避免橡皮膜爆破，會在橡皮膜外側同步加「室壓」(cell pressure)，而室壓約比反水壓大 0.05 kgf/cm²。

解題表格中，「圍壓」是發生在橡皮膜外側四面八方的水壓力。橡皮膜內側的是 u_{back} 及 u_e 。



§7-6 三軸之 SUU 試驗

前述兩節的試驗，均須對試體壓密，試驗時間較久。倘工地是排水很慢的飽和黏土，且又多階加載，多階之間均來不及排水，則可取樣進行 SUU(Saturated Unconsolidated Undrained)試驗—飽和不壓密不排水試驗，求現場土壤短期來不及排水的強度參數 s_u ，此特稱不排水剪力強度，用以估計現場 NC 短期強度。若試體不飽和，則進行 UUU(Unsaturated Unconsolidated Undrained)試驗—不飽和不壓密不排水試驗。大部分考題寫「UU 試驗」，指的是 SUU 試驗，本試驗耗時短，是較常做的三軸試驗。

黏土試體取樣後，解壓膨脹， $\sigma_3=0$ ，解壓過程產生負的超額孔隙水壓，解壓到地表，試體內的水壓為負數，稱為殘餘孔隙水壓 u_r ，故此時有效應力為正數 $\sigma'_v = \sigma'_h = -u_r$ 。正因為內部有效應力為正數，所以試體可以「站立」不會倒塌。殘餘孔隙水壓 u_r 怎麼算？可看圖 7-31：

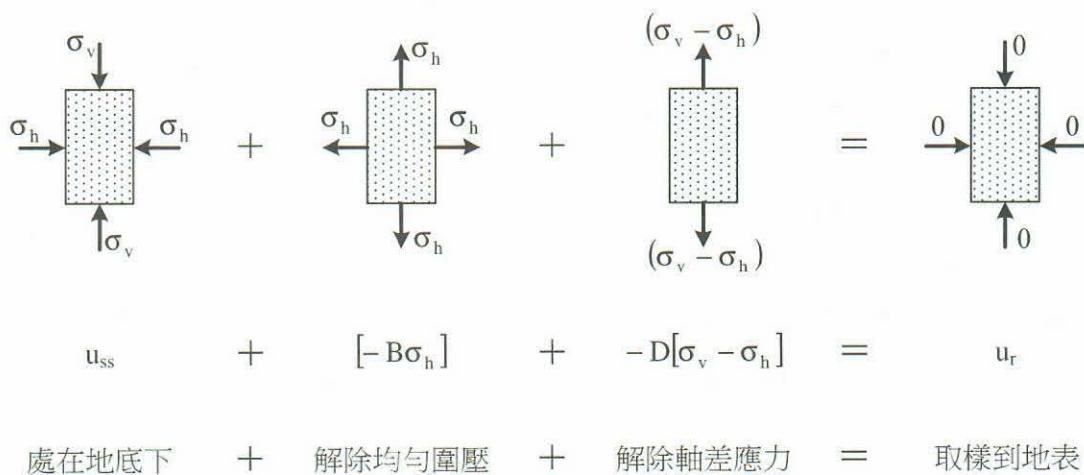


圖 7-31

$$u_r = u_{ss} + u_e = u_{ss} + [-B\sigma_h] + [-D(\sigma_v - \sigma_h)] = \boxed{u_{ss} - B\sigma_h - AB(\sigma_v - \sigma_h)} \quad [7.18]$$

$$\text{若試體飽和, } B=1, \text{ 上式變成 } u_r = u_{ss} - \sigma_h - A(\sigma_v - \sigma_h) \quad [7.19]$$

適合採用 SUU 試驗的工址類型：

- ①現場是極軟弱黏土，還未完成壓密，於其上填築路堤(多階滾壓)或新建結構物(多樓層多階灌漿)，求短期土壤強度。

②評估填方邊坡、挖方邊坡短期穩定的安全係數。

③快速興建土石壩，壩殼層迅速填起，壩殼層一部分重量會壓於壩心黏土上，壩心含水量來不及改變(即來不及排水)，求壩心黏土抗剪強度。

④評估基礎壓於 NC clay 上，求黏土短期穩定的安全係數。

⑤黏土邊坡圓弧滑動安全係數分析採用 s_u 及 $\phi_u = 0^\circ$ 進行。

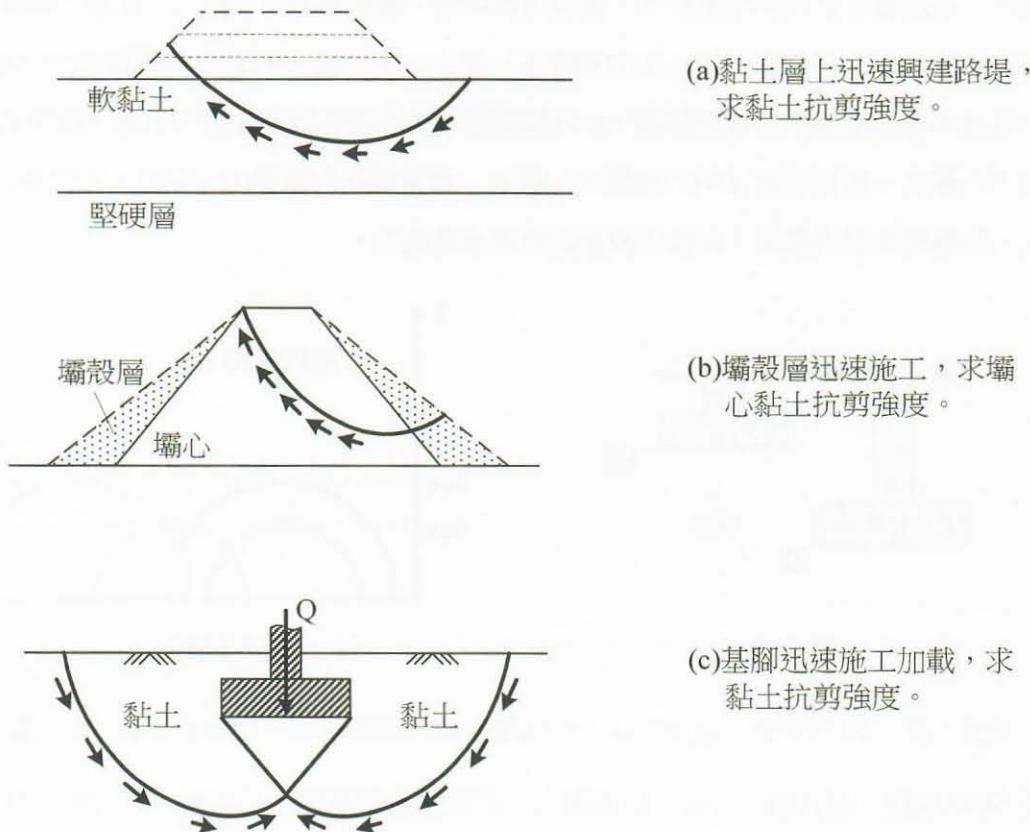


圖 7-32 虛線表示即將施工位置

SUU test 乃是先關閉排水閥門，以等向圍壓 σ_3 作用於飽和試體四周，但這無法對試體壓密， σ_3 等量地全部轉為超額孔隙水壓($B=1$)，此超額孔隙水壓排不掉，無法改變取樣後的有效應力，無法改變含水量。接著施加軸差應力，直至試體破壞。施加軸差應力階段又會激發第二段超額孔隙水壓，請不要以為「超額孔隙水壓的增量會等於軸差應力的量」($A \neq 1$)。本試驗因不必等待壓密，故試驗速度快，省時。

對於同一工址，同一深度取出的數個試體進行 SUU 試驗，在不排水前提下，各試體給予不同的圍壓 σ_3 ，會發現破壞時，軸差應力一樣大，即應力莫爾圓直徑一樣大。換言之，各試體不排水剪力強度 s_u (半徑)一樣大，一樣大的原因和試驗者加的圍壓 σ_3 無關，因為 σ_3 無法更進一步壓密試體， s_u 只和試體取出地表時的有效應力有關，這些試體的有效應力都一樣大，所以不排水剪力強度一樣大。

參考圖 7-33(a)與(b)，對於同一工址，不同深度取出的數個試體進行 SUU 試驗，在不排水前提下，各試體給予不同的圍壓 σ_3 ，會發現破壞時，軸差應力不一樣大，即應力莫爾圓直徑不一樣大。換言之，各試體不排水剪力強度不一樣大，不一樣大的原因和試驗者加的圍壓 σ_3 無關，因為 σ_3 無法更進一步壓密試體， s_u 只和試體取出地表時的有效應力有關，這些試體的有效應力不一樣大，所以不排水剪力強度不一樣大。通常越深的試體(B 試體)，有效應力越大， s_u 越大。故基礎埋置得愈深，能獲得較佳的短期承載能力。

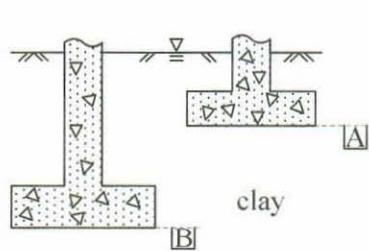


圖 7-33(a)

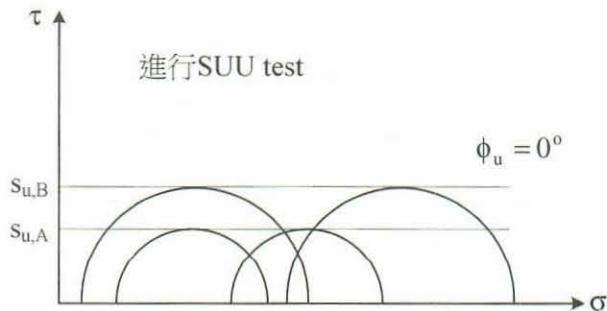


圖 7-33(b)

決定不排水剪力強度的關鍵因素，是試體內部的有效應力，以及 c' 和 ϕ' 。你可以說：雖然進行 SUU 試驗，但背後主控破壞的藏鏡人，其實是有效應力、 c' 和 ϕ' 。軟弱黏土受力，可用 s_u 當其短期強度。

對於正常壓密黏土，Skempton(1957)提出經驗公式
$$\frac{s_u}{\sigma'_0} = 0.11 + 0.0037PI \quad [7.20]$$

題目給定 PI 後， $(0.11+0.0037PI)$ 等於常數 C，即 $s_u=C\sigma'_0$ ，說明正常壓密黏土，垂直有效應力愈大，不排水剪力強度就愈大。

不排水剪力強度 $c_u (= s_u)$ ，是受剪在體積維持不變下，破壞時莫爾圓半徑 R。注意 s_u 並不等

於破壞面上的剪應力， s_u 會比破壞面上的剪應力 τ_f 略大，畫莫爾圓仔細作圖就可以看出來， $\tau_f = s_u \cos \phi'$ ，如圖 7-34。不排水剪力強度其實是應力的單位，不是力的單位，故要用小寫的 c 或 s 。 C_u 是均勻係數，勿混亂。

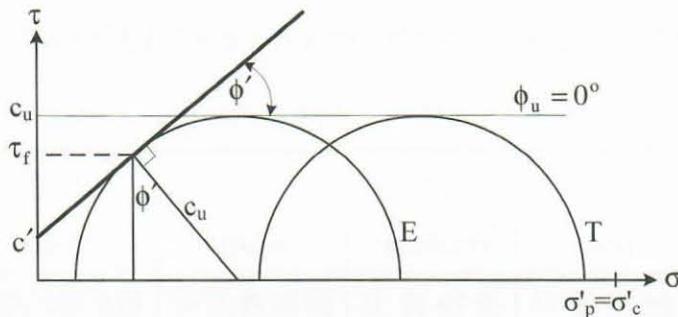


圖 7-34

凝聚力 c 和不排水剪力強度 s_u 是完全不同的概念，前者是有效正向應力為零時，土體的抗剪強度；後者的有效正向應力不為零，是黏土受迅速載重作用，破壞面表現出來的大約抗剪強度，而且如果能夠讓有效正向應力增加，不排水剪力強度 s_u 會增加，但凝聚力 c 不會增加。

取樣後，若試體不加圍壓壓密，試體內部有效應力通常會小於現地同深度的有效應力(可見於計算題過程)，導致試體比現地同深度的黏土衰弱。衰弱試體低估現場強度，但衰弱試體求出 s_u 值，以 s_u 值估計試體破壞面剪力強度 τ_f ，會高估試體破壞面剪力強度 τ_f ，一失一得得失互補，故工程上簡化以試體的 s_u 值當成現地的 $s_{u,site}$ 值。後續基礎設計常取 $FS=3$ ，已相當保守。

表 7-6 SUU 試驗解題必勝表格

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣到地表	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	u_r	$\sigma'_v = \sigma'_h = -u_r$
加圍壓 σ_3	$\sigma_v = \sigma_h = \sigma_3$	$u_r + B\sigma_3$	$\sigma'_v = \sigma'_h = \sigma_3 - u_r - B\sigma_3$
加軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\sigma_h = \sigma_3$ $\sigma_v = \sigma_3 + \Delta\sigma_d$	$u_r + B\sigma_3 + D\Delta\sigma_d$	$\sigma'_h = \sigma_3 - u_r - B\sigma_3 - D\Delta\sigma_d$ $\sigma'_v = \sigma_3 + \Delta\sigma_d - u_r - B\sigma_3 - D\Delta\sigma_d$

上表為完整型表格，只要會寫出總應力與孔隙壓力即可，有效應力那欄用減法來求，「寫出表格=得分」。若題目簡單，可以只寫「加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 」那一列，為簡易型表格。試體破壞時，若主應力 σ_1 在軸向，破壞面和水平夾角 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} \neq 45^\circ$ ，是有效應力控制破壞。

SUU 試驗考題也比 CD 試驗多，因為多了不排水的觀念，而且有效應力莫爾圓不重合於總

應力莫爾圓。大部分考題 $B=1$ ，閘門先關閉，加完圍壓之後，有效應力不會改變，仍等於取樣到地表的有效應力。有效應力若不能提升，試體的抗剪強度就不能提升。

「稠性」(Consistency)一詞在土壤力學中意義頗混亂，是個未嚴格定義的名詞，可能引起不同人之間的誤會。對於細顆粒土壤，Terzaghi、Peck & Mesri 定義稠性如下表：

表 7-7 細顆粒土壤之稠性分類

分類	非常軟 (very soft)	軟 (soft)	中等 (medium)	硬 (stiff)	堅硬 (hard)	極堅硬 (very hard)
描述	拇指很容易貫入	拇指僅可貫入 2.5 cm	拇指費力可貫入 0.6 cm	拇指費力可貫入 0.12 cm	拇指難以壓出凹痕，但指甲可壓出凹痕	指甲難以壓出凹痕
SPT-N ₆₀	<2	2~4	4~8	8~15	15~30	>30
s _u (kPa)	<12	12~25	25~50	50~100	100~200	>200

SPT-N₆₀ 可等到《解說基礎工程》再研讀。

例 7-6.1 不排水剪力強度

有一正常壓密黏土其飽和單位重為 $\gamma_{sat}= 18 \text{ kN/m}^3$ ，其排水剪力摩擦角為 $\phi_d = 28^\circ$ 。取該土壤試體進行壓密不排水 (CU) 三軸壓縮試驗，圍壓 $\sigma_3 = 105 \text{ kN/m}^2$ ，破壞時之軸差應力 $\Delta\sigma_{df} = 90 \text{ kN/m}^2$ 。則此一試體破壞時之孔隙水壓 Δu_f 及孔隙水壓參數 A_f 為何？如該正常壓密黏土層分佈於地表至地表下10 m 間，地下水位位於地表下2 m 處，推求地表下深度5 m 處之土壤不排水剪力強度 s_u 。

<94年土木技師20分>



$$(1) \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$(105 + 90) - \Delta u_f = (105 - \Delta u_f) \tan^2(45^\circ + \frac{28^\circ}{2}) + 0$$

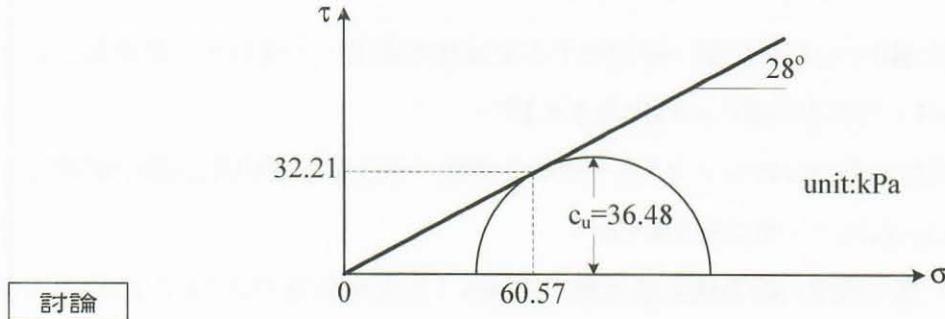
解出 $\Delta u_f = 54.15 \text{ kPa}$

$$A_f = \Delta u_f / \Delta \sigma_{df} = 54.15 / 90 = 0.6$$

$$(2) \sigma'_v = 2 \times 18 + 3(18 - 9.81) = 60.57 \text{ kPa}$$

現地地表下 5m 之水平方向剪力強度 $\tau_f = \sigma'_v \tan 28^\circ = 60.57 \tan 28^\circ = 32.21 \text{ kPa}$

$$\text{現地地表下 } 5\text{m 之不排水剪力強度 } s_u = \frac{\tau_f}{\cos \phi'} = \frac{32.21}{\cos 28^\circ} = 36.48 \text{ kPa}$$



注意題目是「推求地表下深度 5 m 處之土壤不排水剪力強度」，而不是把地表下深度 5 m 處土壤取樣到試驗室，進行 SUU 試驗。這兩種有什麼差別？後者包橡皮膜，受軸差應力較容易變形，且取樣解壓，造成試體內部有效應力低於現地，試體常變成 OC(試體品質變差)，現地是 NC。現地周圍有側向應力，側向應力大小試驗室未必充分模擬，且現地軸向與側向變形拘束條件較多，難以大變形，故現地之 s_u 常常大於室內 SUU 試驗之 s_u 。就像 RC，使用緊密螺籠筋圍束良好的柱，能吃更大的軸壓力， q_u 較大，即 s_u 較大。

總 應 力 $\sigma_1 = \sigma_3 + \Delta \sigma_d = 105 + 90 = 195 \text{ kPa}$ ，強 度 參 數 $c_{cu} = 0 \text{ kPa}$ ，公 式

$$\sigma_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 0 \text{，代數據得 } 195 = 105 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 0 \text{，解出 } \phi_{cu} = 17.46^\circ \text{。}$$

$$A_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin 17.46^\circ} - \frac{1}{\sin 28^\circ} \right) = 0.6 \text{。}$$

排水剪力摩擦角就是有效摩擦角。

第四章曾有例題顯示，於黏土層上廣大面積加載或開挖，短期內黏土有效應力不變，有效應力不變，不排水剪力強度就不變，欲評估此時土體受力的穩定性，可取適當深度土樣，壓密至現地有效應力進行 SUU 試驗。

講到壓密，有題目說要進行 CU 試驗，結果壓密後竟偷偷轉成 SUU 試驗，讀者要多做題

目以防被騙，筆者戲稱此為 CUU 題型(第一次開閥門加圍壓排水壓密，關閥門後第二次加圍壓不排水不壓密，最後加軸差應力不排水)。

「圍壓」的值，可能指總應力，也可能指有效應力，要看前後文。

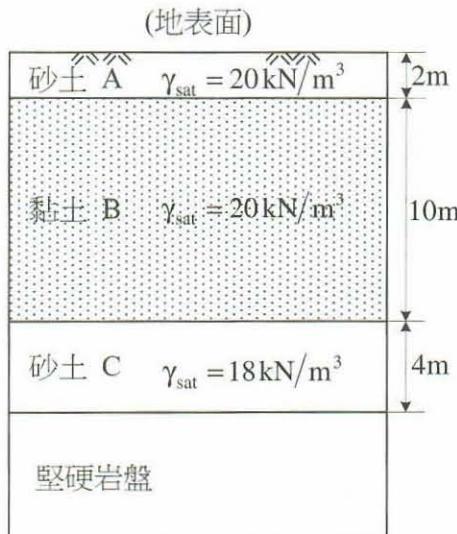
例 7-6.2 UU 與 CU 試驗

如下圖所示，於黏土層B中心取得試體，得知地下水位面在地表面，土樣為正常壓密黏土且靜止土壓力係數 $K_0=1$ ，其剪力強度 $c'=0$ kPa及 $\phi'=25^\circ$ 。

(一)已知此黏土之受剪水壓力參數 $A_f = 0.5$ 且土樣未受擾動，求此黏土在UUU試驗中破壞時之軸向應力 $(\sigma_1)_f$ 為何？(單位採用kN/m²)

(二)若試體受擾動，其有效應力降為過去最大應力之50%；以此有效應力作為CIU試驗之初始圍壓 (σ'_3) 且 $A_f=0.5$ ，求其破壞時之 $(\sigma_1)_f$ 為何？(單位採用kN/m²；答案必須列出所採用之經驗公式及根據)

<96年高考二級25分>



(一)黏土層中點 $u_w = (2 + 5)9.81 = 68.67$ kPa

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_v = 2(20 - 9.81) + 5(20 - 9.81) = 71.33 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 1 \times 71.33 = 71.33 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma_v = 71.33 + 68.67 = 140 \text{ kPa}$$

取樣至地表，試體內水壓力 $u_w = u_{ss} + u_e = 68.67 - 140 \times 1 = -71.33 \text{ kPa}$

進行 UUU 試驗 (應為 SUU 試驗)

unit: kPa

	總應力	橡皮膜內孔隙水壓力	有效應力
取樣	$\sigma_1 = 0 = \sigma_3$	$u_w = -71.33$	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 71.33$
加圍壓 σ_c (不排水)	$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_c$	$u_w = -71.33 + \sigma_c$	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 71.33$
加軸差 x (不排水)	$\sigma_1 = \sigma_c + x$ $\sigma_3 = \sigma_c$	$u_w = \sigma_c - 71.33 + 0.5x$	$\sigma'_1 = 71.33 + x - 0.5x$ $\sigma'_3 = 71.33 - 0.5x$

$$\text{按 } \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$\Rightarrow 71.33 + 0.5x = (71.33 - 0.5x) \tan^2(45^\circ + \frac{25^\circ}{2}) + 0 \\ = 2.4639(71.33 - 0.5x) = 175.75 - 1.232x$$

$$\text{解出 } x = 60.289 \text{ kPa}$$

$$\therefore (\sigma_1)_f = \sigma_c + x = \sigma_c + 60.289 \text{ kPa} \dots \text{Ans.}$$

題目未給圍壓 σ_c 之值

破壞時，不排水剪力強度 $s_u = x / 2 = 30.144 \text{ kPa}$

※飽和試體($B=1$)加圍壓時若不排水，則圍壓不能改變試體內部有效應力，圍壓就無法對不排水剪力強度產生貢獻。加圍壓時若排水，則圍壓會改變試體內部有效應力，圍壓就會對不排水剪力強度產生貢獻。

$$(二) 受擾動後，\(\sigma'_v = \sigma'_h = 0.5 \times 71.33 = 35.665 \text{ kPa}$$

進行 CIU 試驗，壓密時，水壓力降為零，破壞時

$$\sigma_3 = 35.665 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \text{軸差應力} x$$

$$\text{激發超額孔隙水壓 } \Delta u_e = A_f x = 0.5x$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \Delta u_e = 35.665 - 0.5x$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \Delta u_e = 35.665 + x - 0.5x = 35.665 + 0.5x$$

CIU 試驗 (即 CU 試驗)

	總應力	孔隙水壓力	有效應力
加圍壓(排水)	$\sigma_1 = \sigma_3 = 35.665$	$u_w = 0$	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 35.665$
加軸差x(不排水)	$\sigma_1 = 35.665 + x$ $\sigma_3 = 35.665$	$u_w = 0.5x$	$\sigma'_1 = 35.665 + x - 0.5x$ $\sigma'_3 = 35.665 - 0.5x$

按 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$

$$\Rightarrow 35.665 + 0.5x = 2.4639(35.665 - 0.5x)$$

解出 $x = 30.144 \text{ kPa}$

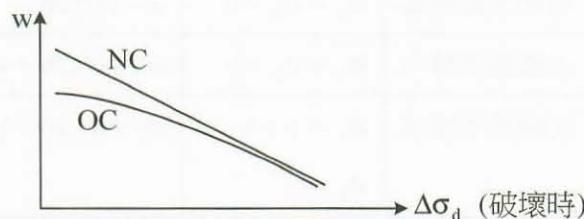
$$(\sigma_1)_f = 35.665 + 30.144 = 65.809 \text{ kPa} \dots \text{Ans.}$$

討論

- CIU 的“T”是 isotropic 「等向的」之意。就是指在壓密(Consolidation)過程中，三個方向的圍壓一樣大，即此階段 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ 。
- 三軸 CIU 試驗，破壞時應力莫爾圓的半徑稱為「不排水剪力強度 s_u 」。什麼因素影響 CIU 試驗的不排水剪力強度？答案是壓密過程中的壓密應力。壓密應力愈大，土壤的有效應力愈大，不排水剪力強度愈大；壓密應力愈小，不排水剪力強度愈小。
- 不少考生誤以為「不論黏土的壓密應力大小，不排水強度總是定值」，這觀念是錯的。正確的觀念是「對於 c' 、 ϕ' 、 A_f 已經是既定常數的土體，CU 試驗在壓密(Consolidation)階段，壓密應力 σ'_{3c} 的大小，冥冥中已經決定未來破壞時的不排水剪力強度大小，也已經決定未來破壞時的軸差應力大小；後續的加軸差不排水階段(Undrain)，不會再影響破壞時的不排水剪力強度。」
- 用 K_0 來算現地深度的水平方向有效應力，表示認為現地已經過長久自然壓密沉積，側向應變為零，也就是現地取樣前是靜止土壓力狀態，這是理想、簡化解題的假設，不這樣做算不下去。
- 對於 c' 、 ϕ' 、 A_f 已經是既定常數的土體，SUU 試驗執行加圍壓之前，試體內部的有效應力大小，就已經決定破壞時莫爾圓半徑大小；後續加多少圍壓與軸差應力，不會再影響破壞時的不排水剪力強度。依 $A_f = 0.5 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sin \phi_{cu}} - \frac{1}{\sin \phi'}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sin \phi_{cu}} - \frac{1}{\sin 25^\circ})$ ，解出

$$\phi_{cu} = 17.28^\circ.$$

6. 第(二)小題，題目指定壓密階段 $\sigma'_3 = 0.5 \times 71.33 = 35.665 \text{ kPa}$ 。 $\sigma_3 = 35.665 \text{ kPa}$ ， $\sigma_1 = 35.665 + x = 65.809 \text{ kPa}$ ，可解出 $\phi_{cu} = 17.28^\circ$ 。但其實這小題有爭議，試體已變成 OC 土樣，應有非零的凝聚力，及較小的內摩擦角，不可再用原 NC 強度參數算。
7. 對於同一工址的數個試體，試驗發現，在相同 σ_3 作用下，含水量 w 越少者，破壞時軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 越大，抗剪能力越高。



例 7-6.3 取樣與 SUU 試驗

有一黏土層其土壤單位重 $\gamma_{sat} = 17.5 \text{ kN/m}^3$ ，有效摩擦角 $\phi = 28^\circ$ ，於現地土層深度 12 m 處取得土樣進行不排水三軸 (UU) 試驗，若現地地下水位面位於地表以下 2 m，則由不排水三軸試驗所測得之不排水剪力強度 (s_u) 為何？如果在 (UU) 試驗過程對於試體施加圍壓 $\sigma_3 = 50 \text{ kPa}$ ，試體仍維持飽和狀態，則其內部產生之孔隙水壓力為何？<99 年結構技師 25 分>



(1) 設為正常壓密黏土($c=0 \text{ kPa}$)，設地下水位以上 $\gamma_m = 17.5 \text{ kN/m}^3$ ，取樣前

$$\sigma'_v = 17.5 \times 2 + (17.5 - 9.81) \times 10 = 111.9 \text{ kPa}$$

$$K_0 = 0.95 - \sin \phi' = 0.95 - \sin 28^\circ = 0.4805$$

$$u_w = 10 \times 9.81 = 98.1 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.4805 \times 111.9 = 53.77 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 151.8 \text{ kPa}$$

$$\sigma_v = \sigma'_v + u_w = 210 \text{ kPa}$$

設孔隙水壓力參數 $A=0.8$

(2)取樣至地表面，試體內殘餘孔隙水壓

$$u_r = u_{ss} + u_e = 10 \times 9.81 - 151.8 - 0.8(210 - 151.8) = -100.26 \text{ kPa}$$

取樣至地表面， $\sigma_v = \sigma_h = 0 \text{ kPa}$

$$\therefore \sigma'_v = \sigma'_h = 100.26 \text{ kPa}$$

進行 SUU 試驗，題目未說明施加圍壓多少 kPa，設施加圍壓 $y \text{ kPa}$

SUU test	總應力	橡皮膜內孔隙水壓力	有效應力
取樣至地表面	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	$u = -100.26$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 100.26$
加圍壓不排水	$\sigma_v = \sigma_h = y$	$u = -100.26 + y$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 100.26$
加軸差不排水	$\sigma_v = y + x$ $\sigma_h = y$	$u = -100.26 + y + 0.8x$	$\sigma'_v = 100.26 + 0.2x$ $\sigma'_h = 100.26 - 0.8x$

unit : kPa

*由上表看出有效應力根本不受 y 值大小影響，故題目不須提及 y 的大小。

設加軸差應力 x 時破壞

$$\sigma'_1 = 100.26 + x - 0.8x = 100.26 + 0.2x$$

$$\sigma'_3 = 100.26 - 0.8x$$

$$\text{以上兩式代入 } \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{28^\circ}{2}) \quad \text{解出 } x = 73.44 \text{ kPa}$$

$$\text{所以不排水剪力強度 } s_u = \frac{x}{2} = 36.72 \text{ kPa} \quad \dots \dots \dots \text{Ans.}$$

(3)若施加圍壓 50 kPa，寫出下表(unit : kPa)，試驗後，試體內部水壓力

SUU test	總應力	橡皮膜內孔隙水壓力	有效應力
取樣至地表面	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	$u = -100.26$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 100.26$
加圍壓不排水	$\sigma_v = \sigma_h = 50$	$u = -100.26 + 50 = -50.26$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 100.26$
加軸差不排水	$\sigma_v = 50 + x$ $\sigma_h = 50$	$u = -50.26 + 0.8x$	$\sigma'_v = 100.26 + 0.2x$ $\sigma'_h = 100.26 - 0.8x$

$$u_w = u_r + u_e = u_r + 50 + 0.8x$$

$$= -100.26 + 50 + 0.8x = -50.26 + 0.8(73.44) = 8.492 \text{ kPa} \quad \dots \dots \dots \text{Ans.}$$

討論

因為加圍壓時關閉閥門(不排水)，在這種前提下，題解說明了不管 y 加多大，都不會影響後面的 x 值。既然如此，乾脆令 $y = 0 \text{ kPa}$ ，就變成無圍壓縮試驗， x 值仍是 73.44 kPa 。換句話說，主導不排水剪力強度大小($x/2$)的，只有孔隙水壓力參數 A 與取樣到地表的殘餘孔隙水壓 u_r 大小。而殘餘孔隙水壓 u_r 大小，與當初試體在地底的總應力狀態有關。換言之，越深的試體，其不排水剪力強度越大。

第(二)小題講施加圍壓 50kPa ，破壞時不排水剪力強度還是 36.72 kPa 。請依據解題步驟(3)的表格，練習畫破壞時之應力莫爾圓。

哇哩勒，又見參數不足。題目卷首有言，參數不足時自行合理假設，故題解設為 NC，設孔隙水壓力參數 $A=0.8$ ，也假設地下水位以上的溼土單位重 $\gamma_m = 17.5 \text{ kN/m}^3$ 。

例 7-6.4 取樣與 SUU 試驗

有一正常壓密黏土其飽和單位重為 $\gamma_{sat}=18 \text{ kN/m}^3$ ，取該土壤試體進行壓密排水 (CD) 三軸壓縮試驗，圍壓 $\sigma_3=200 \text{ kPa}$ ，破壞時之軸差應力 $\Delta\sigma_{df}=270 \text{ kPa}$ 。如該正常壓密黏土層分布於地表至地表下 20 m 間，地下水水面位於地表下 3 m 處，若地表下深度 12 m 處發生水平面不排水破壞，

(一)推求地表下深度 12 m 處之土壤不排水剪力強度 c_u 為何？破壞面剪應力為何？

(二)說明此一強度相較於已取得之土壤試體進行不壓密不排水 (SUU) 三軸壓縮試驗所得剪力強度差異為何？

(三)設 $K_0=0.95-\sin\phi'$ ，以及 $A_f=0.8$ ，求 SUU 試驗所得之 s_u 為何？<修改102年土木技師25分>



(一)

(1) CD test

$$\sigma'_3 = \sigma_3 = 200 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_{df}=270 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = 200 + 270 = 470 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$470 = 200 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 0$$

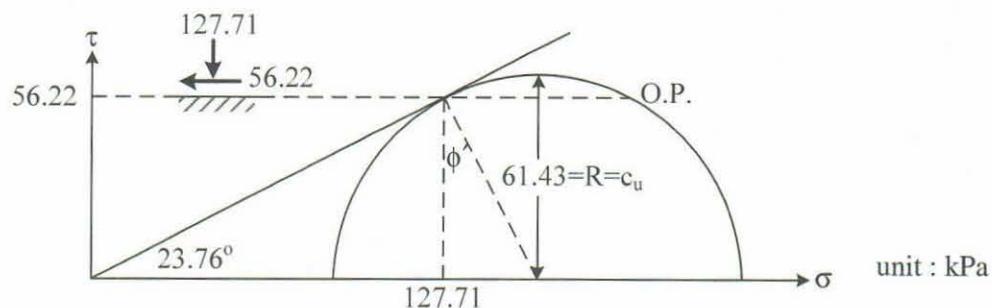
$$\text{解出 } \phi' = 23.76^\circ$$

(2) 設地下水位以上, $\gamma_m = 18 \text{ kN/m}^3$

則地表下深度 12 m 之 $\sigma'_v = 3 \times 18 + 9(18 - 9.81) = 127.71 \text{ kPa}$

考慮破壞面為水平面, 地表下深度 12 m 之破壞面剪應力 = $127.71 \tan 23.76^\circ = 56.22 \text{ kPa}$

地表下深度 12 m 之不排水剪力強度 $s_u = 56.22 / \cos 23.76^\circ = 61.43 \text{ kPa}$



(二) 取樣進行 SUU 試驗所得之 s_u 會比 61.43 kPa 略小，原因在於取樣、解壓、封存、運輸、修剪試體等等的擾動，已經使試體強度下降，試體內部有效應力低於現地有效應力。故工程上取試驗室得到的 s_u 來設計是偏保守的，因為現地同深度處的 s_u 比較高。

(三) $K_0 = 0.95 - \sin \phi' = 0.547$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 69.86 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + 9.81(12 - 3) = 158.15 \text{ kPa}$$

$$\sigma_v = 18 \times 12 = 216 \text{ kPa}$$

取樣至地表，引發之超額孔隙水壓 $u_e = -158.15 \times 1 - 0.8(216 - 158.15) = -204.43 \text{ kPa}$

殘餘孔隙水壓 $u_r = 9.81 \times 9 + u_e = -116.14 \text{ kPa}$

SUU test	總應力	橡皮膜內孔隙水壓力	有效應力
取樣至地表面	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	$u = -116.14$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 116.14$
加圍壓不排水	$\sigma_v = \sigma_h = y$	$u = -116.14 + y$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 116.14$
加軸差不排水	$\sigma_v = y + x$ $\sigma_h = y$	$u = -116.14 + y + 0.8x$	$\sigma'_v = 116.14 + 0.2x$ $\sigma'_h = 116.14 - 0.8x$

$$\text{按 } \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$116.14 + 0.2x = (116.14 - 0.8x) \tan^2(45^\circ + \frac{23.76^\circ}{2})$$

解出軸差應力 $x = 75.38 \text{ kPa} = \text{莫爾圓直徑}$

SUU 之不排水剪力強度 $s_u = x/2 = 37.69 \text{ kPa}$

$$\text{破壞面與水平面夾角 } \alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = 56.88^\circ \neq 45^\circ$$

討論

若要使試驗結果有意義，應先將試體壓密至現場的壓密應力，再加軸差應力。

正常壓密黏土土層，試體從地底下挖出後，總應力為零，因解壓，此時內部有效應力會稍小於先前在地表下的有效應力，也就是試體變成 OC，那這樣如何獲得 NC 試體進行試驗？就是在三軸試驗中，打開閥門並加圍壓壓至現地壓密應力呀！如此試體就恢復到接近現地狀態。

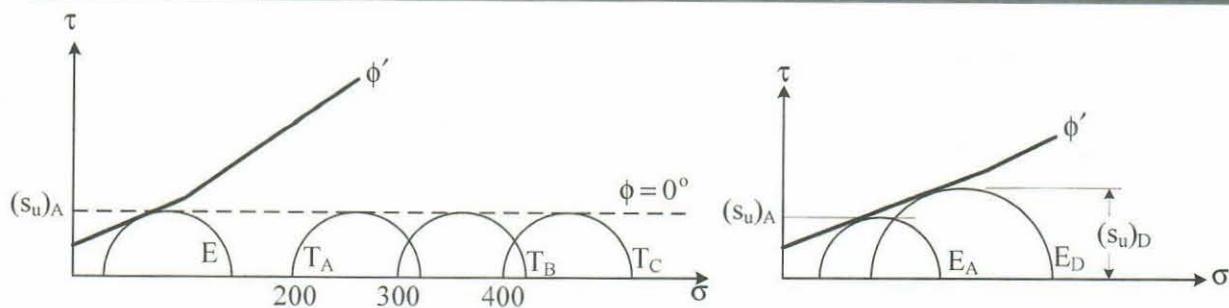
例 7-6.5釐清基本觀念

(一)有一飽和正常壓密黏土地層，從深度 z_1 處小心取出 A、B、C 三顆不擾動試體，進行 SUU 試驗，圍壓分別是 200 kPa、300 kPa、400 kPa，後加軸差應力使其破壞，請問哪一顆試體的軸差應力最大？哪一顆最小？為什麼？

(二)若在同一工址，從深度 $z_2 (>z_1)$ 處小心取出不擾動試體 D，進行 SUU 試驗，圍壓只加 150 kPa，後加軸差應力使其破壞，請問試體 D 的不排水剪力強度與 A、B、C 的不排水剪力強度，大小比序如何？為什麼？



(一) 三顆試體破壞時的軸差應力一樣大。因為從同一深度取出，所以殘餘孔隙水壓相同，內部有效應力相同，加圍壓不排水無法改變內部有效應力，故破壞時莫爾圓直徑一樣大，即軸差應力一樣大。三顆試體破壞時的有效應力莫爾圓重合，但是 C 試體的總應力莫爾圓最靠右邊，往左是 B 試體的總應力莫爾圓，再往左是 A 試體的總應力莫爾圓。總應力莫爾圓 T_A 、 T_B 、 T_C 一樣高，包絡線為水平線，即 $\phi_u = 0^\circ$ 。

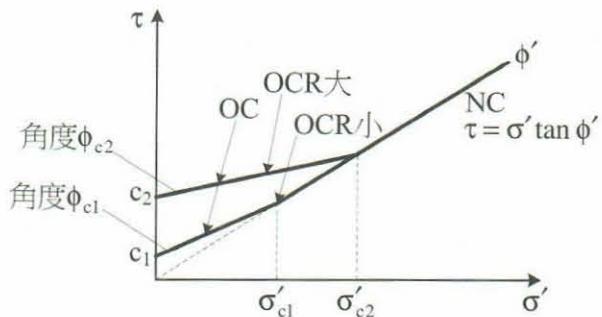


(二) D 試體取出深度較深，取出時，內部有效應力比 A、B、C 大，SUU 試驗不排水不能再改變有效應力，故破壞時 $(s_u)_D > (s_u)_A = (s_u)_B = (s_u)_C$ 。

討論

不排水狀態下的圍壓數據是煙霧彈，被騙去就是觀念不清。

來自同一工址的黏土試體。可利用增加壓密應力 σ_3 與解壓的方式，改變其預壓密應力 σ_c ，連帶改變強度準則線形。預壓密應力 σ_c 越大，OC 段凝聚力 c 值就越大，破壞準則過壓密段的斜率就越緩和。下圖預壓密應力 $\sigma'_c2 > \sigma'_c1$ ，對剪力強度參數的影響是： $c_2 > c_1$ ， $\phi_{c2} < \phi_{c1}$ 。



NC 的 $c' = 0$ kPa，NC 的 $c_u \neq 0$ kPa。那考試時，要用 c' 還是 c_u 算基礎下方承載強度？詳見《解說基礎工程》第三章。

例 7-6.6 CU 與 SUU 試驗 [傳說中的 CUU 試驗]

一飽和正常壓密黏土，在CU三軸壓縮試驗時，受圍壓 $\sigma_3=200$ kPa完成壓密作用，若加軸差應力 $\Delta\sigma_d=200$ kPa達於破壞，此時超額孔隙水壓 $u_e=100$ kPa，

<改編台大土力>

(1)試計算此黏土之摩擦角 $\phi' = ?$ $\phi_{cu} = ?$ $A_f = ?$ 並繪圍壓完成時與破壞時之莫爾圓。

- (2) 若於原壓密作用完成後，再加 120 kPa 之圍壓而不令其排水，然後加軸差應力(不排水)使其破壞，不可計算，說明試體破壞時軸差應力是多少。需敘明理由。
- (3) 透過計算，求第(2)小題破壞時之 $\sigma_1 = ?$ $u_e = ?$



(1) 破壞時表格如下 (unit : kPa)

σ_3	$\Delta\sigma_d$	σ_1	u_e	σ'_3	σ'_1
200	200	400	100	100	300

正常壓密黏土 $c' = c_{cu} = 0$ kPa

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

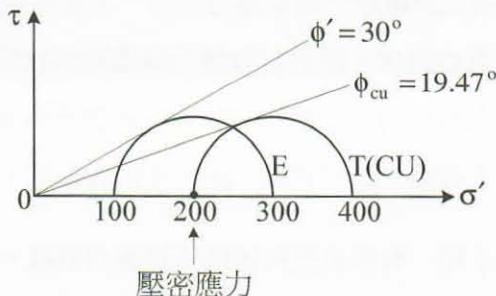
$$300 = 100 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 0 \quad \text{解出 } \underline{\underline{\phi' = 30^\circ}}$$

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 2c_{cu} \tan(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2})$$

$$400 = 200 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 0 \quad \text{解出 } \underline{\underline{\phi_{cu} = 19.47^\circ}}$$

$$A_f = \Delta u_e / \Delta \sigma_d = 0.5$$

排水圍壓完成時，莫爾圓收斂為一個點， $(200, 0)$



- (2) 「壓密作用完成後，再加 120 kPa 之圍壓而不令其排水，然後加軸差應力(不排水)使其破壞」這文字就是壓密作用完成後，進行 SUU 試驗。SUU 試驗不能改變試體內部有效應力，故破壞時軸差應力仍是 200 kPa。且此 SUU 試驗破壞時的有效應力莫爾圓位置完全同於前一小題 CU 試驗結束時的有效應力莫爾圓位置。

(3)

步驟	總應力	橡皮膜內水壓力	有效應力
壓密作用完成	$\sigma_1 = \sigma_3 = 200$	0	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 200$
加圍壓 120 kPa 不排水	$\sigma_1 = \sigma_3 = 320$	120	$\sigma'_1 = \sigma'_3 = 200$
加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 不排水	$\sigma_3 = 320$ $\sigma_1 = 320 + \Delta\sigma_d$	$120 + A\Delta\sigma_d = 120 + 0.5\Delta\sigma_d$	$\sigma'_3 = 200 - 0.5\Delta\sigma_d$ $\sigma'_1 = 200 + 0.5\Delta\sigma_d$

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

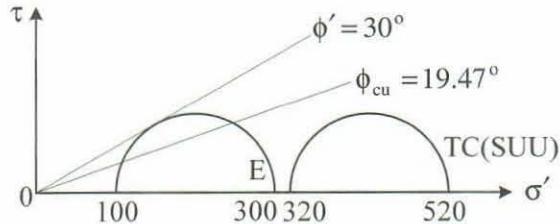
$$200 + 0.5\Delta\sigma_d = (200 - 0.5\Delta\sigma_d) \tan^2(45^\circ + \frac{30^\circ}{2}) + 0$$

解出 $\Delta\sigma_d = 200$ kPa

$$\sigma_1 = 320 + 200 = 520 \text{ kPa}$$

$$u_e = 120 + 0.5(200) = 220 \text{ kPa}$$

(右圖 TC 是三軸壓縮之意)



討論

考生問「第二題破壞時軸差應力大小，不是要做試驗結束時才知道嗎？」這就是在學理上還沒掌握「所有的破壞，都是有效應力莫爾圓切到排水強度線而破壞」，也沒掌握「不能再度增減試體內部有效應力，那破壞時的圓半徑就不能增減」。前兩小題，破壞時的有效應力莫爾圓是同一個呀！有觀念就不必算，此乃出題者本意。第三小題是計算驗證給你看。

對於第三小題，有學員使用破壞時總應力數據，列出

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 2c_{cu} \tan(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2})$$

$$320 + \Delta\sigma_d = 320 \tan^2(45^\circ + \frac{19.47^\circ}{2}) + 0$$

解出 $\Delta\sigma_d = 320$ kPa，請問他為什麼對或為什麼錯？

他錯了。不能拿 CU 試驗的 c_{cu} 、 ϕ_{cu} 來求算 SUU 試驗破壞時的總應力值多寡。但 SUU 試驗破壞時的有效應力值，滿足 CD 試驗的 c' 、 ϕ' 。 c_{cu} 與 ϕ_{cu} 不是放諸 CD、SUU、UC test 皆準的硬道理，但 c' 、 ϕ' 是放諸各種試驗皆準的硬道理。

CD、SUU、UC test 的加圍壓階段，莫爾圓退縮成一個點，試體形變能為零，此階段永不破壞。形變能詳筆者《材料力學論衡》。

這題就是傳說中的 CUU 試驗。C：開閥門壓密，U：關閥門不排水加圍壓，U：關閥門不排水加軸差。關於第二小題，若題目改為「再加 130 kPa 之圍壓而不令其排水，…」，試問破壞時之軸差應力為多少？為什麼？

§7-7 無圍壓縮試驗 UC

前一節提到 SUU 試驗進行圍壓 σ_3 時不排水，這樣會導致試體內有效應力等於取樣到地表之後的有效應力，即有效應力不因加圍壓而改變。主控破壞的是有效應力，有效應力不動，破壞時的莫爾圓半徑 R 就不變，不排水剪力強度 s_u 就不變。

同一顆試體，不排水之下，圍壓 σ_3 加得再大，不排水剪力強度 s_u 都不變。如果只想求 s_u ，那又何必加圍壓？所以發展出無圍壓的壓縮試驗(Unconfined Compression Test, UC)，簡稱無圍壓縮試驗，就像混凝土圓柱試體直接放在萬能試驗機上壓， $\sigma_3=0$ ，直接加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ ，壓到試體失敗。

無圍壓縮試驗試體破壞時，莫爾圓直徑即是無圍壓縮強度 q_u ，半徑是 s_u ，故 $s_u=q_u/2$ 。考試時請注意求 q_u 還是 s_u 。由於試體側向總應力 $\sigma_3=0$ ，故破壞時總應力莫爾圓(T)切於座標原點。因試體內的 σ'_3 通常大於零，故大部分考題有效應力莫爾圓(E)位於 T 的右邊，破壞時，試體內的水壓力為負數。

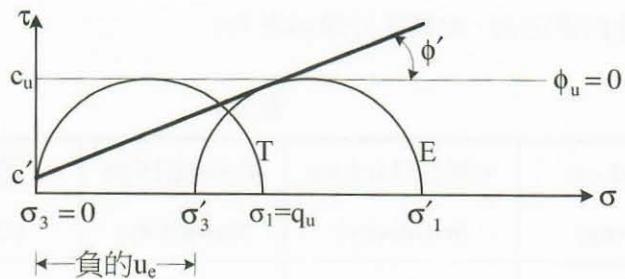


圖 7-35

表 7-8 無圍壓縮試驗解題必勝表格

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣到地表	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	u_r	$\sigma'_v = \sigma'_h = -u_r$
不加圍壓， $\sigma_3=0$	$\sigma_v = \sigma_h = \sigma_3 = 0$	u_r	$\sigma'_v = \sigma'_h = -u_r$
加軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\sigma_h = 0$ $\sigma_v = \Delta\sigma_d = q_u$	$u_r + D\Delta\sigma_d$	$\sigma'_h = -u_r - D\Delta\sigma_d$ $\sigma'_v = \Delta\sigma_d - u_r - D\Delta\sigma_d$

上表為完整型表格，只要會寫出總應力與孔隙壓力即可，有效應力那欄用減法來求，「寫出表格=得分」。若題目簡單，可以只寫「加軸差應力 $\Delta\sigma_d$ 」那一列，為簡易型表格。試體破壞時，若主應力 σ_1 在軸向，破壞面和水平夾角 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} \neq 45^\circ$ ，是有效應力控制破壞。

無圍壓縮試驗是 SUU 試驗的特例，乃令 $\sigma_3=0$ ，執行的對象也是飽和土壤。不加圍壓，可以加快試驗進行。以模擬的逼真度來講，SUU 試驗優於 UC 試驗，因為現場地底土壤側向有圍壓，並非 $\sigma_3 = 0$ kPa。

適合採用無圍壓縮試驗的工址類型和適合 SUU 試驗的工址類型相同。

土壤力學這學科當初主要從高緯度國家(eg：瑞典)發展出來，這些國家因冰河時期，冰河多次進退的緣故，某些黏土含水量豐富，不受擾動時展現出很強的單壓強度，可承受結構物重量，一旦受擾動(打樁震動、震爆、地震等等)，單壓強度急遽下降，造成邊坡失敗或房屋傾斜。為了表現黏土單壓強度的下降，定義黏土敏感度(Sensitivity)

$$S_t \equiv \frac{\text{未擾動前的單壓強度 } q_u}{\text{擾動後的單壓強度 } q_u} = \frac{\text{未擾動前的 } s_u}{\text{擾動後的 } s_u} \quad [7.21]$$

依大部分美式教科書定義，敏感度分類如表 7-9。

表 7-9

敏感度形容	低敏感(Low Sensitivity)	中敏感(Medium Sensitivity)	高敏感(High Sensitivity)	流黏土(Quick)	嚴重流黏土(Extra Quick)
S_t 範圍	0~2	2~4	4~8	8~16	>16

流黏土(Quick Clay)乃在海水環境中沉積成，後來可能因地殼運動隆起或海退，形成陸地，

接續受雨水或地下水淋洗，將土壤中鹽分沖走，導致受擾動時強度急劇下降，在加拿大及斯堪第那維亞半島均造成過地滑(Landslide)，坡趾開挖也可能忽然地滑。流黏土含水量常超過100%。台灣位處亞熱帶，黏土的敏感度偏低，工程上較無敏感度問題，考試時要注意名詞解釋。quick clay 與 quick sand，兩者有何異同？

早期先哲把 Sensitivity 翻譯成「靈敏度」算頗失敗，因為讀的人不能連結到英文原意，筆者初期只能吞下來強背。應該翻譯成「敏感度」較佳，君可見牙醫對敏感性牙齒的翻譯。牙齒對冰水或其他環境敏感導致酸痛，這牙齒不會被講成靈敏牙齒，而是敏感牙齒(sensitive teeth)。同理，某些黏土對環境變化而產生強度上激烈反應，這黏土是對環境敏感呀(i.e., sensitive clay)！靈敏度應該是在形容某儀器多麼精準，誤差多麼小。本書作者對土壤力學名詞精髓意義掌握的程度，比某些先哲還強，這書你買到賺到，也看得出作者的用心。

例 7-7.1 CU 與 UC 試驗

某飽和黏土層之地下水位於地表處，茲取此黏土進行三軸壓密不排水試驗，試驗中同時量測孔隙水壓力，下表所列為兩組試體破壞時的應力：
<99土木技師25分>

試體	總應力 σ_{lf} (kPa)	總應力 σ_{3f} (kPa)	孔隙水壓力 u_f (kPa)
第一組	14	10	3
第二組	28	20	6

- (一) 試求此土壤之有效應力強度參數 c' 、 ϕ' 。
- (二) 若某平面上之正向有效應力 (normal effective stress) 為 12 kPa，則沿此平面之剪力強度為何？
- (三) 若此黏土取自地表下 10 m，其孔隙比 $e_0 = 1.0$ ，比重 $G_s = 2.7$ ，另進行無圍壓縮試驗 (unconfined compression test)，試求此黏土之無圍壓縮強度。



(一) 兩組試體破壞時之有效應力如下表(簡易型)

unit : kPa

	σ_1	σ_3	u_f	σ'_1	σ'_3
第一組	14	10	3	11	7
第二組	28	20	6	22	14

按公式 $\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right)$

$$\text{設 } \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) = K$$

$$\Rightarrow \sigma'_1 = \sigma'_3 K^2 + 2c'K$$

代入數據

$$\text{联立} ①、②，解出 } c' = 0 \text{ kPa} \quad , \quad K^2 = \frac{11}{7}$$

$$\text{即 } \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) = \sqrt{\frac{11}{7}} \quad \text{解出 } \phi' = 12.84^\circ \quad \text{亦可解出 } \phi_{cu} = 9.59^\circ$$

$$(二) 剪力强度 \tau = c' + \sigma \tan \phi' = 0 + 12 \tan 12.84^\circ = 2.735 \text{ kPa}$$

$$(三) \text{在第(一)小題中, 孔隙水壓參數 } D = AB = \frac{u_f}{\Delta\sigma} = \frac{u_f}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{3}{14 - 10} = 0.75$$

$$\text{饱和单位重 } \gamma_{\text{sat}} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w = \frac{2.7+1}{1+1} \times 9.81 = 18.1485 \text{ kN/m}^3$$

$$\sigma_v = \gamma_{sat} \cdot z = 18.1485 \times 10 = 181.485 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - u_w = 181.485 - 9.81 \times 10 = 83.385 \text{ kPa}$$

設此黏土為 NC clay , $K_0 = 0.95 - \sin \phi' = 0.95 - \sin 12.84^\circ = 0.7278$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.7278 \times 83.385 = 60.685 \text{ kPa}$$

$$\sigma_b' = \sigma_b + u_w = 60.685 + 9.81 \times 10 = 158.785 \text{ kPa}$$

將土壤從地底下 10m 取出，為一解壓過程，此過程會產生負的超額孔隙水壓。取出後的試

體，其內的水壓為 $u_w = u_{ss} + u_e = 98.1 - 158.785 - (83.385 - 60.685) \times 0.75 = -77.71$ kPa

土壤取到地表時，總應力 $\sigma_v = \sigma_b = 0$ kPa

$$\text{故有效應力 } \sigma'_v = \sigma_v - u_w = \sigma'_h = 77.71 \text{ kPa}$$

再對此試體進行無圍壓縮試驗，設軸壓為 x kPa 時，試體破壞，按照

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) = \sigma'_3 K^2 + 2cK$$

$$\Rightarrow (77.71 + x - 0.75x) = (77.71 - 0.75x)\left(\frac{11}{7}\right) + 0$$

$$\Rightarrow (77.71 + 0.25x) = \frac{11}{7}(77.71 - 0.75x)$$

解出 $x = 31.0842$ kPa

故無圍壓縮強度 $q_u = x = 31.08$ kPa

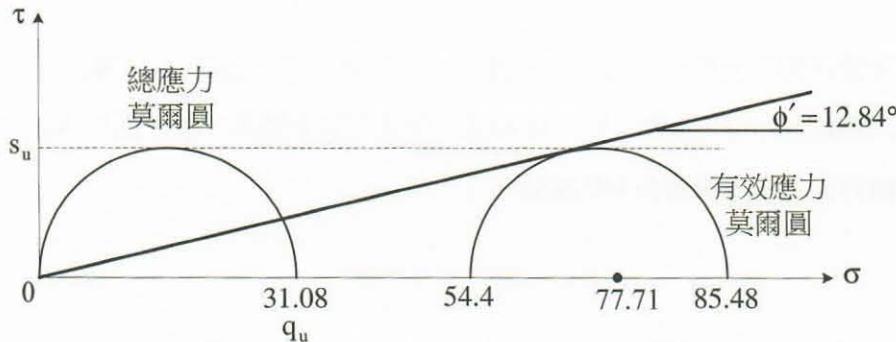


圖 a 無圍壓縮試驗之應力莫爾圓 (unit : kPa)

討論

1. 第(三)小題是鍛鍊考生觀念進階的跳板，考試時可寫出下表以整理思考過程：

UC test	總應力	橡皮膜內水壓力	有效應力
取樣至地表	$\sigma_v = 0$ $\sigma_h = 0$	-77.71	$\sigma'_v = 77.71 = \sigma'_h$
加軸差壓力	$\sigma_v = x = q_u$ $\sigma_h = 0$	$u_w = -77.71 + 0.75x$	$\sigma'_v = 77.71 + x - 0.75x$ $\sigma'_h = 77.71 - 0.75x$

2. 由第(三)小題可知，若試體是從不同深度取出(eg：地表下 15 m)，則進行無圍壓縮試驗所得之 q_u 值會不同。
3. 請考生務必要會畫出圖 a，試體破壞時，乃是有效應力莫爾圓切到強度線。破壞時，孔隙水壓力為負值，故有效應力莫爾圓在右側，總應力莫爾圓在左側。
4. 本題只給兩組試體，即是兩個瀕臨破壞應力莫爾圓，這樣恰可畫出唯一一切線，不需迴歸分析。即不需使用 p 、 q 值找強度參數 c 、 ϕ 。
5. 第 (三) 小 題 試 體 破 壞 時 ， $\sigma'_1 = 77.71 + 0.25x = 85.48$ kPa ，
 $\sigma'_3 = \sigma'_1 - q_u = 85.48 - 31.08 = 54.4$ kPa ，若題目改問「破壞時不排水剪力強度為多

少？」應回答 $s_u = \frac{1}{2} q_u = 15.54 \text{ kPa}$ 。

6. 同一深度取出的兩試體，一進行 UC 試驗，另一進行 SUU 試驗，通常前者求到的 s_u 值略小些，因為真實的有效應力莫爾圓破壞包絡線不是水平線而是弧線，凹口朝下。
7. 部分書籍認為土壤從地底下取出後，必有膨脹，產生負的 u_e ，導致有假凝聚力，使 UC 試驗出來的強度值大於真實強度，形成不安全結果，故建議以 SUU 試驗求不排水剪力強度，儘量避免 UC 試驗。

§7-8 十字片剪試驗 VST

飽和黏土受剪時，載重增加速率若比排水速率快，短期內土壤含水量的變化可能很小(水幾乎不進出土體)，此時應該用不排水剪力強度估計黏土的強度，前兩節均是以取樣的方式回試驗室求 s_u ，宿命上無法避免試體擾動及被質疑取樣代表性的問題。如果能在現地試驗，就可以避免這些問題。在現場，可以用十字片剪求現場黏土不排水剪力強度 s_u 。

十字片剪試驗(Vane Shear Test,VST)適合求現地軟至中等堅硬黏土的不排水剪力強度 s_u 。「十字片剪」顧名思義，其俯視圖就像「十」字一般，共有四片刀刃。試驗時將十字片剪以靜壓方式壓入欲試驗深度，後施以每分鐘 6 度的轉速轉動十字片，十字片剪就會對土壤「刮出」一圓柱形破壞面。破壞面包含圓形頂面、底面及圓柱側面。

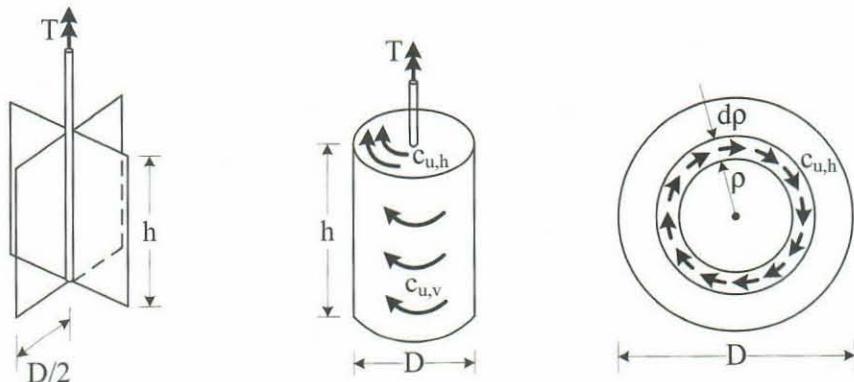


圖 7-36 力平衡圖

設十字片剪直徑 D 、高度 h ，倘遭遇均質但不均向黏土，在水平面和垂直面的強度不一樣，水平面不排水剪力強度為 $c_{u,h}$ ，垂直面不排水剪力強度為 $c_{u,v}$ ，則依據破壞面完全達到塑性狀態之力平衡，得破壞時扭矩 $T = 2 \int_0^{D/2} c_{u,h} (2\pi\rho d\rho) \cdot \rho + c_{u,v} (\pi Dh) \left(\frac{D}{2}\right) = \frac{\pi}{6} D^3 c_{u,h} + \frac{\pi}{2} D^2 h c_{u,v}$ 。

請問為何不用材力的扭轉剪應力公式 $\tau = \frac{T\rho}{J}$ 呢？為何不認為半徑越大處，剪應力越大？因為土壤破壞時已經到全塑性狀態，非線彈性狀態。

$$\text{倘黏土強度均向，} c_{u,v} = c_{u,h} = c_u, \text{ 則 } T = \frac{\pi}{6} D^3 c_u + \frac{\pi}{2} D^2 h c_u = \frac{\pi}{6} D^2 c_u (D + 3h) \quad [7.22]$$

例 7-8.1 十字片剪試驗

- (一) 在黏土地盤擬進行十字片剪試驗(Vane shear test)。十字片直徑 d 與十字片高度 h 之比， $d : h$ 為 1 : 2 時，試求最大扭轉力矩 M_{max} 與黏土凝聚力 s_u 之間關係公式。(15 分)
- (二) 通常十字片剪試驗用旋轉速度為 0.1 度/秒，若旋轉速度有所改變， s_u 值是否改變？(10 分)

<84 年高考一級>

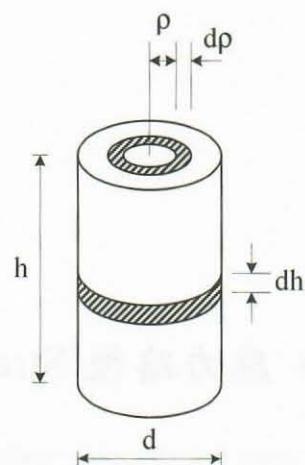


$$(一) M_{max} = (\pi dh) \times s_u \times \frac{d}{2} + 2 \left[\int_0^{\frac{d}{2}} (2\pi\rho d\rho) \cdot s_u \cdot \rho \right] = \frac{\pi}{2} d^2 h s_u + 4\pi s_u \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2} d^2 h s_u + \frac{4}{3} \pi s_u \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$= \frac{\pi}{2} d^2 h s_u + \frac{\pi}{6} s_u d^3$$

$$\because h = 2d$$

$$\therefore M_{max} = \frac{\pi}{2} d^2 (2d) s_u + \frac{\pi}{6} s_u d^3 = \pi d^3 s_u + \frac{\pi}{6} s_u d^3 = \frac{7\pi}{6} d^3 s_u \\ \doteq 3.665 d^3 s_u$$



本小題圓柱分離體上、下表面及側面的剪應力，均進入塑性狀態，均達「降伏剪應力」。

(二)若旋轉速度有所改變， s_u 值是否改變？這和土壤的種類有關。對於高塑性的凝聚性土壤，若增加旋轉速度，量測到的 s_u 值會較大；對於低塑性的凝聚性土壤，若增加旋轉速度，試驗時土壤可能部分排水，量測到的 s_u 值會較小。十字片剪試驗正常轉速為每分鐘 6 度，若改為轉速每分鐘 ω 度，則依 Sharifounnasab and Ullrich (1985) 研究結果顯示，

$$\frac{s_{u(\omega)}}{s_{u(6\text{度}/\text{min})}} = \alpha \left(\frac{\omega/\text{min}}{6\text{度}/\text{min}} \right)^{\beta'} \quad \text{每一種凝聚性土壤，有它自己的}\alpha'\text{與}\beta'\text{值，須由試驗方能得知。}$$

討論

十字片剪試驗最適合求軟至中等堅硬黏土的現場不排水剪力強度。黏土經過取樣擾動後，到試驗室進行UU試驗求不排水剪力強度，求出來的值通常小於現場的不排水剪力強度，而造成設計過分保守、浪費。十字片剪試驗並不適合求砂土及礫石的剪力強度。

「應變率」是單位時間內，應變的增加量。在試驗中，土壤表現出來的強度受應變率嚴重影響。一般土木工程加載緩慢，接近靜力加載，故試驗時的應變率不可太高，以求試驗逼真。

實務上，黏土可能硬，也可能軟，請考生不要先入為主認為「黏土就一定軟」。嚴重過壓密黏土可能相當硬。黏土的不排水剪力強度和其有效應力有關，接近地表處有效應力小，但一定深度處有效應力可能大，不排水剪力強度就會大，且愈深愈無位移空間。

§7-9 應力路徑(Stress Path)觀念

土壤微素在逐漸軸向加載的過程中，例如圖 7-37，應力莫爾圓逐漸變大，若把過程描述出來，則要畫一大堆莫爾圓在紙上，眼花撩亂難以分析，是否能將一個圓簡化改成一個點代替？

如此版面將清爽許多，分析也較容易。由於一個圓只有一個圓頂點，所以可以用圓頂點(底點也可)代表圓，這些點稱為應力點(Stress Point)，應力點連成的線形，不論是直線或曲線，就代表應力增減的過程，就稱應力路徑(Stress Path)或應力軌跡。

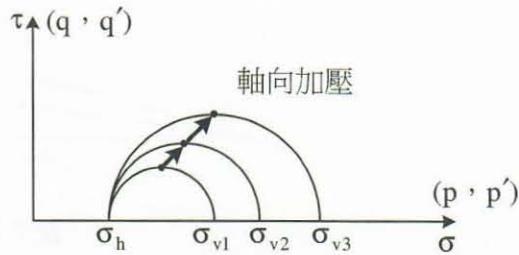


圖 7-37

$$\text{定義 } p \equiv \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} \quad [7.23]$$

$$q \equiv \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \quad [7.24]$$

$$p' \equiv \frac{\sigma'_v + \sigma'_h}{2} \quad [7.25]$$

$$q' \equiv \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2} \quad [7.26]$$

建立 $p-q$ 座標軸，將點位(p,q)繪於座標軸內，連點成線，此線稱為總應力路徑(Total Stress Path,TSP)。再建立 $p'-q'$ 座標軸，將點位(p',q')繪於座標軸內，連點成線，此線稱為有效應力路徑(Effective Stress Path,ESP)。

$p-q$ 座標軸常常與(p',q')座標軸重合畫在一起，以利比較 TSP 軌跡和 ESP 軌跡。甚至， $p-q$ 座標軸和 $\sigma-\tau$ 座標軸也是完全重合。

畫圖時要注意： $q' \equiv \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2} = \frac{(\sigma_v - u_w) - (\sigma_h - u_w)}{2} = \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} = q$ ，代表 ESP、TSP 一樣高。還有 $p \equiv \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} = \frac{\sigma'_v + u_w + \sigma'_h + u_w}{2} = p' + u_w$ ，這表示 TSP 和 ESP 之間的水平距離差就是水壓力的值。若 TSP 在 ESP 右方，則 u_w 是正的，反之是負的。

考慮圖 7-38 在地表廣大面積的沉積中，假設靜止土壓力係數 $K_0=0.6$ ，請畫出 A 點在沉積

過程中的應力路徑。

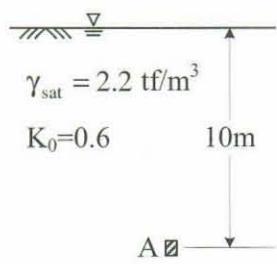
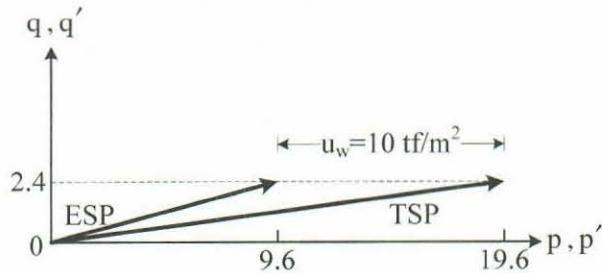


圖 7-38

圖 7-39 (unit : tf/m²)

A 點剛沉積出現之初， $\sigma'_v = \sigma'_h = 0$ tf/m²

$$q' = p' = p = q = 0 \text{ tf/m}^2$$

A 點上方沉積 10 m 時， $\sigma_v = 10 \times 2.2 = 22$ tf/m²

$$\sigma'_v = 10 \times (2.2 - 1) = 12 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.6 \times 12 = 7.2 \text{ tf/m}^2$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 7.2 + 10 = 17.2 \text{ tf/m}^2$$

$$p \equiv \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} = \frac{22 + 17.2}{2} = 19.6 \text{ tf/m}^2$$

$$p' \equiv \frac{\sigma'_v + \sigma'_h}{2} = \frac{12 + 7.2}{2} = 9.6 \text{ tf/m}^2$$

$$q' \equiv \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2} = \frac{12 - 7.2}{2} = 2.4 \text{ tf/m}^2 = q$$

故畫出 TSP 與 ESP 如圖 7-39。「 $K_0=0.6$ 」代表垂直方向有一單位有效應力增量時，水平方向同步有 0.6 單位有效應力增量，這樣會造成 ESP 為直線。TSP 在 ESP 右側，代表水壓力是正數，反之為負數。

在 K_0 條件的自然沉積中^{註 8}， $\Delta\sigma'_h = K_0 \Delta\sigma'_v$ ，

註 8：這句話的意思是：若 $K_0=0.45$ ，則沉積中，垂直方向應力每增加 1 kPa，水平方向應力就增加 0.45 kPa。有朋友學完應力路徑，還是問了一個「回到最初」的問題：為什麼需要有應力路徑？回答的方法有很多，我想這樣講：如果只在乎破壞時的應力莫爾圓在哪裡，那就沒有必要發展出應力路徑，圖紙上就畫一個切到強度線的應力莫爾圓即可。可是好事之徒會問：這個破壞莫爾圓究竟是透過軸

$$\text{故 } \Delta p' = \frac{\Delta \sigma'_v + \Delta \sigma'_h}{2} = \frac{\Delta \sigma'_v + K_0 \Delta \sigma'_v}{2} = \frac{\Delta \sigma'_v (1 + K_0)}{2}$$

$$\Delta q' = \frac{\Delta \sigma'_v - \Delta \sigma'_h}{2} = \frac{\Delta \sigma'_v - K_0 \Delta \sigma'_v}{2} = \frac{\Delta \sigma'_v (1 - K_0)}{2}$$

$$p' - q' \text{ 座標軸內應力軌跡線 ESP 的斜率 } m = \frac{\Delta q'}{\Delta p'} = \frac{1 - K_0}{1 + K_0} \quad [7.27]$$

$$\text{對於前文來講，提及 } K_0=0.6，\text{ 自然沉積之 ESP 斜率 } m = \frac{1 - K_0}{1 + K_0} = \frac{1 - 0.6}{1 + 0.6} = 0.25$$

以前有教「應力莫爾圓撞到強度線 $\tau_f = c + \sigma \tan \phi$ ，土體就失敗。」現在應力莫爾圓逐漸擴大的過程已經可以拿應力軌跡代替，那應力軌跡撞到什麼，土體會失敗？答案是「應力軌跡撞到強度線 K_f ，土體就失敗。」 K_f 線的方程式是

$$q = a + p \tan \alpha \quad [7.28]$$

K_f 線，其實就是每個瀕臨破壞莫爾圓的頂點，所集合而成的線。 a 、 α 、 c 與 ϕ 有一定的數學關係，參考圖 7-40， $d \times \tan \alpha = R = d \times \sin \phi$

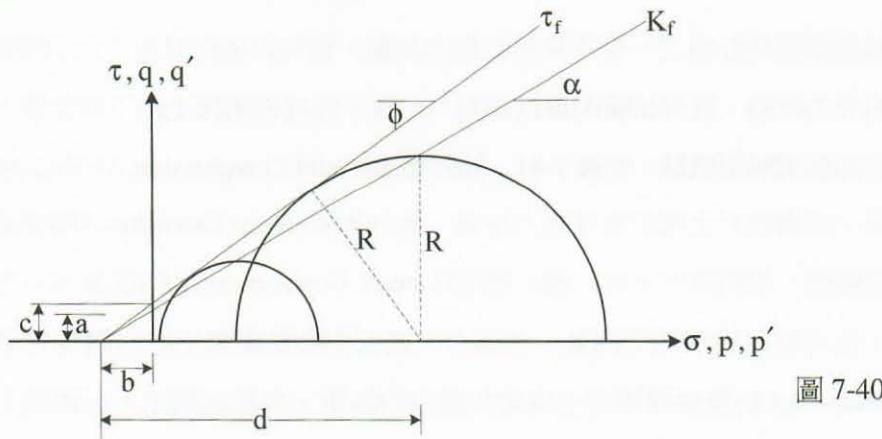


圖 7-40

向加壓？還是軸向解壓？還是側向加壓…，哪一個手段達成的？如果沒有應力路徑，那就要畫許多莫爾圓來表示破壞前的應力增減過程，很快圖紙就擁擠不堪入目，但是達到一個目的「說明應力增減的中間過程」。那有沒有好一點的方法，能說明土體受應力增減的中間過程，又讓版面清晰呢？有的，就是應力路徑。有了應力路徑，就像在土體(車體)上裝追蹤器，車子跑到哪裡，都被完全監控。白話舉例，你要到高雄度假，可是如何抵達高雄？坐高鐵、台鐵、汽車還是徒步？應力路徑就能明白顯示你的移動軌跡。

所以 $\tan\alpha = \sin\phi$

[7.29]

$$\text{得 } \frac{c}{a} = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha} = \frac{\tan \phi}{\sin \phi} = \frac{1}{\cos \phi}$$

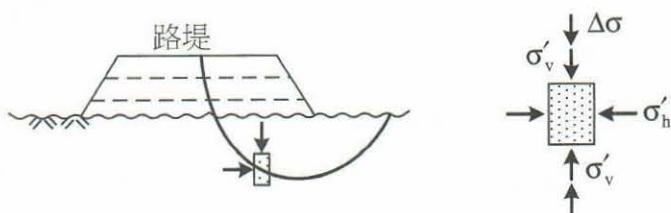
$$\text{故 } a = c \times \cos \phi$$

[7.30]

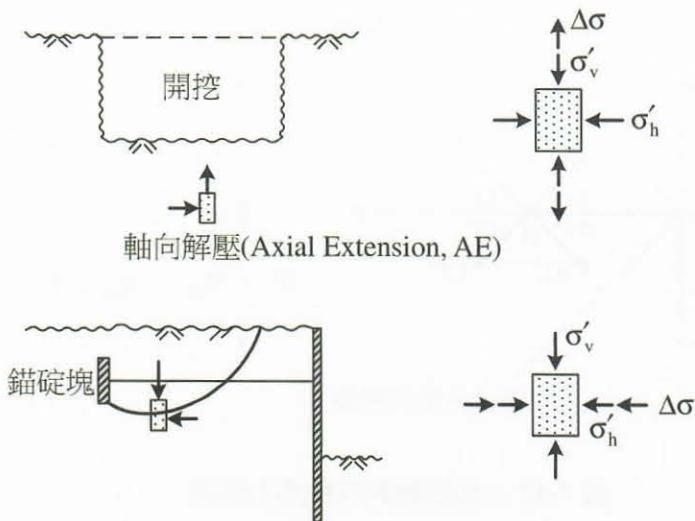
有朋友問「為何要用圓頂點當應力點，用圓心不好嗎？」用圓心只能代表圓位置，不能代表圓大小，用圓頂點當應力點不只能代表圓位置，還能代表圓大小！

§7-10 常見之應力路徑

三軸試驗儀器的好處之一是不只可以軸向加壓，還可以進行其他方向的增壓、減壓，充分模擬現場的受力狀態，直剪試驗則難以辦到。地底下弧線破壞面上的不同位置，土壤應該進行不同方向的加壓或解壓試驗，如圖 7-41。軸向壓縮(Axial Compression,AC)是試驗最常用的，模擬興建土堤、結構物對土壤的垂直應力增量。軸向伸張(Axial Extension,AE)模擬開挖對土壤的垂直應力的解壓，如開挖地下室。側向壓縮(Lateral Compression,LC)模擬水平支撐過度地側向壓縮土壤，也可模擬結構物受側風、地震力，進而引發基礎對土壤的側向應力增量。側向伸張(Lateral Extension,LE)模擬開挖對土壤側向應力的解壓，如基地開挖、新建擋土牆的開挖、邊坡開挖、擋土牆在使用年限中的側移導致土壤的側向應力解壓。



軸向加壓(Axial Compression, AC)



側向加壓(Lateral Compression, LC)，如被動土壓力狀況



側向解壓(Lateral Extension, LE)，如主動土壓力狀況

圖 7-41 AC、AE、LC、LE 的舉例

以上四種狀態的英文建議要理解，以免考場見到，千金難買早知道。又，國內土壤力學中文書盛行，許多大學生不看原文書，所以成大、中央入學考，越來越喜歡考英文文章與解釋。

在三軸室內，對試體進行均向壓密之後，四種狀態的應力路徑如圖 7-42。這四種應力狀態，以側向解壓與軸向解壓最容易撞到 K_f 線，代表試體側向解壓與軸向解壓最容易失敗；以側向加壓和軸向加壓最不容易撞到 K_f 線，代表土體側向加壓和軸向加壓最不容易失敗。

圖 7-42 的 0B 段水平線是均向壓密過程， $\Delta\sigma_h=\Delta\sigma_v$ ，故 $q=0$ 。壓密之後，接著：

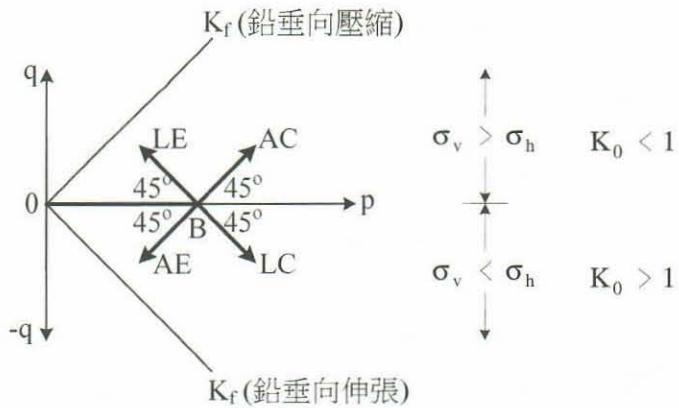


圖 7-42 三軸試驗的四種應力路徑

(1)若是 AC 狀態，設軸向應力增量為 $\Delta\sigma$ ，側向應力維持不變，則

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_v + \Delta\sigma_h}{2} = \frac{\Delta\sigma + 0}{2}, \quad \Delta q = \frac{\Delta\sigma_v - \Delta\sigma_h}{2} = \frac{\Delta\sigma - 0}{2}$$

兩個增量 Δp 、 Δq 皆正數，斜率 $\frac{\Delta q}{\Delta p} = 1.0$ ，表示應力路徑以 45° 向右上方走去。

NC clay 進行 AC 試驗，產生正的超額孔隙水壓。

(2)若是 AE 狀態，設軸向應力增量為 $-\Delta\sigma$ (負號表示解壓)，側向應力維持不變，則

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_v + \Delta\sigma_h}{2} = \frac{-\Delta\sigma + 0}{2}, \quad \Delta q = \frac{\Delta\sigma_v - \Delta\sigma_h}{2} = \frac{-\Delta\sigma - 0}{2}$$

兩個增量 Δp 、 Δq 皆負數，且數值相同，表示應力路徑以 45° 向左下方走去。

NC clay 進行 AE 試驗，過程產生負的超額孔隙水壓，但 u_e 逐漸轉正，破壞時是正 u_e 。

(3)若是 LC 狀態，設側向應力增量為 $\Delta\sigma$ ，軸向應力維持不變，則

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_v + \Delta\sigma_h}{2} = \frac{0 + \Delta\sigma}{2}, \quad \Delta q = \frac{\Delta\sigma_v - \Delta\sigma_h}{2} = \frac{0 - \Delta\sigma}{2}$$

增量 Δp 為正數、 Δq 為負數，但絕對值相同，表示應力路徑以 45° 向右下方走去。

NC clay 進行 LC 試驗，產生正的超額孔隙水壓。

(4)若是 LE 狀態，設側向應力增量為 $-\Delta\sigma$ (負號表示解壓)，軸向應力維持不變，則

$$\Delta p = \frac{\Delta\sigma_v + \Delta\sigma_h}{2} = \frac{0 - \Delta\sigma}{2}, \Delta q = \frac{\Delta\sigma_v - \Delta\sigma_h}{2} = \frac{0 - (-\Delta\sigma)}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2}$$

增量 Δp 為負數、 Δq 為正數，但絕對值相同，表示應力路徑以 45° 向左上方走去。

NC clay 進行 LE 試驗，過程產生負的超額孔隙水壓，破壞時是負 u_e 。

在 K_0 條件的自然沉積中，四種狀態的應力路徑如圖 7-43。這四種應力狀態，以側向解壓(LE)最容易撞到 K_f 線，代表土體側向解壓最容易失敗；以側向加壓(LC)最不容易撞到 K_f 線，代表土體側向加壓最不容易失敗。

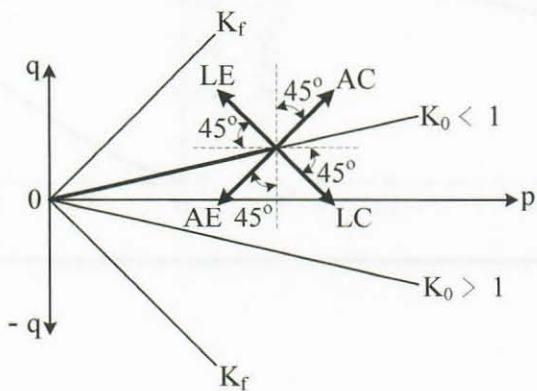


圖 7-43 現場的四種應力路徑

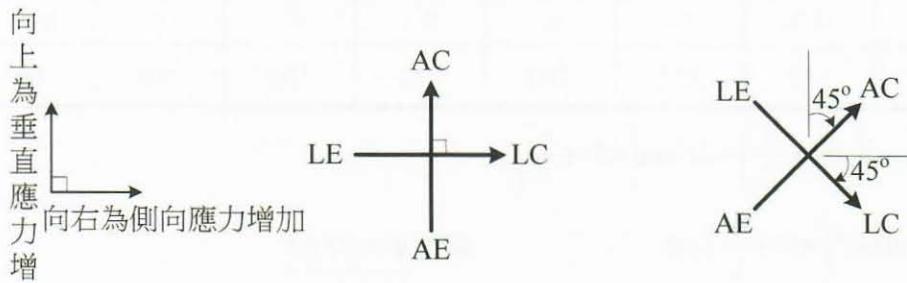


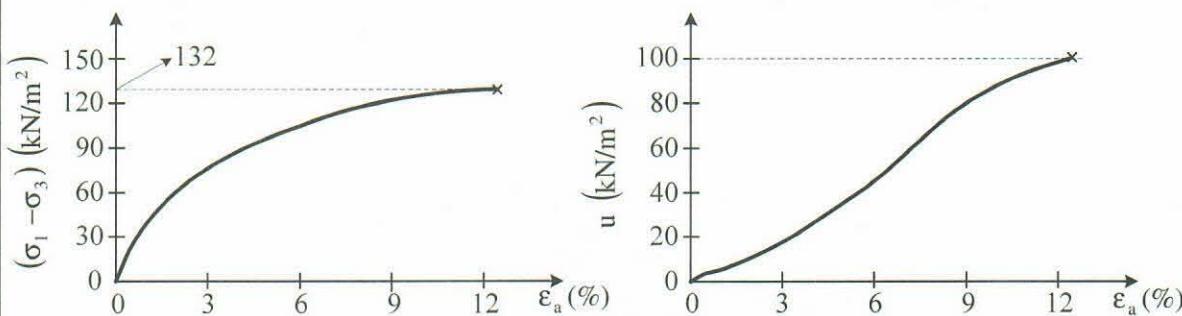
圖 7-44 順時針轉 45° 之記憶法

例 7-10.1 應力路徑

以一正常壓密黏土進行壓密不排水三軸試驗 (CU test)，若採用圍壓為 200 kN/m^2 ，得軸差應力 ($\sigma_1 - \sigma_3$) 與軸向應變 (ε_a)，以及孔隙水壓 (u) 與軸向應變 (ε_a) 之關係如下圖所示：

- (一) 請問此黏土的有效摩擦角 $\phi' = ?$ (5分)
- (二) 請繪此試體在壓密時及破壞時之總應力摩爾圓及有效應力摩爾圓。 (10分)
- (三) 請繪CU試驗時試體之總應力路徑與有效應力路徑。 (10分)
- (四) 請求 K_f 線的截距 a 與仰角 α 值。

<修改97年三等特考>



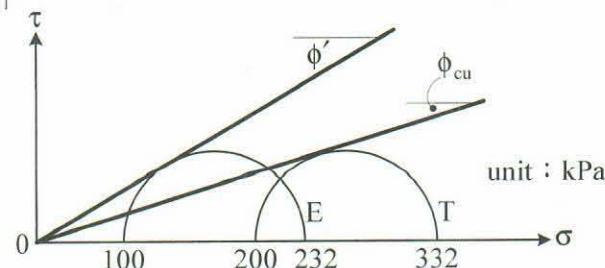
(一) NC clay $c' = 0 \text{ kPa}$ 破壞時，得下表 (unit : kPa)

σ_3	$\Delta\sigma_d$	σ_1	u_w	σ'_1	σ'_3	p	$q=q'$	p'
200	132	332	100	232	100	266	66	166

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$232 = 100 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 0 \quad \text{解出 } \underline{\phi' = 23.43^\circ}$$

(二) 總應力莫爾圓 (T) 與有效應力莫爾圓 (E) 如下



$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right)$$

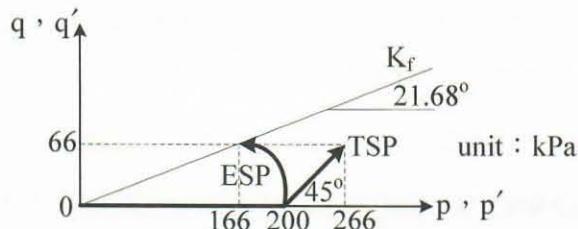
$$332 = 200 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 0 \quad \text{解出 } \phi_{cu} = 14.37^\circ$$

(三) 應力路徑如圖 (unit : kPa)

(四) $\tan \alpha = \sin \phi' = \sin 23.43^\circ$

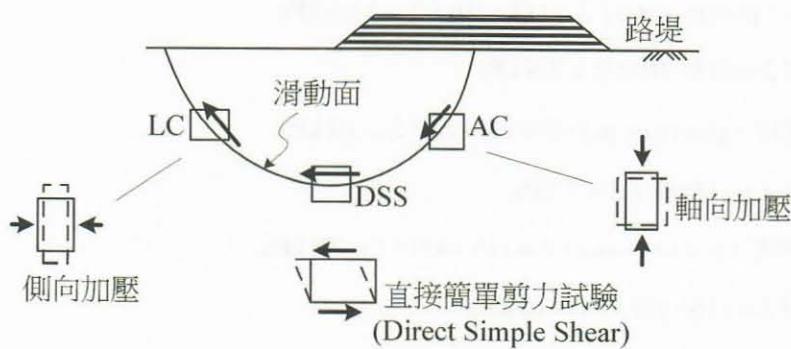
解出 $\alpha = 21.68^\circ$

$a = c \times \cos \phi' = 0 \text{ kPa}$



討論

- 請不要忘記畫施加均向圍壓的應力路徑。破壞時， $u_w = p - p' = 266 - 166 = 100 \text{ kPa}$ 。
- $A_f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin 14.37^\circ} - \frac{1}{\sin 23.43^\circ} \right) = 0.757$ 。
- 筆者大學時，知道「應力路徑」這碼子事嗎？完全不知道，就像許多大學生在臉書上表示某某科目很難，讀不懂，我是各科都不懂。那為何後來變成數次榜首？因為當個兵，讓我周圍的環境變了，讓我有新的生活資料對比以前舊的(大學的)生活資料，我才對比出以前多荒唐。朋友，如果你和我以前一樣，但你生活環境沒改變、壓力沒改變，沒有給自己非要成功不可的誘因，那麼你的明天就和今天、昨天一樣。
- 不同學者提出各種不同定義的應力路徑，畫出來的線形不一樣，本書介紹的是 Lambe 於 1964 年提出的定義，也是考試最常用的定義。
- 破壞弧不同位置的土壤，應進行不同受力模式的試驗求抗剪強度，如下圖，尤其土壤具高度異向性時。當然，做得越詳細，金錢與時間成本越大，主事者要衡量效益。



例 7-10.2 應力路徑

兩相同之鬆砂試體分別進行三軸側向伸張 (lateral extension, LE) 試驗及側向壓縮 (lateral compression, LC) 試驗，土樣試體首先置於垂直向應力 15 kPa 及水平向應力 10 kPa 之情況下壓密；而後，土樣試體分別在 LE 及 LC 試驗中達到破壞。假設該土樣試體之內摩擦角為 30° 。試回答下列各小題：

(一) 分別求出 LE 及 LC 試驗破壞時之最大與最小主應力。

(二) 在 $p-q$ 圖上分別繪出 LE 及 LC 試驗應力路徑，其中 $p = (\sigma_{\text{垂直}} + \sigma_{\text{水平}})/2$ ，且 $p = (\sigma_{\text{垂直}} - \sigma_{\text{水平}})/2$ 。

(三) 求試體破壞時之側向土壓力係數 K_f 。

<98年高考三級30%>



(一) LE test

$$\text{破壞時}, \sigma'_1 = \sigma'_v = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$15 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{30^\circ}{2} \right) + 0$$

$$\text{解出 } \underline{\sigma'_3 = \sigma'_h = 5 \text{ kPa}}$$

$$\underline{\sigma'_1 = \sigma'_v = 15 \text{ kPa}}$$

LC test

$$\text{破壞時}, \sigma'_1 = \sigma'_h = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$\sigma'_1 = \sigma'_h = 15 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{30^\circ}{2} \right) + 0$$

$$\text{解出 } \underline{\sigma'_1 = \sigma'_h = 45 \text{ kPa}}$$

$$\underline{\sigma'_3 = \sigma'_v = 15 \text{ kPa}}$$

(二) 完成壓密時， $p = (\sigma_v + \sigma_h)/2 = (15+10)/2 = 12.5 \text{ kPa}$

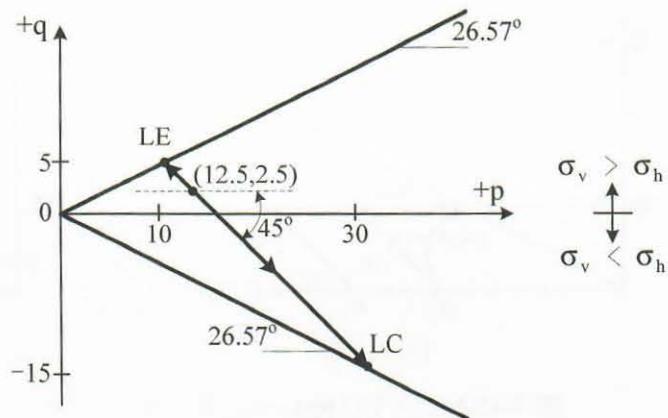
$$q = (\sigma_v - \sigma_h)/2 = (15 - 10)/2 = 2.5 \text{ kPa}$$

$$\text{LE test 破壞時}, p = (\sigma_v + \sigma_h)/2 = (15 + 5)/2 = 10 \text{ kPa}$$

$$q = (\sigma_v - \sigma_h)/2 = (15 - 5)/2 = 5 \text{ kPa}$$

$$\text{LC test 破壞時}, p = (\sigma_v + \sigma_h)/2 = (15 + 45)/2 = 30 \text{ kPa}$$

$$q = (\sigma_v - \sigma_h)/2 = (15 - 45)/2 = -15 \text{ kPa}$$



(三) LE test 破壞時， $K_f = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v} = 5 / 15 = 0.333$

LC test 破壞時， $K_f = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v} = 45 / 15 = 3$

討論

1. $\tan \alpha = \sin \phi = 0.5$ ，故 p-q 圖上破壞包絡線斜率 $\alpha = 26.57^\circ$ 。
2. 第(一)小題，試體破壞時， $\sigma'_1=15$ kPa， $\sigma'_3=5$ kPa。奇怪勒，那題目敘述「壓密時 $\sigma'_1=15$ kPa， $\sigma'_3=10$ kPa」， 10 kPa > 5 kPa，為何壓密不造成試體破壞？
3. 側向土壓力係數的定義恆為「水平方向有效應力 / 垂直方向有效應力」。

§7-11 應力路徑應用

對於正常壓密黏土，進行 CU 試驗，軸向加壓，加軸差應力階段，TSP、ESP 以及 $(T-u_{ss})SP$ 曲線如圖 7-45 所示。 $(T-u_{ss})SP$ 代表扣靜態水壓力之後的總應力路徑，ESP 和 $(T-u_{ss})SP$ 之間的水平距離就是超額孔隙水壓。因為 Δu_e 為正數，所以 ESP 在 $(T-u_{ss})SP$ 左邊。因孔隙水壓力參數 A 在試驗中並非定值，故 ESP 為彎曲狀。破壞由有效應力主控，即 ESP 撞到 K_f 線代表破壞。

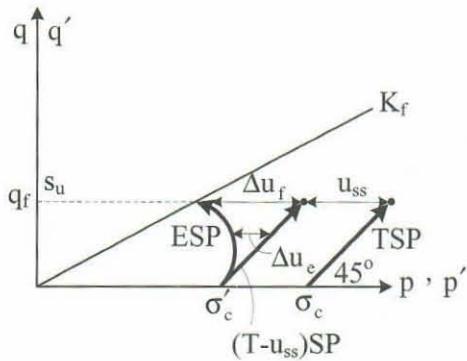


圖 7-45 NC 之 CU test

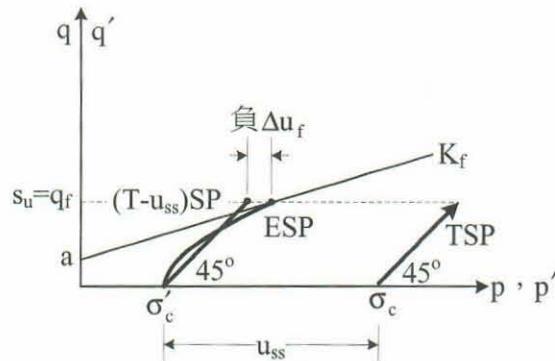


圖 7-46 OC 之 CU test

對於過壓密黏土，進行 CU 試驗，軸向加壓，加軸差應力階段，TSP、ESP 以及 $(T-u_{ss})SP$ 曲線如圖 7-46 所示。加軸差應力初期， Δu_e 為正數，故 ESP 在最左邊，但破壞時 Δu_e 為負數，所以 ESP 在 $(T-u_{ss})SP$ 右邊。破壞時的超額孔隙水壓特稱 Δu_f 。破壞由有效應力主控，即 ESP 撞到 K_f 線代表破壞。

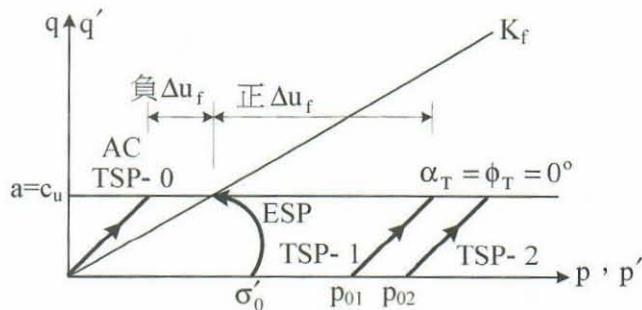


圖 7-47 NC 之 SUU test 與 UC test

對於地底同一深度取出的數個黏土試體，進行 SUU 與 UC 試驗，TSP-0 是 UC 試驗的總應力路徑，TSP-1 是 SUU 試驗的總應力路徑(試驗圍壓大小 p_{01})，TSP-2 是 SUU 試驗的總應力路徑(試驗圍壓大小 p_{02})，ESP 是有效應力路徑， σ'_0 是取樣後的試體內部有效應力。破壞由有效應力主控，即 ESP 撞到 K_f 線代表破壞。TSP-0、TSP-1 與 TSP-2 都是 45° 仰角朝右上。圖 7-47 中的負 Δu_f 是指 UC 試驗破壞時的水壓力。

對於正常壓密黏土，進行 CU 試驗，加完壓密應力 σ'_c 之後，採側向加壓(LC)，其 TSP 如圖 7-48， 45° 俯角朝右下。正常壓密黏土，進行 CU 試驗，但採取壓密至 σ'_c 之後，軸向解壓(AE)，其 TSP 如圖 7-48， 45° 仰角朝左下。這兩種試驗的 ESP 亦繪於圖 7-48，共線。側向加壓(LC)產生的 Δu_e 為正數，但軸向解壓一開始產生負 Δu_e ，破壞時產生正 Δu_e 。

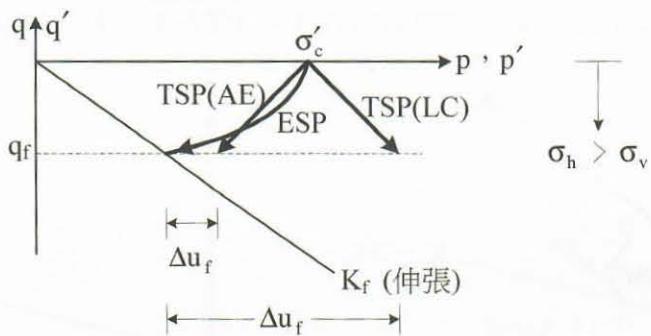


圖 7-48 NC 試體之 CU test(LC 與 AE)

對於現場過壓密黏土(若 $K_0=2$ ，則斜率 $m=\frac{1-K_0}{1+K_0}=-\frac{1}{3}$)，採側向加壓(LC)，其 TSP 如圖

7-49， 45° 俯角朝右下。位於同一現場的過壓密黏土，若採取軸向解壓(AE)，則其 TSP 如圖 7-49， 45° 俯角朝左下。這兩種路徑的 ESP 共線，亦繪於圖 7-49。側向加壓(LC)產生的 Δu_e 為正數，但軸向解壓一開始產生負 Δu_e ，破壞時仍是負 Δu_e 。

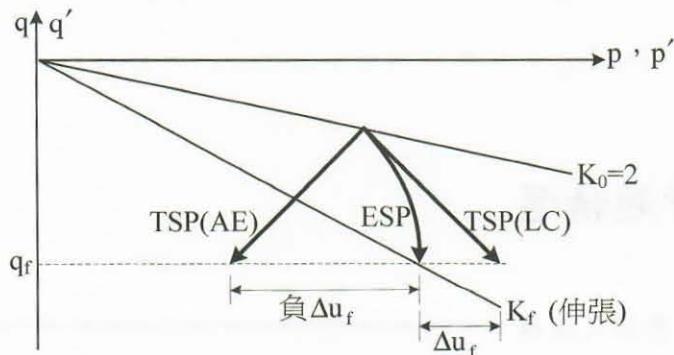


圖 7-49 現地 OC 之 CU test(LC 與 AE)

參考圖 7-50，對於現場正常壓密黏土($K_0 \approx 0.6$)進行垂直加載， $(T-u_{ss})SP$ 為 45° 仰角朝右上，產生正 Δu_e ，隨著 Δu_e 消散，從 B 往 C 移動，離 K_f 線愈來愈遠，就越來越安全，故加載完畢時最危險(短期)。B 點比較靠近 D，故 B 點危險，接近破壞。C 點遠離 D，故 C 點安全。中山高速公路的路堤，放愈久愈安全。

參考圖 7-51，對於現場正常壓密黏土($K_0 \approx 0.6$)進行垂直開挖， $(T-u_{ss})SP$ 為 45° 仰角朝左下，產生負 Δu_e ，隨著 Δu_e 消散，從 B 往 D 移動，離 K_f 線愈來愈近，土壤就越來越不安全，故開挖工地放越久越危險(長期)，宜快速興建地下室與一樓壓重或回填。

現場超額孔隙水壓逐漸消散，ESP 就會往 $(T-u_{ss})SP$ 移動，最後只留下靜態水壓力。

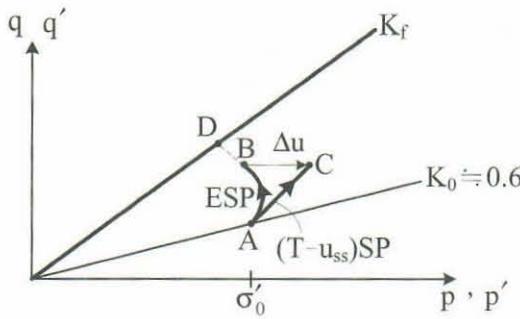


圖 7-50 新建路堤

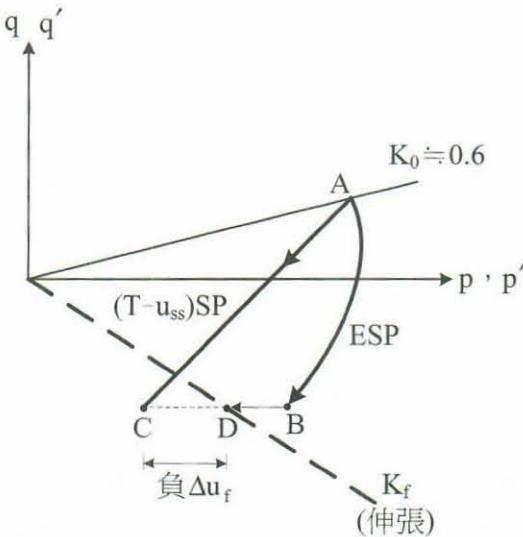


圖 7-51 現地 NC 垂直開挖

§7-12 歷年考題精選

練 1 剪力強度參數之選擇

在一中度過壓密黏土地層上，擬進行地上三層地下四層之建築物工程。針對此項工程所需考量之各項因素，說明於分析及設計時應使用之長、短期剪力強度參數及其適用情形，及調查時應採用那些試驗以獲得這些參數。在長、短期剪力強度考量中，以何者為主控因素？

<94年土木高考25分>



- (1) 開挖 4 樓約 12 m 深，挖掉之覆土應力約 24 tf/m^2 ，粗估每層樓靜重加活重的負荷約 1.5 tf/m^2 ，總共 7 層樓，即加載約 10.5 tf/m^2 ， $10.5 \text{ tf/m}^2 < 24 \text{ tf/m}^2$ ，如此看來，施工後短期和長期，基礎下方土壤都是 OC，且建築物使用階段的 OCR 還比施工前大，使用階段土壤變成嚴重 OC。

(2)

工程階段	施工特色與使用強度參數的理由	如何得強度參數
開挖	因開挖造成基地正下方土壤總應力減小，OC 開挖產生負的超額孔隙水壓，所以水壓力也減小，有效應力約維持不變，短期抗剪強度不變。開挖後閒置越久，負的超額孔隙水壓逐漸消散，水壓力提高，有效應力下降，土壤抗剪強度下降，放越久越危險。	最危險狀態是長期。以長期強度為主控因素，應進行 CD 或 CU 試驗兼測孔隙水壓求 c' 和 ϕ' 以反推現場長期強度 τ_f 。 短期不排水剪力強度 s_u 可進行 SUU 試驗、UC 試驗、或十字片剪試驗得到，但非最危險狀態。
邊坡無支撐	開挖形成人造邊坡，若不給予側向支撐，就有分析邊坡穩定性的必要。因開挖產生負的 u_e ，所以水壓力也減小，有效應力約維持不變，短期邊坡抗剪強度不變。開挖後閒置越久，負的 u_e 逐漸消散，水壓力提高，有效應力下降，土壤抗剪強度降低，是邊坡最危險狀態。	最危險狀態是長期。以長期強度為主控因素，應進行 CD 或 CU 試驗兼測孔隙水壓求 c' 和 ϕ' 以反推現場邊坡抗滑 FS。 短期不排水剪力強度 s_u 可進行 SUU 試驗、UC 試驗、或十字片剪試驗得到，但非最危險狀態。
有側支撐	以鋼鈑樁進行基地周圍側支撐，鋼鈑樁後方乃側視土壓力，側視土壓力以 s_u 估計之。	短期不排水剪力強度 s_u 可進行 SUU 試驗、UC 試驗、或十字片剪試驗得到。
灌漿加載 結構加載	當開挖到最底部，OCR 來到最大，隨著逐級灌漿加載，OCR 又慢慢變小。 以結構加載完畢和地表開挖前相比，OCR 反而增大，土壤的有效正向應力減少，抗剪強度降低，是最危險狀態。	以結構加載完畢和地表開挖前相比，最危險狀態是加載完畢。以長期強度為主控因素，應進行 CD 或 CU 試驗兼測孔隙水壓求 c' 和 ϕ' 以反推現場承載力 q_{ult} 。

(3) 綜評開挖與灌漿加載、結構加載，倘開挖後閒置(eg：資金不足)不建地下室，最危險的時間點就是開挖到最低點的時候。倘施工速度一直很快(含開挖、灌漿)，在挖到最低點還不失敗的前提下，則最危險的時間點是結構物完工使用的階段。以上這兩個最危險狀態的剪力強度，都要靠 c' 和 ϕ' 來求，意即長期強度主控安全。

討論

例如：開挖前 $OCR=2$ ；開挖到最低點 $OCR=4$ ；結構加載(含活載重)使用後， $OCR=3$ 。但 $3>2$ ，即完工長期後，土壤反而過壓密得更嚴重(與開挖前相比)。

若不開挖這麼深，或樓層蓋高一點，加載導致土壤變成 NC，那長期就不會是最危險狀態，NC 會越壓越安全，就像高速公路路堤下方土壤，越壓越安全。

地上三層，地下卻有四層，此類建物可能是捷運地下車站。

練 2 CU 與 CD 試驗

某正常壓密黏土之有效內摩擦角為 33° ，對此黏土試體進行三軸試驗，施加圍壓為 115 kN/m^2 。

(一) 若進行壓密不排水試驗，破壞時軸差應力為 102 kN/m^2 ，試求破壞時黏土試體內之水壓。

(二) 若進行壓密排水試驗，所施加之圍壓仍為 115 kN/m^2 ，試求破壞時之軸差應力。

<100年地方特考25 分>



正常壓密黏土 $c' = 0 \text{ kPa}$

(一) 破壞時 (CU 試驗)

unit : kPa

σ_3	$\Delta\sigma_d$	σ_1	u_e	σ'_3	σ'_1
115	102	217	x	115-x	217-x

$$\text{按 } \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$\Rightarrow 217 - x = (115 - x) \tan^2(45^\circ + \frac{33^\circ}{2}) + 0 = 3.392(115 - x) = 390.09 - 3.392x$$

$$\text{解出水壓力 } x = 72.362 \text{ kPa}$$

$$(二) \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 0 = 115 \times 3.392 = 390.09 \text{ kPa}$$

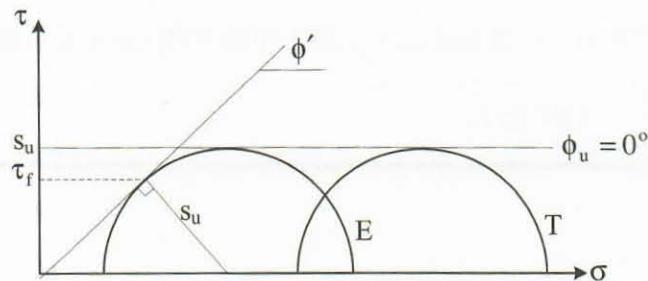
$$\Delta\sigma_d = \sigma'_1 - \sigma'_3 = 275.09 \text{ kPa}$$

討論

本題 $\phi_{cu} = 17.89^\circ$, $A_f = 72.362 / 102 = 0.71$, 請試算之。

三軸試驗為何沒有「不壓密+排水」(UD)試驗？三軸試驗乃模擬現場受力，思考答案要回歸到現場，現場土壤有沒有辦法發生「受圍壓不壓密，受軸差應力卻可以排水」的現象？不可以，故三軸試驗沒有 UD 試驗。

再請問讀者：正常壓密黏土進行 SUU 試驗得不排水剪力強度 s_u ，可是破壞面的剪力強度實際是 $\tau_f = s_u \cos \phi'$ ，比 s_u 還小，如下圖，這不就高估強度偏危險側嗎？



答：因為試體現地取樣、運送及試驗室修飾的擾動，已經造成試體強度低於現地實際強度，所以我們拿試體的 s_u 當成現地不排水剪力強度，其實還是偏保守的，況且大地的安全係數常取 3.0，以 $\frac{s_u}{3}$ 來設計，應該是保守有餘了。

總應力分析就是不把水壓力分離出來，以總應力來算(打混仗，裹在一起不分離，水壓力和有效應力乃「我泥中有你，你泥中有我」，和在一起，繳所得稅時夫妻財產合併申報)；有效應力分析就是要把水壓力、有效應力分離出來算，夫妻財產分開申報。

請問同一土壤，若改變它的壓密應力(圍壓)， c' 、 ϕ' 會不會變？ c_{cu} 、 ϕ_{cu} 會不會變？ s_u 會不會變？答案是： c' 、 ϕ' 不會變。 c_{cu} 、 ϕ_{cu} 不會變。 s_u 會變。壓密應力越大，破壞時莫爾圓半徑越大， s_u 越大。同一工址，不同深度取出的試體，因壓密應力不同，做 SUU 試驗所得的 s_u 也不同。

某黏土試體依據 CD 試驗，得摩擦角 ϕ' ；依據 CU 試驗，得摩擦角 ϕ ，請問 CU 試驗的破壞面和水平夾角幾度？答案是 $45^\circ + \frac{\phi'}{2}$ ，不是 $45^\circ + \frac{\phi}{2}$ ，進行總應力試驗，控制破壞的依然是有效應力，有效應力才是幕後藏鏡人。網路上有錯誤觀念，請買歐陽叢書以正視聽。

練 3 莫爾-庫倫破壞準則

在莫爾-庫倫 (Mohr-Coulomb) 破壞準則中，若 τ_{ff} 及 σ_{ff} 分別代表試體破壞時在破壞面上之剪應力及正向應力； σ_1 及 σ_3 則分別代表最大及最小主應力，試回答下列問題：

(一)自行假設一組數據證明在對最大主應力平面 (Major principle plane) 傾斜 45° 平面上 ($\alpha = 45^\circ$) 關係如右： $\frac{\tau_{max}}{(\sigma_1 + \sigma_3)/2} < \frac{\tau_{ff}}{\sigma_{ff}}$ (15分)

(二)證明不論是否有凝聚力，破壞面與最大主應力平面夾角 (α_f) 及內摩擦角 (ϕ) 關係如

$$\text{右: } \alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi}{2} \quad (10 \text{ 分})$$

<96年土木高考>



(一) 設 $c = 10 \text{ kPa}$, $\phi = 30^\circ$, $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$

$$\text{則可算出 } \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right) + 2c \tan\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right) = 334.64 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{avg} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = 217.32 \text{ kPa}$$

$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 117.32 \text{ kPa}$$

$$\frac{\tau_{max}}{(\sigma_1 + \sigma_3)/2} = 117.32 / 217.32 = 0.54$$

$$\tau_{ff} = \tau_{max} \times \cos 30^\circ = 101.6 \text{ kPa}$$

$$\text{按照 } \tau_{ff} = c + \sigma_{ff} \tan \phi$$

$$101.6 = 10 + \sigma_{ff} \tan 30^\circ$$

$$\text{解出 } \sigma_{ff} = 158.66 \text{ kPa}$$

$$\frac{\tau_{ff}}{\sigma_{ff}} = 101.6 / 158.66 = 0.64 > 0.54$$

Q.E.D.

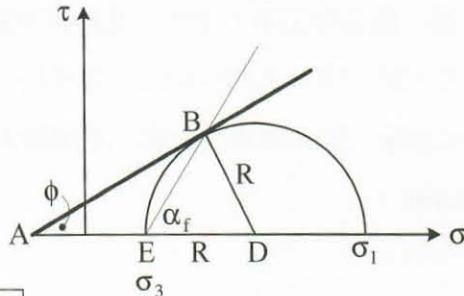
(二) 參考下圖，B 為切點， $\angle ABD = 90^\circ$ ，觀察 ΔABD ，得 $\angle ADB = 90^\circ - \phi$

觀察等腰三角形 ΔDBE ，得 $2\alpha_f + \angle EDB = 180^\circ$

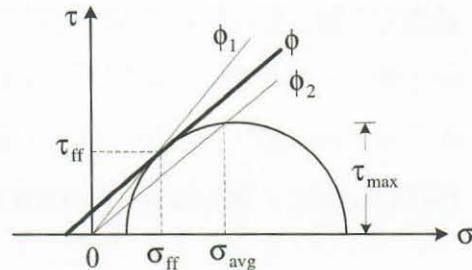
$$2\alpha_f + 90^\circ - \phi = 180^\circ$$

解出 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$

Q.E.D.



討論



或者，已得知 $\angle ADB = 90^\circ - \phi$ ，故 $\angle BD\sigma_1 = 90^\circ + \phi$ ，按圓周角為圓心角之半，證出圓周角 $\alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$ 。再參考上右圖，有圖有真相，一圖證畢千言萬語， $\frac{\tau_{\max}}{(\sigma_1 + \sigma_3)/2} = \tan \phi_2$ ， $\frac{\tau_{ff}}{\sigma_{ff}} = \tan \phi_1$ ，圖形顯示 $\tan \phi_2 < \tan \phi_1$ ，故 $\frac{\tau_{\max}}{(\sigma_1 + \sigma_3)/2} < \frac{\tau_{ff}}{\sigma_{ff}}$ 。力學考試，惟歐陽而已。

廣義來講，土壤失敗有兩種，一是變形過大，導致結構物無法容忍差異沉陷量，本章不著墨於此。另一種就是土壤承受應力過大導致產生滑動面，本章所討論者在此。

各種試驗均是想充分模擬現場，然常常難以完全做到，例如三軸試驗過程中， $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ，破壞時也這樣，但現地土壤破壞時，未必 $\sigma_2 = \sigma_3$ 。

練 4 基本問答

在大地工程採用數值模擬(numerical modeling)方法，進行土壤—結構互制行為力學分析中，大多採用莫爾—庫倫(Mohr-Coulomb)土壤材料模型(soil material model)，來模擬土壤之應力—應變關係及彈塑性變形行為。請針對莫爾—庫倫土壤模型回答下列問題：

- (一)繪製並說明其應力—應變關係曲線。
- (二)其降伏破壞準則(yielding failure criteria)為何？
- (三)需要輸入之材料模型參數(material model parameters)為何？
- (四)說明採用此土壤材料模型之優、缺點。

<101年高考二級15分>



(一)在三軸試驗排水條件下，軸差應力與正向應變的關係如圖 a。對於緊砂或 OC，因為互鎖作用(interlocking)存在，破壞前必須要翻越鄰近顆粒的頂端，造成尖峰應力。翻越之後，軸差應力下降。對於鬆砂或 NC，互鎖效應不明顯，隨著軸差應力增加，試體逐漸緊密，孔隙比漸小，軸向應變逐漸變大，沒有尖峰應力。對於同一來源的砂土，若只是初始孔隙比不同的兩試體，在試驗過程中，鬆砂會愈來愈緊，緊砂會愈來愈鬆，在試驗末了會達相同的孔隙比，稱為臨界孔隙比(critical void ratio)。

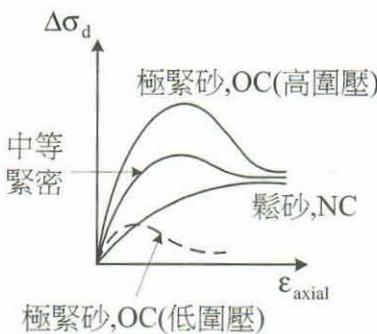


圖 a

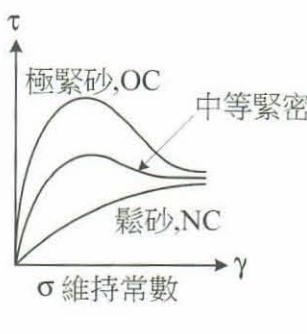


圖 b

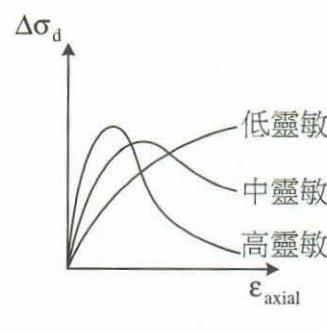


圖 c

在直剪試驗排水條件下，剪應力與剪應變的關係如圖 b，類似圖 a。對於緊砂或 OC，隨著剪動進行，觀察得試體厚度增加，此乃因破壞前要翻越鄰近顆粒的頂端。對於鬆砂或 NC，隨著剪動進行，觀察得試體厚度減少，不存在尖峰剪應力。

若以不同敏感度的黏土進行三軸排水試驗，試驗結果如圖 c。敏感度愈高，軸向應變大時，宛如受激烈擾動，強度下降愈大。通常土木工程對土壤的擾動是夠大的，故須特別留意高敏感度黏土。

(二)(1)德國人莫爾(Otto Mohr)指出，土體破壞時，其主應力的差值 ($\sigma_{max} - \sigma_{min}$)，和主應力的和 ($\sigma_{max} + \sigma_{min}$) 之間，有一定的函數關係，亦即 $\sigma_{max} - \sigma_{min} = f(\sigma_{max} + \sigma_{min})$ 。其中 f 代表某一種特定的函數關係，不同的材料，函數 f 的型態不一樣。

(2)法國人庫倫提出，土壤的強度準則可寫成 $\tau = c + \sigma \tan \phi$ 。

(3)依莫爾的觀點，將破壞時的應力莫爾圓繪出，這些應力莫爾圓的共同切線(可能是弧線或直線)，就稱為莫爾破壞包絡線。後人將庫倫提出的強度準則線 $\tau = c + \sigma \tan \phi$ 做為

破壞包絡線，當應力莫爾圓切到強度準則線，土體即宣告失敗。這理論就稱為 Mohr - Coulomb 破壞準則。

(三)需要輸入之材料模型參數為凝聚力 c 與內摩擦角 ϕ 。

(四)

優點	缺點
1. 數學上簡單、易用、省時，一般大學教育均教過。	1. 高正向應力時，會高估抗剪強度，偏危險側。
2. 此模型只有兩個未知數，取兩個試體即可求出 c 與 ϕ ，多取試體可以迴歸求 c 與 ϕ ，減少誤差。	2. 現場可能為左右可排水，但三軸試驗僅允許上下排水，無法完全模擬現場排水條件。
3. 業界使用經驗豐富。	3. 試體易受取樣、運輸、修裁擾動影響。
4. 方便繪製 K_f 線，就方便使用應力路徑。	4. 大地工程變異大，取樣位置及深度是否有代表性不無疑問。
5. 使用結果尚稱滿意。	5. 取樣有尺寸效應問題。
6. 試驗儀器(含現場、試驗室)種類繁多，選擇性多，經驗公式多，操作不困難。	6. 現地土壤三軸的應力很可能不同，但取樣後的三軸試驗，其側向圍壓均相等，無法完全模擬現場受力。

討論

1. 第(二)小題在 83 年高考二級考過，有買《目擊者大地工程精解》的朋友就賺到了。 c 與 ϕ 才是土壤強度的基本獨立參數， s_u 不是， s_u 會隨壓密應力變大而變大。
2. 某次高考結束後，考生張三洋洋得意的說「這次考題比以往簡單，我應該會上榜。」筆者聽到後，立刻找人打賭，賭他落榜。放榜時，果然筆者又贏了賭注。這其中的道理是什麼？考題簡單時，大家分數都水漲船高，以為自己分數漲高而別人靜止不動者，思慮必有欠周詳，這種腦袋在考場裏寫不出好答案的，九成九落榜。筆者執教 10 餘年，考完謙虛說「我會落榜」的人，反而上榜多，人很奇妙。

練 5 CU 試驗

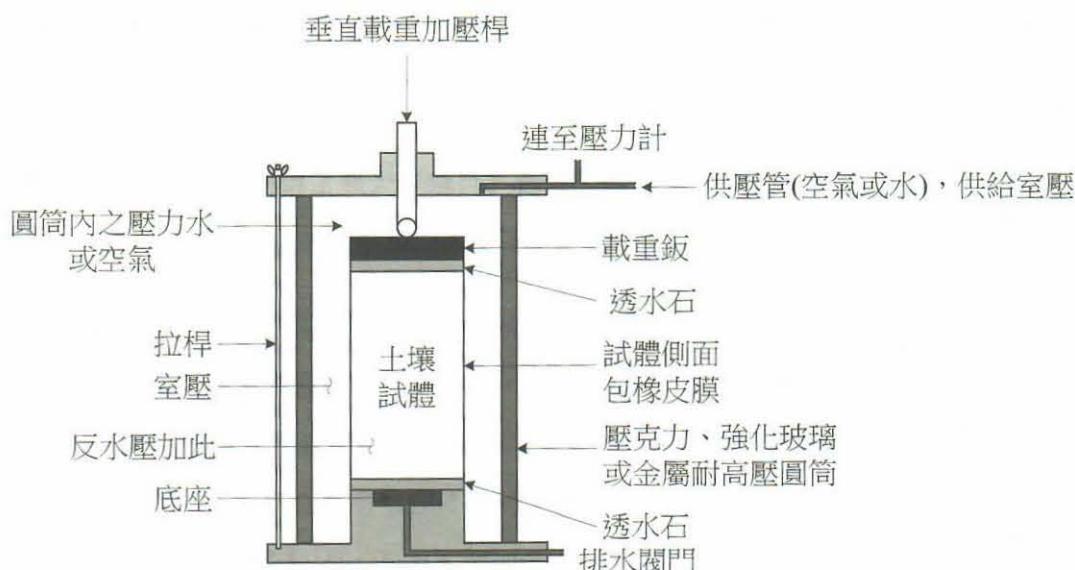
下列問題均屬飽和壓密不排水 (SCU) 試驗。

- (一)何謂飽和壓密不排水試驗？(請繪圖輔助說明)，試驗時施加之背水壓力(backpressure)之目的為何？
- (二)試分別繪圖說明典型SCU 試驗結果之正常壓密黏土及過壓密黏土之軸差應力、孔隙水壓力與軸應變之關係。
- (三)說明此試驗可獲得正常壓密黏土之那些強度參數？並繪圖說明如何獲得？
- (四)有某正常壓密黏土試樣，使用圍壓 $\sigma_3 = 100$ kPa 進行飽和壓密不排水試驗，試樣破壞時，軸差應力($\Delta\sigma_d$)_f 為75 kPa，孔隙水壓力(Δu_d)_f 為56 kPa。試計算此試樣之壓密不排水試驗之總應力之內摩擦角 ϕ_{cu} 及有效應力之內摩擦角 ϕ' 各為若干？
- (五)破壞時，試體破壞面之傾角及孔隙水壓力參數 A_f 各為若干？

<102年高考三級每小題5分，共25分>



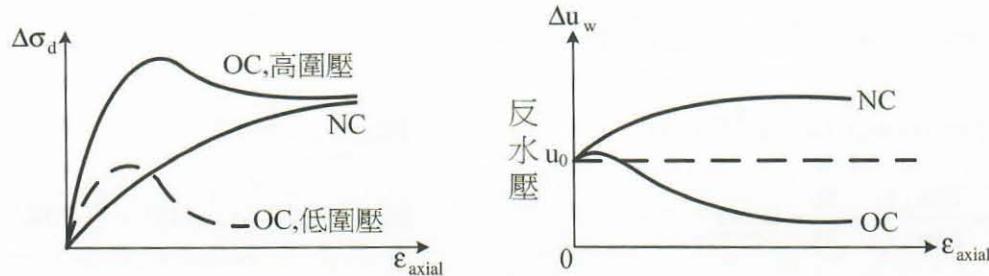
(一)SCU 試驗：S 指試體飽和(saturation)；C 指壓密(consolidation)，即加圍壓 σ_3 時，開啟閥門，讓超額孔隙水壓能排除；U 指加軸差應力階段不排水(undrain)，即關閉從試體內部伸出之排水管閥門，使加軸差應力引發的超額孔隙水壓無法排除。



三軸室儀器如上

加背水壓(反水壓)的目的乃使試體飽和，即強迫試體內的空氣溶於水中。若現地黏土為飽和，取樣解壓可能使試體變成不飽和，故試驗前再加反水壓使之飽和。

(二)

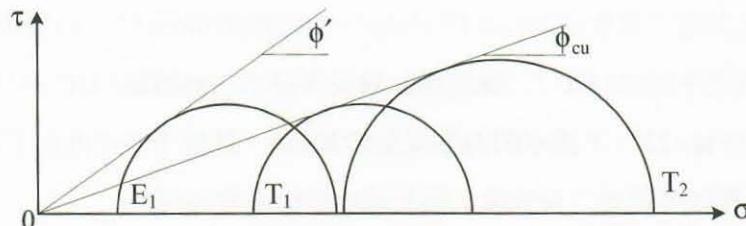


加軸差應力階段不排水，導致體積無法變化。在排水下，OC 受剪會產生剪漲現象(i.e., 顆粒翻越鄰近顆粒頂端)，但現在因不排水，產生負的孔隙水壓(拉力)拉住顆粒，使其無法翻越。在排水下，NC 受剪會產生剪縮現象(i.e., 顆粒趨緊密，體積縮小)，但現在因不排水，產生正的孔隙水壓(壓力)頂住顆粒，使其無法緊密。上圖 u_0 是反水壓。

(三)可得 c_{cu} 與 ϕ_{cu} ，若兼測量孔隙水壓，可再得 c' 與 ϕ' 。

例如，取兩份來自同一工址的試體，以不同圍壓壓密後，再進行不排水軸差加壓，直至試體破壞，可得兩個應力莫爾圓 T_1 及 T_2 ，求其公切線即得 c_{cu} 及 ϕ_{cu} 。若試體為 NC，則 $c_{cu} = 0 \text{ kPa}$ 。

前述試驗，若有測量 $(\Delta u_e)_f$ ，則可得兩個有效應力莫爾圓 E_1 及 E_2 ，求其公切線即得 c' 及 ϕ' 。若試體為 NC，則 $c' = 0 \text{ kPa}$ 。(為不使圖形複雜，故不畫出 E_2)



(四) NC 之 $c' = 0 \text{ kPa}$

σ_3	$(\Delta\sigma_d)_f$	σ_1	$(\Delta u_d)_f$	σ'_1	σ'_3
100	75	175	56	119	44

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

【必背公式】

$$\Rightarrow 119 = 44 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 0$$

解出 $\underline{\underline{\phi' = 27.4^\circ}}$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 2c_{cu} \tan(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2})$$

$$\Rightarrow 175 = 100 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 0$$

解出 $\underline{\underline{\phi_{cu} = 15.83^\circ}}$

$$(五) A_f = \frac{(\Delta u_d)_f}{(\Delta \sigma_d)_f} = \frac{56}{75} = \underline{\underline{0.747}}$$

$$\text{與水平夾角 } \alpha_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = \underline{\underline{58.7^\circ}}$$

討論

提高壓力可以使氣體溶於水中，降低壓力容易使水裏的空氣跑出來。汽水的製程就是低溫高壓使得二氧化碳溶於汽水裏，加反水壓就是引用此概念。

Skempton 孔隙水壓力參數 A 在試驗過程中，一直會變動，破壞(failure)時的 A，特寫為 A_f 。

莫爾圓 E_2 大小同 T_2 ，但切於 ϕ' 線。建議您解完三軸試驗要畫總應力與有效應力莫爾圓，檢驗觀念是否有盲點。

練 6 求取樣深度與破壞水壓

有一正常壓密黏土其飽和單位重為 $\gamma_{sat} = 18 \text{ kN/m}^3$ ，有效摩擦角 $\phi' = 32^\circ$ ，如於現地土層同一位置取得土樣進行壓密不排水(CU)三軸壓縮試驗及不排水三軸試驗(UU)，得不排水(CU)三軸壓縮試驗摩擦角 $\phi = 22^\circ$ ，不排水剪力強度為 50 kN/m^2 ，其地下水位面位於地表以下 2 m 。試問：(一)此一試體對應現地之有效覆土壓及現地取樣深度為何？

(二)試驗時試體達破壞時所產生之孔隙水壓 Δu_f 為何？ <修改101年結構技師25分>

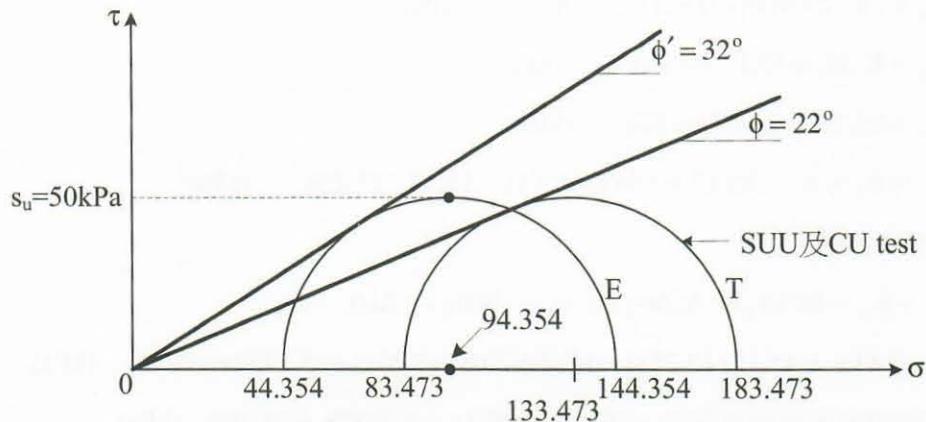


本題缺陷很多，敘述亦模糊，考生須自行假設方算得下去，不同假設會導致答案不同。

(1)假設試體進行 SUU 試驗，破壞時的總應力莫爾圓重合於 CU 試驗破壞時的總應力莫爾圓。

按此假設，不排水剪力強度 $s_u = CU$ 試驗破壞時莫爾圓半徑 = 50kPa

CU 試驗破壞時，會產生一對應之有效應力莫爾圓，半徑也是 50kPa



有效應力莫爾圓(E)的圓心座標為 σ'_{avg}

$$\sin 32^\circ = \frac{50}{\sigma'_{avg}} \Rightarrow \sigma'_{avg} = 94.354 \text{ kPa}$$

總應力莫爾圓(T)圓心座標 σ_{avg}

$$\sin 22^\circ = \frac{50}{\sigma_{avg}} \Rightarrow \sigma_{avg} = 133.473 \text{ kPa}$$

CU 試驗破壞時孔隙水壓力 $\Delta u_f = \sigma_{avg} - \sigma'_{avg} = 133.473 - 94.354 = 39.12 \text{ kPa}$

SUU 試驗破壞時孔隙水壓力 $\Delta u_f = 39.12 \text{ kPa}$

(2) SUU test 破壞時， $\sigma'_1 = \sigma'_{avg} + R = 94.354 + 50 = 144.354 \text{ kPa}$

$$\text{破壞時 } \sigma'_3 = \sigma'_{avg} - R = 94.354 - 50 = 44.354 \text{ kPa}$$

$$\text{軸差應力 } \Delta \sigma_d = \sigma'_1 - \sigma'_3 = 2R = 100 \text{ kPa}$$

$$\text{孔隙水壓力參數 } A_f = \frac{\Delta u_f}{\Delta \sigma_d} = \frac{39.12}{100} = 0.3912$$

$$\sigma_1 = \sigma'_1 + 39.12 = 183.473 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma'_3 + 39.12 = 83.473 \text{ kPa}$$

設地下水位以上，黏土之溼土單位重 $\gamma_m = 18 \text{ kN/m}^3$

$$NC, K_0 = 0.95 - \sin \phi' = 0.95 - \sin 32^\circ = 0.42$$

設試體自地下水位面下 x 公尺處取出

試體尚未取出前 (在地表下 $x+2$ 公尺處)

$$\sigma'_v = 18(2) + x(18 - 9.81) = 36 + 8.19x \quad (\text{kPa})$$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 15.12 + 3.44x \quad (\text{kPa})$$

$$\sigma_v = 18(2) + 18x = 36 + 18x \quad (\text{kPa})$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 15.12 + 3.44x + 9.81x = 15.12 + 13.25x \quad (\text{kPa})$$

取樣為解壓動作

$$u_r = u_{ss} - B(\Delta\sigma_3) - A(\Delta\sigma_d) = u_{ss} - B(\sigma_h) - A(\sigma_v - \sigma_h)$$

$$= 9.81x - (15.12 + 13.25x) - 0.3912(20.88 + 4.75x) = -5.2982x - 23.288 \quad (\text{kPa})$$

試體剛取出到地表面時，其內有效應力 = $5.2982x + 23.288$ (kPa)

取樣後進行 SUU 試驗 (unit : kPa)

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣	$\sigma_v = 0 = \sigma_h$	$-5.2982x - 23.288$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 5.2982x + 23.288$
加圍壓 p	$\sigma_v = p = \sigma_h$	$-5.2982x - 23.288 + p$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 5.2982x + 23.288$
加軸差應力 100kPa	$\sigma_h = p$ $\sigma_v = p + 100$	$-5.2982x - 23.288$ $+ p + 39.12$	$\sigma'_v = 5.2982x + 23.288 + 100 - 39.12$ $= 5.2982x + 23.288 + 60.88$ $\sigma'_h = 5.2982x + 23.288 - 39.12$

比對先前解出之總應力莫爾圓，得 $p = 83.473$ kPa

$$\sigma'_h = 5.2982x + 23.288 - 39.12 = \sigma'_3 = 44.354 \text{ kPa}$$

解出 $x = 11.36$ m

故現地取樣深度 13.36 m

垂直方向有效覆土圍壓 = $36 + 8.19x = 129.04$ kPa

水平方向有效覆土圍壓 = $129.04K_0 = 54.196$ kPa

討論

- 本題沒說 SUU 試驗前試體壓密應力為多少，也沒說 CU 試驗的壓密應力為多少，可是壓密應力會影響試體進而影響答案，不同考生假設不同的壓密應力，就會得到不同答案，本題命題有瑕疵。

2. 進行 SUU test，表格整理如下：(unit : kPa)

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣	$\sigma_v = 0 = \sigma_h$	-83.473	$\sigma'_v = \sigma'_h = 83.473$
加圍壓 83.473	$\sigma_v = 83.473 = \sigma_h$	$-83.473 + 83.473 = 0$	$\sigma'_v = \sigma'_h = 83.473$
加軸差應力	$\sigma_h = 83.473$	39.12	$\sigma'_v = 144.353$
100 kPa	$\sigma_v = 183.473$		$\sigma'_h = 44.353$

3. 進行 CU test，表格整理如下：(unit : kPa)

步驟	總應力	孔隙水壓力	有效應力
取樣	$\sigma_v = 0 = \sigma_h$	-83.473	$\sigma'_v = \sigma'_h = 83.473$
加圍壓 83.473	$\sigma_v = 83.473 = \sigma_h$	0 (開閥門)	$\sigma'_v = \sigma'_h = 83.473$
加軸差應力	$\sigma_h = 83.473$	39.12	$\sigma'_v = 144.353$
100 kPa	$\sigma_v = 183.473$		$\sigma'_h = 44.353$

4. 能畫出表格 = 能解出答案；不能畫出表格 = 不能解出答案。

5. 命題教授編製的數據之間疑有矛盾，按其數據求出之地表下垂直方向有效覆土圍壓 = 129.04 kPa，但試驗中有效圍壓僅 83.473 kPa，試體行為屬 OC，應有非零之凝聚力，與 NC 的計算前提($c=0$ kPa)扞格。

練 7 強度參數之選擇

請依序回答下列土壤剪力強度問題：

(1) 請寫出一般砂土排水摩擦角 ϕ' 與排水凝聚力 c' 的範圍，並註明單位。(5 %)

(2) 請解釋為何在直接剪力試驗下，在莫爾庫倫圖上不用繪製莫爾圓就可直接求土壤剪力強度參數，而在三軸壓縮試驗下則需利用莫爾圓求土壤剪力強度參數。(5 %)

(3) 公路局決定將在山區一易崩塌路段，加蓋一擋土牆護坡。此路段之土壤為砂質土壤(SP)，具單位重 $\gamma = 18$ kN/m³ 與自然狀況下含水量 $w = 3\%$ 。因為擋土牆之設計與此土坡之土壤剪力強度相關，身為大地工程師的你，你將建議採用何種試驗方式來決定土壤剪力強度，

(若選擇三軸壓縮試驗請註明為CD,CU,UU中何種試驗)？在你所選擇的試驗中，你將會獲得有效應力或是總應力的剪力強度參數？請說明支持你選擇的原因。（5%）

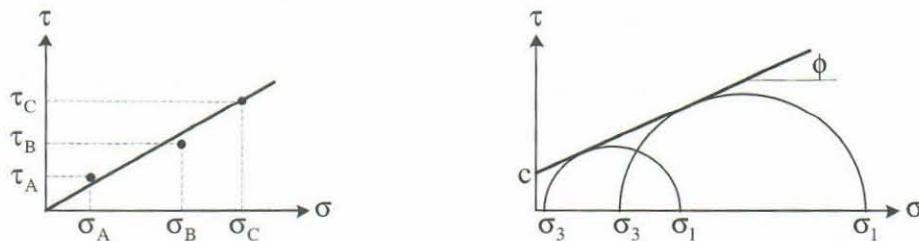
(4)用圖示的方式表示，三軸壓密 - 不排水試驗（ $\overline{\text{CU}}$ Test）第一階段（施加圍壓）與第二階段（施加軸差應力）土壤受力的情形，以圍壓 σ_3 ，軸差應力 τ 與超額孔隙水壓 u 表示。寫出每一階段下土壤試體水平與垂直方向的總應力與有效應力。在莫爾庫倫圖上，繪出 $\overline{\text{CU}}$ 試驗下總應力與有效應力的莫爾圓與破壞包絡線，並標出超額孔隙水壓的相關位置。（10%）

<100年台科大土壤力學>



(1)一般砂土的排水凝聚力 $c' = 0 \text{ kPa}$ ，
排水摩擦角 ϕ' 常見範圍為 $30^\circ \sim 36^\circ$ 。

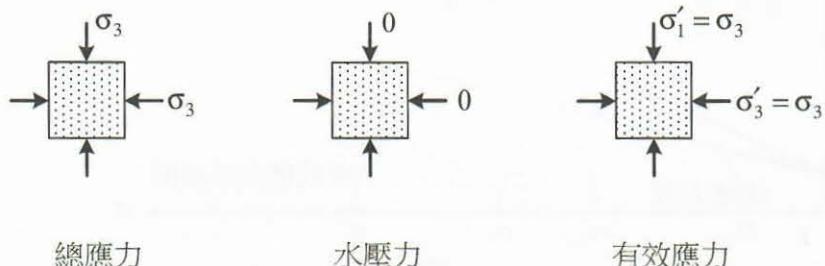
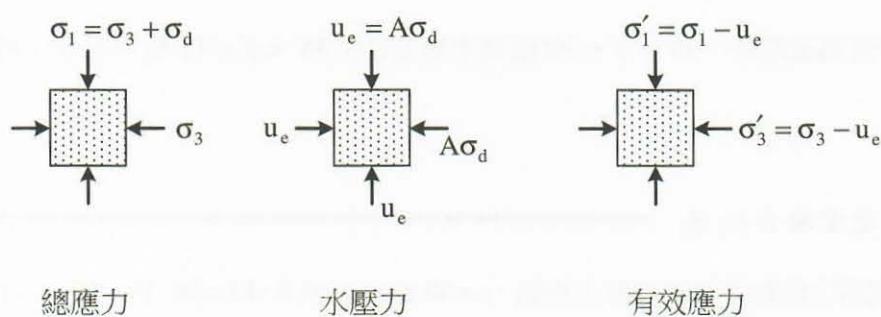
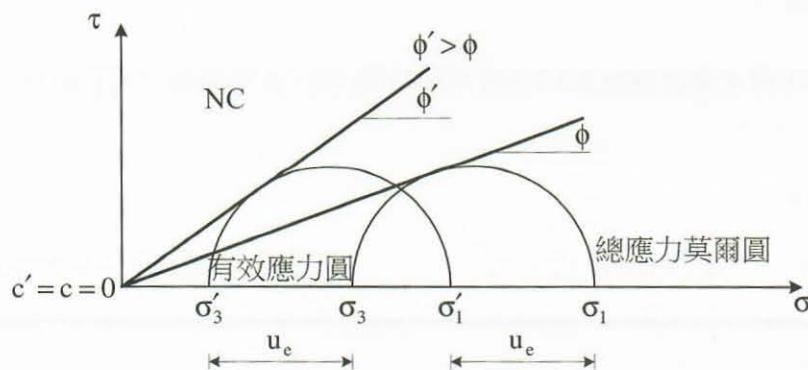
(2)直剪試驗，破壞面為水平面，破壞面的正向應力及剪應力可由 $\sigma = \frac{N}{A}$ 及 $\tau = \frac{V}{A}$ 求出。將 (σ, τ) 描點連線，即得破壞包絡線。破壞包絡線的截距是強度參數 c ，斜率是 $\tan \phi$ 。

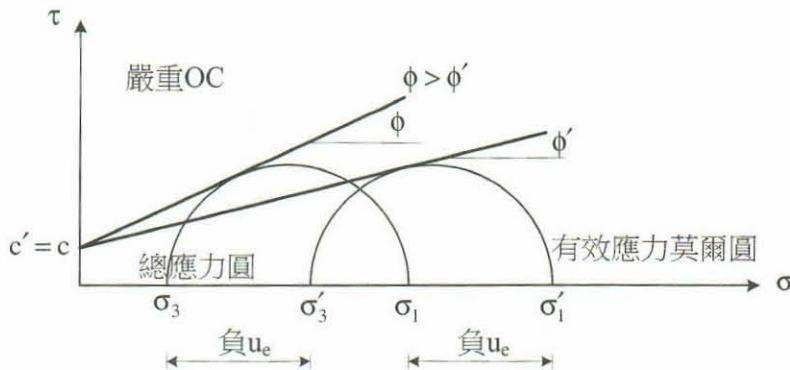


三軸試驗，我們無法預先知道破壞面，故破壞面的 (σ, τ) 無法直接算出，就沒有辦法直接畫破壞包絡線。但是三軸試驗可知 σ_1 及 σ_3 ，故可繪製破壞時的應力莫爾圓。多做幾組試驗，就有數個應力莫爾圓，將這些圓的公切線近似畫出，就是破壞包絡線。或收集各破壞莫爾圓的 (p, q) 數據，亦可用迴歸方式先求出 a 與 α ，再求出強度參數 c 與 ϕ 。

(3)不良級配砂(SP)在現地受剪時能排水，在試驗室欲求其強度參數，可用直剪的慢剪試驗(S)，或三軸壓縮試驗的 CD 試驗。若三軸試體不易製作，則進行慢剪試驗。此土壤，其凝聚力 c 值應該很小，其強度參數主要為 ϕ 。

由於進行排水試驗，故得有效應力參數。

(4) CU 試驗第一階段加圍壓 σ_3 (有排水)CU 試驗第二階段加軸差 σ_d (不排水) $(D = AB = A)$ 若試體為正常壓密黏土，則 u_e 為正值，破壞包絡線如下圖若試體為嚴重過壓密黏土，則 u_e 為負值，破壞包絡線如下圖



討論

$\phi' < 30^\circ$ 稱為疏鬆砂； $30^\circ < \phi' < 36^\circ$ 稱為中等緊密； $36^\circ < \phi' < 42^\circ$ 稱為緊密； $42^\circ < \phi'$ 稱為非常緊密。

練 8 壓密提升 c_u 值

有一無限寬廣之飽和正常壓密黏土地盤， $c_u=50$ kPa， $e_0=1.0$ ，LL=50，PL=15， $c_v=1.0$ m²/year， $\gamma_{sat}=18$ kN/m³，深度為10 m，其底部為砂土地盤，今計畫於地表面快速施加一均佈預載重 (pre-loading)， $q=200$ kN/m²。

(一) 試求黏土地盤之平均不排水強度達原來2.2倍時所需時間(年)。此時地表之沉陷量為多少 (m)。

(二) 加載20年後， s_u 為多少？

已知 $\frac{\Delta c_u}{\Delta q} = 0.45 + 0.005PI$ ， $C_c = 0.009(LL - 10)$ <修改91年成大土研20%>



(一) s_u 的增量 $\Delta s_u = (2.2 - 1) s_u = 1.2 s_u = 60$ kPa

此時轉嫁到黏土的有效應力增量為 Δq

$$\frac{\Delta s_u}{\Delta q} = 0.45 + 0.005PI \quad \frac{60}{\Delta q} = 0.45 + 0.005(50 - 15) = 0.625$$

解出 $\Delta q = 96$ kPa

此時整層黏土平均壓密度 $U_{avg} = \frac{\Delta q}{q} = 96 / 200 = 0.48 < 60\%$

$$T = \frac{\pi}{4} U^2 = \frac{\pi}{4} (0.48)^2 = 0.181$$

$$TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$0.181(5)^2 = 1 \times t$$

解出 $t = 4.52$ year

$$C_c = 0.009(LL-10) = 0.009 (50-10) = 0.36$$

$$\text{黏土層中點 } \sigma'_0 = 5(18 - 9.81) = 40.95 \text{ kPa}$$

$$\text{全部壓密沉陷量 } \Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.36 \times 10}{1 + 1} \log \frac{40.95 + 200}{40.95} = 1.3854 \text{ m}$$

$$4.52 \text{ 年時，壓密沉陷量} = 1.3854 \times 0.48 = 0.665 \text{ m}$$

$$(二) TH_{dr}^2 = c_v t$$

$$T(5)^2 = 1 \times 20$$

$$\text{得 } T = 0.8$$

$$T = 1.781 - 0.933 \log(100-U) = 0.8 \quad \text{解出 } U_{avg} = 88.74\% > 60\% \quad \text{公式使用正確}$$

$$\text{故黏土層應力增量為 } \Delta q_{avg} = 0.8874 \times 200 = 177.5 \text{ kPa}$$

$$\Delta s_{u, avg} = (0.45 + 0.005PI) \Delta q_{avg} = 0.625 \times 177.5 = 111 \text{ kPa}$$

$$\text{故 } s_{u, avg} = 50 + 111 = 161 \text{ kPa}$$

討論

你認為對於第一小題，可否這樣算：

$$4.52 \text{ 年時，壓密沉陷量} = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} = \frac{0.36 \times 10}{1 + 1} \log \frac{40.95 + 96}{40.95} = 0.94 \text{ m}$$

為什麼？

Hint：首先，10 m 厚黏土，受地表載重前，不同深度處的不排水剪力強度不應該統一是 50 kPa，題目本身不符學理。其次，10 m 厚黏土，受地表載重後，經過一段時間，黏土層邊界排水快，不同深度處排掉的 u_e 不一樣，有效應力增量不一樣，邊界的 Δs_u 增量會比黏土中點多，

說不定靠地表黏土的 s_u 值反超過黏土中點的 s_u 值。最後，目前地表沉陷量=($t \rightarrow$ 無限大時之地表沉陷量)×(U_{avg}) ≠ $\frac{C_e H}{1+e_0} \log \frac{\sigma_0 + \text{目前黏土層中點有效應力增量}}{\sigma'_0}$ 。

4.52 年時，黏土層中點的壓密比 U_z 大約 20% (請查第六章超額孔隙水壓消散圖的等時曲線)。4.52 年時，整層黏土的平均壓密度 U_{avg} 為 48%，就是超額孔隙水壓消散圖已經消散的水壓面積，占全矩形的 48%。

練 9 無圍壓縮試驗

某黏土，其單壓強度為 15 tf/m^2 ，該黏土之有效剪力強度參數 $c' = 1 \text{ tf/m}^2$ ， $\phi' = 30^\circ$ 度，其孔隙壓力參數 $A = -0.2$ ，計算

- (1) 該黏土試體破壞時之 σ_1 、 σ_3 、 σ'_1 、 σ'_3 。
- (2) 該黏土試體在單壓強度試驗破壞點之孔隙壓力 u_f 。
- (3) 該黏土試體在單壓強度試驗前之孔隙壓力 u_r 。

<78 年高考二級>



(一) 試體破壞時之 $\sigma_1 = 15 \text{ tf/m}^2$ ， $\sigma_3 = 0 \text{ tf/m}^2$

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$\sigma'_3 + 15 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{30^\circ}{2}) + 2 \times 1 \tan(45^\circ + \frac{30^\circ}{2})$$

解出 $\sigma'_3 = 5.768 \text{ tf/m}^2$

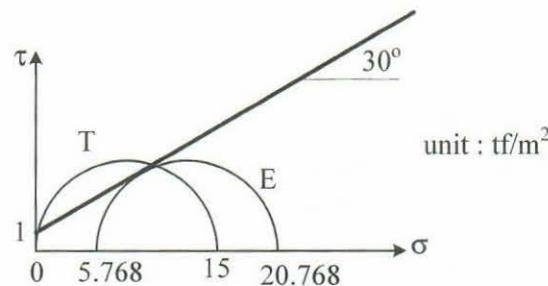
$$\sigma'_1 = 15 + 5.768 = 20.768 \text{ tf/m}^2$$

$$(二) u_f = \sigma_3 - \sigma'_3 = -5.768 \text{ tf/m}^2$$

$$(三) u_f = u_r + A(\Delta\sigma_d)$$

$$-5.768 = u_r + (-0.2)(15)$$

$$\text{解出 } u_r = -2.768 \text{ tf/m}^2$$



練 10 應力路徑

在一細砂質水平地層（土壤單位重 $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ， $\phi = 26$ 度）之地表上建築半徑 $R=40 \text{ m}$ 的油槽，設砂質土壤內的側向土壓力係數 σ_h / σ_v 均為 0.42。

(一) 當儲油使地表均佈荷重達到 $q=22 \text{ kN/m}^2$ 後，計算此刻油槽中央地表下深度 15 m 處土壤元素，在與地平面夾 70 度的傾斜面上之正向應力與剪應力大小？

(二) 若依照 Mohr-Coulomb 土壤剪力強度破壞準則，計算該 70 度斜面上抗剪破壞之安全係數？

(三) 試畫出加載前後，該深 15 m 處土壤元素受力之應力路徑？在此應力歷程中土壤元素的體積是趨於收縮或伸張？

<95 年高考二級 25 分>

[註]：油槽中央地表下方 z 深度處之垂直應力增加量

$$\Delta\sigma_z = q \left\{ 1 - \frac{1}{[(R/z)^2 + 1]^{3/2}} \right\}$$



(一)

(1) 新建油槽前， $\sigma'_v = 18 \times 15 = 270 \text{ kPa}$

$$\sigma'_h = 0.42\sigma'_v = 113.4 \text{ kPa}$$

$$p' = \frac{\sigma'_v + \sigma'_h}{2} = 191.7 \text{ kPa} \quad q' = \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2} = 78.3 \text{ kPa}$$

$$p' - q' \text{ 圖自然沉積之斜率 } m = \frac{1 - K_0}{1 + K_0} = \frac{1 - 0.42}{1 + 0.42} = 0.4085$$

(2) 新建油槽後，設側向土壓力係數仍為 0.42

$$\Delta\sigma_z = q \left\{ 1 - \frac{1}{\left[\left(\frac{R}{z} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}} \right\} = 22 \left\{ 1 - \frac{1}{\left[\left(\frac{40}{15} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}} \right\} = 21.0476 \text{ kPa}$$

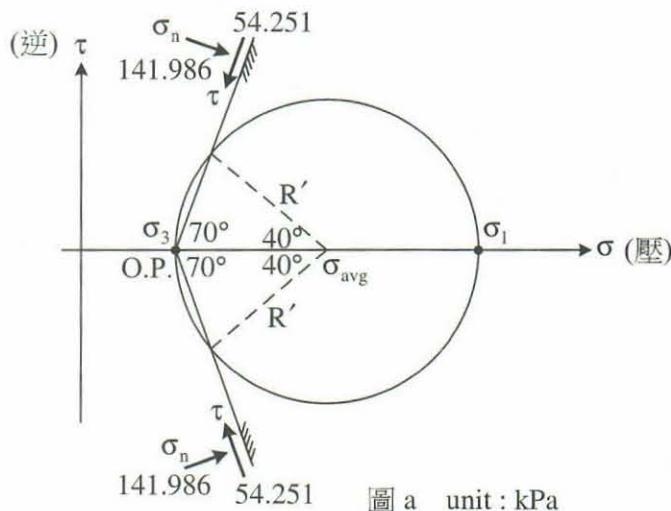
$$\sigma'_v = 270 + 21.0476 = 291.0476 \text{ kPa} = \sigma_1$$

$$\sigma'_h = \Delta\sigma_z \times 0.42 + 113.4 = 122.24 \text{ kPa} = \sigma_3$$

$$p' = \frac{\sigma'_v + \sigma'_h}{2} = 206.64 \text{ kPa}$$

$$q' = \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2} = 84.4 \text{ kPa}$$

(3) 以「壓逆為正」符號法則建構應力莫爾圓



$$\sigma_1 = \sigma'_v = 291.0476 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma'_h = 122.24 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 206.64 \text{ kPa}$$

$$\text{莫爾圓半徑 } R' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 84.4 \text{ kPa}$$

$$70^\circ \text{ 傾斜面上，正向應力 } \sigma_n = \sigma_{avg} - R' \cos 40^\circ$$

$$= 206.64 - 84.4 \cos 40^\circ = 141.986 \text{ kPa}$$

$$\text{此傾斜面之剪應力 } \tau = R' \sin 40^\circ = 54.251 \text{ kPa} = \text{外力}$$

示如圖 a，此為第(一)小題答案

(二)按 Mohr-Coulomb 剪力強度破壞準則

$$\text{傾斜面上抗剪強度 } \tau_{strength} = \sigma \tan \phi = 141.986 \tan 26^\circ = 69.251 \text{ kPa} = \text{強度}$$

$$\text{抗剪之 FS} = \frac{\tau_{strength}}{\tau} = \frac{69.251}{54.251} = \underline{\underline{1.28}}$$

(三) 加載前，圖 b 之 \overrightarrow{OA} 為應力路徑 (自然沉積)

加載後，圖 b 之 \overrightarrow{AB} 為應力路徑 (新建油槽)

應力歷程中，土壤元素乃趨於收縮。此乃有限面積加載，非無限大面積之加載。

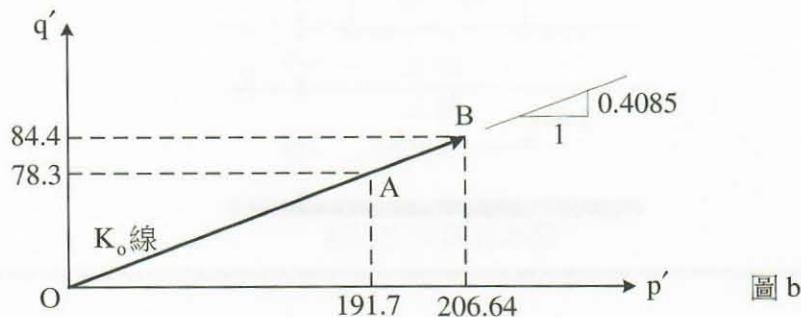


圖 b

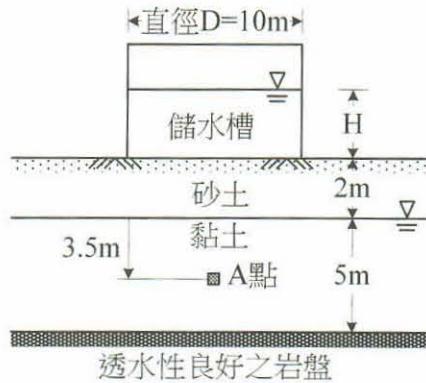
討論

1. 新建油槽後的土壓力係數，應該比 0.42 小。因為新建油槽並非廣大面積加載，土壤有側移空間，土壓力係數會降低。因題目講「土壓力係數均為 0.42」，故題解沿用 0.42 計算。
2. 自然沉積下， K_0 線的斜率 $m = \frac{q}{p} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)/2}{(\sigma_1 + \sigma_3)/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = \frac{1 - K_0}{1 + K_0}$ 。
3. K_0 線不是強度線， K_f 線才是強度線。 K_0 線一定在 K_f 線的「內側」，也就是 K_0 線繼續延伸，絕對撞不到 K_f 線，物理意義就是土壤不會因自然沉積而被壓壞。
4. K_0 線只是代表自然界廣大面積沉積對土體應力造成變化的歷程，是用「一條線」代表過程，你要懂得線的意義，就「看見」過程了。

練 11 水位上升造成圍壓與軸差應力

有一工廠為解決用水問題，擬興建一內徑 $D = 10\text{ m}$ 之儲水槽，如圖所示。由試驗得知砂土層之飽和度 $S = 50\%$ ，孔隙比 $e = 0.7$ ，比重 $G_s = 2.66$ ；黏土層之飽和單位重 $\gamma_{sat} = 19\text{ kN/m}^3$ 。已知蓄水的荷重增量 Δq 造成圖中 A 點垂直應力增量 $\Delta\sigma_v$ 和水平應力增量 $\Delta\sigma_h$ 分別為 $1.5\Delta\sigma_v =$

$3\Delta\sigma_h = \Delta q$ 。已知黏土層有效凝聚力 $c'=0$ ，有效摩擦角 $\phi'=30^\circ$ ，靜止土壓力係數 $K_0=0.5$ ，破壞時之孔隙水壓力參數 $A_f=0.7$ ，地下水位於地表下2 m。試問水槽中的水位 H 上升至多高時黏土中的A點產生破壞？(註：假設水槽自重不計，且水位快速上升) <97年結構技師25分>



$$(1) \text{ 砂土 } \gamma_m = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w = \frac{2.66 + 0.5 \times 0.7}{1+0.7} \times 9.81 = 17.37 \text{ kN/m}^3$$

覆土自重壓密後，A點 $\sigma'_v = 2 \times 17.37 + 3.5(19 - 9.81) = 66.905 \text{ kPa}$

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.5 \times 66.905 = 33.4525 \text{ kPa}$$

$$u_w = 3.5(9.81) = 34.335 \text{ kPa}$$

$$\sigma_v = 2(17.37) + 3.5(19) = 101.24 \text{ kPa}$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u_w = 33.4525 + 34.335 = 67.7875 \text{ kPa}$$

依題意， $1.5\Delta\sigma_v = 3\Delta\sigma_h = \Delta q$ ，得 $\Delta\sigma_v = 2\Delta\sigma_h$ ，軸向應力增量為水平應力增量的兩倍

可視為先對A點給予圍壓 $x \text{ kPa}$ ，再給予軸壓應力 $x \text{ kPa}$

水位上升快速即指加圍壓、加軸差應力過程均不排水，宛如進行SUU試驗

(2)列表如下 (unit : kPa)

載重階段	總應力	孔隙壓力	有效應力
覆土自重壓密	$\sigma_v = 101.24, \sigma_h = 67.7875$ $p=84.5, q=16.73$	34.335	$\sigma'_v = 66.905, \sigma'_h = 33.4525$ $p'=50.18, q'=16.73$
加圍壓 x	$\sigma_v = 101.24 + x$	$34.335 + x$	$\sigma'_v = 66.905$

	$\sigma_h = 67.7875 + x$		$\sigma'_h = 33.4525$
加軸差應力 x	$\sigma_v = 101.24 + x + x$ $\sigma_h = 67.7875 + x$ $p = 84.51 + 1.5x$ $q = 16.73 + 0.5x$	$34.335 + x +$ $0.7x$	$\sigma'_v = 66.905 + 0.3x$ $\sigma'_h = 33.4525 - 0.7x$ $p' = 50.18 - 0.2x$ $q' = 16.73 + 0.5x$

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$66.905 + 0.3x = (33.4525 - 0.7x) \tan^2(45^\circ + \frac{30^\circ}{2}) + 0$$

解出 $x = 13.939$ kPa

$$(3) \Delta q = 3\Delta\sigma_h = 3x = 41.816 \text{ kPa}$$

$$H = \Delta q / \gamma_w = 41.816 / 9.81 = 4.26 \text{ m}$$

$$\text{破壞時的水壓力} = u_{ss} + u_e = 34.335 + 1.7x = 58.035 \text{ kPa}$$

討論

1. 本題用應力路徑來算是故意找自己麻煩，自找麻煩的過程如下：

$$\tan \alpha = \sin \phi = \sin 30^\circ = 0.5$$

$$a = c \times \cos \phi = 0 \text{ kPa}$$

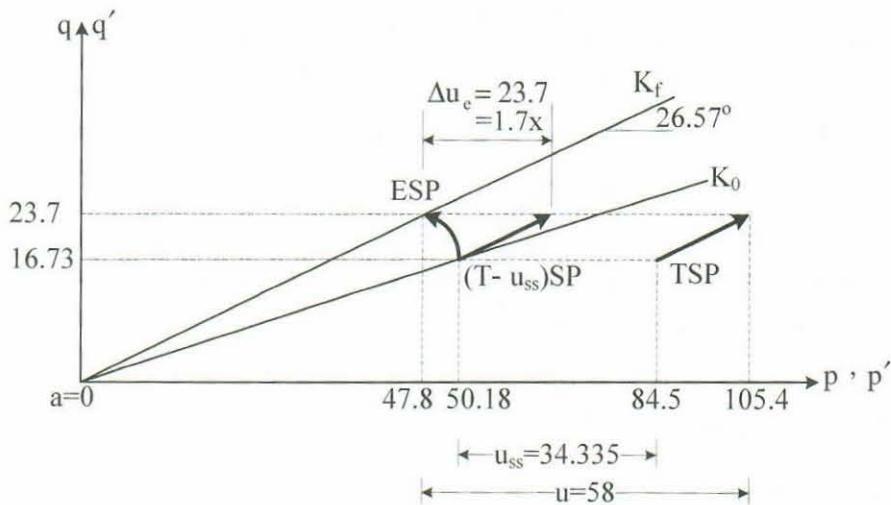
$$K_f \text{ 線方程式 } q' = a + p' \tan \alpha = 0 + 0.5 p'$$

$$\text{破壞時, } p' = \frac{\sigma'_v + \sigma'_h}{2} = 50.179 - 0.2x$$

$$q' = \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2} = 16.726 + 0.5x$$

將 p' 與 q' 代入 K_f 線方程式，解出 $x = 13.938$ kPa

其餘答案如前解，不贅述。應力路徑繪於下(unit : kPa)



2. K_f 線和 τ_f 線方程式是一體的兩面，你能用 τ_f 線解題，就能用 K_f 線解題，反之亦然。
3. 題目並未說砂土是毛細水區域，是也好不是也好，不影響答案。本題非廣大面積加載，學術上難解，但考試上就是這樣解了。考生不要分不清楚是在攻博士班還是在參加國考。

練 12 現實與理想

如下圖不排水剪力強度與深度之關係圖，其中圖(1)可能可以代表台北信義計畫區之土壤強度，圖(2)可能可以代表台北市基隆河廢河道之土壤強度，請回答下列問題：

- (一)圖(1)之 ab 段之強度為何偏高？
- (二)圖(1)之 bc 段之強度為何隨深度之增加而增加？
- (三)圖(2)之強度為何是常數？

<82 高考一級 15 分>

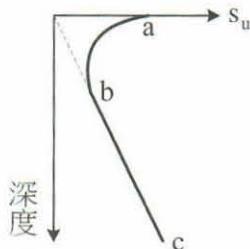
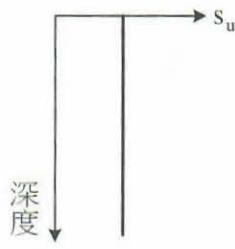


圖 (1)



圖(2)



(一)對於飽和黏土，在接近地表處，因為日曬風吹水分蒸發或因為抽取地下水，導致地表水位下降。當地表水位再次上升時，地表附近的黏土就會從正常壓密黏土變成過壓密黏土(近地表土壤過壓密比偏大)。過壓密黏土的 s_u 值較大，故 ab 段的不排水剪力強度較高。地表附近毛細作用也會使 s_u 值變大。

(二)信義計畫區地表一定深度以下的土壤，受長久地質歷史上土壤的自重作用，已經完成壓密，有效應力隨深度增加而增加。根據有效應力原理，不排水剪力強度 s_u 隨有效應力 σ'_0 增加而增加，而深度愈深，有效應力愈大，故 bc 段之不排水剪力強度隨深度正比增加，比例常數和塑性指數 PI 有關，例如經驗公式 $\frac{s_u}{\sigma'_0} = 0.11 + 0.0037PI$ 。

(三)基隆河廢河道的凝聚性土壤目前仍在壓密中，有效應力尚未隨深度而正比增加。

- ①若現場的黏土，是來自某次沖刷帶來的淤積物，則在淤積初期，壓密作用剛開始，有效應力尚未隨深度而正比增加，有效應力隨深度維持常數，則不排水剪力強度就隨深度維持常數。
- ②若現場的水壓力並非靜水壓分布，而是有拘限受壓含水層存在，造成存在滲流水壓或超額孔隙水壓，有效應力無法隨深度增加而上升，倘有效應力因此維持常數，則 s_u 值就維持常數，以上均是回歸到有效應力原理來解釋。

討論

讀者進考場，常常發現題目指定整個黏土層的不排水剪力強度 s_u 為常數，不隨深度改變，這是為了方便解題所寫的假設，但讀者考古題算多之後，就以為是「普世真理」，嗚呼哀哉。考題多算有益於上榜，但上榜後請記得轉回現實的世界。

練 13 CU 試驗

A、B兩個試體為完全相同之黏土，該黏土最大之有效預壓力為50 kPa，經飽和後分別進行壓密不排水三軸壓縮試驗。A試體之有效圍壓為100 kPa，試體破壞時，其軸差應力為175 kPa，孔隙水壓為72 kPa。B試體之有效圍壓為240 kPa，試求B試體：

- (1)破壞時於破壞面上之有效正應力與剪應力。

(2)破壞時之孔隙水壓力 u_f 。

(3)有效應力摩擦角。

(4)試體破壞面與最大主應力面之夾角。

<103年交大10分>



(一)A 試體破壞時 (unit : kPa)

σ_3	$\Delta\sigma_d$	σ_1	Δu_e	σ'_3	σ'_1
100	175	275	72	28	203

$$\text{按 } \sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 2c' \tan(45^\circ + \frac{\phi'}{2})$$

$$\Rightarrow 203 = 28 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) + 0$$

$$\text{解出 } \phi' = 49.25^\circ \quad \dots \dots \dots \text{Ans.(3)} \quad \text{B 試體同 A 試體}$$

$$a_f = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} = 69.63^\circ \quad \dots \dots \dots \text{Ans.(4)} \quad \text{B 試體同 A 試體}$$

$$A_f = \Delta u_e / \Delta \sigma_d = 72 / 175 = 0.4114$$

$$\text{按 } \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 2c_{cu} \tan(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2})$$

$$\Rightarrow 275 = 100 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 0 \quad \text{解出 } \phi_{cu} = 27.82^\circ$$

(二) B 試體破壞時

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) + 2c_{cu} \tan(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2}) = 240 \tan^2(45^\circ + \frac{27.82^\circ}{2}) + 0 = 660 \text{ kPa}$$

$$\Delta \sigma_d = 660 - 240 = 420 \text{ kPa}$$

$$\Delta u_e = A_f \Delta \sigma_d = 0.4114 \times 420 = 172.8 \text{ kPa} = u_f \quad \dots \dots \dots \text{Ans.(2)}$$

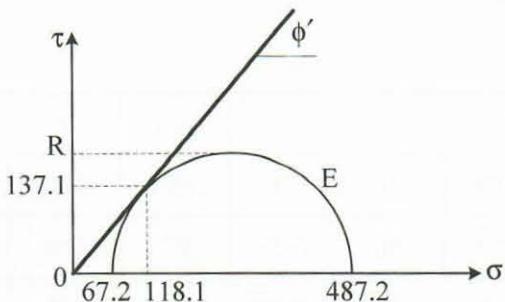
$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \Delta u_e = 660 - 172.8 = 487.2 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \Delta u_e = 240 - 172.8 = 67.2 \text{ kPa}$$

$$\text{破壞時莫爾圓半徑 } R = (487.2 - 67.2) / 2 = 210 \text{ kPa}$$

$$\text{破壞面上之剪應力 } \tau = R \cos \phi' = 137.1 \text{ kPa} \quad \dots \dots \dots \text{Ans.(1)}$$

$$\text{破壞面上之有效正應力 } \sigma_n = \tau / \tan \phi' = 118.1 \text{ kPa} \quad \dots \dots \dots \text{Ans.(1)}$$



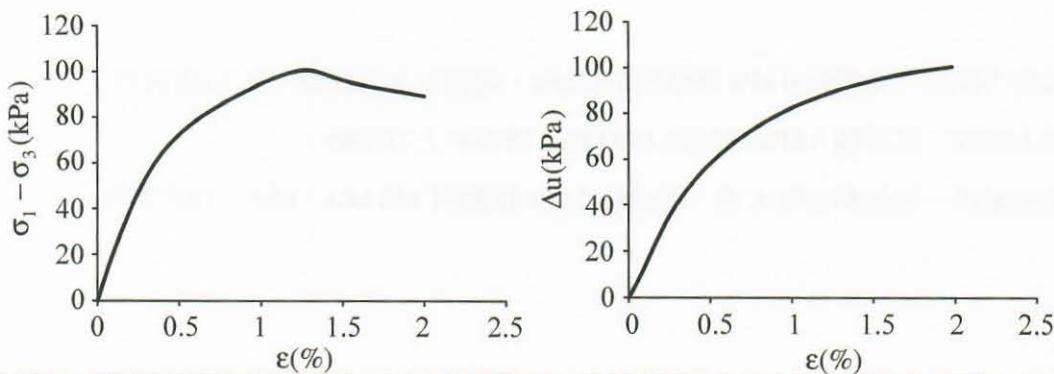
討論

兩試體，試驗中壓密應力均超過 50 kPa，故試體變成 NC。如果考生覺得這是難題，那國考大概不會上榜，研究所可以考到爛學校。這種題目，屬於中等，有專心準備考試應該都寫得出來。

練 14 CU 試驗應力路徑

下列為一砂土三軸CU試驗在軸向壓縮(Axial Compression)下的結果，初始圍壓為 $\sigma_3=150$ kPa，簡略畫出其總應力與有效應力路徑，請在應力路徑圖上標出破壞包絡線(K_f Line)與孔隙水壓的位置。圖上需清楚標出座標軸名稱與單位。圖中 σ_1 與 σ_3 為最大與最小主應力， ε 為軸向應變， Δu 為孔隙水壓。

<103年台科大10分>



砂土 $c = 0 \text{ kPa}$ ，故 $a = 0 \text{ kPa}$

下表應力單位均為 kPa

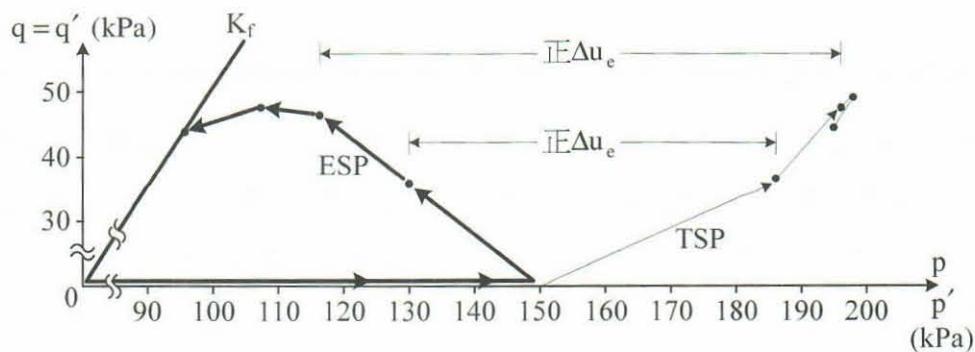
ϵ	σ_3	$\Delta\sigma_d$	σ_1	Δu	A	σ'_3	σ'_1	p	$q=q'$	p'
0%	150	0	150	0	0	150	150	150	0	150
0.5%	150	72	222	56	0.78	94	166	186	36	130
1.0%	150	92	242	80	0.87	70	162	196	46	116
1.5%	150	95	245	90	0.95	60	155	197.5	47.5	107.5
2.0%	150	88	238	100	1.14	50	138	194	44	94

TSP 與 ESP 之間的距離即是孔隙水壓力，TSP 在右，ESP 在左，故 u_e 是正數，得知為鬆砂

$$A_f = \Delta u_f / \Delta \sigma_d = 100 / 88 = 1.136$$

破壞時， $\tan \alpha = 44 / 94 = 0.4681$ 故 K_f Line 角度 $\alpha = 25.08^\circ$

$$\tan \alpha = \sin \phi \quad \text{故 } \phi = 27.91^\circ$$



有效應力路徑：從橫軸 0 kPa 移動到 150 kPa ，轉朝左上方移動，撞 K_f 線破壞。

總應力路徑：從橫軸 0 kPa 移動到 150 kPa ，轉朝右上方移動。

在壓密階段，無超額孔隙水壓，從橫軸 0 kPa 移動到 150 kPa ，ESP、TSP 重合。

討論

一個完整的試體，不管砂土或黏土，未必能夠代表整個土層的力學行為，因為你的試體未必包含弱面。簡單講，好班有壞學生，壞班有好學生，你隨機挑一位同學出來，能代表那一班的行為嗎？故取樣有「間隔取樣」與「連續取樣」兩種。前者是跳點取樣，後者是一孔取樣

到底不漏失。

試驗中，A 值會改變，不是常數。一定要自己動手畫圖，沒有拿乾淨紙張畫下來，就是自己騙自己。落榜的朋友，有一半以上是「只動腦不動手」，動手實踐才是真理。

筆者在課堂上問學員「如果你只能活 44 年，你願意從零歲活到 44 歲，還是願意從零歲活到 22 歲，且允許你活兩次，第二次可修正第一次的『不滿意』？」

有人願意活兩次零歲到 22 歲，因為第一次可能高中職考不好或大學考不好，有第二次修正的機會，就會表現得比較好，考上第一志願可在親友間昂首闊步、走路有風。或者，第一次沒勇氣跟他(她)告白，第二次一定要告白，不可以再沉默遺憾。

另有人願意活一次零歲到 44 歲，因為高中或大學考不好，並不等於人生失敗掉了，22 歲以後還有很多要學習，例如職場、婚姻、養兒育女、買屋換屋、累積財富…等等。

此問題無標準答案，就好像給你四個小時坐火車，你可以坐兩趟高雄到台中，也可以選擇坐一趟高雄到台北。前者無法看到苗栗的風光，後者無法重新品味嘉南平原的稻海；前者可以舊地重遊，同一件事情作得更好，後者可以迎接嶄新挑戰，學習完全不同的知識與經驗；前者舊地重遊，可能告白，愛了才發現是錯愛，後者迎接嶄新挑戰，可能傷得更深更慘連累親人。

這問題的人生意義，超過你現在能想到的深度，你明年比今年想得更深入。

你問「歐陽，那你呢？」哈！我是務實派，既然超過 23 歲， 22 歲已經讀不回，我選擇每天寫日記因應人生多回合賽局，隨時修正以前犯過的錯誤，並且和子女重溫、編織建造 22 歲前的夢！

練 15 不排水剪力強度=半徑

某一飽和黏土試體進行三軸壓密不排水試驗(CU-Test)，試驗結果獲知其有效凝聚力 $c' = 0$ ，有效內摩擦角 $\phi' = 30^\circ$ 。今以同樣試體進行三軸不壓密不排水試驗(UU-Test)，試體放入圍壓室測得孔隙水壓 $u_0 = -50 \text{ kPa}$ ，然後關閉排水閥，施加圍壓 100 kPa ，施予軸差應力至試體破壞。已知破壞時，Skempton 之孔隙水壓力參數 $A_f = 0.6$ 。試求試體之不排水剪力強度。

<104年身心障礙三等25分>



SUU test

步驟	總應力 =	孔隙水壓	+ 有效應力
放入圍壓室之初	$\sigma_v = \sigma_h = 0$	-50	$\sigma'_v = \sigma'_h = 50$
關閥門，加圍壓 100kPa	$\sigma_v = \sigma_h = 100$	50	$\sigma'_v = \sigma'_h = 50$
加軸差應力 x	$\sigma_v = 100 + x$ $\sigma_h = 100$	$u_e = 50 + 0.6x$	$\sigma'_v = 50 + 0.4x$ $\sigma'_h = 50 - 0.6x$

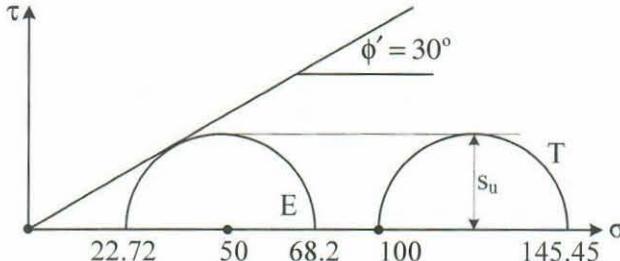
$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right)$$

$$50 + 0.4x = (50 - 0.6x)(3) + 0$$

$$\text{解出 } x = 45.45 \text{ kPa}$$

$$s_u = x / 2 = 22.73 \text{ kPa}$$

破壞時莫爾圓如圖



討論

本題 SUU 試驗，試體取出地表時， $\sigma'_v = \sigma'_h = 50 \text{ kPa}$ ，有效應力莫爾圓收斂成一點，總應力莫爾圓也收斂成一點， $\sigma_v = \sigma_h = 0 \text{ kPa}$ 。

關閥門，加 100 kPa 圍壓， $\sigma_v = \sigma_h = 100 \text{ kPa}$ ，總應力莫爾圓向右跑 100 個單位，依舊收斂成一點，有效應力莫爾則不動。

本 SUU 試驗，若改成關閥門，加 180 kPa 圍壓，再加軸差應力而破壞，破壞時不排水剪力強度會變嗎？為什麼？ (不會變)

本題資料可否算出 ϕ_{cu} ？可以。

$$\sigma_1 = 100 + x - 50 = 95.45 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = 100 - 50 = 50 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right)$$

$$95.45 = 50 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 0$$

解出 $\phi_{cu} = 18.21^\circ$

記得要扣掉掉 SUU 試驗「關閥門加圍壓產生的水壓力 50kPa」，因為 CU 試驗的圍壓並不產生水壓力。

$$A_f = 0.5 \left(\frac{1}{\sin \phi_{cu}} - \frac{1}{\sin \phi'} \right) = 0.6$$

練 16 求 A 與 B

某試體做三軸試驗，在可完全壓密條件下，施加圍壓 200 kPa，然後在不排水條件下，再將圍壓增加到 350 kPa，並量到孔隙水壓力為 144 kPa。而後在不排水條件下，再開始對試體施加軸差應力，直到試體破壞為止，並同時得到下列結果：

軸向應變(%)	0	2	4	6	8	10
軸差應力(kPa)	0	201	252	275	282	283
孔隙水壓力(kPa)	144	244	240	222	212	200

(一) 試求孔隙水壓參數 B 為何？(10分)

(二) 試求出不同應變值下所對應之孔隙水壓參數 A 各為何？並繪出孔隙水壓參數 A(縱座標)

對軸向應變(橫座標)之關係圖。(10分)

(三) 並說明破壞時孔隙水壓參數 A 為何？(5分)

<106高考三級>

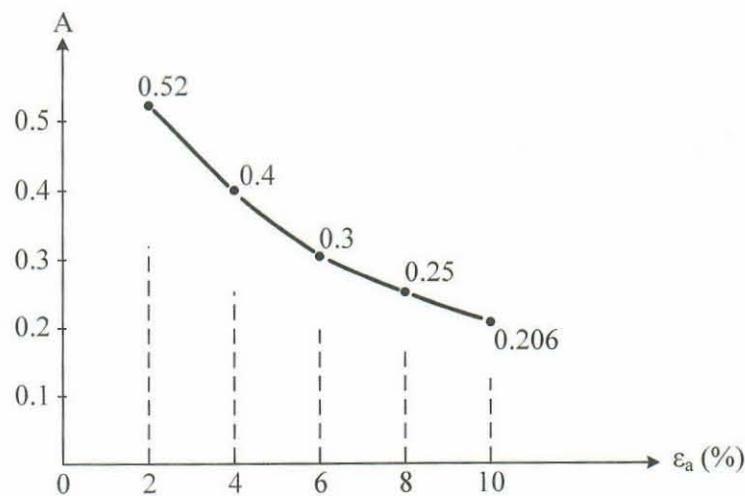


(一) $B = 144 / (350 - 200) = 0.96$

(二) 下表單位 : kPa

	總應力	水壓力 u_e	有效應力	D (=Δu_e/Δσ_d)	A (=D/B)
壓密	$\sigma_1=200=\sigma_3$	0	$\sigma'_1=200=\sigma'_3$	---	---
關閥門， 加圍壓	$\sigma_1=350=\sigma_3$	144	$\sigma'_1=206=\sigma'_3$	---	---
軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\Delta\sigma_d=201$ $(\Delta u_e = 244 - 144 = 100)$	244	---	$100/201=0.498$	0.52
軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\Delta\sigma_d=252$ $(\Delta u_e = 240 - 144 = 96)$	240	---	$96/252=0.381$	0.4
軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\Delta\sigma_d=275$ $(\Delta u_e = 222 - 144 = 78)$	222	---	$78/275=0.284$	0.3
軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\Delta\sigma_d=282$ $(\Delta u_e = 212 - 144 = 68)$	212	---	$68/282=0.241$	0.25
軸差應力 $\Delta\sigma_d$	$\Delta\sigma_d=283$ $(\Delta u_e = 200 - 144 = 56)$	200	---	$56/283=0.198$	0.206

(有效應力不必全部求出來)

(三) 參考表格的右下角欄位 , $A_f = 0.206$

討論

此乃 CU 試驗兼測量孔隙水壓，歐陽老師上課強調 CU 試驗乃最常考的三軸試驗，上課還特別強調 $B \neq 1$ 的計算題應該怎麼算，果然命中！有買《解說土壤力學》，有來上課考上真幸福。

練 17 求 CU 試驗 so easy 題

An isotropically consolidated undrained (CU) triaxial test was conducted on a saturated clay specimen. During the consolidation stage, a confining pressure of 400 kPa was applied. During the shearing stage, the axial load was increased under undrained condition. At failure, the deviator stress was 320 kPa while the excess water pressure was 240 kPa.

- Draw the total stress and effective stress Mohr circles under failure condition. Clearly label all the axes and the Mohr circles (e.g. major and minor principle stresses).
- Determine the effective stress friction angle. Draw the Mohr-Coulomb envelop on your plot from (i).
- Determine the shear stress and orientation (direction) of the failure plane.
- For the CU test, if the saturated clay specimen was subjected to a confining pressure of 560 kPa (instead of 400 kPa), what would be the deviator stress and excess water pressure at failure?

<106台大大地>

**(1) CU 試驗 (unit: kPa)**

步驟	總應力 =	孔隙水壓	+ 有效應力
壓密 400 kPa	$\sigma_v = \sigma_h = 400$	0	$\sigma'_v = \sigma'_h = 400$
加軸差應力 320 kPa	$\sigma_v = 720$ $\sigma_h = 400$	$u_e = 240$	$\sigma'_v = 480$ $\sigma'_h = 160$

$$\text{依 } \sigma'_i = \sigma'_3 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\phi'}{2}\right) \quad (\text{設為 NC-clay, } c' = 0 \text{ kPa})$$

$$480 = 160 \tan^2(45^\circ + 0.5\phi') + 0$$

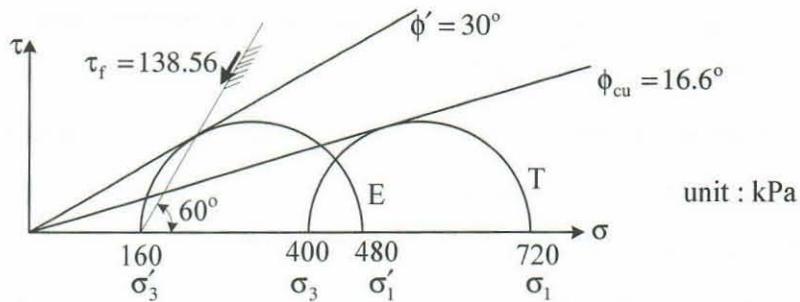
$$\text{解出 } \phi' = 30^\circ \dots \text{Ans(ii)}$$

$$\text{依 } \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right)$$

$$720 = 400 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 0$$

$$\text{解出 } \phi_{cu} = 16.6^\circ$$

總應力、有效應力莫爾圓與破壞包絡線如圖



$$(2) \text{ 莫爾圓半徑 } R = (480 - 160) / 2 = 160 \text{ kPa}$$

$$\text{破壞面 } \tau_f = R \cos \phi' = 160 \cos 30^\circ = 138.56 \text{ kPa} \dots \text{Ans(iii)}$$

$$\text{破壞面與水平線夾角 } \alpha_f = 45^\circ + (\phi'/2) = 60^\circ \quad \text{方向如圖}$$

$$A_f = \Delta u_e / \Delta \sigma_d = 240 / (720 - 400) = 0.75$$

$$(3) \sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) = 560 \tan^2(45^\circ + 0.5 \times 16.6^\circ) + 0 = 1008 \text{ kPa}$$

$$\Delta \sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 = 1008 - 560 = 448 \text{ kPa} \dots \text{Ans(iv)}$$

$$\Delta u_e = A_f \Delta \sigma_d = 0.75 \times 448 = 336 \text{ kPa} \dots \text{Ans(iv)}$$

練 18 不飽和試體 CU 試驗

採用未飽和黏土進行兩次壓密不排水之三軸壓縮試驗(CU試驗)，假設未飽和試體之孔隙水壓 u 等於量測孔隙水壓 u_w 與飽和度 S 之乘積($u=S \times u_w$)。當黏土試體破壞時，可量得下列試驗結果：(每小題5分，共15分)

參數	圍壓 σ_3 (kPa)	軸壓 σ_1 (kPa)	飽和度S(%)	量測孔隙水壓 u_w (kPa)
試驗一	20	190	60	-100
試驗二	60	450	50	-300

(一)計算試體破壞時之總應力圍壓 σ_3 與軸壓 σ_1 以及有效應力圍壓 σ'_3 與軸壓 σ'_1 。

(二)繪製試體破壞時之莫爾圓(Mohr circle)(採用 $\tau \sim \sigma'$ 座標)及破壞包絡線。

(三)求取此黏土之有效應力凝聚力 c' 及有效摩擦角 ϕ' 。

<107水利技師>



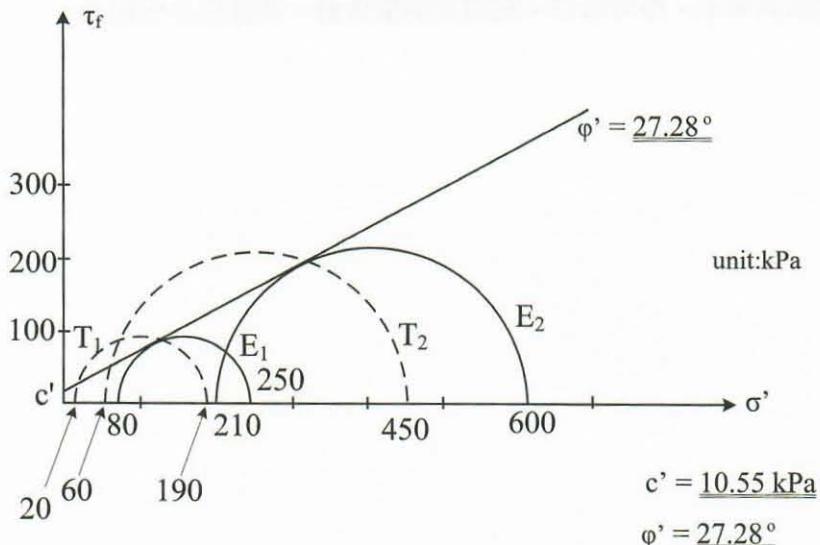
(一)第一個試體，破壞時孔隙水壓 $u_e = Su_w = 0.6(-100) = -60kPa}$

第一個試體，破壞時 $\underline{\sigma_3 = 20\text{ kPa}}$ ， $\underline{\sigma_1 = 190\text{ kPa}}$ ， $\underline{\sigma'_3 = 80\text{ kPa}}$ ， $\underline{\sigma'_1 = 250\text{ kPa}}$

第二個試體，破壞時孔隙水壓 $u_e = Su_w = 0.5(-300) = -150\text{ kPa}$

第二個試體，破壞時 $\underline{\sigma_3 = 60\text{ kPa}}$ ， $\underline{\sigma_1 = 450\text{ kPa}}$ ， $\underline{\sigma'_3 = 210\text{ kPa}}$ ， $\underline{\sigma'_1 = 600\text{ kPa}}$

(二)



(三)第一個試體

第二個試體

②-①

$$得 350 = 130K_p$$

$$\text{即 } K_p = 2.6923 = \tan^2(45^\circ + 0.5\phi')$$

$$\text{解出 } \phi' = 27.28^\circ$$

K_p 再代回① 解出 $c' = 10.55 \text{ kPa}$

討論

1. 本題有創新，土壤不飽和，題目規定按照飽和度來算超額孔隙水壓，題目給公式，照著算就得分。
 2. 超額孔隙水壓是負數，本題是OC。考場不必畫總應力莫爾圓，歐陽只是練習畫給您看。
 3. 其實水利技師比較常考滲透性考題，這是歐陽大量計算考古題之後的心得。
 4. 聽得淮歐陽話的考生，帶方格尺、圓規又帶量角器，恭喜您金榜題名。



【跑步與你和我】

讀者可以上網查查各種上榜經驗談，不少金榜提名者建議後輩考生要有運動習慣，你反而很難找到那種「一直讀、一直讀，請不要運動」的上榜經驗談。運動不一定要選跑步，筆者遇過清晨 5：30 規律游泳的考生，照樣金榜題名，想到冬天下水的勇氣，晚輩值得筆者學習的地方真不少。筆者個人經驗止於跑步，希望以下文章對您有些許幫助。

第一，裝備費用低廉，一雙布鞋就可以跑。不少運動型態所需的裝備令無經濟收入的考生卻步，但考生可能已經有雙布鞋或球鞋了。

第二，不必屈就別人時間，自己喊開始。打球有時候要約球友，有時候要屈就場地開放時間，有時候要會員(要繳\$)才能用，唯獨操場隨時敞開，想跑就跑。這次你若約人打球，別人下次就可能來約你，萬一你正好想讀書，他說「上次我想讀書，都犧牲自己陪你打球了，這次你怎麼不奉陪？」豈不搞得自己進退維谷。

第三，質與量自己調整。你想要跑 3000 m 還是 5000 m，悉聽尊便。你想要跑 20 分鐘還是 30 分鐘，也悉聽尊便。想要跑得比前天更快還是慢，依舊悉聽尊便。但你若約人打球，時間長短和運動量，不容易自己完全控制，可能影響接下來的讀書計畫。

第四，提高體力、抗壓力、免疫力，備考期不要再拜訪醫生、躺在床上當病號。上課容易專心，算考古題思考比較清楚。就算不為考試，為自己的人生健康，要活就要動，運動可增加腦內啡，讓人感到快樂、積極、正向、心情好轉。

第五，可以一邊跑，一邊思考各科遇到的力學問題。這一點筆者不敢講人人辦得到，但筆者不少力學問題是在跑步中靈光一閃，想到解決的關鍵。轉換心境，想法就有機會變，就有可能解決難題，因為在「舊」想法、「舊」心境裏，已經不可能解決那問題了。

第六，可以一邊跑，一邊嘗試理解整個考試。你可能聽過 NBA 的球星批評說「某某球員還是菜鳥，因為他無法『理解』整個比賽。」簡單講就是不能掌握致勝關鍵，老是在雞毛蒜皮上作虛功。以國考為例，計算型科目比背誦型科目更重要，要花更多時間研讀，且計算型科目之間，應該儘量「均勻強」，不要有明顯弱科，這叫致勝關鍵。筆者一邊跑，一邊想「我的計算型科目有沒有比較弱的？趕快把它補起來。」

筆者執教之後，遇到某生在考前半年說「我已經把背誦型科目背完了。」糟，這就叫不能理解考試，屆時重背是必然的(前面背的時間都浪費掉了)，何況背誦型很難有標準答案(你若知道你背的不是命題者心中的優選想法，你願意那麼早背嗎？)，不像計算型比較有標準答案，計算型比較接近一分耕耘一分收穫。

第七，釋放壓力。備考期若完全沒有壓力，那就叫在「玩耍」。有壓力是必然的，筆者選擇以跑步釋放壓力。在操場邊跑邊喊，像當兵跑步答數，沒什麼了不起，把不爽、鬱悶喊出來可以舒壓。透過暢快流汗，洗熱水澡，好好睡一覺，第二天又是一尾活龍。筆者曾經在大學操場邊跑邊喊「我是榜首、我是榜首、…」，除了引來四周美女掩口側目訕笑，也沒啥大不了呀！你有沒有勇氣講「我想要……(eg：金榜題名)」？如果都沒有勇氣講了，怎麼會有勇氣要？甚至是需要搶的場合？天下是打下來的，不是人家送給你的，職場上更明顯。

第八，提升外在形象。男人，有點古銅色的肌膚比白得像鬼好吧！

第九，未來經過職場折磨，你會知道健康才是第一，千金難買早知道。

有一人死後，到天堂責問上帝「我那麼努力唸書，不花時間運動，祢怎麼沒讓我上榜？」上帝說「你講都沒講呀，誰知道？搞不好你心裏只是想要『陪考』哇！」另一人死後，也一樣責問上帝「我每天向祢禱告，祢怎麼沒有幫我考上？」上帝回答「有哇，我派遣你朋友告訴你『歐陽的書寫得很好，要買』是你自己不理會呀！」

有時候下著小雨，筆者反而會著裝跑步，為什麼呢？畏苦怕難是許多人的通病，可是要在錄取率不高的考試中上榜，只有不畏苦怕難的人才能上榜。須通過鍛鍊，才有資格說服自己「我的確不畏苦怕難」，否則只是自走型嘴砲。通過鍛鍊後，你就相信算考古題只是一塊小蛋糕。拜託，上網 google 看看林義傑、陳彥博，在南極、北極、沙漠中跑步百餘公里，你就知道在台灣的雨中跑步，是浪漫是安全，是偶像劇必備老梗，是 piece of cake。

運動不是萬能，沒有運動是萬萬不能。

如果你跑出興趣，可上網搜尋「跑者廣場」，一年下來各地大大小小路跑比賽都有，一定有適合你的比賽類型。你進入職場後，可藉由四處比賽，帶家人玩山玩水，培養聯絡家人感情，生活豐富精采可期。



附錄 A 土壤力學公式彙整

第二章 土壤基本性質與結構

* 孔隙比 $e = \frac{V_v}{V_s}$ 。含水量 $w = \frac{W_w}{W_s}$ 。飽和度 $S = \frac{V_w}{V_v}$ 。

* $\gamma_m = \gamma_d(1+w) = \frac{G_s + Se}{1+e} \gamma_w$ 。

* $\gamma_s = \gamma_d(1+e)$ 。

* $\gamma_{sat} = \frac{G_s + e}{1+e} \gamma_w$ 。

* $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w = \frac{G_s - 1}{1+e} \gamma_w$ 。

* $Se = wG_s$ 。

* 孔隙率 $n = \frac{e}{1+e}$ 。

* 相對密度 $D_r = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} \neq \frac{e - e_{min}}{e_{max} - e_{min}}$ 。

第三章 土壤分類

* A line , PI = 0.73 (LL-20) 。

* U line , PI = 0.9 (LL-8) 。

* 塑性指數(Plasticity Index)PI = LL - PL = 塑性狀態的含水量範圍。PI 愈大，黏土的不排水剪力強度 s_u 愈大， ϕ 略降低。

* 正常壓密黏土 $\frac{s_u}{\sigma'_0} = 0.11 + 0.0037PI$, s_u 是不排水剪力強度。

* 液性指數(Liquidity Index)IL = LI = $\frac{w_N - PL}{PI}$ 。

$$* \text{ 均勻係數 } C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} \text{ 。}$$

$$* \text{ 曲率係數 } C_d = \frac{D_{30}^2}{D_{10}D_{60}} \text{ 。}$$

$$* \text{ 活性 } A_c \equiv \frac{\text{PI}(\%)}{< 2\mu\text{m} \text{ 之黏土含量(重量比\%)}} \text{ 。}$$

第四章 土體中應力

- * 飽和土壤，總應力 $\sigma = \text{水壓力 } u_w + \text{有效應力 } \sigma'$ 。
- * 水壓力 $u_w = \text{靜態水壓力 } u_{ss} + \text{滲流水壓 } u_s + \text{超額孔隙水壓 } u_e$ 。
- * 壓力水頭 $h_{pressure} = \frac{u_w}{\gamma_w} = \frac{u_{ss} + u_s + u_e}{\gamma_w}$ 。
- * 每邊長度 B 之柔性正方形基礎，受均佈載重，基礎中心下方深度 $2B$ 處，應力增量接近 $0.1q$ 。
- * 直徑 B 之圓形基礎，受均佈載重，基礎中心下方深度 $2B$ 處，應力增量接近 $0.1q$ 。
- * 基地調查範圍至少應涵蓋建築物基地之面積，及其四周可能影響本基地工程安全性之範圍；若以鄰產保護為目的而作之調查，其調查範圍應及於施工影響所及之範圍。
- * 基地鑽探每 600 m^2 鑽一孔。基地面積超過 6000 m^2 者，得視基地地形、地層複雜性及結構設計需求調整調查密度。
- * Newmark 應力影響圖， $\Delta\sigma_z = 0.005 \times q \times M = \frac{\text{所佔格數}}{\text{總格數}} \times q$ 。
- * 局部面積加載之應力增量 $\overline{\Delta q} = \frac{\Delta q \times B \times L}{(B+z)(L+z)}$ 。(2:1 法)
- * 靜止土壓力係數 $K_0 \equiv \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v}$ 。
- * 應力轉換公式 $\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$ 。

* 應力轉換公式 $\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$ 。

*

基礎型態	鑽探調查深度
淺基礎	$D_f + 4B$ 或達可確認之承載層
樁基礎	$D_f + 4B$ 或達可確認之承載層
沉箱基礎	$D_f + 3B$ 或達可確認之承載層
浮筏式基礎	$D_f + H_{(0.1\sigma_v)}$ 或達低壓縮性之堅實地層
深開挖工程	(1.5~2.5) D_f 或達可確認之承載層

※ D_f 是基礎埋置深度， B 是基礎短邊寬

第五章 滲透性

* 外視流速 $v = k i$ 。

* 單位時間流量 $q = k i A = Q / t$ 。

* 滲流速度 $v_s = v / n$ 。

* Hazen 對疏鬆砂提出 $k = C_1 D_{10}^2$

其中 $k : \text{cm/sec}$ ， $C_1 : \text{取 } 1.0 \sim 1.5$ ， $D_{10} : \text{mm}$

* 垂直向滲透係數 $k = c_v m_v \gamma_w$ 。

* 定水頭試驗 $k = \frac{QL}{thA}$ 適合砂土

* 變水頭試驗 $k = \frac{aL}{A(t_2 - t_1)} \ln \frac{h_1}{h_2}$ 適合黏土

* 現場抽水試驗 無側限含水層 $k = \frac{q}{\pi} \frac{\ln(r_2/r_1)}{(h_2^2 - h_1^2)}$

有側限含水層 $k = \frac{q}{2\pi D} \frac{\ln(r_2/r_1)}{(h_2 - h_1)}$

* 總水頭 = 位置水頭 + 壓力水頭

$$h_{\text{total}} = h_{\text{elevation}} + h_{\text{pressure}} = h_{\text{elevation}} + \frac{u_w}{\gamma_w} = h_{\text{elevation}} + \frac{u_{ss} + u_s + u_e}{\gamma_w}.$$

* 水力坡降(Hydraulic Gradient)i, $i = \frac{\Delta h_{\text{total}}}{L}$ = 總水頭差 / 流線長度。

$$* \text{ 臨界水力坡降 } i_{\text{cr}} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} = \frac{\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w}{\gamma_w} = \frac{G_s - 1}{1 + e}.$$

$$* \text{ 滲流平行層面 } k_x = \frac{\sum (H_i k_i)}{\sum H_i} = \frac{H_1}{\sum H_i} k_1 + \frac{H_2}{\sum H_i} k_2 + \dots + \frac{H_n}{\sum H_i} k_n$$

$$* \text{ 滲流垂直層面 } \frac{\sum H_i}{k_z} = \frac{H_1}{k_1} + \frac{H_2}{k_2} + \dots + \frac{H_n}{k_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H_i}{k_i} \right)$$

* 當滲流垂直於層面，總水頭損失比例 $(\Delta h_t)_1 : (\Delta h_t)_2 = (\frac{L}{Ak})_1 : (\frac{L}{Ak})_2$ 。

* 等向土壤，流線網題型之單位時間滲漏量 $q = k \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t$ 。

* 非等向土壤，流線網題型之單位時間滲漏量 $q = \sqrt{k_x k_z} \frac{N_f}{N_q} \Delta h_t$ 。

* 砂湧分析， $FS = \frac{\gamma'(D_1 + 2D_2)}{\gamma_w \Delta H_w} \geq 2.0$ 。

* Terzaghi 砂湧分析， $FS = \frac{\gamma'D}{u_{s,\text{avg}}}$ 。

* 上舉分析， $FS = \frac{\sum \gamma_i h_i}{\gamma_w H_w} \geq 1.2$ 。

第六章 壓縮性

* 土壤的總沉陷量 = 即時沉陷量 + 壓密沉陷量 + 二次壓縮量。

* $\frac{\Delta H}{H_0} = \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{e_0 - e'}{1 + e_0} =$ 土壤鉛垂方向的應變 ϵ_v 。

* 正常壓密黏土 $C_c = 0.009$ (LL-10)。

$$* \text{ 正常壓密黏土 } \Delta H_c = \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0}.$$

$$* \text{ 過壓密比 } OCR = \frac{\sigma'_c}{\sigma'_v} = \frac{\text{曾經受過的最大有效應力}}{\text{分層加總算得之有效應力}}.$$

$$* \text{ 壓密沉陷量 } \Delta H_c = m_v H_0 (\Delta \sigma') .$$

$$* \text{ 過壓密黏土 } \Delta H_c = \frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_0} \quad \text{for } \sigma'_0 + \Delta \sigma' \leq \sigma'_c$$

$$* \text{ 過壓密黏土 } \Delta H_c = \frac{C_s H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_c}{\sigma'_0} + \frac{C_c H}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'_0 + \Delta \sigma'}{\sigma'_c}$$

$$\text{for } \sigma'_0 + \Delta \sigma' > \sigma'_c$$

$$* \text{ 計算二次壓縮量, } \Delta H_s = \frac{C_u H_0}{1 + e_0} \log \frac{t_2}{t_1} .$$

$$* \text{ 黏土整層平均壓密度 } U_{avg} = \frac{\delta_{now}}{\Delta H} = \frac{\text{啤酒肚以外的面積}}{\text{矩形超額孔隙水壓總面積}} =$$

$$= \frac{\text{已經消散的 } u_e \text{ 面積}}{\text{矩形超額孔隙水壓總面積}} = 1 - \frac{\text{啤酒肚裡面的面積}}{\text{矩形超額孔隙水壓總面積}} = 1 - \frac{\text{圖示}}{\text{圖示}}$$

$$* \text{ 某點壓密比 } U_z = \frac{u_{e0} - u}{u_{e0}} = \frac{\text{全部超額孔隙水壓} - \text{目前尚留的超額孔隙水壓}}{\text{全部超額孔隙水壓}}$$

$$= \frac{\text{目前有效應力增量}}{\text{全部超額孔隙水壓}} = \frac{\Delta \sigma'_z}{u_{e0}} .$$

$$* T_v H_{dr}^2 = c_v t .$$

$$* T_v = \frac{\pi}{4} U_{avg}^2 \quad \text{for } U_{avg} \leq 60\%$$

$$* T_v = 1.781 - 0.933 \log(100 - U_{avg}) \quad \text{for } 60\% \leq U_{avg} \leq 100\%$$

$$* T_{50} = 0.197 , \quad T_{90} = 0.848 , \quad T_{60} = 0.283$$

第七章 剪力強度

$$* \quad \tau = c + \sigma \tan \phi' \circ$$

* 三軸試驗破壞時，有效應力莫爾圓的主應力與排水強度參數之關係

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) + 2c' \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) \circ$$

CU 試驗總應力莫爾圓的主應力與 CU 試驗強度參數之關係 (其他試驗不適用)

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) + 2c_{cu} \tan \left(45^\circ + \frac{\phi_{cu}}{2} \right) \circ$$

* 不排水剪力強度 $s_u =$ 破壞時莫爾圓半徑。

* 超額孔隙水壓 $\Delta u_e = B \Delta \sigma_3 + AB (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) \circ$

* 無圍壓縮強度 $q_u =$ 破壞時莫爾圓直徑 $= 2s_u = 2c_u \circ$

* 正常壓密黏土 $K_0 = 0.95 - \sin \phi' \circ$

* 過壓密黏土 $K_0 = (0.95 - \sin \phi') \sqrt{OCR} \circ$

* 砂土 $K_0 = 1 - \sin \phi' \circ$

* 黏土敏感度 $S_t = \frac{\text{未擾動前的單壓強度 } q_u}{\text{擾動後的單壓強度 } q_u} = \frac{\text{未擾動前的 } s_u}{\text{擾動後的 } s_u} \circ$

* 流黏土 $S_t = 8 \sim 16 \circ$

* 應力路徑 $p = (\sigma_v + \sigma_h) / 2, q = (\sigma_v - \sigma_h) / 2 \circ$

* 應力路徑 $p' = (\sigma'_v + \sigma'_h) / 2, q' = (\sigma'_v - \sigma'_h) / 2 = q \circ$

* $\tan \alpha = \sin \phi' \quad , \quad a = c \times \cos \phi' \circ$



附錄 B 參考文獻

1. Roy Whitlow "Basic Soil Mechanics" 2nd edition, 1990
2. Arvind V. Shroff and Dhananjay L. Shah "Soil Mechanics and Geotechnical Engineering" 1st edition, 2003
3. Robert D. Holtz and William D. Kovacs and Thomas C. Sheahan "An Introduction to Geotechnical Engineering" 2th edition, 2011
4. Muni Budhu "Soil Mechanics and Foundations" 3rd edition, 2011
5. Donald P. Coduto "Geotechnical Engineering" principles and practices, 1999
6. David F. McCarthy "Essentials of Soil Mechanics and Foundations" basic geotechnics 6th edition, 2002
7. Braja M. Das "Advanced Soil Mechanics" 2nd edition, 1997
8. Braja M. Das "Principles of Foundation Engineering" 4th edition, 1999
9. Braja M. Das "Principles of Geotechnical Engineering" 4th edition, 1998
10. Braja M. Das and G. V. Ramana "Principles of Soil Dynamics" 2nd edition, 2011
11. Robert F. Craig "Craig's Soil Mechanics" 7th edition, 2004
12. Karl Terzaghi and Ralph B. Peck and Gholamreza Mesri "Soil Mechanics in Engineering Practice" 3rd edition, 1996
13. Cheng Liu and Jack B. Evett "Soils and Foundations" 6th edition, 2004
14. Amir Wadi Al-Khafaji and Orlando B. Andersland "Geotechnical Engineering and Soil Testing" international edition, 1992
15. Joseph E. Bowles "Foundation Analysis and Design" 5th edition, 1996
16. T. William Lambe and Robert V. Whitman "Soil Mechanics" , 1969
17. Karl Terzaghi and Ralph B. Peck "Soil Mechanics in Engineering Practice" , 1948
18. Robert F. Legget and Allen W. Hatheway "Geology and Engineering" 3rd edition, 1988
19. Jacob Feld and Kenneth L. Carper "Construction Failure" 2nd edition, 1997
20. C.R. Scott "An introduction to Soil Mechanics and Foundations" 3rd edition, 1979
21. K. H. Head "Manual of soil laboratory testing" Vol.2 , 1982

22. K. H. Head "Manual of soil laboratory testing" Vol.3 , 1986
23. Shamsher Prakash and Hari D. Sharma "Pile Foundations in Engineering Practice" , 1990
24. G. A. Leonards "Foundations Engineering" , 1962
25. John N. Cernica "Geotechnical Engineering Soil Mechanics" , 1995
26. I. S. Dunn and L. R. Anderson and F. W. Kiefer "Fundamentals of Geotechnical Analysis" ,
1980
27. George F. Sowers " Introductory Soil Mechanics and Foundations : Geotechnical
Engineering " , 4th edition, 1979
28. 營建雜誌社《建築物基礎構造設計規範》民國 90 年 10 月
29. 施國欽《大地工程學(一)土壤力學篇》，文笙書局
30. 施國欽《大地工程學(二)基礎工程篇》，文笙書局
31. 施國欽《大地工程學(三)工程地質篇》，文笙書局
32. 施國欽《研究所土壤力學題解》，文笙書局
33. 施國欽《研究所基礎工程題解》，文笙書局
34. 施國欽《高考技師土壤力學題解》，文笙書局
35. 施國欽《高考技師基礎工程題解》，文笙書局
36. 《鑽探圖的判讀要領》石正義翻譯，詹氏書局

【參考文獻之 $44 \neq 22 \times 2$ 】

每個人的一生，多少都會有一些深藏在內心中的遺憾、後悔，以及對某些時刻的選擇、決定，抱持著疑問。疑問發酵之後，常見的悔詞有「如果我當初選擇了另外一個，會不會人生從此不同？」、「如果我能夠先知道會這樣，當初就不會選擇這條路。」…等等。

年輕人身處在人生的前階段，對於過去的困惑，只會隨著歲月的累積越添越多。

而，如果人生能重來一遍，你希望回到幾歲？筆者在課堂上問台下學員「如果能夠讓你的人生，在某個時間點重來一次，你會希望從幾歲開始，來改變人生中那些『曾經』而卻沒有抓住的剎那？」

有人說他希望回到 12 歲，因為他永遠忘不了當年令他怦然心動的初戀，以及對於自己始終未說出口的那份遺憾。

有人說他希望回到 22 歲，因為從前沒有感受到學業的重要，使他往後的人生慢了許多人一步而備受煎熬。

有人說他希望回到 33 歲，因為當初的投資失誤，使他面臨巨大的負債，往後十多年的時間，都在為了那一刻的抉擇疲於奔命。

最後有人說，他希望回到 44 歲，因為他此生最遺憾的是，沒有陪伴他的孩子長大，沒有參與到他的家庭。年老時才發現人生中最幸福的事是和家人一起走過每件事，年老時才發現原來幸福，並不是只有金錢，金錢再多，也買不回與至親相處的時光。

其實這並沒有標準的答案。

或許給了你一次重新來過的機會，在告白後的相處，發現是份錯愛，同時抹滅了心中甜美的回憶，兩人互相傾軋說出「幹 s(複數加 s)，不如不要告白，至少甜美的女神(男神)形象可以維持一輩子。」

或許認真的拚了一回學業或重新選了自己嚮往的科系，但在往後的人生卻發現原本該是一份友誼、互助的關係，變色只得到敬畏與距離。

或許避開了那次錯誤的投資，轉而買到一大堆飆股、房地產，面臨而來的卻是百歲人老後，子女爭奪財產、對簿公堂的慘況。

又或許陪伴了子女與家庭，擠壓賺錢的時間，卻被埋怨家裡長期的窮困，親情是人世間最容易消耗與浪費的東西(血緣關係零成本，易浪費)。沒錢，證明貧賤夫妻百事哀。

人性啊！請記得「塞翁失馬，焉知非福」，「塞翁得馬，焉知非禍」。

人生是變數中還有變數，讓你重來或許你能考進第一志願，但第一志願的讀書壓力說不定讓你不快樂，寧願回到原來的第二志願讀書。不只是個人，公司、政府機關也是在局部盲目中匍匐前進，摸著石頭過河，民國 87 年考選部審慎決定後說高普考分二試舉行，多好又多好，讚得不得了，辦幾年之後，終於證明自己打臉，寧願又回到高普考一試定生死。

人生是要比比不完，不要常常覺得「換個選擇會更好」，因為我們不知道「十字路口右轉之後遇到的分歧與困難，比左轉多還少。」尤其是人容易只看到面向的優點，缺點卻要執行下去才看得到。重新選擇切入點，並不代表直達你要的終點，重新選切入點，說不定兩年後要通過撒哈拉沙漠，而這是兩年前料不到的。

舉例：你看現在的教改，向左改、向右改，都有人說錯，絕對吵不完啦！玉皇大帝來都沒辦法。

看到這裡，你迷惑了，「究竟我要怎麼選才對？」基於你所信仰的價值觀，大力選下去，為它定計畫及做出成果，動手動腳做就是了，並且承擔。猶疑不決、優柔寡斷的個性、想破腦袋只會得到一大堆悔詞。

人生總有一些抉擇無法完美，無法涵蓋所想、所要的一切。但無法完美恐怕才是常態，無法完美才讓人有背景、有條件珍惜接近完美的時刻。人生並不存在絕對正確的路，但只要是為了你所愛的價值觀而努力，其實你已經給了自己一條最好的路、給了自己最好的歷練，填充成自己最美滿的人生。

至於為什麼標題「 $44 \neq 22 \times 2$ 」，這裡是講年紀、歲月、經歷、視野與社會背景、當代主流觀點對你行事的影響，這些東西隨著時間變，前 22 年所憑恃的價值觀與做法，拿來活後面 22 年未必適用。人生是非線性、非彈性的，重疊原理不成立。

作者簡介

作者出生於府城，足跡遍及成功國小、後甲國中與台南二中。於南二中求學時，因挑戰威權之志趣與教官辦學理念相距甚遠，生活輔導組的重大年度目標就是「輔導筆者」，遂為教官等一干人著想，自力救濟轉學考上台中一中與台北師大附中，後選擇至師大附中(619班)。

淡大時期，即被教授批為「眼高手低」。大四那年，系辦助教不敢收作者之選課小表，因該表橫跨理、工、文、商四大領域，超越助教智慧極限。此表因深奧之故，助教不敢收，後轉給系主任理解，系主任四平八穩地對作者說「你以後要出國，不要找我寫推薦信。」

四年之末，因在校成績與報考研究所之門檻相去甚遠，故憤而入伍。經歷工兵M4T6浮橋、框桁橋、M2臂力橋、野營地、操舟、拂曉攻擊、…等不斷徹夜教特訓洗禮，革除陋習，以男子漢的姿態退伍。

退伍後原本欲開「小黃」，在台南後火車站占有一席之地，卻誤打誤撞去補習班聽課，從此與國考結下不解之緣。自 1995 年起迄今，已有 24 年操盤(操作國考、研究所)經驗，在別人下洗我上沖、別人空頭我多頭中，考上三次公務高考榜首，一次技師榜首，期間並自台大土研所結構組畢業。24 年來，有患得患失、高分落榜、險勝與大勝，心得燦爛，著作二十餘本，也因此對「如何考上國考、研究所」這個問題特別有興趣和見解。希望能以本身知識的力量及實踐的經驗對您提供更多貢獻和服務。若您有需要，可利用後附之電郵信箱、facebook 與作者聯繫。

學歷： 國立台灣大學土木工程研究所結構組畢業

私立淡江大學土木系畢業

考試： 2004 年高考二級榜首

2001 年結構高考橋樑結構組榜首

2000 年結構高考房屋結構組榜首

1998 年大地技師榜首 1997 年結構技師及格

1997 年基層特考及格 1996 年土木技師及格

1996 年土木高、普考及格

經歷： 補習班專任力學老師 核能研究所工程師

營造廠監工，主任技師 工程顧問公司工程師

國立臺灣大學土木系助教

著 作：	材料力學論衡	解說結構學
	解說建築結構	解說結構矩陣
	薦任升等考精解	結構動力精解
	解說工程力學	目擊者大地工程精解
	解說工程地質	解說土壤力學
	解說鋼筋混凝土	解說基礎工程
	鋼筋混凝土學了沒	材料力學了沒
	土壤力學了沒	
	機械研究所材料力學精解	
	土木研究所材料力學精解	
	國立研究所結構學精解左冊《82~92年版》	
	國立研究所結構學精解左冊《93~96年版》	
	國立研究所結構學精解右冊《83~92年版》	
	高考试題檢察事務官工力、材力、結構題解	
	《91年版》、《92~94年版》	

歐陽仰洋的肥死不可 <https://www.facebook.com/hinge.roller>

歐陽仰洋的肥死不可力學社團 <https://www.facebook.com/groups/hinge.roller/>

解疑、交流信箱 E-mail : hinge_roller@yahoo.com.tw

讀者可以用筆徑 0.5mm 以上的黑色中性筆，以徒手方式將問題畫成圖，附自己見解，用手機拍照成*.jpg 檔，夾帶寄過來討論。(宜附電話，我打字慢，\^O^/)

解說土壤力學/歐陽 編著 --- 修訂二版三刷

--臺北市：文笙，民 105 . 8

面； 公分

ISBN 978-986-297-132-1 (平裝)

1. 土壤力學

441.12

105013441

解 說 土 壤 力 學

版權作者：歐陽⁽⁶⁷⁾

hinge_roller@yahoo.com.tw

封 面：桃園市龍潭區石門水庫(2014.11.11 歐陽攝，慶祝光棍節)

封 底：從南投縣仁愛鄉武界俯瞰埔里鎮(林昌良攝)

攝 影 師：林昌良 君

發 行 人：陳昇一

出 版 者：文笙書局股份有限公司

地 址：(24887)新北市新莊區五權一路 1 號 6 樓之 3

電 話：(02)8990-1360, 8990-1361

傳 真：(02)8990-1362

網 址：<http://www.winsoon.com.tw>

電郵信箱：winsoon@winsoon.com.tw

登 記 證：行政院新聞局版台業字第 1263 號

幾 多 錢：新台幣 700 元整

中華民國 108 年 1 月修訂二版三刷

版權所有

翻印者冥冥中必落榜



各・大・班・系・推・薦

本書特色

- ★ 專為考試編寫，砍掉原文書中不考的部分。
- ★ 書內例題、習題最新，扣緊近年考試脈動。
- ★ 用詞力求淺顯易懂，考生在家自修即可瞭解。
- ★ 圖片、照片豐富，協助理解土壤力學原理。
- ★ 從生活場景取譬，自然地獲得高分。
- ★ 喜好思考者的典藏叢書。
- ★ 書後附公式整理，助您迅速上榜。

ISBN 978-986-297-132-1



00700

9 789862 971321