

# АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

## Введение, сортировки, бинарный поиск.

1. Расположите эти функции в порядке возрастания асимптотической скорости роста:  $n, n \log n, n/\log n, n^{32}, \sqrt{n}, n^n, n!, \sqrt{n!}, \log(n!), 2^n, 2^{\log_3 n}, 2^{n \log_2 n}, 2^{\log_2^2 n}, 3^n$ .
- 2.\* Докажите, что если  $f_1(n) = O(g_1(n))$  и  $f_2(n) = O(g_2(n))$ , то  $f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$ .
- 3.\* Докажите, что  $f(n) + g(n) = O(\max(f(n), g(n)))$ .
4. Даны два отсортированных по неубыванию массива  $a$  и  $b$ . Определите, есть ли в них одинаковые числа. Время  $O(n)$ .
5. Даны два отсортированных по неубыванию массива  $a$  и  $b$ . Найдите такие  $i$  и  $j$ , что разница  $|a_i - b_j|$  минимальна. Время  $O(n)$ .
6. Даны два отсортированных по неубыванию массива  $a$  и  $b$  и число  $S$ . Найдите такие  $i$  и  $j$ , что сумма  $a_i + b_j = S$ . Время  $O(n)$ .
7. Даны два отсортированных по неубыванию массива  $a$  и  $b$ . Найдите число пар  $(i, j)$ , таких, что  $a_i = b_j$ . Время  $O(n)$ .
8. Даны два отсортированных по неубыванию массива  $a$  и  $b$ . Найдите число пар  $(i, j)$ , таких, что  $a_i > b_j$ . Время  $O(n)$ .
9. Дан массив  $a$ . Пара  $(i, j)$ , такая, что  $i < j$  и  $a_i > a_j$  называется инверсией. Пусть в массиве длины  $n$  ровно  $k$  инверсий. Докажите, что сортировка вставками работает за  $O(n + k)$ .
10. Дан массив  $a$ . Найдите число инверсий в нем. Время  $O(n \log n)$ .
11. Дан массив положительных чисел, отвечать на запросы: «Какое максимальное число элементов из начала массива можно взять, чтобы их сумма была не больше  $X$ ?».
12. Задан массив, полученный приписыванием одного отсортированного по убыванию массива в конец другому отсортированному по возрастанию. Все элементы массива различны. Требуется за  $O(\log n)$  найти в нем заданный элемент.
13. В игре есть  $n$  типов ресурсов, для постройки одного юнита требуется  $a_i$  единиц ресурса  $i$  для всех  $i$  от 1 до  $n$ . У Пети есть  $b_i$  единиц ресурса  $i$  и еще  $d$  единиц золота. Одну единицу золота можно обменять на  $d_i$  единиц ресурса  $i$ . Сколько юнитов может построить Петя?
14. В выборах участвуют  $n$  кандидатов. По последним опросам, за кандидата  $i$  готовы проголосовать  $a_i$  избирателей. Вы хотите, чтобы ваш кандидат победил (набрал больше голосов, чем любой другой кандидат). За  $s$  рублей можно изменить мнение одного избирателя. Сколько надо потратить денег на такую избирательную компанию?
15. Есть отсортированный массив из  $n$  чисел. Нужно выбрать из них  $k$  так, чтобы минимальная разница между соседними выбранными числами была как можно больше.
16. Есть массив из  $n$  чисел. Нужно выбрать в нем  $k$  пар чисел (каждое число может быть только в одной паре), так, чтобы максимальная разность чисел в паре была как можно меньше.