

# 使用有限元方法计算变压器多物理场的基本流程

写在最前：本文旨在简要介绍如何利用有限元方法计算变压器的电磁、热、振动、噪声等场量，具体涉及计算所需的几何模型搭建、材料属性与模型输入、控制方程&边界条件、由 PDE 到代数方程组的基本变换过程、有限元基本思想。因本人的知识有限，相关内容主要针对电磁-热场展开，关于振动、噪声的计算，则根据本人使用商业软件的经验进行简要介绍。此外，如内容存在不严谨甚至错误之处，请及时指出并修改。

## 1. 变压器的电磁-热场计算

### 1.1 流程图

电磁-热场的计算流程如图 1-1 所示。

电磁-热场计算不宜采用全耦合策略，原因在于电磁场变化的时间尺度一般远小于温度场变化的时间尺度。因此，下图所示计算流程采用弱耦合策略，即先求解电磁场，并由此得频域稳态解和周期平均损耗，进一步将其带入到温度场计算中作为热源求解。

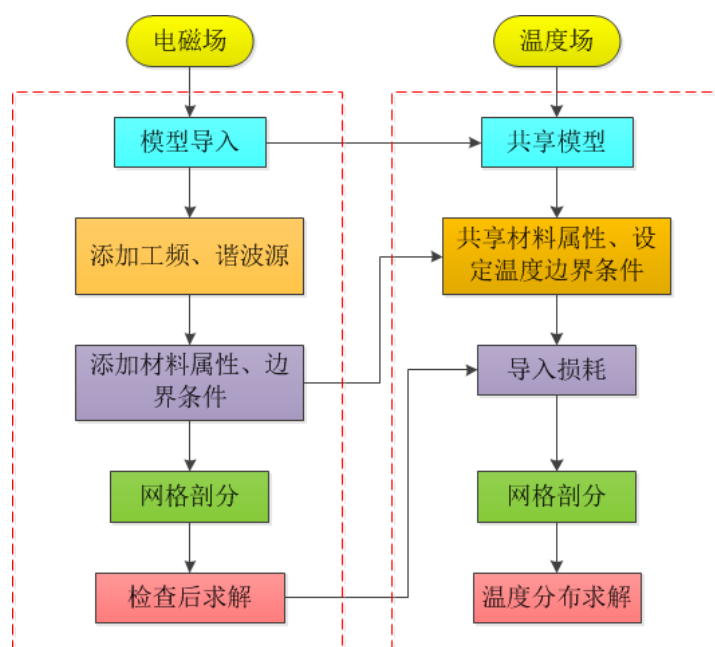


图 1-1 电磁-温度耦合仿真流程图

### 1.2 几何模型

变压器内部的主要结构件包括铁芯、绕组、油箱、肺叶板、铁芯夹件、油箱磁屏蔽等，此外还包括各式连接件、加强筋等。图 1-2 为某型号变压器铁芯和绕组部分的结构图，基于实物尺寸，绘制其三维几何模型，如图 1-3 所示。注意到该几何模型是经过简化后得到的，实际计算过程，考虑到计算机算力、物理实体和待求场量本身具有的对称性，可以适当简化模型。

注意：除了图 1-3 涉及的变压器结构件外，电磁-热场计算仍需包含油箱。原因在于变压器油箱上存在漏磁损耗，其影响一般不可忽略。



图 1-2 变压器铁芯、绕组实物

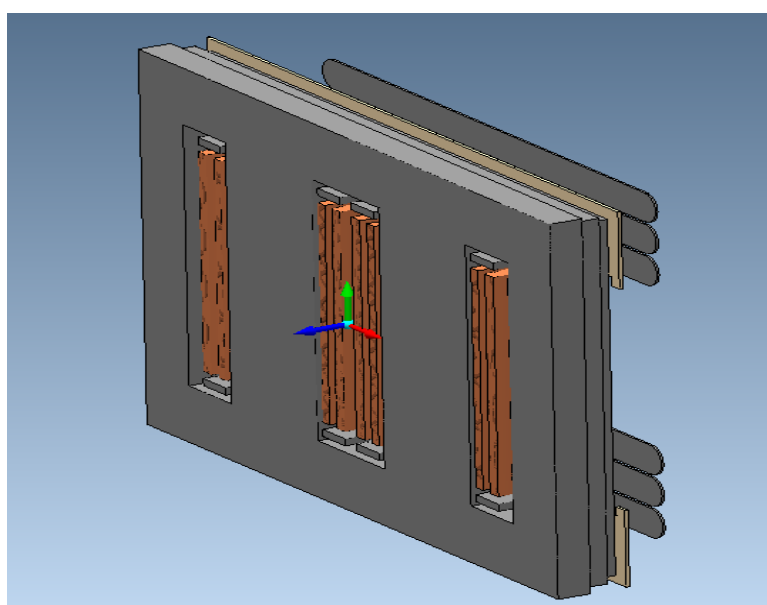


图 1-3 仿真模型—1/2 变压器铁芯、绕组

1.3 材料属性和模型输入

表 1-1 计算电磁-热场所需的材料属性

结构件名称	所需属性
铁芯	磁滞回线、电导率、介电常数、导热系数、恒压热容
绕组	磁导率、电导率、导热系数、恒压热容、匝数
磁屏蔽、肺叶板	
夹件	磁导率、电导率、介电常数、导热系数、恒压热容
油箱	
..... (待补充)	..... (待补充)

注：热传递通常包括热传导、热对流、热辐射；表中只包含热传导项，另外两项由热传导等效。简化后的模型具有计算友好的特点（易收敛），但不准确。如有较多准确的外部测量数据，该简化模型的计算准确性可能得到较大改善。

模型输入方面，磁场的有限元计算需要有一个对应的等效电路，电路中的驱动电源可以是一、二次侧的电流源或电压源。某侧绕组中流过的交变电流产生交链磁场，交链磁场又在另一侧绕组上产生感应电动势。

1.4 控制方程&边界条件

电磁场的控制方程为麦克斯韦方程组，其微分形式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad (1)$$

除了上述四个方程外，还需要有媒质或材料的本构关系：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2)$$

针对一个简化的模型，其磁场计算中涉及的边界条件如表 1-2 所示。电场计算的边界条件一般有：电势边界（接地等）、表面电荷积聚、悬浮电位等。

固体中的热场控制方程为热扩散方程：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T = Q \quad (3)$$

其中， $k$  是导热系数； $Q$  是给定的热源密度（电磁场计算得到的损耗功率密度）； $\rho$  是质量密度； $c$  是恒压热容。

流体中的热场控制方程在方程（3）的基础上增加一项对流项：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T + \rho c \mathbf{u} \cdot \nabla T = Q \quad (4)$$

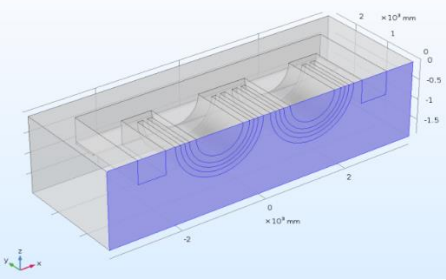
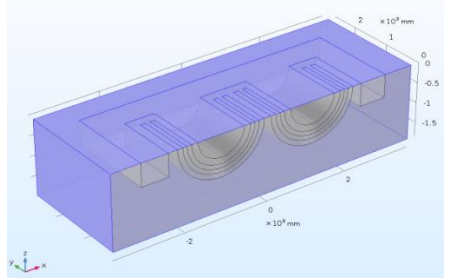
其中， $\mathbf{u}$  是流体速度场分布，需要通过求解 Navier-Stokes 方程获得。

变压器各换热面上的边界条件一般有：指定温度（第一类边界条件）、指定热通量（第二类边界条件）。

$$\begin{cases} -(k\nabla T) \cdot \mathbf{n} = q + q_c \\ q_c = h_c (T - T_e) \end{cases} \quad (5)$$

其中， $q$  用来描述流出边界的热通量； $q_c$  代表对流产生的热通量； $h_c$  为等效对流换热系数， $T_e$  为环境温度。注意，此处边界条件并未实际计算流场，而是通过设置等效对流换热系数实现边界处的热量交换。等效对流换热系数可以通过经验公式（基于努塞尔数、格拉晓夫数、普朗特数三者的定量关系）计算得到。

表 1-2 磁场边界条件

<p>边界面</p>		
<p>边界条件</p>	<p>完美磁导体边界 <math>\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0</math></p>	<p>磁绝缘边界 <math>\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0</math></p>

注：可以看出，此表列出的边界条件均只在理想情况下成立，若涉及更复杂更真实的变压器模型，应谨慎考虑使用以上边界。

### 1.5 由 PDE 到代数方程组的基本变换过程

将 PDE 转换为代数方程组的数值方法有很多，例如利用变分原理中的欧拉方程将原始偏微分方程的边值问题转换为泛函极值问题，或者利用加权余量法。这两种方法的第一步都是将 PDE 转换为积分形式。根据本人的经验，大型的有限元商业软件大多使用加权余量法，原因在于通用性强，易操作。因此，下面只简要介绍加权余量法的一般操作步骤。

现考虑一个广义的 PDE 形式：

$$Lu + g = 0 \quad (6)$$

其中， $L$  为微分算子； $u$  为待求场量； $g$  为已知函数，如热场计算中的热源项。

当无法求出  $u$  的解析解时，可以考虑用  $u_a$  来近似表示  $u$ ，其形式为：

$$\begin{aligned} u_a &= \varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2 + \cdots + \varphi_n a_n \\ \begin{cases} u_a = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n], \quad \mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^T \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

其中， $a_1, a_2, \dots, a_n$  为待求系数； $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  为试函数，它们是事先定义好的一组方程，形式任意，但可以根据经验选择更合适的试函数形式。另外， $u_a$  的选取必须满足边界条件。

现将近似解  $u_a$  带入原方程可以得到误差  $e$ ，并将其命名为余量。

$$Lu_a + g = L(\boldsymbol{\varphi} \mathbf{a}) + g = L(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{a} + g = e \quad (8)$$

加权余量法的核心思想为：虽然在感兴趣的区域对余量进行积分很可能不为 0，但我们可以想方设法设置一个权重函数  $v$ ，让其与余量的乘积在感兴趣区域的积分为 0，并得到原问题对应的积分形式：

$$\int_a^b v(Lu_a + g)dx = \int_a^b vedx = 0 \quad (9)$$

其中，权重函数  $v$  也可以写成与近似解类似的形式：

$$\begin{aligned} v &= V_1 c_1 + V_2 c_2 + \cdots + V_n c_n \\ \begin{cases} v = \mathbf{V}\mathbf{c} \\ \mathbf{V} = [V_1 \quad V_2 \quad \cdots \quad V_n], \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]^T \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

其中， $c_1, c_2, \dots, c_n$  为已知系数； $V_1, V_2, \dots, V_n$  为一组事先确定好的方程。

注意到  $\mathbf{V}\mathbf{c} = (\mathbf{V}\mathbf{c})^T = \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T$ ，同时权重函数  $v$  可以是任意的，因此方程 (9) 被改写为：

$$\mathbf{c}^T \int_a^b \mathbf{V}^T edx = \int_a^b \mathbf{V}^T edx = 0 \quad (11)$$

联立方程 (8) 和方程 (11) 得到代数方程组：

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{V}^T L(\boldsymbol{\varphi}) d\mathbf{x} \mathbf{a} &= - \int_a^b \mathbf{V}^T g d\mathbf{x} \\ \mathbf{K}\mathbf{a} &= \mathbf{f} \end{aligned} \quad (12)$$

其中， $\mathbf{K}$  被称为刚度矩阵，维度为  $n \times n$ ； $\mathbf{f}$  被称为源项/体积力项，维度为  $n \times 1$ 。

显然，若能通过方程 (12) 求出  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，那么我们就可以找到原 PDE 方程的近似解。根据权重函数的选择思路不同，加权余量法又可分为：配点法、区域配置法、最小二乘法、伽辽金近似法。

## 1.6 有限元基本思想

在面对一个复杂问题时（可能是强非线性问题或者几何结构复杂），往往很难找到合适的权重函数和试函数。有限元方法就是为了解决这个问题，即构建代数方程组时不再直接针对整个求解域，而是先将求解域划分为有限个子区域（又称为元素），并根据 1.5 小节中的流程求出每一个元素对应的代数方程组，而后将所有方程进行组装求解。下面主要结合伽辽金近似法（商业软件常用该方法求解）介绍有限元的基本思想和流程。

1. 区域剖分/网格剖分：根据物理问题、几何结构选择合适的剖分策略（经验积累）。
2. 将 PDE 转换为积分形式：作法与 1.5 小节所描述的内容类似，但针对的是每一个元素。  
另外，在得到积分式 (9) 后再对该式进行分部积分以降低方程的阶次，并将分部积分前的方程称为强形式 (strong form)，将分部积分后的方程称为弱形式 (weak form)。弱形式的表达中自然包含了边界条件的贡献，同时也降低了求解难度。
3. 权重函数及试函数的选取：结合伽辽金近似法，每一个元素对应的近似解可以写成：

$$u_a^e = \mathbf{N}^e \mathbf{a}^e \quad (13)$$

其中， $\mathbf{N}^e$  被称为某个元素的形函数 (shape function)，也即方程 (7) 提到的试函数。对于一个小元素，其内部场量的变化通常不会太剧烈，因此形函数的选取也将变得简单，通常选取线性、二次函数就可能达到不错的效果。同时形函数的个数与元素包含节点个数是一致的，形函数的选取需要满足“对应节点处的函数值为 1，其它节点处的函数值为 0”。形函数确定之后，根据伽辽金近似的核心思想——把形函数直接作为权重函数中的方程组，即：

$$v^e = \mathbf{N}^e \mathbf{c}^e \quad (14)$$

4. 方程组装和求解：根据方程 (12) 对每一个元素进行求解并组装，组装后的刚度矩阵  $\mathbf{K}$  是对称的，具有计算友好的特点。另外，与方程 (11) 类似，方程 (14) 中的系数  $\mathbf{c}^e$  在积分后可以被消去。

2. 变压器的振动和噪声计算（简略）

2.1 流程图

变压器的振动主要可以分为两类，一类是变压器本体的振动，包括铁芯振动、绕组振动、油箱振动等；另一类是冷却装置风扇引起的振动，本人并未有这类振动的相关计算经验。另外，由变压器漏磁通引起的绕组振动、油箱振动与由磁致伸缩效应引起的铁芯振动相比小很多，通常可以忽略不计。电磁-结构力场的计算流程如图 2-1 所示。振动是噪声的来源，其耦合计算流程如图 2-2 所示。油箱内部声场由强耦合计算得到，外部声场由弱耦合计算得到。

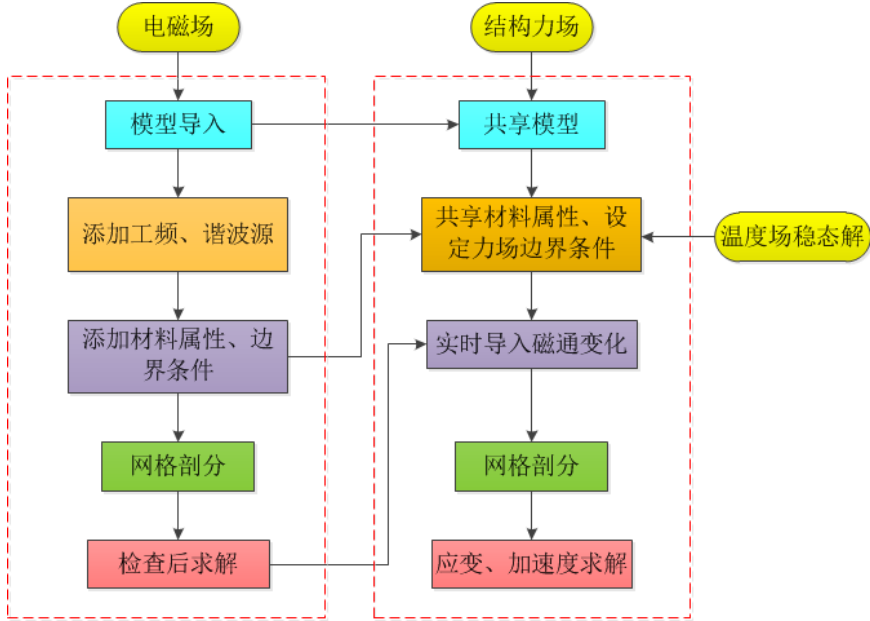


图 2-1 电磁-结构力耦合仿真流程图

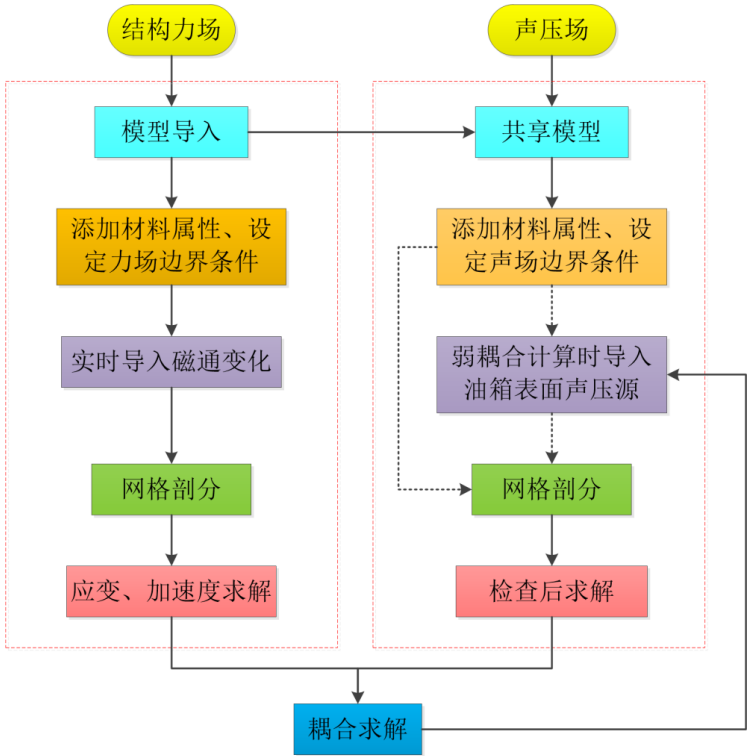


图 2-2 结构力-噪声耦合仿真流程图

## 2.2 材料属性

表 2-1 计算结构力-声场所需的材料属性

结构件名称	所需属性
铁芯	密度、杨氏模量、泊松比
绕组	
磁屏蔽、肺叶板	密度
夹件	
油箱	
变压器油	密度、声速
空气	密度、声速

注：若需要进一步考虑绕组、油箱及其它结构件的振动，那么对应材料的杨氏模量和泊松比也是计算所需属性。

## 2.3 控制方程&边界条件

如 2.1 小节所述，变压器的振动主要是铁芯的磁致伸缩，属于固体力学领域。因此，根据力的平衡可以列出基本控制方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{F}_v = 0 \quad (15)$$

其中， $\mathbf{S}$  为固体中质点的应力； $\mathbf{F}_v$  为体积力（如洛伦兹力、重力等）。对于幅值较小的振动，线弹性假设是可行的，即材料的应力和应变成正比（胡克定律）：

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0 - \boldsymbol{\varepsilon}_{th} - \dots) \quad (16)$$

其中， $\mathbf{S}_0$  为预应变； $\boldsymbol{\varepsilon}$ ， $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ， $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$  分别为总应变、预应变和热应变，此外还有塑性应变等； $\mathbf{C}$  为本构张量，对于线弹性张量又可被称为弹性模量，是杨氏模量和泊松比的函数。在本人用商业软件计算变压器铁芯振动时，一般不考虑预应力，但会将磁致伸缩引起的应变作为预应变输入模型中（一种简化计算的办法）：

$$\varepsilon_{i0} = \frac{3}{2} \varepsilon_s \left( \frac{M_i}{M_s} \right)^2 \quad (17)$$

其中， $\varepsilon_{i0}$  为  $i$  方向的预应变； $\varepsilon_s$  为磁致伸缩常数； $M_s$  和  $M_i$  分别为饱和磁化强度和  $i$  方向上的磁化强度。

求出总应变后，便可通过下式求出位移  $\mathbf{u}$ ：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right] \quad (18)$$

声压场的控制方程是一个标量波动方程：

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( -\frac{1}{\rho} (\nabla p_t - \mathbf{q}_d) \right) = Q_m \\ p_t = p + p_b \end{cases} \quad (19)$$

其中， $\rho$  为材料密度； $c$  为声速； $P_t$ 、 $P_b$ 、 $P$  分别为总声压、背景声压、散射声压；根据 COMSOL



帮助文档的描述，声速和密度通常是与空间有关的，例如，它们依赖于背景温度，同时方程包含两个可选的源项：1) 单极域源  $Q_m$ ，这个源对应于连续性方程右边的质量源；2) 偶极域源  $q_d$ ，这个源对应于动量方程右边的定义域力源。 $\rho c^2$  称为绝热体积弹性模量。

结构力场和声压场计算中典型的边界条件如表 2-2 和表 2-3 所示

表 2-2 结构力场边界条件

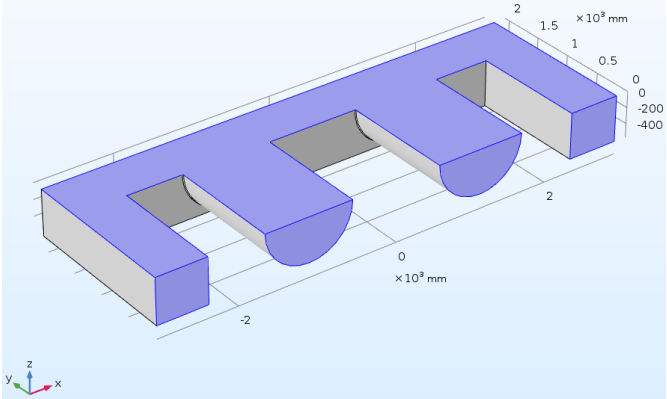
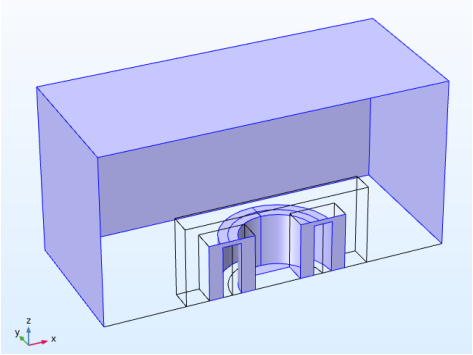
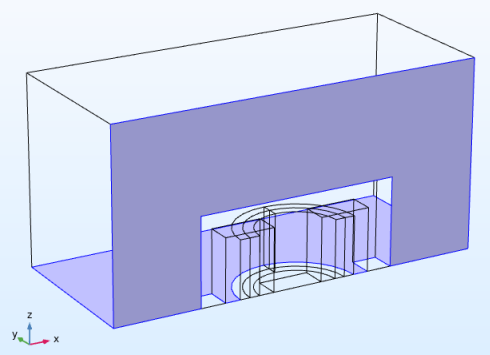
边界面	
边界条件	对称 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$

表 2-3 声压场边界条件

边界面		
边界条件	壁 $-\mathbf{n} \cdot \left( -\frac{1}{\rho} (\nabla p_t - \mathbf{q}_a) \right) = 0$	对称 $-\mathbf{n} \cdot \left( -\frac{1}{\rho} (\nabla p_t - \mathbf{q}_a) \right) = 0$

注：按照 COMSOL 的设置，两个边界条件的方程是一致的，对于这点本人并未做深入理解。