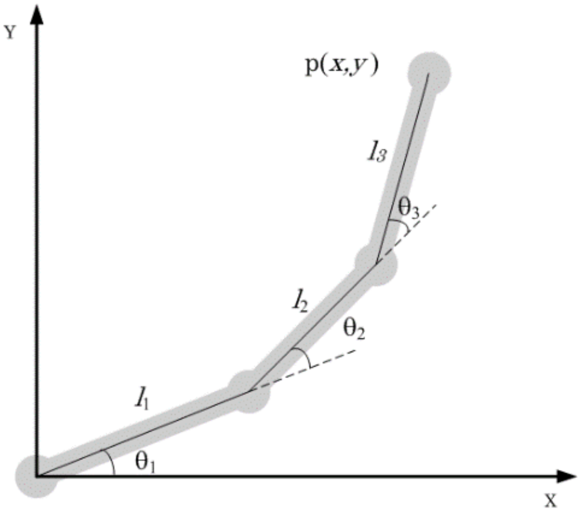
3 Eksenli Planar Robot'un Ters Kinematiği

İlk önce yönelim bilgisinin verilmediğini düşünelim ve 3 eksenli planar robotun geometrik yaklaşımla **ileri kinematik** denklemlerini bulalım. Planarın uç noktasının x ve y koordinatı aslında uzuvların tek tek x ve y eksenlerine izdüşümlerinin toplamıdır. İlk uzvun izdüşümü ilk açıya, ikinci uzvun izdüşümü ilk iki açıya, üçüncü uzvun izdüşümü ilk üç açıya bağlıdır.



İleri kinematik denklemleri bu bilgiden yararlanılarak bulunabilir.

$$x = l_1 * \cos(Q_1) + l_2 * \cos(Q_1 + Q_2) + l_3 * \cos(Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

$$y = l_1 * \sin(Q_1) + l_2 * \sin(Q_1 + Q_2) + l_3 * \sin(Q_1 + Q_2 + Q_3)$$

Görüldüğü üzere **ileri kinematik** denklemleri 2 denklem ve 3 bilinmeyeden oluşur. Başka bir bilgi (oryantasyon) söz konusu olmadığı için bir nokta için sonsuz açı çözümleri çıkacağı aşikardır. Bunu planar kol üzerinden de düşünerek çıkarabiliriz. Bu sonsuz çözüm ise son değişkene bağlı olarak çözeceğiz.

Ters kinematik denklemlerini çıkarmak için her iki denklemin iki tarafının da karalerini alıp taraf tarafa toplayalıp sade şeklini yazalım. Bu toplam ifadesindeki bazı terimlerin toplamını aşağıdaki bağıntılar ile sadeleştirelim.

$$\cos(Q_1) * \cos(Q_1 + Q_2) + \sin(Q_1) * \sin(Q_1 + Q_2) = \cos(Q_2)$$

$$\cos(Q_1) * \cos(Q_1 + Q_2 + Q_3) + \sin(Q_1) * \sin(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \cos(Q_2 + Q_3)$$

$$\cos(Q_1 + Q_2) * \cos(Q_1 + Q_2 + Q_3) + \sin(Q_1 + Q_2) * \sin(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \cos(Q_3)$$

Kareleri toplamından çıkan terimler sadeleşerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2 * l_1 * l_2 * \cos(Q_2) + 2 * l_1 * l_3 * \cos(Q_2 + Q_3) + 2 * l_2 * l_3 * \cos(Q_3)$$

Kolay şekilde ifade etmek için harflendirirelim.

$$P = x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2$$

$$K = 2 * l_1 * l_2$$

$$L = 2 * l_1 * l_3$$

$$M = 2 * l_2 * l_3$$

Denklemin son hali aşağıdaki gibidir.

$$P = K * \cos(Q_2) + L * \cos(Q_2 + Q_3) + M * \cos(Q_3)$$

Burada Q_2 değişkenini biz Q_3 değişkeni cinsinden yazacağız. Buradan her Q_3 değerine karşılık bir Q_2 değeri hesaplanır. Yani Q_3 değeri önceden belirlenen herhangi bir açı değeridir. Bu değere karşılık Q_2 değeri hesaplanır. Sonra Q_1 hesaplanarak ters kinematik denklemlerimiz tamamlanacaktır.

$$P - M * \cos(Q_3) = K * \cos(Q_2) + L * \cos(Q_2) * \cos(Q_3) - L * \sin(Q_2) * \sin(Q_3)$$

$$P - M * \cos(Q_3) = \cos(Q_2) * [K + L * \cos(Q_3)] + \sin(Q_2) * [-L * \sin(Q_3)]$$

$$a = -L * \sin(Q_3)$$

$$b = K + L * \cos(Q_3)$$

$$c = P - M * \cos(Q_3)$$

$$\boldsymbol{Q_2 = Atan2\left(\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c\right) + Atan2(a, b)}$$

Q_1 değişkenini ilk denklemden bulabiliriz. Görünür de ilk denklem yeterli gözüküyor. Fakat bu bize 2 farklı değere götürecektir. Bu ise bazı yerlerde farklı değerler arası geçiş yapmamızı gerektirir. Bunu önlemek için iki denklemi de kullanmamız gerekir. İlk başta ilk denklemden yeni bir denklem elde edelim. Üçüncü terimi açarken $Q_1 + (Q_2 + Q_3)$ şeklinde açalım.

$$x = l_1 * \cos(Q_1) + l_2 * \cos(Q_1) * \cos(Q_2) - l_2 * \sin(Q_1) * \sin(Q_2) + l_3 * \cos(Q_1) * \cos(Q_2 + Q_3) - l_3 * \sin(Q_1) * \sin(Q_2 + Q_3)$$

$$x = \cos(Q_1) * [l_1 + l_2 * \cos(Q_2) + l_3 * \cos(Q_2 + Q_3)] + \sin(Q_1) * [-l_2 * \sin(Q_2) - l_3 * \sin(Q_2 + Q_3)]$$

$$A = l_1 + l_2 * \cos(Q_2) + l_3 * \cos(Q_2 + Q_3)$$

$$B = -l_2 * \sin(Q_2) - l_3 * \sin(Q_2 + Q_3)$$

$$x = \cos(Q_1) * A + \sin(Q_1) * B$$

Q_1 değişkenine bağlı ikinci denklemi de bulalım.

$$y = l_1 * \sin(Q_1) + l_2 * \sin(Q_1) * \cos(Q_2) + l_2 * \cos(Q_1) * \sin(Q_2) + l_3 * \sin(Q_1) * \cos(Q_2 + Q_3) + l_3 * \cos(Q_1) * \sin(Q_2 + Q_3)$$

$$y = \cos(Q_1) * [l_2 * \sin(Q_2) + l_3 * \sin(Q_2 + Q_3)] + \sin(Q_1) * [l_1 + l_2 * \cos(Q_2) + l_3 * \cos(Q_2 + Q_3)]$$

$$y = -\cos(Q_1) * B + \sin(Q_1) * A$$

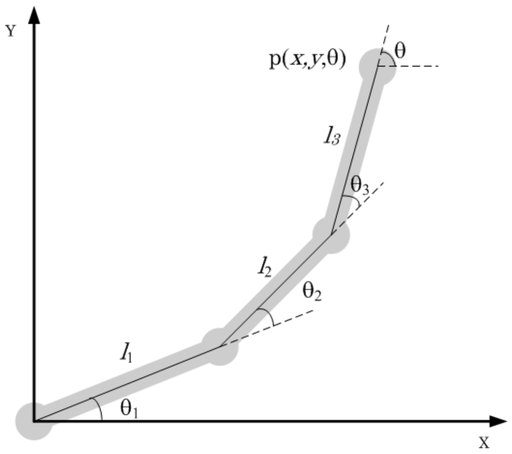
Buradan ise;

$$\cos(Q_1) = \frac{A * x - B * y}{A^2 + B^2} = E \quad , \quad \sin(Q_1) = \frac{A * y + B * x}{A^2 + B^2} = F$$

$$\boldsymbol{Q_1 = Atan2(F, E)}$$

Eğer yalnızca bir denkleme baksaydık, iki farklı değer karşımıza çıkacaktı. Toplamda 4 farklı sonuç çıkacaktı. Bu sonuçlardan biri kesinlikle yanlışken, iki tanesi bölgeden bölgeye değişecek, diğeri ise alternatif bir sonuç olacaktı.

Şimdiyse yönelim bilgisiyle ters kinematiğini çıkaralım. Düzlem üzerinde olduğumuz için yönelim bilgisi için sadece x eksenine yaptığı açı yeterli olacaktır. Buradaki teta açısı aslında **ileri kinematik** denkleminin 3. teriminindeki cosinus açısıdır. Yani 3 açının toplamıdır. Bu sebeple biz $Q_1 + Q_2 + Q_3$ ifadesinin değerini yönelim diye kullanacağız. **İleri kinematik** denklemlerini yazalım.



$$x = l_1 * \cos(Q_1) + l_2 * \cos(Q_1 + Q_2) + l_3 * \cos(Q)$$

$$y = l_1 * \sin(Q_1) + l_2 * \sin(Q_1 + Q_2) + l_3 * \sin(Q)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Buradan:

$$x - l_3 * \cos(Q) = l_1 * \cos(Q_1) + l_2 * \cos(Q_1 + Q_2)$$

$$y - l_3 * \sin(Q) = l_1 * \sin(Q_1) + l_2 * \sin(Q_1 + Q_2)$$

Ters kinematik denklemlerini çıkarmak için her iki denklemin iki tarafının da karalerini alıp taraf tarafa toplayalım.

$$\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 - 2 * x * l_3 * \cos(Q) - 2 * y * l_3 * \sin(Q)}{2 * l_1 * l_2} = \cos(Q_2) = a$$

$$\boldsymbol{Q_2 = Atan2\left(\pm\sqrt{1 - a^2}, a\right)}$$

Şimdi Q_1 değişkenini bulmak için ilk denklemden sonra ikinci denklemden yeni denklemler elde edelim.

$$x - l_3 * \cos(Q) = l_1 * \cos(Q_1) + l_2 * \cos(Q_1) * \cos(Q_2) - l_2 * \sin(Q_1) * \sin(Q_2)$$

$$x - l_3 * \cos(Q) = \cos(Q_1) * [l_1 + l_2 * \cos(Q_2)] + \sin(Q_1) * [-l_2 * \sin(Q_2)]$$

$$A = l_1 + l_2 * \cos(Q_2)$$

$$B = -l_2 * \sin(Q_2)$$

$$x - l_3 * \cos(Q) = \cos(Q_1) * A + \sin(Q_1) * B$$

Q_1 değişkenine bağlı ikinci denklemi de bulalım.

$$y - l_3 * \sin(Q) = l_1 * \sin(Q_1) + l_2 * \sin(Q_1) * \cos(Q_2) + l_2 * \cos(Q_1) * \sin(Q_2)$$

$$y - l_3 * \sin(Q) = \cos(Q_1) * [l_2 * \sin(Q_2)] + \sin(Q_1) * [l_1 + l_2 * \cos(Q_2)]$$

$$y - l_3 * \sin(Q) = -\cos(Q_1) * B + \sin(Q_1) * A$$

$$\cos(Q_1) = \frac{A * (x - l_3 * \cos(Q)) - B * (y - l_3 * \sin(Q))}{A^2 + B^2} = E$$

$$\sin(Q_1) = \frac{A * (y - l_3 * \sin(Q)) + B * (x - l_3 * \cos(Q))}{A^2 + B^2} = F$$

$$\boldsymbol{Q_1 = Atan2(F, E)}$$

Buradan ise bize yönelim bilgisi verildiği için Q_3 değişkenini bulabiliriz.

$$\boldsymbol{Q_3 = Q - Q_1 - Q_2}$$