CAPÍTULO 6

Problemas de Transportes e de Afectação

1. Problema de Transporte

Este problema, que é um dos particulares de PL, consiste em determinar a forma mais económica de enviar um ***bem*** disponível, em quantidades limitadas, em determinados locais para outros locais onde é necessário. Como qualquer problemas de PL, também este pode ser resolvido pelo método Simplex. Porém, a sua estrutura própria permitiu a utilização de métodos que, embora derivados do Simplex, são mais eficientes.

Existem muitos problemas de PL, que podem ser formulados como de transporte, apesar de, aparentemente, não existir qualquer relação com este tipo de problemas.

O problema clássico de transporte surge com a necessidade de programar a distribuição óptima de um produto homogéneo que :

a) encontra-se disponível em **m** origens nas quantidades fixas $\mathbf{a_i > 0}$ (oferta), com i = 1, …, **m**;

b) é necessário em **n** destinos nas quantidades fixas $\mathbf{b_j > 0}$ (procura), com j = 1, 2, …, **n**;

c) deve ser enviado directamente para os destinos, esgotando as disponibilidades em cada origem e satisfazendo as necessidades em cada destino (a procura total iguala a oferta total);

e tendo por objectivo a minimização do custo total envolvido no programa de distribuição desse produto, em que se supõe que os custos unitários de transporte da cada origem **i** para cada destino **j**, $\mathbf{c_{ij}}$, são proporcionais às quantidades transportadas, $\mathbf{x_{ij}}$.

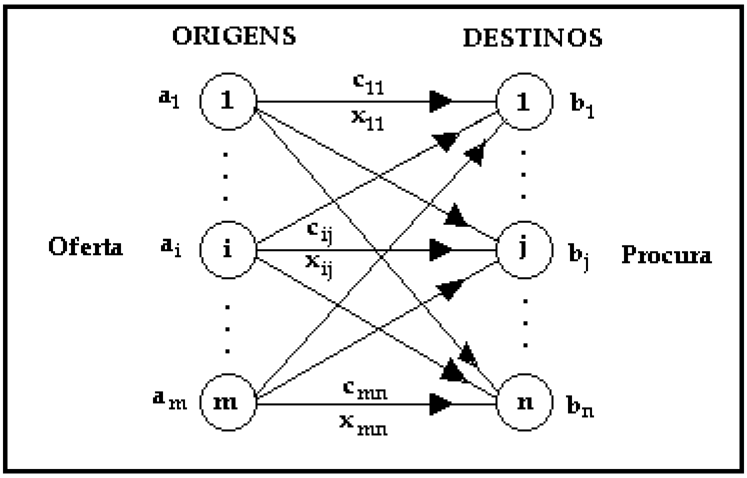

Figura 1. Rede do Problema de Transporte.

A Figura 1 ilustra o problema de transporte sob a forma de uma rede com m origens e n destinos representados por nós; os arcos que ligam as origens aos destinos representam os percursos através dos quais o produto pode ser transportado.

Uma outra forma de representar este problema, consiste na utilização de um quadro (ver Quadro 1), em que,

- cada linha corresponde a uma origem,
- cada coluna corresponde a um destino,
- a última coluna contém a informação relativa às quantidades disponíveis nas origens,
- a última linha contém a informação respeitante a quantidades necessárias nos destinos,
- em cada quadrícula (i, j) encontra-se a quantidade a transportar da origem **i** para o destino **j**, $\mathbf{x_{ij}}$, e o correspondente custo unitário de transporte, $\mathbf{c_{ij}}$.

Para qualquer plano de transporte admissível,

$\sum_j x_{ij} = a_i$ — a soma em linha dos x_{ij} iguala a quantidade de a_i;

$\sum_i x_{ij} = b_j$ — a soma em coluna dos x_{ij} iguala a quantidade de b_j.

O custo de transporte associado a cada percurso (i, j) é dado por $c_{ij}\, x_{ij}$, pelo que o custo total do plano de transporte é dado por $\sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}$.

DESTINOS

ORIGENS		1		2		...	n		Oferta
	1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	...	x_{1n}	c_{1n}	$\mathbf{a_1}$
	2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	...	x_{2n}	c_{2n}	$\mathbf{a_2}$
	...	...		...			...		**...**
	m	x_{m1}	c_{m1}	x_{m2}	c_{m2}	...	x_{mn}	c_{mn}	$\mathbf{a_m}$
	Procura	$\mathbf{b_1}$		$\mathbf{b_2}$		**...**	$\mathbf{b_n}$		$\mathbf{\Sigma a_i = \Sigma b_j}$

Quadro 1. Quadro do Problema de Transporte.

1.1. Formalização do Problema de Transporte

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{restrições de oferta}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{restrições de procura}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

O problema clássico apresenta uma estrutura especial, segundo a disposição das restrições :

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} + \ldots + x_{1n} & & & & & & & = & a_1 \\
 & & x_{21} + \ldots + x_{2n} & & & & & = & a_2 \\
 & & & \cdot & & & & & \cdot \\
 & & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & & & & & \cdot & & & \cdot \\
 & & & & & & x_{m1} + \ldots + x_{mn} & = & a_m \\
x_{11} & & + x_{21} & & \ldots & & + x_{m1} & = & b_1 \\
\cdot & & \cdot & & \ldots & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \ldots & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \ldots & & \cdot & & \cdot \\
x_{1n} & & + x_{2n} & & \ldots & & + x_{mn} & = & b_n
\end{array}$$

A estrutura especial da matriz dos coeficientes caracteriza-se pelo facto de ser constituída por *uns* (1) e *zeros* (0), e por cada variável $\mathbf{x_{ij}}$ ter como coeficientes significativos apenas 2 elementos unidade, um na linha associada à origem **i** e outro na linha relativa ao destino **j**.

<u>Exemplo :</u>

Certa empresa possui 2 fábricas a produzirem determinado produto, a ser depois transportado para 3 centros de distribuição.

As fábricas 1 e 2 produzem 100 e 50 carregamentos por mês, respectivamente. Os centros 1, 2 e 3 necessitam de receber 80, 30 e 40 carregamentos por mês, respectivamente.

Sabendo que os custos de transporte, por carregamento, são os que constam no quadro :

	Centro 1	**Centro 2**	**Centro 3**
Fábrica 1	7	4	3
Fábrica 2	3	1	2

a formalização do problema (minimização do custo total de transporte) vem :

$$\begin{array}{llcccccccccccl}
\text{Minimizar} & Z = & 7x_{11} & + & 4x_{12} & + & 3x_{13} & + & 3x_{21} & + & x_{22} & + & 2x_{23} & \\
\text{Sujeito a} & & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = 100 \\
& & & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = 50 \\
& & x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = 80 \\
& & & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = 30 \\
& & & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = 40
\end{array}$$

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23} \geq 0$$

1.2. Alguns resultados

1) O problema de transporte tem sempre solução óptima (finita).

2) Qualquer SBA do problema tem no máximo $(m + n - 1)$ variáveis positivas.

3) A matriz da base de qualquer SBA do problema é triangular.

4) Se a_i e b_j, com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, são inteiros, então qualquer SBA tem apenas valores inteiros.

1.3. Resolução do problema de transporte

A resolução de um problema de transportes envolve, tal como o problema de PL, os seguintes passos :

Passo 1. Obtenção de uma SBA inicial.

Passo 2. *Teste de optimalidade* : se a SBA em presença satisfaz o critério do óptimo, o processo termina; caso contrário, continuar.

Passo 3. *Melhoria da solução* : cálculo de nova SBA através da introdução na base de uma VNB em substituição de uma VB. Voltar ao Passo 2.

1.4. Obtenção de uma SBA inicial

Considere-se o problema definido através do **Quadro 1**. De uma maneira geral, os métodos que se apresentam para a obtenção de uma SBA inicial, apenas difere no critério de escolha da variável a considerar como básica nos sucessivos quadros :

- escolher a primeira variável básica, de acordo com o critério utilizado : x_{pq} ,
- atribuir a x_{pq} o maior valor possível : $x_{pq} = \min \{ a_p, b_q \}$,
- subtrair a a_i e b_j o valor de x_{pq}.

Este processo repete-se até se anularem todas as disponibilidades e todos os requerimentos.

1.4.1. Método do Canto Noroeste

Este método é fácil de aplicar, mas tem um inconveniente : não considera os custos de transporte. Aqui, a variável escolhida como básica é, em cada quadro, a que se encontra situada no canto superior esquerdo (canto Noroeste). Portanto, as VB escolhidas são as seguintes :

- $\mathbf{x_{11}}$: no primeiro quadro,
- $\mathbf{x_{12}}$ ou $\mathbf{x_{21}}$: no segundo quadro, consoante tenha sido traçada a coluna 1 ou a linha 1,
- e assim sucessivamente, até terem sido traçadas todas as linhas e todas as colunas.

<u>Exemplo :</u> retome-se o exemplo anterior.

	1		**2**		**3**		**Oferta**
1	x_{11}	7	x_{12}	4	x_{13}	3	**100**
2	x_{21}	3	x_{22}	1	x_{23}	2	**50**
Procura	**80**		**30**		**40**		**<u>150</u>**

Primeira VB : $x_{11} = \min \{ 100, 80 \} = 80$, (100 = oferta da origem 1; 80 = procura no destino 1). O destino 1 vê satisfeita a procura respectiva. Traça-se a coluna 1 e ficam disponíveis 100 – 80 = 20 unidades na origem 1. Tem-se então o novo quadro :

80			100	20
			50	
80	30	40		

Segunda VB : $x_{12} = \min \{ 20, 30 \} = 20$. A origem 1 fica esgotada. Traça-se a linha 1 e fica por satisfazer 30 – 20 = 10 unidades no destino 2. O quadro fica então :

80	**20**		100	20
			50	
80	30	40		
	10			

Terceira VB : x_{22} = min { 10, 50 } = 10. O destino 2 vê satisfeita a procura respectiva. Traça-se a coluna 2 e fica disponível 50 – 10 = 40 unidades na origem 2. O quadro fica então :

80	**20**		100	20
	10		50	40
80	30 10	40		

Quarta VB : x_{23} que é única (igualdade entre oferta e procura. O quadro fica então :

80	**20**		100	20
	10	**40**	50	40
80	30 10	40		

A SBA obtida é :

x_{11} = 80, x_{12} = 20, x_{22} = 10, x_{23} = 40 — variáveis básicas (*células preenchidas*)

x_{13} = 0, x_{21} = 0 — variáveis não básicas (*células vazias*)

a que corresponde o valor da FO,

$z = 7 \times 80 + 4 \times 20 + 1 \times 10 + 2 \times 40 = 730.$

Esta solução que tem (m + n –1) = (2 + 3 – 1) = 4 variáveis básicas, é apresentada em forma tabular de acordo com o quadro seguinte :

80	7	**20**	4		3	**100**
	3	**10**	1	**40**	2	**50**
80		**30**		**40**		

1.4.2. Método do Custo Mínimo

Este método, ao invés do anterior, tem em consideração a matriz dos custos de transporte, pelo que, em princípio, determina soluções iniciais mais próximas da solução óptima.

Neste caso, a escolha da variável a tomar como básica, recai sobre aquela de menor custo em cada quadro (em caso de empate, a escolha é arbitrária).

Exemplo : Retome-se o exemplo anterior.

Primeira VB : o menor dos custos é c_{22}, pelo que x_{22} = min { 50, 30 } = 30. O destino 2 fica totalmente satisfeito, traça-se a coluna 2, ficando disponíveis 50 – 30 = 20 unidades na origem 2.

	7		4		3	100	
	3	**30**	1		2	50	20
80		30		40			

Segunda VB : o menor dos custos é c_{23}, pelo que x_{23} = min { 20, 40 } = 20. A origem 2 fica esgotada, traça-se a linha 2, ficando por satisfazer 40 – 20 = 20 unidades no destino 3.

	7		4		3	100	
	3	**30**	1	**20**	2	50	20
80		30		40			
				20			

Terceira VB : o menor dos custos é c_{13}, pelo que x_{13} = min { 20, 100 } = 20. O destino 2 fica totalmente satisfeito, traça-se a coluna 3, ficando disponíveis 100 – 20 = 80 unidades na origem 1.

	7		4	**20**	3	100	80
	3	**30**	1	**20**	2	50	20
80		30		40			
				20			

Resta c_{11}, pelo que x_{11} = min { 80, 80 } = 80 : a oferta disponível iguala a procura por satisfazer.

80	7		4	**20**	3	100	80
	3	**30**	1	**20**	2	50	20
80		30		40			
				20			

A SBA obtida é :

x_{11} = 80, x_{13} = 20, x_{22} = 30, x_{23} = 20 — variáveis básicas (*células preenchidas*)

x_{21} = 0, x_{12} = 0 — variáveis não básicas (*células vazias*)

a que corresponde o valor da FO,

$z = 7 \times 80 + 3 \times 20 + 1 \times 30 + 2 \times 20 = 690$ (melhor que no Canto Noroeste)

Esta solução é apresentada em forma tabular de acordo com o quadro seguinte :

80	7		4	**20**	3	**100**
	3	**30**	1	**20**	2	**50**
80		**30**		**40**		

1.4.3. Método das Penalidades

Neste método, o critério de escolha da variável a tomar como básica em cada quadro é o do menor custo da linha ou coluna associada à maior das diferenças entre os dois menores custos da cada linha ou coluna (penalidades).

Portanto, para facilitar esta escolha, recomenda-se que acrescente-se uma linha e uma coluna, às quais estão associados as penalizações de cada uma delas.

<u>**Exemplo :**</u>

Retome-se o exemplo anterior (considere o quadro inicial nas condições descritas).

Primeira VB : a maior penalidade ocorre na coluna 1, pelo que pode-se escolher a variável de menor custo nesta coluna para básica : x_{21} = min { 80, 50 } = 50. A origem 2 fica esgotada, traça-se a linha 2, ficando por satisfazer 80 – 50 = 30 unidades no destino 1.

	7		4		3	*1*	100
50	3		1		2	*1*	50
	4		*3*		*1*		
30		30		40			

Segunda VB : a maior penalidade ocorre na coluna 1, pelo que pode-se escolher a variável de menor custo nesta coluna para básica : x_{11} = min { 30, 100 } = 30. O destino 1 fica totalmente satisfeito, traça-se a coluna 1, ficando disponíveis 100 – 30 = 70 unidades na origem 1.

30	7		4		3	*1*	100	70
50	3		1		2	*1*	50	
	4		*3*		*1*			
80 30		30		40				

Terceira VB : a maior penalidade ocorre na coluna 2, pelo que pode-se escolher a variável de menor custo nesta coluna para básica : x_{12} = min { 30, 70 } = 30. O destino 2 fica totalmente satisfeito, traça-se a coluna 2, ficando disponíveis 70 – 30 = 40 unidades na origem 1.

30	7	**30**	4		3	*1*	100	70	40
50	3		1		2	*1*	50		
	4		*3*		*1*				
80 30		30		40					

Como resta apenas a variável x_{13}, esta é a próxima a entrar na base : : x_{13} = 40. Portanto, a solução básica inicial é a seguinte :

30	7	**30**	4	**40**	3	100
50	3		1		2	50
80		30		40		

cujo valor da função objectivo é :

$$z = 7 \times 30 + 4 \times 30 + 3 \times 40 + 3 \times 50 = 600 \qquad \text{(melhor que os outros)}$$

1.5. Obtenção da solução óptima

Obtida uma SBA inicial, esta é submetida ao teste de optimalidade, passando-se em seguida a outra solução, caso o critério respectivo não seja satisfeito; o processo repete-se até se obter a solução óptima.

Este método, baseia-se nas propriedades da dualidade para a obtenção de uma solução óptima do problema.

1.5.1. Algoritmo

Sejam $\mathbf{u_i}$ e $\mathbf{v_j}$ as variáveis duais associadas, respectivamente, às restrições de oferta e de procura. A cada variável básica do problema primal (célula preenchida) está associada uma restrição saturada do problema dual : x_{ij} (VB do primal) $\Leftrightarrow$ $u_i + v_j = c_{ij}$. O algoritmo é composto pelos seguintes passos :

Passo 1. Determinar uma SBA inicial;

Passo 2. Determinar as variáveis duais, fazendo $u_1 = 0$, e calcular as restantes usando as células ocupadas;

Passo 3. Se $u_i + v_j \leq c_{ij}$ para todas as células não preenchidas então a solução é óptima; caso contrário, continuar no passo seguinte;

Passo 4. Seleccionar para a nova VB a célula para a qual se verifica $u_i + v_j > c_{ij}$ e que conduza a um maior decréscimo no custo total.
Transferir para essa célula o número máximo de unidades possível.
Voltar ao Passo 2.

1.5.2. Obtenção de uma nova SBA

A partir de uma SBA pode obter uma nova solução daquele tipo, através de transferências de unidades entre células, o que constitui um ciclo. Dado que em cada quadro os requerimentos e as disponibilidades têm que ser satisfeitos, sempre que se adicionam **n** unidades a uma célula têm que se subtraír as mesmas **n** unidades a uma outra que esteja na mesma linha e a outra que esteja na mesma coluna. Assim, geralmente, pode-se determinar um ciclo de transferências da seguinte forma :

- procura-se uma célula preenchida na mesma linha da célula para a qual se pretende transferir unidades,
- na mesma coluna desta nova célula procura-se outra célula preenchida,
- na mesma linha desta nova célula procura-se outra célula preenchida. Se esta última célula se encontrar na mesma coluna da célula para a qual se pretende transferir unidades, o ciclo fica determinado; caso contrário, continua-se a pesquisa, até se encontrar uma célula preenchida pertencente a essa coluna.

Nas células, cujos valores podem sofrer diminuição, é associado um sinal (–) e nas outras um sinal (+). A sequência de células com (+) e (–) constituem um ciclo através do qual se podem fazer transferências de unidades para a célula pretendida. O número máximo de unidades que se podem transferir para aquela célula, de modo a se obter uma SBA, através deste ciclo, é dado por :

Min { x_{ij} : x_{ij} é afectado de sinal (–) no ciclo }.

Por exemplo, tome-se a SBA determinada pelo método do Canto de Noroeste :

80	7	**20** (–)	4	$\mathbf{x_{13}}$ (+)	3	**100**
	3	**10** (+)	1	**40** (–)	2	**50**
80		**30**		**40**		

Pode-se transferir 1 unidade para a célula (1, 3), diminuindo 1 unidade nas células (1, 2) e (2, 3), e aumentando 1 unidade na célula (2, 2). O número máximo de unidades que se podem transferir para a célula (1, 3) é :

Min { 20, 40 } = 20

O que implica que a variável que vai sair da base é x_{12}, pois a célula (1, 2) fica vazia.

Desta forma, a nova SBA é :

80	7		4	**20**	3	**100**
	3	**30**	1	**20**	2	**50**
80		**30**		**40**		

1.5.3. Exemplo

Retome-se o exemplo anterior. Se se associar as variáveis duais $\mathbf{u_i}$ (i = 1, 2) e $\mathbf{v_j}$ (j = 1, 2, 3) às 2 restrições de oferta e 3 restrições de procura, respectivamente, o problema dual pode ser formulado da seguinte forma :

$$
\begin{array}{llccccccccccc}
\text{Maximizar} & W = & 100\,u_1 & + & 50\,u_2 & + & 80\,v_1 & + & 30\,v_2 & + & 40\,v_3 & & \\
\text{Sujeito a} & & u_1 & & & + & v_1 & + & & & & \leq & 7 \\
 & & u_1 & & & & & + & v_2 & & & \leq & 4 \\
 & & u_1 & & & & & & & + & v_2 & \leq & 3 \\
 & & & & u_2 & + & v_1 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & & u_2 & & & + & v_2 & & & \leq & 1 \\
 & & & & u_2 & & & & & + & v_3 & \leq & 2 \\
\end{array}
$$

u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , v_3 sem sinal

Passo 1. Supondo que a SBA inicial é a obtida pelo método do Canto Noroeste, tem-se o quadro :

QUADRO 1

80	7	**20**	4		3	100
	3	**10**	1	**40**	2	50
80		30		40		

O custo total de transporte é : $z = 7 \times 80 + 4 \times 20 + 1 \times 10 + 2 \times 40 = 730$.

Passo 2. A cada VB do primal está associada uma restrição saturada do dual. Assim,

VB do Primal	Restrição do Dual
x_{11}	$u_1 + v_1 = 7$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 4$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 1$
x_{23}	$u_2 + v_3 = 2$

Fazendo $u_1 = 0$, vem para as restantes variáveis duais : $v_1 = 7$, $v_2 = 4$, $u_2 = -3$, $v_3 = 5$.

Passo 3. Como $u_1 + v_3 > c_{13}$ $(0 + 5 > 3)$ e $u_2 + v_1 > c_{21}$ $(-3 + 7 > 3)$, continuar no passo seguinte.

Passo 4. Determinar qual daquelas células irá causar maior redução no custo total de transporte, que será a que irá entrar na nova SBA. As VNB candidatas a entrar na base são x_{13} e x_{21}.

Passo 5. Relativamente a x_{13}, tem-se :

80	7	**20** (–)	4	$\mathbf{x_{13}}$ (+)	3	**100**
	3	**10** (+)	1	**40** (–)	2	**50**
80		**30**		**40**		

Podendo ser transferidas, no máximo 20 unidades (min { 20, 40 }). A diminuição no custo total de transporte, por unidade transferida para a célula (1, 3) é : $u_1 + v_3 - c_{13} = 2$; assim, se x_{13} for a nova VB, haverá um decréscimo de 40 unidades no custo total (2×20).

Relativamente a x_{21}, tem-se :

80 (–)	7	**20** (+)	4		3	**100**
$\mathbf{x_{21}}$ (+)	3	**10** (–)	1	**40**	2	**50**
80		**30**		**40**		

Podendo ser transferidas, no máximo 10 unidades (min { 10, 80 }). A diminuição no custo total de transporte, por unidade transferida para a célula (2, 1) é : $u_2 + v_1 - c_{21} = 1$; assim, se x_{21} for a nova VB, haverá um decréscimo de 10 unidades no custo total (1×10).

Desta forma, introduzindo $\mathbf{x_{13}}$ na base, obtém-se o seguinte quadro :

QUADRO 2

80	7		4	**20**	3	100
	3	**30**	1	**20**	2	50
80		30		40		

O custo total de transporte é : $z = 7 \times 80 + 3 \times 20 + 1 \times 30 + 2 \times 20 = 690$.

Passo 2. Fazendo $u_1 = 0$, as restantes variáveis duais têm os seguintes valores :

$$u_1 + v_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 7$$

$$u_1 + v_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 3$$

$$u_2 + v_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -1$$

$$u_2 + v_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2$$

Passo 3. Só a célula (2, 1) não satisfaz a desigualdade : $u_2 + v_1 > c_{21}$ $(-1 + 7 > 3)$.

Passo 4. Apenas existe uma VNB candidata a entrar na base : $\mathbf{x_{21}}$. Logo, tem-se :

80 (–)	7		4	**20** (+)	3	**100**
$\mathbf{x_{21}}$ (+)	3	**30**	1	**20** (–)	2	**50**
80		**30**		**40**		

Podendo ser transferidas, no máximo 20 unidades (min { 20, 80 }). A diminuição no custo total de transporte, por unidade transferida para a célula (2, 1) é : $u_2 + v_1 - c_{21} = 3$; assim, haverá um decréscimo de 60 unidades no custo total (3×20).

Desta forma, introduzindo $\mathbf{x_{21}}$ na base, obtém-se o seguinte quadro :

QUADRO 3

60	7		4	**40**	3	100
20	3	**30**	1		2	50
80		30		40		

O custo total de transporte é : $z = 7 \times 60 + 3 \times 40 + 3 \times 20 + 1 \times 30 = 630$.

Passo 2. Fazendo $u_1 = 0$, as restantes variáveis duais têm os seguintes valores :

$$u_1 + v_1 = 7 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 7$$

$$u_1 + v_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = 3$$

$$u_2 + v_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -4$$

$$u_2 + v_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 5$$

Passo 3. Apenas a célula (1, 2) não satisfaz a desigualdade : $u_1 + v_2 > c_{12}$ $(0 + 5 > 4)$.

Passo 4. Apenas existe uma VNB candidata a entrar na base : $\mathbf{x_{12}}$. Logo, tem-se :

60 (–)	7	x_{12} (+)	4	**40**	3	**100**
20 (+)	3	**30** (–)	1		2	**50**
80		**30**		**40**		

Podendo ser transferidas, no máximo 30 unidades (min { 30, 60 }). A diminuição no custo total de transporte, por unidade transferida para a célula (1, 2) é : $u_1 + v_2 - c_{12} = 1$; assim, haverá um decréscimo de 30 unidades no custo total (1×30).

Desta forma, introduzindo na base $\mathbf{x_{21}}$, obtém-se o seguinte quadro :

QUADRO 4

30	7	**30**	4	**40**	3	100
50	3		1		2	50
80		30		40		

O custo total de transporte é : $z = 7 \times 30 + 4 \times 30 + 3 \times 40 + 3 \times 50 = 600$.

Passo 2. Fazendo $u_1 = 0$, as restantes variáveis duais têm os seguintes valores :

$u_1 + v_1 = 7 \Rightarrow \quad v_1 = 7$

$u_1 + v_2 = 4 \Rightarrow \quad v_2 = 4$

$u_1 + v_3 = 3 \Rightarrow \quad v_3 = 3$

$u_2 + v_1 = 3 \Rightarrow \quad u_2 = -4$

Passo 3. Como todas as células não preenchidas verificam a desigualdade :

$u_i + v_j \leq c_{ij}$,

está-se na presença da solução óptima do problema.

Portanto, a solução óptima e respectivo valor da FO é : $X^* = (30, 30, 40, 50, 0, 0) \Leftrightarrow Z^* = 600$.

1.6. Degenerescência

Uma solução é degenerada quando tem menos do que $(m + n - 1)$ VB e ocorre sempre que surjam empates na obtenção de uma

- SBA inicial, antes de ser escolhida a última VB,
- nova SBA, aquando da escolha da variável a ser substituída na base.

Um dos métodos para resolver estes casos, consiste em "perturbar" os valores de a_i e b_j, da forma seguinte :

$\bar{a}_i = a_i + \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$

$\bar{b}_j = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$\overline{b}_n = b_n + m \, . \, \varepsilon$$

com ε > 0 e arbitrariamente pequeno, para que a solução obtida seja muito próxima da correcta.

<u>Exemplo :</u>

Considere-se o seguinte problema de transportes, traduzido no seguinte quadro :

	7		4		3	100
	3		1		2	40
80		20		40		

A SBA inicial determinada pelo método do Canto Noroeste é a seguinte :

80	7	**20**	4		3	100
	3		1	**40**	2	40
80		20		40		

A solução obtida é degenerada, pois (m + n – 1) = 4 e apenas 3 VB são positivas. Aplicando o método descrito em cima, tem-se :

	7		4		3	100 + ε
	3		1		2	40 + ε
80		20		40 + 2 ε		

e preenchendo este quadro pelo Canto Noroeste,

80	7	**20**	4	ε	3	100 + ε
	3		1	**40 + ε**	2	40 + ε
80		20		40 + 2 ε		

Como ε é arbitrariamente pequeno, faz-se ε = 0 e obtém-se a seguinte SB :

80	7	**20**	4	**0**	3	100
	3		1	**40**	2	40
80		20		40		

1.7. Casos em que a Oferta total é diferente da Procura total

Na maioria dos problemas reais a soma das disponibilidades é diferente da soma dos requerimentos : oferta diferente da procura. A resolução destes casos consiste em transformá-los na situação anterior (oferta igual à procura) para depois se aplicarem os métodos descritos. Duas situações podem acontecer :

a) a oferta é superior à procura ($\sum a_i > \sum b_j$) : criar um destino fictício cujo requerimento é igual à diferença entre a oferta e procura ($\sum a_i - \sum b_j$) e com custos de transporte nulos,

b) a procura é superior à oferta ($\sum a_i < \sum b_j$) : criar uma origem fictícia com disponibilidade igual ao excesso da procura em relação à oferta ($\sum b_j - \sum a_i$) e com custos de transporte nulos.

2. Problema de Afectação (“Assignment”)

Pretende-se, com a resolução deste problema, afectar (atribuir, distribuir) da forma mais económica indivíduos a tarefas, entendidos estas entidades em sentido geral. Atendendo a algumas das suas propriedades, este problema pode ser formulado como sendo de transportes, estando então garantida a integridade da solução. No entanto, não é a resolução como problema de transporte a mais aconselhável, até porque este problema é normalmente degenerado.

O problema clássico consiste em afectar **n** indivíduos a **n** tarefas — um indivíduo por tarefa e uma tarefa por indivíduo, tendo por objectivo a minimização do custo total envolvido no plano de afectação, sendo conhecidos os custos, $\mathbf{c_{ij}}$, de afectar o indivíduo **i** à tarefa **j** (i, j = 1, 2, …, n).

Uma das formas de resolver este problema, seria calcular todas as permutações possíveis (**n!**), sendo a solução óptima do plano a permutação que verificasse o menor custo.

2.1. Formalização do problema

O problema de afectação pode ser formulado como um caso especial do problema de transporte, e portanto, utilizar um método de resolução mais eficiente.

A formulação é a seguinte :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo i for afecto à tarefa j} \\ 0 & \text{se o indivíduo i não for afecto à tarefa j} \end{cases}$$

Então, o problema consiste em

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a} \qquad \sum_j x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} = 0, 1$$

em que os dois conjuntos de restrições garantem que cada indivíduo é afectado exactamente a uma só tarefa, e que cada tarefa é executada por um só indivíduo, respectivamente.

O facto de considerar $x_{ij} = 0$ ou $x_{ij} = 1$ torna o problema de difícil resolução. No entanto, a sua substituição por $x_{ij} \geq 0$ transforma o problema de afectação num problema de transporte equivalente (Quadro 2), em que :

- os indivíduos são as ‘origens’ e as tarefas são os ‘destinos’;

- as disponibilidades em cada origem e as necessidades em cada destino são iguais a 1;
- o custo unitário de transporte é cij e xij é inteiro (xij ≥ 0).

Portanto, o problema pode ser organizado, na seguinte forma :

TAREFA

INDIV		**1**		**2**		**. . .**	**n**		
	1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	. . .	x_{1n}	c_{1n}	**1**
	2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	. . .	x_{2n}	c_{2n}	**1**
	. . .	. . .		. . .			. . .		**. . .**
	n	x_{n1}	c_{n1}	x_{n2}	c_{n2}	. . .	x_{nn}	c_{nn}	**1**
		1		**1**		**. . .**	**1**		

Quadro 2. Problema de Afectação.

Exemplo : Numa fábrica foram instaladas 3 máquinas e 3 empregados. O objectivo da Direcção da fábrica é estabelecer uma afectação máquina–empregado recíproca e exclusiva, que envolva um custo mínimo. Os custos de afectação são os seguintes :

		Máquina		
		1	**2**	**3**
Empregado	**1**	25	31	35
	2	24	17	16
	3	15	23	18

A formulação do problema é a seguinte :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad Z = {} & 25\, x_{11} + 31\, x_{12} + 35\, x_{13} + \\ & + \; 24\, x_{21} + 17\, x_{22} + 16\, x_{23} + \\ & + \; 15\, x_{31} + 23\, x_{32} + 18\, x_{33} \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \; 1 \text{ empregado } \Rightarrow 1 \text{ máquina}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \; 1 \text{ máquina } \Rightarrow 1 \text{ empregado}$$

2.2. Resolução do problema

Qualquer afectação de um indivíduo a uma tarefa "esgota" a oferta e satura a "procura" respectivas. Assim, em qualquer plano de afectação (SBA), existe apenas **n** variáveis básicas positivas, em vez das (2n – 1) necessárias; isto é, qualquer SBA é "altamente" degenerada, contendo (n – 1) VB nulas, o que dificulta a aplicação dos métodos do problema de transporte.

TEOREMA : A solução óptima do problema de afectação não se altera se uma constante for adicionada ou subtraída a qualquer linha ou coluna da matriz de custos.

Este teorema pode ser explorado em dois sentidos :

1) Se num problema alguns elementos da matriz de custos forem negativos, então pode passar-se a um problema relacionado, cujos custos sejam todos não negativos.

2) Se for possível passar a um problema relacionado, em que todos os elementos da matriz de custos sejam não negativos, e encontrar um plano de afectação, em que os custos associados (às **n** variáveis positivas) sejam nulos, então é evidente que esse plano é óptimo.

É neste facto que se apoia o **algoritmo Húngaro**, que consiste nos seguintes passos :

Passo 1. Aos elementos de cada linha da matriz de custos, subtrair o mínimo dessa linha.
Na matriz resultante, aos elementos de cada coluna, subtrair o mínimo dessa coluna.

Passo 2. Tomar uma das linhas com menor nº de zeros, enquadrar um deles (aquele que cortar menos zeros) e cortar todos os restantes dessa linha e dessa coluna. Prosseguir até que todos os zeros estejam cortados.
Se houver **n** zeros enquadrados, tem-se a solução óptima; caso contrário prosseguir.

Passo 3. Cobrir os zeros enquadrados com o menor nº possível de traços :

1. assinalar (com ✓) as linhas que não contêm zeros enquadrados;
2. assinalar as colunas com pelo menos um zero cortado nas linhas assinaladas;
3. assinalar as linhas com um zero enquadrado nas colunas assinaladas;
4. repetir 2 e 3 até não ser possível assinalar mais linhas ou colunas;
5. traçar as linhas não assinaladas e as colunas assinaladas.

Passo 4. Determinar o menor elemento da submatriz constituída pelos elementos não traçados; subtrair esse elemento aos elementos dessa submatriz e adicioná-lo aos elementos na intersecção de dois traços. Voltar ao passo 2.

<u>Exemplo :</u> Considere-se o problema apresentado anteriormente, neste capítulo.

A matriz de custos do problema é a seguinte :

$$\begin{array}{c|ccc|} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & 25 & 31 & 35 \\ \mathbf{2} & 24 & 17 & 16 \\ \mathbf{3} & 15 & 23 & 18 \\ \hline \end{array}$$

Passo 1. Subtraindo aos elementos da 1ª linha 25, aos da 2ª 16 e aos da 3ª 15, obtém-se :

$$\begin{array}{c|ccc|} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 6 & 10 \\ \mathbf{2} & 8 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 8 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Apenas a 2ª coluna não contém zeros, pelo que se subtrai aos respectivos elementos o menor deles, que é 1, resultando

$$\begin{array}{c|ccc|} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 5 & 10 \\ \mathbf{2} & 8 & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 7 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Passo 2. Enquadrar o zero da posição (1, 1) e cortar o zero da posição (3, 1); enquadrar o zero da posição (2, 2) e cortar o zero da posição (2, 3); desta forma, obtém-se :

$$\begin{array}{c|ccc|} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{0}} & 5 & 10 \\ \mathbf{2} & 8 & \boxed{\mathbf{0}} & \cancel{0} \\ \mathbf{3} & \cancel{0} & 7 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Como não existe mais zeros para enquadrar ou traçar, termina este processo.

Como não existem 3 zeros enquadrados, não se tem a solução óptima.

Passo 3. Cobrindo com o menor número possível de traços, os zeros enquadrados, obtém-se :

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & & \\ \cline{1-4} \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{0}} & 5 & 10 & \checkmark & (3) \\ \mathbf{2} & 8 & \boxed{\mathbf{0}} & \cancel{0} & & (4) \\ \mathbf{3} & \cancel{0} & 7 & 3 & \checkmark & (1) \\ \cline{1-4} & \checkmark & & & & \\ & (2), (5) & & & & \end{array}$$

Passo 4. Subtrair aos elementos não traçados o menor de entre eles e adicioná-lo aos elementos na intersecção de dois traços — neste caso, o valor 3; obtendo-se assim a nova matriz :

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 2 & 7 \\
\mathbf{2} & 11 & 0 & 0 \\
\mathbf{3} & 0 & 4 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

em que se subtraiu 3 unidades aos elementos x_{12}, x_{13}, x_{32} e x_{33} e adicionou-se 3 unidades ao elemento x_{21}.

Passo 2. Enquadrar o zero da linha 1 e traçar o zero da coluna 1; enquadrar a coluna 2 e traçar os zeros da linha 2; desta forma, obtém-se :

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\
\hline
\mathbf{1} & \boxed{\mathbf{0}} & 2 & 7 \\
\mathbf{2} & 11 & \boxed{\mathbf{0}} & \cancel{0} \\
\mathbf{3} & \cancel{0} & 4 & \boxed{\mathbf{0}} \\
\hline
\end{array}$$

Como ainda existe um zero, na posição (3, 3), enquadra-se também esse zero.

Como existem 3 zeros enquadrados, tem-se assim a solução óptima, que é a seguinte :

$$x_{11}^* = 1, \quad x_{22}^* = 1, \quad x_{33}^* = 1 \quad \text{e} \quad z^* = 25 + 17 + 18 = 60.$$