MULENGA, ALBERTO

Investigação Operacional

UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA

Maputo, 2006 Volume I

Prefácio

Investigação Operacional é uma metodologia administrativa que agrega um conjunto de ciências fundamentais para o processo de análise e preparação das decisões: a economia a matemática, a estatística e a informática. Não sendo necessário explicar a importância relativa que estas disciplinas têm para o processo de tomada de decisão ao nível empresarial ou mesmo individual, nestas disciplinas, são tomadas e usadas como ferramentas para a manipulação das variáveis usadas na análise e preparação das decisões.

O manual de apontamentos de Investigação Operacional, é apresentado em dois volumes num total de 12 capítulos, o volume 1, apresenta os 6 capítulos com cerca de 54 exemplos e 51 exercícios, dando mais relevância aos problemas de optimização linear, o volume II, apresenta 71 exemplos e 49 exercícios. Este volume dá mais ênfase a modelos de apoio a decisão. E cada capítulo, é apresentado os conceitos teóricos, exemplos resolvidos, uma lista de propostos com indicação das soluções e no fim uma lista de referências com pelo menos três livros

Os conteúdos dos capítulos são apresentados de forma simples e elementar para facilitar a compreensão dos mesmos. Sendo assim, muitos dos problemas, estão estruturadas de forma a motivar o estudante na criação de modelos económico matemático, sem deixar de lado a investigação económica das variáveis bem como soluções modelos elaborados

Índice

CAPÍTULO 4

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 6

Capitulo 1

1. INTRODUÇÃO

1.1 Definição da investigação operacional

O nome "Investigação Operacional-IO" apareceu pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial, quando equipas de investigadores procuravam desenvolver métodos para resolver determinados problemas de operações militares, O sucesso destas aplicações levou o mundo académico e empresarial a procurar utilizar as técnicas criadas em problemas de administração. Segundo Ackoff, R.L (1968), por volta de 1950 a investigação operacional ou Operations Research (Britânico), Management Science (Americano) e Pesquisa Operacional (Brasileiro), já era reconhecida como objecto de estudo nas universidades e no mundo académico.

Churchman (1971), no seu livro sobre "Introdução à teoria dos sistemas", considerou a Investigação Operacional, como a aplicação de instrumentos, técnicas e métodos científicos a problemas referentes ao funcionamento de um sistema, permitindo que os encarregados do seu controle, alcancem soluções óptimas para tais problemas. Para Richard, S.L (1974), a investigação operacional é uma aplicação sistemática da abordagem científica à investigação de problemas operacionais existentes ou previstos que requerem decisões pelos administradores. O Conselho da Sociedade de Pesquisa Operacional da Inglaterra considera a investigação operacional como o ataque da ciência moderna a problemas complexos. Como consequência da administração de grandes sistemas de homens, máquinas, materiais e dinheiro.

De um modo geral, a investigação operacional tem em vista trabalhar com factores inter-relacionados, aplicando sobre estes um conjunto de aspectos, diferentes técnicas quantitativas para permitir com um bom censo resolver problemas empresariais ao nível da administração.

A investigação operacional pode ser definida como:

- A arte de dar respostas óptimas a problemas que tratados de outra forma teriam respostas piores;
- O bom censo expresso em termos quantitativos;
- Ciência da preparação das decisões;
- A aplicação do método científico à direcção de uma empresa ou projecto, visando a optimização de suas decisões ou políticas, etc.

A abordagem mais característica da investigação operacional, utilizada pelos especialistas, consiste em procurar desenvolver um modelo científico do sistema em estudo, incorporando a medição ou quantificação de factores, tais como: o acaso e o risco: mediante os quais se podem prever e comparar os resultados através do controle da estratégia usada, do número de alternativas de decisão, etc. O objectivo da pesquisa operacional é ajudar ao gestor a estabelecer suas linhas de ação de maneira científica, como resultado do emprego do método quantitativo, para equacionar e solucionar os problemas existentes.

A Investigação Operacional tem sido vista pelos gestores e outros praticantes sob dois enfoques diferentes quanto à abordagem, mas coerentes e complementares na aplicação prática no campo da gestão empresarial:

a) Enfoque clássico - busca da solução óptima;
b) Enfoque actual - uso de modelos para identificação correcta do problema.

Pela natureza da investigação operacional muitas definições da investigação operacional podem ser feitas, todas estarão correctas se tiverem argumentos aceitáveis. Devemos salientar que historicamente o sucesso da investigação operacional sempre ficou relacionado com:

- A aplicação do método científico;
- A abordagem por equipa e interdisciplinar;
- O envolvimento no controlo e organização dos problemas dos sistemas (pessoas - máquinas) para a obtenção de soluções óptimas.

1.2 Características e técnicas da investigação operacional

Características da Investigação Operacional

As principais características da investigação operacional são:

1. **Visão sistémica** - o estudo da Investigação Operacional consiste em construir um modelo de um sistema real existente como meio de analisar e compreender o comportamento desta situação. Esta visão é atualmente a mais importante da tendência da administração. O método da visão sistémica consiste em considerar a empresa ou cada parte da mesma como um sistema com várias variáveis inter-relacionadas. O sistema aqui considerado pode existir atualmente ou pode estar em concepção. No primeiro caso, o objectivo do estudo tem sido de analisar o desempenho do sistema para escolher um curso de acções no sentido de aprimorá-lo. No segundo caso, o objectivo é identificar a melhor estrutura do futuro sistema.
2. **A abordagem por equipa** - que consiste no uso de conhecimentos científicos por equipas inter-disciplinares (formação de conjuntos e subconjuntos de equipas entre pessoal técnico, treinado, mestres, especialistas, etc.) para fazer um esforço conducente a determinação da melhor forma de utilização de recursos limitados. Esta característica multi-disciplinar de resolver os problemas organizacionais deu um novo enfoque a investigação operacional - a visão sistémica dos problemas.
3. **Uso de modelos matemáticos mais formais através das técnicas estatísticas e ou quantitativas** - esta característica facilita o processo de análise de decisão pela visualização da estrutura real em análise e pela representação das informações e suas inter-relações.
4. **Buscar a optimização da solução dum problema** - que consiste em seleccionar a alternativa que melhor conduzirá a maximização dos lucros ou minimização dos custos.
5. **Emprego de simulação sobre os modelos** - que consiste em imitar o funcionamento de um sistema real, que não pode ser compreendido tal como está, recorrendo a uma representação adequada para fins experimentais ou de estudo do sistema real, desde que o sistema real seja determinístico e não escolástico.

O desenvolvimento dos computadores digitais, face a sua velocidade de processamento, capacidade de armazenamento e recuperação das informações, constituiu um imenso progresso da Investigação Operacional. Outro facto que actualmente contribuí para o uso intensivo de modelos em análise de decisões é a disseminação dos micro-computadores, que se tomaram unidades de processamentos descentralizados dentro das empresas, o que leva aos profissionais da investigação operacional num trabalho conjunto com os informáticos a desenvolverem soflwares apropriados e modelos mais versáteis, rápidos e interactivos.

De uma forma geral, e segundo Taha, HA (1997), Andrade, EL (1998), um trabalho de Investigação Operacional, deve desenvolver-se seguindo as seguintes fases:

1. Definição do problema;
2. Construção do modelo;
3. Solução do modelo;
4. Validação do modelo;
5. Implementação da solução;
6. (*) Avaliação.

Técnicas da investigação operacional

A descrição sobre o conjunto das técnicas que compõem a investigação operacional, até aos nossos dias, não tem uma uniformidade. Assim, encontram-se "técnicas" designadas como "teorias", "métodos" ou "modelos" e vice-versa. Além disso, em cada uma das categorias, uma determinada técnica aparece com vários títulos diferentes; várias técnicas diferentes podem aparecer com o mesmo título e mesmo o nome investigação operacional aparece inserido numa outra categoria, etc.

Entre muitos autores, destacam-se Quesnay (1759), Walras (1874), Markov (1856 - 1922), Von Neumann (1937), Kantorovich (1939), Wicks e Yewdale (1971), Aekoff (1971), Duckworth (1972), etc., que contribuíram significativamente na divisão da Investigação Operacional em diversas categorias.

O critério usado na sucinta descrição foi o de tratar em separado, quando possível, as várias técnicas, teorias, métodos e modelos que precisamente são discutidos em muitas outras áreas do conhecimento científico.

1. Estatística matemática: teoria das probabilidades e estatística;
2. Teoria de informação e apoio a decisão: análise de decisão e jogos, problemas das filas de espera, gestão de estoques, planeamento e controlo de projectos, etc.,
3. Programação matemática: linear, inteira, dinâmica, não linear, problemas de transporte e distribuição ou afectação de recursos, etc.,
4. Simulação e método de Monte Cano, dinâmica industrial, análise de redes, etc.

Mesmo considerando que a análise quantitativa é importante para a tomada de decisão, é necessário esclarecer aos utilizadores das técnicas ou métodos quantitativos, que nem todos os problemas são susceptíveis de solução pelas técnicas quantitativas, Uma aplicação bem sucedida dos métodos quantitativos, implica uma interacção entre a ciências matemáticas e as ciências do comportamento, pois o sistema em estudo interage com seres humanos, pois:

- Nem todos factores de um dado problema podem ser quantificados quando tema variáveis qualitativas.
- Variáveis não controláveis dificultam ao máximo o processo de modelação do problema, fazendo com que os modelos sejam menos perfeitos.
- O uso de números e de equações, dá urna aparência de exactidão científica.
- O desejo de confrontar demais os métodos quantitativos pode ser perigoso, pois chega-se a soluções matemáticas que carecem de uma interpretação social.

(Modelos de Optimização Linear --- Modelos de Apoio a Decisão)

Matemática, Soluções exactas **Objectivo**: solução óptima	Teoria de Informação Soluções viáveis **Objectivo**: Gerir melhor o recurso e satisfazer os interesses de uma organização

Referências:

ACKOFF, RL, Sasieni, M.W (1968) - *Fundamentals of Operations Research*, John Wiley & Sans, |Inc USA

ANDRADE, EL (1998) - *Introdução à Pesquisa Operacional - métodos e modelos para a análise de decisão*, 2ª edição, editora LTC, RJ, Brasil

FARIA, AN (1978) - *Dinâmica da Administração - perspectivas e projectos*, editora LTC, Rio de Janeiro,

HILLIER, FS; Gerad. J.L (1995) - *Introduction to Operations Research* - sexth Edition, McGraw-Hill, International Editions, Singapure;

TARA, HA(1997) - *Operations Research au Introduction*, sixth edition, Prentice - Hall International, Inc.

Capítulo 2

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 INTRODUÇÃO

Designa - se por programação linear (PL) um conjunto de técnicas que permitem resolver os problemas de optimização, num sistema de recursos limitados, sendo lineares, quer a função objectivo, quer as restrições.

A importância especial da PL resulta não só das potencialidades dos seus algoritmos de resolução e da sua grande aplicação prática, mas também da sua génese de estar directamente relacionada com o desenvolvimento dos próprios conceitos fundamentais das teorias de optimização. Os principais desenvolvimentos teóricos da PL são devidos a Kantorovich (1939) e a um grupo de cientistas americanos que lançaram as bases da PL entre 1939 à 1951, nos quais se destacam os nomes de von Neumann, Harold, W.Kuhn e A. W.Tucker.

A programação linear lida-se com problemas que dizem respeito à atribuição e a distribuição de recursos entre as diversas tarefas ou actividades que devem ser realizadas. Normalmente, os recursos disponíveis não são suficientes para que todas as actividades sejam executadas no nível desejado. Assim, o que se procura, é encontrar a melhor distribuição possível dos recursos, de forma a atingir um valor óptimo objectivo (máximo para lucros) e (mínimo para custos).

Assim, um problema de programação linear é caracterizado por três elementos básicos:

1. Variáveis de decisão, que são o centro das atenções na resolução do problema;
2. Existência de um objectivo, expresso em termos das variáveis de decisão;
3. Existência de restrições à aplicação dos recursos, tanto em relação às quantidades disponíveis como em relação à forma de emprego.

Os estudos de programação linear permitem responder questões como:

1. Estando presentes certas condições de produção, qual a quantidade de um determinado produto, entre vários, que se deve produzir para obter o maior lucro possível?

2. Sendo impostas algumas especificações, qual é a composição da mistura que corresponde ao custo mínimo?
3. Estando impostas as condições de trabalho, como repartir o conjunto de mão-de-obra entre as diferentes tarefas e especialidades, com o objectivo de minimizar as despesas ou maximizar a eficiência?

Exemplo 2.1. Uma companhia de montagem de lâmpadas, usa dois modelos para a montagem: o modelo actual automático e o modelo antigo com acessória. Cada pessoa no modelo actual requer 1 hora de trabalho se vier do departamento de corte e 3 horas se vier do departamento de verificação. No modelo antigo, cada pessoa necessita de 2 horas de trabalho, se vier do departamento de corte e 4 horas de trabalho se, for do departamento de verificação. O número máximo de horas de trabalho por dia para o departamento de corte e de verificação é 32 e 84, respectivamente. Se a companhia recebe um lucro de 50 u.m. por cada lâmpada vinda do modelo actual e 80 u.m. do modelo antigo, quantas lâmpadas devem ser produzidas por dia em cada modelo de modo que a companhia maximize o lucro diário?

Resolução

Este é um exemplo típico de um problema de programação linear. Para tomar claro, as relações entre o objectivo e as restrições, apresenta-se a tabela 1.

Tabela 1.1. Resumo dos dados do problema

Departamento	**Horas de trabalho por pessoa**		**Número máximo de horas de trabalho**
	Modelo actual	**Modelo antigo**	
De corte	1	2	32
De verificação	3	4	84
Lucros por lâmpada	50	80	

2.1.1 Formulação do modelo matemático dos problemas de programação linear

O método usado para a formulação dos problemas de programação linear tem uma determinada lógica, ainda que esta não seja rigorosamente seguida:

1. Análise qualitativa do problema, que depende da experiência adquirida anteriormente, isto é, a sensibilidade de analisar e relacionar a informação;
2. Formulação do problema, i.é, a definição das variáveis de decisão, da função objectivo e das restrições;
3. Elaboração do modelo matemático que consiste na indicação das relações entre as variáveis de decisão, a função objectivo e as restrições.

Retomando ao exemplo 2.1, teremos:

Variáveis de decisão:

x_1 - número de lâmpadas produzidas no modelo actual por dia;

x_2 - número de lâmpadas produzidas no modelo antigo por dia.

Função objectivo:

O objectivo do administrador da companhia é decidir quantas lâmpadas são necessárias por dia para cada modelo, de modo que ele tenha o lucro máximo diário.

$L = 50x_1 + 80x_2 \rightarrow$ função objectivo (a)

Restrições

Restrições são inequações ou equações que representam as relações entre as quantidades produzidas, as composições das horas e a disponibilidade máxima do recurso (hora). Restrição para o departamento de corte: $1x_1 + 2x_2 \le 32$

Restrição para o departamento de verificação: $3x_1 + 4x_2 \le 84$

Como não podemos produzir um número negativo de lâmpadas, então adiciona-se a restrição de não negatividade: $x_1 \ge 0$ e $x_2 \ge 0$ ou usualmente $x_1, x_2 \ge 0$.

Partindo das situações anteriores, escreve-se o modelo matemático do problema de programação linear.

Maximizar $Z = 50x_1 + 80x_2 \rightarrow$ função objectivo

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 84 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Qualquer solução que satisfaz todas as restrições do modelo é uma solução possível (admissível). Por exemplo, a solução $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ é uma solução possível pois não viola nenhuma das restrições incluindo a de não negatividade. Para verificar basta substituir em cada uma das restrições:

1ª restrição: $1*2+2*5=12<32;$

2ª restrição: $3*2+4*5=26\leq 84;$

O lucro possível para esta solução é: $Z=50*2+80*5=500$ u.m.

Variando os valores a atribuir as variáveis de decisão, podemos encontrar outra solução admissível, entretanto o objectivo da optimização linear é encontrar entre todas as soluções possíveis, ***uma solução óptima possível***. Para que o processo não seja por tentativas, existem métodos específicos que podem chegar directamente a solução óptima. Para o exemplo 2.1, a solução óptima é: $x_1=20; x_2=6$ com $Z=1480$u.m.

No exemplo anterior assumimos que tanto a função objectivo como as restrições são todas lineares. Intrinsecamente assumimos duas proposições:

Proposição 1. Proporcionalidade - nos modelos de programação linear, a contribuição das variáveis de decisão na função objectivo e nas restrições é directamente proporcional aos valores que as variáveis assumem.

Proposição 2. Aditividade - a contribuição total de todas as variáveis na função objectivo e em cada restrição é igual a soma das contribuições individuais de cada variável.

Exemplo 2.2. Um alfaiate tem disponível 10 m^2 de algodão, 11 m^2 de seda e 15 m^2 de lâ. A confecção de um fato necessita de 2 m^2 de algodão, 1 m^2 de seda e 1 m^2 de lã, e um vestido gasta 1,2 e 3 m^2 dos mesmos tecidos, respectivamente. Se um fato é vendido à 30 um (unidades de medida) e um vestido por 50 u.m., quantas unidades de cada artigo fato ou vestido deve o alfaiate confeccionar de modo a obter maior lucro?

Resolução

	Fato	Vestido	Disponível
Algodão	2	1	16
Seda	1	2	11
Lã	1	3	15
Lucro da venda (um)	30	50	

O modelo matemático correspondente é:

Maximizar $Z = 30x_1 + 1x_2 \leq 16 \rightarrow$ função objectivo max $Z = f(x_1, x_2)$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 16 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_i; x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow$ conjunto de restrições incluindo a de não negatividade

Exemplo 2.3. Um individuo pretende fazer urna selecção dum conjunto de 5 alimentos básicos. Por forma a conseguir estruturar uma dieta que, do ponto de vista nutritivo, tenha como normas mínimas de calorias e vitaminas, respectivamente, 70 e 50 unidades, gastando o mínimo possível. Os preços de venda dos alimentos, bem como a sua composição em elementos nutritivos são dados pelo seguinte quadro.

Elemento nutritivo	Alimentos				
	A	B	C	D	E
Calorias	1	0	1	1	2
Vitaminas	0	1	0	1	1
Custo unitário	2	20	3	11	12

Elabore o modelo matemático do problema.

Resolução

Minimizar $W = 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 12x_5$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 \geq 70 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

Exemplo 2.4. Um agricultor precisa de 100 kg de Azoto (N), 120kg de Fósforo (P) e 120 kg de Potássio (K), para adubar a sua plantação. Ele tem duas possibilidades no mercado, sendo uma na forma líquida em tambores que contém 50 kg de N, 20 kg de P e 10 kg de K ao preço de 30 u.m cada; outra empresa fornece adubo em sacos, contendo 10, 20 e 40 kg de N, .P e K, respectivamente, ao preço de 20 u.m cada saco. Quantas embalagens de cada fonte deverá o agricultor comprar para suprir as suas necessidades pelo menor custo.

Resolução

Composição de adubo	Possibilidades de Mercado Tambor	Sacos	Necessidade mínima
Azoto	50	10	100
Fósforo	20	20	120
Potássio	10	40	120
Custo (u.m)	30	20	

O modelo matemático correspondente é:

Minimizar $W = 30x_1 + 20x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 50x_1 + 10x_2 \geq 100 \\ 20x_1 + 20x_2 \geq 120 \\ 10x_1 + 40x_2 \geq 120 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

2.1.2 Definição geral dos problemas de programação linear

Todos os problema de optimização linear (programação linear), podem ser representados na forma:

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \rightarrow$ função objectivo ou de oportunidades

Sujeito à $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \leq b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m \leq b_n \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$

Admite-se que, em lugar de maximizar, haja minimizar, e em lugar de menor ou igual ($\leq$) seja maior ou igual ($\geq$) ou mesmo igual (=).

Assim, para os problemas de maximização usa-se o sinal ($\leq$) e para os problemas de minimização usa-se o sinal ($\geq$). Se uma ou mais restrições apresentar o sinal de igualdade (=), esta pode ser substituída por duas inequações, em seguida uma das inequações deverá ser multiplicada por (-1), caso seja necessário, para satisfazer a função objectivo.

Por exemplo: $2x_1 + 3x_2 = 4$ equivale a escrever o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ 2x_2 + 3x_2 \ge 4 \end{cases}$

Na notação algébrica, o problema de programação linear pode ser representado na seguinte forma:

Maximizar $Z = \sum_{i=1}^{m} c_1 x_1 \qquad ; i = 1,2,..., m$

Sujeito à $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{il} x_j \le b_j \\ x_i \ge \end{cases} \qquad ; j = 1,2,..., n$

Ou ainda na forma matricial tem-se

Maximizar $Z = \sum CX$

Sujeito à $\begin{cases} AX \le B \\ x \ge 0 \end{cases}$

onde A é matriz dos coeficientes das restrições, C e B são os vectores linha e coluna respectivamente

2.1.3 EXERCICIOS PROPOSTOS

Exercício 2.1. Um padeiro dispõe de 150, 90 e 150 unidades dos ingredientes A, B e C respectivamente. Cada pão necessita de 1 unidade de A, 1 de B e 2 de C, e um bolo precisa de 5, 2 e 1 unidades de A, B e C, respectivamente. Se um pão é vendido a 35 u.m., e um bolo é vendido por 80 u.m. Como deve o padeiro distribuir as matérias-primas disponíveis de modo a obter o maior lucro? Elabore o modelo matemático correspondente a este problema de programação linear.

Exercício 2.2. Cada kg do alimento A custa 85 um, e contém 2 unidades de proteína, 6 de hidrato de carbono e 1 de gordura. O alimento 8 que se pode comprar a 45 u.m. por kg, contém 1, 1 e 3 unidades, daqueles produtos, respectivamente. Supondo que as necessidades semanais mínimas de uma pessoa são 8 unidades de proteínas, 12 de hidrato de carbono e 9 de gordura. Elabore o modelo económico - matemático de forma que a pessoa economize os seus gastos.

Exercício 2.3. Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2, O lucro por unidade de P1 é de 100 contos e o lucro unitário de P2 é de 150 contos. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas actividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa e resolva o modelo do sistema de produção mensal com o objectivo de maximizar o lucro da empresa.

Exercício 2.4. A empresa Sementes de Moçambique (SEMOC), pretende semear arroz e milho, dispondo para tal de áreas que não excedem, respectivamente, 3 e 4 hectare nos arredores de Boane. Por outro lado, as suas disponibilidades em trabalho são apenas de 9 horas diárias. Admitindo que, por cada hectare semeado de arroz é necessário 1 hora de trabalho diário e por cada hectare de milho são necessárias 2 horas. Sabendo que por cada hectare de arroz semeado o lucro é de 5 u.m. e por cada hectare de milho 2 u.m, formule o problema como um problema de programação linear.

Exercício 2.5. Dois países A e B, emprestam dinheiro a outro pais C. Por cada unidade monetária concedida pelo pais A, este cobra anualmente do pais C, uma tonelada de cortiça, 5 toneladas de trigo e 3 toneladas de peixe. Por cada unidade monetária concedida pelo país 8, são cobrados anualmente ao país C, uma tonelada de cortiça, 2 toneladas de trigo e 8 toneladas de peixe. Anualmente o país C não tem disponíveis mais de 20 toneladas de cortiça, 100 toneladas de trigo e 120 toneladas de peixe. Sabendo que por cada unidade monetária emprestada, o país C recebe do país A 500 espingardas e do país 8 300 metralhadoras, formule o problema de programação linear que maximize o número de armas que C pode adquirir por este processo.

Exercício 2.6. Uma companhia de aluguer de camiões possui dois tipos; o tipo A com 2 m^3 de espaço refrigerado e 4 m^3 de espaço não refrigerado e o tipo B com 3 m^3 refrigerado e 3 m^3 não refrigerado. Uma fábrica de produtos alimentícios precisou transportar 9 m^3 de produto refrigerado e 12 m^3 de produto não refrigerado. Quantos camiões de cada tipo deve ser ela alugado, de modo a minimizar o custo, se o aluguer de um camião do tipo A é 30 um. por 1cm e do B é 40 u.m. por km.

Formule o problema de programação linear da fábrica que necessita de transportar os seus produtos.

Exercício 2.7. Uma pequena manufactura produz dois modelos, Standart e Luxo, de um certo produto. Cada unidade do modelo standart requer 3 horas de lixação e 1 hora de polimento. Cada unidade do modelo de luxo exige 1 hora de lixação e 4 horas de polimento. A fábrica dispõe de 2 lixadores e 3 polidores, cada uma trabalha 40 horas semanais. As margens de lucro são 24 e 32 unidades de medida, respectivamente, para cada unidade standart e luxo. Não existem restrições de demanda para ambos os modelos. Elabore um modelo de programação linear que permita calcular a produção semanal que maximiza a margem total de lucro do fabricante.

Exercício 2.8. Um médico tem de escrever um artigo, para publicação numa revista, subordinada ao tema da composição de uma refeição à base de carnes e legumes, em quantidades de acordo com um mínimo nutricional exigido e de modo a que o custo dessa refeição fosse mínimo. Ele sabe que cada refeição deve conter um mínimo de 8 unidades de carbohidratos, 15 unidades de proteínas e 6 unidades de vitaminas.
Sabe também, que o custo de cada unidade de carne é de 5 u.m. e o custo de cada unidade de legumes é de 4 u.m.
O número de unidades dos três factores contidos em cada unidade dos dois alimentos acima descritos são:

	Carne	Legumes
Carbohidratos	3	1
Proteínas	4	4
Vitaminas	1	1

O dietista pretende indicar que quantidades de cada alimento devem ser compradas para que se possa obter o mínimo nutricional requerido com um custo mínimo. A que conclusão terá chegado?

Exercício 2.9. Um joalheiro produz colares e braceletes. As margens de lucro são \$ 32,00 para os colares e \$ 24,00 para os braceletes. Os colares requerem 2 horas para o corte das pedras, 7 horas para a montagem e 6 horas para o polimento. Os braceletes requerem 5 horas para o corte das pedras, 7 horas para a montagem e 3 horas para o polimento. O joalheiro trabalha sozinho e dispõe mensalmente de 40 horas para o corte das pedras, 70 horas para a montagem e 48 horas para o polimento. Formule o problema apresentado como um problema de progressão linear.

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL PELO MÉTODO GRÁFICO

O método gráfico pode ser aplicado para resolver os problemas de programação linear de forma eficiente, apenas quando a função objectivo e o conjunto das restrições tiver duas variáveis de decisão.

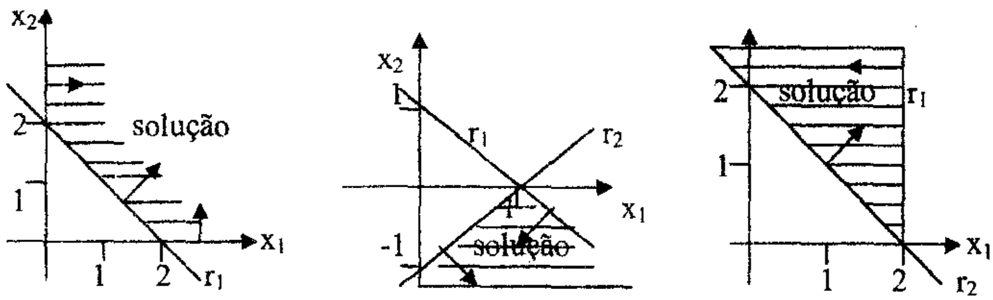
Para compreender o procedimento de resolução, comecemos por introduzir a noção de domínio ou conjunto solução de um sistema de inequações.

2.2.1 Domínio das soluções admissíveis

Dado um sistema de inequações, para encontrar o domínio solução, deve-se representar cada uma das inequações no sistema de coordenadas rectangulares de Descartes, em seguida indicar a intersecção de todos os semi-planos que satisfazem as inequações. É precisamente a área intersecção de todos os semi-planos, o conjunto ou domínio solução do sistema de inequações.

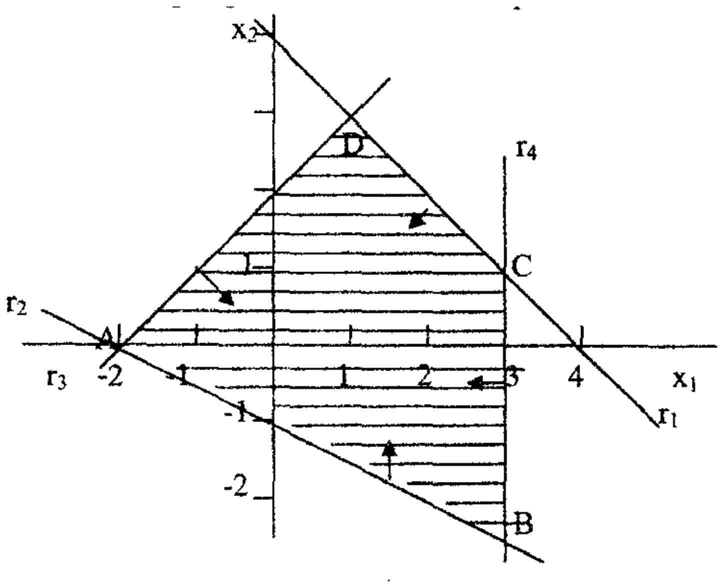
Exemplos:

a) $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$



Agora que podemos determinar o conjunto solução, vamos da função $f = x_1 - 2x_2 + 4$ sobre o polígono convexo X dado pelo sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge -2 \\ x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$



Os pontos A, B, C e D são chamados pontos extremos do polígono.

As coordenadas de cada ponto podem ser obtidas resolvendo o sistema de duas equações de rectas que passam por cada ponto.

Assim, a solução do Sistema $\begin{cases} x_i + 2x_2 = -2 \\ x_i - x_2 = -2 \end{cases}$ define as coordenadas do ponto A (-2;0)

Assim: $\begin{matrix} A = r_2 \cap r_3 \to A(-2;0); \quad B = r_2 \cap r_4 \to B(3,5-5/2); \\ C = r_1 \cap r_4 \to C(3,1)\ e\ D = r_1 \cap r_3 \to D(1;3) \end{matrix}$

Calculando o valor da função f em cada ponto extremo temos:

f(A) = 2; f(B) = 12; f(C) =5 e f(D) = -1, portanto, o máximo da função f sobre X é 12 e ocorre no ponto B e o mínimo é -1, ocorre no ponto D.

Para os problemas de programação linear com inequações a duas variáveis, o método gráfico consiste em construir através das restrições um conjunto das soluções possíveis e tomar o ponto máximo (para maximização) ou mínimo (para minimização) como solução óptima.

Vejamos através de um exemplo.

Resolver graficamente o problema de programação linear:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito à $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$

Passo 1. Transformar as inequações em equações:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito à $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 12 & r_1 \\ 2x_1 + x_2 = 14 & r_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 6 & r_3 \\ x_1 = 0; x_2 = 0 & r_4, r_5 \end{cases}$

Passo 2. Representar num mesmo sistema de coordenadas, todas rectas e considerar os semi-planos que satisfazem as inequações correspondentes.

R_1:

x_1	x_2
0	3
-4	0

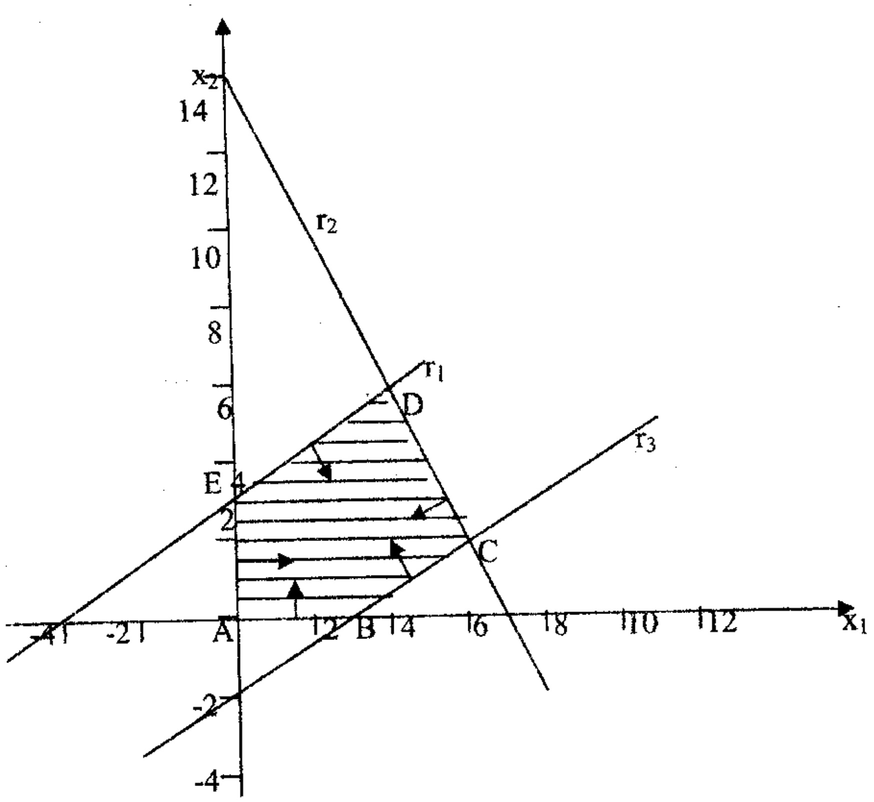
R_2:

x_1	x_2
0	14
7	0

R_3:

x_1	x_2
0	-2
3	0

R_4: $x_2=0$ R_5: $x_1=0$



Como encontrar o ponto óptimo?

Conhecida a região, domínio solução ou conjunto duas possibilidades para chegar a solução.

Primeira possibilidade:

1. Calcular as coordenadas de todos os pontos que estão nas extremidades da área do domínio solução (neste caso os pontos são A, B, C, D e E).
2. Calcular o valor da função objectivo para cada ponto. O valor máximo é a solução óptima para o problema de maximização e o mínimo é solução óptima para o problema de minimização

Da figura anterior teremos:

$A = r_4 \cap r_5 = \{x_1 = 0 \wedge x_2 = 0\} \Rightarrow A(0;0)$ $\quad Z(A) = 0 + 0 = 0;$

$B = r_3 \cap r_4 = \{2x_1 - 3x_2 = 6 \wedge x_2 = 0\} \Rightarrow B(3;0)$ $\quad Z(B) = 9 + 0 = 9;$

$C = r_2 \cap r_3 = \{2x_1 + x_2 = 14 \wedge 2x_1 - 3x_2 = 6\} \Rightarrow C(6;2)$ $\quad Z(C) = 18 + 4 = 22;$

$D = r_1 \cap r_2 = \{-3x_1 + 4x_2 = 12 \wedge 2x_1 + x_2 = 14\} \Rightarrow D(4;6)$ $\quad Z(D) = 12 + 12 = 24$

$E = r_1 \cap r_5 = \{-3x_1 + 4x_4 = 12 \wedge x_1 = 0\} \Rightarrow E(0;3)$ $\quad Z(E) = 0 + 6 = 6$

Segundo os valores da função objectivo e pelo objectivo exposto a solução óptima é $SPL = \{x_1 = 4; x_2 = 6$ com $Z_{\max} = 24$ unidades de medida}.

Segunda possibilidade:

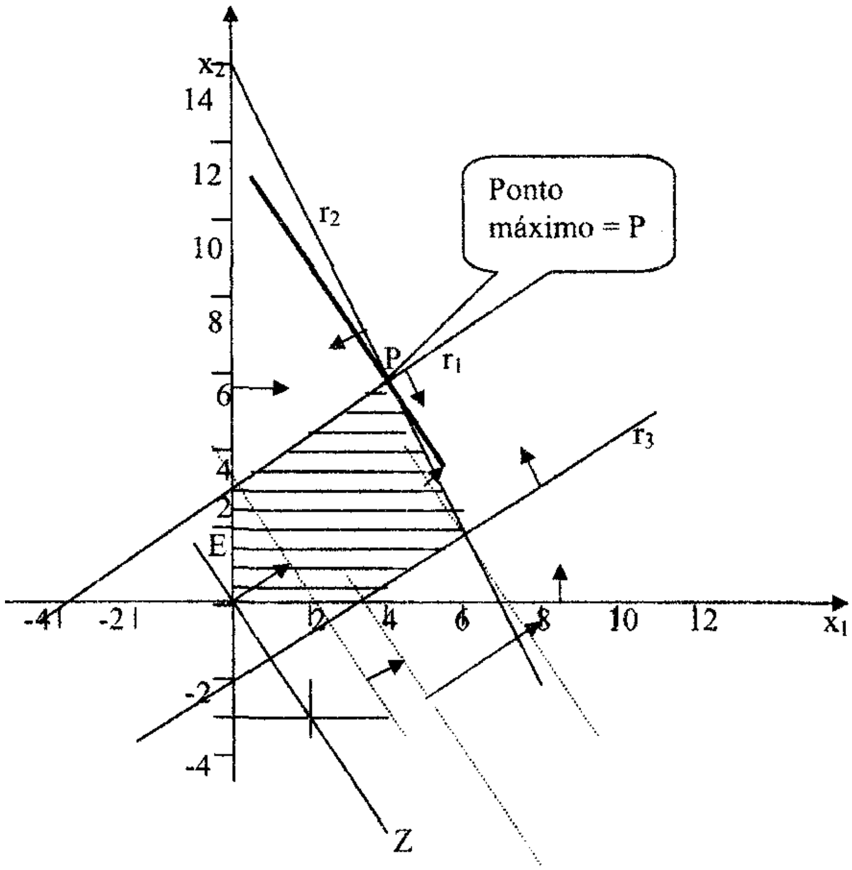
A segunda possibilidade e mais prática na abordagem da programação linear consiste em:

1. Igualar a função objectivo a zero, o que significa que o valor mínimo de é igual a zero e em seguida expressar x_2 em função de x_1 ou vice-versa: $x_2 = f(x_1)$, é a recta Z.
2. Traçar a recta Z no mesmo sistema cartesiano onde estão todas restrições anteriores. A recta z ou $x_2 = f(x_1)$, deve passar pelos pontos $P_0(0,0)$ e por um outro qualquer $P_1(x_1,x_2)$.
3. Deslocar ou traçar uma família de rectas paralelas à função objectivo no sentido desejado, até atingir o primeiro ponto (min) ou o último ponto (max). Este é o ponto óptimo. As coordenadas deste ponto definem as quantidades a combinar na função objectivo.

$$Z = 3x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3x_1}{2}$$

Recta

x_1	x_2
0	0
2	-3



$$P = r1 \cap r2 \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \quad /(*-4) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 12 \\ -8x_1 - 4x_2 = -56 + \end{cases} \\ \hline -11x_1 + 0 = -44 \end{array} \text{ de onde } x_1 = 4$$

Substituindo na equação 2, temos $x_2 = 6;$ logo solução é

$S = \{x_1 = 4; x_2 = 6$ com $Z_{\max} = 24$

Observações:

Nos problemas de programação linear podem ocorrer os seguintes casos:

- Uma única solução, esta é obtida num ponto extremo do domínio solução;
- Duas ou mais soluções (solução múltipla), quando a função objectivo assume o seu valor óptimo em mais de um ponto extremo;
- Uma solução infinita, geralmente quando as restrições estão mal elaboradas, pois tendo recursos finitos não se poderia aumentar infinitamente os lucros ou despesas;
- Não ter nenhuma solução, quando as restrições não apresentam um plano comum.

Exemplo 2.5. Uma pessoa precisa de 10, 12, c 12 unidades dos produtos químicos A, B e C, respectivamente para o seu jardim. Um produto líquido contém 5,2 e 1 unidades de A, B e C, respectivamente por vidro; um produto em pó contém 1, 2 e 4 unidades de A, B e C, respectivamente por caixa. Se o produto líquido custa 3 u.m. por vidro e o produto em pó custa 2 u.m. por caixa, quantos vidros e quantas caixas ele deve comprar para minimizar o custo e satisfazer as necessidades?

Resolução

A seguinte tabela resume os dados do problema

	Unidades por vidro	Unidades por caixa	Unidades necessárias
Produto A	5	1	10
Produto B	2	2	12
Produto C	1	4	12
Preço (u.m.)	3	2	

O modelo matemático é:

Minimizar $W = 3x_1 + 2x_2$ Recta W, se $W = 0$ então $x_2 = -\frac{3x_1}{2}$

Sujeito à $\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 1x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ as equações são $\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 = 10 & r_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 12 & r_2 \\ 1x_1 + 4x_2 = 12 & r_3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

R_1:

x_1	x_2
0	10
2	0

R_2:

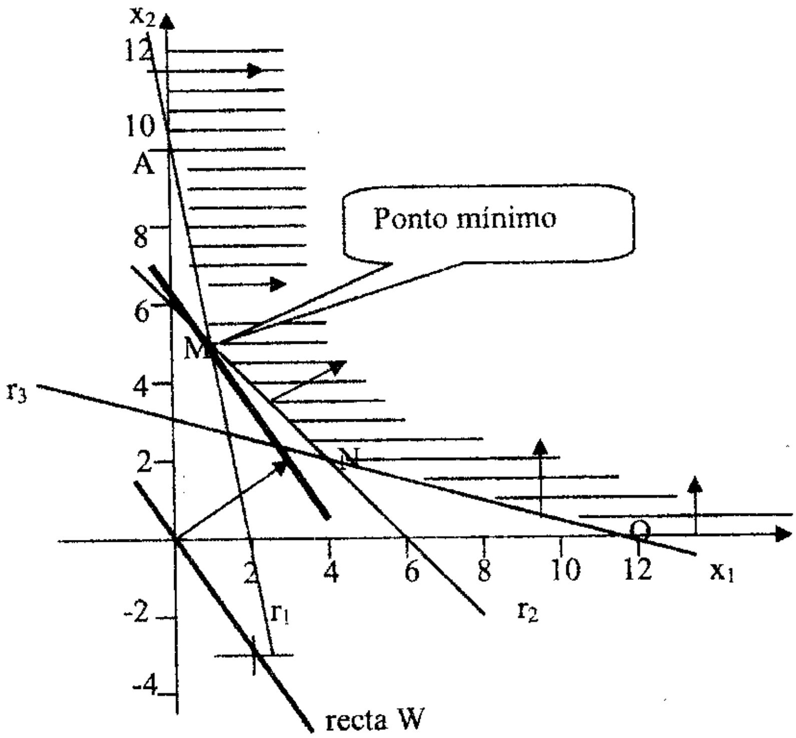
x_1	x_2
0	6
6	0

R_3:

x_1	x_2
0	3
12	0

W:

x_1	x_2
0	0
2	-3



A, M. N e O são os pontos extremos do domínio solução e M é o ponto mínimo. $M = r1 \cap r2,$ resolvendo o sistema de duas equações temos:

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \text{solução} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 15 \end{cases} \quad ; W_{\min} = 3*1 + 2*5 = 13$$

Resposta: a pessoa deve comprar 1 vidro e 5 caixas e terá um custo mínimo de 13 unidades monetárias.

Exemplo 2.6. Uma empresa pode recorrer à utilização de dois computadores A e B para obter a emissão dos recibos aos seus clientes. Cada período de utilização do computador A é de 4 horas, custa à empresa 20 u.m. e obtém-se a emissão de 1200 recibos, enquanto que um período de utilização do computador B é de 3 horas e custa a empresa 50 u.m., obtendo em contrapartida 1900 recibos. Sabendo que a empresa não consegue obter automaticamente, a emissão de todos os recibos, nas 84 horas e com os 760 u.m. que dispõe mensalmente para a utilização dos computadores A e B, como é que se pode programar a utilização destes, de modo a obter o máximo de recibos.

Resolução

Tabela auxiliar dos dados.

	Computador A	Computador B	Disponível por mês
Horas por período	4	3	84
Custo por período	20	50	760
Recibos por Computador /p	1200	1900	

O modelo do problema é:

Maximizar $Z = 1200x_1 + 1900x_2$ recta $Z = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{12x_1}{19}$

Sujeito à $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 84 \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 760 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 84 & r_1 \\ 20x_1 + 50x_2 = 760 & r_2 \\ x_1 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$

R_1:

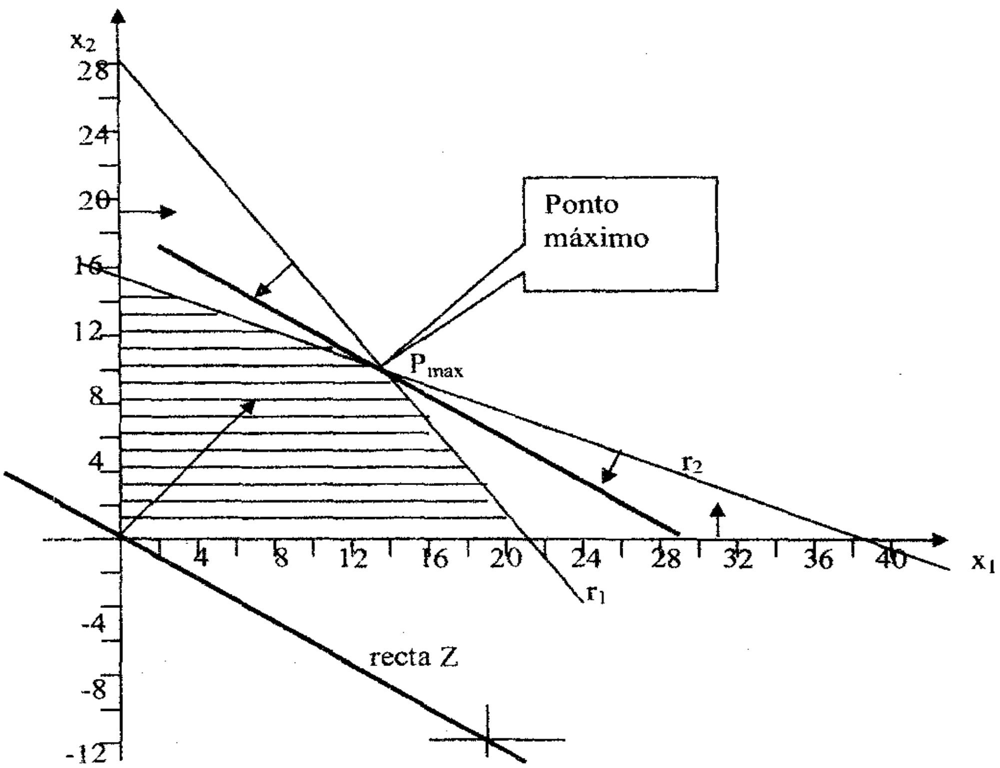
x_1	x_2
0	28
21	0

R_2:

x_1	x_2
0	15.5
38	0

Z:

x_1	x_2
0	0
19	-12



O ponto $P_{\max} = R1 \cap R2$ e do sistema $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 84 \\ 20x_1 + 50x_2 = 760 \end{cases}$ 68

Calculamos os valores: $x_1 = \dfrac{68}{7}; x_2 = \dfrac{96}{7}; Z_{\max} = \dfrac{244400}{7}$

Resposta: a empresa deve programar utilizar 9.71 vezes o computador A e 13.71 vezes o computador B. O número máximo de recibos que irá emitir será igual a 34914.

Resumo:

Teorema 1. (teorema fundamental de programação linear): se existe um valor óptimo da função objectivo num problema de programação linear, este valor ocorre em um ou mais pontos extremos da região das soluções admissíveis.

Teorema 2 (teorema de existência de solução): Dado um problema de programação linear e S o conjunto solução da função objectivo $Z = ax_1 + bx_2$

- Se S é uma área fechada, então existe um máximo e um mínimo para z;
- Se S não é uma área fechada e a > 0 e b > 0, então existe apenas o mínimo da função z e não existe o ponto máximo sobre 5;
- Se S é um conjunto vazio, não existe nem máximo nem mínimo da função z.

2.2.2 Procedimento do método

As regras gerais para a resolução dos problemas de programação linear pelo método gráfico, resumem-se nos passos:

Passo 1. Para um problema prático. Destacar e colocar numa tabela as informações relevantes;

Passo 2. Escrever o modelo matemático do problema usando a sequência:

- Introduzir as variáveis de decisão e escrever a função objectivo;
- Escrever as restrições do problema, usando inequações ou equações;
- Escrever as restrições de não negatividade.

Passo 3. Representar num gráfico o conjunto solução. De acordo com o teorema 2 se existe solução, calcular as coordenadas deste ponto extremo.

Passo 4. Usando as coordenadas do passo 3, calcular o valor da função objectivo;

Passo 5. Interpretar a solução óptima, em função do enunciado do problema original.

2.2.3 EXERCíCIOS PROPOSTOS

Exercício 2.9. Uma carpintaria deseja estabelecer um programa diário de produção dos seus artigos. Actualmente, a carpintaria faz apenas dois produtos: mesa e armário, ambos de uni só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a carpintaria tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão-de-obra, cujas disponibilidades diárias são 12 m^2 e 8 homens por hora (H.h), respectivamente.

O processo de produção é tal que, para fazer 1 mesa a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 H.h de mão-de-obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 3 m^2 de madeira 1 H.h de mão-de-obra. Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá uma margem de contribuíção para lucro de 4 u.m, e cada armário, de 1 u.m.

a) Fomiule o modelo de programação linear que descreve este problema.
b) Usando o método gráfico, resolva o problema do fabricante de modo a encontrar o programa de produção que maximiza a margem de contribuição para lucro.
(***Resp***: $x_1 = 4; x_2 = 0; Z_{\max} = 16$ u.m.)

Exercício 2.10. Um fabricante dispõe de 24, 37 e 18 quilos de madeira, plástico e aço, respectivamente. O produto A requer 1, 3 e 2 quilos de madeira, plástico e aço e o produto 8 requer 3, 4 e 1 quilos, respectivamente. Se A é vendido por 20 u.m e B por 30 u.m, quantos quilos de cada produto ele deve fazer de modo a obter o máximo rendimento bruto.

Escreva o modelo e resolva-o gráfleamente. (***Resp***: $x_1 = 3; x_2 = 7; Z_{\max} = 270$ u.m.)

Exercício 2.11. A companhia Cervejas de Moçambique precisa, de 90, 120 e 260 caixas de cerveja de alta, média e baixa qualidades, respectivamente. Existem duas fábricas: a cerveja 2M que produz por dia 10, 30 e 40 caixas de alta, média e baixa qualidades e a cerveja Laurentina que produz por dia 20, 10 e 30 caixas, respectivamente. Se o custo operacional de cada fábrica for de 20 u.m por dia, durante quantos dias deve funcionar cada fábrica de modo a se minimizar o custo e satisfazer as necessidades da companhia.

(***Resp***: $x_1 = 5; x_2 = 2; W_{\min} = 140$ u.m.)

Exercício 2.12. Um paciente num hospital necessita no mínimo de 84 unidades de um medicamento Ml, e 120 unidades de outro medicamento M2 por dia. Cada grama da substância A contém 10 unidades da Ml e 8 unidades da M2 e cada grama de substância B contém 2 unidades da Ml e 4 unidades da M2. Se cada grama de A custa 3 u.m e de 8 custa 1 u.m, quantas gramas de cada substância A e B, que o paciente deve tomar por dia de modo que ele melhore e minimize o seu dinheiro. Qual é o valor mínimo que ele vai gastar por dia. (***Resp***: $x_1 = 4; x_2 = 22; W_{\min} = 34$ u.m.)

Exercício 2.13. Usando o método gráfico, resolva as seguintes alíneas dos problemas de programação linear.

a) Maximizar $Z = 5x_1 + 5x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

(***Resp***: $x_1 = 4; x_2 = 2; Z_{\max} = 34$ u.m.)

b) Minimizar $W = 10x_1 + 30x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 16 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

(***Resp***: $x_1 = 14; x_2 = 0; W_{\min} = 140$ u.m.)

c) Maximizar $Z = 3x_1 + 4x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

(***Resp***: $x_1 = 2.4; x_2 = 2.4; Z_{\max} = 16.8$ u.m.)

d) Minimizar $W = 20x_1 + 10x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ 2x_1 + x_2 \le 26 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 34 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

(***Resp***: $x_1 = 3; x_2 = 8; W_{\min} = 140$ u.m.)

2.3 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PELO MÉTODO SIMPLEX

2.3.1 Variáveis de folga, excesso e não restritas

Em todos os problemas anteriores, usamos os sinais ($\le$) e ($\ge$) nas inequações das restrições e depois resolvemos o problema assumindo que todas variáveis eram não negativas. Nesta secção vamos definir dois tipos especiais de variáveis: as variáveis de folga e de excesso, associadas com as restrições da forma $\le$ e $\ge$ respectivamente, também faz-se uma introdução do conceito de variáveis não restritas, cujo valor pode ser positivo, zero ou negativo.

Variável de Folga

Introduz-se uma variável de folga, para cada restrição do tipo $\leq$ no primeiro membro da inequação e transfoma-se esta em equação.

Uma variável de folga representa a diferença entre o limite máximo de um determinado recurso e as quantidades do mesmo recurso que forem usadas pelas diferentes actividades. Por exemplo, matemáticamente a restrição $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ é equivalente a $6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$ e $x_3 \geq 0,$ a variável de folga x_3 representa a quantidade do recurso que não foi utilizada: $x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2$.

Variável de Excesso

Restrições do tipo $\geq$ normalmente referem-se a quantidade mínima necessária que deve ser utilizada na combinação de diferentes actividades. A introdução de uma variável de excesso numa inequação, transforma esta em equação.

As variáveis de excesso representam o excesso da quantidade do recurso obtido pela combinação das actividades em relação ao recurso mínimo necessário. Por exemplo, a restrição $x_1 + x_2 \geq 80,$ matemáticarnente é equivalente a $x_1 + x_2 - x_3 = 80$ e $x_3 \geq 0.$
A condição de não negatividade de x_3, significa que a quantidade atribuída a variável de excesso foi produzida na combinação das actividades x_1 e x_2. ($x_3 = x_1 + x_2 - 80$).

Variável não Restrita

Nos modelos passados assumimos a condição de não negatividade para todas variáveis. Suponhamos que num dado problema uma variável possa assumir qualquer valor real. Por exemplo:

Maximizar $Z = 0.20x_1 + 0.15x_2 + 0.25x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 0.20x_1 + 0.15x_2 + 0.25x_3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_3 \ nao \ restrito \ ou \ x_3 \in IR \end{cases}$

A variável x_3 pode ser de excesso ou folga. Em termos matemáticos a variável não restrita é substituida por duas variáveis não negativas: $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ onde $x_3^+; x_3^- \geq 0$.

- Se $x_3^+ \geq 0$ e $x_3^- = 0$ então x_3^+ é variável de folga;
- Se $x_3^- = 0$ e $x_3^+ \geq 0$ então x_3^- é variável de excesso;
- Se $x_3^+ \geq 0$ e $x_3^- = 0$, o problema de propgramação linear não tem solução.

De um modo geral, o modelo será:

Maximizar $Z = 0.20x_1 + 0.15x_2 + 0.25x_3^- - 0.25x_3^-$

Sujeito à $\begin{cases} 0.20x_1 + 0.25_2 + x_3^+ - x_3^- = 20 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0 \end{cases}$

Resumo:

1. Uma inequação do tipo $\leq (\geq)$ converte-se em uma equação se for adicionada a variável de folga (excesso) no primeiro membro.
2. Um modelo de programação linear está na forma padrão (standard) se:
    - Todas as restrições (com excepção das restrições de não negatividade) forem equações, com os valores do segundo membro não negativos;
    - Todas as variáveis são não negativas;
    - A função objectivo é do tipo de maximização ou minimização.
3. Para tomar o valor do segundo membro de uma inequação não negativo, multiplica-se ambos os membros desta por (-1);
4. Se existe uma variável não restrita, ao passar o problema da PL para a forma padrão, esta variável deverá ser substituida por duas variáveis não negativas;
5. A maximização de $Z = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ é equivalente a minimizar $-Z = -f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Exemplo 2.7. Escrever os seguintes problemas de programação linear na forma padrão.

Modelo do Problema PL   Forma padrão do modelo do problema de PL

a) Max $Z = 30x_1 + 50x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1 + 2x_2 \le 11 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

maximizar $Z = 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$

b) Min $W = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Minimizar $W = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Sujeito à $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 = 12 \\ 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$

c) Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \ge -5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_1, x_2 \ge 0; x_3 \in IR \end{cases}$

Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- + 0x_4 + 0x_5 - Ma_1$

Sujeito à $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_4 + 0x_5 + 0a_1 = 5 \\ -6x_1 + 7x_2 + -9x_3^+ + 9x_3^- + 0x_4 + x_5 + 0a_1 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- + 0x_4 - 0x_5 + a_1 = 10 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5, a_1 \ge 0 \end{cases}$

Até agora, foi apresentado o método gráfico para a resolução dos problemas de programação linear nos quais só tinhamos duas variáveis de decisão. Quando o número das variáveis aumenta, este método ainda que seja correto toma a procura de solução muito trabalhosa. Uma alternativa deste método é a utilização do método simplex.

O Método Simplex foi apresentado pelo G.Danztig (1947), como um método prático para a resolução dos problemas de programação linear. O Simplex pode ser descrito como um processo matricial para resolver problemas de programação linear na forma padrão.

Actualmente o método simplex é urna das ferramentas fUndamentais de resolução dos problemas de programação linear nos diversos casos em que eles se apresentam. Nesta abordagem serão apresentados em separado os algorítmos de resolução para cada um dos casos. Deve-se salientar que em todos casos existem 4 etapas fundamentais.

1. ***Tabela simplex inicial***. A tabela simplex inicial para um problema de maximização de programação linear é como se segue.

V.básicas (base)	x_1 x_2 ... x_m	x_{m+1} ... x_{m+n}	Recursos-Termos Independentes
x_{m+1} x_{m+2} ... x_{m+n}	a_{11} a_{12} ... a_{1m} a_{21} a_{22} ... a_{2m} .... a_{n1} a_{n2} ... a_{nm}	1 0 ... 0 0 1 ... 0 .... 0 0 ... 1	b_1 b_2 ... b_n
Z	$-c_1$ $-c_2$ ... $-c_m$	0 0 0	0

- Da tabela inicial, nota-se que as variáveis básicas (base) são todas variáveis de folga ou de excesso;
- Os coeficientes - c_i, são opostos da função objectivo e são importantes na indicação da coluna pivô, por isso são chamados indicadores da coluna pivô;
- O elemento no canto inferior direito é zero, ele corresponde ao valor da função objectivo inicial.

2. ***Determinação do elemento pivô***. Um elemento pivô de uma tabela simplex é obtido da seguinte forma:

- Escolhe-se na linha dos coeficientes da função objectivo, b maior elemento negativo (max) ou o maior elemento positivo (mm), e a coluna que contém este elemento chama-se coluna pivô;
- Divide-se cada termo independente pelo correspondente elemento positivo da coluna pivô. A linha que apresentar o menor quociente positivo é chamada linha piv6;
- O elemento que situa-se no cruzamento entre a linha pivô e a coluna pivô é chamado elemento pivô.

Se a tabela não tem nenhum indicador negativo (max) ou positivo (mm), esta é uma tabela terminal e não tem pivô.

3. **Cálculo da nova tabela simplex**. Seja T_1 a tabela simplex com n linhas e *m+n* colunas, cujo o elemento pivô é a da matriz A. Uma nova tabela T_2 é calculada a partir da tabela T_1, usando operações elementares sobre as linhas da matriz A de tal

forma que apareça um “1” na posição pivô e zeros “0” nas outras posições da coluna pivô, i.é:

- Divide-se cada elemento da linha pivô l_i da tabela T_1 pelo elemento pivô obtendo- se a correspondente linha na tabela T_2 (l_i).

$$l_i = \frac{1}{a_{ij}} * l_i$$

- Se a coluna pivô de T_1 é denotada por x_1, então a correspondente coluna de T_2, será denotada também por x_j;
- Cada uma das outras linhas l_k' da tabela T_2 é obtida subtraindo o múltiplo conveniente da linha l_i' 1 à linha l_k 4, onde $k = 1, n$.

4. ***Interpretação da tabela terminal*** - Depois de tantas repetições das etapas (2) e (3), chega-se a uma tabela terminal, a qual não tem nenhum indicador de pivô negativo (max) ou positivo (mim).

V.básicas (base)	x_1 x_2 ... x_m	x_{m+1} ... x_{m+n}	Termos Independentes
x_1	1 0 ... 0	a* ... a*	b_1^*
x_2	0 1 ... 0	a* ... a*	b_2^*
...	....	....	...
x_m	0 0 ... 1	a* ... a*	b_n^*
Z	C_1^* C_2^* ... C_m^*	c* ... c*	Z_0

- Zo - é o valor óptimo da fimção objectivo;
- x_j - tem uma raiz diferente de zero se estiver marcado por 1 numa única posição da coluna correspondente e zeros nas restantes linhas (x_j pertence a base).
- x_i é igual a zero se não estiver na base, apresentando óbviamente um $c_i \neq 0$.

2.3.2 Maximização com restrições da forma $\leq$

Os problemas de maximização com restrições da forma $\leq$, são resolvidos aplicando-se o simpelx directo. Se houver alguma restrição da forma $\geq$ou mesmo = esta deverá ser transformada a forma canónica do problema de maximização.

Os passes gerais para os problemas de maximização são:

Passo 1. Escrever o problema na forma canónica ou na forma padrão;

Passo 2. Introduzir as variáveis de folga $(+x_{m+n})$ e rescrever o sistema inicial na forma padrão;

Passo 3. Apresentar a tabela simplex inicial;

Passo 4. Se a tabela simplex inicial tiver algum valor negativo na linha da função objectivo e na coluna correspondente haver algum valor positivo, determinar o elemento pivô e realizar as operações necessárias para obter a nova tabela;

Passo 5. Repetir o processo do passo 4 até que todos os indicadores da linha z sejam positivos. Assim chega-se à tabela terminal e deve-se interpretar a solução obtida.

Exemplo 2.8. Resolver o seguinte problema de programação linear pelo método simplex.

Maximizar $Z = x_1 + 9x_2 + x_3$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$

Resolução

O problema já está na forma canônica, portanto, vai-se introduzir as variáveis de folga.

Maximizar $Z = x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	1	**2**	3	1	0	9 ← 9/2= **4.5** min
x_5	3	2	2	0	1	15 → 15/2=7.5
Z	-1	-9	-1	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2 → $l_1' = ½*l_1$
x_5	2	0	-1	-1	1	6 → $l_2'=l_2 - 2l_1'$
Z	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2 → $l_3 = l_3+9l_1'$

Solução: $Z_{\max} = 81/2, x_1 = 0, x_2 = 9/2, x_3 = x_4 = 0, x_5 = 6$

Exemplo 2.9. Resolver o problema do alfaiate pelo método simplex.

Max $Z = 30x_1 + 50x_2$

$$\text{Suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \le 16 \\ 1x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 1x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Resolução

Max $Z = 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{Suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 16 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	2	1	1	0	0	16 → 16/1 = 16
x_4	1	2	0	1	0	11 → 11/2 = 5.5
x_5	1	**3**	0	0	1	15 → **15/3** = 5 min
Z	-30	**-50**	0	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	5/3	0	1	0	-1/3	11 → $l_1'=l_1-l_3'$ (33/5)
x_4	**1/3**	0	0	1	-2/3	1 → $l_2'=l_2-2*l_3'$ (3)
x_2	1/3	1	0	0	1/3	5 → $l_3'=1/3*l_3$ (15)
Z	**-40/3**	0	0	0	50/3	250 → $l4'=l_4+50l_3'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	-5	**3**	$6 \rightarrow l_1'=l_1 - 5/3 * l_2'$ **(2)**
x_1	1	0	0	3	-2	$3 \rightarrow l_2'=3*l_2$ (neg)
x_2	0	1	0	-1	1	$4 \rightarrow l_3'=l_3-1/3*l_2'$ (4)
Z	0	0	0	40	**-10**	$290 \rightarrow l_4'=l_4+40/3l_2'$

3ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	0	0	1/3	-5/3	1	$2 \rightarrow l_1'=1/3*l_1$
x_1	1	0	2/3	-1/3	0	$7 \rightarrow l_2'=l_2+2*l_1'$
x_2	0	1	-1/3	2/3	0	$2 \rightarrow l_3'=l_3-l_1'$
Z	0	0	10/3	70/3	0	$310 \rightarrow l4'=l_4+10l_1'$

Solução: $x_1 = 70, x_2 = 2, x_3 = x_4 = 0, x_5 = 2; Z_{\max} = 310$

Exemplo 2.10. Resolva o seguinte problema de programação linear,

Maximizar $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

Maximizar $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6)$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	1	1	1	1	0	0	$11 \rightarrow (11)$
x_5	**2**	3	1	0	1	0	20 **$\rightarrow$ (10)** min
x_6	1	3	2	0	0	1	$20 \rightarrow (20)$
Z	**-4**	-2	-3	0	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	0	-1/2	**1/2**	1	-1/2	0	1 → $l_1'=l_1-l_2'$ **(2)**
x_1	1	3/2	1/2	0	1/2	0	10 → $l_2'=1/2*l_2$ (20)
x_6	0	3/2	3/2	0	-1/2	1	10→ $l_3'=l_3-l_2'$ (20/3)
Z	0	4	**-1**	0	2	0	40 → $l_4'=l_4+4l_2'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	-1	1	2	-1	0	2 → $l_1'=2l_1$
x_1	1	2	0	1	1	0	9 → $l_2'=l_2-1/2l_1'$
x_6	0	3	0	-3	1	1	7→ $l_3'=l_3-3/2l_1'$
Z	0	3	0	2	1	0	42 → $l_4'=l_4+l_1'$

Solução: $x_1=9; x_2=0; x_3=2; x_4=0; x_5=0; x_6=7; Z_{\max}=42$

2.3.3 Minimização com restrições da forma $\geq$

O processo iterativo do método simplex sempre exige uma solução básica inicial a partir da qual se busca uma solução óptima. Nos problemas de maximização esta solução básica inicial era formada pelas variáveis de folga, já que as restrições eram do tipo ($\leq$). Quando as restrições são do tipo ($\geq$) ou (=), não existe essa solução básica inicial.

Vejamos:

Minimizar $W=16x_1+12x_2+5x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1+4x_2+4x_3 \geq 16 \\ 4x_1+6x_2+0x_3 \geq \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Como devem ser introduzidas variáveis de excesso a forma padrão do problema de minimização é:

Minimizar $W=16x_1+12x_2+5x_3+0x_4+0x_5$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1+4x_2+4x_3-x_4+0x_5=16 \\ 4x_1+6x_2+0x_3+0x_4-x_5=12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

O processo de resolução anteriormente realizado leva as variáveis de excesso x_4 e x_5 a valores negativos ($x_4=-16$ e $x_5=-12$), violando a condição de não negatividade.

Conclusão:

Para resolver este tipo de problemas são introduzidas algumas modificações nas equações das restrições em seguida pode se usar o procedimento dual, os métodos de duas fases, de grande M e o Dual simplex, que são modificações do método simplex directo.

Método de duas fases

Para os problemas de minimização na forma canónica, o método simplex em duas fases tem os seguintes passos:

Passo 1. Introduzir as variáveis de excesso ($-x_{m+n}$) e artificiais($+ai$) para cada restrição.

Passo 2. Criar uma nova função objectivo formada pela:

- soma dos coeficientes das equações para a mesma variável tomados com o sinal negativo $d = -(a_{11} +_{21} + ... + a_{n1})$;
- soma dos coeficientes das variáveis artificiais que é igual a zero;
- nova função objectivo que é igual a soma dos termos intependentes tomados com o sinal negativo ($Z_a = -(b_1 + b_2 + ... + b_n)$)

Passo 3. Escreve-se a tabela inicial do simplex para a 1ª fase do processo de resolução do problema.

Passo 4. Aplica-se normalmente o procedimento do método simplex, tomando-se como função objectivo a última linha. Quando a solução óptima for atingida dois casos podem ocorrer:

- $Za = 0$: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de solução deve continuar, desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha. E o início da fase 2 do processo.
- $Za \neq 0$: neste caso o problema original não tem solução viável.

Exemplo 2.11. Resolva o seguinte problema pelo método de duas fases.

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Resolução

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0a_1 + 0a_2$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 0x_5 + a_1 + 0a_2 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 0a_1 + a_2 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$

Maximizar $Za = -12x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 1x\ + 1x_5 + 0a_1 + 0a_2 - 28$

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	b_i
a_1	**8**	4	4	-1	0	1	0	16 → (2)
a_2	4	6	0	0	-1	0	1	12 → (3)
W	-16	-12	-5	0	0	0	0	0
Z_a	**-12**	-10	-4	1	1	0	0	-28

1ª fase (iteração 1)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	b_i
x_1	1	1/2	1/2	-1/8	0	1/8	0	2 → $l_1'=1/8*l_1$ (4)
a_2	0	**4**	-2	1/2	-1	-1/2	1	4 → $l_2'=l_2-4l_1'$ (1)
W	0	-4	3	-2	0	2	0	32 → $l_3'=l_3+16l_1'$
Za	0	**-4**	2	-1/2	1	3/2	0	-4 → $l_4'=l_4+12l_1'$

1ª fase (iteração 2)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	b_i
x_1	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/16	-1/8	3/2→ $l_1'=l_1 - 1/2l_2'$
x_2	0	1	-1/2	1/8	-1/4	-1/8	1/4	1 → $l_2'= ¼*l_2$
W	0	0	1	-3/2	-1	3/2	1	36 → $l_3'=l_3+4l_2'$
Za	0	0	0	0	0	1	1	0 → $l_4'=l_4+4l_2'$

Como na última linha o valor da função objectivo artificial é igual a zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é solução básica inicial para a fase 2.

Tabela inicial simplex (2ª fase)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	**3/4**	-3/16	1/8	3/2 → $l_1'=l_1 - 1/2l_2'$ **(2)**
x_2	0	1	-1/2	1/8	-1/4	1 → $l_2'= ¼*l_2$ (neg)
W	0	0	**1**	-3/2	-1	36 → $l_3'=l_3+4l_2'$

Lembre-se que é de minimizar, portanto os indicadores da linha pivô devem ser todos negativos.

2ª fase (iteração 1)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	4/3	0	1	-1/4	1/6	2 $\rightarrow l_1'=4/3l_1$
x_2	2/3	1	0	0	-1/6	2 $\rightarrow l_2'=l_2+1/2l_1'$
W	-4/3	0	0	-5/4	-7/6	34 $\rightarrow l_3'=l_3-l_1'$

Solução: $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 2; x_4 = 0; x_5 = 0; \quad W_{\min} = 34$

Exemplo 2.12. Resolver o problema pelo método de duas fases:

Minimizar $W = 4x_1 + x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

Minimizar $W = 4x_1 + x_2 + 0(x_3 + x_4 + 0x_5) + 0(a_1 + a_2 + a_3)$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 + 0a_1 + a_2 + 0a_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 0a_1 + 0a_2 + a_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex (1ª fase)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
a_1	**3**	1	-1	0	0	1	0	0	3 $\rightarrow$ **(1)**
a_2	4	3	0	-1	0	0	1	0	6 $\rightarrow$ (3/2)
a_3	1	2	0	0	-1	0	0	1	3 $\rightarrow$ (3)
W	-4	-1	0	0	0	0	0	0	0
Z_a	**-8**	-6	1	1	1	0	0	0	-12

1ª fase (iteração 1)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
x_1	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	1 $\rightarrow l_1'=1/3l_1$ (3)
a_2	0	**5/3**	4/3	-1	0	-4/3	1	0	2 $\rightarrow l_2'=l_2-4l_1'$ **(6/5)**
a_3	0	5/3	1/3	0	-1	-1/3	0	1	2 $\rightarrow l_3'=l_3-l_1'$ (6/5)
W	0	1/3	-4/3	0	0	4/3	0	0	4 $\rightarrow l_4'=l_4+4l_1'$
Z_a	0	**-10/3**	-5/3	1	1	8/3	0	0	-4 $\rightarrow l_5'=l_5+8l_1'$

1ª fase (iteração 2)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
x_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	-1/5	0	3/5 → $l_1'=l_1-1/3l_2'$ (3)
x_2	0	1	4/5	-3/5	0	-4/5	3/5	0	6/5 → $l_2'=3/5l_2$ *(negativo)*
a_3	0	0	-1	**1**	-1	1	-1	1	0 → $l_3'=l_3-5/3l_2'$ **(0)**
W	0	0	-24/15	1/5	0	24/15	-1/5	0	18/5 → $l_4'=l_4-1/3l_2'$
Z_a	0	0	1	**-1**	1	0	2	0	0 → $l_5'=l_5+10/3l_2'$

1ª fase (iteração 3)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
x_1	1	0	-2/5	0	1/5	-2/5	0	1/5	3/5 → $l_1'=l_1-1/5l_3'$
x_2	0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	6/5 → $l_2'=l_2+3/5l_3'$
x_4	0	0	-1	**1**	-1	1	-1	1	0 → $l_3'=l_3$
W	0	0	-7/5	0	1/5	7/5	0	-1/5	18/5 → $l_4'=l_4-1/5l_3'$
Z_a	0	0	0	0	0	1	1	1	0 → $l5'=l_5+l_3'$

Como na última linha o valor da ftmção objectivo artificial é igual a zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é solução básica inicial para a fase 2.

Tabela inicial simplex (2ª fase)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/5	0	**1/5**	3/5 → **(3)**
x_2	0	1	1/5	0	-3/5	6/5 → (neg)
x_4	0	0	-1	**1**	-1	0 → (neg)
W	0	0	-7/5	0	**1/5**	18/5 →

2ª fase (iteração 1)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	5	0	-2	0	1	3 → $l_1'=5*l_1$
x_2	3	1	-1	0	0	3 → $l_2'=l_2+3/5l_1'$
x_4	5	0	-3	1	0	3 → $l_3'=l_3+l_1'$
W	-1	0	-1	0	0	3 → $l_4'=l_4-1/5l_1'$

Solução: $x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = 0; x_4 = 3; x_5 = 3; \quad W_{\min} = 3$

2.3.4 Maximização e minimização com restrições do tipo $\leq$; $=$; $\geq$

Em todos os problemas anteriores foram consideradas restrições com um único tipo de sinal de desigualdade. Nesta secção vamos considerar o caso geral dos problemas de PL com o conjunto das restrições que apresentam os sinais de $\leq$; $=$ e $\geq$ desde que não haja números negativos no segundo membro das equações das restrições.

Exemplo:

Maximizar $Z = 2x_1 + x_2$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Introduzindo as variáveis de folga $(+x_i)$ de excesso $(-x_i)$ e apresentando a tabela inicial simplex teremos:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	bi
x_3	1	1	1	0	10
x_4	-1	1	0	-1	2
Z	-2	-1	0	0	0

Da tabela inicial, x_1 e x_2 não são básicas e $x_4 < 0,$ logo o conjunto $\{x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = -2; Z = 0\}$, não é solução válida, pois viola a condição de não negatividade.

Para resolver este tipo de problemas, introduz-se uma outra modificação no método simplex e usa-se o método de grande M.

De um modo geral, para problemas que contêm vários tipos de desigualdade deve-se:

Procedimento geral (Mim = Maior igual menor)

Passo 1. Introduzir uma variável de folga $(+xi)$ para cada restrição da forma $\leq$;

Passo 2. Introduzir uma variável de excesso $(-xi)$ e uma variável artificial $(+ai)$ para cada restrição da forma $\geq$;

Passo 3. Introduzir uma variável artificial $(+ai)$ para cada restrição da forma Atenção uma restrição do tipo (=) dá lugar a duas restrições da forma $\geq$ e $\leq$, equivalendo a duas inequações uma com $(+xi)$ outra com $(-xi+ai)$ caso seja necessário;

Passo 4. Para cada variável de folga e excesso adicionar 0 xi e para cada variável artificial adicionar -Mai na função objectivo, onde M é um grande número positivo.

Método de Grande M

a) *Problemas de Maximização*

Geralmente problemas de maximização com restrições da forma $\leq$; = e $\geq$, são resolvidos pelo método de grande M. Este método não é um novo método, mas uma modificação do simplex directo.

Procedimento

Passo 1. Realizar o procedimento geral Mim e escrever o sistema na forma padrão incluindo a função objectivo;

Passo 2. Na tabela preliminar simplex, passar para básicas as variáveis artificiais, i.é, procurar eliminar a constante *M* nas colunas *ai* até chegar a tabela simplex inicial com uma solução básica inicial viável.

Passo 3. Escolher um pivô e resolver o simplex, até que todos *ci* sejam positivos, ter-se-à uma tabela terminal.

Exemplo 2.13. Resolver o problema de maximização pelo método de grande M.

Maximizar $Z = 2x_1 + x_2$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Resolução

Maximizar $Z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Ma_1$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0a_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 + a_1 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 \geq 0 \end{cases}$

Tabela preliminar simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	bi
x_3	1	1	1	0	0	10
-	-1	1	0	-1	**1**	2
Z	-2	-1	0	0	**M**	0

Vamos procurar encontrar a solução básica inicial viável, para isso temos que eliminar M na coluna a tomando 1 como pivô.

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Bi
x_3	1	1	1	0	0	10 $\rightarrow l_1'=l_1$
a_1	-1	**1**	0	-1	1	**2** $\rightarrow l_2'=l_2$
Z	M-2	**-M-1**	0	M	0	-2M $\rightarrow l_3'=l_3-M*l_2'$

Solução básica inicial: $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = 0; a_1 = 2$ e $Z = -2M$

A solução agora obtida não é final, pois a linha indicadora de pivô apresenta números negativs ($-M-1<0$), portanto vamos tentar melhor.

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Bi
x_3	**2**	0	1	1	-1	8 $\rightarrow l_1'=l_1-l_2'$ **(4)**
x_2	-1	1	0	-1	1	2 $\rightarrow l_2'=l_2$ (neg)
Z	**-3**	0	0	-1	M+1	2 $\rightarrow l_3'=l_3+(M+1)l_2'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Bi
x_1	1	0	1/2	1/2	-1/2	4 $\rightarrow l_1'=1/2l_1$
x_2	0	1	1/2	-1/2	1/2	6 $\rightarrow l_2'=l_2+l_1'$
Z	0	0	3/2	1/2	M-1/2	14 $\rightarrow l_3'=l_3+3l_1'$

Solução: $x_1 = 4; x_2 = 6; x_3 = x_4 = 0; a_1 = 0 \quad Z_{\max} = 14$

Observação: Como as variáveis artificiais não têm significado nenhum para o problema, e são iguais a zero na tabela terminal sirnplex, elas podem não figurar na solução.

b) *Problemas de Minimização*

Para os problemas de minimização com restrições da forma $\leq; =$ e $\geq$ o método de grande M tem os seguintes passes:

Passo l. Dado um problema de PL com a função objectivo Min $W = \sum ci * xi,$ deve-se converter a função objectivo em Max $Z = -Min\, W = -\sum - ci * xi$;

Passo 2. Escrever o sistema composto pela função Max $Z = -\sum - ci * xi$ e o conjunto das restrições originais;

Passo 3. Realizar o procedimento geral Mim e escrever o problema de maximização na forma padrão;

Passo 4. Realizar os passos p2 e p3 do caso de maximização. Chegada a tabela terminal simplex o valor da função objectivo será negativo, basta fazer $W = -Z$ para obter o valor mínimo procurado $W_{\min}$.

Exemplo 2.14. Resolver o seguinte problema pelo método de Grande M.

Min $W = 30x_1 + 30x_2 + 10x_3$

Sujeito $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,3 \end{cases}$

Resolução

Max $Z = -Min\, W = -30x_1 - 30x_2 - 10x_3$

Sujeito $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$

Max $Z = -30x_1 - 30x_2 - 10x_3 + 0x_4 + 0x_5 - \mathrm{M}a_1$

Sujeito $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + a_1 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 + 0a_1 = 8 \\ x_i \geq 0,\, a_1 \geq 0;\, i = 1,...,5 \end{cases}$

Tabela preliminar simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
–	2	1	1	-1	0	**1**	6
x_5	1	1	2	0	1	0	8
Z	30	30	10	0	0	**M**	0

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
a_1	**2**	1	1	-1	0	1	6 $\rightarrow l_1{}'=l_1$ (3)
x_5	1	1	2	0	1	0	8 $\rightarrow l_2{}'=l_2$ *(8)*
Z	**30-2M**	30-M	10-M	M	0	0	-6M $\rightarrow l_3{}'=l_3-Ml_1{}'$

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
x_1	1	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	3 $\rightarrow l_1{}'=1/2l_1$ (6)
x_5	0	1/2	**3/2**	1/2	1	-1/2	5 $\rightarrow l_2{}'=l_2-l_1{}'$ **(10/3)**
Z	0	15	**-5**	15	0	M-15	-90$\rightarrow l_3{}'=l_{3+}(2M-30)*l_1{}'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
x_1	1	1/3	0	-2/3	-1/3	2/3	4/3 $\rightarrow l_1{}'=l_1-1/2l_2$
x_3	0	1/3	1	1/3	2/3	-1/3	10/3 $\rightarrow l_2{}'=2/3l_2$
Z	0	50/3	0	50/3	10/3	M-50/3	-220/3$\rightarrow l_3{}'=l_3+5l_2{}'$

Solução: $x_1 = 4/5; x_2 = 0; x_3 = 10/3; x_4 = 0; x_5 = 0; W_{\min} = -Z_{\max} = 220/3$

Exemplo 2.15. Resolva o problema pelo método de Grande M

Maximizar $Z = x_1 - x_2 + 3x_3$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 \leq 20 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 5 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_i, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Resolução

Maximizar $Z = x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - \mathrm{M}(a_1 + a_2)$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0a_1 + 0a_2 = 20 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + a_1 + 0a_2 = 5 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 - x_5 + 0a_1 + a_2 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$

Tabela preliminar 1 simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20
-	1	0	1	0	0	**1**	0	5
-	0	1	1	0	-1	0	1	10
Z	-1	1	-3	0	0	**M**	M	0

Tabela preliminar 2 simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20 $\rightarrow l_1'=l_1$
a_1	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow l_2'=l_2$
-	0	1	1	0	-1	0	**1**	10 $\rightarrow l_3'=l_3$
Z	-M-1	1	-M-3	0	0	0	**M**	-5M $\rightarrow l_4'=l_4-Ml_2'$

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20 $\rightarrow l_1'=l_1$
a_1	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow l_2'=l_2$
a_2	0	1	1	0	-1	0	1	10 $\rightarrow l_3'=l_3$
Z	-M-1	-M+1	-2M-3	0	M	0	0	-15M $\rightarrow l_4'=l_4-Ml_3'$

Agora que temos a solução básica, podemos procurar o pivô e optimizar a solução.

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20 $\rightarrow l_1'=l_1$
x_3	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow l_2'=l_2$
a_2	-1	**1**	0	0	-1	-1	1	**5** $\rightarrow l_3'=l_3-l_2'$
Z	M+2	**-M+1**	0	0	M	2M+3	0	15-5M $\rightarrow l_4'=l_4+(2M+3)l_2'$

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	2	0	0	1	1	1	-1	15 $\rightarrow l_1' = l_1 - l_3'$
x_3	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow l_2' = l_2$
x_2	-1	1	0	0	-1	-1	1	5 $\rightarrow l_3' = l_3$
Z	3	0	0	0	1	M+4	M-1	10 $\rightarrow l_4' = l_4 + (M-1)l_3'$

Solução: $x_1 = 0; x_2 = 5; x_3 = 5; x_4 = 15; x_5 = 0; Z_{\max} = 10$

2.3.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 2.14. Uma empresa fabrica dois tipos de estantes em madeiras diferentes, adquirindo a madeira já cortada, e submetendo-a depois a três operações: furação, polimento e montagem. Suponha que são as seguintes as capacidades fabris, traduzidas pelas taxas de produção horária, ou seja, pelo número de estantes processadas por hora.

Secções	E. Tipo A	E. tipo B
Furacão	7	6
Polimento	4	3
Montagem	6	4

Quando funcionam, as três operações têm custos horários de produção de 20, 10, e 22 u.m respectivamente. Para cada estante tipo A e B a madeira necessária é adquirida a 8 e 12 um, sendo os preços de venda respectivos 16 e 25 u.m.

a) Formule o problema de programação linear que permite maximizar o lucro da empresa.
b) Escreva o problema na forma padrão e resolva-o.

(***Resp***: $x_1 = 0; x_2 = 10/3; x_3 = x_4 = 0; x_5 = 26/3; \quad Z_{\max} = 130/3$

Exercício 2.15 Resolva as seguintes alíneas

a) Max $Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$

$$\text{Suj à} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ -2x_1 - 0x_2 - x_3 \geq -4 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 \leq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Max $Z = 2x_1 + x_2$

$$\text{Suj. à} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \qquad \leq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) ***Resp***: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 1; x_5 = 0; x_6 = 0; \quad Z_{\max} = 2$

b) ***Resp***: $x_1 = 4; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 2; x_5 = 0; \quad Z_{\max} = 9$

Exercício 2.16. Uma companhia possuia, há l0 anos, duas minas; a mina A produzindo por dia 1 tonelada de minério de alto teor, 3 toneladas de minério de médio teor e 5 toneladas de minério de baixo teor; a mina B produzia por dia 2 toneladas de cada um dos teores. A companhia precisou de 80 toneladas de minério de alto teor, 160 de médio teor e 200 de baixo teor, Quantos dias cada mina funcionou, se custava 200 u.m por dia para se fazer funcionar cada uma?,

(***Resp***: $x_1 = 40; x_2 = 20; x_3 = x_4 = 0; x_5 = 40; \quad W_{\min} = 12.000$ .u.m)

Exercício 2.17. Resolva os seguintes problemas de minimizaçao pelo método simplex.

a) Min $W = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 6x_1 + 8x_2 + 12x_3$

$$\text{Suj. à } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 4 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) ***Resp***: $x_1 = 1; x_2 = 5; x_3 = 0; x_4 = 9; x_5 = 0; \quad W_{\min} = 25$

b) ***Resp***: $x_1 = 3; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 4; x_6 = 0; \quad W_{\min} = 26$

Exercício 2.18. Resolva os exercícios pelos métodos convenientes.

a) Max $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad \leq 8 \\ x_1 + \quad 2x_3 = 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) min $W = 2x_1 + x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 \qquad \geq 3 \\ \qquad x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

c) Min $W = -5x_1 - 12x_2 + 16x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

d)Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) ***Resp***: $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 5/2; x_4 = 0; \quad Z_{\min} = 23/2$

b) ***Resp***: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 2; x_4 = 0; x_5 = 0; \quad W_{\min} = 45$

c) ***Resp***: $x_1 = 0; x_2 = 7/4; x_3 = 3/4; x_4 = 23/4; x_5 = 0; \quad W_{\min} = 9$

d) **Resp**: $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 0; x_4 = 11; x_5 = 0; \quad Z_{\max} = 6$

Resolva os seguintes exercícios de revisão

1. Método gráfico

a) Max $Z = x_1 + x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 10x_1 + 20x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \ge 36 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 32 \\ \qquad x_2 \ge 20 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Max $Z = 30x_1 + 40x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

d) Max $Z = 20x_1 + 10x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 3x_2 \le 21 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

e) Min $W = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

2. Método simplex

a) Max $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 + 3x_2 \ge 10 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 40x_1 + 12x_2 + 40x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 1x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Referências:

ANDRADE, EL (1998) - *Introdução à Pesquisa Operacional* - métodos e modelos para a análise de decisão. 2ª edição, editora LTC, RI, Brasil:cap.3

BARNETT, RÃ; Michael, RZ (1990) - Finite Mathematics - for business, economies, life science and social sciences, 5th edition, USA:cap 6.

FERRFIRA. M.A.M; Isabel A(1995) - Programação Matemática, 2ª edição. Edições Sílabo, Lisboa: pp11 - 40,

RENDER, B; Ralph, M.S. Jr.(1997) - *Quantitative Analysis for Management*, 6111 edition, Prentice - Hali International, mc. USA: cap7; 8 e 9.

TAHA, HA(1997) - Operations Research - an Introduction. 6th edition, Prentice - Hall International, Inc. USAcap.2 e 3

Capítulo 3

3. DUALIDADE E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

3.1 DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Todo o problema de programação linear, a que chamamos *primal*, tem associado a ele um correspondente problema. chamado dual; ambos são complementares e relacionados de forma que a solução óptima de um fornece informações completas sobre o outro.

3.1.1 TRANSFORMAÇÃO DE UM PROBLEMA PRIMAL, EM DUAL

Seja dado o seguinte problema de programação linear, na forma literal ou canónica, problema **primal**.

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_mx_m$

Sujeito à Suj à $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m \leq b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m \leq b_2 \\ -------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m \leq b_n \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$

O seu problema **dual** pode ser escrito na forma canónica assim.

Minimizar $W = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + ... + b_ny_n$

Sujeito à $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + ... + a_{1n}y_n \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + ... + a_{2n}x_n \geq c_2 \\ ------------------- \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + a_{3m}y_3 + ... + a_{nm}y_n \geq c_m \\ x_i \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$

As variáveis y_j são chamadas variáveis duais,

O problema dual, para os modelos em que o conjunto das restrições tem um único tipo de desigualdades por exemplo $\geq$ ou $\leq$, é construído a partir do primal da seguinte forma:

Regras:

Regra 1. Cada linha do problema primal (restrição), corresponde a uma variável no dual (coluna);

Regra 2. Os termos independentes das restrições (recursos), passam para coeficientes da função objectivo no dual;

Regra 3. Se o primal é um problema de maximização, o seu dual será um problema de minimização e vice-versa;

Regra 4. As variáveis do primal e dual são não negativas.

Exemplo 3.1. Apresentar o problema dual do seguinte problema de maximização de programação linear .

Max $Z = x_1 + 2x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 15 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 20 \\ 0x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

O problema dual correspondente é:

Mm $W = 18y_1 + 15y_2 + 20y_3 + 8y_4$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 0y_4 \geq 1 \\ 5y_1 + y_2 - 2y_3 + 1y_4 \geq 2 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Voltando a transformação de um primal no seu dual, consideremos a forma matricial dos problemas:

Problema Primal	**Problema Dual**
Max $Z = (c_1\ c_2 ... c_m) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix}$	Min $W = (b_1\ b_2 ... b_n) \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$

Sej à $\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2m} \\ ....\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}...a_{nm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$	Sej à $\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}...a_{1m} \\ a_{21}\ a_{22}...a_{2m} \\ ....\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}...a_{nm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_m \end{pmatrix}$

A seguir tabela mostra as relações entre o problema prima e dual

Problema Primal	**Problema Dual**
• n restrições e m variáveis • coeficientes da função objectivo • constantes Problema (max) Problema (mm) Restrição (P) Variável (D) $\geq$ $\Leftrightarrow$ $\leq$ 0 $\leq$ $\Leftrightarrow$ $\geq$ = $\Leftrightarrow$ não restrita	n variáveis e m restrições • constantes Problema Dual • coeficientes da função objectivo Problema (max) Problema (mm) Variável (P) Restrição (D) ≥ 0 $\Leftrightarrow$ $\geq$ ≤ 0 $\Leftrightarrow$ $\leq$ não restrita $\Leftrightarrow$ =

Da representação matricial, pode-se concluir que os coeficientes do problema dual são formados pela matriz transposta dos coeficientes do problema primal.

Primal $\Rightarrow$ max $Z = \sum CX$ min $W = \sum BY \Leftarrow Dual$

Suj à $\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$ Suj à $\begin{cases} A^t X \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$

Onde A é matriz dos coeficientes do problema primal e A^t é a matriz transposta de A, calculada trocando as linhas com as colunas de A.

Exemplo 3,2. Formar o dual do problema.

Min $W = 4x_1 + 8x_2$

sujeito à $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geq 40 \\ 1x_1 - 1x_2 \geq 18 \\ 5x_1 + 1x_2 = 12 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Resolução

O problema primai tem 3 restrições, portanto 3 variáveis duais sendo a terceira não restrita.

Etapa 1. Transformar a equação em duas inequações.

Min $W = 4x_1 + 8x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geq 40 \\ 1x_1 - 1x_2 \geq 18 \\ 5x_1 + 1x_2 \geq -22 \\ -5x_1 - 1x_2 \geq -22 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Etapa 2. Escrever o dual correspondente com $y_3 = y_3^+ - y_3^-$

Max $Z = 40y_1 + 18y_2 + 22y_3^+ - 22y_3^-$

Suj à $\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 5y_3^+ - 5y_3^- \leq 4 \\ 7y_1 - 1y_2 + 1y_3^+ - 1y_3^- \leq 8 \\ y_i \geq 0; y_3^+ \geq 0; y_3^- \geq 0 \end{cases}$

ou

Max $Z = 40y_1 + 18y_2 + 22y_3$

Suj à $\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 5y_3 \leq 4 \\ 7y_1 - 1y_2 + 1y_3 \leq 8 \\ y_i \geq 0; y_3 \quad nao\, restrito \end{cases}$

3.1.2 INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA DAS VARIÁVEIS DUAIS

As variáveis duais podem receber uma interpretação económica, que leva ao cálculo da utilidade marginal (preço de sombra, valor marginal, etc.) dos recursos. Vejamos as relações das suas soluções através de um exemplo.

Exemplo 3.3. Uma indústria dispõe de três recursos A, B e C, em quantidades limitadas. com os quais pretende produzir dois produtos: produto 1 e produto 2. A tabela a baixo dá a utilização unitária de cada recurso em cada um dos produtos e a disponibilidade de cada recurso. A indústria sabe que cada unidade produzida do produto 1 dá uma margem unitária de lucro de 5 u.m., e cada unidade produzida do produto 2 dá uma margem unitária de lucro de 6 u.m. O problema da programação da produção da empresa é determinar a quantidade a ser feita dos produtos 1 e 2, de forma a maximizar a margemtotal de lucro.

Recurso	Recurso gasto para fazer 1 unidade de		Disponibilidade
	Produto 1	Produto 2	
A	1	2	14
B	1	1	9
C	7	4	56

Resolução

Problema 1:

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Suponhamos que a indústria tenha a alternativa de vender os recursos A, B e C, em vez de empregá-los na produção dos dois produtos.

O problema agora é encontrar o valor de cada unidade do recurso. É evidente que a venda dos recursos deve fornecer um ganho pelo menos igual ao obtido com a utilização deles na produção.

Sejam
y_1 valor do recurso A por unidade;
y_2 valor do recurso B por unidade e
y_3 valor do recurso C por unidade

O valor total do estoque dos recursos é: $14y_1 + 9y_2 + 56y_3$

Por outro lado, cada um dos produtos pode ser avaliado, levando em conta a utilização recursos por unidade fabricada. Assim, o produto 1 gasta 1 unidade do recurso A, 1 unidade de 13 e 7 unidades de C, sua avaliação em termos do conteúdo de recurso é: $1y_1 + 1y_2 + 7y_3$.

Para o produto 2, analogamente a avaliação é: $2y_1 + 1y_2 + 4y_3$

É claro que essas avaliações dos produtos não podem ser inferiores as margens unitárias de lucro fornecidas por cada um. Assim podemos escrever:

Produto l. $1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 5$

Produto 2. $2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 6$

Neste conjunto de inequações o administrador tem interesse em determinar o valor mínimo do estoque total, tendo em conta que as avaliações dos produtos sejam pelo menos iguais aos lucros unitários fornecidos. Em termos de programação linear, estamos a descrever o problema dual.

Problema 2

Minimizar $W = 14y_1 + 9y_2 + 56y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 1y_1 + 4y_3 \geq 6 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

Confirme as definições anteriores, o problema 1 é *primal* e o problema 2 é o *dual*.

Portanto, as variáveis duais podem ser interpretadas como avaliações unitárias dos recursos relativos as contribuições de cada um para a obtenção do lucro total, Isto significa que, resolvidos os problemas, as variáveis duais indicam as variações que ocorrente no valor da função objectivo do primai, para variações unitárias nos níveis dos recursos.

Relações entre os valores óptimos do primal e do dual

Resolução do problema prinial

Atenção: vamos designar de y as variáveis de folga.

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 14 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 9 \\ 7x_1 + 4x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 56 \\ x_i \geq 0; y_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

Base	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	bi
y_1	1	**2**	1	0	0	14 → **(7)**
y_2	1	1	0	1	0	9 → (9)
y_3	7	4	0	0	1	56 → (14)
Z	-5	**-6**	0	0	0	0

1ª iteração

Base	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	bi
x_2	1/2	1	1/2	0	0	7 → $l_1'=1/2l_1$
y_2	**1/2**	0	-1/2	1	0	**2** → $l_2'=l_2-l_1'$
y_3	5	0	-2	0	1	28→ $l_3'=l_3-4l_1'$
z	**-2**	0	3	0	0	42→ $l_4'=l_4+6l_1'$

2ª iteração

Base	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	bi
X_2	0	1	1	-1	0	5 → $l_1'=l_1-1/2l_2'$
x_1	1	0	-1	2	0	4 → $l_2'=2l_2'$
y_3	0	0	3	-10	1	8 → $l_3'=l_3-5l_2'$
Z	0	0	1	4	0	50→ $l_4'=l_4+2l_2'$

Solução primal: $x_1=4; x_2=5; y_1=0; y_2=0; y_3=8$ e $Z_{\max}=50$

Resolução do problema dual. Designando por x_i as variáveis de excesso e a, as variáveis artificiais, logo estamos numa escolha entre o método de grande M e o método de duas fases; vamos optar pelo método de duas fases.

Minimjzar $W=14y_1+9y_2+56y_3+0x_1+0x_2+0a_1+0a_1$

Sujeito à $\begin{cases} 1y_1+1y_2+7y_3-1x_1+0x_2+1a_1+0a_1+1a_2=6 \\ 2y_1+1y_2+4y_3+0x_1-1x_2+0a_1+1a_1+1a_2 \\ y_i\geq 0; x_i\geq 0; a_i\geq 0 \end{cases}$

Tabela inicial simplex (1ª fase)

base	Y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	**7**	-1	0	1	0	**5** → (0.71)
a_2	2	1	4	0	-1	0	1	6 → (1.5)
W	-14	-9	-56	0	0	0	0	0
Z_a	-3	-2	**-11**	1	1	0	0	-11

1ª Fase (iteração 1)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	a_1	a_2	b_i
y_3	1/7	1/7	1	-1/7	0	1/7	0	5/7 $\rightarrow l_1' = 1/7 l_1$
a_2	10/7	3/7	0	4/7	-1	-4/7	1	22/7 $\rightarrow L_2' = l_2 - 4 l_1'$
W	-6	-1	0	-8	0	8	0	40 $\rightarrow L_3' = l_3 + 56 l_1'$
Z_a	-10/7	-3/7	0	-4/7	1	11/7	0	-22/7 $\rightarrow l_4' = l_4 + 11 l_1'$

1ª fase (iteração 2)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	a_1	a_2	b_i
y_3	0	1/10	1	-1/5	1/10	1/5	-1/10	2/5 $\rightarrow l_1' = l_1 - 1/7 l_2'$
y_1	1	3/10	0	2/5	-7/10	-2/5	7/10	11/5 $\rightarrow L_2' = 7/10 l_2'$
W	0	4/5	0	-28/5	-21/5	28/5	21/5	266/5 $\rightarrow L_3' = l_3 + 6 l_2'$
Z_a	0	0	0	0	0	1	1	0 $\rightarrow l_4' = l_4 + 10/7 l_2'$

$Z_a = 0; a1 = 0$ e $a_2 = 0,$ logo devemo passar para a segunda fase

Tabela simplex inicial (2ª fase)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	b_i
y_3	0	**1/10**	1	-1/5	1/10	2/5 $\rightarrow$ (**4**)
y_1	1	3/10	0	2/5	-7/10	11/5 $\rightarrow$ (22/3)
W	0	**4/5**	0	-28/5	-21/5	266/5$\rightarrow$

2ª fase (iteração 1)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	b_i
y_2	0	1	10	-2	1	4 $\rightarrow l_1' = 10 l_1$
y_1	1	0	-3	1	-1	1 $\rightarrow l_2' = l_2 - 3/10 l_1'$
W	0	0	-8	-4	-5	50 $\rightarrow l_3' = l_3 - 4/5 l_1'$

Solução dual: $y_1 = 1; y_2 = 4; y_3 = 0; x_1 = 0; x_2 = 0$ com $W =_{\min} = 50$

Comparando as duas tabelas terminais e as soluções obtidas chega-se as conclusões ou relações:

Relação 1. Para quaisquer duas soluções viáveis possíveis do primal e dual, tem-se $Z \leq W \Rightarrow$ exemplo $Z = 42$ e $W = 266/5$

Relação 2. As soluções óptimas dos dois problemas guardam entre se a relação:

Max $Z = Min\, W \Rightarrow Z_{\max} = W_{\min} = 50$

Relação 3. Os valores das variáveis duais podem ser obtidos da solução do problema primai, bastando tomar os coeficientes da última linha das variáveis básicas iniciais. Se o dual é de maximizar, lemos os valores tal como estão, caso contrário lemos com o sinal oposto, portanto:

Saindo de max (P) para mim (D)

$\Rightarrow$ Solução primal: $x_1 = 4; x_2 = 5, y_1 = 0; y_2 = 0; y_3 = 8; \quad Z_{\max} = 50$

$\Rightarrow$ So1uçãodual: $y_1 = 1; y_2 = 4, y_3 = 0; x_1 = 0; x_2 = 0; \quad W_{\min x} = 50$

Saindo de min (P) para max (D)

$\Rightarrow$ Solução primal: $y_1 = 1; y_2 = 4, y_3 = 0; x_1 = 0; x_2 = 0; \quad W_{\min x} = 50$

$\Rightarrow$ Solução dual: $x_1 = 4; x_2 = 5, y_1 = 0; y_2 = 0; y_3 = 8; \quad Z_{\max} = 50$

Algumas aplicações da dualidade

Além da aplicação ao estudo de casos na empresa, a dualidade permite-nos entre outros casos:

1. Já que a resolução dos problemas de minimização pelo método de duas fases, leva muitas iterações, uma alternativa é usar a dualidade para obter a solução primal.
2. Resolução rápida dos problemas de programação linear. De facto, em muitos casos o dual tem menos tabelas simplex que o primal, sempre que o número de restrições do primal exceder o número de variáveis.
3. Resolução de problemas de teoria de jogos. Na determinação da estratégia óptima e do valor de um jogo de duas pessoas de soma nula, aplicam-se os conceitos da dualidade. Pois, o modelo matemático de um jogo pode ser convertido num problema de programação linear e as estratégias óptimas de cada jogador serão as soluções do primal e do dual.

Exemplo 3.4. Resolver o seguinte problema de minimização usando o procedimento dual.

Minimiiar $W = 3y_1 + 2y_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ y_1 + y_2 \geq 8 \\ 2y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

Max $Z = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 0y_1 + 0y_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1y_1 + 0y_2 = 3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0y_1 + 1y_2 = 2 \\ x_i; y_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
y_1	1	1	**2**	1	0	3 → **(1.5)**
y_2	2	1	1	0	1	2 → (2)
Z	-10	-8	**-12**	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
x_3	1/2	1/2	1	1/2	0	3/2 → $l_1' = 1/2 l_1$
y_2	**3/2**	1/2	0	-1/2	1	1/2 → $l_2' = l_2 - l_1'$
Z	**-4**	-2	0	6	0	18→ $l_3' = l_3 + 12 l_1'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
x_3	0	1/3	1	2/3	-1/3	4/3→ $l_1' = l_1 - 1/2 l_2$
x_1	1	**1/3**	0	-1/3	2/3	1/3 → $l_2' = 2/3 l_2$
Z	0	**-2/3**	0	14/3	8/3	58/3→ $l_3' = l_3 + 4 l_2'$

3ª iteração – Tabela terminal simlex

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
x_3	-1	0	1	1	-1	$1 \rightarrow l_1' = l_1 - 1/3 l_2$
x_2	3	1	0	-1	2	$1 \rightarrow l_2' = 3 l_2$
Z	2	0	0	4	4	$20 \rightarrow l_3' = l_3 + 2/3 l_2'$

Solução primal: $y_1 = 4; y_2 = 4; x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 0; \quad W_{\min} = 20$

Solução dual : $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1; y_1 = 0; y_2 = 0; \quad Z_{\max} = 20$

3.1.3 Propriedades operacionais entre o primal e dual

Antes de introduzir a análise de sensibilidade importa referir algumas propriedades que facilitam as operações nas relações entre o problema primal e dual. Para isso voltemos ao exemplo 3.3 do parágrafo 3.1.2 e apresentemos novamente a resolução do problema primal.

Problema 1:

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Problema 1:

Minimizar $W = 14y_1 + 9y_2 + 56y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1y_1 + 1x_2 + 7y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 6 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

Resolução do problema 1

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\ 7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 9 \\ 7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	**2**	1	0	0	14 → **(7)**
x_4	1	1	0	1	0	9 → (9)
x_5	7	4	0	0	1	56 → (14)
Z	-5	**-6**	0	0	0	0

1ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	1/2	1	1/2	0	0	7 → $l_1' = 1/2 l_1$
x_4	**1/2**	0	-1/2	1	0	**2** → $l_2' = l_2 - l_1'$
x_5	5	0	-2	0	1	28 → $l_3' = l_3 - 4l_1'$
Z	**-2**	0	3	0	0	42 → $l_4' = l_4 + 6l_1'$

2ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1	-1	0	5 → $l_1' = l_1 - 1/2 l_2'$
x_1	1	0	-1	2	0	4 → $l_2' = 2l_2'$
x_5	0	0	3	-10	1	8 → $l_3' = l_3 - 5l_2'$
Z	0	0	1	4	0	50 → $l_4' = l_4 + 2l_2'$

Solução dual : $x_1 = 4; x_2 = 5; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 8;$ e $Z_{\max} = 50$

Solução primal: $y_1 = 1; y_2 = 4; y_3 = 0; y_4 = 0; y_5 = 0; \quad W_{\min} = 50$

Propriedade 1. Em qualquer iteração do método simplex, no primal ou dual, a matriz que aparece sob as variáveis básicas usadas na solução inicial (variáveis de folga, de excesso ou artificiais), pode ser usada para gerar as contribuições unitárias para o valor da função objectivo (coeficientes da última linha do quadro simplex, designados por Δi).

A prática desta propriedade pode ser vista em três passos:

Passo 1. identificar os coeficientes originais da função objectivo correspondentes às variáveis básicas na actual iteração e escrevê-los num vector linha, na mesma ordem das linhas da tabela simplex.

Passo 2. Multiplicar o vector resultante pela matriz que aparece sob as variáveis iniciais na respectiva iteração.

Passo 3. Subtrair os coeficientes orinais da função objectivo correspondente às variAveis básicas da solução inicial dos respectivos coeficientes obtidos no passo 2.

Demonstração da propriedade 1.

Passo 1: No problema 1, anterior na r iteração as variáveis básicas são: x_2, x_1, x_5 cujos coeficientes da função objectivo são (6, 5, 0)

(x_1 x_2 x_5)

(6 5 0)

Passo 2: A matriz que aparece nessa iteração sob as variáveis básicas iniciais (variáveis de folga) é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando o vector linha pela matriz dos coeficientes das variáveis básicas temos:

$$(6 \quad 5 \quad 0) \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 0)$$

Passo 3: Subtraindo o vector resultante aos valores iniciais das variáveis básicas iniciais obtemos os resultados da terceira linha na iteração final.

Paraavariável x_3: $\Delta_3 = 1 - 0 = 1$

Para a variável x_4: $\Delta_4 = 4 - 0 = 4$

Para avariávei x_5: $\Delta_5 = 0 - 0 = 0$

Os valores obtidos por esta propriedade são chamados ***multiplicadores do simplex*** e são valores óptimos das variáveis duais. Outros nomes usados são: custos implícitos, custos de oportunidade ou preços de sombra.

Propriedade 2. Em qualquer iteração do primal ou dual os valores das variAveis na base podem ser obtidos pela multiplicação da matriz definida na propriedade 1, pelo vector coluna contendo os valores originais dos recursos (vector dos termos independentes).

Demonstração da propriedade 2.

a) Na 1ª iteração, os valores das variáveis básicas são:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -12/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 28 \end{pmatrix}$$

b) Na 2ª iteração, os valores das variáveis básicas são:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ o que confirma os resultados obtidos na iteração final.

Propriedade 3. Em qualquer iteração do primal ou dual, os coeficientes de qualquer variável nas restrições podem ser obtidos pela multiplicação da matriz definida na propriedade 1, pelo vector coluna contendo os coeficientes originais da mesma variável nas restrições.

Demonstração da propriedade 3.

a) Os coeflcieffles originais de x_2 na tabela sirnplex inicial são: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Na 2ª iteração, os coeficientes de x_2 são obtidos pelo produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Os coeficientes originais de x_3 na tabela simplex inicial são: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Na 2ª iteração, os coeficientes de x_3 são obtidos pelo produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Propriedade 4. Em qualquer iteração do método simplex, a substituição das variáveis duais pelos respectivos multiplicadores do simplex, relativos a variáveis básicas da solução inicial, permite obter os coeficientes da equação Z transformada, pela diferença entre o primeiro membro e segundo das restrições correspondentes do dual.

Demonstração da propriedade 4.

Na 1ª iteração do problema 1, temos os seguintes multiplicadores do simplex relativos as variáveis básicas na solução inicial.

Para a variável x_3: $\Delta_3 = 3 \rightarrow$ variável dual y_1

Para a variável x_4: $\Delta_4 = 0 \rightarrow$ variável dual y_2

Para a variável x_5: $\Delta_5 = 0 \rightarrow$ variávéi dual y_3

As restrições duais correspondentes a x_1 e x_2 são respectivamente:

$$x_1 \rightarrow 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 5$$
$$x_2 \rightarrow 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 6$$

Os coeficientes de Z transformado são obtidos substituindo y_1 por Δ_3; y_2 por Δ_4 e y_3 por Δ_5. Assim:

Para $x_1: 1*3 + 1*0 + 7*0 - 5 = -2$, logo $\Delta_1 = -2$

Para $x_2: 2*3 + 1*0 + 4*0 - 6 = 0$, logo $\Delta_2 = 0$

O que confere com os resultados obtidos na resolução do problema. Como A1 < 0, isto significa que a solução ainda não é óptima, x1 deve entrar na base e por outro lado a solução do dual não é viável, o que nos leva a concluir que:

- Enquanto o primal não for óptimo, o dual será inviável;

- As restrições do dual, correspondentes às variáveis básicas, são satisfeitas como equações, o que significa que a respectiva variável de excesso é nula;
- .O problema primal começa com uma solução viável não óptima que deve ser optimizada, enquanto que o dual começa com uma solução inviável com valor superior ao óptimo e continua inviável até que a solução óptima seja atingida.

3.2 MÉTODO DUAL - SIMPLEX

Até agora, nos problemas de programação linear que consideramos era obrigatório que todos os elementos do lado direito da tabela simplcx fossem positivos. Isto significa que todas as soluções eram viáveis. Pela propriedade 4, sabemos que as soluções duais são inviáveis até que a solução óptima seja obtida. No entanto é possível que durante o processo de solução, venhamos a ter uma solução dual viável, o que significa inviável no

O método Dual - Simplex se destina a resolver esse tipo de problema. As diferenças em relação ao método simplex se resumem nas regras de entrada e saída de variáveis na base.

3.2.1 Regras de entrada e saída de variáveis na base

Dado um problema de minimização para resolve-lo pelo método Dual - Simplex deve-se transformar as inequações do tipo $\geq$ para $\leq$, em seguida aplicar as regras 1 e 2 para o problema de minimização.

Regra 1. *Variável que sai*: é a variável básica com o vor ms negativo. Se todas as variáveis básicas tiverem valores positivos, a solução é óptima.

Regra 2. Variável que entra: é escolhida entre as variáveis fora da base, da seguinte forma:

- Dividir os coeficientes do lado esquerdo da equação z transformada (coeficientes da função objectivo) pelos correspondentes coeficientes negativos da equação da variável que sai. $\alpha_{ij} = \dfrac{c_i}{a_{ij}}; \quad a_{ij} < 0$

- A variável que entra é a que tem o menor valor entre os quocientes encontrados (para o problema de minimização) ou o menor valor absoluto (para o problema de maximização).

Quando, em ambos os casos, não houver coeficientes negativos na linha da variável que sai da base, o problema não tem solução viável.

Exemplo 3.5. Resolver o seguinte problema pelo método dual simplex.

Minimizar $W = 2x_1 + 1x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Resolução

Para resolver o problema sem usar o método de duas fazes nem do grande M, vamos escrever o problema na forma padrão e introduzimos depois as variáveis de folga.

Minimizar $W = 2x_1 + 1x_2$ Min $W = 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4$

Sujeito à $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Suj. à $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 + 0x_4 = -6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela inicial simplexe

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	bi
x_3	-4	**-3**	1	0	**-6**
x_4	1	2	0	1	3
W	-2	-1	0	0	0
	(1/2)	**(1/3)**			

A variável que são é $x_3 = -6$; e x_2 entra na base porque $1/3 < 1/2$.

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	bi
x_2	4/3	1	-1/3	0	2 $\rightarrow$ $l_1' = -1/3 l_1$
x_4	**-5/3**	0	2/3	1	**-1** $\rightarrow$ $l_2' = l_2 - 2l_1'$
W	-2/3	0	-1/3	0	2 $\rightarrow$ $l_3' = l_3 + l_1'$
	(2/5)				

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	Bi
x_2	0	1	1/5	4/5	6/5 $\rightarrow$ $l_1' = l_1 - 4/3 l'_2$
x_1	1	0	-2/5	-3/5	3/5 $\rightarrow$ $l_2' = -3/5 l_2$
W	0	0	-3/5	-2/5	12/5 $\rightarrow$ $l_3' = l_3 + 2/3 l_2$

Solução $X = \{3/5;6/5;0;0\} W_{\min} = 12/5$

Para a solução dual temos $Y = (3/5;2/5;0;0)\ Z_{\max} = 12/5$

Exemplo 3.6. Resolver o problema de programação linear.

a) Pelo método gráfico
b) Pelo método dual - simplex.

Minimizar $W = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 & ...r_1 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & ...r_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 & ...r_3 \\ x_i \geq 0 & r_4, r_5 \end{cases}$$

a) Resolução pelo método gráfico

R_1:

x_1	x_2
0	3
1	0

R_2:

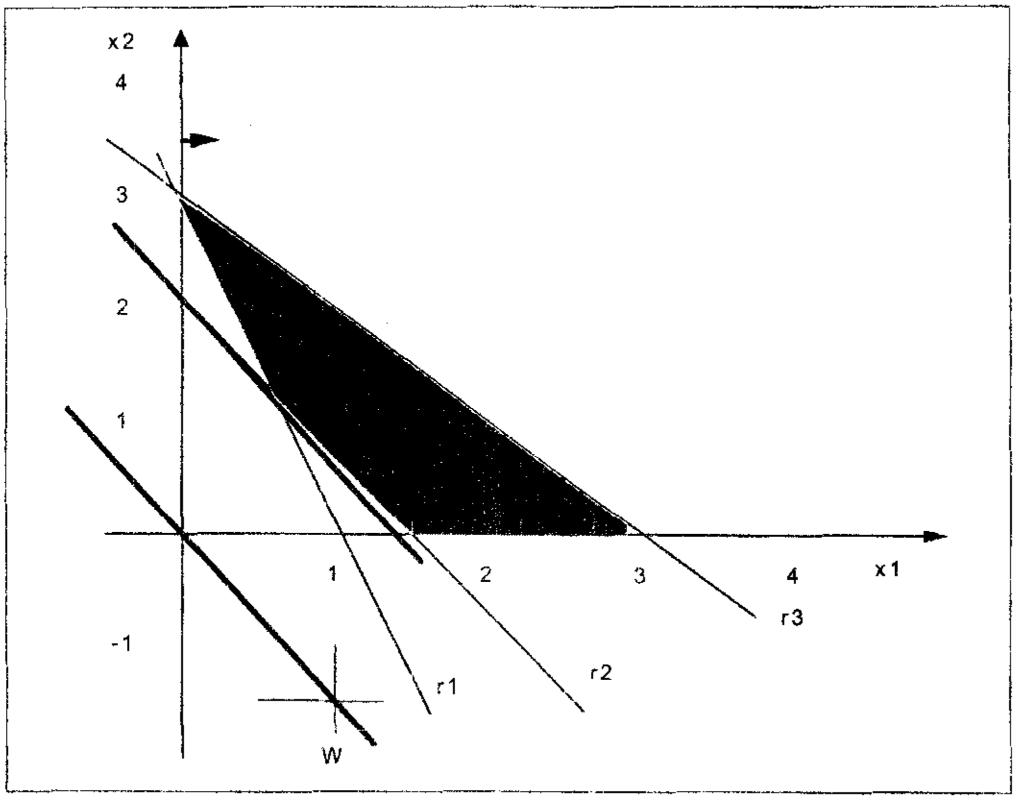
x_1	x_2
0	2
3/2	0

R_3:

x_1	x_2
0	3
3	0

Recta W:

x_1	x_2
0	0
1	-3/2



Do gráfico o ponto extremo e mínimo é $P = r_1 \cap r_2$

Resolvendo o sistema das rectas $\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$ teremos a solução

$X = (3/5;6/5)$ com $W_{\min} = 21/5$

b) Resolvendo pelo método dual - simplex, temos:

Minimizar $W = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

Sujeito à $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -3 \\ -4x_1 - 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = -6 \\ +1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	**-3**	0	1	0	**-6**
x_5	1	1	0	0	1	3
W	-3	-2	0	0	0	0
	(3/4)	**(2/3)**				

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_3	**-5/3**	0	1	-1/3	0	**-1** $\rightarrow$ $l_1'=l_1+l_2'$
x_2	4/3	1	0	-1/3	0	2 $\rightarrow$ $l_2'=-1/3l_2'$
x_5	-1/3	0	0	1/3	1	1 $\rightarrow$ $l_3'=l_3-l_2'$
W	-1/3	0	0	-2/3	0	4 $\rightarrow$ $l_4'=l_4+2l_2'$
	(1/5)			(2)		

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Bi
x_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5 $\rightarrow$ $l_1'=-3/5l_1$
x_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5 $\rightarrow$ $l_2'=l_2-4/3l_1'$
x_5	0	0	-1/5	2/5	1	6/5 $\rightarrow$ $l_3'=l_3-1/3l_1'$
W	0	0	-1/5	-3/5	0	21/5 $\rightarrow$ $l_4'=l_4+1/3l_1'$

Solução $X=(3/5;6/5;0;0;6/5)$ com $W_{\min}=21/5$

3.2.2 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 3.1. Escreva os problemas na forma canónica e transforme - os em duais.

a) Minimizar $W=9y_1+2y_2$

Sujeito à $\begin{cases} 4y_1+y_2\geq 13 \\ 3x_1+y_2\leq 12 \\ y_i\geq 0 \end{cases}$

b) Maximiza $Z=16x_1+12x_2$

Sujeito à $\begin{cases} x_1+x_2\geq 16 \\ x_1-x_2\leq -9 \\ 3x_1+x_2\leq 21 \\ x_i\geq 0 \end{cases}$

Exercício 3.2. Considere o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $W=5x_1+2x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Escreva o problema dual correspondente.
b) Obtenha a solução do primal a partir da resolução do dual pelo método simplex. (*Resp*. X = (0; 8; 0; 2; 4) com W_{min} = 16 u.m)

Exercício 3.3. Considere o seguinte problema de programação linear.

Maximizar $Z = 12x_1 + 15x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Usando o método simplex resolva o problema e apresente as soluções do primal e dual.

(Primal: **Resp**. X = (15/7; 8/7; 0; 0) com Z_{max} = 300/7)

(Dual **Resp**: Y = (15/7; 12/7; 0; 0) com W_{min} = 300/7)

Exercício 3.4. Nos seguintes casos transformar em duais e depois resolver os problemas.

a) Min $W = 5y_1 + 2y_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ 2y_1 + 1y_2 \geq 10 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 2y_1 + 1y_2 + 3y_3$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 100 \\ 2y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 50 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Exercício 3.5. Urna empresa de transporte dispõe de dois tipos de camiões que podem operar em três percursos diferentes. A capacidade semanal de transporte em cada um dos tipos de camiões e a procura semanal mínima de serviços de carga, expressos em toneladas estão indicados no quadro seguinte.

Percursos	Tipos de camiões		Procura mínima
	Tipo A	Tipo B	
1	10	10	180
2	-12	15	200
3	15	10	220

Sabendo que os custos de operação de cada camião são 50 e 80 u.m por semana respectivamente, quantos veículos de cada tipo deve a empresa utilizar nos percursos indicados, de modo a minimizar os custos. (use o procedimento dual se necessário).

(***Resp***. Y = (22; 0; 40; 64; 0) com W_{min} =1100 u.m.)

Exercício 3.6. Resolva o seguinte problema de programação linear, primeiro graficamente e depois pelo algoritmo dual do método simplex.

Minimizar Sujeito à $W = 4y_1 + 5y_2$

Sujeito à $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 80 \\ 3y_1 + y_2 \geq 75 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

(***Resp***. Y (14; 33; 0; 0) com W_{min} = 221)

Exercício 3.7. Resolva os seguintes problemas pelo método dual simplex, se necessário apresente a solução pelo método gráfico Nota: substituir as equações por duas inequações.

a) Min $W = 4x_1 + 2x_2$

suj. à $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 \geq \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

b) Min $W = 2x_1 + 3x_2$

suj. à $\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 3 \\ 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

Respostas:

a) X = (3/4; 1/4; 1/6; 0;0) W_{min} = 7/2

b) X = (2; 0; 1;0;0)W_{min}=4

3.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

A análise de sensibilidade em modelos de programação linear significa simplesmente procurar uma nova interpretação a partir da solução obtida. Já que tanto os recursos como os preços no mercado estão sujeitos a mudanças continuas e subsequentes reavaliações, a análise Pós - Optimização é uma ferramenta dinâmica e indispensável ao administrador para avaliar as consequências das mudanças.

A análise de sensibilidade da solução óptima. tem como objectivo determinar as condições para as quais a solução óptima obtida é ainda válida. A solução óptima de um problema é calculada com base nos dados do modelo, que podem sofrer variações por várias razões:

- Porque os dados foram estimados e não traduzem a realidade;
- Novas possibilidades apareceram após a formulação do modelo e que devem ser consideradas na implementação da solução.

Conclusão: A análise de sensibilidade tem por objectivo verificar a validade da solução obtida quando submetida a variações nos coeficientes do modelo original.

3.3.1 Variação nas quantidades dos recursos

Exemplo 3.7. Vamos utilizar as tabelas simpiex inicial e terminal do problema 3.3

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

Tabela inicial simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	14
x_4	1	1	0	1	0	9
x_5	7	4	0	0	1	56
Z	-5	-6	0	0	0	0

Tabela terminal simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1	-1	0	5
x_1	1	0	-1	2	0	4
x_5	0	0	3	-10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Vamos supor que o recurso b_1 seja alterado de 14 para 16. Como esta mudança afectará os valores da solução original.

De acordo com a propriedade 2, os novos valores das variáveis básicas serão:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Como todos os valores são maiores ou iguais a zero, a solução actual é viável e óptima. Assim para x_1 = 2; x_2 = 7 e x_5 = 14 temos Z = 5*2 + 6*7 = 52, o que significa que a variação de b_1 de 14 para 16 trouxe um aumento no lucro $\Delta z = 52 - 50 = +2$ u.m.

Seja a seguinte mudança para o recurso b_1 de 14 para 20.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Como x_1 é negativo, esta solução não é viável, logo deve ser procurada uma outra solução óptima retirando x_1 da base.

De um modo geral, pode-se procurar a variação permissível para cada variável nos recursos sem que a solução se tome inviável.

Demonstração do cálculo dos limites de oscilação dos valores dos recursos.

a) Vamos analisar a variação positiva admissível no recurso b_1 do exemplo 3.7, partindo da solução óptima.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14 + d \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} \geq 0$$

Resolvendo o produto matricial temos:

$$\begin{pmatrix} 5+d \\ 4-d \\ 8+3d \end{pmatrix} \geq 0 \text{ ou } \begin{cases} 5+d \geq 0 \\ 4-d \geq 0 \\ 8+3d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \geq -5 \\ d \leq 4 \\ d \geq -8/3 \end{cases}$$

A maior variação positiva no recurso 1, sem alterar a base é de 4 unidades (d = 4), ou seja o valor máximo admissível é 14+4 = 18 unidades.

b) Vamos analisar agora a variação negativa no recurso 1.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14+d \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} \geq 0; \begin{cases} 5-d \geq 0 \\ 4+d \geq 0 \\ 8-3d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \leq 5 \\ d \geq -4 \\ d \leq 8/3 \end{cases}$$

A maior variação negativa no recurso 1, sem alterar a base deve ser de 8/3 ou o valor mínimo admissível é de 14 - 8/3 = 34/3.

Assim, sem haver alteração na base que forma a solução óptima, a quantidade do recurso 1 pode variar de 34/3 até 18. Com o recurso 2, usando o mesmo raciocínio calcula-se o intervalo de oscilação. Quanto ao recurso 3, cuja variável de folga tem valor positivo na solução básica (tabela terminal), a redução máxima admissível é a própria folga (8 unidades) e qualquer aumento não afecta a solução final.

Intervalo óptimo de variação dos recursos

Para se obter os intervalos de oscilação dos recursos podem se usar os limites:

Δ^+ = **limite superior** - é igual ao menor quociente absoluto entre o novo valor do recurso na tabela terminal da variável que era básica na tabela inicial (no nosso caso o recurso 1 está associado a x_3) e os coeficientes negativos da mesma variável na tabela terminal (razões negativas).

$$\Delta^+ = \min |\, raz.neg \,| = \min \left| \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right|; a_{ij} < 0$$

Δ^- = **limite inferior** - é igual ao menor quociente absoluto entre os novos recursos óptimos e os coeficientes positivos da variável associada ao recurso b_1 (razões positivas).

$$\Delta^- = \min|raz.pos| = \min\left|\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}\right|; a_{ij} > 0$$

Exemplo 3.8. Calcular o intervalo óptimo de oscilação de todos os recursos do exemplo 3.7 anterior.

a) b_1 está associado a x_3 = 14 na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_3 na tabela terminal,

$\Delta^+ = \min|raz.neg| = \min\left|\frac{4}{-1}\right| = 4\uparrow$. $\qquad \Delta^- = \min|raz.pos| = \min\left|\frac{5}{1};\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}\downarrow$.

$\Rightarrow$ O intervalo é: $14 - 8/3 \leq b_1 \leq 14 + 4 \Leftrightarrow 34/3 \leq b_1 18$

b) b_2 está associado a x_4 = 9 na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_4 na tabela terminal.

$\Delta^+ = \min|raz.neg| = \min\left|\frac{5}{-1};\frac{8}{-10}\right| = \frac{4}{5}\uparrow$.

$\Delta^- = \min|raz.pos| = \min\left|\frac{4}{2}\right| = 2\downarrow$.

$\Rightarrow$ O intervalo é: $9 - 2 \leq b_2 \leq 9 + 4/5 \Leftrightarrow 7 \leq b_2 \leq 9.8$

c) b_3 está associado a x_5 = 56 na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_5 na tabela terminal.

$\Delta^+ = \min|raz.neg| = \min|\textit{não existe}| = \textit{não}\ \text{lim}\textit{itado}\uparrow$.

$\Delta^- = \min|raz.pos| = \min\left|\frac{8}{1}\right| = 8\downarrow$.

$\Rightarrow$ O intervalo é: $56 - 8 \leq b_3 \leq 56 + \infty \Leftrightarrow 48 \leq b_3 \leq \infty$

Exemplo 3.9. Seja o seguinte problema de programação linear, reportando os lucros unitários e as horas gastas na produção de um determinado artigo que passa por três secções:

max *imizar* $Z = 16x_1 + 16x_2$ (margem bruta)

$$\text{sujeito a}\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 24 & (\text{sec}\textit{ção de corte}) \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18 & (\text{sec}\textit{ção de montagem}) \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 32 & (\text{sec}\textit{ção de acaamento}) \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

onde x_1 - representa centenas de peças do tipo A a produzir diariamente;

x_2 - representa centenas de peças do tipo B a produzir diariamente, O quadro óptimo do simplex para este modelo económico matemático é o seguinte.

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recurso
x_2	0	1	1/2	-1/3	0	3
x_1	1	0	-1/4	1/2	0	3
x_5	0	0	-5/2	2	1	8
Z	0	0	4	0	0	96

Admitindo que a disponibilidade do recurso na secção de corte seja alterada de 24 para 30 horas, quais as consequências desta alteração na solução óptima.

Resolução

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ -1/4 & 2 & 0 \\ -5/2 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3/2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

x_5 de sair da base e o novo z é: Z = 16*3/2 + 16*9 = 168

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recurso
x_2	0	1	1/2	-1/3	0	9
x_1	1	0	-1/4	1/2	0	3/2
x_5	0	0	**-5/2**	2	1	**-7**
Z	0	0	4	0	0	168

Iteração 1. (método dual - dimplex)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recurso
x_2	0	1	0	1/15	1/5	38/5
x_1	1	0	0	3/10	-1/10	11/5
x_3	0	0	1	-4/5	-2/5	14/5
Z	0	0	0	16/5	8/5	784/5

Solução X = (11/5;38/5;14/5;0;0) com Z_{max} = 78/5 e $\Delta z = 304/5$

3.3.2 Variação nos coeficientes da função objectivo

As variações nos coeficientes da função objectivo afectam os valores da variável z e influenciam os testes para um problema optimizado. A análise de sensibilidade deve ser feita considerando as variáveis básicas e não básicas.

a) Variação nos coeficientes das variáveis básicas

Estes coeficientes afectam os multiplicadores do simplex que devem ser alterados antes de conferir a optimidade do problema.

Exemplo 3.10. Vamos supor que no exemplo 3.7, o coeficiente de x_2 tenha sido alterado de 6 para 4. A nova função objectivo será $Z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ e os coeficientes que nos interessam são os das variáveis $(x_2\ x_1\ x_5)$ ou o vector (4 5 0).

Usando a propriedade 1 temos: $\begin{pmatrix}4 & 5 & 0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 6 & 0\end{pmatrix}$

Assim, os novos multiplicadores do sirnplex para as variáveis fora da base na tabela terminal são:

$x_3: \quad \Delta_3 = -1 - 0 = -1$

$x_4: \quad \Delta_4 = \ \ 6 - 0 = \ 6$

como $\Delta_3 \leq 0$, isto significa que a solução actual não continua óptima e deve-se introduzir x_3 na base. Para isso o novo valor da função objectivo é calculado tomando em consideração a nova função objectivo. Z = 54 + 4*5 = 40.

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1	-1	0	5
x_1	1	0	-1	2	0	4
x_5	0	0	**3**	-10	1	**8**
Z	0	0	**-1**	6	0	40

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	7/3	-1/3	7/3
x_1	1	0	0	-4/3	1/3	20/3
x_3	0	0	1	-10/3	1/3	8/3
Z	0	0	0	8/3	1/3	128/3

Como todos Δ_i são maioes ou iguqais a zero a nova solução é: X = (20/3; 7/3; 8/3;0;0)

Com Z_{max} = 128/3. sendo assim, a variação de c_2 de 6 para 4 diminuiu o rendimento em $\Delta_z = z_2 - z_1 = 128/3 - 50 = -22/3$ u.m

Observação: Caso as variáveis fora da base não pertençam à solução inicial, que geralmente é formada pelas variáveis de folga, deve-se aplicar a propriedade 4 para calcular os multiplicadores do simplex.

b) Variação nos coeficientes das variáveis não básicas

Como estes coeficientes não afectam os multiplicadores do simplex, os multiplicadores disponíveis podem ser utilizados para verificar se o problema está optimizado ou não de forma imediata.

Intervalo óptimo de variação dos coeficientes da função objectiva

O intervalo óptimo de oscilação dos coeficientes da fbnção objectivo pode ser obtido calculando os limites:

Δ^+ = **limite superior** - é igual ao menor quociente absoluto entre os multiplicadores do simplex da tabela terminal e os coeficientes negativos das variáveis não básicas da linha correspondente à variável básica associada ao coeficiente considerado (para o nosso exemplo 3,7, c_1 está associado a $x_1 = 4$ na tabela terminal, logo temos que calcular razões negativas na linha 2).

$$\Delta^+ = \min |\, raz.neg \,| = \min \left| \left\{ \frac{c_i}{a_{ij}} \right\} \right|; a_{ij} < 0$$

Δ^{-} = **limite inferior** - é igual ao menor quociente absoluto entre os multiplicadores do simplex da tabela terminal e os coeficientes positivos para a linha considerada (razões positivas).

$$\Delta^{-} = \min|\,raz.\,neg\,| = \min\left|\left\{\frac{c_i}{a_{ij}}\right\}\right|\, a_{ij} > 0.$$

Exemplo 3.11. Para o exemplo 3.7, encontrar os intervalos óptimos de oscilação dos coeficientes das variáveis x_1, x_2, x_5.

Resolução

A função objectivo é $z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

As variáveis básicas na tabela terminal são x_1, x_2 e x_5, portanto os coeficientes a variar são $c_1 = 5$; $c_2 = 6$ e $c_5 = 0$.

- O $c_1 = 5$ ou o coeficiente de x_1 corresponde a linha 2 na tabela terminal.

$\Delta^{+} = \min|\,raz.\,neg\,| = \min\left|\frac{1}{-1}\right| = 1\uparrow$ $\qquad$ $\Delta^{-} = \min|\,raz.\,pos\,| = \min\left|\frac{4}{2}\right| = 2\downarrow.$

$\Rightarrow$ O intervalo é: $5 - 2 \le c_1 \le 5 + 1 \Leftrightarrow 3 \le c_1 \le 6$

- $c_2 = 6$ ou coeficiente de x_2 corresponde a linha 1 na tabela terminal.

$\Delta^{+} = \min|\,raz.\,neg\,| = \min\left|\frac{4}{-1}\right| = 4\uparrow.$ $\qquad$ $\Delta^{-} = \min|\,raz.\,pos\,| = \min\left|\frac{1}{1}\right| = 1\downarrow.$

$\Rightarrow$ O intervalo é: $6 - 1 \le c_2 \le 6 + 4 \Leftrightarrow 5 \le c_2 \le 10$

- $c_5 = 0$ ou coeficiente de x_5 corresponde a linha 3 na tabela terminal.

$\Delta^{+} = \min|\,raz.\,neg\,| = \min\left|\frac{4}{-10}\right| = \frac{2}{5}\uparrow.$

$\Delta^{-} = \min|\,raz.\,pos\,| = \min\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\downarrow.$

$\Rightarrow$ O intervalo é: $0 - 1/3 \le c_5 \le 0 + 2/5 \Leftrightarrow -1/35 \le c_5 \le 2/5$

3.3.3 VARIAÇÕES NOS COEFICIENTES DAS ACTIVIDADES

a) Variações nos coeficientes das actividades das variáveis básicas

As alterações nos coeficientes dessas variáveis afectam os elementos da matriz definida na propriedade 1, e como esta matriz é fundamental para toda a análise de sensibilidade, essas variações podem fazer com que a actual solução deixe de ser óptima ou mesmo viável. A forma mais simples dessa análise é admitir que temos um novo problema, portanto, deve-se procurar uma nova solução.

b) Variações nos coeficientes das actividades das variáveis fora da base

As alterações nos coeficientes das variáveis fora da base poderão modificar a solução óptima, pois a variável alterada poderá vir a se tornar básica. Assim, uma nova verificação de que o problema está optimizado é necessário e deve ser realizada.

Exemplo 3.12. Dado o seguinte problema de programação linear.

Maximizar $Z = 4x_1 + 6x_2 + x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 \le 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 32 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

a) Resolva o problema usando o método simplex.

b) Suponha que os coeficientes de x_3 sejam modificados de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qual será o efeito desta mudança na solução óptima do problema.

Resolução

a) Tabela inicial simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	6	4	1	1	0	24 → (6)
x_5	4	**8**	2	0	1	32 → **(4)**
Z	-4	**-6**	-1	0	0	0

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	**4**	0	0	1	-1/2	**8** $\rightarrow l_1' = l_1 - 4l_2'$
x_2	1/2	1	1/4	0	1/8	4 $\rightarrow l_2' = 1/8 l_2$
Z	-1	0	1/2	0	3/4	24 $\rightarrow l_3' = l_3 + 6l_2'$

2ª Iteração: tabela terminal

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
X_1	1	0	0	1/4	-1/8	2 $\rightarrow l_1' = 1/4 l_1$
X_2	0	1	1/4	-1/8	3/16	3 $\rightarrow l_2' = l_2 - 1/2 l_1'$
Z	0	0	1/2	1/4	5/8	26 $\rightarrow l_3' = l_3 + l_1'$

Solução: $X = (2;3;0;0;0)$ com $Z_{max} = 26$

b) Para testar se o problema está optimizado depois da mudança dos coeficientes de x_3 devemos retirar da tabela terminal os multiplicadores do simplex correspondentes as variáveis básicas iniciais: $\Delta_4 = 1/4; \Delta_5 = 5/8$

Do problema dual e escrevendo as variáveis duais em termos das variáveis de folga temos:

Min $W = 24x_4 + 32x_5$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 6x_4 + 4x_5 \geq 4 \\ 4x_4 + 8x_5 \geq 6 \\ 1x_4 + 2x_5 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

A restrição 3 no problema dual, depois da mudança dos coeficientes de x_3 será:

$1x_4 + 1x_5 \geq 1$, usando a propriedade 4 o novo multiplicador simplex relativo a x_3 no problema primal é: $\Delta_3 = 1 * \Delta_4 + 1 * \Delta_5 - 1 = 1 * 1/4 + 1 * 5/8 - 1 = -1/8.$

Como Δ_3 é negativo, conclui-se que a solução anterior não continua óptima. Da propriedade 3, podemos encontrar os novos coeficientes de x_3 a partir da tabela terminal.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Substituindo na tabela terminal os novos coeficientes de x_3 teremos a nova tabela inicial.

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	**1/8**	1/4	-1/8	2 → **(16)**
x_2	0	1	1/16	-1/8	3/16	3 → (48)
Z	0	0	**-1/8**	1/4	5/8	26

1ª Iteração: tabela terminal

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	8	0	1	2	-1	$16 \rightarrow l_1' = 8l_1$
x_2	-1/2	1	0	-1/4	1/4	$2 \rightarrow l_2' = l_2 - 1/16 l_1'$
Z	1	0	0	1/2	1/2	$28 \rightarrow l_3' = l_3 + 1/8 l_1'$

Como todos os multiplicadores simplex são positivos ou iguais a zero já temos a nova solução óptima. X = (0; 2; 16; 0; 0) com Z_{max} = 28. Portanto esta variação dos coeficientes de x_3 aumentou o rendimento em 28-26 = +2 u.m.

3.3.4 Adição de uma nova variável

Este caso pode ser considerado como variações simultâneas nos coeficientes da função objectivo e nos coeficientes do vector actividade correspondente à nova variável, que não é básica. Pois no problema inicial a nova variável é considerada como se tivesse coeficientes nulos.

Exemplo 3.13. Analisar o exemplo 3.12, introduzindo agora uma nova variável x_4 conforme o modelo apresentado.

Maximizar $Z = 4x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 3x_4$

Sujeito à $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 \le 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 32 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

Resolução

O teste de optimidade da solução, fornece o multiplicador do simplex para x_4, tornando os coeficientes da restrição 4 no problema dual e da tabela final anterior.

Restrição 4: $2x_5 + 2x_6 \ge 3$

Multiplicadores simplex do problema primal: $\Delta_5 = 1/4; \quad \Delta_6 = 5/8$

Multiplicador simplex para x_4 no primal: $\Delta_4 = 2*1/4 + 2*5/8 - 3 = -5/4$

O multiplicador de x_4 indica que este deve entrar na base e seus coeficientes no último quadro do problema serão:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

A nova tabela simplex inicial com as variáveis de folga renomeadas é:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	**1/4**	1/4	-1/8	2→ (**8**)
x_2	0	1	1/4	1/8	-1/8	3/16	3→ (24)
Z	0	0	1/2	**-5/4**	1/4	5/8	26

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	4	0	0	1	1	-1/2	8→ $l_1' = 4l_1$
x_2	-1/2	1	1/4	0	-1/4	1/4	2→ $l_2' = l_2 - 1/8 l_1'$
Z	5	0	1/2	0	3/2	0	36→$L_3' = l_3 + 5/4 l_1'$

A nova solução é X = (0; 2; 0; 8; 0; 0) com $Z_{max} = 36$

Resp. A introdução da variável x4 com o coeficiente 3 na função objectivo e 2 nas restrições aumenta o rendimento em 36 -26 = l0 u.m.

3.3.5 Adição de uma nova restrição

A adição de uma nova restrição pode alterar a viabilidade da solução, se ela não for redundante, O procedimento para a análise é o seguinte:

1. Testar se a nova restrição é satisfeita para a actual solução óptima, em caso afirmativo, a nova restrição diz-se redundante.
2. Se não for satisfeita, ela deve ser introduzida no sistema e novos cálculos devem ser feitos para-se obter a nova solução óptima.

Exemplo 3.14. analisar o exemplo 3.12, depois de introduzir a restrição 3:

Restrição 3: $2x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 24$

Resolução

O novo modelo com a terceira restrição é:

Maximizar $Z = 4x_1 + 6x_2 + 1x_3$

Sujeito à $\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 1x_3 \leq 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ 2x_1 8x_2 + 1x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

1. *Teste*: Para o problema anterior a solução óptima é: x_1=2; x_2=3; x_3= 0 e Z = 26

   restrição 1: 62 + 4*3 + l*0 = 24 (= 24 verdadeiro)

   restrição 2: 4*2 + 8*3 + 2*0 = 32 (32 verdadeiro)

   restrição 3: 2*2 + 8*3 + 1*0 = 28 (>24 não satisfeita), a nova restrição não é redundante.

2. *Resolução do novo problema*: a solução anterior já não é viável e novas iterações devem ser feitas. Assim, vamos colocar no quadro terminal anterior os coeficientes da nova restrição e a correspondente variável de folga.

Tabela inicial simlex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_{1*}	**1**	0	0	1/4	-1/8	0	2 →
x_{2*}	0	1	1/4	-1/8	3/16	0	3 →
x_6	2	8	1	0	0	1	24→
Z	0	0	1/2	1/4	5/8	0	26

Com o x_1 e x_2 estão na base seus coeficientes na nova restrição devem ser nulos e é porisso que tomamos as suas posições como pivô.

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/4	-1/8	0	2 → $l_1' = l_1$
x_{2*}	0	**1**	1/4	-1/8	3/16	0	3 → $l_2' = l_2$
x_6	0	8	1	-1/2	1/4	1	20→ $l_3' = l_3 - 2l_1'$
Z	0	0	1/2	1/4	5/8	0	26→ $l_4' = l_4$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/4	-1/8	0	2 → $l_1'=l_1$
x_2	0	1	1/4	-1/8	3/16	0	3 → $l_2'=l_2$
x_6	0	0	**-1**	1/2	-5/4	1	**-4**→ $l_3'=l_3-8l_2'$
Z	0	0	**1/2**	1/4	5/8	0	26→ $l_4'=l_4$

3ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/4	-1/8	0	2 → $l_1'=l_1$
x_2	0	1	0	0	1/8	1/4	2 → $l_2'=l_2-1/4l_3'$
x_3	0	0	1	-1/2	5/4	-1	4 → $l_3'=-l_3$
Z	0	0	0	1/2	0	1/2	24→ $l_4'=l_4-1/2l_3'$

Nova solução X = (2; 2; 4; 0; 0; 0) com Z_{max} = 24

Resp. A introdução da restrição 3, com os coeficientes 2, 8 e 1 cujo valor do recurso é 24, reduz o rendimento em 24 - 26 = -2 u.m.

3.3.6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 3.8. Dado o problema

Maximizar $Z = 2x_1 + 1x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 0x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 4x_1 + 1x_2 \leq 8 \\ 1x_1 + 0x_2 \leq 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

a) Resolva o problema.(***Resp***: X = (3/2; 2; 0; 0; 3/2) e Z_1 = 5)

b) Se o recurso b_1 for mudado de 6 para 4, qual será o efeito desta mudança no lucro Z (***Resp***: X=(5/3; 4/3; 0; 0; 4/3) Z_2 = 14/3 e $\Delta z = -1/3$

c) Encontre os intervalos ótimos de oscilação de todos os recursos do problema.

(***Resp***: $0 \leq b_1 \leq 24; \quad 2 \leq b_2 \leq 14; \quad 3/2 \leq b_3 \leq$ não limitado).

Exercício 3.9. Para o seguinte problema de programação linear:

Maximizar $Z = 1x_1 + 3/2x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 160 \\ 1x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 208 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

a) Resolva o problema. (***Resp***. X = (40; 40; 0; 0; 40) e Z_1 = 100)

b) Se o recurso b_2, variar de 120 para 98 qual será o efeito sobre a solução óptima inicial. (***Resp***: X = (182/3; 56/3; 4/3; 0; 0), Z_2 = 266/3 e $\Delta = -34/3$)

c) se o cxoeficinete de x_2 na função objectivo mudar de 3/2 par 1, qual será o efeito sobre z. (***Resp***: X= (40; 40; 0; 0; 40), Z_3 = 120 e $\Delta z = +20$)

d) Encontre os intervalos óptimos tanto dos recursos com dos coeficientes da função objectivo no problema inicial.

(***Resp***: $3/4 \le c_1 \le 3/2$; $1 \le c_2 \le 2$ $120 \le b_1 \le 520/3$; $100 \le b_2 \le 160$; $240 \le b_3 \le$ não limitado).

Exercício 3.10. Dado o problema

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \le 9 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

a) Resolva o problema (***Resp***: X = (4; 0; 5; 0) Z_1 = 43)

b) Verificar a optimidade da solução, para a seguinte variação nos coeficientes de x_2 de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (***Resp***: X =(4; 0; 5; 0) Z_2 = 43; $\Delta z = 0$)

c) Verificar o mesmo de (b) para x4 com a variaão $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ Para $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(***Resp***: X = (0; 0; 0; 9) Z_3 = 81; $\Delta z = +38$)

Exercício 3.11. Para o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $W = 10x_1 + 20x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 36 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

a) Resolva o problema. (Resp. X = (4; 6; 0; 0) e W_1 = 160)
b) No modelo anterior introduza a variável x_3 com coeficiente 3 na função objectivo, 3 na restrição 1 e 1 na restrição 2. Analise o efeito da introdução da nova variável no modelo. (***Resp***: X (4; 6; 0; 0; 0), W_2 = 160 então $\Delta w = 0$)
c) Analisar de novo o problema, mas agora introduzindo a restrição $4x_1 + 2x_2 \geq 30$.(***Resp***: X =04/3; 17/3; 10/3; 0; 0). W_2 = 160 então $\Delta w = 0$)

Exercício 3.12. O quadro óptimo do problema de programação linear:

maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

sujeito à $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

é o seguinte, com x3 e x4 designando variáveis de folga.

base	x1	x2	x3	x4	bi
X1	1	3/4	1/4	0	30
X4	0	9/4	-1/4	1	30
Z	0	1/4	3/4	0	90

a) Suponha que os coeficiente técnicos de variável x_2, mudarem de (3, 3) para (2, 1), obtenha a nova solução óptima através da análise de sensibilidade.
(***Resp***:. X = (0,60,0,0), Z_{max} = 120, $\Delta z = 15$)

b) Se os termos independentes ou recursos das restrições forem alterados de (120, 60) para (140, 40), determine a nova solução óptima (as propriedades para encontrar a nova solução). (***Resp***: X = (35, 0,0, 5), Z_{max} = 105, $\Delta z = 15$)

Referências:

ANDRADE, EL (1998) - *Introdução à Pesquisa Operacional - métodos e modelos para a análise de decisão*, 2 edição, editora LTC, RI, Brasil: cap4;

BARNETT, RA; Michael, RZ (1990) - *Finite Mathematics - for business, economics, life science and social sciences*, 5th edition, USA: cap6;

TARA, HAO 997) - *Operations Research - an introduclion*, 6”" edition, Prentice-Hail International, me. USA: cap4.

Capítulo 4

4. PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

4.1 INTRODUÇÃO

O termo programação inteira, refere-se ao estudo dos problemas de programação linear (PL) nos quais o domínio de todas as variáveis do problema é restritamente de valores inteiros, portanto, a Programação Linear Inteira (PLI) é um caso particular dos problemas de programação linear.

Por exemplo, se considerarmos mode’os lineares de problemas de produção ou transporte de certos artigos onde o produto a ser transportado são garrafas, tubos, automóveis ou mesmo se quisermos afectar máquinas, homens, veículos a determinadas actividades, de certeza a solução óptima desses problemas não deverá conter números fraccionários, i.é, necessariamente teremos que ter quantidades inteiras.

A abordagem comum dos problemas de programação linear, tem sido de usar o método simplex anahtico ou gráfico para resolver o problema de programação linear ignorando a restrição de que as variáveis devem ser inteiras. Tendo-se obtida a solução óptima inicial, procura-se arredondar para os dois valores inteiros mais próximos caso estes não forem inteiros. Se os valores inteiros pertencerem ao conjunto solução então, está encontrada a solução do problema de programação linear inteira, caso contrário o solução toma-se não viável e procura-se uma nova solução até encontrar a solução óptima inteira.

Todo o problema de programação linear inteira tem a seguinte estrutura:

Maximizar $Z = \sum c_i x_i$

Sujeito à $\begin{cases} \sum a_{ij} * x_i \leq b_j \\ x_i \geq 0 \; e \; \text{int}eriro; \quad ou \; x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Admite-se que em vez de **max** possa se usar **min** e em vez de $\leq$ possa se usar $\geq$.

Exemplo 4.1. A empresa Coca Cola de Moçambique, produz dois tipos de refresco: em lata e em garrafa. Cada lata vendida produz um lucro de 7 u.m e cada garrafa produz um lucro de 6 u.m. Os detalhes das quantidades em termos de matéria prima necessária e a capacidade máxima diária estão apresentados na tabela.

Matéria prima	Tipos de refresco		Disponível
	Em lata	Em garrafa	
Matéria prima 1	2	3	12
Matéria prima 2	6	5	30

a) Formule o modelo matemático como problema de programação linear inteira (PLI).
b) Sabendo que x_1 e x_2 são o número de latas e garrafas produzidas respectivamente, resolva o problema de tal modo que se determine o número de latas e de garrafas que devem ser produzidas para maximizar o lucro diário.

Resolução

a) Max $Z = 7x_1 + 6x_2$

Suj à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

b) Vamos resolver o problema pelo método gráfico,ignorando a condição de que x_1 e x_2 devem ser quantidadesinteiras.

R_1:

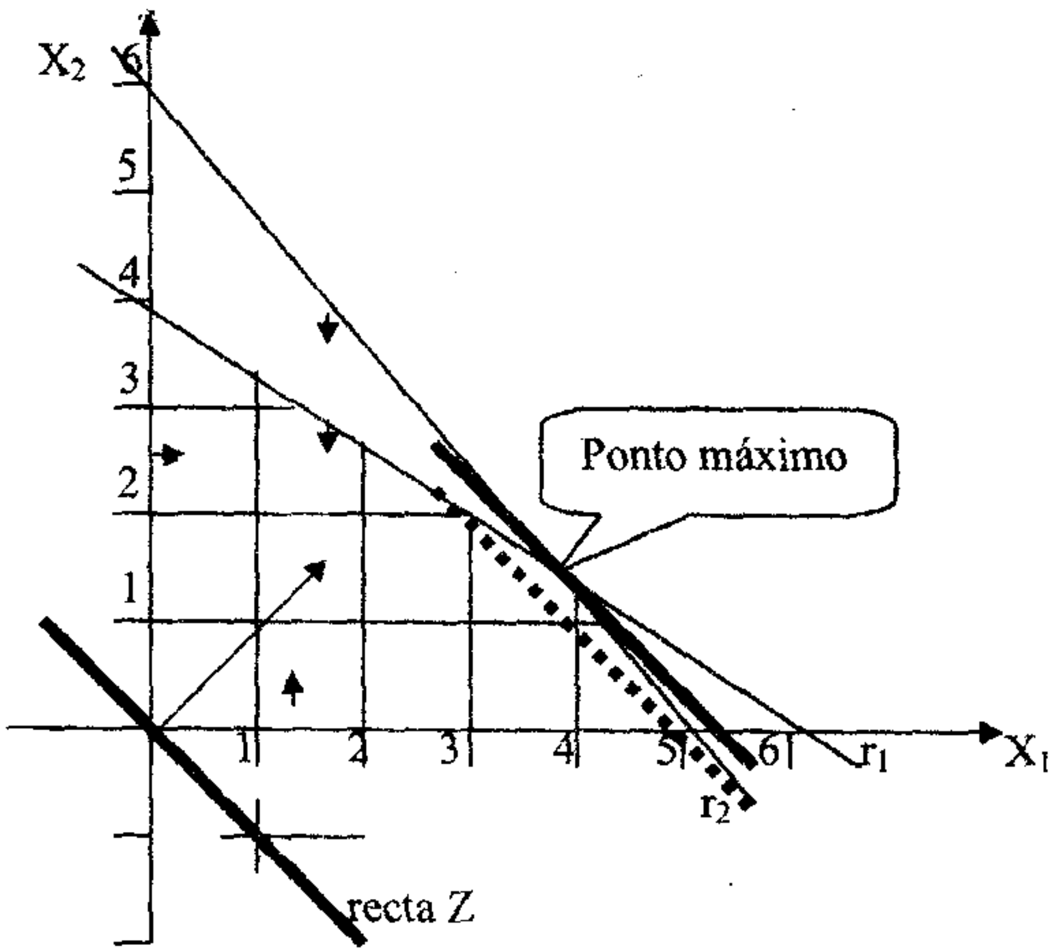
x_1	x_2
0	4
6	0

R_2:

x_1	x_2
0	6
5	0

R_z:

x_1	x_2
0	0
1	-7/6



A solução óptima do problema de programação linear é:

S(PL) = {x_1 = 3.75; x_2 = 1.5 e Z_{max} = 35.25}

Como a solução não é inteira, dizemos que o valor máximo inteiro da fúnção objectivo é igual a zero, Z_m= 0; e também sabemos pelo conjunto solução apresentado graficamente que o valor de Z_m não será superior ao valor óptimo da primeira aproximação: $Z_m \leq Z_{\max}$.

Arredondando os valores para x_1 = 4 e x_2 = 2, teremos z_i = 40, um valor superior a Concluímos neste caso que esta solução não é viável e o ponto P(4,2) de facto está fora da região das soluções admissíveis.

Para procurarmos a solução inteira, vamos calcular o valor da função objectivo em cada ponto da região das soluções admissíveis para apenas os pares de coordenadas com valores inteiros.

X_1	0	1	2	3	4	**5**	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	0
X_2	0	0	0	0	0	**0**	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4
$7x_1+6x_2$	0	7	14	21	28	**35**	6	13	20	27	34	12	19	26	33	18	25	24

Examinado a tabela anterior, vemos que a solução óptima do problema de programação linear inteira é:

S(PL1) = {x_1 = 5; x_2 = 0 com Z_m = 35}

O procedimento ilustrado pelo exemplo 4.1 para encontrar a solução óptima inteira é viável para alguns e poucos problemas de PLI, porque este procedimento toma-se difleil ou mesmo impossível para grande parte dos problemas de PLI.

De um modo gemi, existem dois métodos básicos que são utilizados para resolver os problemas de programação linear inteira.

- Método de Bifurcação e limite (Branch and Bound Method)
- Método de Corte de Gomory (Gomory's Cutting Plane Method)

4.2 MÉTODO DE BIFURCAÇÃO E LIMITE

Os primeiros trabalhos deste método foram desenvolvidos por Land e Doig (1960) e melhorados para a presente estrutura por Dakin, R.J(1 965) no seu livro "A Tree Search Algorithm for Mixeci Integer Pmgramming Problems". Daí em diante a estrutura do processo da procura da solução óptima inteira, apresentar-se na forma de uma árvore com restrições uma depois da outra.

Devido a dificuldade da procura da solução para problemas de PLI, estão até agora a ser desenvolvidos métodos com vista a encontrar um procedimento padrão. Entretanto, muitos investigadores e autores, como Dantzig,G.B(1963), Bland, RG(1977), Paul, RT (1979), Taha, H.A(1975; 1997) entre outros, consideram que o método promissor para os problemas de programação linear inteira é o Branch and Bound Method, cujo princípio básico consiste em dividir repetidamente o problema que apresentar solução não inteira em dois subproblemas e resolvê-los até encontrar uma solução viável óptima com todos os valores das variáveis inteiros incluindo o valor da função objectivo.

Para a utilização do algoritmo de bifurcação e limite é necessário que sejam satisfeitas três proposições:

Proposição 1. O problema de programação linear inteira já tem a primeira aproximação que é a solução óptima do problema de programação linear.

Proposição 2. A primeira aproximação tem pelo menos x_i não inteiro, i.é: $x_i = b_i$ onde b_i é um valor não inteiro.

Proposição 3. O limite inferior é zero para os problemas de maximização: $Z_m = 0$, e o limite superior é infinito para os problemas de minimização: $Z_s = \infty$

Procedimento do Método de Bifurcação e Limite

Passo 1. Resolver o problema original usando os métodos já conhecidos de PL. Se a solução deste problema satisfaz a restrição de inteiro, termina-se o processo. Se não, o valor da função objectivo determina o limite superior (Z_m) ou inferior (Z_s) do problema de programação linear inteira.

Passo 2. Partindo da solução não inteira, dividir o problema em dois subproblemas com restrições adicionais. Por exemplo se $x_i = b_i$ onde b não é inteiro, no subproblema 1 adiciona-se a restrição $x_i \le [b_i]$ e no subproblema 2 adiciona-se a restrição $x_i \ge [b_1]+1$, onde $[b_i]$ é a parte inteira de b_i.

Passo 3. Resolver os dois novos problemas de PL criados pela adição de novas restrições.

Passo 4. Teste das soluções

a) Se a solução do novo problema de PL não é viável, o processo de procura da solução inteira termina neste subproblema.
b) Se a solução do novo problema de IL é viável, mas não é inteira, actualize o passo 5.
c) Se o subprobiema tem uma solução viável e inteira, calcule o valor da função objectivo:

- Se este valor é igual ao limite superior (inferior), então foi alcançada a solução óptima e $Z_m = z_i$ ($Z_s = Z_i$)
- Se este valor não for igual ao limite superior (inferior), mas superior (inferior) ao limite inferior (superior), desigue a este valor novo limite inferior (superior) e passe para o passo 5. Esta troca dos limites diz-se que **Z foi incumbido e Z1.1 sondado**.
- Finalmente, se este valor é menor (maior) que o limite inferior (superior), termina-se o processo neste subproblema.

Passo 5. Examine todos os subproblemas e verifique se o limite superior (inferior) é igual ao valor máximo da função objectivo. Se o limite superior (inferior) é igual ao limite inferior (superior), termine o processo. Caso contrário repita o passo 2.

Cada um dos modelos ou subproblemas pode ser resolvido como um novo problema de programação linear usando o método simplex, gráfico e ou mesmo como uma adição de uma nova restrição na análise de sensibilidade. Para que a decisão de sondagem se tome clara pode-se recorrer ao método gráfico.

Observações:

- Só se bifurca uma variável de cada vez e se acrescenta uma restrição em cada subproblema
- O problema de programação linear inteira, pode ter mais de uma solução óptima, i.é, diferentes valores mas com o mesmo valor da função objectivo.

Exemplo 4.2. Resolver o exemplo 4.1 pelo método de bifurcação e limite.

Maximizar $Z = 7x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

A primeira aproximação é: $S_0 = \{x_1 = 3.75;\ x_2 = 1.5;\ Z_{max} = 35.25\}$

De onde temos as conclusões $Z_m = 0$; $Z_m \le Z_{\max} = 35.25$

Tanto x_1 como x_2 podem ser bifurcados, nós vamos escolher x_2 para bifurcar.

Subproblema 1.

Max $Z = 7x_1 + 6x_2$

Suj à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ \qquad x_2 \leq 1 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Para $x_2 = 1$, substituindo nas restrições 1 e 2 temos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3*1 = 12 \\ 6x_1 + 5*1 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4.5 \\ x_1 = 4.16\,\min imo \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_{(4.5)} = 31.5 + 6 = 37.5 \quad -não\,viavel \\ Z_{(4.16)} = 29.16 + 6 = 35.16 \quad -viavel \end{cases}$$

$$Sp_1 = \{x_1 = 4.16; x_2 = 1, Z_i = 35.16 \leq Z_{\max}\} \Rightarrow Z_m = 0$$

Subprobleina 2.

Max $Z = 7x_1 + 6x_2$

Suj à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ \qquad x_2 \leq 1 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Para $x_2 = 2$, substituindo nas restrições 1 e 2 temos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3*2 = 12 \\ 6x_1 + 5*2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3\,\min imo \\ x_1 = 4.3 \end{cases} \Rightarrow Z_i = 21 + 12 = 33$$

$Sp_2 = \{x_1 = 3; x_2 = 2, Z_i = 33 \leq Z_{\max}\} \Rightarrow Z_m = 33$ é incumbido e Z_m= 0 é sondado

Como o subproblema 1, apresenta um valor da função objectivo superior ao valor obtido no subproblema 2, vamos bifurcá-lo em dois outros subproblemas, enquanto isso a solução do Sp_2 é guardada ou incumbida a fim de comparar com as próximas soluções.

Subproblema 1.1.

Max $Z = 7x_1 + 6x_2$

$$\text{Suj à} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ \quad\quad x_2 \leq 1 \\ x_1 \quad\quad \leq 4 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

Como o objectivo é maximizar, se $x_1 = 4$ e $X_2 = 1$ temos o valor óptimo da função objectivo: $Z_i = 28 + 6 = 34$.

$Sp_{1.1} = \{x_1 = 4; x_2 = 1, Z_i = 34 \leq Z_{\max}\} \Rightarrow Z_m = 34$ é incumbido e$Z_m = 33$ é sondado.

Subproblema 1.2.

Max $Z = 7x_1 + 6x_2$

$$\text{Suj à} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ \quad\quad x_2 \leq 1 \\ x_1 \quad\quad \leq 5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

Para $x_1 = 5$, substituindo nas restrições 1 e 2 temos:

$$\begin{cases} 2*5 + 3x_2 = 12 \\ 6*5 + 5x_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0.66 \\ x_2 = 0 \quad \min imo \end{cases} \Rightarrow Z_i = 35 + 0 = 35$$

$Sp_{1.2} = \{x_1 = 5; x_2 = 0, Z_i = 35 \leq Z_{\max}\} \Rightarrow Z_m = 35$ é incumbido e $Z_m = 34$ é sondado.

Como não podemos mais bifurcar e nem podemos aumentar o valor da função objectivo, já alcançamos a solução óptima inteira do problema de programação linear inteira dada pelo subproblema 1.2.

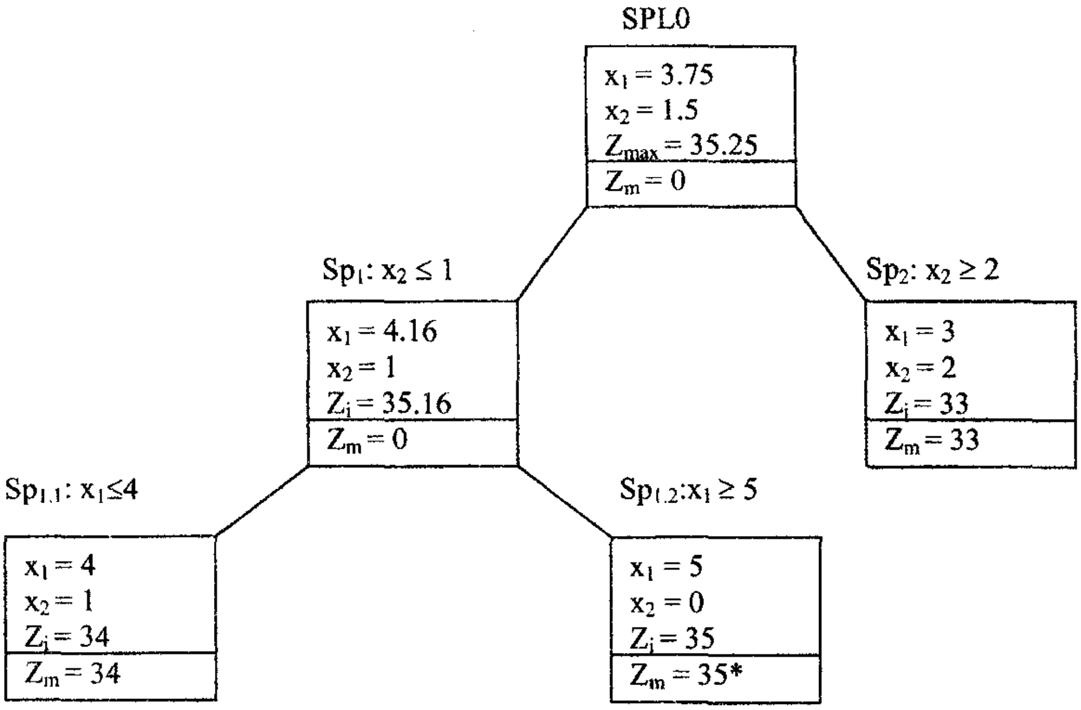
$$S(PLI) = \{x_1 = 5; x_2 = 0, Z_m = 35\}$$

Observação:

Quando há mais de uma variável candidata a bifurcação, recomenda-se escolher a variável que apresentar o maior (menor) valor do coeficiente na equa$o da função objectivo.

A árvore binária que ilustra as bifurcações e as soluções das iterações está apresentada na página seguinte.

Árvore binária do *exemplo 4.2.*



$SPLI = \{x_1 = 5; x_2 = 0, Z_m = 35\}$

Exemplo 4.3. Seja dado o problema de programação linear inteira.

Min $W = 6x_1 + 5x_2$

Suj à $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Resolva o problema usando o método simplex dual para obter a primeira aproximação.

Resolução.

Tabela inicial simplex dual

base	y_1	y_2	x_1	x_2	bi
x_1	2	3	1	0	6
x_2	3	2	0	1	5
Z	-4	-5	0	0	0

1ª Iteração

base	y_1	y_2	x_1	x_2	bi
y_2	2/3	1	1/3	0	2
x_2	**5/3**	0	-2/3	1	1
Z	-2/3	0	5/3	0	10

2ª Iteração

base	y_1	y_2	x_1	x_2	bi
y_2	0	1	3/5	-2/5	8/5
y_1	1	0	-2/5	3/5	3/5
Z	0	0	7/5	2/5	52/5

$SPL0 = \{x_1 = 7/5 = 1.4; x_2 = 2/5 = 0.4 \; e \; W_{\min} = 52/5 = 10.4\}$

Desta solução conclui-se que: $W_s \geq W_{\min} = 10.4,$ para o problema de minimização vamos bifurcar x_2 porque tem menor coeficiente na função objectivo.

Subproblema 1.

Min $W = 6x_1 + 5x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ \quad\quad x_2 \geq 5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases} ; \text{ Para } x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3*0 = 4 \\ 3x_1 + 2*0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \max imo \\ x_1 = 5/3 = 1.66 \end{cases} W_i = 12$$

$Sp_1 = \{x_1 = 2; x_2 = 0, W_i = 12 > 10.4\} \Rightarrow W_s = 12$ é incumbido; $W_s = \infty$ é sondado

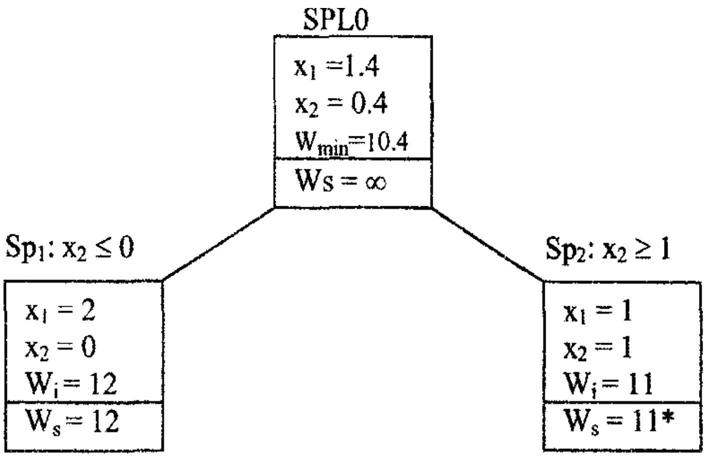
Subproblema 2.

Min $W = 6x_1 + 5x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ \quad\quad x_2 \geq 5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases} ; \text{ Para } x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3*1 = 4 \\ 3x_1 + 2*1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.5 \\ x_1 = 1.0 \max \end{cases} \; W_i = 11$$

$Sp_2 = \{x_1 = 1; x_1 = 1, W_i = 11 < 12\} \Rightarrow W_s = 11$ é incumbido; $W_s = 12$ é sondado

Árvore binária do *exemplo 4.3.*



Exemplo 4.4. Recorrendo ao método gráfico para visualizar o domínio das soluções admissíveis, resolva o seguinte problema de programação linear inteira.

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \end{cases}$$

Resolução

R_1:

x_1	x_2
0	1
-2/3	0

R_2:

x_1	x_2
0	-3/4
3/2	0

R_3:

x_1	x_2
0	6
6	0

R_z:

x_1	x_2
0	0
2	4

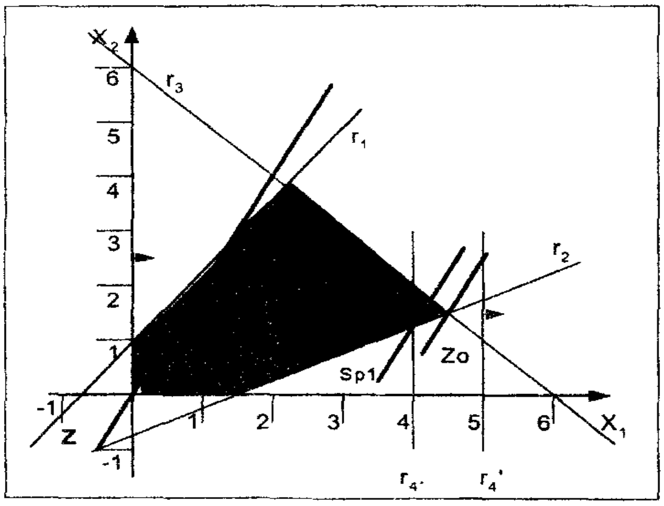


Figura 4.1. Para o problema 1, subproblemas 1 e 2.

$$S = \{PL0\} = r_2 \cap r_3 = \{x_1 = 4.5; x_2 = 1.5; Z_{\max} = 7.5\}$$

De onde $Z_m = 0$ e $Z_m \leq Z_{max}$, vamos bifurcar x_1 por ter maior coeficiente na função objectivo: $Z = 2x_1 - 1x_2$

Subproblema 1.

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \\ x_1 \leq 4 & r_4 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

$$Sp_1 = r_2 \cap r_4 = \{x_1 = 4.5; x_2 = 1.25; Z_i = 6.75 < Z_{\max}\} \Rightarrow Z_m = 0$$

Subproblema 2

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \\ x_1 \geq 5 & r_4' \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

Pelo gráfico, a recta $x_1 = 5$ está fora do conjunto solução do problema inicial, logo o subproblema 2 não é viável.

Vamos bifurcar x_2 do subproblema 1 em subproblemas 1.1 e 1.2.

Subproblema 1.1.

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à}\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \\ x_1 \qquad \leq 4 & r_4 \\ \qquad x_2 \leq 1 & r_5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

$Sp_{1.1.} = r_2 \cap r_5$

Logo: $\{x_1 = 3.5; x_2 = 1; Z_i = 6\} \Rightarrow Z_m = 0$

Subproblema 1.2

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à}\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \\ x_1 \qquad \leq 4 & r_4 \\ \qquad x_2 \geq 2 & r_5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

$Sp_{1.2.} = r_5 \cap r_3$

logo: $\{x_1 = 4; x_2 = 2; Z_i = 6\} \Rightarrow Z_m = 6$

É incumbido e $Z_m = 0$ é sondado

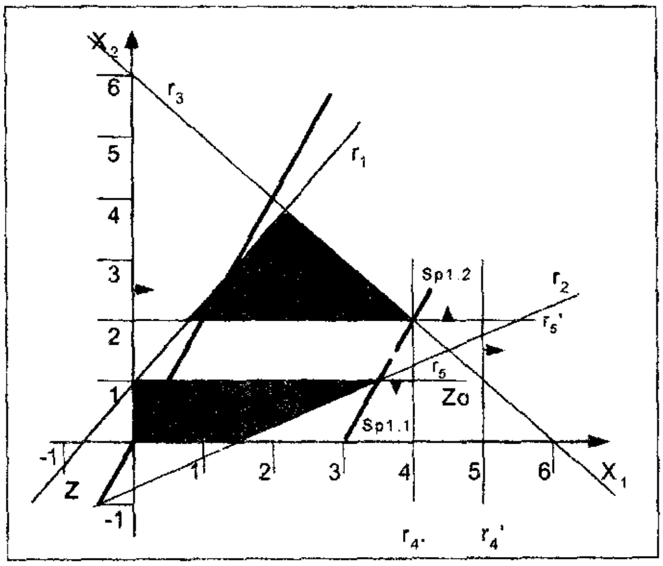


Figura 4.2. Para subproblemas 1.1 e 1.2

O subproblema 1.2 já tem valores inteiros, entretanto, devemos bifurcar o subproblema 1.1 em 1.1.1 e 1.1.2 para verificar se não tem um valor máximo da função objectivo.

Subprobtema 1.1.1

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \\ x_1 \qquad \leq 4 & r_4 \\ \qquad x_2 \leq 1 & r_5 \\ x_1 \qquad \leq 3 & r_6 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

$Sp_{1.1.1.} = r_2 \cap r_6$

$= \{x_1 = 3; x_2 = 0.75, Z_i = 5.25 < 6\}$

$\Rightarrow Z_m = 6$

Subproblenza 1.1.2

Max $Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{Sui à} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 2 & r_1 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3 & r_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 6 & r_3 \\ x_1 \qquad \leq 4 & r_4 \\ \qquad x_2 \leq 1 & r_5 \\ x_1 \qquad \geq 4 & r_6 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

Se $x_1 = 4$, a solução éviavel porque está fora do conjunto solução dos subprodutos 1.1 e 1.2

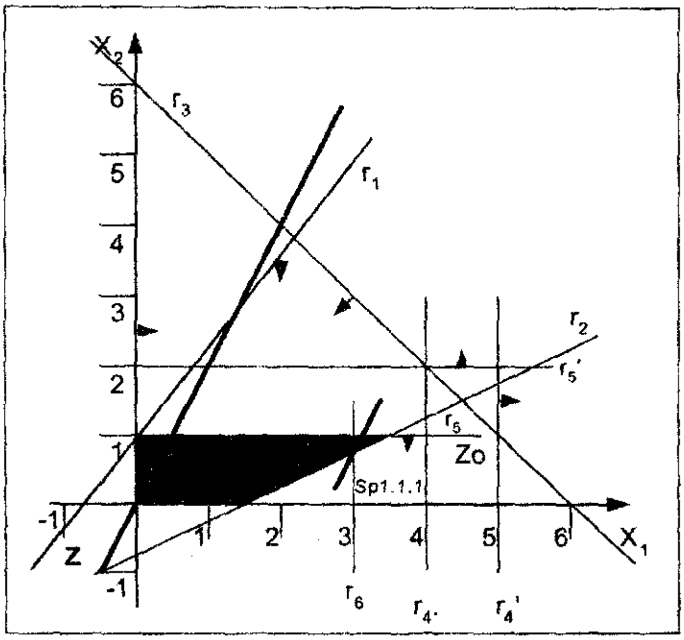
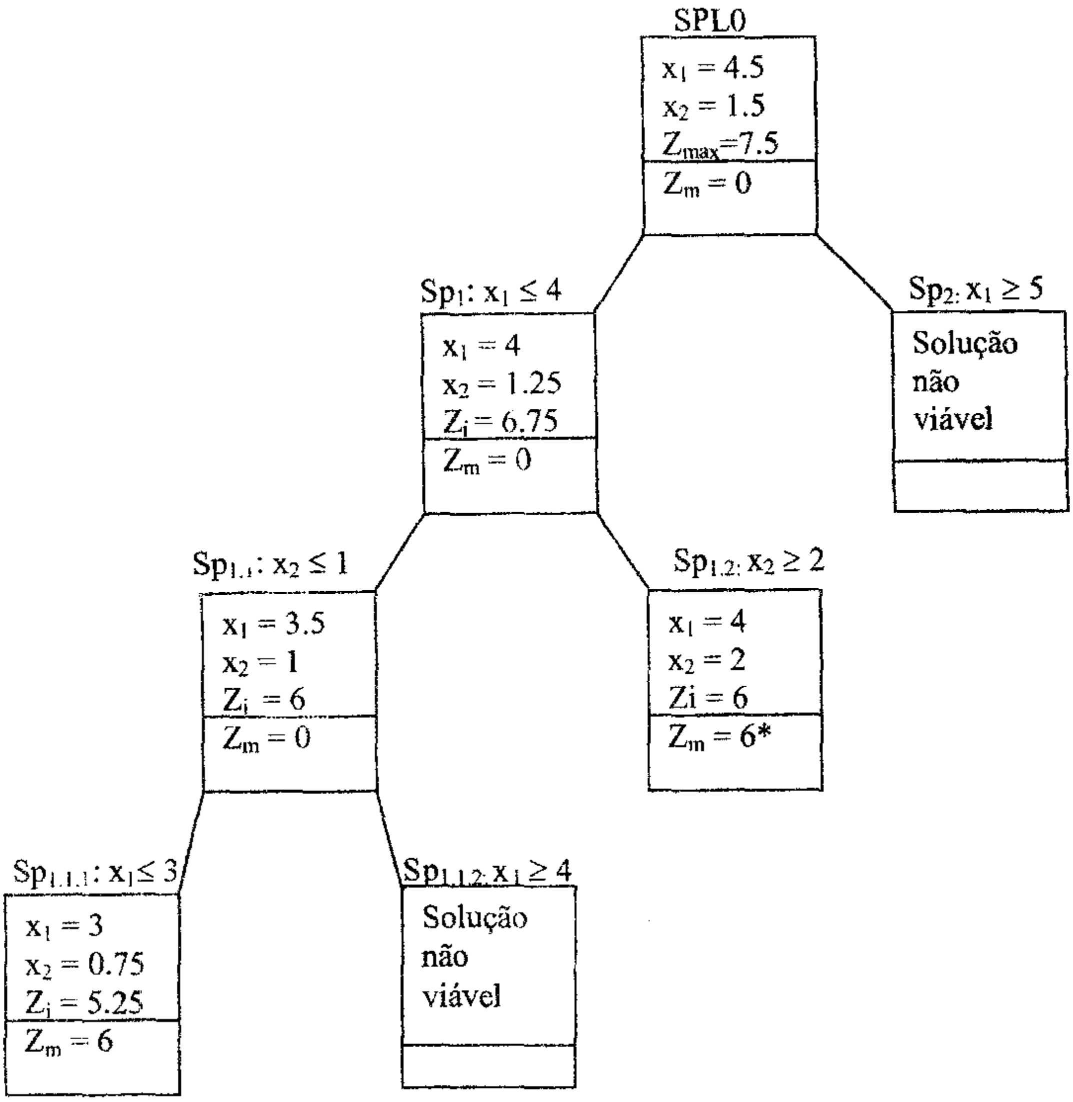


Figura 4.3. Para subprobleznas 1.1.1 e 1.1.2.

Como o subproblema 1.1.1 apresenta um valor menor que do subproblema 1.2, do subproblema 1.1.1 não podemos continuar a bifurcar e a solução óptima é a que foi, obtida pelo subproblema 1.2.

$S(PLI) = \{x_1 = 4; x_2 = 2; Z_m = 6\}$

Arvore binária do *exemplo 4.4.*



$S(PLI) = \{x_1 = 4; x_2 = 2; Z_m = 6\}$

Exemplo 4.5. Resolva o problema de programação linear inteira.

Min $W = 10x_1 + 8x_2$

Suj à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 16 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Resolução

Tabela inicial simplex dual

base	y_1	y_2	x_1	x_2	bi
x_1	2	4	1	0	10
x_2	1	**6**	0	1	8
Z	-3	-16	0	0	0

1ª Iteração

base	y_1	y_2	x_1	x_2	bi
x_1	**4/3**	0	1	-2/3	14/3
y_2	1/6	1	0	1/6	4/3
Z	-1/3	0	0	8/3	64/3

2ª Iteração

Base	y_1	y_2	x_1	x_2	bi
y_1	1	0	3/4	-1/2	7/2
y_2	0	1	-1/8	1/4	3/4
Z	0	0	1/4	5/2	45/2

$SPL0 = \{x_1 = 1/4 = 0.25; x_2 = 5/2 = 2.5; e\, W_{\min} = 45/2 = 22.5\} \Rightarrow W_s = \infty\ e\ W_s \geq W_{\min}$

Subproblema 1.

Min $W = 10x_1 + 8x_2$

Suj à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 16 \\ \quad x_2 \leq 2 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Para $x_2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2 = 3 \\ 4x_1 + 12 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_1 = 1.0 \text{ max} \end{cases} \Rightarrow W_i = 10 + 16 = 26$

$SP_1 = \{x_1 = 1; x_2 = 2; W_i = 26 > W_{\min}\} \Rightarrow W_s = 26$ é incumbido e $W_s = \infty$ é sondado

Subproblema 2.

Min $W = 10x_1 + 8x_2$

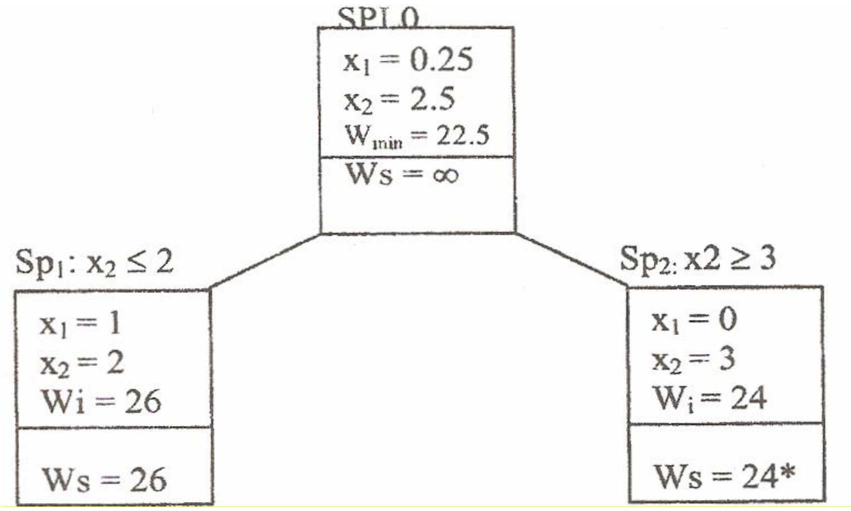
Suj à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 16 \\ \quad x_2 \leq 3 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Para $x_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3 = 3 \\ 4x_1 + 18 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ max} \\ x_1 = -1/2 \end{cases} \Rightarrow W_i = 0 + 24 = 24$

$SP_2 = \{x_1 = 0; x_2 = 3; W_i = 24 > 26\} \Rightarrow W_s = 26$ é incumbido e $W_s = 26$ é sondado

$SPLI = \{x_1 = 0; x_2 = 3; W_s = 24\}$

Árvore binária do *exemplo 4.5*



$SPLI = \{x_1 = 0; x_2 = 3; W_s = 24\}$

4.3 MÉTODO DE CORTE DE GOMORY

O método de Gomory foi um dos primeiros algoritmos desenvolvidos e publicados por Gomory, R.E(1958) no seu livro “Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs”, para resolver problemas de programação linear inteira.

O método de Gomory é um procedimento que divide o conjunto das oportunidades em dois planos tal como o método de bifurcação e limite faz, só que Gomory considera apenas urna nova restrição em cada corte. permanecendo sempre com um único problema adicionado mais uma restrição.

Este método de corte de Gomory dá uma possibilidade de diminuir o número das iteraçes, no entanto ele pode não chegar a urna solução inteira, ainda que tenha uma convergência rápida.

Procedimento do método de Gomory

Dado um problema da programação linear inteira na forma canónica ou padrão:

Passo 1.Resolver o problema de programação linear ignorando a restrição de que a solução óptima deve ser inteira, até obter a tabela terminal simplex.

- Se a tabela terminal apresentar todos valores das variáveis inteiros, esta, é solução óptima do problema de programação linear inteira.
- Se existe algum valor não inteiro de pelo menos uma variável na tabela terminal simplex, esta não é solução do problema de PLI e deve-se passar ao passo 2.

Passo 2. Para construir a nova restrição, deve-se escolher da tabela terminal simplex qualquer linha que tenha a solução não inteira $x_i = b_j$. Para diminuir o número das iterações necessárias para convergir recomenda-se escolher a linha com a maior fracção.

a) Supondo que foi escolhida a linha i, a correspondente equação é:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{ij}x_j = b_i$ ou $\sum a_{ij}x_j = b_i$ *equação1*

b) Decompõe-se cada coeficiente fraccionário a1j bem como o termo b não inteiro como soma de um inteiro $\lfloor a_{ij} \rfloor, [b_i]$ e de uma fracção $f_{ij} f_j$ respeetivamente e em seguida escreve-se a nova restrição.

$- f_{i1}x_1 - f_{i2}x_2 - f_{i3}x_3 - ... - f_{ij}x_j + x_{j+1} = -f_i$ ou $-\sum f_{ij}x_j = -f_i$ *equação2*

onde

$f_{ij} = a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor$ é a parte fraccionária de a_{ij}

$f_i = b_{ij} - [b_i]$ é a parte fraccionária de b_i

$x_j + 1$ é a nova variável de folga, introduzida na restrição, sendo positiva e inteira.

Passo 3.1. Adicionar esta nova restrição na tabela terminal simplex anterior e resolver o novo problema usando o ***método dual simplex***. Se esta solução não for inteira volte e repita o passo 2.

Passo 3.2. Se pretender usar o ***método de duas fases***, basta considerar a equação 1, e a equação 2 multiplicada por (-1) e introduzir a variável artificial a, em seguida resolver o problema com as duas restrições. Se depois das duas fases não tiver solução inteira este método não alcança a solução óptima inteira.

Exemplo 4.6. Usando o método de Gomory e o método Dual simplex, resolva o seguinte problema de programação linear inteira.

Max $Z = -x_1 + 3x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 15 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

Resolução

Tabela inicial simplex

Base	x1	x2	x3	x4	bi
x3	1	-1	1	0	2
x4	2	4	0	1	15
Z	1	-3	0	0	0

Tabela terminal simplex

Base	x1	x2	x3	x4	bi
x3	3/2	0	1	1/4	23/4
x2	1/2	1	0	1/4	15/4
Z	5/2	0	0	3/4	45/4

.

$$SPL0 = \{x_1 = 0; x_2 = 15/4 = 3 + 3/4; x_3 = 23/4 = 5 + 3/4;\ Z_{\max} = 45/4 = 11.25\}$$

A solução não é inteira e conclui-se que $Z_m = 0; Z_m \le 11.25,$ e corno para x_2 e x_3 temos a mesma fracção ¾ , teremos que escolher a linha 2 porque x_2 tem maior coeficiente na função objectivo.

Equação 1: $\frac{1}{2}x_1 + 1x_2 + 0x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4}$

Depois da decomposição ternos a segunda equação que corresponde a nova restrição.

Equação 2: $-\frac{1}{2}x_1 + 0x_2 + 0x_3 - \frac{1}{4}x_4 + x_5 = -\frac{3}{4}$

Onde x_5 é a nova variável de folga

O novo problema com mais urna restrição a resolver é:

Max $Z=-\frac{5}{2}x_1+0x_2+0x_3-\frac{3}{4}x_4+0x_5=-\frac{45}{4}$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}x_1+0x_2+x_3+\frac{1}{4}x_4+0x_5=\frac{23}{4}\\ \frac{1}{2}x_1+1x_2+0x_3+\frac{1}{4}x_4+0x_5=\frac{15}{4}\\ -\frac{1}{2}x_1+0x_2+0x_3-\frac{1}{4}x_4+1x_5=-\frac{3}{4}\\ \qquad\qquad x_i\in Z_0^+\end{cases}$$

Tabela dual simplex 1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_3	3/2	0	1	1/4	0	23/4
x_2	1/2	1	0	1/4	0	15/4
x_5	-1/2	0	0	**-1/4**	1	**-3/4**
Z	5/2	0	0	3/4	0	45/4

Tabela terminal simplex 1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_3	1	0	1	0	1	5
x_2	0	1	0	0	1	3
x_4	2	0	0	1	-4	3
Z	1	0	0	0	3	9

$SPL1=\{x_1=0;x_2=3;x_3=5;x_4=3;x_5=0;Z_i=9<Z_{\max}\}\Rightarrow Z_m=9$

$SPLI=\{x_1=0;x_2=3;Z_m=9\}$

Exemplo 4.7. Resolva o problema de programação inteira pelo método de Gomory recorrendo ao método simplex de duas fases nas aproximações depois do corte.

Max $Z=x_1+9x_2+x_3$

Suj à $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\le 9\\ 3x_1+2x_2+2x_3\le 15\\ x_i\in Z_0^+\end{cases}$

Resolução

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_4	1	2	3	1	0	9
x_5	3	2	2	0	1	15
Z	-1	-9	-1	0	0	0

Tabela terminal simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
x_5	2	0	-1	-1	1	6
Z	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

$$SPL0 = \{x_1 = 0; x_2 = 9/2; x_3 = x_4 = 0; x_5 = 6; Z_{\max} = 81/2 = 40.5\} \Rightarrow Z_m = 0$$

Como temos 4 +1/2 na primeira linha no temos outra escolha se no a 1a linha.

Equação 1: (1ª linha): $\frac{1}{2}x_1 + 1x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 0x_5 = \frac{9}{2}$

Equação 2: (decomposta) $-\frac{1}{2}x_1 + 0x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 0x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$

Como pretendemos usar o método de duas fases multiplicamos por (-1) e introduzimos a variável artificial. $\frac{1}{2}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 0x_5 - x_6 + a_1 = \frac{1}{2}$

O novo problema é:

Max $Z = -\frac{7}{2}x_1 + 0x_2 - \frac{25}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0a_1 = -\frac{81}{2}$

$$\text{Suj à} \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0a_1 = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 0x_5 - x_6 + a_1 = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

1ª Fase: tabela inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	bi
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	0	0	9/2
a_1	**1/2**	0	1/2	1/2	0	-1	1	**1/2**
Z	7/2	0	25/2	9/2	0	0	0	81/2
Z_a	**-1/2**	0	-1/2	-1/2	0	1	0	-1/2

1ª fase: iteração 1.

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	Bi
x_2	0	1	1	0	0	1	-1	4
x_1	1	0	1	1	0	-2	2	1
Z	0	0	9	1	0	7	-7	37
Z_a	0	0	0	0	0	0	1	0

Retirando as variáveis X_5, a_1 e a linha Z_a passamos para a 2ª fase.

2ª fase: tabela inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	Bi
x_2	0	1	1	0	1	4
x_1	1	0	1	1	-2	1
Z	0	0	9	0	7	37

$$SPL1 = \{x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = x_4 = 0; x_6 = 0; Z_{\max} = 37\} \Rightarrow Z_m = 37$$

$$SPL1 = \{x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 0; Z_{\max} = 37\} \Rightarrow Z_m = 37$$

4.4 EXERCCIOS PROPOSTOS

Exercício 4.1. Usando o método de bifurcação e limite, resolva os seguintes problemas de programação linear inteira (Note que para resolver pode-se recorrer a forma analítica, simplex dual ou gráfica).

a) Max $Z = 6x_1 + 8x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

b) Min $W = x_1 + x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ 12x_1 + 5x_2 \ge 30 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

c) Min $W = 3x_1 + 4x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 1x_1 + 3x_2 \ge 5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$$

Respostas:

a) $SPL0=\{x_1=2.25; x_2=1.5; Z_{\max}=25.5\} \Rightarrow SPLI=\{x_1=0; x_2=3; Z_m=24\}$

b) $SPL0=\{x_1=2.5; x_2=05; W_{\min}=2.5\} \Rightarrow SPLI=\{x_1=3; x_2=0; W_s=3\}$

c) $SPL0=\{x_1=0; x_2=1.67; W_{\min}=6.67\} \Rightarrow SPLI=\{x_1=0; x_2=2; Z_m=83\}$

Exercício 4.2. Usando o método de bifurcação e limite resolva as alíneas. (nota: recorra ao método gráfico para visualizar o domínio solução).

a)Max $Z=3x_1+2x_2$

Suj. à $\begin{cases} 4x_1+2x_2 \le 10 \\ 4x_1+6x_2 \le 18 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

b) Min $W=6x_1+8x_2$

Suj. à $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 20 \\ 1x_1+3x_2 \ge 10 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

c) Max $Z=6x_1+8x_2$

Suj. à $\begin{cases} 5x_1+2x_2 \le 20 \\ 1x_1+2x_2 \le 10 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Resposta:

a) $SPL0=\{x_1=1.5; x_2=2; Z_{\max}=8.5\} \Rightarrow SPLI=\{x_1=2; x_2=1; Z_m=8\}$

b) $SPL0=\{x_1=0; x_2=10/3; W_{\min}=80/3\} \Rightarrow SPLI=\{x_1=1; x_2=3; W_s=30\}$

c) $SPL0=\{x_1=2.5; x_2=3.75; Z_{\max}=45\} \Rightarrow SPLI=\{x_1=2; x_2=4; Z_{ms}=44\}$

Exercício 4.3. Usando o método de Gomory e o método simplex de duas fases ou dual simplex, resolva os seguintes exercícios.

a) Max $Z=x_1+2x_2$

Suj. à $\begin{cases} x_1+3x_2 \le 13 \\ 2x_1-x_2 \le 6 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

b) Max $Z=x_1+3x_2$

Suj. à $\begin{cases} -x_1+3x_2 \le 6 \\ 2x_1+x_2 \le 12 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

c) Max $Z=2x_1-4x_2+x_3$

Suj. à $\begin{cases} 1x_1-3x_2+0x_3 \le 12 \\ 0x_1+2x_2+3x_3 \le 28 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

d)Max $Z=50x_1+30x_2$

Suj. à $\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 8 \\ 5x_1+2x_2 \le 10 \\ 1x_1+6x_2 \le 12 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

e) Max $Z=4x_1+5x_2$

Suj. à $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 6 \\ 3x_1+2x_2 \le 5 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

f) Max $Z=2x_1-4x_2+x_3$

Suj. à $\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 14 \\ 3x_1 2x_2 \le 10 \\ x_i \in Z_0^+ \end{cases}$

Resposta:

a) $SPL0=\{x_1=4.429; x_2=2.857; Z_{\max}=10.143\}$ $SPLI=\{x_1=4; x_2=2; Z_m=8\}$

b) $SPL0=\{x_1=4.486; x_2=3.429; Z_{\max}=14.57143\}$ $SPLI=\{x_1=4; x_2=3; Z_m=13\}$

c) $SPL0=\{x_1=12; x_2=0; x_3=9.33; Z_{\max}=33.33\}$ $SPLI=\{x_1=12; x_2=0; Z_m=33\}$

d) $SPL0=\{x_1=3/2; x_2=5/4; Z_{\max}=225/2\}$ $SPLI=\{x_1=2; x_2=0; Z_m=100\}$

e) $SPL0=\{x_1=3/5; x_2=8/5; Z_{\max}=25/5\}$ $SPLI=\{x_1=1; x_2=2; Z_m=9\}$

f) $SPL0: X=\{0,14/5,0,22/5\}; Z_{\max}=14$ $SPLI: X=(2,2,0,0)$ $Z_m=14$

Referências:

FERREIRA, M.A.M; Isabel, A (1995) - *Programação Matemática*, 2ª edição, Edições Sílabo, Lisboa: pp74-91.

PAUL, R.T (1979) - *An Introduction to Linear Programming and Game Theory*, John Wiley & Sons, me, USA: sections 6.3, 6.4.

RENDER, 13; Ralhp, M.S.Jr. (1997) - *Quantitative Analysis for Management*, 6th edition, Prentice - 1-hal International, Inc, USA: cap.11

TAHA, N.A (1997) - Operations Research - an introduction, 6th edition, Prentice - Hail International. Inc. USA: cap.9.

Capítulo 5

5. PROBLEMAS DE TRANSPORTE E AFECTAÇÃO

5.1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas comuns na administração de empresas é como conseguir fazer operar um conjunto de máquinas como autocarros ou aviies numa rede permissível com um custo mínimo?. Como estruturar as fábricas de produção de um determinado produto em relação aos locais de vendas de tal forma que o lucro das vendas seja máximo. Este e outros casos, são problemas que afectam a rede de transporte.

Segundo Render e Ralph (1997), o conhecimento e utilização dos modelos de problemas de transporte, foi proposto pela primeira vez por Hitchcock, F.L.(1941) no seu estudo chamado "Distribuição de produtos de diversas fontes para vários locais". Doze anos depois e independentemente Koopmans, T.C(1953), fez uma grande contribuição ao publicar na revista o tema "Sistemas de transporte e sua optimização". A. Chames e W.W, Cooper desenvolveram o método de Stepping Stone e em 1955 o método de MODI já era conhecido como um método mais rápido para a optimização dos Problemas de Transporte (PTR).

É importante lembrar que na planificação da distribuição de um produto a função transporte leva lugar de destaque, pois, não adianta nada, do ponto de vista do mercado, o fornecedor dispor de um bom produto que não é encontrado pelo cliente no momento que ele o deseja.

A estrutura geral de um modelo de problemas de transporte pode ser vista em três perspectivas:

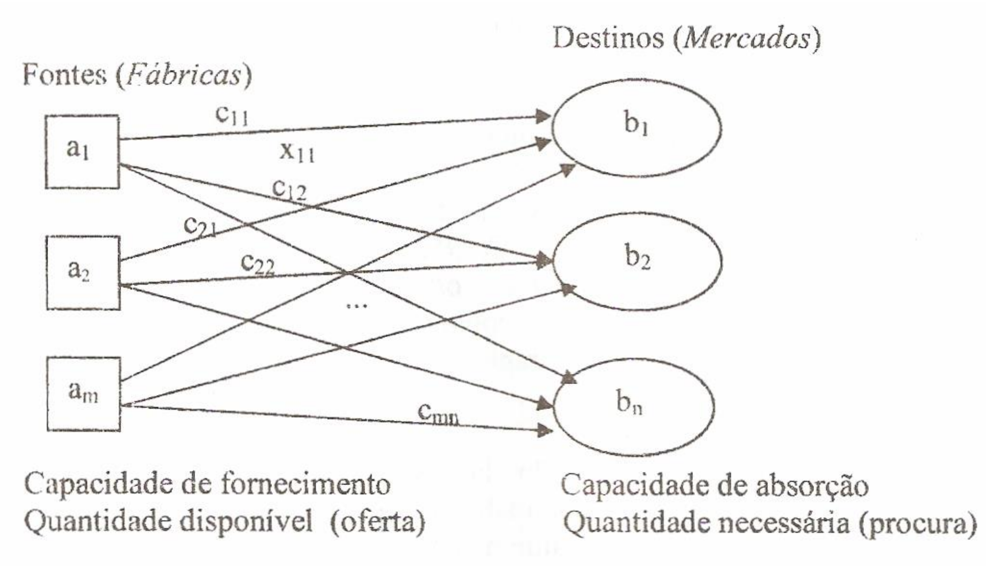
- Uma empresa que possui fábricas localizadas em algumas cidades e depósitos em outras. A empresa deve determinar um programa de transporte de seus produtos de forma a satisfazer a procura destes e minimizar os seus gastos mas respeitando a capacidade das fábricas e dos depósitos (transporte directo);

- Uma variante desta situação, é aquela em que os produtos não vão directamente da fonte ao consumidor, mas passa primeiro por outras fontes ou destinos (transporte com transbordo ou indirecto).
- A última variante é o caso em que se tem um certo número de serviços que devem ser executados por algumas pessoas ou máquinas, e cada conjunto tarefa - maquina tem seu custo particular de execução (prob1enas de afectação ou assignação).

O que temos em comum nestes três casos é a rede de transporte ligando fontes aos destinos. Neste capítulo, vai-se considerar com maior detalhe o primeiro e último casos, por estes serem situações mais frequentes, pois, o segundo caso é uma situação que pode ser tratada como subproblemas.

Formação de um problema de transporte

Suponhamos que existem ***m*** - fábricas de um certo produto, cada fonte pode fornecer uma quantidade a_i e por outro lado existem ***n*** - mercados, cada um pode absorver uma quantidade b_j. E sabe-se que o custo de transportar de uma unidade da fonte i para o destino j é c_{ij}. O objectivo do administrador é determinar o número de unidades que devem ser transportadas de cada fonte para cada destino de forma a minimizar o custo total de transporte. Este problema pode ser representado no seguinte esquema:



Os problemas de transporte são um caso particular dos problemas de programação linear, e em especial da programação linear inteira, porque o número de unidades a transportar de uma fábrica (local) para a loja (outro local) deve ser um número inteiro.

O modelo geral dos problema de transporte pode ser formulado assim:

Optimizar $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Sujeito à $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a \quad ; i = 1,2,..., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; j = 1,2,..., n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ x_{ij} \in Z_0^+ \end{cases}$

Onde

x_{ij} - é a quantidade transportada de origem i para o destino j;

c_{ij} - é o custo de transporte de uma unidade de a para b_j,

a_i - é a quantidade disponível na origem i (oferta);

b_j — é a quantidade necessária no destino j (procura)

O objectivo da programação é determinar as quantidades x_{ij} que devem ser transportadas de cada origem para cada destino de modo a optimizar o produto $\sum\sum c_{ij}.x_{ij}$.

A restrição $\sum a_i = \sum b_j$ é condição necessária para que o problema de transporte tenha solução, caso contrário introduzem-se origens e destinos fictícios com custo nulo: $c_{ij} = 0$.

a) se $\sum a_i > \sum b_j$, introduz-se um destino fictício $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$

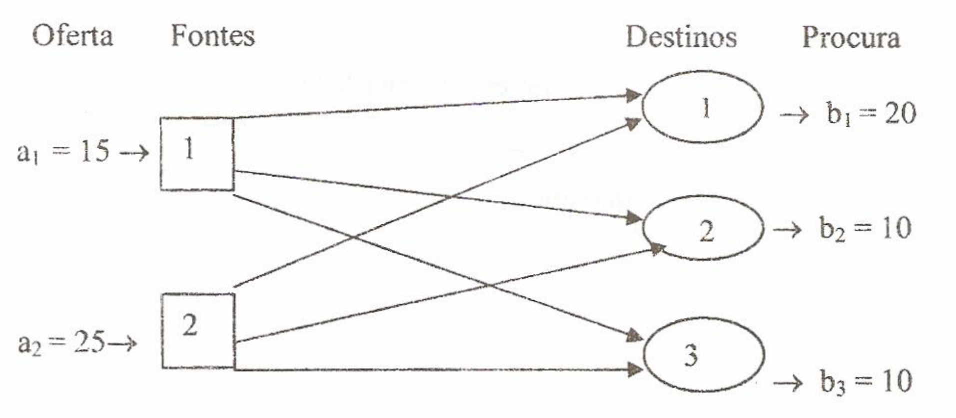
b) se $\sum a_i < \sum b_j$, introduz-se uma origem fictícia $a_{n+1} = \sum b_j - \sum a_i$

Esta formulação do problema bem como a sua interpretação dão origem a um quadro padrão do seguinte tipo:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	----------	Destino n	Oferta Ui
Origem 1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	c_{13} X_{13}	--------	c_{1n} X_{1n}	a_1
Origem 2	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	c_{23} X_{23}	--------	c_{2n} X_{2n}	a_2
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------
Origem m	c_{m1} X_{m1}	c_{m2} X_{m2}	c_{m3} X_{m3}	----------	c_{mn} X_{mn}	a_m
Procura Vj	b_1	b_2	b_3	----------	b_n	N

A solução dos modelos de distribuição pelo método simplex não é eficiente pelo facto de apresentar o maior número de variáveis sendo assim foram criados algorítmos especiais para a sua solução.

Exemplo 5.1. Consideremos uma situação com duas fontes e três destinos.



- . Custos de transporte por rotas: $c_{11} = 10; c_{12} = 3; c_{13} = 5; c_{21} = 12; c_{22} = 7; c_{23} = 9$

a) Construir o modelo matemático de programação linear inteira.
b) Construir o quadro modelo do problema de transporte.

Resolução:

Minimizar $W = 10x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 12x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23}$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ x_{12} + x_{22} = 10 \\ x_{13} + x_{23} = 10 \\ x_{ij} \in Z_0^+ \end{cases}$$

A tabela simplex correspondente a este modelo tem 6 colunas e 5 linhas, o que torna difícil de manipular a tabela, razão pela qual se dispõe de um algoritmo especifico dos problemas de transporte.

Para o problema de programação linear inteira usando o método simplex, teríamos a seguinte solução:
X_{ij} = (0; 5; 10; 20; 5; 0) com W_{min} = 340 u.m

colunas e 5 linhas, o que torna de um algoritmo específico dos o método simplex, teríamos a

O quadro modelo do problema de transporte correspondente é:

	D_1	D_2	D_3	Oferta
O_1	X_{11} 10	X_{12} 3	X_{13} 5	15
O_2	X_{21} 12	X_{22} 7	X_{23} 9	25
Procura	20	10	10	40

Os métodos mais comuns para resolver ou obter a primeira aproximação nos problemas de transporte são:

1. Método ou Regra de Canto Noroeste (NWC);
2. Método de custo (lucro) mínimo (máximo);
3. Método de aproximação de Vogel (VAM)

5.2. MÉTODO DO CANTO NOROESTE

Para encontrar a primeira aproximação de um problema de transporte pelo Método de Canto Noroeste (MCN ; NWC = NorthWest Comer) é necessário seguir os seguintes passos:

Passo 1. Começar por colocar a quantidade necessária no canto noroeste, na posição x_{11}, com uma a locação suficientemente grande.
$X_{11} = \min\{a_1; b_1\}$;

Passo 2. Ajustar a linha ou coluna satisfeita com zero e simultaneamente passar a coluna ou linha seguinte:

- Se $x_{11} = a_1 \Rightarrow x_{21} = b_1 - a_1 \Rightarrow$ linha seguinte
- Se $x_{11} = b_1 \Rightarrow x_{21} = a_1 - b_1 \Rightarrow$ coluna seguinte

Passo 3. Repetir os passos 1 e 2 até completar o preenchimento de quadro, obtendo-se assim a solução inicial (primeira aproximação), tendo em conta que $\sum x_{ij} = a_i$ e $\sum x_{ij} = b_j$.

Vamos resolver o exemplo 5.1 usando o método de Canto Noroeste

Resolução:

Como temos $\sum a_i = \sum b_j = 40$ não é necessário introduzir colunas nem linhas fictícias.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
Origem 1	15 (10)	X (3)	X (5)	15
Origem 2	5 (12)	10 (7)	10 (9)	25
Procura	20	10	10	40

Ordem de preenchimento:

$x_{11} = 15; x_{12} = 0; x_{13} = 0;$ linha 1 satisfeita;

$x_{21} = 5;$ coluna 1 satisfeita;

$x_{22} = 10;$ coluna 2 satisfeita;

$x_{23} = 10;$ linha 2 e coluna 3 satisfeitas.

Custo Total = 15*10 + 5*12 + 10*7 + 10*9 = 370 unidades de medida,

Observação:

1. As variáveis: $x_{11} = 15; x_{21} = 5; x_{22} = 10$ e $x_{23} = 10$ são básicas ($x_{ij} \neq 0$)
2. As variáveis $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 0$ são não básicas ($x_{ij} = 0$)
3. Como existem variáveis não básicas, então existe uma outra alocação com o mesmo custo total ou valor da função objectivo: $W_{\min} = \sum\sum c_{ij} * x_{ij} = 370.$

Exemplo 5.2. Quatro postos de gasolina A, B, C e D necessitam de 50, 40, 60 e 40 mil galões de gasolina respectivamente. É possivel obter estas quantidades partindo de 3 locais que dispöem de 80; 100 e 50 mil galões. Os custos de transporte de 1000 galões de gasolina do loca1 a_i para o posto b_j esto apresentados no quadro.

	A	B	C	D
1	70	60	60	60
2	50	80	60	70
3	80	50	80	60

Determinar a quantidade de gasolina a ser enviada de cada local para cada posto de modo que as necessidades dos postos sejam satisfeitas e o custo total de transporte seja mínirno.

Resolução:

Como $\sum a_j = 80 + 100 + 50 = 230$ e $\sum b_i = 50 + 40 + 60 + 40 = 190,$ temos que introduzir urn destino fictIcio b_{n+1} que necessita de 40 unidades corn custo de transporte zero.

	A		B		C		D		Resíduo		Oferta Ui
1	50	70	30	60	X	60	X	60	X	0	80
2	X	50	10	80	60	60	30	70	X	0	100
3	X	80	X	50	X	80	10	60	40	0	50
Necessidade Vj	50		40		60		40		40		230

Ordern de aiocação dos galôes para os postos:

50 galões de gasolina saíram do local 1 para o posto A;

30 galões de gasolina saíram do local 1 para o posto B;

10 galões de gasolina saíram do local 2 para o posto B;

60 galões de gasolina saíram do local 2 para o posto C;

30 galoes de gasolina saíram do local 2 para o posto D;

10 galões de gasolina saíram do local 3 para o posto D; e

40 galões de gasolina permaneceram no local 3.

CT = W = 50*70 + 30*60 + 10*80 + 60*60 + 30*70 + 10*60 + 40*0 = 12400 mil u.m.

5.3 METODO DE GUSTO MIMMO (LUCRO MAXJMO)

O inétodo de custo minirno (lucro máximo), pode ser aplicado para procurar uma so1ução inicial viàvel de menor custo ou maior lucro. O procedimento do método é seguinte:

Passo 1. Começar por colocar o rnáxirno possível a célula ou variãvel de menor custo unitário (maior lucro) e colocar zero nas céiulas da linha ou coluna satisfeita.

Passo 2. Ajustar os elementos ou a quantidacle que resta na linha ou coluna nâo ajustada, a partir da variável corn menor custo (major lucro).

Passo 3. Repetir o processo para as variãveis corn outros custos na ordern crescente (decrescente) ate completar o preenchimento do quadro.

Exemplo 5.3. Resolver o exemplo 5.1, pelo niétodo do custo minimo.

Reso1ução

	D_1	D_2	D_3	Oferta
Origem 1	x (10)	10 (3)	5 (5)	15
Origem 2	20 (12)	x (7)	5 (9)	25
Procura	20	10	10	40

O preenchirnento do quadro seguiu a sequéncia crescente dos custos:

- $c_{12} = 3 \rightarrow x_{12} = 10$; coluna 2 satisfeita;
- $c_{13} = 5 \rightarrow x_{13} = 5$; linha I está satisfeita;
- $c_{23} = 9 \rightarrow x_{23} = 5$; coluna 3 satisfeita;
- $c_{21} = 12 \rightarrow x_{12} = 20$ linha 2 e coluna 1 estâo satisfeitas.

$W_{min} = 10*3 + 5*5 + 20*12 + 5*9 = 340$ u.m.

Observacâo: Usando o método de custo minimo, diminuImos o custo total de 370 para 340 unidades de rnedida, i.é, poupou-se 30 unidades de medida.

Exemplo 5.4. Uma empresa tem trés fábricas, F_1, F_2, F_3 onde produz uma determinada mercadoria nas quantidades 75, 150 e 100 toneladas respectivamente. Esta mercadoria deve seT enviada para cinco consumidores C_1, C_2, C_3, C_4, e C_5, que necessitam de 100, 60, 40, 75 e 75 toneladas respectivarnente. Os custos de transporte por tonelada entre as várias fábricas e os eonsurnidores são os seguintes:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
F_1	3	2	3	4	1
F_2	4	1	2	4	2
F_3	1	0	5	3	2

Usando o método de custo minirno, determine qual a programacão que a empresa deve adoptar por forma a satisfazer as necessidades dos consumidores corn urn custo de transporte minirno.

Resoluçâo:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Oferta
F_1	X (3)	X (2)	X (3)	X (4)	75 (1)	75
F_2	35 (4)	X (1)	40 (2)	75 (4)	X (2)	150
F_3	40 (1)	60 (0)	X (5)	X (3)	X (2)	100
F_4*	25 (0)	X (0)	X (0)	X (0)	X (0)	25
Procura	100	60	40	75	75	350

Ordem de preenchirnento:

F_4C_1 = 25; linha 4 satisfeita; F_3C_2 = 60; coluna 2 satisfeita;

F_3C_1= 40; linha 3 satisfeita; F_1C_5 = 75; linha 1 e coluna 5 satisfeitas;

F_2C_3 = 40; coluna 3 satisfeita; F_2C_1 = 35; linha 2 e coluna 1 satisfeitas;

F2C4 = 75; linha 2 e coluna 4 satisfeitas;

CT = W_{min} = 75*1 +35*4+40*2 +75*4+40*1 +60*0+25*0 = 635 u.m.

O valor F_4C_1 = 25 para c_{41} = 0; significa que o consumidor C_1 não recebeu 25 unidades portanto so recebeu 75 unidades, porque as quaritidades existentes no chegaram.

Exemplo 5.5. considere o problema de galöes, mas agora corn os lucros de envio de 1000 galões expostos no quadro e resolva usando:

a) O método de Canto Noroeste;
b) O método de maximização do lucro.

80	70	60	60
50	70	80	70
70	50	80	60

Resolucáo:

Método do Canto Noroeste.

	A	B	C	D	R	Oferta
1	50 (80)	30 (70)	X (60)	X (60)	X (0)	80
2	X (50)	10 (70)	60 (80)	30 (70)	X (0)	100
3	X (70)	X (50)	X (80)	10 (60)	40 (0)	50
Procura	50	40	60	40	40	230

LT Z_{max} = 50*80+30*70+ 10*70 + 60*80+ 30*70+ 10*60 +40*0 = 14300u.m

Por se tratar de um problema cle maximização do lucro, vamos comecar por colocar a posicão que tiver o major lucro unitário possivel pela maior quantidade disponível. Note que todas células de major lucro unitário devem pelo menos ser ocupadas arites de se passar ao lucro imediatamente inferior.

	A	B	C	D	R	Oferta
1	50 (80)	30 (70)	X (60)	X (60)	X (0)	80
2	X (50)	10 (70)	50 (80)	40 (70)	X (0)	100
3	X (70)	X (50)	10 (80)	X (60)	40 (0)	50
Procura	50	40	60	40	40	230

Ordem de preenchimento:

$L_{1a} = 80 \rightarrow x_{la} = 50$; coluna A satisfeita

$L_{ac} = 80 \rightarrow x_{2c} = 50$;

$L_{3c} = 80 \rightarrow x_{3c} = 10$; coluna C satisfeita;

$L_{1b} = 70 \rightarrow x_{1b}, = 30$; linha 1 satisfeita;

$L_{2b} = 70 \rightarrow x_{2b} = 10$; coluna B satisfeita;

$L_{2d} = 70 \rightarrow x_{2d} = 40$; coluna D, linha 2 satisfeitas;

$L_{3r} = 0 \rightarrow x_{3r} = 40$; coluna R satisfeita;

LT = Z_{max} = 50*80 + 30*70 + 10*70 + 50*80 + 40*70 + 10*80 = 14400 u.m

$\Delta z = 14400 - 14300 = 100$ u.m.

5.4 METODO DE APROXMAçAO DE VOGEL

o método de aproximação de Vogel (*VAM – Vogel´s Approximation Method*) é uma versâo desenvolvida do método do custo minimo, geralmente este métoclo produz uma melbor solução inicial em relação ao método do canto noroeste.

o método de aproximação de Vogel, basela-se na comparação dos custos (lucros), calculando resIduos ou penalidades em cada linha e em cada coluna da rnatriz. O procedimento para a determinaco da soiuçao inicial pelo método de aproximaco de Vogel estã resumido nos passos:

Passo 1, Para cada linha e coluna da tahela do problema de transporte, determinar a diferença positiva entre o menor custo unitário na linha e coluna e o imediatamente superior custo unitário. Se o problema é de maximizaçào a diferenca é calculada para os dois primeiros lucros unitários máximos. (O valor da diferença é custo de oportumdade por não ter usado a meihor rota).

Penalidade: p = c_2 - c_1; com $c_1 < c_2$ para minimizaçao

: p = $l_i - l_2$ 12; com $l_i > l_2$ para maximizaçâo

Passo 2. Identificar a linha ou coluna corn o major custo de oportunidade "*penalidade*".

Passo 3. Na linha ou coluna escoihida, colocar o máximo possivel para a variável corn o menor custo unitário (major lucro unitário para Os problemas de maxirnização).

Passo 4. Eliminar a linha ou coluna que estiver completamente satisfeita depois desta a1ocaço. A elirninacào é feita colocando X's nas células que não devem participar mais nos próxirnos cálculos das penalidades.

Passo 5. Repetir os passos 1, 2, 3 e 4 ate que a soluçao inicial seja obtida.

Exemplo 5.6. Sejam dadas 3 origens A, B e C corn as possibilidades de 90, 110 e 50 unidades de medida, respectivamente e 4 destinos 1, 2, 3 e 4 que necessitam de 60, 50, 85 e 45 unidades de medida. Sendo dada a matriz dos custos, determinar pelo método de aproximaciio de Vogel a alocacào optima de modo que o custo de transporte seja mInimo.

	1	2	3	4
A	42	40	40	44
B	46	31	38	35
C	30	38	46	41

Resolução:

$\sum a_1 = 90 + 110 + 50 = 250;$

$\sum b_i = 60 + 50 + 85 + 45 = 240$

como $\sum a_j > \sum b_i \rightarrow b_5 = 250 - 240 = 10,$ introduzimos uma coluna ficticia.

	1	2	3	4	5	Oferta	Penalidades
A	10 (42)	X (40)	70 (40)	X (44)	10 (0)	90	**40** 0 0 2 2
B	X (46)	50 (31)	15 (38)	45 (35)	X (0)	110	31 4 4 3 **8**
C	50 (30)	X (38)	X (46)	X (41)	X (0)	50	30 8 x x x
Procura	60	50	85	45	10	250	
Penali. dades	12 **12** 4 4 4	7 7 **9** x x	2 2 2 2 2	6 6 9 **9** x	0 x x x x		

Para exemplificar, as penalidades forani caleuladas da seguinte maneira:

Linha A. $p_a = 40 – 0 = 40$; coluna 1: $p_1 = 42 – 30 = 12$;

Linha B. $p_b = 31 – 0 = 31$; coluna 2: $p_2 = 38 - 31 = 7$;

Linha C. p_c 30 – 0 = 30; etc.

A penalidade maxima nesta série é de 40 u.m, é por isso que escolheuse a linha A e afectou-se com 10 unidades na posicâo x_{a5}. Tendo sido satisfeita a coluna 5 colocou-se X´s e repetiu-se o cálculo das segundas penalidades.

CT = W_{min} = 10*42+70*40+10*0+50*31+15*38+45*35+50*30 = 84l5u.m

Exempto 5.7. Resolva o exemplo 5.6, mas agora suponha que a matriz dos custos representa lucros e procure maximizar o lucro total, usando o método de aproximacão de Vogel.

Resoluçdo:

	1	2	3	4	5	Oferta	Penalidades
A	42 X	40 45	40 X	44 45	0 X	90	2 4 4 0 x
B	46 60	31 5	38 35	35 X	0 10	110	8 3 3 7 7
C	30 X	38 X	46 50	41 X	0 X	50	5 5 x x x
Procura	60	50	85	45	10	250	
Penali. dades	4 x x x x	2 2 9 9 *	6 6 2 2 *	3 3 9 x x	0 0 0 0 *		

LT = Z_{max} = 45*40+45*44+60*46+ 5*31 + 35*38 + 10*0+50*46 = 10325 u.m.

5.5 TESTE DE OPTIMIDADE E MELHORAMENTO DE SOLUÇÃO

Nos exercicios anteriores foi referido que estávamos a calcular a prirneira aproximaçào da solucao do problerna de transporte. De urn modo geral, depois de encontrada a prirneira aproxirnação por qualquer urn dos métodos anteriores é necessário fazer urn teste de optimidade e degeneréncia.

Uma ***solução é optima*** se todos os multiplicadores do simplex ou precos de sombra das variveis nao bãsicas no for menor que zero ($\delta_{ij} \geq 0,$ para minimizaçâo) e rnaior que zero ($\delta_{ij} \leq 0$, para maximizaçao).

Uma solução é degenerada, quando o nirnero de células ocupadas for menor do que **m + n - 1**, Esta situação pode ocorrer tanto na prirneira aproximação como em qualquer estado do meihoramento da soluçao.

Quando se tern uma solução degenerada, muitas das vezes não se consegue desenvolver o teste de optimidade de solucäo. Para que sejam desenvoividos os métodos de teste de optimidade da soluçao é introduzida uma alocaçao artificial com urna quantidade bastante pequena (ε = epsilon) em urna ou mais células não ocupadas e considera-se que esta célula está ocupada. Depois de encontrada a soluçao optima do problema retira-se da tahela a alocação artificial fazendo ε = 0.

Chama-se ***circuito de avaliação*** um camninho mais (+), menos (-) , que começa numna variável não bésica ($x_{ij} \neq 0$), passa por células corn variáveis básicas ($x_{ij} \neq 0$) e termina na posicão inicial.

Urn circuito deve ter um ***percurso fechado***, descrevendo ângulos rectos ou razos ao passar de urna célula para outra.

O teste de optirnidade de soluçãAo pode ser feito usando dois procedirnentos:

- método das pedras (Stepping Stone Method);
- método de MODI (Modified Distribution)

5.5.1. Método das Pedras para o teste de solução

O método proposto por Stepping Stone, consiste em avaliar os custos efectivos das rotas para eneontrar a rota mais viável do problerna de transporte corn objectivo de meihorar a solucão. Os passos do procedimento são;

Passo 1. Identificar todas as células não alocadas ou todas as variáveis não básicas;

Passo 2. Traçar todos circuitos de avaliação tendo em conta que cada circuito deve corneçar e terminar na mesma variável não básica, passando por variáveis básicas e deve-se movimentar so no sentido vertical ou horizontal.

Passo 3. Começando da variável não básica colocar o sinal (+) e sinal (-) em todos os cantos alternando até passar em todos cantos do circuito de avaliação.

Passo 4. Para cada circuito, calcular os precos de sombra como adição entre a sorna dos custos (lucros) com o sinai (+) e soma dos custos (lucros) com o sinai (-).

$\delta_{ij} = \sum(+c_{ij}) - \sum(-c_{ij})$ ou $\delta_{ij} = \sum(+1_{ij}) - \sum(-1c_{ij})$

Passo 5. Se todos os *preços de sombra* forem positivos ($\delta_{ij} \geq 0,$ para minimizaçâo) ou negativos ($\delta_{ij} \leq 0,$ para maximizaçao) a soluçâo é optima caso contrário a soluçâo pode ser meihorada.

5.5.2 Método de MODI para o teste de solução

Para aplicar o método de MODJ, começa-se também corn a soiucão da primeira aproxirnaçâo, mas agora. partindo dos valores dos custos ou lucros calcula-se os valores de cada coluna v_j e linha u_i.

Passo 1, Partindo da tabela da primeira aproximaçäo, construir urn sistema de equaçöes, escrevendo urna equação para cada variävel hásica, i.é:

$$u_i + v_i = c_{ij} \text{ para } x_{ij} \neq 0$$

Passo 2. Depois de todas equacöes serern escritas, faz-se urn qualquer u_i ou v_j igual a zero, de preferéncia o que aparecer em mais equações.

Passo 3. Resolver o sistema de equacões do passo 1, tomando em conta que um u_i ou v_j é nulo. Determina-se assim os valores dos restantes $u\acute{}s$ e $v\acute{}s$.

Passo 4. Calculam-se os precos de sombra "multiplicadores do simplex" para cada variável näo básica usando a formula:

$$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_y \qquad \text{para} \qquad x_{ij} = 0$$

Passo 5. Se todos os *preços de sombra* forem positivos ($\delta_{ij} \geq 0,$ para minimização) ou negativos ($\delta_{ij} \leq 0,$ para rnaximizacâo) a so1uço e óptima caso contrário a solução pode ser melhorada.

5.5.3 Método de Stepping Stone para o Melhoramento da Soluçäo

Tendo-se chegacbo a conelusäo pebo método de MOD1 ou das pedras de que a soluçâo pode ser meihorada seguem-se os passos de meihoramento da soluçâo.

Passo 1. Identifica-se a célula corn o *menor* preço de sombra (para minirnizacao) ou *maior* preço de sombra (para maximização) δ_{ij} e a variável no básiea x_{ij} correspondente entra na base. Se houver empate deve-se fazer uma escoiha aleatória da variável que deve entrar na base entre as variáveis corn os preços de sombra empatados.

Passo 2. Traça-se urn circuito de avaliaçao mais e menos partindo da variável que deve entrar na base, passando por células corn variáveis básicas e terminando na posico inicial.

Passo 3. Partindo da célula escoihida no passo 1, fazer uma nova alocacâo mais - menos corn a maior quantidade possIvel, respeitando $\sum x_{ij} = a_i$ e $\sum x_{ij} = b_j$.

Passo 4. Usando o método de MODI ou pedras, teste a nova solução se é optima, caso contrario, use o método de Stepping Stone para meihorar novamente.

Exemplo 5.8. Uma empresa manufactura cadeiras em trés fábricas e manda-as para trés armazéns onde posteriormente os clientes compram-nas. A gerência deseja maximizar o lucro no fim de cada lote vendido. Os lucros unitários variam corn as distâncias entre os armazéns e as fábricas conforme a tabela.

Fábrica	1	2	3	Oferta
1	20	22	14	40
2	15	20	13	50
3	22	23	18	30
Procura	28	38	54	

a) Estaheleça a solução inicial pelo método de lucro máxirno.
b) Use o método de aproximação de Vogel, para obter a so1uço base.
c) Partindo da solução aproximada de Vogel. use o método das pedras e o algoritmo de Stepping Stone para determinar a soluçao Optima.

Resoluçào

a) Feb método de lucro máxirno:

	1	2	3	Oferta
1	28 (20)	8 (22)	4 (14)	40
2	X (15)	X (20)	50 (13)	50
3	X (22)	30 (23)	X (18)	30
Procura	28	38	54	120

$$LT = Z_{\max} = 28*20+8*22+4*14+50*13+30*23 = 2132 \text{ u.m}$$

b) Pelo metodo de aproximaçào de Vogel

	1	2	3	Oferta	Penalidades u_i
1	28 (20)	X (22)	12 (14)	40	2 6 *
2	X (15)	38 (20)	12 (13)	50	5 2 *
3	X (22)	X (23)	30 (18)	30	1 x *
Procura	28	38	54	120	
Penalidades v_j	2 2 x	1 x x	4 4 4		

$$LT = Z_{\max} = 28*20+12*14+38*20+12*13+30*18 = 2184\text{u.m.}; \ \Delta z = 52 \text{ u.m.}$$

c) ***Teste 1 de optimidade de solução*** *(método das pedras):*

- As variáveis nâo básicas na tabela da alinea (b) sâo: x12; x21 X31 e x32
- Para melhor compreensäo vamos apresentar em separado o circuito de cada variável.

Para x_{12}, o circuito é: $x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12}$

	1	2	3	Oferta
1	[20] 28	[22] X(+)	[14] 12 (-)	40
2	[15] X	[20] 38 (-)	[13] 12 (+)	50
3	[22] X	[23] X	[18] 30	30
Procura	28	38	54	120

Para x_{21}, o circuito é: $x_{21} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{21}$

	1	2	3	Oferta
1	[20] (-) 28	[22] X	[14] 12 (+)	40
2	[15] X (+)	[20] 38	[13] 12 (-)	50
3	[22] X	[23] X	[18] 30	30
Procura	28	38	54	120

Para x_{31}, o circuito é: $x_{31} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$

	1	2	3	Oferta
1	[20] 28 (-)	[22] X	[14] 12 (+)	40
2	[15] X	[20] 38	[13] 12	50
3	[22] X(+)	[23] X	[18] 30 (-)	30
Procura	28	38	54	120

Para x_{32}, o circuito é: $x_{32} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32}$

	1	2	3	Oferta
1	28 [20]	X [22]	12 [14]	40
2	X [15]	38(-) [20]	12 (+) [13]	50
3	X [22]	X(+) [23]	30 (-) [18]	30
Procura	28	38	54	120

Traçados os circuitos corn sinais (+) e (-), vamos calcular os *precos de sombra* δ_{ij} para cada variável do circuito, tomando urn lucro negativo para a célula corn sinai (-) e positivo para a célula corn (+).

$$\delta_{ij} = \sum(+1_{ij}) + \sum(-1_{ij})$$
$$\delta_{12} = 22 - 20 + 13 - 14 = 1; \Leftarrow \quad x_{12} \mathit{deve\,entrar\,na\,base}$$
$$\delta_{21} = 15 - 13 + 14 - 20 = -4;$$
$$\delta_{31} = 22 - 1814 + 20 = -2;$$
$$\delta_{32} = 23 - 18 + 13 - 20 = -2$$

O prohlerna é de rnaximização e $\delta_{12} = 1 > 0$, logo, conc1ui-se que a solução actual pode ser meihorada introduzindo a variável x_{12} na base. E como o minimo das alocacöes com sinal (-) é 12, então 12 é a quantidade maxima a colocar na posição x_{12} em seguicla faz-se urn ajustarnento das quantidades que estão no circuito de variável x_{12}: *min*{38;12}=12.

	1	2	3	Oferta
1	28 [20]	12 [22]	X [14]	40
2	X [15]	26 [20]	24 [13]	50
3	X [22]	X [23]	30 [18]	30
Procura	28	38	54	120

LT=Zi=28*20+12*22+26*20+24*13+30*18=2196 u.m; $\Delta z = 12$ u.m

Teste 2 de optimidade de soluçâo

Para $x_{13} : x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$ de onde $\delta_{13} = 14 - 22 + 20 - 13 = -1;$

Para $x_{21} : x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{21}$ de onde $\delta_{21} = 15 - 20 + 22 - 20 = -3;$

Para $x_{31} : x_{31} \to x_{33} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11} \to x_{31}$ de onde

$\delta_{31} = 22 - 18 + 13 - 20 + 22 - 20 = -1;$

Para $x_{32} : x_{32} \to x_{33} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{32}$ de onde $\delta_{32} = 23 - 18 + 13 - 20 = -2$

Como todos os precos de sombra são negativos $\forall \delta_{ij} < 0,$ então já eneontramos o lucro máxirno ou a solucão optima.

Resp. $Z_{opt} = 2196$ u.m

Exemplo 5.9, No exereieio 5.1, obtenha a primeira aproximação pelo VAM. Usando o método do MODI e o método de Stepping Stone teste a optirnidade da solução do problema. Realize todas as iteraçöes ate encontrar a solução Optima.

	1 (v_1)	2 (v_2)	3 (v_3)	4 (v_4)	5 (v_5)	Oferta	Penalidades
1 (u_1)	X (10)	X (5)	X (6)	15 (7)	10 (0)	25	5 1 1 3 x x
2 (u_2)	X (8)	20 (2)	X (7)	5 (6)	X (0)	25	2 4 1 2 2 x
3 (u_3)	15 (9)	X (3)	20 (4)	15 (8)	X (0)	50	3 1 4 1 1 *
Procura	15	20	20	35	10	100	
Penalidades	1 1 1 1 1 *	1 1 x x x x	2 2 2 x x x	1 1 1 1 2 *	0 x x x x x		

$CT = W_{\min} = 15*7 + 10*0 + 20*2 + 5*6 + 15*9 + 20*4 + 15*8 = 510$ **u.m**

Teste 1 de optimidade de soluçao

variáveis básicas *variáveis não básicas (preços de sombra)*

$u_i + v_y = c_{ij}$ valor de u_i e v_j $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_i$

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 7 \\ u_1 + v_5 = 0 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_4 = 6 \\ u_3 + v_1 = 9 \\ u_3 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_4 = 8 \end{cases} \to \begin{cases} v_4 = 8 \to u_1 = -1 \\ u_2 = -2 \to v_2 = 4 \\ v_4 = 8 \to u_2 = -2 \\ u_3 = 0 \to v_1 = 9 \\ u_3 = 0 \to v_3 = 4 \\ u_3 = 0 \to v_4 = 8 \\ u_1 = -1 \to v_5 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \delta_{11} = 10 + 1 - 9 = 2 \\ \delta_{12} = 5 + 1 - 4 = 2 \\ \delta_{13} = 6 + 1 - 4 = 3 \\ \delta_{21} = 8 + 2 - 9 = 1 \\ \delta_{23} = 7 + 2 - 4 = 5 \\ \delta_{25} = 0 + 2 - 1 = 1 \\ \delta_{32} = 3 + 0 - 4 = -1 \quad ;(x_{32}) \\ \delta_{35} = 0 - 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

Como o problema é de minimização, Os precos do sombra mostram que a variável x_{32} dove entrar na base. O circuito correspondente é: $x_{32} \to x_{34} \to x_{24} \to x_{22} \to x_{32}$

	1 (v_1)	2 (v_2)	3 (v_3)	4 (v_4)	5 (v_5)	Oferta
1 (u_1)	X [10]	X [5]	X [6]	15 [7]	10 [0]	25
2 (u_2)	X [8]	(-) 20 [2]	X [7]	(+) 5 [6]	X [0]	25
3 (u_3)	15 [9]	X (+) [3]	20 [4]	15 (-) [8]	X [0]	50
Procura	15	20	20	35	10	100

O min{15: 20}= 15, portanto vamos deslocar 15 unidades e a nova tabela é:

	1 (v_1)	2 (v_2)	3 (v_3)	4 (v_4)	5 (v_5)	Oferta
1 (u_1)	X [10]	X [5]	X [6]	15 [7]	10 [0]	25
2 (u_2)	X [8]	5 [2]	X [7]	20 [6]	X [0]	25
3 (u_3)	15 [9]	15 [3]	20 [4]	X [8]	X [0]	50
Procura	15	20	20	35	10	100

$CT = Wi = 15*7 + 10*0 + 5*2 + 20*6 + 15*9 + 15*3 + 20*4 = 495$b u.m; $\Delta w = 15$ u.m

Teste 2 de optidade de solução

Variáveis básicas valores de u_i e v_j $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 7 \\ u_1 + v_5 = 0 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_4 = 6 \\ u_3 + v_1 = 9 \\ u_3 + v_3 = 3 \\ u_3 + v_4 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} v_4 = 7 \to u_1 = 0 \\ u_1 = 0 \to v_5 = 0 \\ v_2 = 3 \to u_2 = -1 \\ u_2 = -1 \to v_4 = 7 \\ u_3 = 0 \to v_1 = 9 \\ u_3 = 0 \to v_2 = 3 \\ u_3 = 0 \to v_3 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} \delta_{11} = 10 - 0 - 9 = 1 \\ \delta_{12} = 5 - 0 - 3 = 2 \\ \delta_{13} = 6 - 0 - 4 = 2 \\ \delta_{21} = 8 + 1 - 9 = 0 \\ \delta_{23} = 7 + 1 - 4 = 4 \\ \delta_{25} = 0 + 1 - 0 = 1 \\ \delta_{32} = 8 - 0 - 7 = 1 \\ \delta_{35} = 0 - 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

Todos os precos de sombra não são negativos então já encontramos a soluçAo optima.

$CT = W_{\min} = \sum\sum c_{ij}.x_{ij} = 495$ u.m

5.6 PROBLEMAS DE AFECTAÇÃO

Urn outro tipo de problema de distribuiçâo é o charnado problema de afectacão (alocacão). O problerna de afectar n - pessoas a n - tarefas é urn caso particular do problema de transporte. O modelo de prograrnação linear para os problernas de a1ocação tem um custo de alocação da pessoa i para a tarefa j e é definido por.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ a\ pessoa\, i\ é\ alocada\, a\ tarefa\ j \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

O modelo geral de PL inteira para problemas de afectação é definido da seguinte maneira

Optimizar $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Sujeito à $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & ; i = 1,2,...n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & ; j = 1,2...n \\ x_{ij} \in Z_0^+ & \end{cases}$

Obervações:

1. A matriz dos custos ou lucros deve ser quadrada, caso contrário usa - se linhas ou colunas fictIcias.
2. Todos os problemas de alocaçAo podern ser resolvidos pelos rnétodos vistos nos problemas de transporte, mas como se trata de urn problema de transporte degenerado temos urn método especIfico, chamado Método Hüngaro.

Algoritmo do método Húngaro

Passo 1. Em eada linha da matriz quadrada dos custos ou lucros identificar o menor custo (major lucro) e subtrair a este elemento todos outros formando urn novo quadro.

Passo 2. Repetir o passo I para colunas do novo quadro, e formar urn outro novo quadro.

Passo 3. Se existirem no quadro resultante k - zeros, de modo que haja apenas urn zero em cacla linha e urn zero em eada coluna, esta é a solução optima.

O valor Optimo será $Z = \sum\sum c_{ij} * x_{ij}$ com $x_{ij} = 1$.

Passo 4. Se o passo 3 nâo se verifica, traçar um *número minimo de rectas* (horizontais e verticais), para cortar o maxímo número de zeros. Se o nürnero de linhas ou colunas for major que o nürnero de rectas, passe ao passo 5

Passo 5. Proceclirnento da iteração para a obtençao da solução

1. Escolher o menor elemento não cortado no novo último quadro.
2. Subtrair este elemento todos outros nào cortados.
3. Somar este elernento a todos outros que estão no cruzamento de duas rectas,
4. Os restantes elementos não são alterados.
5. Escrever o novo quadro e verificar o passo 3.

Exemplo 5.10. Durante a estação chuvosa, 3 províncias encontravarn-se corn inundacoes. 0 Govemo teve três equipas de peritos para tratar da situação de emergéncia. Os custos de transporte das equipas para cada província são dados no quadro. Que equipa deve ir para que provincia para minirnizar o custo. Calcule este custo total.

Equipa \ Província	1	2	3
1	2200	**2400**	2000
2	1800	2800	**2200**
3	**1500**	3200	2700

Resoluçâo

Quadro 1. Minimos das linhas do quadro inicial: 2000; 1800; 1500

Equipa \ Província	1	2	3
1	200	400	0
2	0	1000	400
3	0	1700	1200

Quadro 2. Minirnos das colunas do quadro 1: 0; 400; 0

Província / Equipa	1	2	3
1	200	0	0
2	0	600	***400***
3	0	1300	1200

Teste 1. nürnero de lirihas é maior que o nürnero de rectas (n = 3; r = 2).

Quadro 3. Minimo elernento não cortado no quadro 2 é x_{23} = 400

Província / Equipa	1	2	3
1	600	***0***	0
2	0	200	***0***
3	***0***	900	800

Teste 2. n = 3, r = 3, já temos a solucão optima

Voltando ao quadro inicial e somando os custos das posiçôes x_{12}, x_{23} e x_{31}, obtemos:

CT = 1500 + 2400 + 2200 = 6100 u.m.

Exemplo 5.11. Quatro construções diferentes devern ser levantadas em urn Campus Universitário por 4 empreiteiros. Determinar que empreiteiro deve fazer que construção para que o custo dos 4 edificios seja minimo. A tabela dos custos que cada empreiteiro prop5e para cada edificio está apresentados no quadro.

Edificio / Empreiteiro	1	2	3	4
1	48	48	50	44
2	56	60	60	68
3	96	94	90	85
4	42	44	54	46

Resoluçâo

Quadro 1. Minirnos das linhas do quadro inicial: 44; 56; 85; 42

Edificio / Empreiteiro	1	2	3	4
1	4	4	6	0
2	0	4	4	12
3	11	9	5	0
4	0	2	12	4

Quadro 2. Minimos das colunas do quadro 1: 0; 2; 4; 0

Edificio / Empreiteiro	1	2	3	4
1	4	2	2	0
2	0	2	0	12
3	11	7	*1*	0
4	0	0	8	4

Teste1. n = 4; r = 3 ; ainda nào é solucäo

Quadro 3. Minima elemento näo cortado no quadro 2 é x33 = 1

Edificio / Empreiteiro	1	2	3	4
1	3	1	1	*0*
2	*0*	2	0	13
3	10	6	*0*	0
4	0	*0*	8	5

Teste 2: n = 4, r = 4 já temos a so1uçao do problema.

CT = 56 + 44 + 90 + 44 234 u.m

Exemplo 5.12. Uma empresa de consultoria foi solicitacla para avaliar 4 projectos. A empresa tern disponIvel 4 tcnicos independentes. Os custos de cada consultoria variam conforme o quadra (em mu meticais).

Projecto / Consultor	1	2	3	4
1	10.3	18.2	15.9	8.6
2	12.0	17.4	x	6.4
3	11.1	20.1	16.8	9.1
4	x	19.6	17.5	8.2

(x - significa que o consultor *i* näo pode avaliar o projecto *j*.

Usando o método Húngaro, determine a distribuição dos eansultores para avaliar os 4 projectos, de tal modo que minimize o custo total.

Resolução

Quadro 1. Minimos das linhas do quadro inicial: 8.6; 6.4; 9.1; 8.2.

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	1.7	9.6	7.3	0
2	5.6	11.0	x	0
3	2.0	11.0	7.7	0
4	x	11.4	9.3	0

Quadro 2. Minimos das colunas do quadro 1: 1.7; 9.6; 7.3; 0

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	3.9	1.4	x	0
3	***0.3***	1.4	0.4	0
4	x	1.8	2.0	0

Teste 1. n = 4; r = 2, ainda não é solução.

Quadro 3. Minimo elemento nào cortado no quadro 2 é 0.3

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	0	0	0	0.3
2	3.6	1.1	x	0
3	0	1.1	***0.1***	0
4	x	1.5	1.7	0

Teste 2. n =4; r = 3; ainda nào solução

Quadro 4. Mmnimo elemento no cortado no quadro é 0.1:

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	0.1	0	0	0.4
2	3.6	***1.0***	x	0
3	0	1.0	0	0
4	x	1.4	1.6	0

Teste 3. n = 4; r = 3; ainda não temos solução

Quadro 5. Minimo elemento nao cortado no quadro 4 é 1.0:

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	0.1	0	***0***	1.4
2	2.6	***0***	x	0
3	***0***	1.0	0	1.0
4	x	0.4	0.6	***0***

Teste 4. n = 4; r = 4; játernos tenios sohiço CT = 11.1+17.4+15.9+8.2 = 52.6 u.m.

5.7 EXERC1CIOS PROPOSTOS

Exercício 5.1. São dadas as seguintes condicões do problema de transporte: Capacidade de forriecimento das fontes: $a_1 = 25; a_2 = 25; a_3 = 50;$ Capacidade de absorcao dos destinos: $b_1 = 15; b_2 = 20; b_3 = 20; b_4 = 35.$ Os custos associados ao transporte de 1 u.rn da fonte i para o destino j estão no quadro.

10	5	6	7
8	2	7	6
9	3	4	8

Usando o método de Canto Noroeste, encontre a primeira aproxirnação e o custo mínimo. ***Resp***. $//W_{\min} = 625$ u.m.

Exercicio 5.2. Uma empresa transportadora é alugada para levar artigos de trés fábricas F_1, F_2 e F_3 para 4 armazéns A_1, A_2, A_3 e A_4 de onde são vendidos para os clientes a porta. O lucro de transporte de uma carrada está indicado por cada rota, bern como a capacidade das fábricas e dos armazéns.

	A_1	A_2	A_3	A_4	Oferta
F_1	26	26	20	21	450
F_2	21	24	20	21	300
F_3	18	20	19	20	250
Procura	200	340	150	270	

Determinar as quantidades que devem ser transportadas de cada fábrica para cada armazém para que a empresa transportadora maximize o seu luero. Use o método do lucro máxirno.
Resp.// LT = 22320u.m.

Exercício 5.3. Uma companhia tern trés eamiöes que abastecern urn certo produto a cinco supermercados. As distâncias que os camiôes devern andar ate a cada supermercado, as necessidades dos supermercados e as capacidades dos carniôes estão na seguinte tabela.

	Sup1	Sup2	Sup3	Sup4	Sup5	Oferta (Ui)
Camião 1	6	4	5	4	8	15
Camião 2	7	6	7	4	3	48
Camião 3	8	7	6	9	5	33
Procura (Vj)	12	15	21	24	24	

Usando o rnétodo de aproximação de Vogel, determina que camião deve abastecer que supermercado para minirnizar a distância total percorrida.

Resp. $//\,CT = W_{\min} = \sum\sum c_{ij} * ij = 450\,\text{km}$

Exercício 5.4. A empresa "Pepe Rápido" tern 4 armazéns: A_1, A_2, A_3 e A_4 cuja capacidade é de, respectivarnente 75, 50, 60 e 15 toneladas de urn determinado produto. Os seus vendedores cons eguiram promover o produto junto a 4 compradores: B_1, B_2, B_3 e B_4, estabelecendo contratos de 35, 50, 90 e 25 toneladas respectivamente. Sabendo que os custos de transporte por tonelada entre os armazéns e os compradores são dados pelo quadro seguinte, encontre o programa óptimo de distribuição para esta empresa indicando qual é o custo total de transporte minimo.

a) usando o método do canto noroeste (NWC - NorthWest Corner Method)
b) usandoo método de aproximacãode Vogel (VAM - Vogel Approximation Method)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0.7	1.0	1.2	3.0
A_2	1.0	0.0	1.0	2.0
A_3	1.1	0.5	1.2	0.5
A_4	0.2	1.0	2.0	1.0

Resp.// a) Feb NWC: CT = 184.5 u.m; (b) Pebo VAM: CT 137.5 u.m; $\Delta z = 47$ u.m

Exercicio 5.5. O general Ambrósio comanda 4 bases de operaçöes: B_1, B_2, B_3 e B_4 corn, respectivamente, 150, 200, 100 e 150 aviöes, e tern como missão o bombardeamento de 3 alvos diferentes. Os aviôes são diferentes, corn altitudes de voo variados e considerando as várias distaricias aos alvos, o general preenchen o seguinte quadro corn as toneladas de bombas que podem ser lançadas em cada alvo, provenientes tie cada base.

	A_1	A_2	A_3
B_1	2	6	5
B_2	3	8	9
B_3	10	7	7
B_4	8	4	7

Sabendo que se pretendem 200 bombardeamentos diários em cada alvo, use os método de NWC e VAM para ajudar o general a encontrar o programa óptimo de voo que maximiza a quantidade de bombas lancadas.

Resp.//: NWC: Q_{max} = 3400 bombas; VAM: Q_{max} = 4800 bombas ; $\Delta z = 1400$bombas.

Exercício 5.6. Uma organizacão não governamental fomece trabaihadores temporários para 4 sectores laborais da APIE. A organizacão tern que distribuir 21 trabaihadores dos seus 2 gabinetes de recrutamento, conforme a seguinte tabela.

Sector / Gabinete	Custo de transporte por sector 1	2	3	4	Oferta
Gabinete 1	14	15	10	17	12
Gabinete 2	12	18	11	16	9
Requisições	3	6	8	4	

a) Estabeleça a solucâo inicial usando o método de aproximaco de Vogel.
b) Usando o método das pedras e depois o algoritmo de Stepping Stone, determine a soluçäo optima do problema.

Resp//: (a) W_1 = 276 u.m; (b) W_{opt} = 272 u.m; $\Delta w = 4$ u.m

Exercicio 5.7. Trés barragens tern capacidade de produco de 25, 40 e 30 milhöes de Kwh. As barragens alimentam trés cidades que necessitam em media 30, 35 e 25 milhöes de Kwh. Os precos de transporte cle 1000 Kwh de cada uma das barragens para cada cidade estão apresentados na tabela.

	cidade 1	cidade 2	cidade 3
Barragem 1	\$6.0	\$7.0	\$4.0
Barragem 2	\$3.2	\$3.0	\$3.5
Barragem 3	\$5.0	\$4.8	\$4.5

a) Peo método de canto noroeste, encontre a distribuiçào iniciai de energia de modo a minimizar o custo de transporte;
b) Procure meihorar a solução, usando o método de aproximacão de Vogel.
c) Teste a optimidade de solução dada pelo método de Vogel, optimizando - o.

Resp//: (a) W_1 = 283.5 u.m; (b) W_2 = 346 u.m; (c) W_{op} = 346 u.m

Exercício 5.8 Uma empresa tern trés armazéns nas cidades de Maputo, Beira e Nampula, e tem lojas nas cidades de Xai-Xai, Chimoio, Quelimane e Inhambane. Os custos de transporte de urn dado produto dos armazéns as lojas apresentam-se na tabela.

	X	C	Q	I	Oferta
armazém 1	38	30	30	45	17
armazém 2	60	25	50	32	32
armazém 3	42	20	16	70	30
	10	14	15	28	

a) Estabeleca as solucões iniciais usando o método de canto noroeste.
b) A partir da solucao obtida pelo método de canto noroeste, determine a so1uço Optima pelo método de MODI.

Resp//: (a) NWC: W_1 = 3095 u.m (b) W_{opt} =1796 u.m

Exercúcio 5.9. Trés modistas recebem requisiçöes de clientes que pretendem urn novo tipo de vestido para o verâo. Uma pesquisa de mercado mostrou que existem 4 tipos de vestidos corn major procura.

Tarnanho do vestido: 1 2 3 4
Quantidade : 100 200 450 150

As modistas acordaram produzir uma certa quantidade dos vestidos, segundo os tipos indicados para satisfazer a bastante procura. As quantidades rnáximas que cada modista pode produzir são:

Modista (i) : 1 2 3
Quantidade : 150 450 250

Os lucros unitários de cada vestklo produzido pela modista i, sendo do tipo j, quando comprado estAo no quadro.

Modista \ Tamanho	1	2	3	4
1	2.5	4.0	5.0	2.0
2	3.0	3.5	5.5	1.5
3	2.0	4.5	4.5	2.5

a) Usando o método de aproximacão de Vogel, resolva o problema.
b) Meihore a solucão anterior caso seja necessário de modo que as modistas tenharn o máximo lucro possivel.

Resp//. (a) VAM, $Z_1 = 3850$ u.m (b) $Z_{opt} = 3850$ u.m

Exercício 5.10. Uma companhia aérea pode comprar o seu combustivel a qualquer urn dos seus três fornecedores. As necessidades da companhia para urn més em cada urn dos trés aeroportos em que ela opera são: 100, 180 e 300 mil galôes, respectivamente no aeroporto 1, 2 e 3. Cada fornecedor pode abastecer cada urn dos aeroportos corn os precos em mu meticais o galão, dados na seguinte tabela.

	Aeroporto 1	Aeroporto 2	Aeroporto 3
Fornecedor 1	92	89	90
Fornecedor 2	91	91	95
Fornecedor 3	87	90	92

Cada fornecedor está no entanto limitado pelo nümero de galôes que pode abastecer respectivarnente por més. Estas capacidades são de 320; 270 e 150 mu galöes respectivamente pam fornecedor 1, 2 e 3. Para determinar a politica de aquisiçào do combustivel que suprirá as necessidades da companhia em cada aeroporto a urn custo minimo.

a) Estabeleça a solução básica usando o método do canto noroeste.
b) Usando o método de aproximacão de Vogel, qual é a politica de aquisiçâo que minimiza o custo.
c) Verifique se a distribuicão (b) é optima. Caso contrário optimize-a.

Resp.// (a) $W_1 = 53520$ u.m; (b) $W_2 = 51990$ u.m (c) $W_{opt} = 51990$ u.m

Exercicio 5.11. Urn treinador de uma equipa de natação pretende escoiher os elementos que competirão na estafeta 4*200 (estilos por metros), nos próximos jogos olimpicos. Os nadadores em causa tiveram as seguintes melbores marcas em cada estilo, na ültimaëpoca.

Estilo / Nome do nadador	Ruços	Mariposa	Costas	Livre
João	2.3	3.0	2.7	2.1
António	2.5	2.5	2.6	2.0
Filipe	2.3	3.0	2.7	2.0
Vasco	2.4	2.9	2.6	2.1

Usando o método Hüngaro, determine que estilo cada nadador deverá fazer dentro da equipa de modo a ,alcançar o menor tempo para percorrer os 200 metros no conjunto dos 4 percursos. Qual serrá esse tempo minirno.

Resp.// João $\rightarrow$Bruços; António $\rightarrow$Mariposa; Filipe $\rightarrow$Livre e Vasco $\rightarrow$Costas

T_{min} 9.4 minitos.

Exercício 5.12. Cinco indivIduos (A, B, C, D e E) pretendem adquirir automóvel às suas necessidades. O indivIduo A pretende urn carro pequeno que nao lhe crie problemas de estacionamento; o B um carro confortável para viagens; C necessita de urn carro resistente; D quer urn automóvel de pouco consumo; e E pretende um carro mais espacoso. Um vendedor possui 5 modelos (Citroen BX; Fiat Uno; Autobianchi Y 10; Renault 5 GTL e Toyota Starlet) que Ihe parecem adequados aos 5 potenciais compradores. Numa tentativa de ponderar as suas preferéncias, o vendedor construiu o seguinte quadro onde colocou as ordens de preferéncia (de 1 a 5) de cada comprador em relação a cada urn dos carros:

	A	B	C	D	E
BX	5	1	1	4	1
UNO	2	3	2	1	3
Y10	1	5	5	3	5
R5 GTL	3	3	4	1	3
Starlet	3	1	3	2	2

Que carro deverá o vendedor apresentar a cada urn dos indivIduos por forma a optirnizar as preferncias dos mesmos.

Resp.//: BX $\rightarrow$E; UNO $\rightarrow$C; Y10$\rightarrow$A; R5$\rightarrow$D e Starlet $\rightarrow$B

Referências:

ANDRADE, EL(1998). *Introdução a Pesquisa Operacional - métodos e modelos para a Análise de decisão*, 2 edicão, editora LTC, RJ, Brasil: cap5;

FERREIRA, MA.M; Isabel, A(1995) - *Programaçao Matemática*, 2 edicão, Edicöes Silabo, Lisboa: pp9l.

RENDER, B; Ralbp, M.S.Jr.(1997) - *Quantitative Analysis for Management*, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc, USA: cap. 10

TAHA, H.A (1997 - *Operations Research - an introduction*, 6th edition, Prentice-Hall International, Inc, USA: cap,5.

SHAMBUN, J.E; G.T. Stevens, Jr(1989) - *Pesquisa Operacional - uma abordagem básica*, Editora Atlas, S.A., São Paulo: cap 11.

Capítulo 6

6 PROGRAMAÇÃO DINAMICA

6.1 INTRODUCÃO

A programacào Dinãmica - PD é uma tecnica quantitativa que tern aplicações em muitos problernas, que são resolvidos mediante uma sequência de decisôes. De todas as técnicas matemáticas usadas na investigaçAo operacional, a programacão dinamica é segundo Shamblin, R(1989) a de conceito mais simples e de mais dificil de aplicaçäo. O termo Programacão Dinâmica é usado para investigar problemas de optimização em que o factor tempo é muito crucial.

A programação dinâmica difere da programação linear por dois aspectos importantes:

1. Na programação dinãmica não existe urn algoritmo como por exemplo o método simplex que pode ser usado para resolver todos os problemas de programação linear;
2. A programacão dinthnica tern algoritmos que dividem urn problema complexo em uma sequência de subproblemas que são resolvidos em separado.

A dificuldade de aplicacão dos modelos da programacào dinâmica, reside na falta da formulação clara de urn algoritmo de soluçâo dos problemas tratados. Como consequéncia disso cada problema exige decisôes que devem ser tomaclas em função das outras corn uma formulacäo básica, ainda que esta formulaçao se aproxime a processos estocástieos tratados na teoria de decisão markoviana ou na algebra matricial.

A análise dos fenómenos dinâmicos em fanção do tempo é muito importante nos problemas de optimizacão tanto deterministicos corno probabilisticos. Para o nosso caso vamos considerar uma introdução dos problerna deterministicos de programação dinãmica deixando de lado a programação dinâmica probabilistica.

Enquanto muitas das aplicações da programação linear são feitas duma forma geral, a programação dinâmica está mais virada a problemas especIficos, tais como:

- Gestão dos estoques;

- Determinação do nIvel de acessOrios nos modelos de investimento;
- Planeamento da producão numa unidade industrial;
- a Aloeação de capital entre diferentes actividacles;
- Piano de procura para a localizaçao de recursos;
- Selecção de rneios de publicidade para promover urn novo produto;
- Planeamento de operacöes de manutencão em grande escala quando o equipamento é complexo;
- Selecção de estratégias ou politicas a longo prazo, para a substituição de equipamento que se deprecia ao longo do tempo. etc.

Exemplo 6.1 Maura Liote, uma aluna universitária, pretende viajar durante as suas férias da universidade para o seu distrito. O mapa que ilustra as possíveis rotas com distâncias em km , desde a universidade (nó 1) ate ao distrito (nó 7) está mostrado na figura 6.1.

Qual cleve ser a rota que a estudante Maura, deve usar de modo que ela minimize a distäncia total percorrida.

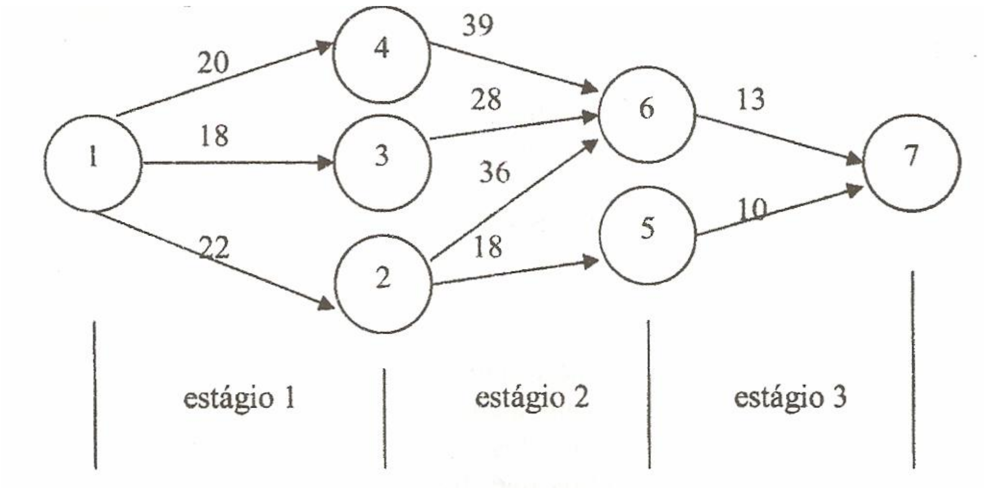


Figura 6.1. Representação da rede de urn problema de programacão dinâmica.

Para resolvermos este exemplo vamos dividir o problema em 3 estágios:

O *estágio 1*, possui os seguintes arcos ou distâncias entre nós:

$1 \rightarrow$ 2;distância = 22;

1 $\rightarrow$3;distância = 18;

1 $\rightarrow$4;distância = 20;

O *estágio 2*, possui os seguintes arcos ou distâncias entre nós:

2 $\rightarrow$5;distância = l8;

2 $\rightarrow$6;distância = 36;

3 $\rightarrow$6;distância = 28;

4 $\rightarrow$6;distância = 39;

O *estágio 3*, possui os seguintes arcos ou distâncias entre nós:

5 $\rightarrow$7;distãncia = 10;

6 $\rightarrow$7; distância = 13.

Fazendo uma avaliaçäo no estágio 3, pode-se ver que a clistância minima é de 10 km que liga os nós 5 - 7. Em virtude disso esse arco já pertence a solução. Do no 5 só chega o arco 2 - 5 corn 18 km, este também pertence a soluçäo. Por ültimo ternos o arco 1- 2 com uma distância de 22 km. Somando as distâncias na sequência de 1 - 7 obtemos a distância minima total, D_{min}= 50 km para a rota: 1 - 2 -5 - 7.

Terminologia e notaçäo em programação dinâmica

Independentemente do tipo e tamanho do problerna de programação dinámica, existern alguns termos e conceitos que são cornuns para muitos problemas. Alguns desses conceitos tao importantes na programacão dinârnica são:

1. *Estágio ou etapa*: é o periodo ou a lógica do problema;
2. *Estado das variáveis*: é a possivel situação inicial que a variãvel possa estar ou a condiçäo de um determinado estágio. Estas variãveis tambdm são chamadas de variáveis de entrada;
3. *Varidveis de decisão*: são ahemativas on deeisôes possiveis que existem nurn determinado estágio;
4. *Criteria de decisão*: é um curso de acçöes que tern em vista atcançar um determinado objectivo;
5. *Politica optima*: é um conjunto de regras de decisão quarido desenvolvidas resultam num critério de decisào optima para qualquer condiçâo e qualquer estágio;
6. *Transforniação*: normalmente é qualquer operação algébrica desde que seja relevante que relaciona dois estágios.

Em adição a terminologia da prograrnacäo dinãmica, vamos descrever a notacäo matemática para qualquer problema de prograrnacäo linear.

Consideremos o estágio 2 do problema da Maura, cujo diagrama está apresentado na figura 6.2.

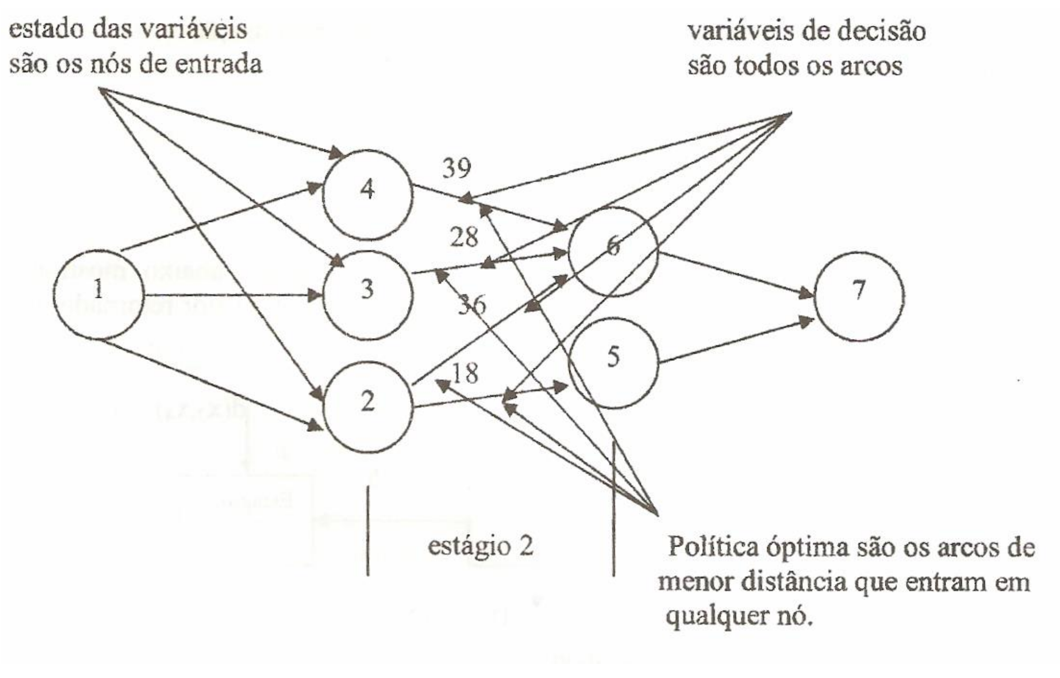


Figura 6.2. Elementos essenciais num estágio nos problemas de programacão dinämica. Da figura, pode se ver que para qualquer estágio, nós temos: variável de entrada; uma decisão; variãve de saida e o valor retomado por uma flrncão recursiva:

As variáveis de entrada para o estágio 2 (x_2), sO constituldas pelos nós 2, 3 e 4.

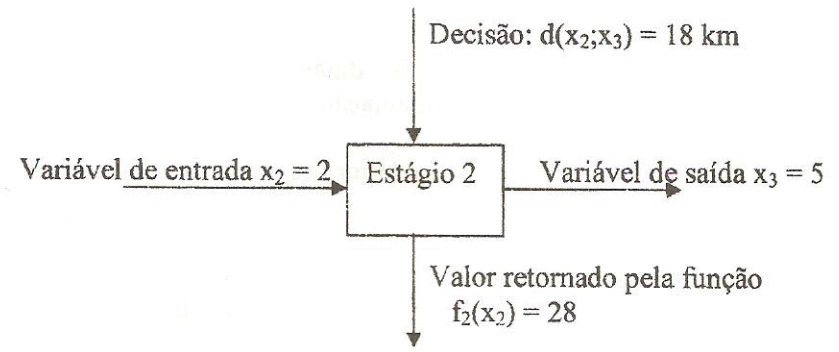
A decisão no estágio 2, d(x_2;x_3) terá de ser escolhida entre todos os arcos que ligammn com o estágio 3. Os possiveis arcos de decisão são: 4-6; 3 -6; 2-6 e 2- 5.

As variáveis de saida do estágio 2 prove das variáveis de entrada do estägio 3 (x_3). As possiveis variáveis de saida a partir do estágio 2 são os nós 5 e 6,

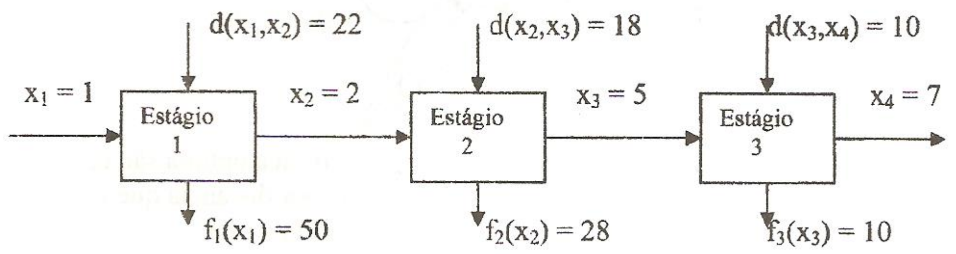
Finalmente, cada estágio retoma um valor que ó atribuido a função $f_i(x_i)$.

Para o estágio 2, este valor é a distância dos arcos: 39 km para 4 - 6; 28 para 3-6; 36 para 2 -6 e 18 para 2 - 5 e representado pela função $f_2(x_2)$.

Em resumo apresentamos todo o fluxo de informação que passa no estágio 2.



A sequéncia da resolução do problema, está apresentada no diagrama abaixo, mostrando as variáveis de entrada, salda, a decisao tomada em cada estágio e o valor retornado pela função recursiva.



E_3: $f_3(x_3)$= 10km

E_2: $f_2(x_2)$ = 18 + 10 = 28km

E_1: $f_1(x_1)$ = 22 + 18 + 10 = 50km

6.2 METODOS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO DINAMICA

Na programação linear é possivel encontrar urn método para deterrninar a solução de um determinado problerna sem precisar de fraccioná-lo. A progr762rnacão dinâmica nâo tern urn poder para determinar a solução optima sobre um todo o problema, pot isso as suas técnicas dividem o problema em subproblernas "estágios", e procura optimizar a solução de urn estágio em ftrnção das decisões passadas e flnalrnente obtém-se a solução optima dependente das soluções Optimas parciais. Portanto o método da programação dinâmica é um método multi - estágio e é aplicado para problemas com etapas mültiplas.

De uma forma geral, os problemas da prograrnação dinârnica são resolvidos usando urn procedimento recursivo, i.é, dado urn problerna com n - variáveis este pode set decomposto em n estágios, atribuindo-se uma variável a cada subproblema singular (estãgio) e quando conhecido o valor desta variável é usado para obter os outros valores nos estágios posteriores ou anteriores, segundo o metodo recursivo usado.

Os conceitos desenvolvidos pot Richard Bellman permitem a optimização parcial de urna porção da sequência e depois liga-se todas porções optimizadas tomando-se urn problerna optirnizado.

Teorema de Bellman

Seja $f_i(x_i)$ a distância mínima do nó x_i no estdgio *i*, define-se:

$d(x_{i-1};x_i)$ como distância a partir do nó x_{i-1} ao nó x_i, e a distância f_i é calculada a partir de f_{i-1} usando a equação recursiva de Bellman.

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{todasasrotas \\ (x_{i-1};x_i)}} \{d(x_{i-1}:x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\} \qquad i = 1,2,\ldots n \qquad \textit{equação1}$$

Para i = 0 a função recursiva toma o valor $f_0(x_0) = 0.$.

A equacão de Bellrnan estabelece uma transformaçao ou relação de recorréncia que permite determinar sucessivamente a sequéncia Optima em cada estágio do processo de optimizaçào da soluçao.

A partir da equacão da relação de recorrência pode-se enunciar o teorema de Bellman.

Teorema, Qualquer que seja o estado inicial e o comando inicial, os cornandos seguintes devern ser Optirnos em relaçAo ao estado que representa o resultado da escolha do prirneiro cornando.

Esta forniulação do teorenia, resulta no seguinte principio de optimidade dos problemas de programação dinãmica,

Princípio de Optimidade. A optirnização do comando para urn estágio qualquer de um processo multi - estágio consiste apenas na escolha dos comandos seguintes.

Exemplo 6.2. Suponhamos que urn indivíduo pretende seleccionar a rota mais curta entre a cidade da Matola e a praia do Costa do Sol, passando obviarnente pelas artrias da cidade de Maputo. As possiveis rotas que ligam os dois pontos estão indicadas no diagrama e os nürneros do I a 7 são entroncamentos onde se pode parar e os números ao longo das rotas são distâncias em km.

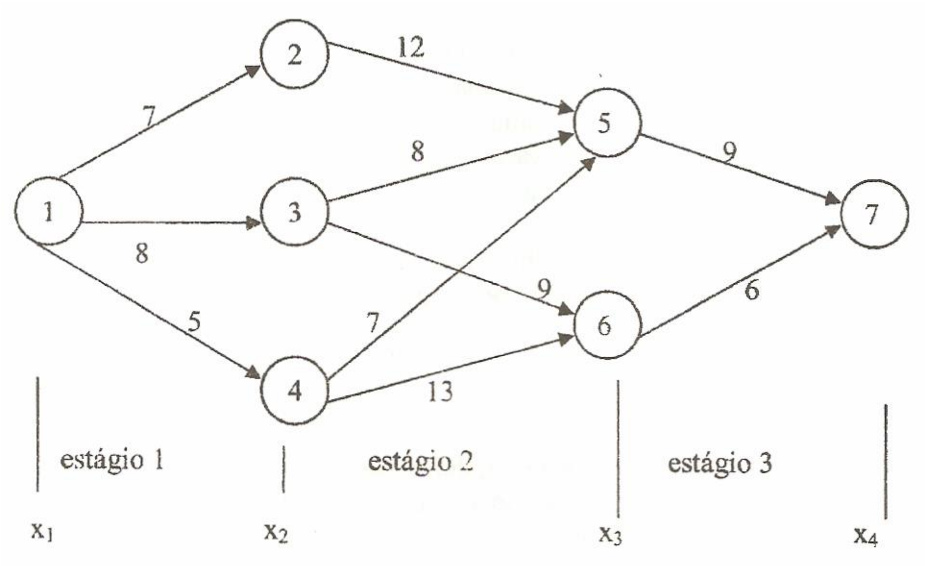


Figura 6.3. Rede de rotas possiveis para ligar Matola a Costa do Sol.

Resolução

Usando a equação 1, tombs:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{todasasrotas \\ (x_{i-1};x_i)}} \{d(x_{i-1} : x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\} \qquad i = 1,2,\ldots n$$

Para $x_1 = 1; f_0(x_0) = 0,$ por consequncia $d(x_o,x_1) = 0$ e $f_1(x_1) = 0$

Estágio 1. x_1 tem arcos que se ligarn corn x_2 c este pode tomar os valores 2, 3 e 4. Vamos calcular as distâncias mInimas acumuladas nas rotas 1- 2; 1 - 3; 1 - 4.

$f_2(x_2)$ min $\{d(x_1;x_2) + f_1(x_1)\}$

- Se $x_2 = 2 \rightarrow \min\{d(x_1,x_2)+0 =7\};f_2(x_2)= 7;$
- se $x_2 = 3 \rightarrow \min \{d(x_1,x_2)+0 = 8\}; f_2(x_2) = 8;$
- se $x_2 = 4 \rightarrow \min \{d(x_1,x_2)+0 =5\}; f_2(x_2) = 5$

$\rightarrow$para cada urn dos casos $x_1 = 1$

Estágio 2. Vamos calcular as distâncias minimas acumuladas para chegar aos nós 5 e 6. Atenção que x_2 pode tornar os valores 2, 3 e 4.

$f_3(x_3)$ min $\{d(x_2; x3) + f_2(x_2)\}$

se $x3 = 5 \rightarrow f_3(x_3)\min\{7+12 = 19; 8+8 = 16; 5+ 7 =12\} =12 \rightarrow X_2 = 4$

se $x_3 = 6 \rightarrow f_3(x_3) = \min\{\ \ -\ \ ;8+9 = 17; 5+13 = 18\} =17 \rightarrow x_2 = 3$

Estágio 3. O nÓ $x_4 = 7$, sucede aos nés 5 e 6 portanto

$f_4(x_4)$ $\min\{d(x_3x_4) + f_3(x_3)\} = \min \quad \{12+9 = 21; 17+6 = 23\} = 21 \rightarrow x_3 = 5$

Resposta: A distância minima de 1 a 7 é de 21 km, e definimos a rota optima ligando os arcos: 1 - 4 - 5 - 7.

Nos exemplos 6.1 e 6.2, os problemas foram resolvidos usando dois procedimentos recursivos nas direcções diferentes. No primeiro caso comecou-se a resolver o problema partindo do estágio 3 e no ültimo começamos pelo estágio 1. Diz-se que no piimeiro caso usou-se a recursividade regressiva e no segundo caso a recursividadeprogressiva.

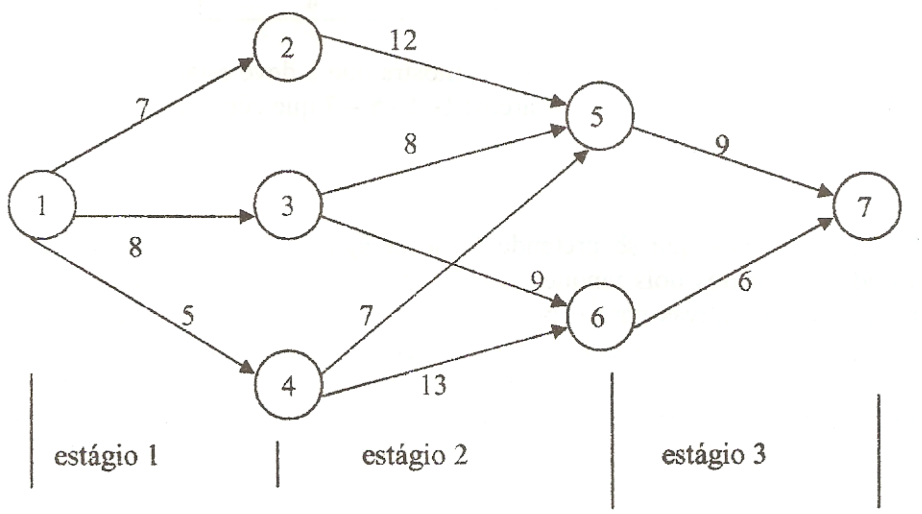
Tanto o método proessivo corno regressivo däo a mesma solução óptima. Apesar do método progressivo ser desenvolvido na lógica como foram aparecendo os nós, porém a maior parte cia literatura dos problemas de programação dinâmica usa o método regressivo. A preferéncia por este procedimento deve-se ate certo ponto a eficiéncia que ele apresenta ao dispor os cálculos numa tabela.

A equação de Bellman para a recursividade regressiva é a seguinte.

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{todasasrotas \\ (x_i;x_{i+1})}} \{d(x_i : x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i1})\} \qquad i = 1,2,\ldots n \qquad \textit{equação 2}$$

Para $x_i = n$ vale $f_{n+1}(x_n + 1) = 0$

Exemplo 63. Resolver o exemplo 6.2, mas agora usando a recursividade regressiva.



Resoluçào:

Inicialização:

1. O sistema tem 3 estágios, 4 variáveis, 7 nós e 10 arcos.
2. Dado que vamos usar a recursividade regressiva: $f_4(x_4) = 0$ para $X_4 = 7$.
3. A ordem dos cálculos associados aos estágios é $f_3(x_3) \rightarrow f_2(x_2) \rightarrow f_1(x_1)$.

Estãgio 3: $x_4 = 7$, está associado a 5 e 6 logo ($x_3 = 5$; $x_3 = 6$) com exactamente uma rota para cada um.

	$d(x_3, x_4) + f_4(x_4)$	Solução óptima	
x_3	$x_4 = 7$	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9+0 = 9	9	7
6	6+0 = 6	6	7

Estágio 2: x_3, está associado aos nós 2, 3 e 4 logo ($x_2 = 2$; $x_2 = 3$; $x_2 = 4$).

	$d(x_2, x_3) + f_3(x_3)$		Solução óptima	
x_2	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12+9=21	-	21	5
3	8+9=17	9+6=15	15	6
4	7+9=16	13+6=19	16	5

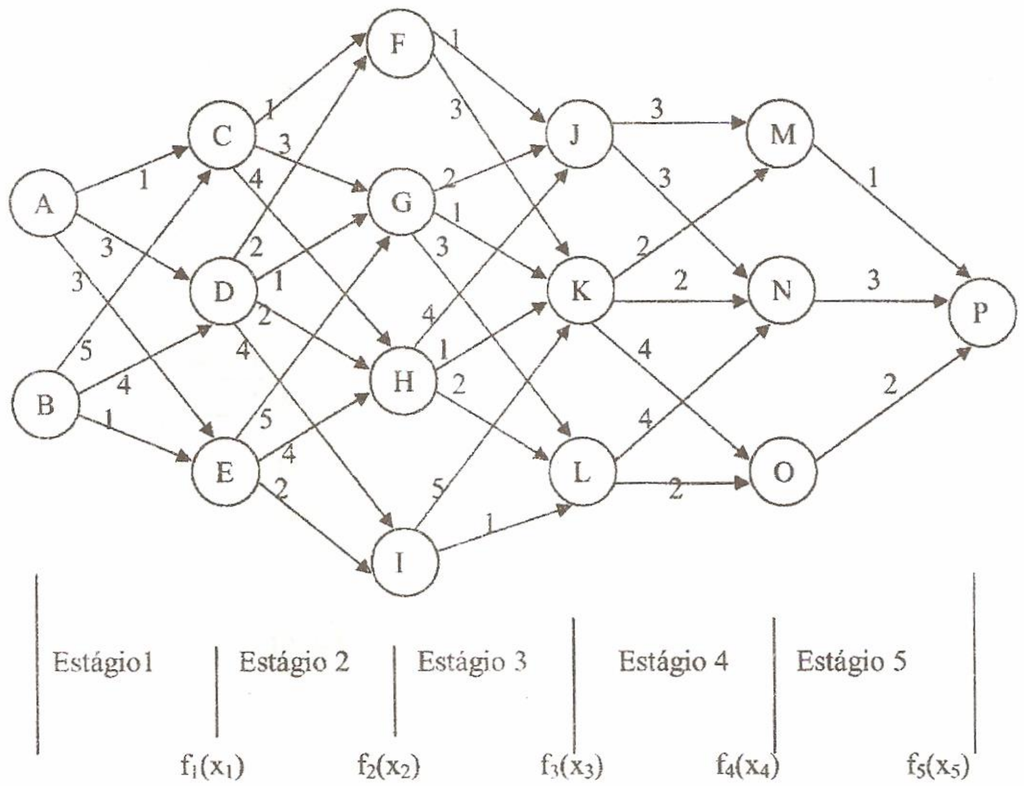
A solução do estágio 2, pode ser lida da seguinte forma: se estivermos no ponto 2 ou 4 a rota mais curta sen a passar pelo ponto 5, e se estivermos no ponto 3 a rota curta seria passar pelo ponto 6.

Estágio 1: Do no 1, temos 3 alternativas: 1 - 2; 1 - 3 e 1 - 4. Usando o valor da funçào $f_2(x_2)$ obtido no estâgio 2, caloulamos $f_1(x_1)$.

	$D(x_1, x_2) + f_2(x_2)$			Solução óptima	
x_1	$X_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$f_1x_1)$	x_2^*
1	7+21=28	8+15=23	5+16=21	21	4

Como chagarnos ao fim, a soiuçâo do estgio 1, mostra que 1 deve estar ligado comn 4, e sucessivamente temos as ligacôes entre os arcos: 1- 4 -5 - 7 que corresponde a rota mais curta entre 1 - 7 com 21 km.

Exemplo 6.4. Suponhamos que se pretende fomecer água a um ponto da cidade de Maputo, partindo de um dos dois tanques grandes de água A e B. O diagrama abaixo mostra as possíveis alternativas para o percurso da rede dos tubas de canalização que transportarâo água. Os valores indicados em cada arco indicam as custos associados aos trabalhos de colocaçâo dos tubos num determinado troço. Usando o método de recursividade regressiva, determine a rota mais económica para se abastecer água, tomando em consideraçâo que existem duas possibilidades de se chegar ao ponto P.



Resolucâo:

Inicialização: para x_6 = P; $f_6(x_6) = 0$

Estágio 5. P antecede M, N e O

	$d(x_5, x_6)+f_6(x_6)$	Solução óptima	
x_5	x_6=P	$F_5(x_5)$	x_6*
M	1+0=1	1	P
N	3+0=3	3	P
O	2+0=2	2	P

Estágio 4. Temos arcos entre os nós (M, N, O) e (J,K,L)

	$d(x_4, x_5)+f_5(x_5)$			Solução óptima	
x_4	x_5=M	x_5=N	x_5=O	$f_4(x_4)$	x_5*
J	1+3=4	3+3=6	-	4	M
K	2+1=3	2+3=5	4+2=6	3	M
L	-	4+3=7	2+2=4	4	O

Estãgio 3. Temos arcos entre os nós (J,K,L) e (F,G,H,I)

	$d(x_3, x_4)+f_4(x_4)$			Solução óptima	
x_3	x_4=J	x_4=K	x_4=L	$f_3(x_3)$	x_4*
F	1+4=5	3+3=6	-	5	J
G	2+4=6	1+3=4	3+4=7	4	K
H	4+4=8	1+3=4	2+4=6	4	K
I	-	5+3=8	1+4=5	5	L

Estágio 2. Temos arcos entre os nõs (F,G,H,I) e (C,D,E)

	$d(x_2, x_3)+f_3(x_3)$				Solução óptima	
x_2	x_3=F	x_3=G	x_3=H	x_3=I	$f_2(x_2)$	x_3*
C	1+5=6	3+4=7	4+4=8	-	6	F
D	2+5=7	1+4=5	2+4=6	4+5=9	5	G
E	-	5+4=9	4+4=8	2+5=7	7	I

Estágio 1. Temos arcos entre os nós (C,G,E) e (A.B)

	$D(x_1, x_2)+f_2(x_2)$			Solução óptima	
x_1	X_2=C	x_2=D	x_2=E	$f_1(x_1)$	x_1*
A	1+6=7	3+5=8	3+7=10	7	C
B	5+6=11	4+5=9	1+7=8	8	E

Fazendo urna leitura no sentido inverso de modo a ligar os nós que pertencem a coluna da so1ução optima temos:

Do ponto A percurso mínimo para P é: A $\rightarrow$C $\rightarrow$F $\rightarrow$J $\rightarrow$M $\rightarrow$P com d = 7 u.m

Do ponto B o percurso mínirno para P é: B $\rightarrow$ E $\rightarrow$ I $\rightarrow$ L $\rightarrow$O $\rightarrow$P com d = 8 u.m.

Resposta: E melhor abastecer água o ponto P partindo do tanque A que apresenta urn custo mínimo de 7 u.m.

6.3 APLICACÕES E DIFICULDADES DA PROGRAMACAO DINAMICA

Nesta secção estão apresentadas de forma breve a teórica algumas aplicações, segundo Taha(1997), cada uma foi escolhida de acordo corn os novos desenvolvimentos da implementaçâo dos métodos da programação dinâmica.

Modelo da quantidade a carregar

O problema cle estirnar urna certa quantidade de itens a carregar, quando se tem urn volume limitado por onde deve colocar os itens ou a necessidade de carregar um certo volume de bans estando disponível de uma capacidade maxima (vulgarmente conhecido como o problema de cacheiro viajante) é um problema que pode ser resolvido pelos modelos de programaçäo dinâmica. Nestas situações, o objectivo tern sido de maximizar a quantidade de itens a carregar num dado volume limitado,

Por exemplo, a quantidade de itens qua urn piloto deve levar na sua maleta de viagern dave set maxima, tomando em consideraçAo que cada item deve ser átil durante a viagern Flay - away - kit".

Modelo de gestão daforca de trabalho

Alguns projectos de construção, lidam-se com problemas de como manter a força de trabalho num determinado período, pois a actividade de despedimento e aquisição de novos funcionários inclui custos. O objectivo nestas situações é procurar uma politica de quando contratar, quando despedir e quando manter urn funeionário de modo que no tim de um periodo X, o rendimento seja máximo.

Madelo de reposicâo de um equipamento

Muitas das máquinas, depois de urn periodo X de trabailo começam economicamente a reduzir o seu rendimento e os custos de manutençâo por outro lado tendem a aumentar, Este problema pode ser reduzido a determinar a viabilidade economica afire comprar uma nova rnáquina ou manter a máquina antiga que pouco a pouco vai necessitando reabilitaçãao.

Modelo de investimento

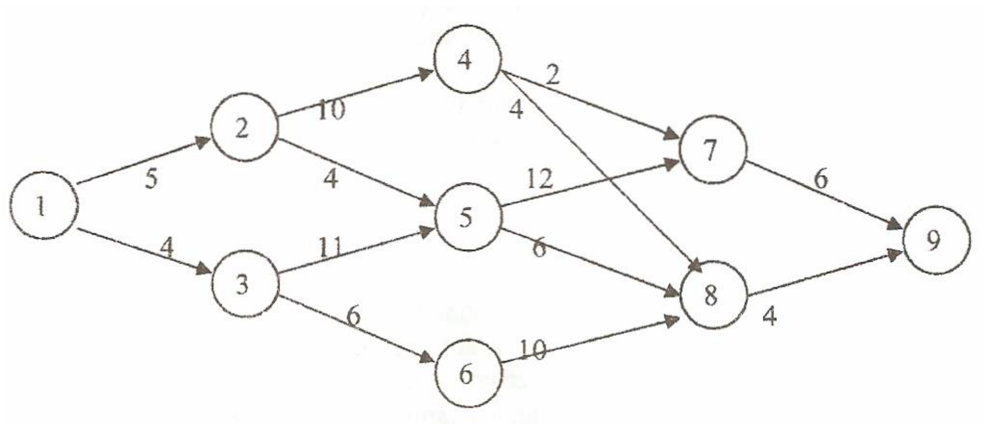
Se uma pessoa pretende investir num banco, ele tem inicialmente urn capital X, qua depois de urn prazo Z, dave decidir se continua a investir ou nao, a assim em diante, Este problema pode set considerado como um problema de programacão dinâmica, onde a decisäo referente a quantidade a investir em cada período corresponde a um estágio.

Embora a programaçâo dinãmica teoricamente possa ser usada para resolver um número de problemas extremamente amplo, as aplicaçöes tornam-se muito rapidamente dificeis, isso deve-se:

a) ao tamanho dos problemas que aumenta de forma exponencial a medida que aumenta o nüniero dos estágios.
b) a recursividade, que permanentemente necessita de urn espaço para guardar as respostas anteriores, Mo sendo possivel optimizar o estágio $n+1$antes do estágio $n+2$ ou viceversa
c) a ibrmulação dos modelos dos prohiernas do programaçäo dinâmica não é geral, sendo especifica para cada caso. A titulo do exemplo, cada uma das aplicaçôes citadas neste parágrafo tem sua própria equação recursiva. etc.

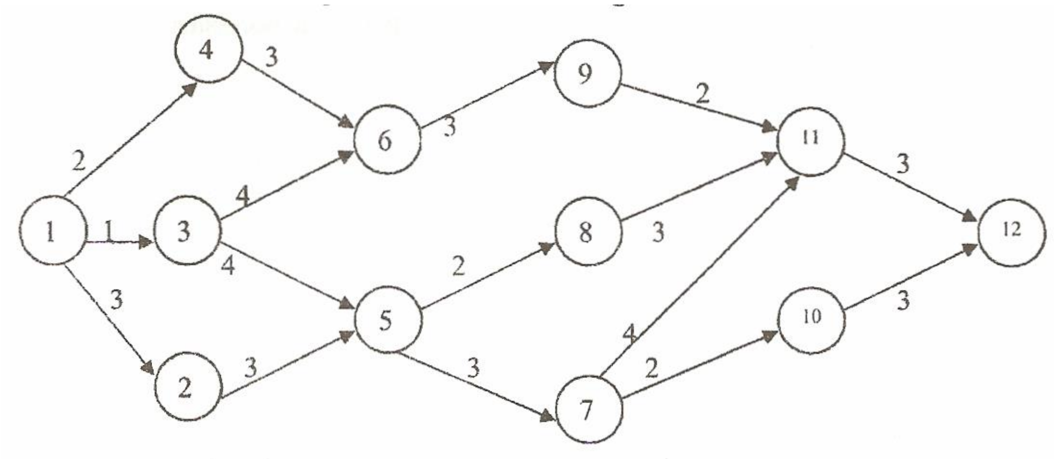
6.4. EXERCICIOS PROPOSTOS

Exercício 6.1. Usando o procedimento de recursividade regressiva, resolva o prohierna do modo a encontrar a rota mats curta entre os pontos 1 à 9.



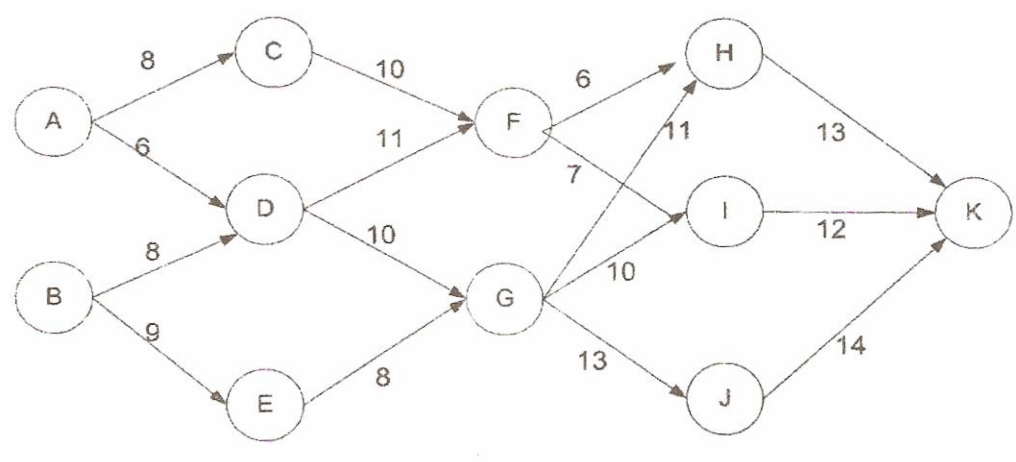
Resp.//I: Rota minima: 1 - 2 - 5 - 8 - 9, com 19 u.m

Exercicio 6.2. Um empresário chegou no aeroporto do Maputo as 7:10 minutos e pretende fechar um negócio com urn amigo do rarno indusirial, 131e tem muita pressa e gostaria de chegar o mais rápido possivel na baixa da cidade. Os taxitas sabem que está hora tem muito tráfego de veiculos na cidade e é preciso decidir a rota a usar de modo que ele minimize o seu tempo. Use recursividade regressiva.



Resp.// Rota minima 1 -3 - 5 -7 - 10 - 12, com 13 minutos.

Exercício 6.3. O prédo K está a ser construido nurn dos arredores da cidade de Maputo, A e B são tanques de água localizados no interior da cidade. Usando a recursividade regressiva da equação de Bellman, defina o percurso minimo e o tanque que deverá abastecer água ao novo prédio.



Resp.// Deve-se partir do tanque A usando a rota A - D F 11(I) - K. Corn distáncia mInima de 36 km.

Referência:

FERREIRA, M AM; Isabel, A(1995) - *Programação Matemática*, 2 edição, Edicöes Silabo, Lisboa: cap2.

RENDER, B; Ralhp, M.S.Jr,(1997) - *Quantitative Analysis for Management*, 6th edition, Prentice Hall intemational, Inc, USA cap. 17.

TAHA, H.A(1997 - Operations Research an introduction, 6th edition, Prentice - Hall International, Inc, USA: cap. 10 e 15.

SHAMBLIN, JE; G.T. Stevens, Jr (1989) - *Pesquisa Operacional* - uma abordagem bãsica, Editora Atlas, S.A, São Paulo