MANUAL DO CURSO DE LICENCIATURA EM

CONTABILIDADE E AUDITORIA

2º Ano

Disciplina: INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Código:

Total Horas/1º Semestre:

Créditos (SNATCA):

Número de Temas: 05

Instituto Superior de Ciências e Educação a Distância (ISCED)

Direcção Académica

Rua Dr. Almeida Lacerda, Nº 212 Ponta – Gêa

Beira – Moçambique

Telefone: +258 23 323501

Cel: +258 823055839

Fax: 23323501

E-mail: isced@isced.ac.mz

Website: www.isced.ac.mz

Agradecimentos

O Instituto Superior de Ciências e Educação a Distância (ISCED) e o autor do presente manual agradecem a colaboração dos seguintes indivíduos e instituições na elaboração deste manual:

Pela Coordenação	Direção Académica do ISCED
Pelo design	Direção de Qualidade e Avaliação do ISCED
Financiamento e Logística	Instituto Africano de Promoção da Educação a Distancia (IAPED)
Pela Revisão	*Paulo Dias Samuel, Mestrado em Contabilidade, Auditoria e Gestão*

Elaborado Por: João Calenga, Licenciado em Gestão de Empresas

Índice de figuras

Índice de tabelas

Índice de gráficos

Índice geral

Visão geral

Bem-vindo à Disciplina/Módulo de Investigação Operacional

Objectivos do Módulo

Ao terminar o estudo deste módulo de Investigação Operacional deverá ser capaz de: desenvolver capacidades (métodos) de resolução de problemas concretos (processos de tomada de decisão), conhecer a metodologia e as técnicas de investigação correntemente utilizadas como suporte aos processos de tomada de decisões, ter domínio teórico e de aplicação prática das técnicas de programação linear, nomeadamente, método simplex, dualidade, problemas de transportes, problemas de afetação), redes e fluxos (problemas de optimização em redes, redes PERT e CPM), teoria dos jogos e teoria da decisão.

Objectivos Específicos

- Abordar de forma hábil e estruturada problemas de decisão;
- Construir modelos de problemas de decisão;
- Usar métodos quantitativos na obtenção de soluções para os problemas construídos, como suporte para decisões fundamentadas;
- Usar a informação extraída dos modelos para induzir e motivar mudanças organizacionais;

Quem deveria estudar este módulo

Este Módulo foi concebido para estudantes do 2º ano do curso de licenciatura em Contabilidade e Auditoria do ISCED e outros como Gestão de Rcursos Humanos, Administração, etc. Poderá ocorrer, contudo, que haja leitores que queiram se actualizar e consolidar seus conhecimentos nessa disciplina, esses serão bem-vindos, não sendo necessário para tal se inscrever. Mas poderá adquirir o manual.

Como está estruturado este módulo

Este módulo de Investigacão Operacional, para estudantes do 2º ano do curso de licenciatura em Contabilidade e Auditoria, à semelhança dos restantes do ISCED, está estruturado como se segue:

Páginas introdutórias

- **Um índice** completo.
- Uma **visão geral detalhada** dos conteúdos do módulo, resumindo os aspectos-chave que você precisa conhecer para melhor estudar. Recomendamos vivamente que leia esta secção com atenção antes de começar o seu estudo, como componente de habilidades de estudos.

Conteúdo desta Disciplina / módulo

Este módulo está estruturado em Temas. Cada tema, por sua vez comporta certo número de unidades temáticas ou simplesmente unidades. Cada unidade temática se caracteriza por conter uma introdução**,** objectivos**,** conteúdos**.**

No final de cadaunidade temática ou do próprio tema, são incorporados antes o sumário, exercícios de auto-avaliação, só depois é que aparecem os exercícios de avaliação.

Os exercícios de avaliação têm as seguintes caracteristicas: Puros exercícios teóricos/Práticos, Problemas não resolvidos e actividades práticas algunas incluido estudo de caso.

Outros recursos

A equipa dos académicos e pedagogos do ISCED, pensando em si, num cantinho, recóndito deste nosso vasto Moçambique e cheio de dúvidas e limitações no seu processo de aprendizagem, apresenta uma lista de recursos didácticos adicionais ao seu módulo para você explorar.Para tal o ISCED disponibiliza na biblioteca do seu centro de recursos mais material de estudos relacionado com o seu curso como: Livros e/ou módulos, CD, CD-ROOM, DVD. Para elém deste material físico ou electrónico disponível na biblioteca, pode ter acesso a Plataforma digital moodle para alargar mais ainda as possibilidades dos seus estudos.

Auto-avaliação e Tarefas de avaliação

Tarefas de **auto-avaliação** para este módulo encontram-se no final de cada unidade temática e de cada tema. As tarefas dos exercícios de auto-avaliação apresentam duas características: primeiro, apresentam exercícios resolvidos com detalhes. Segundo, exercícios que mostram apenas respostas.

Tarefas de **avaliação** devem ser semelhantes às de auto-avaliação mas sem mostrar os passos e devem obedecer o grau crescente de dificuldades do processo de aprendizagem, umas a seguir a outras. Parte das terefas de avaliação será objecto dos trabalhos de campo a serem entregues aos tutores/docentes para efeitos de correcção e subsequentemente nota. Também constará do exame do fim do módulo. Pelo que, caro estudante, fazer todos os exercícios de avaliação é uma grande vantagem.

Comentários e sugestões

Use este espaço para dar sugestões valiosas, sobre determinados aspectos, quer de natureza científica, quer de natureza diadáctico-Pedagógica, etc, sobre como deveriam ser ou estar apresentadas. Pode ser que graças as suas observações que, em gozo de confiança, classificamó-las de úteis, o próximo módulo venha a ser melhorado.

Ícones de actividade

Ao longo deste manual irá encontrar uma série de ícones nas margens das folhas. Estes icones servem para identificar diferentes partes do processo de aprendizagem. Podem indicar uma parcela específica de texto, uma nova actividade ou tarefa, uma mudança de actividade, etc.

Habilidades de estudo

O principal **objectivo** deste campo é o de ensinar aprender a aprender. Aprender aprende-se.

Durante a formação e desenvolvimento de competências, para facilitar a aprendizagem e alcançar melhores resultados, implicará empenho, dedicação e disciplina no estudo. Isto é, os bons resultados apenas se conseguem com estratégias eficientes eeficazes. Por isso é importante saber **como, onde e quando** estudar. Apresentamos algumas sugestões com as quais esperamosque caro estudante possa rentabilizar o tempo dedicado aos estudos, procedendo como se segue:

1º Praticar a leitura. Aprender a Distância exige alto domínio de leitura.

2º Fazer leitura diagonal aos conteúdos (leitura corrida).

3º Voltar a fazer leitura, desta vez para a compreensão e assimilação crítica dos conteúdos (ESTUDAR).

4º Fazer seminário (debate em grupos), para comprovar se a sua aprendizagem confere ou não com a dos colegas e com o padrão.

5º Fazer TC (Trabalho de Campo), algumas actividades práticas ou as de estudo de caso, se existir.

IMPORTANTE: Em observância ao triângulo **modo-espaço-tempo**, respectivamente**como, onde** e **quando**... estudar, como foi referido no início deste item, antes de organizar os seus momentos de estudo reflicta sobre o ambiente de estudo que seria ideal para si: Estudo melhor em casa/biblioteca/café/outro lugar? Estudo melhor à noite/de manhã/de tarde/fins-de-semana/ao longo da semana? Estudo melhor com música/num sítio sossegado/num sítio barulhento!? Preciso de intervalo em cada 30 minutos, em cada hora, etc.

É impossível estudar numa noite tudo o que devia ter sido estudado durante um determinado período de tempo; Deve estudar cada ponto da matéria em profundidade e passar só ao seguinte quando achar que já domina bem o anterior.

Privilegia-se saber bem (com profundidade) o pouco que puder ler e estudar, que saber tudo superficialmente! Mas a melhor opção é juntar o útil ao agradável: Saber com profundidade todos conteúdos de cada tema, no módulo.

Dica importante: não recomendamos estudar seguidamente por tempo superior a uma hora. Estudarpor tempo de uma hora intercalado por 10 (dez) a 15 (quinze) minutos de descanso (chama-se descansoà mudança de actividades). Ou seja que durante o intervalo não se continuar a tratar dos mesmos assuntos das actividades obrigatórias.

Uma longa exposição aos estudos ou ao trabalhjo intelectual obrigatório, pode conduzir ao efeito contrário: baixar o rendimento da aprendizagem. Por que o estudante acumula um elevado volume de trabalho, em termos de estudos, em pouco tempo, criando interferência entre os conhecimento, perde sequência lógica, por fim ao perceber que estuda tanto mas não aprende, cai em insegurança, depressão e desespero, por se achar injustamente incapaz!

Não estude na última da hora; quando se trate de fazer alguma avaliação. Aprenda a ser estudante de facto (aquele que estuda sistemáticamente), não estudarapenas para responder a questões de alguma avaliação, mas sim estude para a vida, sobre tudo, estude pensando na sua utilidade como futuro profissional, na área em que está a se formar.

Organize na sua agenda um horário onde define a que horas e que matérias deve estudar durante a semana; Face ao tempo livre que resta, deve decidir como o utilizar produtivamente, decidindo quanto tempo será dedicado ao estudo e a outras actividades.

É importante identificar as ideias principais de um texto, pois será uma necessidade para o estudo das diversas matérias que compõem o curso: A colocação de notas nas margens pode ajudar a estruturar a matéria de modo que seja mais fácil identificar as partes que está a estudar e Pode escrever conclusões, exemplos, vantagens, definições, datas, nomes, pode também utilizar a margem para colocar comentários seus relacionados com o que está a ler; a melhor altura para sublinhar é imediatamente a seguir à compreensão do texto e não depois de uma primeira leitura;

Utilizar o dicionário sempre que surja um conceito cujo significado não conhece ou não lhe é familiar;

Precisa de apoio?

Caro estudante, temos a certeza que por uma ou por outra razão, o material de estudos impresso, lhe pode suscitar algumas dúvidas como falta de clareza, alguns erros de concordância, prováveis erros ortográficos, falta de clareza, fraca visibilidade, páginas trocadas ou invertidas, etc). Nestes casos, contacte os serviços de atendimento e apoio ao estudante do seu Centro de Recursos (CR), via telefone, sms, E-mail, se tiver tempo, escreva mesmo uma carta participando a preocupação.

Uma das atribuições dos Gestores dos CR e seus assistentes (Pedagógico e Administrativo), é a de monitorar e garantir a sua aprendizagem com qualidade e sucesso.Dai a relevância da comunicação no Ensino a Distância (EAD), ondeo recurso as TIC se torna incontornável: entre estudantes, estudante – Tutor, estudante – CR, etc.

As sessões presenciais são um momento em que você caro estudante, tem a oportunidade de interagir fisicamente com staff do seu CR, com tutores ou com parte da equipa central do ISCED indigetada para acompanhar as sua sessões presenciais.Neste período pode apresentar dúvidas, tratar assuntos de natureza pedagógica e/ou admibistrativa.

O estudo em grupo, que está estimado para ocupar cerca de 30% do tempo de estudos a distância, é de muita importância, na medida em que permite lhe situar, em termos do grau de aprendizagem com relação aos outros colegas. Desta maneira ficará a saber se precisa de apoio ou precisa de apoiar aos colegas. Desenvolver hábito de debater assuntos relacionados com os conteúdos programáticos, constantes nos diferentes temas e unidades temáticas, no módulo.

Tarefas (avaliação e auto-avaliação)

O estudante deve realizar todas as tarefas (exercícios, actividades e auto–avaliação), contudo nem todas deverão ser entregues, mas é importante que sejam realizadas. As tarefas devem ser entregues duas semanas antes das sessões presenciais seguintes.

Para cada tarefa serão estabelecidos prazos de entrega, e o não cumprimento dos prazos de entrega, implica a não classificação do estudante. Tenha sempre presente que a nota dos trabalhos de campo conta e é decisiva para ser admitido ao exame final da disciplina/módulo.

Os trabalhos devem ser entregues ao Centro de Recursos (CR) e os mesmos devem ser dirigidos ao tutor/docente.

Podem ser utilizadas diferentes fontes e materiais de pesquisa, contudo os mesmos devem ser devidamente referenciados, respeitando os direitos do autor.

O plágio[1]é uma viloção do direito intelectual do(s) autor(es). Uma transcrição à letra de mais de 8 (oito) palavras do texto de um autor, sem o citar é considerada plágio. A honestidade, humildade científica e o respeito pelos direitos autorais devem caracterizar a realização dos trabalhos e seu autor (estudante do ISCED).

Avaliação

Muitos perguntam: Com é possível avaliar estudantes à distância, estando eles fisicamente separados e muito distantes do

[1]Plágio - copiar ou assinar parcial ou totalmente uma obra literária, propriedade intelectual de outras pessoas, sem prévia autorização.

docente/tutor!? Nós dissemos: Sim é muito possível, talvez seja uma avaliação mais fiável e consistente.

Você será avaliado durante os estudos à distância que contam com um mínimo de 90% do total de tempo que precisa de estudar os conteúdos do seu módulo.Quando o tempo de contacto presencial conta com um máximo de 10% do total de tempo do módulo. A avaliação do estudante consta detalhada do regulamento de avaliação.

Os trabalhos de campo por si realizados, durante estudose aprendizagem no campo, pesam 25% e servem para a nota de frequência para ir aos exames.

Os exames são realizados no final da cadeira disciplina ou módulo e decorrem durante as sessões presenciais. Os exames pesam no mínimo 75%, o que adicionado aos 25% da média de frequência, determinam a nota final com a qual o estudante conclui a cadeira.

A nota de 10 (dez) valores é a nota mínima de conclusão da cadeira.

Nesta cadeira o estudante deverá realizar pelo menos 2 (dois) trabalhos e 1 (um) (exame).

Algumas actividades práticas, relatórios e reflexões serão utilizados como ferramentas de avaliação formativa.

Durante a realização das avaliações, os estudantes devem ter em consideração a apresentação, a coerência textual, o grau de cientificidade, a forma de conclusão dos assuntos, as recomendações, a identificação das referências bibliográficas utilizadas, o respeito pelos direitos do autor, entre outros.

Os objectivos e critérios de avaliação constam do Regulamento de Avaliação.

TEMA – I: CONSIDERAÇÕES GERAIS.

UNIDADE Temática 1.1. Introdução à Investigação Operacional

UNIDADE Temática 1.2. Programação Linear

UNIDADE Temática 1.3. EXERCÍCIOS deste tema

UNIDADE Temática 1.1. Introdução à Investigação Operacional

Introdução

A Investigação Operacional (IO) ou Pesquisa operacional (PO), é um ramo interdisciplinar da matemática aplicada que faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e de algoritmos na ajuda à tomada de decisão. É usada sobretudo para analisar sistemas complexos do mundo real, tipicamente com o objetivo de melhorar ou optimizar a performance.

A investigação operacional nasceu no teatro de operações durante a II Guerra Mundial, quando os aliados se viram confrontados com problemas[2] de grande dimensão e complexidade. Foram criados grupos multidisciplinares de cientistas em que se incluíam matemáticos, físicos e engenheiros, a par de outros oriundos das ciências sociais para apoiar os comandos operacionais na resolução desses problemas. Aplicaram o método científico aos problemas que lhes foram sendo colocados e criaram modelos matemáticos, apoiados em dados e factos, que lhes permitissem perceber os problemas em estudo e ensaiar e avaliar o resultado hipotético de estratégias ou decisões alternativas.

Com o fim do conflito e sucesso obtido, os grupos de cientistas transferiram a nova metodologia na abordagem de problemas para as

[2] De natureza logística e de táctica e estratégia militar.

empresas, confrontadas com problemas decisionais de grande complexidade derivados do crescimento económico que se seguiu. Com a evolução observada na informática criaram-se condições de concretização algorítmica e velocidade de processamento adaptados à imaginação dos profissionais da investigação operacional, e a micro-informática permitiu relacionar directamente os sistemas de informação com os decisores.

A investigação operacional é uma ciência que se desenvolveu por volta da 2ª guerra mundial quando vários estudiosos procuravam formas de optimizar a utilização de recursos para resolver problemas no campo das operações militares. O objectivo fundamental naquela época era resolver problemas relacionados com o transporte e afectação de material bélico, combinação eficiente de recursos que maximizem os resultados ou minimizem os custos da Guerra.

Os resultados alcançados na guerra permitiram a expansão desta ciência para outros campos do conhecimento, como por exemplo na resolução de problemas de gestão de produção, Planeamento de produção, Distribuição da produção, Transporte, Controlo de qualidade, Misturas de Insumos de produção, engenharias, etc.

A evolução da informática também deu um grande impulso à investigação operacional na medida em que tornou simplicado a resolução de problemas complexos.

A investigação operacional é uma cadeira interdisciplinar. Ela socorre-se de outras ciências para resolução de problemas reais da vida. Tem um cunho fortemente quantitativo. O seu objectivo é dar solução aos problemas da vida real através de ferramentas quantitativas.

O estudo de investigação operacional vai permitir que o aluno tenha sempre em mente um raciocício quantitativo na solução de problemas de gestão, ou seja, desenvolver a capacidade de resolver problemas de gestão utilizando diferentes técnicas quantitativas com maior precisão.

A partir da disciplina de investigação operacional, o estudante deverá ser capaz de formular problemas de programação linear, afectação de recursos, transporte de bens e serviços para diferentes pontos provenientes de diferentes origens, analisar problemas de gestão de filas de esperas em diversas áreas de actividades como na banca, hospitais, portagens. Deverá também conhecer as várias técnicas de gestão de inventários disponíveis aos gestores nas empresas;

A resolução de um problema, pelo método da Investigação Operacional, segue as seguintes fases:

- **Definição do problema** – nesta fase são definidos os objectivos a serem atingidos, as variáveis envolvidas no problema, e as principais restrições;
- **Construção do modelo matemático** – a escolha do modelo depende do tipo de problema a ser resolvido. Os modelos matemáticos mais utilizados, são de programação linear;
- **Solução do modelo** – nesta fase, a solução é encontrada a partir do modelo matemático adoptado na resolução do problema;
- **Validação do modelo** – o modelo é testado para ver se a solução obtida é condizente com o problema estudado;
- **Implementação da solução** – nesta fase, a solução é convertida em regras práticas para a solução do problema.

Ao completar esta unidade, você deverá ser capaz de:

Objectivos específicos

- Contextualizar: sobre a origem, evolução, características e impacto da Investigação Operacional;
- Ilucidar sobre os vários campos de actuação da investigação operacional;
- Apresentar os passos a seguir no processo de tomada de decisão nas Organizações;
- Aprofundar os aspectos práticos ligados a formulação matemática e resolução dos diferentes modelos que são apresentados na Investigação Operacional;
- Potenciar os discentes com ferramentas e/ou instrumentos que auxiliem a tomada de decisões em diferentes campos da Organização.

DESENVOLVIMENTO

Origem e evolução da investigação operacional

É consensual entre diversos autores que a investigação operacional tem a sua origem na segunda guerra mundial. Ela é associada a definição de tácticas e estratégias militares, na distribuição de recursos mulitares e pessoal de modo eficiente e eficaz. No entanto, alguns autores defendem que mesmo antes da segunda guerra mundial, alguns estudiosos tentaram sistematizar alguns estudos relacionados com a pesquisa do óptimo, como por exemplo Quesnay (1759), Walras (1874), Markov (1856 – 1922), Von Neumann (1937) e Kantorovich (1939). Tambémsaoreconhecidosmuitoscientistas da antiguidadecomoEuclides, Newton e Lagrange.

Apesar de se reconhecerem os esforços dos estudiosos citados acima, considera-se como o período da segunda Guerra Mundial, o berço da Investigação operacional. Nesta época, por causa dos efeitos da

Guerra e a preocupação com a minimização dos esforços tanto em meios militares como em recursos humanos, os EUA e a Inglaterra, reuniram equipes de cientistas.

De diversas áreas que incluiam matemáticos, físicos e engenheiros e outros provenientes de outras áreas das ciências sociais, formando-se grupos multidisciplinares. Neste caso desenvolveram-se ideias de se criarem modelos matemáticos apoiados em dados e factos que permitissem uma avaliação dos resultados e tomada de decisões alternativas.

Após a segunda guerra mundial, devido ao grande sucesso alcançado pela equipe de operações criadas, a investigação operacional foi expandida para outras áreas de actuação como negócios, indústrias e até aos governos.

Segundo Canavaro (2005), o sucesso da investigação operacional deve-se a dois factores fundamentais:

- Progresso substancial no desenvolvimento de técnicas que pudessem resolver os problemas propostos. O exemplo citado por esta autora, foi o desenvolvimento do método *simplex*que permite resolver problemas de programação linear, desenvolvido por George Dantzig em 1947 que mais adiante iremos analisar.
- Revolução dos computadores. Alguns problemas da investigação operacional requerem a utilização de computares porque tornam-se quase impossíveis de serem solvidos pelo homem devido a sua complexidade. O desenvolvimento da electrónica digital veio revolucionar esta área e veio permitir que se efectuem cálculos aritméticos milhares ou até mesmo milhões de vezes mais rápidos que o ser humano. Na década de 80 foram desenvolvidos os computadores pessoais que revolucionaram ainda mais este campo da ciência.

Natureza da investigação operacional

A realização de problemas de programação linear geralmente envolve equipas multidisciplinares de cientistas de várias áreas. Esta conjugação de especialistas ajuda na resolução de problemas que atravessam diversos campos do conhecimento.

As equipes de IO envolvem matemáticos, gestores, economistas, engenheiros, computação, especialistas das várias áreas técnicas da programação com objectivo de analisar as operações e propor soluções.

A pesquisa em IO não exige que uma única pessoa seja detentora de todo o conhecimento das diversas áreas ou de todos os problemas que são analisados no campo da IO. A IO exige equipas de pesquisa multidisciplinares com conhecimentos ("*background*") e competências. Por exemplo, um gestor não precisa conhecer todas as técnicas estatísticas, computação ou engenharia. As equipes devem ter conhecimentos suficientes, experiênciae competência para o problema em análise e seguir todas as etapas na sua solução.

Portanto, face ao seu carácter multidisciplinar a IO é uma disciplina científica com uma actuação transversal sobre várias áreas do conhecimento, desde a medicina até às engenharias, passando pela economia até a gestão.

A IO tenta encontrar soluções para os problemas da vida real bastante complexos que exige especialistas de várias áreas.

Conceitualização

A Investigação Operacional (IO) é a investigação das Operações. É composta por duas palavras: investigação e operações. A palavra investigação apresenta dois sentidos:

1) Empírico – onde investigar é descobrir qualquer coisa.

2) Académico e profissional - onde investigar é desenvolver um trabalho de modo sistemático e com rigor visando apurar uma solução, onde no final devem ser indicados: os métodos utilizados; e os resultados alcançados.

Operações – refere se ao termo que é usado para designar o conjunto de actividades ou actos que devem ser desenvolvidos para alcançar os fins organizacionais.

Bronson & Naadimuthu (2001) dizem que a IO lida com a afectação eficiente de recursos escassos devendo ser tratada como ciência e arte.

1) Como arte, porque IO tem a capacidade de apresentar os conceitos de eficiência e escassez num modelo matemático, bem definido para uma determinada situação concreta.
2) Como ciência, porque a IO visa criar os métodos computacionais para a obtenção de soluções dos modelos que apresenta.

Características da ivestigacão operacional

A IO apresenta três características importantes:

1) Utilização de Métodos Científicos na gestão das Organizações;
2) Variedade aplicabilidade;
3) Integralidade Sistémica.

A primeira característica, porque a IO emprega uma abordagem quantitativa e qualitativa na tomada de decisões.Tal que:

- Abordagem quantitativa na formulação e determinação da solução para os modelos de IO.
- Abordagem qualitativa quando avalia as soluções e os modelos a fim implementar.

A segunda característica, porque a Investigação Operacional pode ser usada em vários campos e tipo de Organizações:

- Economia;
- Estado;
- Serviços;
- Ministérios; e
- Sector Privado, entre outros.

E finalmente, a terceira característica, porque o problema de IO:

- Deve ser analisado num contexto em que é possível interligar as diversas variáveis que podem influenciar o modelo.
- As soluções obtidas devem ser válidas para a Organização como um todo.

Esta integralidade sistémica pode ser obtida através da análise de sensibilidade, onde procura-se identificar os elementos cuja alteração poderão afectar o sistema todo.

Impacto da investigacão operacional

O impacto da IO deve-se basicamente ao desenvolvimento da Informática e a grande contribuição do Simplex, que tem utilizado a IO para resolução de diferentes tipos de problemas que enfermam as Organizações em diferentes áreas de actuação.

Muitas organizações têm utlizados técnicas da IO na gestão de duas actividades com destaque para a indústria aeronáutica, automóveis, comunicações, computadores, electrónica, alimentação, energia, metalurgia, instituições financeiras (bancos), agências governamentais, hospitais, empresas de telefonia móvel. A título de exemplo, o Hospital Central de Maputo introduziu o sistema de gestão de Filas de Espera na sua Clínica e na farmácia.

Figura 1: Sistema de Gestão de Filas na Farmácia do HCM

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

A máquina instalada no HCM permitea definição de prioridades para o atendimentodos doentes: idosos, deficientes e mulheres grávidas estão em primeiro lugar. E, seguem-se as doenças, em cinco categorias, onde a prioridade é função da gravidade dos pacientes.

Com estesistema de atendimento evitam-se filas longas, que são uma das características dos serviços públicos, como os Serviços de Notariado, Direcções de Identificação Civil no tratamento dos Bilhetes de Identificação, Serviços de Migração para os passaportes, só para citar alguns exemplos em Moçambique.

Assim, os utentes do HCM já sabem quanto tempo devem esperar e, fundamentalmente, há clareza e transparência no atendimento. Ou melhor, já não é possível usarinfluências para passar `a frente de quem está há muito tempo nafila de espera.

Ramos da investigação operacional

A IO actua em vários ramos e dentre eles podemos destacar os seguintes:

Programação Linear:

- Problema de distribuição de recursos, pessoal;
- Problemas de transporte;
- Problemas de planeamento de produção;
- Problemas de corte de materiais, etc.

- Programação não linear
- Programação dinâmica
- Programação inteira
- Programação global
- Análise estatística
- Teoria de jogos
- Simulação
- Gestão de stocks

Teoria de filas:

- Organização do tráfego aéreo;
- Congestão do tráfego
- Construção de barragens.

Dentre os ramos que são aqui apresentados, iremos nos cingir na Programação Linear, Problema de distribuição de recursos e pessoal, Problemas de transporte, Gestão de stocks e Teoria de filas.

Passos de investigação operacional

A resolução de qualquer problema na investigação operacional deve passar pelas seguintes etapas:

1) Formulação do problema
2) Construção do modelo matemático
3) Determinação da solução
4) Avaliação do modelo e da solução
5) Tomada de decisão da solução encontrada
6) Implementação.

A formulação de Problemas é a primeira etapa da modelação de problemas de IO e bastante relevante porque se um problema for mal formulado poderemos ter respostas certas para um problema errado.

A formulação é a base da IO, porque antes de se desenvolver os demais passos deve-se garantir que o problema a ser resolvido esteja bem formulado.

A formulação de problemas de IO deve também ter em conta as 3 principais característicasda IO:

1) Utilização de métodos científicos na gestão das organizações;
2) Variedade de aplicabilidade;
3) Integralidade sistemática.

De uma forma geral, a formulação de problemas em IO, consiste em definir claramente:

1) Os objectivos que se pretendem alcançarem (função objectivo);
2) As restrições que são as limitações do problema ser formulado;
3) As relações de interdependência de todas as componentes dosistema (especificações técnicas e condições das variáveis de decisão).

A definição dos objectivos representa o que se pretende alcançar com a resolução do problema. Deve-se diferenciar entre objectivos e metas. As metas representam valores pre-definidos cuja ocorrência se pretende salvaguardar.

Modelo é a representação simplificada da realidade. Assim a IO constrói modelos matemáticos para melhor visualizar a realidade do problema a ser resolvido.

Os modelos matemáticos de problemas de optimização são geralmente representados por sistemas de equações ou inequações que melhor descrevem o problema.

Os modelos matemáticos de IO devem ter em conta:

1) A simplificação sem perder a essência do problema - as soluções a serem obtidas do modelo simplificado deve ser aplicada a

realidade;

2) Processo em espiral - parte-se de uma situação simples até se chegar a uma situação mais próxima da realidade;
3) Escolha do modelo certo - deve-se aplicar os modelos já criados pela IO para cada tipo específico de problema a ser formulado.

Existem vários métodos para a resolução dos problemas formulados pela IO, desde:

1) Método gráfico;
2) Algoritmo do Simplex;
3) Método Simplex (BIG M e Duas Fases);
4) Lagrange;
5) Métodos informáticos (Lindo e Lingo).

Nesta fase analisa-se o modelo utilizado e a solução obtida, onde:

a) Se avaliação for não satisfatória deve-se reformular e remodelar, e resolver de novo o modelo, a partir dos resultados obtidos;
b) Se avaliação é satisfatória, procede-se a tomada de decisão, preparando-se as condições para posterior implementação.

Esta fase precede a avaliação satisfatória, onde o gestor, deve elaborar um relatório documentado que servirá de guia para a implementação da solução obtida na vida real.

Este relatório deverá ser detalhado, apresentando os procedimentos que serão necessários, passos a seguir na implementação da decisão relativa a solução encontrada.

Consiste em traduzir a solução do modelo encontrado na vida prática, através dos procedimentos que são apresentados no relatório documentado, aprovado pela gestão cimeira da Organização.

Note que, depois de se ter implementado a solução determinada, poderá ser necessário, iniciar um novo ciclo do problema, mas num nível mas complexo.

Hill e Dos Santos (1999:15) dizem que:

1) A IO traduz o estudo de modelos de optimização que servem de apoio a tomada de decisão.
2) Dentro dos modelos de optimização, existe um grupo específico dos modelos de gestão conhecidos por modelos de programação matemática.

Sumário

Nesta **Unidade** temática 1.1 estudamos e discutimos fundamentalmente o conceito de investigação operacional, onde foi dito que a IO é considerada uma ciência e uma arte. A IO evolui como ciência nos finais da 2ª Guerra Mundial e teve como marco mais importante a publicação do Método Simplex por George Dantzing em 1947.

A IO expandiu-se rapidamente graças à explosão das ciências de computação que tornaram o seu algoritmo fácil de ser solvido. Muitas empresas após a segunda Guerra Mundial, criaram equipas de IO para resolver diversos problemas do seu dia-a-dia ligados à Gestão.

A IO é uma ciência de natureza interdisciplinar para a resolução de muitos dos seus problemas requere a intervenção de especialistas de várias áreas do saber desde a Medicina às engenharias e desde a Gestão à Economia, Física, Matemática, Química, tec.

Nesta unidade temática foram descritas as principais características da IO que passam pela utilização de métodos científicos na gestão das organizações, variabilidade na sua aplicação até à integralidade sistémica, admitindo que uma empresa é um sistema onde entram inputs que são transformados e resultam em outputs.

Também foi evidenciado nesta unidade temática os impactos visíveis do desenvolvimento da IO na vida das organizações com destaque para a utilização da teoria de filas de espera na resolução de problemas de enchentes nas instituições bancárias, hospitais, portagens, serviços de telefonia móvel até às instituições governamentais.

A resolução de qualquer problema da investigação operacional envolve seis (6) etapas, sendo de destacar: 1) Formulação do problema; 2) Construção do Modelo Matemático; 3) Determinação da Solução; 4) Avaliação do Modelo e da Solução; 5) Tomada de Decisão sobre a Solução encontrada e 6) Implementação da Solução se for adequada.

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

GRUPO-1 (Com respostas detalhadas)

1) "**A Investigação Operacional data da antiguidade, afirmam alguns economistas e matemáticos do ramo"**. Recorrendo aos conhecimentos adquiridos na disciplina de Investigação Operacional, explique em que época e contexto surgiu a IO e quais os objectivos que tinha em vista.
2) **"A Investigação Operacional pode ser vista em termos de ciência e arte**." Explique as relações que se podem estabelecer na Investigação Operacional, entre arte e ciência.
3) **"A investigação Operacional actua em diferentes áreas nas organizações"**. Explique 3 das principais áreas de actuação da Investigação Operacional e dê exemplo para cada caso.
4) A formulação de problemas é a base para a tomada de decisão nas Organizações. Porquê?
5) Explique de forma sumária os principais passos da Investigação Operacional. E qual é a relação que se estabelece entre os passos e as caracteristicas da IO?
6) Diga qual foi o primeiro problema e o primeiro método empregue para resolução de Problemas de IO? Indique adicionalmente o nome do cientista e o ano em causa.

UNIDADE Temática 1.2. Programação Linear

Introdução

Um problema de Programação linear tem em vista determinar em que condições se podem maximizar ou minimizar um dado objectivo organizacional, considerando a existência de um conjunto de restrições ou limitações.

Segundo Mulenga (2005), programação linear (PL) é um conjunto de técnicas que permitem resolver os problemas de optimização, num sistema de recursos limitados, sendo lineares, quer a função objectivo, quer as restrições.

A importância especial da PL resulta não só das potencialidades dos seus algorítmos de resolução e da sua grande aplicação prática, mas também da sua génese de estar directamente relacionada com o desenvolvimento dos próprios conceitos fundamentais das teorias de optimização.

Os principais desenvolvimentos teóricos da PL são devidos a Kantorovich (1939) e a um grupo de cientístas americanos que lançaram as bases da PL entre 1939 à 1951, nos quais se destacam os nomes de Von Neuman e Morgenstern, Harold, Kuhn e Tucker.

A programação linear lida com problemas que dizem respeito à atribuição e a distribuíção de recursos entre as diversas tarefas ou actividades que devem ser realizadas. Normalmente, os recursos disponíveis não são suficientes para que todas as actividades sejam executadas no nível desejado. Assim, o que se procura, é encontrar a melhor distribuição possível dos recursos, de forma a atingir um valor óptimo objectivo (máximo para lucros) e (mínimo para custos).

Assim, um problema de programação linear é caracterizado por três elementos básicos:

a) Variáveis de decisão, que são o centro das atenções na resolução do problema;
b) Existência de um objectivo, expresso em termos das variáveis de decisão;
c) Existência de restrições à aplicação dos recursos, tanto em relação às quantidades disponíveis como em relação à forma de emprego.

Os estudos de programação linear permitem responder questões como:

1. Estando presentes certas condições de produção, qual a quantidade de um determinado produto, entre vários, que se deve produzir para obter o maior lucro possível?
2. Sendo impostas algumas especificações, qual é a composição da mistura que corresponde ao custo mínimo?
3. Estando impostas as condições de trabalho, como repartir o conjunto de mão-de-obra entre as diferentes tarefas e especialidades, com o objectivo de minimizar as despesas ou maximizar a eficiência?

Características da Programação Linear

As caracteristicas dos problemas de programação linear (PL) que podem ser levantados são:

- Modelos mais simples e constituem a base da investigação operacional;
- Simplificam o problema;
- Seguem o processo espiral.

A simplicidade dos modelos de PL

Os modelos de programação linear seguem o princípio da parcimónia, ou seja, devem ser mais simples possíveis para que sejam fáceis de ser solucionados. Diz-se que problemas formulados de forma complexa, levam a resoluções complexas. A simpliciade dos modelos Justificam-se por:

- Usarem o termo linear para representar uma situação bastante simples da realidade; tenderem a usar modelos determinísticos, por serem capazes de representar a realidade de forma clara e una, o que faz com que a solução encontrada na programação linear seja igual a aquela que é valida na vida prática.

Os inconvenientes de PL

Uma das grandes desvantagens da IO, está relacionada com a simplificação, pois um modelo de programação linear conduz a criação de um modelo menos complexo da realidade, gerando incertezas nos resultados encontrados.

Tal, pode ser ultrapassado com a análise de sensibilidades, uma análise pós-optimização em que procura-se verificar o efeito de alterações (aumento ou diminuição) dos valores das variáveis, restrições e disponibilidades de recursos. Esta análise pode ser feita no excel ou em softwares específicos como o LINGO/LINDO.

Utilidade da PL

A utilidade da Programação linear deve-se as seguintes razões:

- A necessidade de se fazer uma representação adaptada da realidade através de modelos determinísticos;
- A necessidade de obter resultados que podem ser realisticamente aplicados na vida real.

A programação linear é bastante utilizada pelos gestores devido ao seu cariz prático.

Aplicações Práticas dos Problemas de PL

Hill e Dos Santos (1999:16-82), dizem que:

A gestão de produção é a área que mais utiliza os serviços da programação linear no planeamento da produção, distribuição dos recursos. Contudo, também aplica-se em Marketing (determinação da politica de preços, afectação da força de vendas), Finanças (escolha de programas de investimentos, Orçamentos), Recursos Humanos (afectação de pessoal), entre outras.

Principais Problemas de PL

Existem várias áreas da vida económica em que as técnicas de programação linear podem ser aplicadas. A seguir podemos destacar alguns problemas da vida real em que a sua solução pode ser dada através da composição de um problema de programação linear:

- Problema de produção geral;
- Problema de produção sequencial;
- Problema de misturas;
- Problema de investimentos;
- Problema de transportes;
- Problema de trans-expedição;
- Problema de afectação.

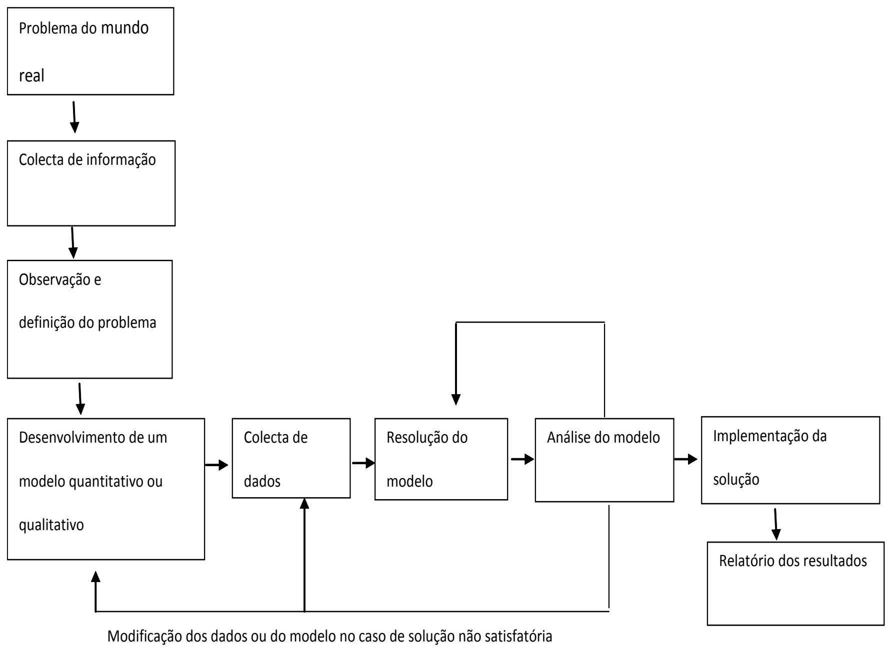
Formulação de Problemas de Programação Linear

Esta secção visa desenvolver os elementos do processo de formulação de problemas de programação linear (PL) e introduzir nos estudantes as formas padrão de formulação de tiplogias de problemas de Investigação Operacional. A programação linear é a principal técnica da Investigação operacional.

A definição do problema é uma arte e requer do gestor conhecimentos, experiência, esforço, imaginação e assistência de outros membros da equipa. Isto requer a colecta de Informação sobre o problema. Muitas vezes isto envolve a análise Custo/benefício para se decidir se o estudo é ou não viável ou se é ou não necessário reduzir o seu horizonte.

A maioria dos problemas apresentados em Investigação Operacional são colocados de maneira vaga e imprecisa. A tarefa do gestor/economista é estudar o sistema relevante e desenvolver um enunciado bem-definido do problema a ser considerado. Isso abrange determinar coisas como os objectivos apropriados, restrições sobre o que pode ser feito, relação entre a área a ser estudada e outras áreas da organização, possíveis caminhos alternativos, limites de tempo para a tomada de decisão e assim por diante. **O processo de definição do problema é crucial, pois afecta enormemente quão relevantes serão as conclusões do estudo. É difícil obter resposta correcta a partir de um problema incorrecto.**

A figura abaixo representa fielmente os caminhos para a formulação de um problema de programação linear.



Formular um problema de programação linear significa descrever o problema através de expressões matemática de forma exaustiva e fidedigna para mostrar a situação concreta da realidade.

Qualquer processo de formulação ou definição de um problema de IO envolve quatro fases:

a) Definicao do Objectivo;
b) Variavéis de Decisao;
c) Função Objectivo; e
d) Restrições.

Para melhor entendimento, iremos descrever cada fase da formulação de um problema de programação linear.

a) Definição do Objectivo:

Definição do objectivo é o que se pretende alcançar com a resolução do problema, deve-se ter em conta a distinção entre:

- Metas (valores predefinidos cuja ocorrência se pretende salvaguardar);
- Meios (grandezas que traduzem acções ou actividades levadas a cabo para atingir um dado fim);
- Objectivos intermédios (valores de uma dada grandeza cuja ocorrência é necessária para garantir que o objectivo fim seja alcançado);
- Verdadeiro objectivo do decisor (o resultado final que se pretende).

b) Variáveis da Decisão

Representam as grandezas que podem ser controladas pelo decisor, e são geralmente definidas de tal maneira que permitam traduzir de forma adequada o critério de decisão e as condições ou restrições impostas pela situação real.

O gestor deverá tomar decisões sobre as váriaveis de decisão, pelo que elas aparecem representadas sempre na função objectivo de um problema de programaçào linear.

Elas são consideradas por variáveis controladas, porque podem ser manipuladas de forma a garantir que o valor do óptimo da função objectivo seja atingido.

c) Função Objectivo

A função objectiva é aquela que traduz o seguinte:

- O objectivo do decisor (maximizar ou minimizar um dado aspecto organizacional); Ex: Max Z =c1X+c2Y
- Os parâmetros dos quais esse objectivo depende. Ex:. c1 e c2
- O peso da contribuição de cada item da função objectivo. Ex:. c1X, c2Y

d) Restrições

Representam as caracteristicas da situação real que se pretende modelar. Estas podem restricoes do tipo:

- **Escassez de recursos**, quando representam a limitação dos níveis de produção em consequência da existência da escassez de recursos. Ex: terra, trabalho, capital, capacidade empresarial ou tecnologia.
- **Restrições da oferta**, quando traduzem a limitação da capacidade produtiva, e pode estar relacionado com o processo em si, ou com os recursos que foram previstos para serem utilizados.
- **Restrições de procura**, são também designadas por restrições de venda, e correspondem aos níveis minímos ou máximos de vendas que se estima poder vir a realizar.
- **Restrições do equilibrio**, são equações que definem por exemplo a variação dos stocks; sub-produtos financeiros cuja rendibilidade depende de diversas oportunidades de investimentos.
- **Restrições de forma**, são exemplo as equações que traduzem as vendas regionais e internacional do produto.
- **Restrições de não negatividade**, estão sempre presentes no problema de PL. As variáveis económicas por tendência assumem valores económicos.

Parâmetros dos Problemas de PL

Os Problemas de Programação Linear utilizam 3 tipos de Parâmetro:

- **Coefecientes económicos** (Cj) que são os coeficientes das variáveis de decisão na função objectivo; Estas definem o peso relativo de valorização ou classificação de cada variável em termos de medida no objectivo. Ex: o lucro unitário da venda de uma lâmpada ou carteira numa empresa de venda de materiais de iluminação ou numa carpintaria no caso das carteiras.

- **Recursos ou limites das restrições (bi)**, que correspondem aos valores considerados no lado direito das restrições. São os termos independentes. Ex: Quantidade disponível de lâmpadas para venda na loja e
- **Coeficientes técnicos (aij)** são todos os parâmetros associados as variaveis de decisão nas equações ou inequações que representam as restrições.

Exemplo: Um produtor de circuitos de computador dispõe de 400 horas de trabalho por semana e cada circuito requer 2 horas de trabalho. Cada circuito dá de lucro $5. Quantos circuitos devem ser produzidos em cada semana para maximizar os lucros?

<u>O Modelo Matemático:</u>

Inputs do modelo	O modelo	Resultados
Variável de decisão: X = # circuitos Variáveis não controláveis $5 lucro/unidade 2 horas trabalho/unidade 400 horas capacidade	Maximizar lucro $L = \$5X$ Sujeito a: $2X = 400$ $X \geq 0$	Variáveis de decisão X = 200 Função objectivo Lucro = 5*200 = 1000 Restrições 2*200 = 400

Tipologias de Problemas de Programação Linear

Um Problema de Programação é dito "Problema de Programação Linear" quando o objectivo a ser alcançado e as limitações dos recursos (restrições) são expressas como funções matemáticas lineares, tanto pela sua função objectivo (linear) e como pelas suas restrições (lineares).

Os algoritmos matemáticos da programação linear se incubem de processar a escolha da solução óptima, ou seja, uma solução que satisfaça simultaneamente todas as restrições do problema e optimize a Função Objectivo.

O problema geral da Programação Linear pode ser descrito da seguinte forma:

Dado um conjunto de "m" desigualdades ou equações lineares em "n" variáveis, queremos determinar valores não-negativos dessas variáveis que satisfarão as restrições e maximizarão ou minimizarão alguma função linear das variáveis. Matematicamente, temos:

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m$ $\longrightarrow$ função objectivo ou de oportunidades

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m \leq b_n \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{conjunto das restrições}$$

Admite-se que, em lugar de maximizar, haja minimizar, e em lugar de menor ou igual (≤) seja maior ou igual (≥) ou mesmo igual (=).

Exemplo Inicial: Problema de Produção

Uma marcenaria possui 60m^2 de madeira e dispõe de 40H.h para mão-de-obra para fabricar mesas e cadeiras, ambos de um só modelo. O processo de produção é tal que, para fazer 1 mesa a marcenaria gasta 7m^2 de madeira e 3H.h de mão-de-obra. Para fazer uma cadeira, a marcenaria gasta 4m^2 de madeira e 5H.h de mão-de-obra. Os preços de venda da mesa e da cadeira são, respectivamente, 1000,00MT e 500,00 MT. Qual é o plano de produção para que a marcenaria maximize o rendimento obtido com as vendas? Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Resolução:

a) Quais as variáveis de decisão?

O que deve ser decidido é o plano de produção, isto é, quais as quantidades que devem ser produzidas de mesa e cadeira.

Portanto as variáveis de decisão serão x_1 e x2 onde,

$x_1 \rightarrow$ quantidade de mesa a produzir

$x_2 \rightarrow$ quantidade de cadeira a produzir

b) Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o rendimento obtido com as vendas, que pode ser calculado:

- Rendimento devido à venda de mesa:

  $1000\ x_1 \rightarrow$ rendimento por unidade de mesa vendida x quantidade de mesa produzida.

- Rendimento devido à venda de cadeira:

  $500x_2 \rightarrow$ rendimento por unidade de cadeira vendida x quantidade de cadeira produzida.

- Rendimento total obtido com as vendas:

  $Z = 1000\ x_1 + 500\ x_2$

  Objetivo: maximizar $Z = 1000\ x_1 + 500\ x_2$

c) Quais as Restrições?

As restrições impostas pelo sistema são:

- Disponibilidade de mão-de-obra para a produção: 40 H.h

  ♦Mão-de-obra necessária para produzir mesas:

  $3x_1 \rightarrow$ mão-de-obra necessária para produzir uma mesa x quantidade de mesa produzida.

  ♦Mão-de-obra necessária para produzir cadeiras:

  $5x_2 \rightarrow$ mão-de-obra necessária para produzir uma cadeira x quantidade de cadeira produzida.

  ►Total de mão-de-obra necessária para a produção: $3x_1 + 5x_2$

■ Resttrição descritiva da situação: $3x_1 + 5x_2 \leq 40$

- Disponibilidade de madeira para a produção: 60 m^2

♦Madeira necessária para produzir mesas:

$7x_1$ → madeira necessária para produzir uma mesa x quantidade de mesa produzida.

♦Madeira necessária para produzir cadeiras:

$4x_2$ → madeira necessária para produzir uma cadeira x quantidade de cadeira produzida.

►Total de madeira necessária para a produção: $7x_1 + 4x_2$

■ Restrição descritiva da situação: $7x_1 + 4x_2 \leq 60$

Restrições Implícitas

Como as quantidades a produzir de mesa e cadeira devem ser positivas ou nulas, temos as seguintes restrições de não-negatividade:

$x_1 \geq 0$ → quantidade a produzir de mesa deve ser maior ou igual a zero;

$x_2 \geq 0$ → quantidade a produzir de cadeira deve ser maior ou igual a zero;

RESUMO DO MODELO MATEMÁTICO

$$MaxZ = 1000X_1 + 500X_2$$

$$s.a \begin{cases} 3X_1 + 5X_2 \leq 40 \\ 7X_1 + 4X_2 \leq 60 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Função Objectivo

Restrições técnicas

Restrições de não negatividade

Exemplos de formulação de Modelos de PL

Exemplo 1: Modelo de Produção

Consideremos uma fábrica com três tipos de máquinas **A, B** e **C**, que podem produzir quatro produtos 1, 2, 3, 4. Cada um dos produtos tem que passar por alguma operação em cada um dos três tipos de máquinas (máquina de tornear, perfurar e laminar, por exemplo). A tabela abaixo mostra os tempos necessários de cada máquina para fazer a operação em cada produto, o total de funcionamento das máquinas por semana e o lucro obtido sobre a renda de uma unidade de cada um dos produtos.

Considera-se que os lucros são directamente proporcionais ao número de unidades vendidas. Sabendo-se que queremos determinar a produção semanal para cada produto de modo a maximizar os lucros, formule o problema de programação linear.

Tabela 1:Formulação de problema de programação linear

Tipo de máquina	Produtos				Tempo total utilizado por semana
	1	2	3	4	
A	1,5	1	2,4	1	2000
B	1	5	1	3,5	8000
C	1,5	3	3,5	1	5000
Unidade de lucro	5,24	7,3	8,54	4,18	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Suponha que x_j seja o número de unidades do produto *j* produzidas por semana. Devem então ser calculados os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4 que maximizem o lucro. Desde que o tempo disponível pela máquina seja limitado, não se pode aumentar arbitrariamente a saída de cada um dos produtos. A produção precisa ser distribuída entre os produtos 1, 2, 3 e 4 de modo que os lucros sejam maximizados sem exceder o número máximo de horas de máquinas disponíveis em cada um dos grupos de máquinas.

Modelo:

$$MaxZ = 5{,}24X_1 + 7{,}3X_2 + 8{,}54X_3 + 4{,}18X_4$$
$$s.a\begin{cases} 1{,}5X_1 + X_2 + 2{,}4X_3 + X_4 \le 2000horas \\ X_1 + 5X_2 + X_3 + 3{,}5X_4 \le 8000horas \\ 1{,}5X_1 + 3X_2 + 3{,}5X_3 + X_4 \le 5000horas \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{cases}$$

A primeira restrição corresponde a máquina A, a segunda máquina B e a terceira Máquina C.

Exemplo 2: Modelo de Dieta

Para uma boa alimentação o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne contém 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível?

Sabe-se que cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 1 unidade monetária.

Modelo:

A função objectiva deste problema visa a minimização de custos e teremos três restrições. A primeira relativa a vitamina, a segunda relativa a proteinas e a terceira relativa a não negatividade.

$$MinZ = 3X_1 + X_2$$
$$s.a\begin{cases} 4X_1 + 8X_2 \ge 32 \\ 6X_1 + 6X_2 \ge 36 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Exemplo 3: Modelo de Investimentos Financeiros:

Seja um investidor que dispõe de $10.000 e várias opções de investimento. O investidor pretende maximizar seu capital ao final de um ano, levando em conta os investimentos potenciais. No investimento A cada dólar aplicado hoje produz um rendimento trimestral de $ 0,04 e devolve o principal ao final de um ano. No investimento B cada dólar aplicado hoje retorna $ 1,40 ao final de um ano. O investimento C estará disponível ao início do 3º trimestre e cada dólar aplicado retornará $1,25 ao final do ano. Sabe-se que qualquer dólar não investido pode ser mantido em fundos de rendimento fixo que remuneram o investidor em $ 0,03 por trimestre.

Por outro lado, o investidor deseja diversificar e evitar concentrar suas aplicações no melhor investimento. Assim, nenhuma alternativa deverá aplicar mais do que $ 5.000.

Solução: atenção para este exercício que envolve conhecimentos prévios de matemática (Cálculo) financeira (o).

Definindo-se:

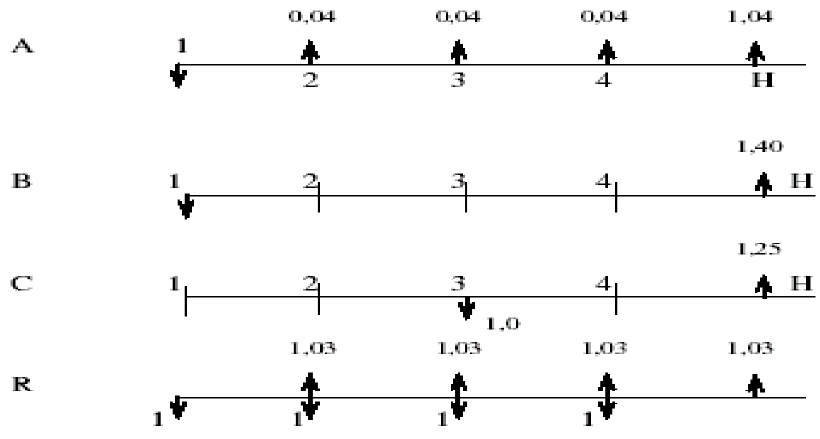
XA = investimento em A;

XB = investimento em B;

XC = investimento em C;

R1, R2, R3 e R4 = recursos aplicados em fundos de rendimento fixo no início de cada trimestre correspondente.

Todos esses investimentos podem ser visualizados num eixo horizontal em escala trimestral, onde a seta para baixo indica uma aplicação e a seta para cima o retorno de caixa. O símbolo H registra o horizonte do estudo, ou final do 4º trimestre.



O modelo será:

$$
\begin{array}{llr}
\text{MAX} & Z = 1{,}04\,X_A + 1{,}40\,X_B + 1{,}25\,X_C + 1{,}03R_4 & (\\
\text{s.a.} & X_A + X_B + R_1 = 10.000 & (\\
& R_2 = 0{,}04\,X_A + 1{,}03\,R_1 & (\\
& X_C + R_3 = 0{,}04\,X_A + 1{,}03\,R_2 & (\\
& R_4 = 0{,}04\,X_A + 1{,}03\,R_3 & (\\
& X_A \leq 5000 & (\\
& X_B \leq 5000 & (\\
& X_C \leq 5000 & (\\
\end{array}
$$

$$X_A, X_B, X_C, R_1, R_2, R_3, R_4 \geq 0$$

Nesse modelo, a função objetivo, equação (0), indica o montante ao final do 4o ano. A restrição (1) indica as três possibilidades de aplicação dos recursos hoje disponíveis, a saber: investimento A, investimento B e conta corrente. A restrição (2) mostra a aplicação em fundos de rendimento fixo ao início do 2º trimestre, sendo que a disponibilidade de recursos consiste na renda do investimento A mais o investimento R1 acrescido de juros. A restrição (3) representa o 3º trimestre e permite aplicar no investimento C e em fundos de rendimento fixo, sendo que os recursos disponíveis consistem nos juros do investimento A, mais o investimento R2 acrescido de seu rendimento. Para o início do 4º trimestre o único investimento possível é R4 e os recursos disponíveis são o rendimento do investimento A, mais o rendimento da aplicação em fundos de rendimento fixo do período anterior.

Finalmente, as restrições seguintes referem-se à limitação dos investimentos e à não negatividade das variáveis.

Exemplo 4: Modelo de Misturas

O dono de um aviário precisa fabricar uma ração especial para as suas galinhas, de forma a atender às necessidades mínimas. A produção desejada desta ração é de 90 kg e a mistura deve ser formada por dois ingredientes básicos: o milho e o farelo de arroz, que custam $ 0,90 e

$ 0,30 por kg respectivamente. Além disso, sabe-se que a ração precisa ter pelo menos 7% de proteína e 3% de fibra na sua composição, de forma a atender as necessidades diárias das aves. A partir da tabela com a composição porcentual de fibra e proteína do milho e do farelo de arroz, pede-se formular um modelo de Programação Linear para atender as necessidades diárias a um custo mínimo.

Tabela 2: Modelo de programação linear das necessidades diárias

	Proteína	Fibra
Milho	**9%**	**2%**
Farelo de Arroz	**5%**	**6%**

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Composição de cada ingrediente

Solução:

As variáveis de decisão do modelo são as seguintes:

X1 = quantidade de milho (kg)

X2 = quantidade de farelo de arroz (kg)

A produção diária da mistura deve ser de 90 kg, ou seja, em termos matemáticos: $X_1 + X_2 \geq 90$

Sabe-se também que a mistura deve ter pelo menos 7% de proteína e 3% de fibra. Portanto, a soma das quantidades de proteína de cada ingrediente deve exceder 7% da quantidade total, enquanto que a quantidade de fibra deve ser pelo menos superior a 3%, ou seja:

$$0{,}09X_1 + 0{,}05X_2 \geq 0{,}07(X_1 + X_2)$$
$$0.02X_1 + 0{,}06X_2 \geq 0{,}03(X_1 + X_2)$$

E, finalmente, o dono do aviário deseja produzir a mistura de forma a gastar o mínimo possível. Assim, o modelo completo seria:

$$MIN.Z = 0{,}9X_1 + 0{,}3X_2$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 90 \\ 0{,}09X_1 + 0{,}05X_2 \geq 0{,}07(X_1 + X_2) \\ 0{,}02X_1 + 0{,}06X_2 \geq 0{,}03(X_1 + X_2) \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 5: Problema de Afectação:

O Ministério de Saúde da **ISCEDLÂNDIA** possui cinco locais possíveis para instalação de centro de saúde, para servir quatro centros populacionais do distrito de ***Nyamalandia***. Construiu-se um índice que exprime o inconveniente de servir cada centro populacional pelo centro de sendo de cada local, tendo em conta o numero de habitantes servidos e os meios de transportes existentes. Os resultados constam na *tabela 3 seguinte*.

Tabela 3: Relação de um índice inconveniente de servir cada centro populacional

Descrição	S1	S2	S3	S4	S5
P1	40	43	42	38	45
P2	37	40	41	44	36
P3	40	42	39	38	38
P4	45	40	39	42	41

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Sabendo que toda a população de um mesmo centro populacional tem que ser servida pelo mesmo centro de saúde e que cada centro de saúde serve apenas um centro populacional, formule o problema em equilíbrio em PL.

Solução:

Este tipo de problema traduz um problema chamado problema de afectação.

Dados

O índice de inconveniência é dado pelo quadro acima, onde cada centro populacional Pi por cada centro de saúde Sj.

Variáveis de decisão

- Xij = 1 se o centro de saúde populacional Pi é servido pelo centro de saúde Sj

- Xij = 0 caso contrário

Função Objectivo

$$
\begin{aligned}
&MinC = 40X_{11} + 43X_{12} + 40X_{13} + 38X_{14} + 45X_{15} \\
&+ 37X_{21} + 40X_{22} + 41X_{23} + 44X_{24} + 36X_{25} \\
&+ 40X_{31} + 42X_{32} + 39X_{33} + 37X_{34} + 38X_{35} \\
&+ 45X_{41} + 40X_{42} + 39X_{43} + 40X_{44} + 42X_{45} \\
&0X_{51} + 0X_{52} + 0X_{53} + 0X_{54} + 0X_{55}
\end{aligned}
$$

Restrições

S.a. 1 = Cada centro populacional Pi só pode ser servido por um centro de saúde Sj.

S.a. 2 = Cada centro de saúde Sj só pode ser servir um centro populacional Pi.

Xij pertencem ao intervalo de 0,1 i = 1, ... 5; j + 1, ... 5 – Variáveis binarias

$$
s.a1\begin{cases}
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 1 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 1 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 1 \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 1 \\
X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} = 1 \\
X_{ij} \geq 0
\end{cases} \text{Restrição de Centro populacional}
$$

$$
s.a2\begin{cases}
X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 1 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 1 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 1 \\
X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 1 \\
X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 1 \\
X_{ij} \geq 0
\end{cases} \text{Restrição de Centro de Saúde}
$$

Exemplo 6: Problema de Transporte

A Empresa GWAPYACITUA, SA tem negócios em diversos países Africanos como Angola, Moçambique, Cabo Verde, São Tomé, Ruanda e África do Sul. A sua actividade de trading traduz-se na compra de medicamento em Laboratórios Europeus, nomeadamente: na

Holanda, Italia, Belgica e também em Portugal, e sua venda nos países africanos mencionados.

No próximo mês, a GWAPYACITUA, SA terá de fazer um planeamento mais cuidado das encomendas de um kit de primeiros socorros para todos os países mencionados, uma vez que surgiu inesperadamente uma certa falta de oferta do mesmo produto nos laboratórios onde normalmente se abastece. A empresa pretende portanto decidir onde encomendar e par aonde enviar esse produto, tendo como objectivo principal a máxima poupança de custos de transporte e expedição do produto de uns países de origens para os países de destino.

O quadro que se segue apresenta os custos de transporte e expedição por contentor enviado para todos os caminhos alternativos, bem como as disponibilidades de cada laboratório para o próximo mês, e as necessidades de cada mercado cliente, *confira tabela 4 abaixo*.

Tabela 4: Relação de disponibilidades de cada laboratório e as necessidades de cada mercado cliente

	África do Sul	Angola	Cabo Verde	Moçambique	São Tomé	Ruanda	Disponibilidade
Holanda	300	350	450	250	500	300	20
Bélgica	200	250	350	200	400	350	15
Itália	450	300	450	400	560	250	20
Portugal	350	250	400	300	200	500	5
Necessidades	15	15	5	10	5	15	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Pretende-se que o aluno que é gestor da Kuhanha, apresente o modelo de PL que permita obter a máxima poupança de custos de transporte.

Solução:

Passo 1: Definição de variável de decisão:

- Xij – representa a quantidade transportada de cada origem (país i) para cada ponto de destino (país j).
- Xij – quantidade de kits a expedir do país i para o país j

(i=1,2,3,4; j=1,2,3,4,5,6)

Passo 2: Função Objectivo

Pretende-se obter a máxima poupança nos custos de transportes ou seja minimizar os custos de transportes.

$$MinC = 300X_{11} + 350X_{12} + ... + 300X_{44} + 300X_{45} + 300X_{46}$$

Passo 3: Restrições

Representam os limites máximos que cada país europeu pode oferecer, bem como os limites mínimos que cada país de destino deseja adquirir. No entanto, existem 4 restrições de oferta e 6 restrições de procura.

Restrições de oferta (capacidade em número de contentores)

$$s.a \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 20 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{23} \leq 15 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{35} \leq 20 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} \leq 5 \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Restrições da procura (necessidades em número de contentores)

$$s.a \begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \geq 15 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \geq 15 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \geq 5 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} \geq 10 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} \geq 5 \\ X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} \geq 15 \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

O modelo matemático de PL completo fica:

Xij – quantidade de kits a expedir do país i para o país j (i=1,2,3,4; j=1,2,3,4,5,6)

Min. Custos totais de expedição e transporte =

$$= 300X_{11} + 350X_{12} + ... + 300X_{44} + 300X_{45} + 300X_{46}$$

$$s.a\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}+X_{15}+X_{16}\leq 20 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}+X_{25}+X_{23}\leq 15 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}+X_{35}+X_{35}\leq 20 \\ X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}+X_{45}+X_{46}\leq 5 \\ X_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

Restrição de Oferta

$$s.a\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}\geq 15 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}\geq 15 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}\geq 5 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}\geq 10 \\ X_{15}+X_{25}+X_{35}+X_{45}\geq 5 \\ X_{16}+X_{26}+X_{36}+X_{46}\geq 15 \\ X_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

Restrição de Procura

Contudo, este não seria o modelo adequado para o problema, pelo facto de a oferta ser igual a 60 kits de medicamentos enquanto que a procura são 65 kits de medicamentos. Logo há escassez de oferta de 5 kits medicamentos. Então para resolver este problema seria necessário criar uma oferta fictícia de 5 kits que não iria afectar em nada os custos de transporte. Essa oferta passaria pela criação de duas origens fictícias para oferecerem os 5kits (por exemplo de forma aleatória a primeira origem pode oferecer 3 e a outra duas por forma a igualar a oferta e a procura, transformando o modelo para:

- Xij – quantidade de kits a expedir do país i para o país j (i=1,2,3,4, 5, 6; j=1,2,3,4,5,6)

Tabela 5: Relação de quantidades de kits a expedir dum País para outro

	África do Sul	Angola	Cabo Verde	Moçambique	São Tomé	Ruanda	Disponibilidade
Holanda	300	350	450	250	500	300	20
Bélgica	200	250	350	200	400	350	15
Itália	450	300	450	400	560	250	20
Portugal	350	250	400	300	200	500	5
Necessidades	15	15	5	10	5	15	60 / 65

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Pelo que, o modelo aplicável seria dado pela *tabela 6 seguinte*:

Tabela 6: Modelo aplicável

	África do Sul	Angola	Cabo Verde	Moçambique	São Tomé	Ruanda	Disponibilidade
Holanda	300	350	450	250	500	300	20
Bélgica	200	250	350	200	400	350	15
Itália	450	300	450	400	560	250	20
Portugal	350	250	400	300	200	500	5
F	-	-	-	-	-	-	5
Necessidades	15	15	5	10	5	15	65 / 65

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Na tabela consta uma nova linha que representa a oferta fictícia (F) com um total de 5 unidades para completar a disponibilidade. Os custos atribuídos são Nulos. A resolução deste algoritmo será efectuada numa unidade a posterior.

O modelo final de transporte será:

Min. Custos totais de expedição e transporte =

$$= 300X_{11} + 350X_{12} + ... + 300X_{44} + 300X_{45} + 300X_{46} + 0X_{51} + 0X_{52} + 0X_{53} + 0X_{54} + 0X_{55} + 0X_{56}$$

$$s.a \begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \le 20 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{23} \le 15 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{35} \le 20 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} \le 5 \\ X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{56} + X_{56} \le 5 \\ X_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Restrição de Oferta

$$s.a \begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} \ge 15 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} \ge 15 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} \ge 5 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} \ge 10 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} \ge 5 \\ X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} \ge 15 \\ X_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

Como pode-se ver, à função objectivo foram acrescidas as variáveis X_{ij} multiplicadas por zero. Nas restrições de Oferta foi acrescida uma linha e na de procura (ou necesidades) uma coluna com as variáveis X_{ij} com i = 1, ..., 6 e j=1,...,6.

Sumário

Nesta **Unidade** temática 1.2 foram apresentados diversos conceitos relacionados com a programação linear. Como vimos a programação linear é um método utilizado em diversos campos do conhecimento para resolver problemas de optimização. Para análise de qualquer problema de PL, o aluno deve verificar se estão patentes nele três elementos básicos: a variável de decisão, o objectivo e a restrição. O objectiovo representa aquilo que se pretende alcançar, que pode ser o lucro máximo ou custo mínimo. As variáveis de decisão representam as quantidades ou o plano de produção que nos leva ao lucro máximo ou custo mínimo num problema de produção. As restrições, como é de conhecimento do caro aluno, representam as limitações de recursos para a produção, uma vez que sabemos da economia que os recursos são escasos.

Um problema de programação linear é bastante útil tendo em conta que é uma simplificação de um problema real da vida. Nele podemos efectuar alterações de variáveis, recursos técnicos para verificar o seu impacto sobre o objectivo.

Mas também apresenta incovenientes relacionados a tal simplicidade do modelo pelo facto de existirem incertezas sobre os resultados finais caso alterem as variáveis de decisão, disponibilidades de recursos ou os coeficientes técnicos.

É inegável que a PL apesar dos incovenientes que apresenta, possui enorme utilidade na solução de problemas complexos de optimização. Permite representar de forma adaptada à realidade económica as várias aplicações da PL. Ela é aplicada à área de produção, Distribuição, Marketing, Recursos Humanos, Finanças, etc.

Nesta unidade Temática discutimos os pressupostos para a formulação de um problema de PL que parte da definição do problema até a implementação da solução do modelo.

Na parte final foram apresentados diversos problemas de PL para diversas áreas de actividades. São exemplos práticos de aplicação na área de produção geral, Misturas, Dietas, Investimentos, Transportes e Afectação.

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

GRUPO-1 – **Questões Teóricas**

1. Discuta a origem do termo Investigação Operacional e diferencie da Programação Linear e explique a importancia da mesma nas organizações.
2. “**A Programação Linear é um instrumento que auxilia os gestores a tomarem decisões nas organizações*”.*** Explique como IO alcança o objectivo supra.
3. Explique a importância da programação linear nas organizações. Que tipo de problemas são tratados na programação linear? Dê exemplo e explique a diferença entre 4 problemas típicos.
4. Refira-se as razões da utilidade da PL, e diga quais os principais inconvênientes que apresenta.
5. Refira-se aos principais métodos estudados de resolução dos problemas de PL.
6. Enumere os principais tipos de restrições que estudou na IO, e diga qual é a diferença que existe entre 4 deles, dando exemplo da aplicação prática nos problemas tipicos estudados.
7. Diferencia os aspectos relevantes na formulação dos problemas de transporte, dos problemas de afectação, no que concerne: restrições e objectivo do decisor.
8. Refira-se aos principais métodos estudados de resolução dos problemas de PL.
9. Discuta os principais pressupostos da PL.
10. Diga qual foi o primeiro problema e o primeiro método empregue para resolução? Indique adicionalmente o nome do cientista e o

ano em causa.

11. Diferencie os problemas de produção geral dos problemas de produção sequencial.

GRUPO-2 – **Questões de Formulação de Problemas**

1. Uma empresa de betoneiras fabrica dois modelos numa fábrica que está dividida em duas secções: secção 1 onde se efectua o trabalho de montagem, e secção 2 onde se realizam as operações de acabamento. A secção 1 exige 5 dias de trabalho por betoneira grande e 2 por betoneira pequena e a secção 2 exige 3 dias de trabalho para qualquer betoneira. Em virtude das limitações de pessoal e máquinas, a secção 1 só pode dispor de 180 dias de trabalho por ano e a secção 2 de 135 dias. Se a empresa obtém um lucro de 90 contos por betoneira grande e 60 contos por betoneira pequena. Quantas betoneiras de cada tipo devem produzir por semana para maximizar o seu lucro?
2. A Empresa Macelular 2, SA produtora de equipamentos Celulares firmou um em que se compromete a fornecer a um cliente 1.000 unidades de Celulares 4G. Actualmente (final de dezembro 2011) dispõe em armazém 50 unidades deste tipo de celulares. O fornecimento das mil unidades deve obedecer ao seguinte calendário: Janeiro: 200 Unidades, Fevereiro: 300 unidades e Marco 500 unidades. A capacidade máxima de armazenamento é de 500 unidades. A produção mensal pode ser feita em horário normal e num turno suplementar. O custo de produção de cada unidade é de 30 U.I. em horário normal e de 60 U.M. em horário suplementar. Em horário normal a firma pode produzir até 200 unidades. Em horário suplementar pode produzir mas 200 unidades. Formule o problema de P.L. que permite planificar a produção, de forma, a obter o melhor resultado econômico possível.
3. A Empresa Macelular 2, SA produtora de equipamentos Celulares

firmou um em que se compromete a fornecer a um cliente 1.000 unidades de Celulares 4G. Actualmente (final de dezembro 2011) dispõe em armazém 50 unidades deste tipo de celulares. O fornecimento das mil unidades deve obedecer ao seguinte calendário: Janeiro: 200 Unidades, Fevereiro: 300 unidades e Marco 500 unidades. A capacidade máxima de armazenamento é de 500 unidades. A produção mensal pode ser feita em horário normal e num turno suplementar. O custo de produção de cada unidade é de 30 U.I. em horário normal e de 60 U.M. em horário suplementar. Em horário normal a firma pode produzir até 200 unidades. Em horário suplementar pode produzir mas 200 unidades. Formule o problema de P.L. que permite planificar a produção, de forma, a obter o melhor resultado econômico possível.

4. A Associação dos trabalhadores do Conselho Municipal de Maputo quer organizar os campos de férias de verão da sua Colónia de Férias localizada na Praia de Bilene em Gaza e estão a seleccionar os grupos de criança que serão inseridas em cada um dos 5 campos planeados. A primeira fase do processo, que consiste em constituir os grupos para cada campo, já foi concluida. Cada um desses grupos inclui crianças com afinidades a nível da idade, perfil intelectual, expêriencia passada, conhecimentos de línguas e interesses pessoais. Assim, nasceu o grupo de Juniores, o dos Internacionais, o dos Campistas, o dos Desportistas e finalmente dos Aventureiros. Numa segunda fase do processo criou-se um indice de afectação que mede o grau de satisfaçào estimado de cada grupo em cada um dos 5 campos. Esse índice teve em conta, quer um questionário aos participantes para que eles pudessem revelar os seus interesses e desejos, quer uma análise que comparava o perfil de cada agrupo com os programas de actividades dos campos, sua localização, duração e perfil da equipe organizadora. O quadro que se segue, traduz exactamente os

valores do indice de afectação que se encontraram:

Tabela 7: Valores do índice de afectação

Índice de afectação	Campo A	Campo B	Campo C	Campo D	Campo E
Júniores	5	7	3	9	8
Internacionais	3	6	6	4	7
Campistas	6	2	6	4	5
Desportistas	5	5	4	7	6
Aventureiros	3	2	1	6	4

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Pretende-se que o discente, que é gestor da Associação dos trabalhadores do Conselho Municipal de Maputo, elabore o modelo de programação linear que melhor espelhe a realidade.

Trabalho

1. A companhia TYTTAYUMA, SA especializada na montagem de celulares 4G, usa dois modelos para a montagem. O modelo actual digital e o modelo anterior com acessório. Cada empregado no modelo actual requer hora de trabalho se vier do departamento de pesquisa e 3 horas se vir do departamento de desenvolvimento. No modelo antigo, cada empregado necessita de 2 horas de trabalho, se vier do departamento de pesquisa e 4 horas de trabalho se for do desenvolvimento. O número máximo de horas de trabalho por dia para o departamento de pesquisa e de desenvolvimento é de 32 e 84, respectivamente. Se a organização recebe um lucro de 50 unidades monetárias (U.M.) por cada celular do modelo actual e 80 U.M. do anterior modelo. Quantos celulares devem ser produzidos por dia em cada modelo de modo a organização maximizar o lucro diário?

Tabela 8: Relação nominal de celulares que devem ser produzidos por dia

Departamento de:	Hora de trabalho por pessoa no Actual Modelo	Hora de trabalho por pessoa no Anterior Modelo	Número máximo de horas de trabalho
Pesquisa	1	2	32
Desenvolvimento	3	4	84
Lucro	50	80	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2. Uma estilista tem disponível 16 m^2 de algodão, 11 m^2 de seda e 15 m^2 de lã. A confecção de uma calça feminina "Garrafa" necessita de 2 m2 de algodão, 1 m2 de seda e 1 m2 de lã e uma calça feminina "Tchuna-Baby" gasta 1,2,e 3 m2 dos mesmos tecidos, respectivamente. Se a "Garrafa" é vendida a 30 Mt e a "Tchuna-Baby" a 50 Mt, quantas quantidades de cada tipo de artigo deve o estilista confeccionar de modo a obter maior lucro?

UNIDADE Temática 1.3. EXERCÍCIOS deste tema.

Exercícios de AVALIAÇÃO – 2:

1 – **"A investigação Operacional actua em diferentes áreas nas organizações"**. Explique 3 das principais áreas de actuação da Investigação Operacional e dê exemplo para cada caso.

2 – Explique de forma sumária os principais passos da Investigação Operacional. E qual é a relação que se estabelece entre os passos e as caracteristicas da IO?

3 - Diga qual foi o primeiro problema e o primeiro método empregue para resolução? Indique adicionalmente o nome do cientista e o ano em causa.

4 – Uma empresa de betoneiras fabrica dois modelos numa fábrica que está dividida em duas secções: secção 1 onde se efectua o trabalho de montagem, e secção 2 onde se realizam as operações de acabamento. A secção 1 exige 5 dias de trabalho por betoneira grande e 2 por betoneira pequena e a secção 2 exige 3 dias de trabalho para

qualquer betoneira. Em virtude das limitações de pessoal e máquinas, a secção 1 só pode dispor de 180 dias de trabalho por ano e a secção 2 de 135 dias. Se a empresa obtém um lucro de 90 contos por betoneira grande e 60 contos por betoneira pequena. Quantas betoneiras de cada tipo devem produzir por semana para maximizar o seu lucro?

5 – A Empresa Macelular 2, SA produtora de equipamentos Celulares firmou um em que se compromete a fornecer a um cliente 1.000 unidades de Celulares 4G. Actualmente (final de dezembro 2011) dispõe em armazém 50 unidades deste tipo de celulares. O fornecimento das mil unidades deve obedecer ao seguinte calendário: Janeiro: 200 Unidades, Fevereiro: 300 unidades e Marco 500 unidades. A capacidade máxima de armazenamento é de 500 unidades.

A produção mensal pode ser feita em horário normal e num turno suplementar. O custo de produção de cada unidade é de 30 U.I. em horário normal e de 60 U.M. em horário suplementar. Em horário normal a firma pode produzir até 200 unidades. Em horário suplementar pode produzir mas 200 unidades. Formule o problema de P.L. que permite planificar a produção, de forma, a obter o melhor resultado econômico possível.

6 – A Empresa Macelular 2, SA produtora de equipamentos Celulares firmou um em que se compromete a fornecer a um cliente 1.000 unidades de Celulares 4G. Actualmente (final de dezembro 2011) dispõe em armazém 50 unidades deste tipo de celulares. O fornecimento das mil unidades deve obedecer ao seguinte calendário: Janeiro: 200 Unidades, Fevereiro: 300 unidades e Marco 500 unidades. A capacidade máxima de armazenamento é de 500 unidades. A produção mensal pode ser feita em horário normal e num turno suplementar. O custo de produção de cada unidade é de 30 U.I. em horário normal e de 60 U.M. em horário suplementar. Em horário normal a firma pode produzir até 200 unidades. Em horário suplementar pode produzir mas 200 unidades. Formule o problema de P.L. que permite planificar a produção, de forma, a obter o melhor

resultado econômico possível.

TEMA II: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

UNIDADE Temática 2.1. Método Gráfico

UNIDADE Temática 2.2. Método Simplex

UNIDADE Temática 2.3. Métodos com Variáveis Artificiais

UNIDADE Temática 2.4. Método de Transporte

UNIDADE Temática 2.5. Método de Afectaçao

UNIDADE Temática 2.6. EXERCÍCIOS deste tema

Introdução

Nesta unidade temática vamos fornecer aos alunos o instrumental matemático para se resolver os diferentes tipos de problemas de programação linear nas organizações e explicar as diferenças, vantagens e desvantagens dos métodos matemáticos;

Para resolução dos problemas de programação linear, os economistas, gestores e matemáticos, consideram os seguintes métodos:

- Método Gráfico;
- Algoritmo do Simplex
- Método BIG M
- Método Duas Fases
- Algoritmo Dual-Simplex
- Programas Informáticos.

Não existe uma regra que indique qual a melhor técnica a ser utilizada para resolver determinado problema. A escolha deverá ser feita de modo intuitivo. Diversas técnicas diferentes podem resolver um mesmo problema.

- Ex. Se não tivermos acesso a um algoritmo específico para resolver um problema de transporte, podemos resolver o problema de PL empregando macro-programas computacionais.
- Ex.2. Um problema de fila de espera pode ser resolvido de modo menos elegante por meio de simulação estocástica.

Contudo, na presente unidade temática interessa-nos analisar **o método gráfico,** o **algoritmo do simplex, O BIG – M, o método de Duas Fases e o algoritmo Dual Simplex**.

UNIDADE Temática 2.1: Método Gráfico

Mulenga (2005:12), diz que o método gráfico pode ser aplicado para a resolução de problemas de programação linear de forma eficiente, apenas quando a função objectivo e o conjunto das restrições tiver duas variáveis de decisão.

O método gráfico consiste em construir através das restrições um conjunto das soluções possíveis e tomar como solução óptima, aquela que satisfaz o objectivo do decisor, que neste caso pode ser de maximizar ou minimizar.

Passos do método gráfico

O método gráfico segue os seguintes passos:

1. Admitir que as **inequações do sistema** representam **equações**, isto é converter as restrições da procura ou oferta em **restrições de equilíbrio**);
2. Enumerar as equações de equilíbrio, para depois encontrar os pontos extremos de cada uma das equações e representar graficamente, as coordenadas encontradas.
3. Depois de representar graficamente as restrições de equilíbrio, deve-se ir as restrições iniciais da procura e/ ou oferta, para

excluir a área que não pertença a solução;

4. Face a exclusão, termos um leque de coordenadas que toma o nome de soluções admissíveis;

5. Na posse das soluções admissíveis, substituímos o valor de cada uma das coordenadas na função objectivo, e dependendo do **objectivo do decisor**, termos a solução óptima que deverá satisfazer o objectivo definido inicialmente na função objectivo (maximizar ou minimizar).

Principais Teoremas de Programação Linear

Mulenga (2005:19), considera 2 teoremas essenciais que ajudam a entender o método gráfico na resolução de problemas de PL:

1º Teorema 1 – teorema fundamental da programação linear, segundo o qual, só existe valor óptimo na função objectivo num problema de PL, se a solução óptima ocorre em pelo menos um dos pontos extremos na região das soluções admissíveis. Isso significa que, obrigatoriamente, sempre a solução óptima deverá fazer parte da área da região das soluções admissíveis, caso contrário, ela não será óptima.

2º Teorema 2 – Teorema de existência da solução, segundo o qual, um dado problema de PL, e K o conjunto de soluções admissíveis da função objectivo ($Z=C_1X_1 +C_2X_2$), pode-se tirar as seguintes ilações:

- ✓ Se K é uma área fechada, então existe um máximo e um mínimo para o objectivo do decisor;
- ✓ Se K é uma região não fechada, e os coeficientes económicos do problema de PL apresentam valores maiores que zero, então existirá apenas um mínima do objectivo do decisor e não existe o ponto máximo sobre K.
- ✓ Se K é um conjunto vazio, ou seja não existe soluções admissíveis, então não deverá existir nem máximo e nem mínimo que satisfará o objectivo do decisor.

Tipos de Soluções do Método Gráfico

No Método Gráfico podemos encontrar variedade de soluções, como se segue:

I. Solução Impossível, se as restrições não se cruzam em nenhum ponto; Ex:. Caso de rectas paralelas; Caso de área aberta em ambos os lados, sem limite inferior e nem superior;
II. Solução Óptima alternativa, quando, todo o primeiro quadrante positivo, havendo uma limitação ao redor de toda a área admissível;
III. Solução óptima com infinitas soluções básicas, quando apenas existe um limite inferior, e não existe limite superior na área das soluções admissíveis;
IV. Solução óptima não limitada, quando par além de existir o limite inferior, não existe o limite superior, e temos restrições em forma de constante.
V. Solução óptima, quando as rectas se cruzam ou quando há área de soluções admissíveis encontra-se toda ela limitada.

Vantagens e Desvantagens do Método Gráfico

Uma das grandes **vantagens** do método gráfico, está ligado ao facto de possibilitar obter de forma eficiente e rápida a solução e melhor visualizar o problema concreto em estudo.

Contudo ela apresenta **as desvantagens** de não poder ser empregue para resolução de problemas com mais de duas variáveis de decisão, e ser bastante trabalhoso nos casos em que se tem mais de duas restrições.

Em suma, a resolução dos problemas de PL pelo método gráfico obedece os seguintes passos:

- **1º Passo:** Destacar e colocar numa tabela as informações relevantes;
- **2º Passo:** escrever o modelo matemático do problema usando a sequência:
  - ✓ Escrever a função objectivo e introduzir as variáveis de decisão,
  - ✓ Escrever as restrições do problema,
- **3º Passo:** representar num gráfico o conjunto solução. Segundo teorema 2 se existe solução, calcular as coordenadas do ponto extremo;
- **4º Passo:** usando as coordenadas do ponto 3, calcular o valor da função objectivo;
- **5º Passo:** interpretar a solução óptima, em função do problema original.

Exemplos práticos

Exemplo 1: Dado seguinte PPL, Resolva-o pelo Método gráfico e apresente todos passos que o levam a encontrar a solução do mesmo.

$$MinZ = X_1 + 2X_2$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 3 \longrightarrow \boxed{R1} \\ 5X_1 + 8X_2 \leq 40 \longrightarrow \boxed{R2} \\ -X_1 + X_2 \leq 0 \longrightarrow \boxed{R3} \\ X_2 \geq 1 \longrightarrow \boxed{R4} \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução: Neste problema temos 4 restrições. Para resolver este problema temos que detrminar os pontos extremos de cada restrição. Então transformamos as desigualdades em igualdades como segue:

R1: $X_1+X_2=3$
X1=0; X2= 3
X1=3; X2=0

R2: 5X1+8X2=40
X1=0; X2= 5
X1=8; X2= 8

R3: -X1+X2=0→ X1 = X2. É uma recta que passa da origem.

R4: X2=1 – É uma recta paralela à recta das abcissas.

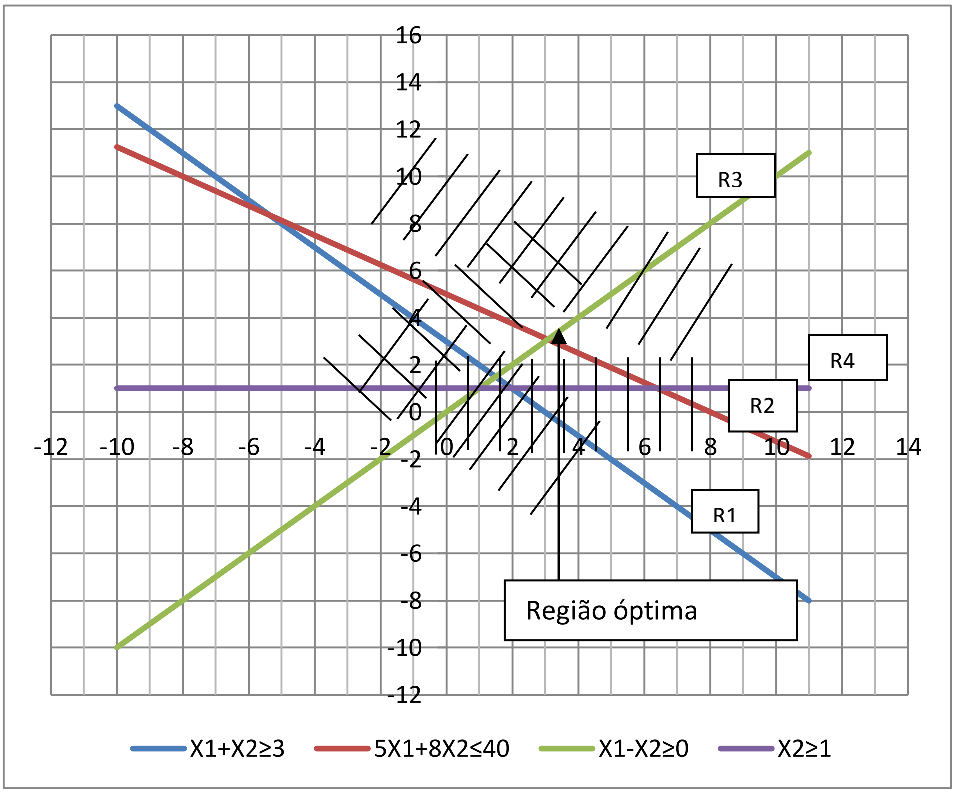
Na recta 1, se admitirmos que X_1 = 0, X_2 será igual a 3. O mesmo acontece se $X_2 = 0$, X_1 será igual a 3. Aplicamos o mesmo procedimento às restantes rectas. No caso da recta 3, temos uma recta que passa da origem das abcissas.

Para encontrar a solução verificamos o sinal de desigualdade que nos é apresentado. Por exemplo a R1, tem o sinal "≥", pelo que a região admissível de soluções estará a direita da recta, razão pela qual excluimos a parte esquerda do gráfico pelo tracejado apresentado à esquerda.

A recta 2 tem um sinal de desiguladade "≤", pelo que excluimos o lado esquerdo do gráfico pelo tracejado. A região válida será a parte direita.

A recta 3 passa pela origem e cada valor de X_1 vai corresponder ao valor de X_2. Por exemplo, se X_1 for igual a 2, X_2 também será igual a 2.

Gráfico 1: A região óptima



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Determinação do ponto óptimo

Para se determinar o ponto óptimo, calculamos as intersessões das rectas na região admissível ou óptima para encontar as coordenadas de cada ponto. Assim teremos 4 pontos:

Ponto A: R1∩R3

Ponto B: R1∩ R4

Ponto C: R2∩ R4

Ponto D: R2∩ R3

Vamos calcular os pontos:

Ponto A: R1∩R3

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ -X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

Temos aqui um sistema de equações que pode ser resolvido por diferentes métodos à escolha do aluno. Pressupõe-se aqui que o aluno tem conhecimentos básicos de matemática para resolver sistemas de equações lineares de 2 variáveis. Aplicamos o método de substituição como se segue:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ -X_1 + X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ X_1 = X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 + X_2 = 3 \\ X_1 = X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X_2 = 3 \\ X_1 = X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \dfrac{3}{2} \\ X_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ponto B: R1∩ R4

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 3 \\ X_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + 1 = 3 \\ X_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 3 - 1 \\ X_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = 1 \end{cases}$$

Ponto C: R2∩ R4

$$\begin{cases} 5X_1 + 8X_2 = 40 \\ X_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5X_1 + 8*1 = 40 \\ X_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5X_1 = 40 - 8 \\ X_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{32}{5} \\ X_2 = 1 \end{cases}$$

Pode-se dividir o valor de X1 e obter um decimal.

Ponto D: R2∩ R3

$$\begin{cases} 5X_1 + 8X_2 = 40 \\ -X_1 + X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 5X_1 + 8X_2 = 40 \\ -5X_1 + 5X_2 = 0 \end{cases} \\ \hline 0 + 13X_2 = 40 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \dfrac{40}{13} \\ X_1 = \dfrac{40}{13} \end{cases}$$

Para resolução simplificada do problema multiplicamos a segunda equação por 5 e obtemos o primeiro elemento do sistema simétrico.

Após multiplicação adicionamos as duas restrições considerando cada parcela da equação. Por exemplo, 5X1+(-5X1)=0 porque são simétricos, enquanto na segunda parcela, 8X2+5X2=13X2. No segundo membro adicionamos 40+0=40. Assim, ficamos com a equação 13X2=40. Esta é fácil de ser resolvida.

Solução Óptima:

Existem várias formas de encontrar a solução óptima, no entanto iremos utilizar o método de resolução analítica e do gradiente.

- **Método de Resolução Analítico**

  Para cada ponto substituimos as coordenadas dos pontos na função objectivo. Se o problema é de maximização a solução será dada pelo maior valor obtido. Na minimização escolhe-se o menor valor.

  Função Objectivo: $MinZ = X_1 + 2X_2$

  Ponto A: $MinZ = \frac{3}{2} + 2 * \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

  Ponto B: $MinZ = 2 + 2*1 = 4$ ← Ponto óptimo

  Ponto C: $MinZ = \frac{32}{5} + 2*1 = 8.4$

  Ponto D: $MinZ = \frac{40}{13} + 2 * \frac{40}{13} = \frac{120}{13} = 9.2$

Exemplo 2:

Uma empresa de mobiliário de escritório pretende lançar um modelo de secretárias e estantes. Pensa-se que o mercado pode absorver toda a produção de estantes, mas aconselha-se que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades. Ambos os produtos são processados nas unidades de estampagem (UE) e de montagem e acabamento (UMA).

A disponibilidade mensal em cada uma destas unidades é de 720 horas−máquina (h−m) na UE e 880 horas−homem (h−h) na UMA. Cada secretária necessita de 2h−m na UE e de 4 h−h na UMA. Cada estante necessita de 4 h−m na UE e de 4 h−h na UMA. As margens de lucro unitárias estimadas são de 6 contos para as secretárias e de 3 contos para as estantes.

Qual o plano de produção mensal para as secretárias e estantes que maximiza a margem de lucro?

Formulação do problema:

Variáveis de decisão:

- quantidade de secretárias a produzir por mês (X_1)
- quantidade de estantes a produzir por mês (X_2)

Função objectivo:

- maximizar a margem bruta total por mês ($Z = 6X_1 + 3X_2$)

Restrições:

- disponibilidade mensal na unidade de estampagem
- disponibilidade mensal na unidade de montagem e acabamento
- produção mensal de secretárias

$$MaxZ = 6X_1 + 3X_2$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \le 720 & \leftarrow \boxed{\text{R1}} \\ 4X_1 + 4X_2 \le 880 & \leftarrow \boxed{\text{R2}} \\ X_1 \le 160 & \leftarrow \boxed{\text{R3}} \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

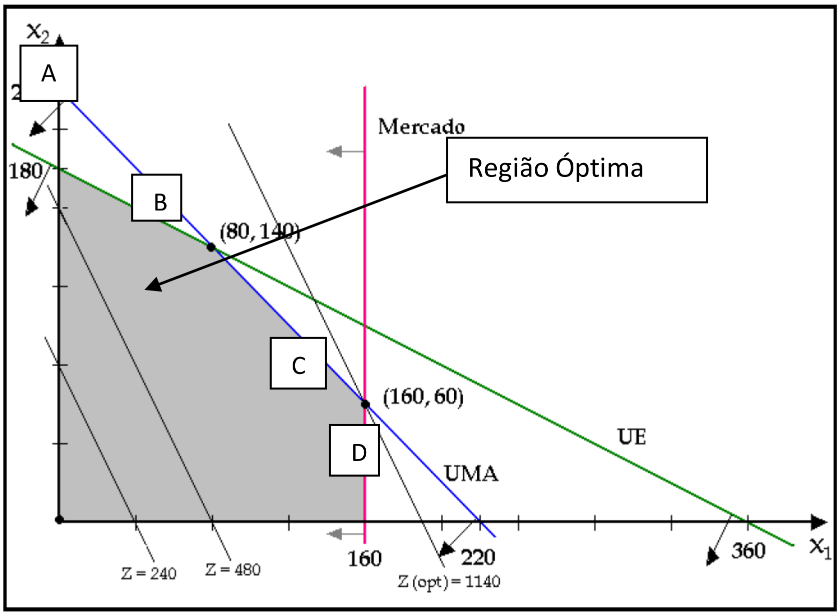
Cálculo dos Pontos Extremos

Recta 1: $2X_1 + 4X_2 = 720$, Se X_1=0; X_2 = 180. Se X_2 = 0; X_1 =360.

Recta 2: $4X_1 + 4X_2 = 880$, Se X_1 = 0; X_2 = 220. Se X_2 = 0; X_1 = 220

Recta 3: $X_1 = 160$;

Gráfico 2: Determinação do ponto óptimo



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Neste caso a região óptima é constituída pela zona sombreada. Sendo assim é necessário determinar os valor dos pontos extremos da região óptima.

- **Ponto A**: (0;180) – No ponto A sabe-se que a abcissa é nula e ordenada é 180.
- **Ponto B**: R1∩R2 – Neste caso temos intercessão das rectas 1 e 2. Assim, devemos resolver o sistema com as duas rectas, pelo método acharmos conveniente.
- **Ponto C**: R2∩R3 – aqui temos a intercessão da recta 2 e 3. Resolvemos nos mesmos moldes do ponto B
- **Ponto D**: (160;0) – esta é uma situação identica ao ponto A, temos abcissa 160 e ordenada 0.

Passamos assim a resolver os sistemas de equações para os pontos B e C como se segue:

Ponto B: R1∩R2 - $\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 = 720 \\ 4X_1 + 4X_2 = 880 \end{cases}$

Neste caso temos facilidades de anular a parcela de X_2 porque tem elementos que podem ser simétricos, multiplicando a 2ª equação por (-1). Assim teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 = 720 \\ -4X_1 - 4X_2 = -880 \end{cases}$$

Adicionando os dois sistemas teremos:

$$-2X_1 = -160 \Rightarrow X_1 = \frac{-160}{-2} = 80$$

Pegamos no valor de $X_1=80$ e substituimos em qualquer uma das equações do sistema onde temos X_1 e resolvemos a equação para encontrar X_2. Utilizemos a 1ª equação como se segue:

$$2X_1 + 4X_2 = 720 \Rightarrow 2*80 + 4X_2 = 720 \Rightarrow 160 + 4X_2 = 720$$

$$\Rightarrow 4X_2 = 720 - 160 \Rightarrow 4X_2 = 560 \Rightarrow X_2 = \frac{560}{4} = 140$$

Neste caso a solução do Sistema será: $\begin{cases} X_1 = 80 \\ X_2 = 140 \end{cases}$. Ponto B: (80;140)

Ponto C: R2∩R3

$$\begin{cases} 4X_1 + 4X_2 = 880 \\ X_1 = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4*160 + 4X_2 = 880 \\ X_1 = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 640 + 4X_2 = 880 \\ X_1 = 160 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4X_2 = 240 \\ X_1 = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = 60 \\ X_1 = 160 \end{cases}$$

Assim, a solução do Sistema será: $\begin{cases} X_1 = 160 \\ X_2 = 60 \end{cases}$. Ponto B: (160;60)

Para se encontrar o ponto óptimo, no gráfico foi utilizada a técnica do gradiente, em que foram atribuidos valores aleatórios à função objectivo, como por exemplo, Z = 240. Neste caso foram determinados os pontos de X_1 ou X_2, quando uma das variáveis é nula como fizemos para a construção das rectas.

$Z = 6X_1 + 3X_2)$

$240= 6X_1 + 3X_2$. Se $X_1 = 0$, $X_2 = 80$ e se $X_2 = 0$, $X_1 = 40$. A partir destes dados constroi-se uma recta da função objectivo. Arrasta-se a recta construídas de forma paralela até tocar no último ponto da região óptima no caso de problemas de maximização. Nos problemas de minimização considera-se o primeiro ponto. No gráfico acima, o ponto referido é o C.

Solução óptima do problema: X_{opt} = (160, 60) ⇔ Z_{opt} = 1140.

$$Z_{opt} = 6*160 + 3*60 = 1.140$$

Exemplo 3:

Um criador de porcos, pretende determinar a quantidade de cada tipo de ração a dar diariamente a cada animal, para conseguir uma dada qualidade nutritiva a custo mínimo. Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades destes existentes em cada tipo de ração (g/kg) constam do quadro em baixo.

Tabela 9: Relação de quantidades de cada tipo de racção a dar aos animais

Descrição	Granulado (gr/Kg)	Farinha (gr/Kg)	Quantidade mínima requerida
Hidratos de Carbono	20	50	200
Vitaminas	50	10	150
Proteinas	30	30	210
Custos (MT/Kg)	10	5	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Formulação do problema:

Variáveis de decisão:

- Quantidade (Kg) de granulado existente na ração diária (X_1)
- Quantidade (Kg) de farinha existente na ração diária (X_2)

Função objectivo:

- Minimizar o custo da ração diária ($Z = 10 X_1 + 5 X_2$)

Restrições:

- Quantidade mínima diária de hidratos de carbono
- Quantidade mínima diária de vitaminas
- Quantidade mínima diária de proteínas

Modelação matemática:

Pretende-se determinar X_1 e X_2 de modo a:

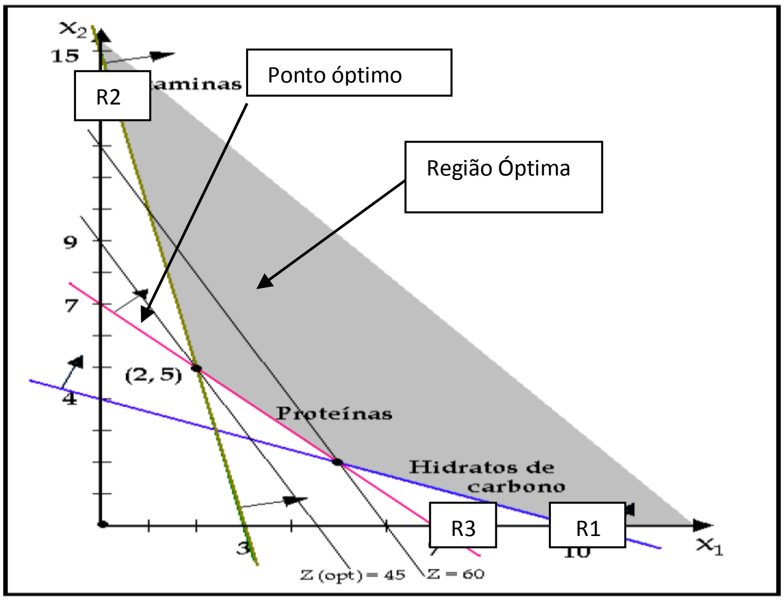
$$MinZ = 10X_1 + 5X_2$$

$$s.a\begin{cases} 20X_1 + 50X_2 \geq 200 \\ 50X_1 + 10X_2 \geq 150 \\ 30X_1 + 30X_2 \geq 210 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução Gráfica:

Aplicando todos os passos considerados acima, chegaremos ao gráfico abaixo. No entanto, este é um problema típico de minimização pelo que a sua região óptima estará no lado esquerdo e na zona sombreada do *gráfico 3*.

Gráfico 3: A localização da região óptima do lado esquerdo



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução óptima do problema: $X_{opt} = (2, 5) \Leftrightarrow Z_{opt} = 45$

$$MinZ = 10*2 + 5*5 = 45$$

Exemplo 4:

As Caravanas Marco Polo L.da. usam dromedários (1 bossa) e camelos (2 bossas) para transportar figos secos de Bagdade para Meca. Um camelo pode levar no máximo 1000 lbs e um dromedário 500 lbs. Durante a viagem um camelo consome 3 fardos de feno e 100 galões de água. Um dromedário consome 4 fardos de feno e 80 galões de água. As estações da Marco Polo, situadas em vário oásis ao longo do caminho, apenas têm disponíveis 1600 galões de água e 60 fardos de feno. Os camelos e os dromedários são alugados a um pastor perto de Bagdade a 11 pazuzas por camelo e 5 pazuzas por dromedário. Se as Caravanas Marco Polo L.da. tiverem uma carga de 10000 lbs de figos para transportar, quantos camelos e dromedários devem ser usados para minimizar a renda a pagar ao pastor?

Formulação do problema:

Variáveis de decisão:

- Quantidade de camelos a usar (X_1)
- Quantidade de dromedários a usar (X_2)

Função objectivo:

- Minimizar a renda a pagar ao pastor ($Z = 11X_1 + 5X_2$)

Restrições:

- Capacidade da caravana
- Disponibilidade de feno
- Disponibilidade de água

Para uma melhor sistematização do problema podemos colocar os dados numa *tabela 10 como se segue*:

Tabela 10: Relação de dados para melhor sistematização

Recursos/Actividades	Produtos		Capacidade disponível
	Camelos	Dromedários	
Capacidade	1,000	500	10,000
Feno	3	4	60
Água	100	80	1,600
Renda a pagar	11	5	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Modelação Matemática

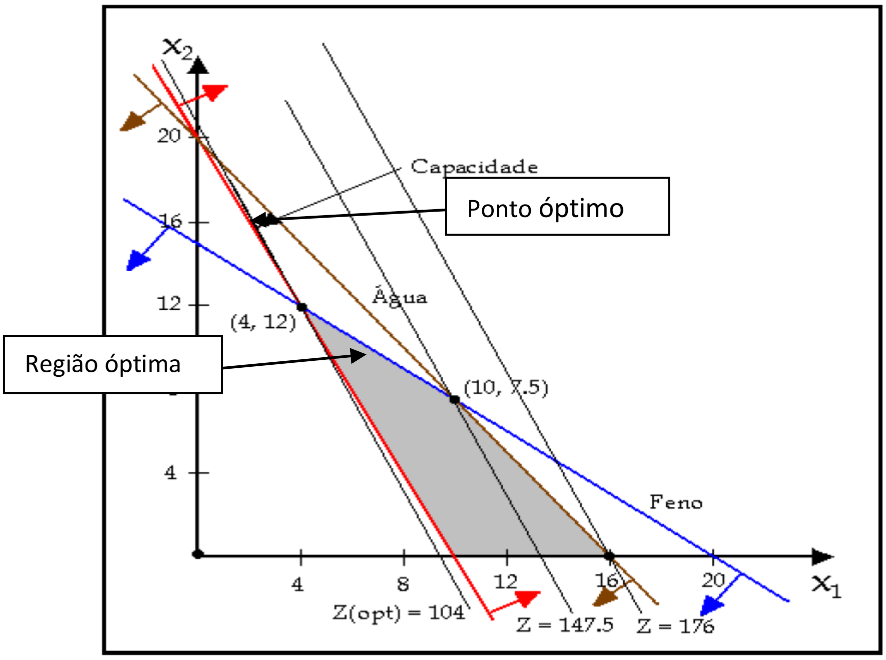
Pretende-se determinar X_1 e X_2 de modo a:

$$MinZ = 11X_1 + 5X_2$$

$$s.a\begin{cases} 1000X_1 + 500X_2 \geq 10000 \\ 3X_1 + 4X_2 \leq 60 \\ 100X_1 + 80X_2 \leq 1600 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução Gráfica:

Gráfico 4: Solução óptima do problema: Xopt = (4, 12) ⇔ Zopt = 104



Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

$$MinZ = 11*4+5*12 = 104$$

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

Grupo 1 – Questões Teóricas

1. Refira-se aos principais métodos estudados de resolução dos problemas de PL.
2. Discuta os procedimentos do método gráfico e diga quando é que o método gráfico deixa de ser recomendável para resolução de problemas de PL?
3. Explique os principais teoremas da determinação de solução óptima pelo método gráfico e diga quais as possíveis soluções que podem resultar.

Grupo 2 – Questões Práticas

1. A companhia YAMALA, SA especializada na montagem de celulares 4G, usa dois modelos para a montagem. O modelo actual digital e

o modelo anterior com acessória. Cada empregado no modelo actual requer hora de trabalho se vier do departamento de pesquisa e 3 horas se vir do departamento de desenvolvimento. No modelo antigo, cada empregado necessita de 2 horas de trabalho, se vier do departamento de pesquisa e 4 horas de trabalho se for do desenvolvimento. O número máximo de horas de trabalho por dia para o departamento de pesquisa e de desenvolvimento é de 32 e 84, respectivamente. Se a organização recebe um lucro de 50 unidades monetárias (U.M.) por cada celular do modelo actual e 80 U.M. do anterior modelo. Quantos celulares devem ser produzidos por dia em cada modelo de modo a organização maximizar o lucro diário?

Tabela 11: Relação nominal do número máximo de horas de trabalho por dia

Departamento de:	Hora de trabalho por pessoa no Actual Modelo	Hora de trabalho por pessoa no Anterior Modelo	Número máximo de horas de trabalho
Pesquisa	1	2	32
Desenvolvimento	3	4	84
Lucro	50	80	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2. Uma empresa de electrónica fabrica dois tipos de circuitos A e B. Os do tipo A são vendidos por 4 euros e os do tipo B por 5 euros.

   No processo produtivo ambos os tipos de circuitos passam por duas máquinas. Na primeira máquina os circuitos são trabalhados durante 4 horas os do tipo A e 5 horas os do tipo B. Na outra máquina os circuitos passam 4 e 3 horas, respectivamente. A primeira máquina pode funcionar durante um máximo de 32 horas, enquanto a outra máquina não pode exceder as 24 horas de funcionamento. A empresa pretende maximizar a receita. Formule matematicamente o problema e resolva-o graficamente. Qual a receita máxima que a empresa pode obter?

3. Devido a alterações de mercado os preços dos produtos A e B referidos no problema anterior caíram para 4 e 3 euros escudos respectivamente. Simultaneamente, modificações no processo produtivo, requeridas por um mais rigoroso controlo de qualidade, levaram à aquisição de uma nova máquina onde tanto o produto A como o produto B sofrem operações com a duração de 1 hora. No entanto, esta máquina não pode funcionar menos de 8 horas semanais. Reformule o problema com as novas condições representando graficamente a região admissível.
4. Uma empresa de betoneiras fabrica dois modelos numa fábrica que está dividida em duas secções: secção 1 onde se efectua o trabalho de montagem, e secção 2 onde se realizam as operações de acabamento. A secção 1 exige 5 dias de trabalho por betoneira grande e 2 por betoneira pequena e a secção 2 exige 3 dias de trabalho para qualquer betoneira. Em virtude das limitações de pessoal e máquinas, a secção 1 só pode dispor de 180 dias de trabalho por ano e a secção 2 de 135 dias. Se a empresa obtém um lucro de 90 contos por betoneira grande e 60 contos por betoneira pequena. Quantas betoneiras de cada tipo devem produzir por semana para maximizar o seu lucro?
5. Uma carpintaria deseja estabelecer um programa diário de produção dos seus artigos. Actualmente, a carpintaria faz apenas dois produtos: mesa e armário, ambos de um só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a carpintaria tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão-de-obra, cujas disponibilidades diárias são 12 m^2 e 8 homens por hora (H.h), respectivamente. O processo de produção é tal que, para fazer 1 mesa a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 H.h de mão-de-obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 3 m^2 de madeira 1 H.h de mão-de-obra. Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá uma margem de contribuição para lucro de 4 u.m, e cada armário, de 1 u.m.

a) Formule o modelo de programação linear que descreve este problema.

b) Usando o método gráfico, resolva o problema do fabricante de modo a encontrar o programa de produção que maximiza a margem de contribuição para lucro.

(***Resp***: $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $Z_{max} = 16$ u.m.)

6. A companhia Cervejas de Moçambique precisa, de 90, 120 e 260 caixas de cerveja de alta, média e baixa qualidades, respectivamente. Existem duas fábricas: a cerveja 2M que produz por dia 10, 30 e 40 caixas de alta, média e baixa qualidades e a cerveja Laurentina que produz por dia 20, 10 e 30 caixas, respectivamente. Se o custo operacional de cada fábrica for de 20 u.m por dia, durante quantos dias deve funcionar cada fábrica de modo a se minimizar o custo e satisfazer as necessidades da companhia. (***Resp***: $x_1 = 5$; $x_2 = 2$; $W_{min} = 140$ u.m)

7. Um paciente num hospital necessita no mínimo de 84 unidades de um medicamento M1, e 120 unidades de outro medicamento M2 por dia. Cada grama da substância A contém 10 unidades da M1 e 8 unidades da M2 e cada grama de substância B contém 2 unidades da M1 e 4 unidades da M2. Se cada grama de A custa 3 u.m e de B custa 1 u.m, quantas gramas de cada substância A e B, que o paciente deve tomar por dia de modo que ele melhore e minimize o seu dinheiro. Qual é o valor mínimo que ele vai gastar por dia. (**Resp:** $x_1 = 4$; $x_2 = 22$; $W_{min} = 34$ u.m)

8. Usando o método gráfico, resolva as seguintes alíneas dos problemas de programação linear.

a)
$$MaxZ = 5X_1 + 5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 \le 10 \\ X_1 + 2X_2 \le 8 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

b)
$$MinW = 10X_1 + 30X_2$$
$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 \ge 16 \\ X_1 + X_2 \ge 12 \\ X_1 + 2X_2 \ge 14 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

(***Resp***: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $Z_{max} = 30$) (***Resp***: $x_1=14$; $x_2=0$; $W_{min} =140$)

c)
$$MaxZ = 40X_1 + 36X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 \le 8 \\ X_2 \ge 10 \\ 5X_1 + 3X_2 \ge 45 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

d)
$$MinW = X_1 + 4X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 - X_2 \le -1 \\ -X_1 + 2X_1 \ge 0 \\ -X_1 + 2X_2 \le 4 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

e)
$$MaxZ = -4X_1 - 3X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \le 1 \\ -X_2 \le -1 \\ -X_1 + 2X_2 \le 1 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

f)
$$MinW = X_1 + 2X_1$$
$$s.a\begin{cases} -X_1 + X_2 = 2 \\ -2X_1 - X_2 \ge -4 \\ X_1 + X_2 \ge 2 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

UNIDADE Temática 2.2: Método Simplex

Introdução

Bronson e Naadimuthu (2001: 39), definem o método simplex, como o procedimento matricial que é utilizado para resolver problemas de programação linear expressos na forma standard.

Optimizar: Z = C^TX

Sujeito a: AX=B

com: X≥0

Esta abordagem não interessa, aos gestores do curso de Investigação Operacional, devido a metodologia que emprega na apresentação e resolução dos problemas de programação linear.

Para resolver os problemas de programação linear, iremos utilizar o conceito de **Oliveira e Correia (1996:28-35),** que da ênfase ao **conceito de optimização linear,** como o conjunto de técnicas matemáticas modernas que permitem resolver os problemas de PL.

Entre estas técnicas encontram-se:

- Algoritmo do Simplex (quando temos mais de duas restrições e não são violadas as condições de não negatividade).
- Duas Fases (consiste em resolver primeiro a Fase 1, um problema

de minimização em que a função objectivo é a soma das variáveis artificiais, e as restrições são as mesmas).

- BIG M (que consiste em introduzir as variáveis artificiais na função objectivo multiplicadas por coeficientes de tal modo grandes que garantam o anulamento destas variáveis).

O algoritmo simplex foi desenvolvido por Dantzig (1947) e é um método prático de resolução de problemas de programação linear.

Nos anos subsequentes, o próprio Dantzig e outros matemáticos foram aperfeiçoando-o visando torná-lo mais eficiente sob ponto de vista computacional. Estas melhorias não mudaram a sua essência, embora novos métodos tenham surgindo no final da década 80. O método simplex continua a ser o algoritmo mais usado para resolver os PPL e provavelmente o mais usado de todos os algoritmos matemáticos.

O método gráfico que aplicamos na Unidade temática anterior é prático para problemas de PL com duas variáveis. Quando aumenta o número de variáveis, a sua resolução torna-se complexa.

O método simplex é aplicável a problemas cujas restrições levam um sinal de desigualdade do tipo "≤".

Para uma melhor compreensão vamos mostrar as etapas de resolução de um problema de PL usando o método simplex.

Forma Padrão

Para aplicar o método simplex de resolução da Programação Linear é importante, em um primeiro momento, distinguir-se a igualdade da desigualdade entre as restrições, pois facilita a interpretação de diversos conceitos, embora mais adiante se constate que essa diferença não é relevante. A forma padrão, correspondendo à igualdade, é a mais geral, enquanto que a forma $Ax \leq b$, com $b \geq 0$, é a característica da forma canónica.

A forma padrão é aquela em que as restrições são colocadas na forma de equações lineares como se segue:

- **Variáveis de Folga**: se as restrições são do tipo "≤", são introduzidas variáveis positivas. Uma variável de folga representa a diferença entre o limite máximo de um determinado recurso e as quantidades do mesmo recurso que forem usadas pelas diferentes actividades. Por exemplo, matematicamente a restrição $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ é equivalente a $6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$ e $x_3 \geq 0$, a variável de folga x_3 representa a quantidade do recurso que não foi utilizada: $x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2$.

Exemplo 1: Considerando o problema da empresa de mobiliário de escritório do Exemplo 2 da Unidade temática 2.1

$$MaxZ = 6X_1 + 3X_2$$
$$s.a\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 720 \\ 4X_1 + 4X_2 \leq 880 \\ X_1 \leq 160 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Neste problema temos 3 restrições com sinais de desigualdade do tipo "≤". Para transformarmos as restrições em igualdades, temos que introduzir 3 variáveis (X_3, X_4 e X_5), uma em cada como se segue:

$$MaxZ = 6X_1 + 3X_2$$
$$s.a\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 720 \\ 4X_1 + 4X_2 \leq 880 \\ X_1 \leq 160 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 720 \\ 4X_1 + 4X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 = 880 \\ X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 = 160 \\ X_i \geq 0; i = 1,\ldots,5 \end{cases}$$

Na primeira restrição introduzimos X_3, na segunda X_4 e terceira X_5. Na segunda e terceira restrição introduzimos a variável X_3 multiplicada por zero (0). O mesmo que fizemos para a variável X_4 que na primeira e terceira restrição foi multiplicada por zero (0).

- **Variáveis de Excesso**: se as restrições têm desigualdade do tipo "≥", introduzimos variáveis de excesso com sinal negativo. Restrições do tipo ≥ normalmente referem-se a quantidade mínima necessária que deve ser utilizada na combinação de diferentes actividades. A introdução de uma variável de excesso numa inequação, transforma esta em equação. As variáveis de excesso representam o excesso da quantidade do recurso obtido pela combinação das actividades em relação ao recurso mínimo necessário. Por exemplo, a restrição $x_1 + x_2 \geq 80$, matemáticamente é equivalente a $x_1+x_2 - x_3 = 80$ e $x_3 \geq 0$. A condição de não negatividade de x_3, significa que a quantidade atribuída a variável de excesso foi produzida na combinação das actividades x_1 e x_2 .($x_3 = x_1+ x_2 - 80$).

Exemplo 2: considere o exemplo 3 da unidade 2.1 sobre a quantidade de ração a dar aos porcos.

$$MinZ = 10X_1 + 5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 20X_1 + 50X_2 \geq 200 \\ 50X_1 + 10X_2 \geq 150 \\ 30X_1 + 30X_2 \geq 210 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Neste problema temos 3 restrições com sinal de desigualdade do tipo "≥", pelo que teremos 3 variáveis de excesso ($-X_3$, $-X_4$ e $-X_5$)

$$MinZ = 10X_1 + 5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 20X_1 + 50X_2 \geq 200 \\ 50X_1 + 10X_2 \geq 150 \\ 30X_1 + 30X_2 \geq 210 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20X_1 + 50X_2 - X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 200 \\ 50X_1 + 10X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 = 150 \\ 30X_1 + 30X_2 + 0X_3 + 0X_4 - X_5 = 210 \\ X_i \geq 0; i = 1,\ldots,5 \end{cases}$$

Forma Canónica

Variáveis artificiais

Para resolução dos problemas de PL com sinais do tipo "≥", devemos introduzir para além das variáveis de excesso, variáveis artificiais com sinais positivos. Esses problemas não são resolvidos pelo Método simplex simples, mas sim pelos Métodos BIG e Duas Fases. Assim, devemos construir a **forma canónica.**

O sistema é dito na forma canônica quando, embutido na matriz dos coeficientes, encontra-se a matriz identidade. Em consequência, esse sistema admite uma solução básica em que as variáveis não associadas às colunas da matriz identidade são nulas. Além disso, se todo $b_i \geq 0$ ($i=1, ..., m$), a solução é também viável. O sistema abaixo (exemplo 2 acima) exemplifica um sistema de maximização com restrições na forma canônica. A solução trivial consiste em fazer $x_{n+i} = b_i$, enquanto que as demais variáveis x_i a x_n são nulas.

$$MinZ = 10X_1 + 5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 20X_1 + 50X_2 \geq 200 \\ 50X_1 + 10X_2 \geq 150 \\ 30X_1 + 30X_2 \geq 210 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20X_1 + 50X_2 - X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 200 \\ 50X_1 + 10X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 = 150 \\ 30X_1 + 30X_2 + 0X_3 + 0X_4 - X_5 = 210 \\ X_i \geq 0; i = 1,...,5 \end{cases}$$

Forma canónica:

$$MinZ = 10X_1 + 5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 20X_1 + 50X_2 - X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 + 0X_7 + 0X_8 = 200 \\ 50X_1 + 10X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 + 0X_8 = 150 \\ 30X_1 + 30X_2 + 0X_3 + 0X_4 - X_5 + 0X_6 + 0X_7 + X_8 = 210 \\ X_i \geq 0; i = 1,...,5 \end{cases}$$

Neste caso temos em cada restrição, para além da variável de excesso, uma variável artificial. Em cada restrição introduzimos duas variáveis:

- Restrição 1 – Variável de excesso X_3 e artificial X_6
- Restrição 2 – variável de excesso X_4 e artificial X_7
- Restrição 3 – Variável de excesso X_5 e artificial X_8

Exemplo 1: considerando o exemplo 1 da unidade temática 2.1:

$$MinZ = X_1 + 2X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 3 \\ 5X_1 + 8X_2 \leq 40 \\ -X_1 + X_2 \leq 0 \\ X_2 \geq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Neste caso temos 4 restrições, pelo que teremos 2 variáveis de folga, nas restrições (2) e (3) e 2 variáveis de execesso, nas restrições (1) e

(4), incluindo as variáveis artificiais. Uma regra prática para construção da forma padrão de problemas de PL com sinais de desigualdade do tipo "≥" e "≤" em simultâneo é primeiro introduzir as variáveis de excesso e depois as variáveis de folga. Isso tem implicações na colocação da forma canónica.

$$MinZ = X_1 + 2X_2$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 3 \\ 5X_1 + 8X_2 \leq 40 \\ -X_1 + X_2 \leq 0 \\ X_2 \geq 1 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 = 3 \\ 5X_1 + 8X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 + 0X_7 + 0X_8 = 40 \\ -X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 + 0X_8 = 0 \\ 0X_1 + X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + X_8 = 1 \end{cases}$$

Deve-se salientar que segundo Mulenga (2005), em todos casos existem 4 etapas fundamentais a considerar:

1. **Tabela simplex inicial**. A tabela simplex inicial para um problema de maximização de programação linear é como se segue:

Tabela 12: Um problema de maxização de programação linear

V.básicas (base)	x_1 x_2 ... x_m	x_{m+1} ... x_{m+n}	Termos independentes
x_{m+1}	a_{11} a_{12} ... a_{1m}	1 0 ... 0	b_1
x_{m+2}	a_{21} a_{22} ... a_{2m}	0 1 ... 0	b_2
...	....	....	...
x_{m+n}	a_{n1} a_{n2} ... a_{nm}	0 0 ... 1	b_n
Z	$-c_1$ $-c_2$ ... $-c_m$	0 0 0	0

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

- Da tabela inicial, nota-se que as variáveis básicas (base) são todas variáveis de folga ou de excesso;
- Os coeficientes $-c_i$, são opostos da função objectivo e são importantes na indicação da coluna pivot, por isso são chamados indicadores da coluna pivot;
- O elemento no canto inferior direito é zero, ele corresponde ao valor da função objectivo inicial.

2. **Determinação do elemento pivot.** Um elemento pivot de uma tabela simplex é obtido da seguinte forma:

- Escolhe-se na linha dos coeficientes da função objectivo, o maior elemento negativo (max) ou o maior elemento positivo (min), e a coluna que contém este elemento chama-se *coluna pivot*;
- Divide-se cada termo independente pelo correspondente elemento positivo da coluna pivô. A linha que apresentar o menor quociente positivo é chamada *linha pivot;*
- O elemento que situa-se no cruzamento entre a linha pivot e a coluna pivot e é chamado *elemento pivot.*

  Se a tabela não tem nenhum indicador negativo (max) ou positivo (min), esta é *uma tabela terminal* e não tem pivot.

3. **Cálculo da nova tabela simplex.** Seja T_1 a tabela simplex com *n* linhas e *m+n* colunas, cujo o elemento pivot é a_{ij} da matrix A. Uma nova tabela T_2 é calculada a partir da tabela T_1, usando operações elementares sobre as linhas da matriz A de tal forma que apareça um "1" na posição pivot e zeros "0" nas outras posições da coluna pivot, i.é:

- Divide-se cada elemento da linha pivot l_i da tabela T_1 pelo elemento pivot a_{ij}, obtendo-se a correspondente linha na tabela T_2 (l_i').

$$l_i' = \frac{1}{a_{ij}} * l_i$$

- Se a coluna pivot de T_1 é denotada por x_i, então a correspondente coluna de T_2, será denotada também por x_i;
- Cada uma das outras linhas l_k' da tabela T_2 é obtida subtraindo o múltiplo conveniente da linha l_i' à linha l_k, onde $k = 1,n$.

$$l_k' = l_k - a_{ki} * l_i'$$

4. **Interpretação da tabela terminal.** Depois de tantas repetições das etapas (2) e (3), chega-se a uma tabela terminal, a qual não tem nenhum indicador de pivot negativo (max) ou positivo (min).

Tabela 13: Interpretação terminal

V.básicas (base)	x_1 x_2 ... x_m	x_{m+1} ... x_{m+n}	Termos Independentes
x_1	1 0 ... 0	a* ... a*	b_1^*
x_2	0 1 ... 0	a* ... a*	b_2^*
...	....	....	...
x_m	0 0 ... 1	a* ... a*	b_n^*
Z	C_1^* c_2^* ... c_m^*	c* ... c*	Z_0

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

- Zo – é o valor óptimo da função objectivo;
- x_i – tem uma raiz diferente de zero se estiver marcado por 1 numa única posição da coluna correspondente e zeros nas restantes linhas (x_i pertence a base).
- x_i é igual a zero se não estiver na base, apresentando óbviamente um $c_i \neq 0$.

Exemplos de Problemas de PL Resolvidos pelo Método Simplex

Exemplo 1: Uma empresa fabrica dois tipos de produtos: A e B. O lucro unitário líquido de cada um é 45 (A) e 30 u.m. (B). Numa máquina, os produtos são processados durante 2 min. (A) e 1 min. (B). A máquina está disponível 1000 min.. Cada um dos produtos requer 1 min. de mão-de-obra directa. A disponibilidade de mão-de-obra é 800 min.. Estudos de mercado indicam que a procura dos produtos A e B não excede 400 e 700 unidades, respectivamente.

Quantas unidades de A e B devem ser fabricadas de modo a maximizar o lucro?

Formulação do problema:

X_1 = quantidade de unidades do produto A

X_2 = quantidade de unidades do produto B

$$MaxZ = 45X_1 + 30X_2$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 \le 1000 \\ X_1 + X_2 \le 800 \\ X_1 \le 400 \\ X_2 \le 700 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Resolução:

Este problema é de maximização típica por ter restrições com sinais de desigualdade "≤". Nestas circunstâncias introduzem-se variáveis de folga em cada restrição. Neste exercício temos 4 restrições, então teremos 4 variáveis de folga (X_3, X_4, X_5 e X_6).

Forma padrão

$$MaxZ = 45X_1 + 30X_2$$

S.a.
$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 1000 \\ X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 800 \\ X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 400 \\ 0X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 700 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \ge 0 \end{cases}$$

A linha da função objectivo na tabela inicial entram com sinais contrários, uma vez que, na forma padrão passamos os valores do segundo membro para o primeiro como se segue:

$$MaxZ - 45X_1 - 30X_2 = 0$$

A escolha da coluna pivot tem em conta o maior valor absoluto dos números negativos na linha da função objectivo. Assim, a coluna de X_1 será pivot, porque o valor absoluto de (-45) é superior a (-30). Consideram-se apenas os números positivos.

Tabela 14: Consideração apenas de números positivos

Elemento Pivot

Passo Inicial		coluna pivot							bi dividido pela coluna pivot
	XB	X1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/x1
L1-2L3	x3	2	1	1	0	0	0	1000	500
L2-L3	x4	1	1	0	1	0	0	800	800
L3	x5	1	0	0	0	1	0	400	400
L4	x6	0	1	0	0	0	1	700	()
L5+45L3	Z`j-Cj`	-45	-30	0	0	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução Básica Inicial:

$X_1 = 0$; $X_2 = 0$ – ***Variáveis Não básicas***

$X_3 = 1000$; $X_4 = 800$; $X_5 = 400$; $X_6 = 700$ – ***Variáveis básicas (XB)***

Z= 0 – valor da função objectivo.

Um problema de programação linear está na sua forma canónica quando tem todas as variáveis não negativas, todos os b_{is} são não negativos e tem uma base óbvia, como a apresentada acima.

Para obtenção da linha pivot dividimos os valores da coluna de disponibilidades (b_i) pela coluna da variável X_1. Assim, teremos 500= (1000:2), 800 = (800:1) e 400 = (400:1). A linha pivot será a terceira porque tem o menor valor. O elemento pivot será 1, que está entre a coluna pivot e linha pivot.

A variável X_1 entra na base e a variável X_5 sai da base. Este facto nota-se na tabela seguinte em vez de termos X_5 passaremos a ter X_1 na base.

A resolução da tabela é feita recorrendo ao procedimento de Gauss.

Para avançarmos para a 1ª iteração, devemos anular os valores os elementos acima e abaixo do elemento pivot pelas fórmulas que constam a esquerda da tabela. Podemos ver alguns exemplos abaixo:

- L1-2L3 → elemento da linha 1 menos 2 vezes o elemento da coluna 3.
- L2-L3 →Linha 2 menos a linha 3.
- L3 → linha pivot que mantêm-se inalterada.
- L4 → Mantêm-se porque já temos valor zero.
- L5+45L3 →Linha 5 mais 45 vezes a linha 3.

Na primeira linha teremos os seguintes valores:

1ª coluna: L1-2L3=2-2*1=0

2ª Coluna: L1-2L3=1-2*0= 1

3ª Coluna: L1-2L3=1-2*0= 1

4ª Coluna: L1-2L3=0-2*0= 0

5ª Coluna: L1-2L3=0-2*1= -2

6ª Coluna: L1-2L3=0-2*0=0

7ª Coluna (bi): L1-2L3=1000-2*400=200

Vejamos como fica a *tabela 14 a seguir* resultante de todas as operações:

Tabela 15: Tabela de todas operações

1ª Iteração										
	XB	X1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/x2
L1	x3	**0**	**1**	**1**	**0**	**-2**	**0**	**200**	200
L2-L1	x4	0	**1**	0	1	-1	0	400	400
L3	X1	1	**0**	0	0	1	0	400	()
L4-L1	x6	0	**1**	0	0	0	1	700	700
L5+30L1	Z`j-Cj`	0	**-30**	0	0	45	0	18000	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como ainda temos um valor negativo na coluna da variável X_2, o mesmo procedimento aplicado anteriormente deverá ser aplicado. E como temos apenas um único valor negativo na linha da função objectivo, esta será a coluna pivot. A linha pivot resulta da divisão da disponibilidade (bi) pela coluna de X_2. Os resultados são apresentados na última coluna. Não consideramos a tereceira linha porque já temos valor nulo. Comparamos 200, 400 e 700. Dos três valores o menor é 200, pelo que a linha pivot será a 1ª. De seguida aplicamos as fórmulas para eliminar os elementos abaixo do pivot.

Os resultados estão na *tabela 15 abaixo*:

Tabela 16:Eliminação dos elementos abaixo do pivot

2ª Iteracção									
	XB	X1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/x2
L1+2L2	x2	0	1	1	0	-2	0	200	()
L2	x4	0	0	-1	1	1	0	200	200
L3-L2	X1	1	0	0	0	1	0	400	400
L4-2L2	x6	0	0	-1	0	2	1	500	250
L5+15L2	Z`j-Cj`	0	0	30	0	-15	0	24000	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Voltamos a proceder da mesma forma até encontrarmos toda a linha da função objectivo positiva.

Tabela 17: Linha da função objectivo positiva

3ª Iteracção							
XB	X1	x2	x3	x4	x5	x6	bi
X2	0	1	-1	2	0	0	600
x5	0	0	-1	1	1	0	200
X1	1	0	1	-1	0	0	200
X6	0	0	1	-2	0	1	100
Z`j-Cj`	0	0	15	15	0	0	27000

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Após a terceira Iteracção, todos os coeficientes da função objectivo são não negativos, a solução óptima já foi encontrada, com X_1= 200, X_2 = 600, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 200 e X_6 =100 e Z= 27000.

Exemplo 2: considere o problema de programação linear abaixo:

$$MaxZ = X_1 + 1{,}5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 0{,}5X_1 + X_2 \leq 7.5 \\ 2X_1 + X_2 \leq 15 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

Forma Padrão

Os Procedimentos são os mesmos utilizados no exercício anterior. Temos de introduzir as variáveis de folga porque os sinais de desigualdade são do tipo de "≤" e é um problema de Maximização. Neste exercício temos duas restrições, portanto, teremos duas variáveis de folga (X3 e X4).

$$MaxZ = X_1 + 1{,}5X_2$$
$$s.a\begin{cases} 0{,}5X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 \leq 7{,}5 \\ 2X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 \leq 15 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela 18: Duas variáveis de folgas

Passo Inicial			coluna pivot				bi dividido pela coluna pivot
	XB	X1	x2	x3	x4	bi	bi/x1
L1	x3	0.5	1	1	0	7.5	7.5
L2-L1	x4	2	1	0	1	15	15
L3+1.5*L1	Z`j-Cj`	-1	-1.5	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A variável X_3 sai da base e entra X_2. A linha (1) é a pivot. A solução básica inicial deste exercício será:

$X_1 = 0$; $X_2 = 0$ - Variáveis não básicas (VNB)

$X_3 = 7.5$; $X_4 = 15$ – Variáveis básicas (VB)

Z = 0

Tabela 19: Entrada da variável X_2 depois da sida da variável X_3 da base

1ª Iteracção						
XB	X1	x2	x3	x4	bi	bi/x2
X2	0.5	1	1	0	7.5	15
X4	1.5	0	-1	1	7.5	5
Z`j-Cj`	-0.25	0	1.5	0	11.25	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como o elemento pivot é diferente de 1, divide-se toda a linha pivot pelo valor do elemento e constroi-se uma nova tabela como se segue:

Tabela 20: Tabela resultante da divisão da linha do pivot pelo valor do elemento

	XB	X1	x2	x3	x4	bi
L1-0.5*L2	**x2**	0.5	1	1	0	7.5
L2	X1	1	0	- 2/3	2/3	5
L3+0.25*L2	Z`j-Cj`	-0.25	0	1.5	0	11.25

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2ª Iteracção					
XB	**X1**	**x2**	**x3**	**x4**	**bi**
X2	0	1	4/3	- 1/3	5
X1	1	0	- 2/3	2/3	5
Z`j-Cj`	0	0	4/3	1/6	25/2

Após a segunda Iteracção, todos os coeficientes da função objectivo são não negativos, a solução óptima já foi encontrada, com X1= 5, X_2 = 5, X_3 = 0, X_4 = 0 e Z= 12.5.

Exemplo 3: Considere o problema de PL abaixo. Resolva-o aplicando o método simplex.

$$MaxZ = 30X_1 + 50X_2$$

$$s.a \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ X_1 + 3X_2 \leq 15 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

Forma Padrão

$$MaxZ = 30X_1 + 50X_2$$

$$s.a \begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 16 \\ X_1 + 2X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 = 11 \\ X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 = 15 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela 21: Tabela inicial do método simplex

Passo Inicial			coluna pivot					bi dividido pela coluna pivot
	XB	X1	X2	X3	X4	X5	bi	bi/x1
	X3	2	1	1	0	0	16	16
	X4	1	2	0	1	0	11	5.5
	X5	1	3	0	0	1	15	5
	Z`j-Cj`	-30	-50	0	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

O elemento pivot é 3 pelo que temos que dividir toda a linha pivot por 3 para termos 1 como elemento pivot.

Tabela 22: Divisão da linha pivot por 3 para termos 1 como elemento pivot

	XB	X1	x2	x3	x4	X5	bi	bi/x2
L1-L3	**X3**	2	1	1	0	0	16	16
L2-2L3	**X4**	1	2	0	1	0	11	5.5
L3	**X2**	1/3	1	0	0	1/3	5	5
L4+50L3	Z`j-Cj`	-30	-50	0	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 23: Tabela da 1ª iteracção

Fração Mista

(1*3+2)/3=5/3

-(13*3+1)/3)= - 40/3

1ª Iteracção							
XB	X1	x2	x3	x4	X5	bi	bi/x2
X3	1 2/3	0	1	0	- 1/3	11	6 3/5
X4	1/3	0	0	1	- 2/3	1	3
X2	1/3	1	0	0	1/3	5	15
Z`j-Cj`	-13 1/3	0	0	0	16 2/3	250	

(16*3+2)/3=50/3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Atenção ao valores em fracção mista constantes da tabela dado que que o exercício foi resolvido no programa excel e que por defeito coloca-os daquela forma. Ex: Na linha do X_3 temos 5/3.

Tabela 24: Resultado da linha do X_3 (5/3)

	XB	X1	x2	x3	x4	X5	bi	bi/x2
L1-(5/3)*L2	X3	1 2/3	0	1	0	- 1/3	11	6 3/5
L2	X1	1	0	0	3	-2	3 ⇦	3
L3-(1/3)*L2	X2	1/3	1	0	0	1/3	5	15
L4+(40/3)*L	Z`j-Cj`	-13 1/3 ⇧	0	0	0	16 2/3	250	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 25: Tabela da 2ª iteracção

2ª Iteracção							
XB	**X1**	**x2**	**x3**	**x4**	**X5**	**bi**	bi/x2
X3	0	0	1	-5	3	6 ⇦	2
X1	1	0	0	3	-2	3	()
X2	0	1	0	-1	1	4	4
Z`j-Cj`	0	0	0	40	-10 ⇧	290	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como temos um valor negativo na segunda linha da coluna pivot (-2), este não é considerado para efeitos de cálculo da linha pivot pelo que consiramos apenas a primeira e terceira linha.

Tabela 26: Efeitos de cálculo da linha pivot

	XB	X1	x2	x3	x4	X5	bi
L1	X5	0	0	1/3	-1 2/3	1	2 ⇦
L2+2L1	X1	1	0	0	3	-2	3
L3-L1	X2	0	1	0	-1	1	4
L4+10L1	Z`j-Cj`	0	0	0	40	-10 ⇧	290

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 27: Tabela da 3ª iteracção

3ª Iteracção						
XB	X1	x2	x3	x4	X5	bi
X5	0	0	1/3	-1 2/3	1	**2**
X1	1	0	2/3	- 1/3	0	**7**
X2	0	1	- 1/3	2/3	0	**2**
Z`j-Cj`	0	0	3 1/3	23 1/3	0	**310**

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A resolução do Método simplex termina quando todos os valores da função objectivo são não negativos. A solução óptima é X_1= 7, X_2 = 2, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 2 e Z= 310.

Casos Especiais do Método Simplex

Solução Degenerada

Esta situação ocorre quando após escolher a coluna pivot e ao pretendermos escolher a linha pivot, encontramos duas variáveis em condições de sair da base.

Exemplo1: Considere o seguinte problema de programação linear:

$$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 9 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão:

$$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 = 9 \\ 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + X_4 = 18 \\ X_i \geq 0; i = 1;...;4 \end{cases}$$

Depois colocamos os valores na tabela inicial à semelhança dos exercícios anteriores:

Tabela 28: Tabela inicial

Tabela Inicial						
XB	X1	X2	X3	X4	bi	bi/x2
X3	1	1	1	0	9	9
X4	2	3	0	1	18	6
Z-C	-3	-4	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como vemos no quadro os valores da função objectiva entram com sinal contrário na tabela (Z-C). O elemento pivot é 3. Temos que dividir toda a linha 2 por 3.

Tabela 29: Tabela auxiliar (divisão de toda linha 2 por 3)

Tabela Auxiliar						
XB	X1	X2	X3	X4	bi	
X3	1	1	1	0	9	L1-L2
X2	2/3	1	0	1/3	6	⇦ L2
Z-C	-3	-4	0	0	0	L3+4L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 30: Tabela da 1ª iteracção

1ª Iteração						
XB	X1	X2	X3	X4	bi	bi/x1
X1	1/3	0	1	- 1/3	3 ⇦	9
X2	2/3	1	0	1/3	6	9
Z-C	- 1/3	0	0	1 1/3	24	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Após a 1ª iteracção, nota-se que na escola da linha pivot temos o valor 9 na 1ª linha e na 2ª linha, pelo que há um empate na entrada. Escolhe-se qualquer uma das linhas para pivot. Neste caso assumimos a 1ª linha e como temos valor (1/3), diferente de 1, multiplicamos toda a linha por 3 e termos a *tabela 30 auxiliar como se segue*:

Tabela 31: Multiplicação da linha por 3 resultanto tabela auxiliar

XB	X1	X2	X3	X4	bi	
X1	1	0	3	-1	9 ⇦	L1
X2	2/3	1	0	1/3	6	L2-(2/3)*L1
Z-C	- 1/3	0	0	1 1/3	24	L3+(1/3)*L1

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Resolvendo o problema teremos a solução como segue:

Tabela 32: Tabela da 2ª iteracção

2ª Iteração					
XB	X1	X2	X3	X4	bi
X1	1	0	3	-1	9
X2	0	1	-2	1	0
Z-C	0	0	1	1	27

Solução
Degenerada por X_2 na coluna de bi é igual a zero.

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Na solução final temos:

$X_1 = 9$; $X_2 = 0$; $X_3 = 0$; $X_4 = 0$ e $Z=27$

Assim, podemos dizer que a restrição 2, à qual está associada a variável X_2, provocou a degenerescência desta solução óptima.

Solução intermédia (admissível) Degenerada

Exemplo 2: Considere o seguinte exemplo:

$$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$$

$$s.a \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 10 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ X_1 \leq 8 \\ X_2 \geq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Como temos todas as restrições com sinal de desigualdade do tipo "≤", aplica-se o simplex.

Resolução:

Forma padrão:

$$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$$

$$s.a \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 10 \\ 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 18 \\ X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 8 \\ 0X_2 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 6 \\ X_i \geq 0; i = 1;...;6 \end{cases}$$

Tabela 33: Tabela inicial

Tabela Inicial								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	bi/X2
X3	1	1	1	0	0	0	10	10
X4	2	3	0	1	0	0	18 ⇦	6
X5	1	0	0	0	1	0	8	( )
X6	0	1	0	0	0	1	6	6
Z-C	-3	⇧ -4	0	0	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como há um empate na saída, podemos escolher qualquer uma das linhas para pivot. Neste caso, escolhemos a Linha 2 e dividímo-la por 3 para termos a unidade como elemento pivot.

Tabela 34: A unidade como elemento pivot

Tabela Auxiliar								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	
X3	1	1	1	0	0	0	10	L1-L2
X2	2/3	1	0	1/3	0	0	6 ⇦	L2
X5	1	0	0	0	1	0	8	L3
X6	0	1	0	0	0	1	6	L4-L2
Z-C	-3	⇧ -4	0	0	0	0	0	L5+4L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 35: Primeira iteracção

1ª Iteracção

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	bi/X1	
X3	1/3	0	1	- 1/3	0	0	4	12	L1-(1/3)*L3
X2	2/3	1	0	1/3	0	0	6	9	L2-(2/3)*L3
X1	1	0	0	0	1	0	8	8	L3
X6	- 2/3	0	0	- 1/3	0	1	0	( )	L4+(2/3)*L3
Z-C	- 1/3	0	0	1 1/3	0	0	24		L5+(1/3)*L3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A variável X_6 tem valor nulo na coluna bi, estaríamos perante uma solução degenerada, mas ainda temos um valor na função objectivo não positivo (-1/3), pelo que devemos continuar a resolução.

Tabela 36: Valor da função objectivo não positivo

2ª Iteracção

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi
X3	0	0	1	- 1/3	- 1/3	0	1 1/3
X2	0	1	0	1/3	- 2/3	0	2/3
X1	1	0	0	0	1	0	8
X6	0	0	0	- 1/3	2/3	1	5 1/3
Z-C	0	0	0	1 1/3	1/3	0	26 2/3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução final:

$X_1 = 8$; $X_2 = 2/3$; $X_3 = 4/3$; $X_5 = 0$; $X_6 = 16/3$ e $Z = 80/3$

Assim, podemos dizer que a restrição 4, à qual está associada a variável X_6 , provocou a degenerescência desta solução óptima.

Estamos na solução óptima, que foi atingida depois de se ter passado por uma situação intermédia degenerada. Note-se ainda que as degenerescências são sempre criadas pela verificação de um empate na regra de saída da solução imediatamente anterior.

Este caso é um caso simples, em que a degenerescência foi ultrapassada facilmente, mas a eficiência do algoritmo do simplex, no caso de existiram soluções deste tipo, depende do caminho seguido. Por vezes, podemos ter problemas que entram num ciclo quase infinito de soluções intermédias degeneradas tornando o algoritmo muito ineficiente.

Solução óptima Múltipla

Em termos do algoritmo do simplex estas soluções são identificadas no quadro óptimo pela existência de um coeficiente nulo na linha da FO, associado a uma variável não básica, que possa entrar para a base.

Exemplo 3: Considere o problema de PL abaixo:

$$MaxZ = X_1 + 2X_2$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 6 \\ X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_1; X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

$$MaxZ = X_1 + 2X_2$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 \leq 6 \\ X_1 + 2X_2 + 0X_3 + X_4 \leq 10 \\ X_1; X_2; X_3; X_4 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela 37: Tabela inicial

Tabela Inicial						
XB	X1	X2	X3	X4	bi	bi/X2
X3	1	1	1	0	6	6
X4	1	2	0	1	10	5
Z-C	-1	-2	0	0	0	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução básica Inicial:

$X_1 = 0; X_2 = 0; X_3 = 6; X_4 = 10; Z = 0$

Tabela 38: Tabela auxiliar

Tabela Auxiliar						
XB	X1	X2	X3	X4	bi	
X3	1	1	1	0	6	L1-L2
X4	1/2	1	0	1/2	5	L2
Z-C	-1	-2	0	0	0	L3+2L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 39: Primeira iteracção

1ª Iteracção					
XB	X1	X2	X3	X4	bi
X3	1/2	0	1	- 1/2	1
X2	1/2	1	0	1/2	5
Z-C	0	0	0	1	10

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Os valores das variáveis que estão na base (XB), X_3 e X_2 sao nulos na linha da FO.

Solução Final:

$X_1 = 0; X_2 = 5; X_3 = 1; X_4 = 0; Z = 10$

Solução ilimitada

Em termos do simplex, um problema deste tipo, é identificado quando, numa solução admissível intermédia, a variável candidata a entrar na base não pode efectivamente entrar para a base, porque não há nenhuma que possa sair, ou seja, os coeficientes da coluna associada à referida variável serem valores negativos ou nulos.

Exemplo 4: Considere o problema de PL abaixo:

$$MaxZ = X_1 + 2X_2$$
$$s.a\begin{cases} -2X_1 + X_2 \leq 2 \\ X_1 - 2X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão:

$$MaxZ = X_1 + 2X_2$$
$$s.a\begin{cases} -2X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 \leq 2 \\ X_1 - 2X_2 + 0X_3 + X_4 \leq 6 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela 40: Tabela inicial

Tabela Inicial							
XB	X1	X2	X3	X4	bi	bi/X2	
X3	-2	1	1	0	2	2	L1
X4	1	-2	0	1	6		L2+2L1
Z-C	-1	-2	0	0	0		L3+2L1

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 41: Primeira iteracção

1ª Iteracção					
XB	X1	X2	X3	X4	bi
X2	-2	1	1	0	2
X4	-3	0	2	1	10
Z-C	-5	0	2	0	4

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como todos os valores da coluna pivot são negativos, não podemos dividir bi por estes. Neste caso não é possível continuar com a resolução. A solução é ilimitada.

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

a) Considere o problema da empresa de mobiliário de escritório do Exemplo 2 da Unidade temática 2.1. Resolva-o aplicando o método simplex até encontrar a solução apresentada.

$$MaxZ = 6X_1 + 3X_2$$
$$s.a\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \le 720 \\ 4X_1 + 4X_2 \le 880 \\ X_1 \le 160 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) Dado o seguinte modelo de PL

$$MaxZ(x) = 8X_1 + 6X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \le 10 \\ 3X_1 + 3X_2 \le 24 \\ 3X_1 - X_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c) Calcular, classificar e apresentar a solução óptima do problema utilizando o método simplex. (**resp: X1=5, X2=3, X3=2, X4=0, X5=0, Z=58,** classificação**: solução óptima única).**

d) Considere o problema de PL abaixo:

$$MaxZ = -2X_1 + X_2 - X_3$$
$$s.a\begin{cases} 3X_1 + X_2 + X_3 \le 60 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 \le 10 \\ X_1 + X_2 - X_3 \le 20 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

e) Apresente a solução básica inicial. **(resp: X4=60, X5=10, X6=20 e Z=0).**

f) Resolva o problema pelo método simplex. **(resp: X1=0, X2=20, X3=0, X4=40, X5=30, X6=0 e Z=20)**

g) Considere o seguinte modelo de PL:

$$MaxZ = 6X_1 + 8X_2$$

$$s.a\begin{cases} 30X_1 + 20X_2 \leq 300 \\ 5X_1 + 10X_2 \leq 110 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o aplicando o método simplex. (**Resp: X1=4, X2=9, X3=0, X4=0, Z=96).**

UNIDADE Temática 2.3: Métodos de Veriáveis Artificiais

Introdução

Na Unidade temática 2.2 vimos o método Simplex que é aplicável para problemas de maximização com todas as restrições do tipo "≤". Quando aparecem em problemas de PL, restrições do tipo "≥" ou "=", o método simplex não será útil porque a solução básica inicial deixa de ser válida. Ocorre a violação da condição de não negatividade. Nestes casos são válidos os métodos BIG_M, Duas Fases e Dual Simplex.

Método BIG – M

Agora iremos demonstrar como funciona o algoritmo do BIG M. Este método é aplicável como foi dito para os problemas em que é necessária a introdução de variáveis artificiais para se encontrar a respectiva forma canónica.

Este método também é conhecido por Método das Penalidades porque o objectivo é penalisar as variáveis artificiais de tal modo que saiam da base.

As variáveis artificiais são penalizadas pela introdução de coeficientes suficientemente grandes cujo sinal depende do objectivo do problema. Se trata-se de maximização ou minimização.

Exemplo 1: Considere o exercício abaixo:

$$MaxZ = 5X_1 + 10X_2 + 15X_3$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \leq 500 \\ X_1 + X_2 \geq 100 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 120 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

Forma Padrão

Neste exercício temos sinais de desigualdades do tipo "≤", "≥" e "=" . Sendo um problema de Maximização o sinal típico é "≤". Mesmo assim para cada tipo de restrição aplicamos as regras aprendidas, ou seja quando temos "≤" introduzimos variáveis de folga (+Xi) e quando temos "≥" introduzimos primeiro variáveis de excesso (-Xi). Na segunda situação acrescentamos ainda variáveis artificiais (+Xi). No caso de igualdade, apenas introduzimos uma variável artificial.

Neste caso é necessário introduzir nas restrições, primeiro a variável de excesso. No nosso exercício seria na segunda restrição.

Assim teríamos:

$$MaxZ = 5X_1 + 10X_2 + 15X_3$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 + 0X_7 = 500 \\ X_1 + X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 + X_6 + 0X_7 = 100 \\ X_1 - X_2 - X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 = 120 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0 \end{cases}$$

Veja que introduzimos primeiro -X4 na segunda restrição e X5 na primeira restrição. Voltamos à restrição 2 e introduzimos X6. Finalmente na última restrição introduzimos X7. Neste caso, X_4 é uma variável de excesso, X_5 é uma variável de folga, X6 e X7 são variáveis artificiais.

Tabela 42: Introdução de X7 na última restrição

Tabela Inicial								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi
X5	1	1	1	0	1	0	0	500
X6	1	1	0	-1	0	1	0	100
X7	1	-1	-1	0	0	0	1	120
Z-C	-5	-10	-15	0	0	0	0	0

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Para o método BIG-M é necessário encontrar uma nova linha de função objectivo modificada que será utilizada para a escolha da coluna pivot.

Tabela 43: Modificação da linha função objecto para a escolha da coluna pivot

	Nova Função Objectivo								
	XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi
	X5	1	1	1	0	1	0	0	500
-M	X6	1	1	0	-1	0	1	0	100
-M	X7	1	-1	-1	0	0	0	1	120
(1)	Z-C	-5	-10	-15	0	0	M	M	0
(2)	Z`j-C`j	-2M-5	-10	M-15	M	0	0	0	-220M

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Na nova tabela, onde temos variáveis artificiais, introduzimos na linha da função objectivo, a letra M. Neste caso temos duas variáveis artificiais, pelo que teremos em X_6 e X_7. Nas linhas onde temos as variáveis artificiais colocamos o simétrico do M, ou seja –M. O objectivo é anular o valor do M introduzido na linha (1).

Os valores da função objectivo entram na tabela com os coeficientes contrários aos apresentados (1). Em relação a linha (Z'_j-C'_j) (2), os valores são determinados nos seguintes termos:

- Coluna X1: (-M)*1+(-M)+(-5) = -M-M-5= -2M-5
- Coluna X2: (-M)*1+(-M)*(-1)+(-10) = -M+M-10 =-10
- Coluna X3: (-M)*0+(-M)*(-1)+(-15) = 0+M-15 = M-15
- Coluna X4: (-M)*(-1)+(-M)*0+0 = M

Este procedimento aplica-se até ao último valor da função objectivo (-220M).

Na *tabela 43 seguinte* elimina-se a linha da função objectivo original e trabalha-se com a nova linha modificada.

Tabela 44: Eliminação da linha da função objectivo original

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi	bi/X1	
X5	1	1	1	0	1	0	0	500	500	L1-L2
X6	1	1	0	-1	0	1	0	100	100	L2
X7	1	-1	-1	0	0	0	1	120	120	L3-L2
Z`j-C`j	-2M-5	-10	M-15	M	0	0	0	-220M		L4+(2M+5)*L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Para escolha da coluna pivot, substitui-se para cada M um valor suficientemente grande arbitrário que permita escolher entre os valores negativos, o que tiver maior valor absoluto à semelhança do que fizemos no método simplex. Se assumirmos que M=1000, teremos:

- Coluna de X_1: -2M-5 = -2*1000-5=-1005
- Coluna de X_2: -10
- Coluna de X_3: M-15= 1000-15 = 985
- Coluna de X_4: M = 1000

Temos apenas na coluna de X1 e X2 valores negativos. Apenas os valores negativos é que são considerados na escolha da coluna pivot. Dentre eles, o maior valor absoluto vai para a coluna de X1, pelo que será a coluna pivot. A linha pivot segue o mesmo critério do simplex.

Tabela 45: O critério simplex na mesma linha do pivot (1ª iteracção)

1ª Iteracção										
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi	bi/X4	
X5	0	0	1	1	1	-1	0	400	400	L1-L3
X1	1	1	0	-1	0	1	0	100	()	L2+L3
X7	0	-2	-1	1	0	-1	1	20	20	L3
Z`j-C`j	0	2M-5	M-15	M-5	0	2M+5	0	-20M+500		L4+(M+5)*L3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2ª Iteração									
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi	bi/x4
X5	0	2	**2**	0	1	0	-1	380	190
X1	1	-1	-1	0	0	0	1	120	()
X4	0	-2	-1	**1**	0	-1	1	20	()
Z`j-C`j	0	-15	-20	0	0	M	M+5	600	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi	
X3	0	1	1	0	1/2	0	- 1/2	190	L1
X1	1	-1	-1	0	0	0	1	120	L2+L1
X4	0	-2	-1	**1**	0	-1	1	20	L3+L1
Z`j-C`j	0	-15	-20	0	0	M	M+5	600	L4+20L3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	bi
X3	0	1	1	0	1/2	0	- 1/2	190
X1	1	0	0	0	0.5	0	0.5	310
X4	0	-1	0	1	0.5	-1	0.5	210
Z`j-C`j	0	5	0	0	10	M	M-5	4400

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução: X1 =310; X2 = 0; X3 = 190; X4 = 210; X5=0; X6=0; X7=0 e Z=4.400

Exemplo 2: Considere o problema de PL e resolva-o.

$$MinW = 30X_1 + 30X_2 + 10X_3$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 6 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 8 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

Considerando que trata-se de um problema de Minimização, transforma-se num problema de maximização multiplicando toda a função objectivo por (-1). Assim teremos:

$$MaxZ = -MinW = -30X_1 - 30X_2 - 10X_3$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 6 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 8 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

$$MaxZ = -30X_1 - 30X_2 - 10X_3$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + X_5 + 0X_6 \geq 6 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 \leq 8 \\ X_i \geq 0; i = 1,\ldots,6 \end{cases}$$

Tabela 46: Tabela inicial e nova função objectivo

	Tabela Inicial e Nova função objectivo								
	XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	bi/X1
-M	X5	2	1	1	-1	1	0	6	3
	X6	1	1	2	0	0	1	8	8
(1)	Z-C	30	30	10	0	M	0	0	
(2)	Z`j-C`j	-2M+30	-M+30	-M+10	M	0	0	-6M	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Neste exercício temos um empate na saída. O problema tem uma degenerescência. Escolhe-se qualquer linha para pivot. Neste caso assumimos logo a linha 1. Resolve-se como foi dito aplicando as mesmas regras do simplex.

Tabela 47: Divisão da primeira linha por dois

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	
X1	1	1/2	1/2	- 1/2	1/2	0	3	L1
X6	1	1	2	0	0	1	8	L2-L1
Z`j-C`j	-2M+30	-M+30	-M-10	M	0	0	-6M	L3+(2M-30)*L1

Dividimos toda linha 1 por 2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 48: Primeira integração da divisão desta linha

1ª Iteracção								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	bi/x3
X1	1	1/2	1/2	- 1/2	1/2	0	3	6
X6	0	1/2	3/2	1/2	- 1/2	1	5	3.30
Z`j-C`j	0	15	-5	15	M-15	0	-90	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi	
X1	1	1/2	1/2	- 1/2	1/2	0	3	L1-(1/2)*L2
X3	0	1/3	1	1/3	- 1/3	2/3	9/3	L2
Z`j-C`j	0	15	-5	15	M-15	0	-90	L3+5L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	bi
X1	1	1/3	0	- 2/3	2/3	- 1/3	4/3
X3	0	1/3	1	1/3	- 1/3	2/3	10/3
Z`j-C`j	0	50/3	0	50/3	M-50/3	2/3	-220/3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

1) Considere-se o seguinte problema de PL:

$$MaxZ = 6X_1 + 8X_2$$

$$s.a\begin{cases} 30X_1 + 20X_2 \leq 300 \\ 5X_1 + 10X_2 \leq 110 \\ X_1 \geq 6 \\ X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema aplicando o método BIG-M **(Resp:X1=6, X2=6, X3=0, X4=20, X5=0, X6=2 e Z=84)**

2) Considere o problema de PL e resolva-o pelo Método BIG-M.

$$MinW = 30X_1 + 30X_2 + 10X_3$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 16 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 8 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resp: X1=8, X2=0, X3=0, X4=0, X5=0, X6=0 e Z=240

Método de duas Fases

O método de duas fases também é aplicável a problemas cujas restrições são do tipo “≥” ou “=”. Requerem que sejam introduzidas variáveis artificiais.

Vamos considerar alguns exemplos de problemas de PL que podem ser resolvidos pelo Método de Duas Fases.

Exemplo 1: Considere o problema de PL abaixo:

$$MinW = 2X_1 + 4X_2 + X_3$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 5 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 2 \\ -X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 1 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

Como trata-se de um problema de minimização, transformamos o problema em maximização multiplicando a função objectivo (FO) por (-1). Nestes problemas teremos uma variável de folga na 1ª restrição, uma variável artificial na 2ª e uma de excesso e artificial na 3ª. A forma padrão consta abaixo.

$$-MaxZ = -2X_1 - 4X_2 - X_3$$

$$s.a \begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 + X_7 = 5 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 + 0X_7 = 2 \\ -X_1 + 2X_2 + 2X_3 - X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 = 1 \\ X_i \geq 0; i = 1,\ldots,7 \end{cases}$$

Nova função objectivo

A transposição dos valores da forma padrão para a tabela não segue o mesmo procedimento do método BIG M. Neste método considera-se uma função auxiliar Z' que resulta da minimização das variáveis artificiais.

1° Constrói-se uma função auxiliar Z com as variáveis artificiais: $MinZ = X_6 + X_7$

2° Transforma-se a função auxiliar em Maximização: $-MaxZ = -X_6 - X_7$

3° Os coeficientes da função auxiliar são colocados na 1ª linha (Z') com os sinais contrários como se segue. Apenas temos valores em X6 e X7.

Tabela 49: Construção de uma função auxiliar Z com variáveis artificiais

	XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Bi	Bi/X3
	Z´	0	0	0	0	0	1	1	0	
	X5	1	2	-1	0	1	0	0	5	(-)
	X6	2	-1	2	0	0	1	0	2	1
	X7	-1	2	2	-1	0	0	1	1	0.5
(1)	Z-C	2	4	1	0	0	0	0	0	
(2)	Z´-C´	-1	-1	-4	1	0	0	0	-3	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A linha (1) corresponde aos coeficientes da função objectivo original que entram com os sinais contrários à função de maximização.

A linha (2) resulta de operações nas linhas onde temos as variáveis artificiais como se segue:

- Coluna de X1: 0-2-(-1) = -2+1=-1

- Coluna de X2: 0-(-1)-2 = -1
- Coluna de X3: 0-2-2= - 4
- Coluna de X4: 0-0-(-1) = 1
- Coluna de Bi: 0-2-1 = -3

1ª Fase

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Bi	
X5	1	2	-1	0	1	0	0	5	L1+L3
X6	2	-1	2	0	0	1	0	2	L2-2L3
X3	- 1/2	1	1	- 1/2	0	0	1/2	1/2	L3
Z-C	2	4	1	0	0	0	0	0	L4-L3
Z´-C´	-1	-1	-4	1	0	0	0	-3	L5+4L3

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

1ª iteracção									
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Bi	bi/X1
X5	1/2	3	0	- 1/2	1	0	1/2	5 1/2	11
X6	3	-3	0	1	0	1	-1	1	0.33
X3	- 1/2	1	1	- 1/2	0	0	1/2	1/2	
Z-C	2 1/2	3	0	1/2	0	0	- 1/2	- 1/2	
Z´-C´	-3	3	0	-1	0	0	2	-1	

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Bi	
X5	1/2	3	0	- 1/2	1	0	1/2	5 1/2	L1-(1/2)*L2
X1	1	-1	0	1/3	0	1/3	- 1/3	1/3	L2
X3	- 1/2	1	1	- 1/2	0	0	1/2	1/2	L3+(1/2)*L2
Z-C	2 1/2	3	0	1/2	0	0	- 1/2	- 1/2	L4-(5/2)*L2
Z´-C´	-3	3	0	-1	0	0	2	-1	L5+3L2

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2ª iteracção									
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	Bi	
X5	0	3 1/2	0	- 2/3	1	- 1/6	2/3	5 1/3	
X1	1	-1	0	1/3	0	1/3	- 1/3	1/3	
X3	0	1/2	1	- 1/3	0	1/6	1/3	2/3	
Z-C	0	5 1/2	0	- 1/3	0	- 5/6	1/3	-1 1/3	
Z´-C´	0	0	0	0	0	1	1	0	
									Fim da 1ª Fase

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2ª Fase:

Na segunda fase elimina-se as colunas das variáveis artificiais (X6 e X7). A nova tabela será:

Tabela 50: Segunda fase de eliminação de colunas de variáveis artificiais (X6 e X7)

2ª fase						
XB	X1	X2	X3	X4	X5	Bi
X5	0	3 1/2	0	- 2/3	1	5 1/3
X1	1	-1	0	1/3	0	1/3
X3	0	1/2	1	- 1/3	0	2/3
Z-C	0	5 1/2	0	- 1/3	0	-1 1/3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como transformamos o problema em maximização, na nova tabela, os valores dos coeficientes da função deverão ser todos positivos à excepção do valor de bi. Assim, deveremos adoptar uma nova coluna pivot e uma nova linha pivot e uma nova iteração como se *segue na tabela 50*:

Tabela 51: Uma nova iteração adoptada aprtir duma nova coluna e linha pivot

XB	X1	X2	X3	X4	X5	Bi	
X5	0	3 1/2	0	- 2/3	1	5 1/3	L1+(2/3)*L2
X4	3	-3	0	1	0	1	L2
X3	0	1/2	1	- 1/3	0	2/3	L3+(1/3)*L2
Z-C	0	5 1/2	0	- 1/3	0	-1 1/3	L4+(1/3)*L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

1ª Iteracção						
XB	X1	X2	X3	X4	X5	Bi
X5	2	1 1/2	0	0	1	6
X4	3	-3	0	1	0	1
X3	1	- 1/2	1	0	0	1
Z-C	1	4 1/2	0	0	0	-1

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Todos os valores da linha da função objectivo são positivos pelo que termina a 2ª fase do modelo de duas fases. A solução será:

X1 = 0, X2=0, X3 =1, X4=1, X5=6 e Z=1

Exemplo 2: Considere o exemplo abaixo.

$$MinZ = 5X_1 + 6X_2$$
$$s.a \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 10 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$-MaxZ = -5X_1 - 6X_2$$
$$s.a \begin{cases} X_1 + X_2 \geq 10 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

$$-MaxZ = -5X_1 - 6X_2$$

$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = 10 \\ 2X_1 + 4X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_4 - X_6 = 21 \\ X_i \geq 0; i = 1,\ldots,6 \end{cases}$$

Nova Função Objectivo

Tabela 52: Nova Função Objectivo

Tabela da Função Objectivo							
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi
Z`	0	0	0	0	1	1	0
X5	1	1	-1	0	1	0	10
X6	2	4	0	-1	0	1	21
Z-C	5	6	0	0	0	0	0
Z´-C´	-3	-5	1	1	0	0	-31

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 53: Tabela inicial da nova Função Objetivo

Tabela Inicial								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	Bi/X2
X5	1	1	-1	0	1	0	10	10
X6	2	4	0	-1	0	1	21	5.25
Z-C	5	6	0	0	0	0	0	
Z´-C´	-3	-5	1	1	0	0	-31	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X5	1	1	-1	0	1	0	10	L1-L2
X2	1/2	1	0	- 1/4	0	1/4	5 1/4	L2
Z-C	5	6	0	0	0	0	0	L3-6L2
Z´-C´	-3	-5	1	1	0	0	-31	L4+5L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

ª Iteracção								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	Bi/X1
X5	1/2	0	-1	1/4	1	- 1/4	4 3/4	9.50
X2	1/2	1	0	- 1/4	0	1/4	5 1/4	10.50
Z-C	2	0	0	1 1/2	0	-1 1/2	-31 1/2	
Z´-C´	- 1/2	0	1	- 1/4	0	1 1/4	-4 3/4	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X1	1	0	-2	1/2	2	- 1/2	9 1/2	⇦ L1
X2	1/2	1	0	- 1/4	0	1/4	5 1/4	L2-(1/2)L1
Z-C	2	0	0	1 1/2	0	-1 1/2	-31 1/2	L3-2L1
Z´-C´	- 1/2	0	1	- 1/4	0	1 1/4	-4 3/4	L4+(1/2)L1

⇧

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X1	1	0	-2	1/2	2	- 1/2	9 1/2	
X2	0	1	1	- 1/2	-1	1/2	1/2	
Z-C	0	0	4	1/2	-4	- 1/2	-50 1/2	Fim da 1ª Fase
Z´-C´	0	0	0	0	1	1	0	

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2ª Fase

Tabela 54: segunda fase

2ª Fase					
XB	X1	X2	X3	X4	Bi
X1	1	0	-2	1/2	9 1/2
X2	0	1	1	- 1/2	1/2
Z-C	0	0	4	1/2	-50 1/2

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Fim da 1ª fase. Todos valores da função objectivo são positivos. A solução será:

X1 = 19/2; X2=1/2; X3 = 0; X4=0, Z=-101/2.

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

1) Considere o problema de Programação Linear:

$$MinZ = 10X_1 - 6X_2$$

$$s.a.\begin{cases} 4X_1 - 3X_2 \geq 28 \\ X_1 - X_2 \geq 6 \\ 3X_1 - 5X_2 \geq 14 \\ X_1 \geq 0; X_2 \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule utilizando o Método Big-M ou Duas Fases e classifique a solução óptima do problema de PL apresentado.

Resolução: Aplicamos apenas o método de Duas Fases. (Fica a responsabilidade do estudante aplicar BIG M. A solução é a mesma).

Este problema tem uma particularidade. A variável X2 é não positiva, pelo que a sua resolução exige a sua substituição prévia: X2=-X′2, com X′2 ≥0.

De forma prática multiplicamos a variável X2 por (-1) em todas as restrições, incluindo a da função objectivo. Assim teremos forma padrão:

$$MinZ = 10X_1 + 6X_2$$

$$s.a.\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 - X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 + 0X_7 + 0X_8 = 28 \\ X_1 + X_2 + 0X_3 - X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 + 0X_8 = 6 \\ 3X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 - X_5 + 0X_6 + 0X_7 + X_8 = 14 \\ X_1; X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \geq 0 \end{cases}$$

Table 55: Tabela inicial

Tabela Inicial										
Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi	bi/x2
Z	0	0	0	0	0	1	1	1	0	
X6	4	3	-1	0	0	1	0	0	28	9.3
X7	1	1	0	-1	0	0	1	0	6	6.0
X8	3	**5**	0	0	-1	0	0	1	14	2.8
Zj-Cj	-8	-9	1	1	1	0	0	0	-48	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
L1-3L3	X6	4	3	-1	0	0	1	0	0	28
L2-L3	X7	1	1	0	-1	0	0	1	0	6
L3	X2	3/5	**1**	0	0	- 1/5	0	0	1/5	2 4/5
L4+9L3	Zj-Cj	-8	-9	1	1	1	0	0	0	-48

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 56: Primeira iteracção

	1ª Iteracção									
Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi	
X6	2 1/5	0	-1	0	3/5	1	0	- 3/5	19 3/5	8.9
X7	2/5	0	0	-1	1/5	0	1	- 1/5	3 1/5	8.0
X1	**3/5**	1	0	0	- 1/5	0	0	1/5	2 4/5	4.7
Zj-Cj	-2 3/5	0	1	1	- 4/5	0	0	1 4/5	-22 4/5	

	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
L1-(11/5)*L3	X6	2 1/5	0	-1	0	3/5	1	0	- 3/5	19 3/5
L2-2/5L3	X7	2/5	0	0	-1	1/5	0	1	- 1/5	3 1/5
L3	X1	**1**	1 2/3	0	0	- 1/3	0	0	1/3	4 2/3
L4+(13/5)*L3	Zj-Cj	-2 3/5	0	1	1	- 4/5	0	0	1 4/5	-22 4/5

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 57: Segunda iteracção

	2ª Iteracção										
	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi	
	X6	0	-3 2/3	-1	0	1 1/3	1	0	-1 1/3	9 1/3	7
	X7	0	- 2/3	0	-1	**1/3**	0	1	- 1/3	1 1/3	4
	X1	1	1 2/3	0	0	- 1/3	0	0	1/3	4 2/3	(-)
	Zj-Cj	0	4 1/3	1	1	-1 2/3	0	0	2 2/3	-10 2/3	

	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
L1-(4/3)*L2	X6	0	-3 2/3	-1	0	1 1/3	1	0	-1 1/3	9 1/3
L2	X5	0	-2	0	-3	**1**	0	3	-1	4
L3+(1/3)*L2	X1	1	1 2/3	0	0	- 1/3	0	0	1/3	4 2/3
L4+(5/3)*L2	Zj-Cj	0	4 1/3	1	1	-1 2/3	0	0	2 2/3	-10 2/3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 58: Terceira iteracção

	3ª Iteracção										
	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi	
	X6	0	-1	-1	4	0	1	-4	0	4	1
	X5	0	-2	0	-3	**1**	0	3	-1	4	
	X1	1	1	0	-1	0	0	1	0	6	
	Zj-Cj	0	1	1	-4	0	0	5	1	-4	

	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
L1	X4	0	- 1/4	- 1/4	1	0	1/4	-1	0	1
L2+3L1	X5	0	-2	0	-3	1	0	3	-1	4
L3+L1	X1	1	1	0	-1	0	0	1	0	6
L4+4L1	Zj-Cj	0	1	1	-4	0	0	5	1	-4

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Table 59: Quarta iteracção

4ª Iteracção									
Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
X4	0	- 1/4	- 1/4	1	0	1/4	-1	0	1
X5	0	-2 3/4	- 3/4	0	1	3/4	0	-1	7
X1	1	3/4	- 1/4	0	0	1/4	0	0	7
Zj-Cj	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 60: Segunda fase

	2ª Fase										
	Z	10	6	0	0	0	0	0	0	0	
(-10)	X1	1	3/4	- 1/4	0	0	1/4	0	0	7	
	Zj-Cj	0	-1 1/2	2 1/2	0	0	-2 1/2	0	0	-70	
	Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi	
	X4	0	- 1/4	- 1/4	1	0	1/4	-1	0	1	
	X5	0	-2 3/4	- 3/4	0	1	3/4	0	-1	7	
	X1	1	3/4	- 1/4	0	0	1/4	0	0	7	9.33
	Zj-Cj	0	-1 1/2	2 1/2	0	0	-2 1/2	0	0	-70	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

	Xb	X1	**X2**	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
L1+(1/4)*L3	X4	0	- 1/4	- 1/4	1	0	1/4	-1	0	1
L2+(11/3)*L3	X5	0	-2 3/4	- 3/4	0	1	3/4	0	-1	7
L3	**X2**	1 1/3	1	- 1/3	0	0	1/3	0	0	9 1/3
L4+(3/2)*L3	Zj-Cj	0	-1 1/2	2 1/2	0	0	-2 1/2	0	0	-70

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 61: Primeira iteracção

1ª Iteracção									
Xb	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	bi
X4	1/3	0	- 1/3	1	0	1/3	-1	0	3 1/3
X5	3 2/3	0	-1 2/3	0	1	1 2/3	0	-1	32 2/3
X2	1 1/3	1	- 1/3	0	0	1/3	0	0	9 1/3
Zj-Cj	2	0	2	0	0	-2	0	0	-56

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

2) Resolva o problema aaixo pelo método que achar conveniente:

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}\, Z &= 3X_1 + 5X_2 \\ X_1 &\leq 4 \\ 2X_2 &\leq 12 \\ 3X_1 + 2X_2 &= 18 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

<u>Resp: X1 = 2, X2 = 6 e X3 = 2, X4 = 0, X5 = 0 e Z = 36</u>

3) Considere-se o seguinte problema de PL:

$$MaxZ = 6X_1 + 8X_2$$

$$s.a\begin{cases} 30X_1 + 20X_2 \leq 300 \\ 5X_1 + 10X_2 \leq 110 \\ X_1 \geq 6 \\ X_2 \geq 4 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema aplicando o método de Duas Fases.

<u>(Resp:X1=6, X2=6, X3=0, X4=20, X5=0, X6=2 e Z=84)</u>

4) Usando o método que achar conveniente, resolva o problema de PL abaixo:

$$MaxZ = 2X_1 + X_2 + 2X_3$$

$$s.a\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2X_3 = 1 \\ X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 3 \\ 4X_1 + 5X_2 + X_3 \geq 5 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Resp: X1=0, X2=1, X3=0, X4=0, X5=0, X6=0 e Z=1.</u>

Dualidade em Programação Linear

Qualquer problema de programação linear original a que denominamos PRIMAL, têm associado a si um problema designado DUAL. A resolução do problema PRIMAL nos leva a solução do seu dual. Se o problema PRIMALL é de maximização, o seu DUAL será de minimização.

Exemplo: Considere o problema abaixo:

$$Max\ z = 10x_1 + 9x_2$$

$$s.a: \begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \leq 200 \\ 10x_1 + 9x_2 \leq 230 \\ 10x_1 + 9x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$C = (10,9) \rightarrow coeficientes\ da\ f.o \qquad \underbrace{b = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 70 \end{pmatrix}}_{Disponibilidades}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow coeficientes\ das\ restrições$$

A formulação do DUAl será:

$$Min\ z = 200y_1 + 230y_2 + 70y_3$$

$$s.a: \begin{cases} 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 10 \\ 4y_1 + 6y_2 + 1y_3 \geq 9 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Basicamente, trocamos os coeficientes da função objective pelas disponibilidades e transpomos os coeficientes das restrições.

Problema Primal	Problema Dual
Max z = $(c_1\ c_2\ \dots\ c_m) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$	Min $w = (b_1\ b_2\ \dots b_n) \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
Suj à $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$	Suj à $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$

A seguinte tabela mostra as relações entre o problema primal e dual.

Tabela 62: Relação entre o problema primal e dual

Problema Primal	Problema Dual
• n restrições e m variáveis • coeficientes da função objectivo • constantes Problema (max) Problema (min) Restrição (P) Variável (D) $\ge$ ⇔ ≤ 0 $\le$ ⇔ ≥ 0 = ⇔ não restrita	• m variáveis e n restrições • constantes • coeficientes da função objectivo Problema (max) Problema (min) Variável (P) Restrição (D) ≥ 0 ⇔ $\ge$ ≤ 0 ⇔ $\le$ não restrita ⇔ =

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Exemplo 2: Uma empresa produz dois bens, A e B, nas seguintes condições:

	Bem A	Bem B	Recursos críticos disponíveis
Madeira (metros)	30	20	300
Horas de Trabalho	5	10	110
Lucro unitário de venda (€)	6	8	

PRIMAL: DU

$MaxZ = 6x_1 + 8x_2$

s.a.: $30x_1 + 20x_2 \le 300$

$5x_1 + 10x_2 \le 110$

$x_1, x_2 \ge 0$

$MinZ = 300y_1 + 110y_2$

s.a.: $30y_1 + 5y_2 \ge 6$

$20y_1 + 10y_2 \ge 8$

$y_1, y_2 \ge 0$

Teoremas da DUALIDADE

- **T1**: Qualquer solução para o problema primal (dual) constitui um limite para o valor óptimo do problema dual (primal);

- **T2**: O valor da solução óptima para o problema primal, se existir, é igual ao valor da solução óptima do problema dual;
- **T3**: Teorema da Folga Complementar: sempre que exista folga/excesso numa restrição do problema primal (dual), a variável correspondente no problema dual (primal) tem valor nulo.

Resolução do Problema Primal do Exemplo 2

Quadro 1:

	x_1	x_2	F_1	F_2	D
F_1	30	20	1	0	300
F_2	5	10	0	1	110
Z	-6	-8	0	0	0

Quadro 2:

	x_1	x_2	F_1	F_2	D
F_1	20	0	1	-2	80
x_2	1/2	1	0	1/10	11
Z	-2	0	0	4/5	88

Quadro 3:

	x_1	x_2	F_1	F_2	D
x_1	1	0	1/20	-1/10	4
x_2	0	1	-1/40	3/20	9
Z	0	0	1/10	3/5	96

Solução do Primal:

$x_1=4;\ x_2=9;\ F_1=0;\ F_2=0;\ Z=96$

Solução do Dual:

$y_1=1/10;\ y_2=3/5;\ E_1=0;\ E_2=0;\ Z=96$

Exemplo 3: Formar o dual do problema.

Min $w = 4x_1 + 8x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geq 40 \\ 1x_1 - 1x_2 \geq 18 \\ 5x_1 + 1x_2 = 22 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Resolução:

O problema primal tem 3 restrições, portanto 3 variáveis duais sendo a terceira não restrita.

Etapa 1. Transformar a equação em duas inequações.

Min w = $4x_1 + 8x_2$

$$\text{Sujeito à }\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geq 40 \\ 1x_1 - 1x_2 \geq 18 \\ 5x_1 + 1x_2 \geq 22 \\ -5x_1 - 1x_2 \geq -22 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Etapa 2. Escrever o dual correspondente com $y_3 = y_3^+ - y_3^-$

Max z = $40y_1 + 18y_2 + 22y_3^+ - 22y_3^-$

$$\text{Sujeito à }\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 5y_3^+ - 5y_3^- \leq 4 \\ 7y_1 - 1y_2 + 1y_3^+ - 1y_3^- \leq 8 \\ y_i \geq 0; y_3^+ \geq 0; y_3^- \geq 0 \end{cases}$$

Max z = $40y_1 + 18y_2 + 22y_3$

$$\text{Suj à }\begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 5y_3 \leq 4 \\ 7y_1 - 1y_2 + 1y_3 \leq 8 \\ y_i \geq 0; y_3 \text{ nao restrito} \end{cases}$$

Método de Dual Simplex

O método dual simplex também é aplicável aos problemas cujas restrições tem sinal de desigualdade do Tipo "≥".

Exemplo 1: Considere o exemplo abaixo:

$$Min(W) = 7X_1 + 5X_2 + X_3$$

$$s.a\begin{cases} 5X_1 - 3X_3 \geq 7 \\ 2X_2 - 5X_3 \geq 4 \\ X_1 - 3X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Multiplica-se por (-1) as duas primeiras restrições que ficarão do tipo

"≤" e assim evita-se recorrer a técnica de variáveis artificiais BIG M ou Duas Fases.

$$Min(W) = 7X_1 + 5X_2 + X_3$$

$$s.a\begin{cases} -5X_1 + 3X_3 \leq -7 \\ -2X_2 + 5X_3 \leq -4 \\ X_1 - 3X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

$$Min(W) = 7X_1 + 5X_2 + X_3$$

$$s.a\begin{cases} -5X_1 + 0X_2 + 3X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = -7 \\ 0X_1 - 2X_2 + 5X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = -4 \\ X_1 - 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = 3 \\ X_i \geq 0, i = 1,....,6 \end{cases}$$

Tabela 63: Tabela inicial da escolha da linha pivot

Tabela Inicial							
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi
X4	-5	0	3	1	0	0	-7
X5	0	-2	5	0	1	0	-4
X6	1	-3	0	0	0	1	3
Z-C	7	5	1	0	0	0	0
	-1,4		0,3333				

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

No método Dual-Simplex, escolhe-se primeiro a linha pivot. Escolhe-se dentro dos números negativos, o maior valor absoluto (ou o maior valor negativo). Depois escolhe-se a coluna pivot. Na escolha da coluna pivot divide-se a linha Z-C pela linha pivot. Dentro dos valores negativos, escolhe-se o menor valor absoluto. No nosso exercício apenas temos -1.4, pelo que será a nossa coluna pivot.

Tabela 64: O menor valor absoluto da coluna do pivot

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X1	1	0	- 3/5	- 1/5	0	0	1 2/5	L1
X5	0	-2	5	0	1	0	-4	L2
X6	1	-3	0	0	0	1	3	L3-L1
Z-C	7	5	1	0	0	0	0	L4-7L1

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 65: Primeira iteracção

1ª iteracção							
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi
X1	1	0	- 3/5	- 1/5	0	0	1 2/5
X5	0	-2	5	0	1	0	-4
X6	0	-3	3/5	1/5	0	1	1 3/5
Z-C	0	5	5 1/5	1 2/5	0	0	-9 4/5
		-2,5	1,04				

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X1	1	0	- 3/5	- 1/5	0	0	1 2/5	L1
X2	0	1	-2.5	0	- 1/2	0	2	L2
X6	0	-3	3/5	1/5	0	1	1 3/5	L3+3L2
Z-C	0	5	5 1/5	1 2/5	0	0	-9 4/5	L4-5L2

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi
X1	1	0	- 3/5	- 1/5	0	0	1 2/5
X2	0	1	-2 1/2	0	- 1/2	0	2
X6	0	0	-7	1/5	-1 1/2	1	7 3/5
Z-C	0	0	17 2/3	1 2/5	2 1/2	0	-19 4/5

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução final: X1=7/5; X2=2; C3=0; X4=0; X5=0; X6=38/5 e W=99/5

Exemplo 2:

$$MinZ = 5X_1 + 6X_2$$
$$s.a\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 10 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 21 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Reformulação do Problema:

$$MinZ = 5X_1 + 6X_2$$
$$s.a\begin{cases} -X_1 - X_2 \leq -10 \\ -2X_1 - 4X_2 \leq -21 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma Padrão:

$$MinZ = 5X_1 + 6X_2$$
$$s.a\begin{cases} -X_1 - X_2 + X_3 + 0X_4 \leq -10 \\ -2X_1 - 4X_2 + 0X_3 - X_4 \leq -21 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela 66: Tabela inicial da indicação de linha e coluna pivot

	x1	x2	X3	X4	Bi	
X3	-1	-1	1	0	-10	
X4	-2	-4	0	1	-21	Linha Pivot
z	5	6	0	0		
	5/-2=-2.5	6/-4=-1.5				
		coluna Pivot		(menor valor em modulo)		

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	Bi	
X3	-1	-1	1	0	-10	L1+L2
X2	1/2	1	0	- 1/4	5 1/4	L2 ⇐
Z-C	5	⇧ 6	0	0	0	L3-6L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	Bi	
X3	- 1/2	0	1	- 1/4	-4 3/4	L1+L2 ⇐
X2	1/2	1	0	- 1/4	5 1/4	L2
Z-C	2	0	0	1 1/2	-31 1/2	L3-6L2
	-4 ⇧			-6		

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	Bi	
X1	1	0	-2	1/2	9 1/2	L1 ⇐
X2	1/2	1	0	- 1/4	5 1/4	L2-(1/2)*L1
Z-C	2	0	0	1 1/2	-31 1/2	L3-2L1

⇧ **Fonte:** *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	Bi
X1	1	0	-2	1/2	9 1/2
X2	0	1	1	- 1/2	1/2
Z-C	0	0	4	1/2	-50 1/2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução final:

X1 = 19/2; X2 = ½; X3 = 0; X4 = 0; Z = -101/2

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

1) Dado o seguinte modelo de programação Linear:

$$Min(D) = 180X_1 + 240X_2 + 600X_3$$

$$s.a \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 21 \\ 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 20 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Encontre o dual do problema acima.

b) Resolva o problema Dual usando o método simplex

c) Encontre a solução do Primal a partir do quadro do dual

Resolução:

a) Encontre o dual do problema acima.

$$MaxZ(y) = 21Y_1 + 20Y_2$$

$$s.a\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \leq 180 \\ 2y_1 + 4y_2 \leq 240 \\ 6y_1 + 5y_2 \leq 600 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) Resolva o problema Dual usando o método simplex

Forma Padrão

$$MaxZ(y) = 21Y_1 + 20Y_2$$

$$s.a\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 \leq 180 \\ 2y_1 + 4y_2 + 0y_3 + y_4 + 0y_5 \leq 240 \\ 6y_1 + 5y_2 + 0y_3 + 0y_4 + y_5 \leq 600 \\ y_i \geq 0; i = 1,...,5 \end{cases}$$

Tabela 67: Tabela inicial

Tabela Inicial

XB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Bi	bi/Y1
Y3	3	2	1	0	0	180	60
Y4	2	4	0	1	0	240	120
Y5	6	5	0	0	1	600	100
Z-C	-21	-20	0	0	0	0	

XB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Bi	
Y3	1	2/3	1/3	0	0	60	L1
Y4	2	4	0	1	0	240	L2-2L1
Y5	6	5	0	0	1	600	L3-6L1
Z-C	-21	-20	0	0	0	0	L4+21L1

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 68: Primeira iteracção

1ª iteracção

XB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Bi	
Y1	1	2/3	1/3	0	0	60	90
Y4	0	2 2/3	- 2/3	1	0	120	45
Y5	0	1	-2	0	1	240	240
Z-C	0	-6	7	0	0	1260	

XB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Bi	
Y1	1	2/3	1/3	0	0	60	L1-2/3*L2
Y2	0	1	- 1/4	3/8	0	45	L2
Y5	0	1	-2	0	1	240	L3-L2
Z-C	0	-6	7	0	0	1260	L4+6L2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 69: Segunda iteracção

2ª Iteracção						
XB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Bi
Y1	1	0	1/2	- 1/4	0	30
Y2	0	1	- 1/4	3/8	0	45
Y5	0	0	-1 3/4	- 3/8	1	195
Z-C	0	0	5 1/2	2 1/4	0	1530

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Solução do Dual:

Y1=30; Y2=45; Y3=0; Y4=0; Y5=195; Max Z(y) = 1530

c) Encontre a solução do Primal a partir do quadro do dual.

X1=11/2; X2=9/4; X3 =0; Min (D) = -1530

2) Considere o problema abaixo, resolva-o pelo método DUAL Simplex.

Para resolução, primeiro multiplicar as duas últimas restrições por (-1) para transformar as desigualdades em ("≤").

$$MaxZ = 6X_1 + 8X_2$$

$$s.a\begin{cases} 30X_1 + 20X \le 300 \\ 5X_1 + 10X_2 \le 110 \\ X_1 \ge 6 \\ X_2 \ge 4 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30X_1 + 20X \le 300 \\ 5X_1 + 10X_2 \le 110 \\ -X_1 \le -6 \\ X_2 \le -4 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

Forma Padrão

$$MaxZ = 6X_1 + 8X_2$$

$$s.a\begin{cases} 30X_1 + 20X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 300 \\ 5X_1 + 10X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 110 \\ -X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 = -6 \\ 0X_1 - X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 = -4 \\ X_i \ge 0; i = 1,\dots,6 \end{cases}$$

Resolução:

Tabela 70: Tabela inicial de resolução

Tabela Inicial								
XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X3	30	20	1	0	0	0	300	
X4	5	10	0	1	0	0	110	
X5	-1	0	0	0	1	0	-6	pivot
X6	0	-1	0	0	0	1	-4	
Z-C	-6	-8	0	0	0	0	0	
Pivot	6							

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X3	30	20	1	0	0	0	300	L1-30L3
X4	5	10	0	1	0	0	110	L2-5L3
X1	1	0	0	0	-1	0	6	L3*(-1)
X6	0	-1	0	0	0	1	-4	L4
Z-C	-6	-8	0	0	0	0	0	L5+6L3

3)

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X3	0	20	1	0	30	0	120	
X4	0	10	0	1	5	0	80	
X1	1	0	0	0	-1	0	6	
X6	0	-1	0	0	0	1	-4	Pivot
Z-C	0	-8	0	0	-6	0	36	
Pivot		8						

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi	
X3	0	20	1	0	30	0	120	L1-20L4
X4	0	10	0	1	5	0	80	L2-10L4
X1	1	0	0	0	-1	0	6	L3
X2	0	1	0	0	0	-1	4	L4
Z-C	0	-8	0	0	-6	0	36	L5+8L4

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

XB	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Bi
X3	0	0	1	0	30	20	40
X4	0	0	0	1	5	10	40
X1	1	0	0	0	-1	0	6
X2	0	1	0	0	0	-1	4
Z-C	0	0	0	0	-6	-8	68

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

4) Escreva os problemas na forma canónica e transforme-os em duais.

a) Minimizar $W = 9y_1 + 2y_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 4y_1 + y_2 \geq 13 \\ 3y_1 + y_2 \leq 12 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Maximizar $Z = 16x1 + 12x2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 - x_2 \leq -9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

5) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$MinW = 5X_1 + 2X_2$$

$$a \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Escreva o problema dual correspondente.

b) Obtenha a solução do primal a partir da resolução do dual pelo método simplex.

(Resp. X = (0; 8; 0; 2; 4) com W_{min} = 16 u.m).

6) Considere o seguinte problema de programação linear.

$$MaxZ = 12X_1 + 15X_2$$

$$s.a\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ 2X_1 + 5X_2 \leq 10 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Usando o método simplex resolva o problema e apresente as soluções do primal e dual.

(Primal: Resp. X = (15/7; 8/7; 0; 0) com Z_{max} = 300/7)

(Dual: Resp: Y = (15/7; 12/7; 0; 0) com W_{min} = 300/7)

7) Nos seguintes casos transformar em duais e depois resolver os problemas.

a) Min W = $5y_1 + 2y_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ 2y_1 + 1y_2 \geq 7 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

b) Min W = $2y_1 + 1y_2 + 3y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 100 \\ 2y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 50 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

c) Min W = $7y_1 + 5y_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2y_1 + 1y_2 \geq 4 \\ 1y_1 - 2y_2 \geq -8 \\ -2y_1 + y_2 \geq -8 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

d) Min W = $2y_1 + 1y_2$

Sujeito à $\begin{cases} 2y_1 + 1y_2 = 20 \\ 2y_1 + 1y_2 \geq 10 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

a) ***Resp****. Y = (0; 7; 15; 0) com W_{min} = 14*

b) ***Resp.*** *Y = (0; 100; 0; 0; 50) com W_{min} = 100*

c) ***Resp.*** Y = (2; 0; 0; 10; 4) com W_{min} = 14

d) ***Resp***. Y = (10; 0; 0; 0; 10) com W_{min} = 20

8) Resolva os seguintes problemas pelo método dual simplex, se necessário apresente a solução pelo método gráfico. Nota: substituir as equações por duas inequações.

a) Min W = $4x_1 + 2x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min W = $2x_1+3x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Respostas:

a) X = (3/4; 1/4 ; 1/6; 0; 0) W_{min} = 7/2

b) X = (2; 0; 1; 0; 0) W_{min} = 4

UNIDADE Temática 2.4: Método de Transportes

Introdução

Nesta unidade temática vamos apresentar a técnica de resolução de problemas de transportes. Existe vários métodos. Apenas vamos falar do método do Canto Noroeste, método do custo mínimo e o método de Voguel.

Segundo Mulenga (2005), um dos problemas comuns na administração de empresas é como conseguir fazer operar um conjunto de máquinas como autocarros ou aviões numa rede permissível com um custo mínimo?

Como estruturar as fábricas de produção de um determinado produto em relação aos locais de vendas de tal forma que o lucro das vendas seja máximo. Este e outros casos, são problemas que afectam a rede de transporte.

Segundo Render e Ralph (1997), o conhecimento e utilização dos modelos de problemas de transporte, foi proposto pela primeira vez por Hitchcock, F.L. (1941) no seu estudo chamado "Distribuição de produtos de diversas fontes para vários locais”. Doze anos depois e independentemente Koopmans, T.C (1953), fez uma grande contribuição ao publicar na revista o tema “Sistemas de transporte e sua optimização”. A. Charnes e W.W, Cooper desenvolveram o método de Stepping Stone e em 1955 o método de MODI já era conhecido como um método mais rápido para a optimização dos Problemas de Transporte (PTR).

É importante lembrar que na planificação da distribuição de um produto a função transporte leva lugar de destaque, pois, não adianta nada, do ponto de vista do mercado, o fornecedor dispor de um bom produto que não é encontrado pelo cliente no momento que ele o deseja.

A estrutura geral de um modelo de problemas de transporte pode ser vista em três perspectivas:

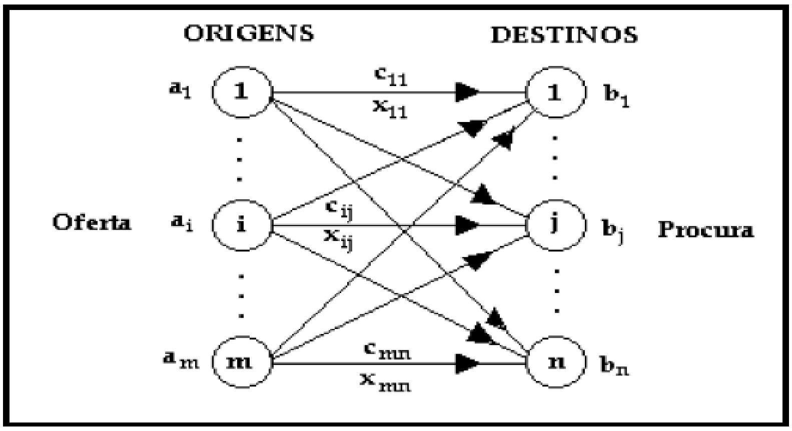
- Uma empresa que possui fábricas localizadas em algumas cidades e depósitos em outras. A empresa deve determinar um programa de transporte de seus produtos de forma a satisfazer a procura destes e minimizar os seus gastos mas respeitando a capacidade das fábricas e dos depósitos (transporte directo);
- Uma variante desta situação, é aquela em que os produtos não vão directamente da fonte ao consumidor, mas passa primeiro por outras fontes ou destinos (transporte com transbordo ou indirecto).
- A última variante é o caso em que se tem um certo número de serviços que devem ser executados por algumas pessoas ou máquinas, e cada conjunto tarefa - máquina tem seu custo particular de execução (problemas de afectação ou assignação).

O que temos em comum nestes três casos é a rede de transporte ligando fontes aos destinos.

Formulação de um problema de transporte

Suponhamos que existem ***m - fábricas*** de um certo produto, cada fonte pode fornecer uma quantidade a_i e por outro lado existem ***n*** – *mercados*, cada um pode absorver uma quantidade b_j. E sabe-se que o custo de transportar de uma unidade da fonte i para o destino j é c_{ij}. O objectivo do administrador é determinar o número de unidades que devem ser transportadas de cada fonte para cada destino de forma a minimizar o custo total de transporte. Este problema pode ser representado na *figura 2 seguinte*:

Figura 2: Minimização de custo total de transporte



Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

Os problemas de transporte são um caso particular dos problemas de programação linear, e em especial da programação linear inteira, porque o número de unidades a transportar de uma fábrica (local) para a loja (outro local) deve ser um número inteiro.

O modelo geral dos problemas de transporte pode ser formulado assim:

Optimizar Z = $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Sujeito à
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & ; i = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & ; j = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j & \\ x_{ij} \in Z_0^+ & \end{cases}$$

Onde:

x_{ij} – é a quantidade transportada de origem i para o destino j;

c_{ij} – é o custo de transporte de uma unidade de a_i para b_j;

a_i – é a quantidade disponível na origem i (oferta);

b_j – é a quantidade necessária no destino j (procura)

O objectivo da programação é determinar as quantidades x_{ij} que devem ser transportadas de cada origem para cada destino de modo a optimizar o produto·$\Sigma c_{ij}.x_{ij}$. A restrição $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ é condição necessária para que o problema de transporte tenha solução, caso contrário introduzem-se origens e destinos fictícios com custo nulo: $c_{ij} = 0$.

a) se $\Sigma a_i > \Sigma b_j$, introduz-se um destino fictício $b_{n+1} = \Sigma a_i - \Sigma b_j$

b) se $\Sigma a_i < \Sigma b_j$, introduz-se uma origem fictícia $a_{m+1} = \Sigma b_j - \Sigma a_i$

A solução dos modelos de distribuição pelo método simplex não é eficiente pelo facto de apresentar o maior número de variáveis, sendo assim foram criados algoritmos especiais para a sua solução.

Uma outra forma de representar este problema, consiste na utilização de uma tabela comlo se segue:

Tabela 71: Outra forma de representação do problema

DESTINOS

ORIGENS		1	2	. . .	n	Oferta
	1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	. . .	x_{1n} c_{1n}	a_1
	2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	. . .	x_{2n} c_{2n}	a_2
	. . .	. . .	. . .		. . .	. . .
	m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	. . .	x_{mn} c_{mn}	a_m
	Procura	b_1	b_2	. . .	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

- cada linha corresponde a uma origem,
- cada coluna corresponde a um destino,
- a última coluna contém a informação relativa às quantidades disponíveis nas origens,
- a última linha contém a informação respeitante a quantidades necessárias nos destinos,
- em cada quadrícula (i, j) encontra-se a quantidade a transportar da origem **i** para o destino **j**, **xij**, e o correspondente custo unitário de transporte, **cij**.

Exemplo: Uma empresa tem 4 postos de venda de um determinado produto, o qual é fornecido a partir de 3 fábricas. Os custos unitários de transporte do produto desde as fábricas até aos postos (u.m.) encontram-se especificados no quadro seguinte. A última coluna indica a produção de cada fábrica (oferta). A última linha do quadro contém a quantidade que cada posto necessita (procura). Existe um acordo entre a Fábrica 2 e o Posto 2 no sentido desta fornecer a este posto 60 unidades do produto.

Tabela 72: Relação de postos de vendas de certo produto

Descrição	Posto 1	Posto 2	Posto 3	Posto 4	**Oferta**
Fábrica 1	10	5	10	9	50
Fábrica 2	6	15	11	7	60
Fábrica 3	-	12	15	8	50
Procura	20	60	20	30	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Formulação do Problema:

Considerando que cada posto apenas pode receber o produto de uma única fábrica, o plano óptimo de transporte do produto desde as 3 fábricas até aos 4 postos de venda será:

- ***Oferta= 50+60+50=160***
- ***Procura= 20+60+20+30=130***

A oferta excede a procura pelo que deve-se criar uma procura Fictícia com valor de 30.

Tabela 73: A oferta excende a procura

Descrição	Posto 1	Posto 2	Posto 3	Posto 4	**Posto Fictício**	**Oferta**
Fábrica 1	10	5	10	9	-	50
Fábrica 2	6	15	11	7	-	60
Fábrica 3	-	12	15	8	-	50
Procura	20	60	20	30	30	**160**

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

$$MinC = 10X_{11} + 5X_{12} + 10X_{13} + 9X_{14} + 6X_{21} + 15X_{22} + 11X_{23} + 7X_{24}$$
$$+ 0X_{31} + 12X_{32} + 15X_{33} + 8X_{34}$$

$$s.a\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 50 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 60 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 50 \\ X_{iJ} \geq 0; i = 1,...,3;\ j = 1,...,5 \end{cases} \quad \text{Restrição de Oferta}$$

$$s.a\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 20 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 60 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 20 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 30 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} = 30 \\ X_{ij} \geq 0; i = 1,..,5;\ j = 1,..,3 \end{cases} \quad \text{Restrição de Procura}$$

Método do Canto Noroeste

Para encontrar a primeira aproximação de um problema de transporte pelo Método de Canto Noroeste (MCN; NWC = NorthWest Corner) é necessário seguir os seguintes passos:

Passo 1. Começar por colocar a quantidade necessária no canto noroeste, na posição x_{11}, com uma alocação suficientemente grande.

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\};$$

Passo 2. Ajustar a linha ou coluna satisfeita com zero e simultaneamente passar a coluna ou linha seguinte:

- Se $x_{11} = a_1 \Rightarrow x_{21} = b_1 - a_1 \Rightarrow$ linha seguinte
- Se $x_{11} = b_1 \Rightarrow x_{12} = a_1 - b_1 \Rightarrow$ coluna seguinte

Passo 3. Repetir os passos 1 e 2 até completar o preenchimento de quadro, obtendo-se assim a solução inicial (primeira aproximação), tendo em conta que $\Sigma x_{ij} = a_i$ e $\Sigma x_{ij} = b_j$.

Exemplo 1: Considere o exemplo acima.

Os custso estimados são colocados no canto superior esquerdo de cada célula X_{ij}. Por exemplo para X_{11} temos um custo de 10 u.m. no cruzamento entre a linha 1 e coluna 2.

Para resolução do problema pelo método de canto noroeste, começamos pelo canto superior esquerdo. Em relação à oferta temos 50 da fábrica 1 e uma procura de 20 do posto 1.

Table 74: Método de Canto Noroeste

Descrição	Posto 1	Posto 2	Posto 3	Posto 4	Posto Fictício	Oferta
Fábrica 1	10	5	10	9	0	
	20	**30**	x	x	x	50
Fábrica 2	6	15	11	7	0	
	x	**30**	**20**	**10**	x	60
Fábrica 3	0	12	15	8	0	
	x	x	x	**20**	**30**	50
Procura	20	60	20	30	30	160

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Como é feita a resolução? Vamos a uma breve explanação:

- Primeiro verificamos o mínimo entre a procura e a oferta na célula X_{11} (Min{20;50}=20);
- Coloca-se a quantidade de 20 na célula X_{11}, como mínimo. Neste caso esgotamos as células na vertical.

  No entanto, pela horizontal ainda existe uma oferta remanescente de 30 unidades, que são colocadas na célula X_{12}.
- A linha 1 também esgota, mas ainda teremos uma procura não satisfeita de 30 unidades, que podem ser absorvidas pela Fábrica 2. Colocamos na célula X_{21} o valor de 30 e esgotamos a procura. Depois de esgotarmos a célula anula a célula sem valor por um x.

- Na linha 2 teremos uma oferta de 30 não esgotada, porque a oferta total é de 60. No entanto não podemos colocar na célula X_{22} um valor de 30 porque temos uma procura de 20. Colocamos os 20 e o remanescente é colocado na célula a seguir X_{23}. Esgota-se o posto 3 e a linha 2.
- Neste caso passamos para a linha 3. Nela só podemos colocar 20 unidades porque a procura para o posto 4 é de 30 e já hivíamos colocados 10 unidades acima. Em relação à oferta faltam 30 unidade para satisfazer o valor total de 50 unidades.
- Multiplicam-se as quantidades pelos custos existentes em cada célula.
- Custo Mínimo = 20*10+30*5+30*15+20*11+10*7+20*8+30*0 = **1.250**

Exemplo 2: Certa empresa possui 2 fábricas a produzirem determinado produto, a ser depois transportado para 3 centros de distribuição. As fábricas 1 e 2 produzem 100 e 50 carregamentos por mês, respectivamente. Os centros 1, 2 e 3 necessitam de receber 80, 30 e 40 carregamentos por mês, respectivamente. Sabendo que os custos de transporte, por carregamento, são os que constam na *tabela 75*:

Tabela 75: Custo de transporte por carregamento

	Centro 1	Centro 2	Centro 3
Fábrica 1	7	4	3
Fábrica 2	3	1	2

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A formulação do problema (minimização do custo total de transporte) vem:

$$
\begin{array}{llcccccccccccl}
\text{Minimizar} & Z = & 7x_{11} & + & 4x_{12} & + & 3x_{13} & + & 3x_{21} & + & x_{22} & + & 2x_{23} & \\
\text{Sujeito a} & & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = 100 \\
& & & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = 50 \\
& & x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = 80 \\
& & & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = 30 \\
& & & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = 40 \\
& & & & & & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23} \geq 0$$

Tabela 76: Método de Canto Noroeste - Resolução

Descrição	Centro 1		Centro 2		Centro 3		Oferta
Fábrica 1	X_{11}	7	X_{12}	4	X_{13}	3	100
	80		**20**		**X**		
Fábrica 2	X_{21}	3	X_{22}	1	X_{23}	2	50
	X		**10**		**40**		
Procura	80		30		40		150

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A SBA obtida é:

$X_{11} = 80$, $X_{12} = 20$, $X_{22} = 10$, $X_{23} = 40$ - variáveis básicas (*células preenchidas*).

$X_{21} = 0$, $X_{13} = 0$ - variáveis não básicas (*células vazias*) a que corresponde o valor da FO, $z = 7 \times 80 + 4 \times 20 + 1 \times 10 + 2 \times 40 = 730$.

Método de Custo Mínimo

Este método, ao invés do anterior, tem em consideração a matriz dos custos de transporte, pelo que, em princípio, determina soluções iniciais mais próximas da solução óptima.

Neste caso, a escolha da variável a tomar como básica, recai sobre aquela de menor custo em cada quadro (em caso de empate, a escolha é arbitrária).

O método de custo mínimo (ou lucro máximo), pode ser aplicado para procurar uma solução inicial viável de menor custo ou maior lucro. O procedimento do método é seguinte:

Passo 1. Começar por colocar o máximo possível à célula ou variável de menor custo unitário (maior lucro) e colocar zero nas células da linha ou coluna satisfeita.

Passo 2. Ajustar os elementos ou a quantidade que resta na linha ou coluna não ajustada, a partir da variável com menor custo (maior lucro).

Passo 3. Repetir o processo para as variáveis com outros custos na ordem crescente (decrescente) até completar o preenchimento do quadro.

Tabela 77: Método de Custo Mínimo

Descrição	Posto 1		Posto 2		Posto 3		Posto 4		Posto Fictício		Oferta
Fábrica 1	X_{11}	10	X_{12}	5	X_{13}	10	X_{14}	9	X_{15}	0	50
	x		**20**		**x**		**x**		**30**		
Fábrica 2	X_{21}	6	X_{22}	15	X_{23}	11	X_{24}	7	X_{25}	0	60
	20		**x**		**10**		**30**		**x**		
Fábrica 3	X_{31}	---	X_{32}	12	X_{33}	15	X_{34}	8	X_{35}	0	50
	x		**40**		**10**		**x**		**x**		
Procura	20		60		20		30		30		160

Fonte: *Adaptado pelo autor (Marçpo, 2016)*

Neste exercício, como na matriz inicial não temos uma igualdade entre a procura e a oferta. Foi introduzida uma procura fictícia com custos nulos e uma quantidade demandada de 30 unidades.

A resolução pode começar em qualquer uma das células do posto fictício cujo custo é zero.

Na resolução deste exercício consideramos a célula à direita entre a fábrica 1 e o posto fictício (Mín(30;50)=30). Colocamos x nas restantes células da coluna do posto fictício porque foram esgotadas as 30 unidades.

O passo seguinte é procurar a próxima célula com custo mínimo. Neste caso está entre o posto 2 e a fábrica 1 cujo custo é 5. Nesta linha 1 ainda temos o remanescente de 20 unidades não utilizadas e como temos no posto 2 uma procura de 60 unidades, esta pode ser absorvida e restando ainda uma demanda não satisfeita de 40 unidades. No entanto, temos que procurar o custo mínimo seguinte que está na célula X_{21} de 6 u.m. Assim, teremos (min(20;60)=20). Esgota-se a demanda do posto 1.

A linha 2 terá uma oferta não absorvida de 40 unidades e ainda tem na sua linha o próximo custo mínimo de 7 u.m na célula X_{24}. Esta coluna corresponde ao posto 4 que tem uma demanda de 30 unidades. Assim, min(30;40)=30, pelo que esgota-se a demanda e anula-se as célula X_{34}. Fica uma oferta pendente de 10 unidades.

O custo mínimo seguinte é 8 na linha da fábrica 3. No entanto, a coluna correspondente já foi esgotada, pelo que, passamos para o custo mínimo seguinte. Neste caso na célula X_{23} que não está esgotada, cujo custo é 11. Segue-se o mesmo procedimento até a finalização do exercício.

A solução básica do exercício será:

X_{12}=20; X_{15}=30; X_{21}=20; X_{23}=10; X_{24}=30; X_{32}=40; X_{33}=10

Fo: Z=20*5+30*0+20*6+10*11+30*7+40*12+10*15= 1.170

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

1) Uma empresa tem três armazéns nas cidades de Maputo, Beira e Nampula, e tem lojas nas cidades de Xai-Xai, Chimoio, Quelimane e Inhambane. Os custos de transporte de um dado produto dos armazéns às lojas apresentam-se na *tabela 74*:

Tabela 78: Custo de transporte de um certo dos armazéns

	X	C	Q	I	K	Oferta
Maputo	38	30	30	45	0	17
Beira	60	25	50	32	0	32
Nampula	42	20	16	70	0	30
Procura	10	14	15	28	12	

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

a) Formule o problema como um modelo de programação Linear.
b) Resolva o problema pelo método de Canto – Noroeste.
c) Resolva o problema pelo método de Custo – Minimo.
d) Faz a análise comparativa entre os dois modelos de resolução deste problema.

Resolução

a) Formule o modelo de programação Linear, (**1.5. V**)

Verificar a condição de equilíbrio ou seja a oferta é igual a procura:

67 + K = 79

K = 12, logo:

Min (D) = 38x11 + 30 x12 + 30 x13+ ...+0x35

Sa: x11 + x12 + x13 +x14 + x15 = 17

X21 + x22 +x23 + x24 + x25 = 32

X31 + x32 + x33 + x34 + x35 = 30

X11 + x21 + x31 = 10

X12 + x22 + x32 = 14

X31 + x32 + x33 = 15

X41 + x42 + x43 = 28

X51 + x52 + x53 = 12

Xij ≥0, onde I = 1,2,3, e j = 1,2,3,4,5.

b) Resolva o problema pelo método de Canto – Noroeste (1,5)

Descrição	X	C	Q	I	K	*Oferta*
Maputo	10 (38)	7 (30)	X (30)	X (45)	X (0)	17
Beira	X (60)	7 (25)	15 (50)	10 (32)	X (0)	32
Nampula	X (42)	X (20)	X (16)	18 (70)	12 (0)	30
Procura	10	14	15	28	12	**350**

CT(W) = 10*38+7*30+7*25+15*50+10*32+18*70

CT(W) = 3.095,00MT

c) Resolva o problema pelo método de Custo - Minimo

Descrição	X	C	Q	I	K	*Oferta*
Maputo	X (38)	5 (30)	X (30)	X (45)	12 (0)	17
Beira	X (60)	9 (25)	X (50)	23 (32)	X (0)	32
Nampula	10 (42)	X (20)	15 (16)	5 (70)	X (0)	30
Procura	10	14	15	28	12	**350**

CT(C) = 5*30+12*0+9*25+23*32+10*42+15*16+5*70

CT(C) = 2.121,00 MT

d) Faz a análise comparativa entre os dois modelos de resolução deste problema.

O melhor modelo é o de custo mínimo porque apresenta o menor custo de transporte.

2) Uma companhia tem 3 fábricas a produzir um dado produto, para ser depois transportado para 4 centros de distribuição. As fábricas (1, 2 e 3) produzem 12, 17 e 11 carregamentos por mês. Cada centro necessita de 10 carregamentos por mês. As distâncias de cada fábrica a cada centro (em Km) constam da tabela. O custo do frete de cada carregamento é de 5.000 MT mais 50 MT por Km.

Tabela 79: Custo de frete no carregamento

	Centro 1	Centro 2	Centro 3	Centro 4
Fábrica 1	80	130	40	70
Fábrica 2	110	140	60	100
Fábrica 3	60	120	80	90

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

a) Formule o problema de modo a minimizar o custo de Transporte

b) Resolva pelo Método de Canto Noroeste

c) Resolva o problema pelo Método de Custo Mínimo.

Resolução:

a) Formule o problema de modo a minimizar o custo de Transporte

Min C= 5000X_{ij}+50*C_{ij}

Onde:

X_{ij} – Número de carregamentos da fábrica i para o Centro j

C_{ij} – distância percorrida da fábrica i para o Centro j

Restrição de Oferta

$$s.a\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=12 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=17 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=11 \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

Restrição de Procura

$$s.a\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=10 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=10 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=10 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=10 \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

b) Resolva pelo Método de Canto Noroeste

Tabela 80: Método de Canto Noroeste

Método de Canto Noroeste					
Fábricas	Centros de Distribuição				Oferta
	Centro1	Centro 2	Centro 3	Centro 4	
Fábrica 1	80 10	130 2	40 x	70 x	12
Fábrica 2	110 x	140 8	60 9	100 x	17
Fábrica 3	60 x	120 x	80 1	90 10	11
Procura	10	10	10	10	40

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Custo de cada carregamento = 5000

Custo/Km = 50

Custo de Transporte=

(10*5000+80*50)+(2*5000+130*50)+(8*5000+140*50)+(9*5000+60*50)+(1*5000+80*50)+(10*5000+90*50) = 229.000

c) Resolva o problema pelo Método de Custo Mínimo

Tabela 81: Método de Custo Mínimo

Método de Custo Mínimo					
Fábricas	Centros de Distribuição				Oferta
	Centro 1	Centro 2	Centro 3	Centro 4	
Fábrica 1	80 x	130 x	40 10	70 2	12
Fábrica 2	110 9	140 x	60 x	100 8	17
Fábrica 3	60 1	120 10	80 x	90 x	11
Procura	10	10	10	10	40

Fonte: *Adaptado pelo auditor (Março, 2016)*

Custo de Cada Carregamento = 5000 MT

Custo por Km = 50 Mt

Custo de Transporte = (10*5000+40*50) + (2*5000+70*50) + (9*5000+110*50) + (8*5000+100*50) + (1*5000+60*50) + (10*5000+120*50) = 225.000

3) São dadas as seguintes condições do problema de transporte: Capacidade de fornecimento das fontes: a1 = 25; a2 = 25; a3 = 50; Capacidade de absorção dos destinos: b_1 = 15; b_2 = 20; b_3 = 20; b_4 = 35. Os custos associados ao transporte de 1 u.m da fonte i para o destino j estão no quadro.

10	5	6	7
8	2	7	6
9	3	4	8

Usando o método de Canto Noroeste, encontre a primeira aproximação e o valor de custo mínimo.

Resp: Wmin = 625 u.m.

4) Uma empresa transportadora é alugada para levar artigos de três fábricas F_1, F_2 e F_3 para 4 armazéns A_1, A_2, A_3 e A_4 de onde são vendidos para os clientes a porta. O lucro de transporte de uma carrada está indicado por cada rota, bem como a capacidade das fábricas e dos armazéns.

Tabela 82: Relação de artigos por levar de três fábricas

	A_1	A_2	A_3	A_4	Oferta
F_1	26	26	20	21	450
F_2	21	24	20	21	300
F_3	18	20	19	20	250
Procura	200	340	150	270	

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Determinar as quantidades que devem ser transportadas de cada fábrica para cada armazém para que a empresa transportadora maximize o seu lucro. Use o método do lucro máximo.

Resp: LT = 22.320 u.m.

UNIDADE Temática 2.5: Método de Afectação

Introdução

Os problemas de transportes visam distribuir tarefas a indivíduos de forma económica. O problema de afectação pode ser formulado como sendo um problema de transportes.

O problema clássico consiste em afectar n indivíduos a **n** tarefas – um indivíduo por tarefa e uma tarefa por indivíduo, tendo por objectivo a minimização do custo total envolvido no plano de afectação, sendo conhecidos os custos, cij, de afectar o indivíduo i à tarefa j (i, j = 1, 2, …, n).

O problema de afectação pode ser formulado como um caso especial do problema de transporte, e portanto, utilizar um método de resolução mais eficiente.

A formulação é a seguinte:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o indivíduo i for afecto à tarefa j} \\ 0 & \text{se o indivíduo i não for afecto à tarefa j} \end{cases}$$

Então, o problema consiste em

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_j x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} = 0, 1$$

em que os dois conjuntos de restrições garantem que cada indivíduo é afectado exactamente a uma só tarefa, e que cada tarefa é executada por um só indivíduo, respectivamente.

O facto de considerar xij = 0 ou xij = 1 torna o problema de difícil resolução. No entanto, a sua substituição por xij ≥ 0 transforma o problema de afectação num problema de transporte equivalente, nem que :

- Os indivíduos são as 'origens' e as tarefas são os 'destinos';
- As disponibilidades em cada origem e as necessidades em cada destino são iguais a 1;
- O custo unitário de transporte é cij e xij é inteiro (xij ≥ 0).

Portanto, o problema pode ser organizado, na seguinte forma:

TAREFA

INDIV	1		2		. . .	n		
1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	. . .	x_{1n}	c_{1n}	1
2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	. . .	x_{2n}	c_{2n}	1
. . .	. . .		. . .			. . .		. . .
n	x_{n1}	c_{n1}	x_{n2}	c_{n2}	. . .	x_{nn}	c_{nn}	1
	1		1		. . .	1		

Exemplo 1: Numa fábrica foram instaladas 3 máquinas e 3 empregados. O objectivo da Direcção da fábrica é estabelecer uma afectação máquina−empregado recíproca e exclusiva, que envolva um custo mínimo. Os custos de afectação são os seguintes:

		Máquina		
		1	2	3
Empregado	1	25	31	35
	2	24	17	16
	3	15	23	18

A formulação do problema é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad Z = \; & 25\,x_{11} + 31\,x_{12} + 35\,x_{13} + \\
& + 24\,x_{21} + 17\,x_{22} + 16\,x_{23} + \\
& + 15\,x_{31} + 23\,x_{32} + 18\,x_{33}
\end{aligned}
$$

Sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}=1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=1 \end{array}\right\} \text{ 1 empregado } \Rightarrow \text{ 1 máquina}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=1 \end{array}\right\} \text{ 1 máquina } \Rightarrow \text{ 1 empregado}$$

Método Húngaro

Segundo Tavares et all (1996: 96), o método Húngaro tem por base o facto da solução óptima não ser alterada se for adicionada (ou subtraída) a mesma quantidade a todos os elementos de uma qualquer linha ou coluna da matriz de custos. Este método baseia-se no **Teorema de Konig** que a seguir apresentaremos.

Um conjunto de elementos de uma matriz diz-se independente se não houver mais do que um elemento desse conjunto em qualque das linhas da matriz.

Para uma matriz quadrada, o Teorema de Konig estabelece que o máximo de número de zeros constituindo um conjunto independente é igual ao número de linhas necessárias para incluir todos os zeros da matriz.

Adicionando ou subtraindo valores de forma adequada às linhas e às colunas da matriz de custos, de dimensão (n x n), de um problema de afectação, acaba por se obter um problema equivalente com n zeros independentes. Esses zeros correspondem à afectação óptima, fazendo-se X_{ij} = 1 para valores nulos da matriz de custos transformada, X_{ij} = 0 para os restantes.

O Método Húngaro é apresentado a seguir através de um exemplo numérico.

Exemplo 1: considere-se que existem 5 trabalhadores que devem ser afectados a 5 tarefas. A matriz de custos associados à realização de cada tarefa por cada trabalhador é a seguinte:

Tabela 83: Matriz de custo associados

Trabalhadores \ Tarefas	1	2	3	4	5
1	17.5	15	9	5.5	12
2	16	16.5	10.5	5	10.5
3	12	15.5	14.5	11	5.5
4	4.5	8	14	17.5	13
5	13	9.5	8.5	12	17.5

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

1° Passo:

Subtrair o menor elemento de cada coluna a todos os elementos dessa coluna. A partir do quadro obtido, subtrair o menor elemento de cada linha a todos os elementos dessa linha.

Tabela 84: Subtracção do menor elemento de cada linha

Trabalhadores \ Tarefas	1	2	3	4	5
1	13	7	0.5	0.5	6.5
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

Trabalhadores \ Tarefas	1	2	3	4	5
1	12.5	6.5	0	0	6
2	11.5	8.5	2	0	5
3	7.5	7.5	6	6	0
4	0	0	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	0	7	12

***Fonte:** Adaptadp pelo autor (Março, 2016)*

Neste quadro existe necessariamente pelo menos um zero em cada linha e em cada coluna.

2° Passo:

Considerar a linha, ou linhas, com menor número de zeros. Enquadrar um zero nessa linha, ou linhas, e cortar todos os zeros existentes na mesma linha ou mesmo na mesma coluna de um zero enquadrado. Proceder sucessivamente desta forma até já não haver zeros para enquadrar ou cortar.

Tabela 85: Enquadramento ou corte de zezos

		Tarefas				
		1	2	3	4	5
Trabalhadores	1	12.5	6.5	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	6
	2	11.5	8.5	2	$\boxed{0}$	5
	3	7.5	7.5	6	6	$\boxed{0}$
	4	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	5.5	12.5	7.5
	5	8.5	1.5	$\boxed{0}$	7	12

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Se se obtiver um zero enquadrado em cada linha e em cada coluna, o conjunto de zeros enquadrados define uma solução óptima. Caso contrário é necessário prosseguir com o 3° passo. No exemplo apresentado não existem zeros enquadrados na 1ª e 2ª.

3° Passo:

Marcar com um sinal todas as linhas que não tenham um zero enquadrado (1ª linha, no exemplo considerado). Marcar todas as colunas que tenham pelo menos um zero riscado sobre linhas já marcadas (3ª e 4ª colunas). Marcar todas as linhas que tenham zeros enquadrados em colunas já marcadas (2ª e 5ª linhas). Prosseguir sucessivamente com a marcação de linhas e colunas até já não ser possível fazer mais marcações. Riscar todas as linhas não marcadas e todas as colunas marcadas (3ª e 4ª linhas, 3ª e 4ª colunas).

Tabela 86: Marcação de todas as linhas e colunas

Trabalhadores \ Tarefas	1	2	3	4	5
1	12.5	6.5	~~0~~	~~0~~	6
2	11.5	8.5	2	$\boxed{0}$	5
3	7.5	7.5	6	6	$\boxed{0}$
4	$\boxed{0}$	~~0~~	5.5	12.5	7.5
5	8.5	1.5	$\boxed{0}$	7	12

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

4° Passo:

Considerar o menor elemento da submatriz dos elementos não riscados. Subtrair esse valor a todos os lementos não riscados e somá-lo aos elementos riscados duas vezes, isto é, pertencentes simultaneamente a uma linha e a uma coluna riscadas. Os elementos riscados apenas uma vez (em linha ou coluna) não são alterados. Voltar a executar o 2° passo.

Tabela 87: Execução do segundo passo

Trabalhadores \ Tarefas	1	2	3	4	5
1	11	5	$\boxed{0}$	~~0~~	4.5
2	10	7	2	$\boxed{0}$	3.5
3	0	0	7.5	7.5	$\boxed{0}$
4	$\boxed{0}$	~~0~~	7	14	12
5	7	$\boxed{0}$	~~0~~	7	10.5

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Obteve-se uma solução óptima dado que o quadro apresenta um e um só zero enquadrado em cada linha e em cada coluna. Se tal não acontecesse seria necessário voltar a executar o 3° e o 4° passo até obter uma solução óptima. A matriz final de afectação, que corresponde à solução óptima encontrada, tem a forma:

Tabela 88: A forma da solução óptima

Trabalhadores \ Tarefas	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

O custo associado à solução final é do por:

MinC=9+5+5.5+4.5+9.5=33.5

Exemplo 2: Durante a estação chuvosa, 3 províncias encontravam-se com inundações. O Governo teve três equipas de peritos para tratar da situação de emergência. Os custos de transporte das equipas para cada província são dados no quadro. Que equipa deve ir para que província para minimizar o custo. Calcule este custo total.

Equipa \ Província	1	2	3
1	2200	**2400**	2000
2	1800	2800	**2200**
3	**1500**	3200	2700

Resolução:

Quadro 1. Mínimos das linhas do quadro inicial: 2000; 1800; 1500

Equipa \ Província	1	2	3
1	200	400	0
2	0	1000	400
3	0	1700	1200

Quadro 2. Mínimos das colunas do quadro 1: 0; 400; 0

Equipa \ Província	1	2	3
1	200	0	0
2	0	600	***400***
3	0	1300	1200

Teste 1. número de linhas é maior que o número de rectas (n = 3; r = 2).

Quadro 3. Mínimo elemento não cortado no quadro 2 é x_{23} = 400

Província / Equipa	1	2	3
1	600	***0***	0
2	0	200	***0***
3	***0***	900	800

Teste 2. n = 3, r =3, já temos a solução óptima

Voltando ao quadro inicial e somando os custos das posições x_{12}, x_{23} e x_{31}, obtemos: CT = 1500 + 2400 + 2200 = 6100 u.m

Exemplo 3: Quatro construções diferentes devem ser levantadas em um Campus Universitário por 4 empreiteiros. Determinar que empreiteiro deve fazer que construção para que o custo dos 4 edifícios seja mínimo. A tabela dos custos que cada empreiteiro propõe para cada edifício está apresentados na *tabela 85*.

Tabela 89: Custos que cada empreteiro propõe

Edifício / Empreteiro	1	2	3	4
1	48	48	50	44
2	56	60	60	68
3	96	94	90	85
4	42	44	54	46

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

Resolução:

Tabela 90: Mínimos das linhas da tabela inicial: 44; 56; 85; 42

Edifício / Empreteiro	1	2	3	4
1	4	4	6	0
2	0	4	4	12
3	11	9	5	0
4	0	2	12	4

***Fonte:** Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Tabela 91: Mínimos das colunas da tabela 86: 0; 2; 4; 0

Empreteiro \ Edifício	1	2	3	4
1	4	2	2	0
2	0	2	0	12
3	11	7	***1***	0
4	0	0	8	4

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Teste 1. n = 4; r = 3 ; ainda não é solução

Tabela 92: Mínimo elemento não cortado na tabela 87 é x_{33} = 1

Empreteiro \ Edifício	1	2	3	4
1	3	1	1	***0***
2	***0***	2	0	13
3	10	6	***0***	0
4	0	***0***	8	5

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Teste 2: n = 4, r = 4 já temos a solução do problema.

CT = 56 + 44 + 90 + 44 = 234 u.m

Exercícios de AUTO-AVALIAÇÃO – 1:

1) Um treinador de uma equipa de natação pretende escolher os elementos que competirão na estafeta 4*200 (estilos por métros), nos próximos jogos olímpicos. Os nadadores em causa tiveram as seguintes melhores marcas em cada estilo, na última época.

Tabela 93: Mdelhores marcas em cada estilo da última época

Nome do nadador \ Estilo	Ruços	Mariposa	Costas	Livre
João	2.3	3.0	2.7	2.1
António	2.5	2.5	2.6	2.0
Filipe	2.3	3.0	2.7	2.0
Vasco	2.4	2.9	2.6	2.1

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Usando o método Húngaro, determine que estilo cada nadador deverá fazer dentro da equipa de modo a alcançar o menor tempo para percorrer os 200 metros no conjunto dos 4 percursos. Qual será esse tempo mínimo.

Resp: João → Bruços; António→ Mariposa; Filipe → Livre e Vasco→Costas. T_{min} = 9.4 minutos.

2) **Exercício 5.12**. Cinco indivíduos (A, B, C, D e E) pretendem adquirir automóvel às suas necessidades. O indivíduo A pretende um carro pequeno que não lhe crie problemas de estacionamento; o B um carro confortável para viagens; C necessita de um carro resistente; D quer um automóvel de pouco consumo; e E pretende um carro mais espaçoso. Um vendedor possui 5 modelos (Citroen BX; Fiat Uno; Autobianchi Y10; Renault 5 GTL e Toyota Starlet) que lhe parecem adequados aos 5 potenciais compradores. Numa tentativa de ponderar as suas preferências, o vendedor construiu o seguinte quadro onde colocou as ordens de preferência (de 1 a 5) de cada comprador em relação a cada um dos carros:

Tabela 94: As ordens de preferência do vendedor

	A	B	C	D	E
BX	5	1	1	4	1
UNO	2	3	2	1	3
Y10	1	5	5	3	5
R5 GTL	3	3	4	1	3
Starlet	3	1	3	2	2

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

Que carro deverá o vendedor apresentar a cada um dos indivíduos de forma a optimizar as preferências dos mesmos.

Resp.: BX → E; UNO → C; Y10 → A; R5 →D e Starlet →B

UNIDADE Temática 2.6. EXERCÍCIOS deste tema.

Exercícios de AVALIAÇÃO – 2:

1 – Explique os principais teoremas da determinação de solução óptima pelo método gráfico e diga quais as possíveis soluções que podem resultar.

2 – Uma empresa de electrónica fabrica dois tipos de circuitos A e B. Os do tipo A são vendidos por 4 euros e os do tipo B por 5 euros.

No processo produtivo ambos os tipos de circuitos passam por duas máquinas. Na primeira máquina os circuitos são trabalhados durante 4 horas os do tipo A e 5 horas os do tipo B. Na outra máquina os circuitos passam 4 e 3 horas, respectivamente. A primeira máquina pode funcionar durante um máximo de 32 horas, enquanto a outra máquina não pode exceder as 24 horas de funcionamento. A empresa pretende maximizar a receita. Formule matematicamente o problema e resolva-o graficamente. Qual a receita máxima que a empresa pode obter?

3 – Considere o problema de Programação Linear:

$$MinZ = 10X_1 - 6X_2$$
$$s.a.\begin{cases} 4X_1 - 3X_2 \geq 28 \\ X_1 - X_2 \geq 6 \\ 3X_1 - 5X_2 \geq 14 \\ X_1 \geq 0; X_2 \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule utilizando o Método Big-M ou Duas Fases e classifique a solução óptima do problema de PL apresentado.

4 – Resolva os seguintes problemas pelo método dual simplex, se necessário apresente a solução pelo método gráfico. Nota: substituir as equações por duas inequações.

a) Min W = $4x_1 + 2x_2$

$$\text{suj. à } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min W = $2x_1+3x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

5 – São dadas as seguintes condições do problema de transporte: Capacidade de fornecimento das fontes: a1 = 25; a2 = 25; a3 = 50; Capacidade de absorção dos destinos: b_1 = 15; b_2 = 20; b_3 = 20; b_4 = 35. Os custos associados ao transporte de 1 u.m da fonte i para o destino j estão no quadro.

10	5	6	7
8	2	7	6
9	3	4	8

Usando o método de Canto Noroeste, encontre a primeira aproximação e o valor de custo mínimo.

6 – Um treinador de uma equipa de natação pretende escolher os elementos que competirão na estafeta 4*200 (estilos por métros), nos próximos jogos olímpicos. Os nadadores em causa tiveram as seguintes melhores marcas em cada estilo, na última época.

Estilo / Nome do nadador	Ruços	Mariposa	Costas	Livre
João	2.3	3.0	2.7	2.1
António	2.5	2.5	2.6	2.0
Filipe	2.3	3.0	2.7	2.0
Vasco	2.4	2.9	2.6	2.1

Usando o método Húngaro, determine que estilo cada nadador deverá fazer dentro da equipa de modo a alcançar o menor tempo para percorrer os 200 metros no conjunto dos 4 percursos. Qual será esse tempo mínimo.

TEMA – III: PLANEAMENTO DE PROJECTOS, REDES E GRAFOS.

UNIDADE Temática 3.1. Planeamento de Projecto

UNIDADE Temática 3.2. Método CPM-PERT

UNIDADE Temática 3.3. EXERCÍCIOS deste tema

UNIDADE Temática 3.1. Planeamento de Projecto

Introdução

De acordo com Mulenga (2005), um projecto é um conjunto de actividades relacionadas que devem ser executadas em determinada ordem antes que a tarefa inteira seja completa, para satisfazer um conjunto de objectivos organizacionais.

Algumas das características de um projecto são:

- Cada projecto tem um objectivo singular;
- Um projecto tem vida limitada: tempo e recursos são limitados;
- Utiliza recursos e tem custos;
- Objectivo fundamental: completar "a tempo" com menos custos;

A gestão de projectos pode ser definida como planear, dirigir e controlar recursos (pessoas, equipamentos, materiais) para satisfazer as restrições técnicas de custo e de tempo do projecto.

Sendo assim, podemos distinguir três funções principais de um projecto: função planeamento, execução e controle.

Planeamento: identificação e caracterização dos objectivos, das actividades, recursos disponíveis e outras necessidades a reunir para realizar o projecto;

Execução: realização das diferentes actividades, operações pré –

definidas e o seu respectivo acompanhamento;

Controlo: identificação e análise dos desvios relativamente ao planeado, desencadear medidas correctas no projecto, podendo estas levar a modificações na forma de realização do projecto ou não.

Para assegurar correctamente a realização dessas funções é necessário:

- Definir de maneira bem precisa o projecto;
- Designar em seguida um responsável do projecto ao qual será prestada informação da evolução do mesmo e que deverá tomar as decisões importantes;
- Analisar o projecto por grupos de operações para ter uma ideia relativamente precisa de acordo e de todas as ramificações do projecto;
- Detalhar os diferentes grupos de operações, indicando o momento e a duração em que cada grupo terá a sua actuação ;
- Avaliar os custos por actividades e do projecto em geral;
- Realizar controlos periódicos para verificar se o sistema não está sofrendo desvios e tomar decisões correctas se tal ocorrer.

Para cada projecto, é necessário definir um conjunto de objectivos, i.é, o melhor programa de utilização dos recursos de modo a satisfazer o melhor possível as necessidades dos clientes desde os meios humanos, materiais, financeiros até ao prazo planeado. Para estabelecer este programa será necessário ter em conta um conjunto de factores aos quais a empresa ou organização está submetida no quadro da sua política de produção ou prestação de serviços, tais como:

- minimização de todos tipos de stock;
- minimização dos custos;

- diminuição do comprimento dos prazos das operações;
- tornar o produto acabado de melhor qualidade em maior quantidade;
- plena utilização dos recursos, etc.;

Como o correlação de certos elementos é contraditória, torna-se necessário o seu balanceamento para deliberar o programa com menos riscos.

Para organizar e gerir as diferentes fazes de um projecto, torna-se necessário usar uma representação gráfica através de diferentes métodos.

Tipos básicos de representação de projectos

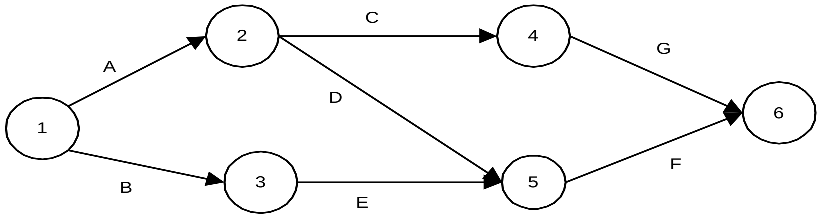
A visualização gráfica de um projecto é muito importante para facilitar o seu planeamento e controle. Há três tipos básicos de diagramas utilizados para representação de projectos: diagrama de Gantt ou de barras; redes com actividades nas setas ou arcos e redes com actividades nos nós.

Entende-se por *rede de planeamento de um projecto*, a uma representação gráfica de actividades, na qual deve se evidenciar a sequência lógica dessas actividades e suas interdependências, tendo como fim alcançar um determinado objectivo.

Actividade – e a execução efectiva de uma operação, consumindo tempo e/ou recurso;

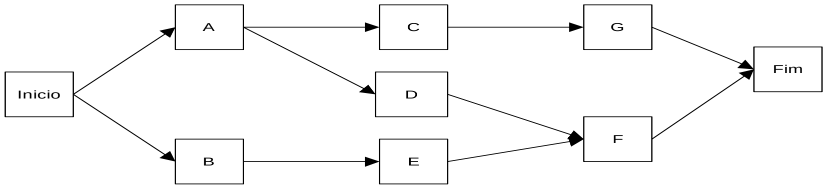
Evento – é constituído de marcos que caracterizam determinados instantes de um projecto, não consumindo tempo nem recurso. Por exemplo, início de uma actividade.

a) Rede com actividades nos arcos ou método Americano



b) Rede com actividades nos nós ou método Francês

Figura 3: Representação de redes de planeamento e controlo de projectos (a) e (b)



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Obs. O método americano é o mais usado para o planeamento do que o método Francês.

c) Diagrama de Gantt

A técnica mais antiga e simples de programação temporal dos projectos é o diagrama de barras ou ***gráfico de Gantt*** O método de Gantt, consiste em determinar a melhor maneira de posicionar as diferentes tarefas de um projecto a executar num determinado período em função:

- Da duração de cada actividade;
- Das relações de precedência entre as actividades;
- Dos prazos a respeitar;
- Das capacidades e recursos disponíveis, etc.

Para explicar a construção do gráfico de Gantt, escolhemos por exemplo um projecto que deve ser realizado com as seguintes actividades tabeladas.

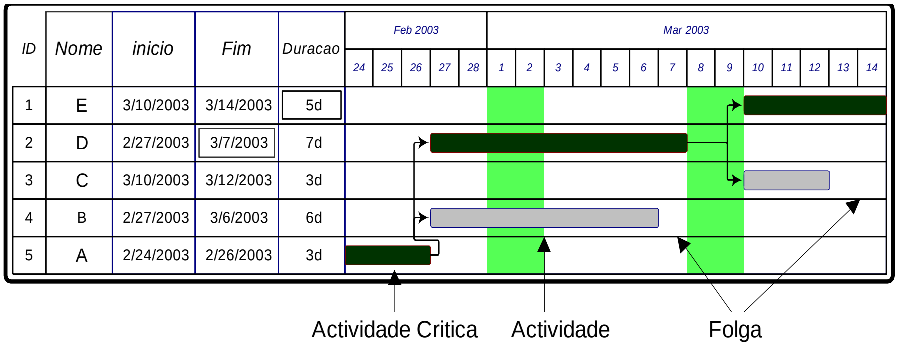
Tabela 95: Relação de actividades para a construção do gráfico de Gantt

Actividade	Duração em dias	Actividade precedente
A	3	-
B	6	A
C	3	B , D
D	7	A
E	5	D

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

O diagrama de Gantt apresenta-se sob a forma de um gráfico de barras horizontais, onde cada coluna representa uma unidades de tempo e cada linha, uma actividade a realizar; o comprimento de cada linha ou barra corresponde a duração da actividade.

Figura 4: Representação de um diagrama de Gantt



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

A duração total do projecto é calculada somando os tempos das actividades que não possuem folga. Para este caso, somamos os tempos das actividades A, D e E enquanto que B e C são actividades com folga, portanto DT = 3+7+5 = 15 dias.

Conceito de folga de uma actividade

O diagrama de Gantt permite visualizar a evolução de um projecto e determinar a sua duração global, podendo-se identificar as folgas existentes nas diferentes actividades.

Uma **folga** corresponde ao tempo de atraso que se pode considerar relativamente a uma actividade sem que tal conduza ao aumento da duração global do projecto. As folgas são os elementos de flexibilidade, pois permitem à empresa perder algum tempo sem afectar o andamento normal do projecto.

Folga total ou global: representa o atraso máximo que uma actividade pode ter, sem que isso comprometa o atraso do projecto.

Folga livre: representa o máximo atraso que uma actividade pode ter sem que ocorra atraso nas suas actividades sucessivas.

Por outro lado, o diagrama clássico de Gantt, consiste em representar as operações ou actividades fazendo – as iniciar o mais cedo possível "*escalonamento da data mais cedo*" ou iniciar as operações na dada mais tarde possível "*escalonamento da data mais tarde*".

Pode-se igualmente encurtar os prazos, utilizando a técnica da sobreposição que consiste em fazer iniciar uma operação antes que a precedente esteja terminada ou realizar algumas operações em paralelo para diminuir o tempo global de realização do projecto.

Exemplo 1: A empresa G. Duval, possui entre as suas diferentes actividades, uma actividade de concepção/ fabricação de motas de neve. Para responder as evoluções do mercado a empresa acaba de conceber um novo modelo de mota que conta colocar à venda durante o próximo inverno. As actividades a serem realizadas estão apresentadas na *tabela 92*.

Tabela 96: Relação das actividades a serem realizadas

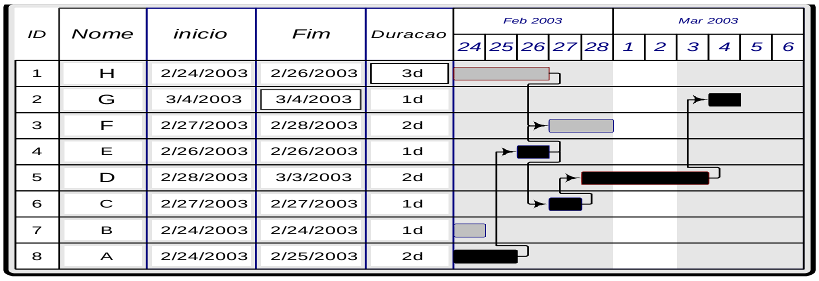
Descrição das actividades	Actividade precedentes	Duração em dias
A – corte dos elementos dos chassis;	-	2
B – montagem do motor;	-	1
C – montagem, chassis, motor, cabina;	E , B , H	1
D – colocação de pára-brisas, volante, etc.;	C	2
E – Furação, soldadura do chassis;	A	1
F – verificação do funcionamento;	E , B , H	2
G – ensaio do motor;	D , F	1
H – preparação da cabina e acessórios.	-	3

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Resolução

Se a fabricação iniciar no dia 3 de Outubro devido a razões de disponibilidade de matéria-prima e componentes, e efectuarmos o escalonamento da data mais cedo, obtemos um diagrama de Gantt diferente do diagrama para um escalonamento da data mais tarde, mas com a mesma duração em termos do tempo de realização do projecto, 7 dias.

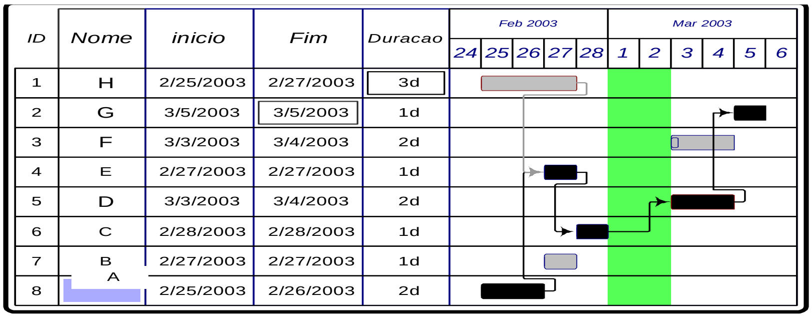
Figura 5: Escalonamento da data mais cedo



CC: A-E-C-D-G OU CC: H-C-D-G

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Figura 6: Escalonamento da data mais tarde (começar pela actividade G)



CC: A-E-C-D-G OU CC: H-C-D-G

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Nos dois diagramas, enquanto no escalonamento da data mais cedo começamos com as actividades que não têm precedências A, B, H e depois representamos as outras conforme a lógica como elas se relacionam, no escalonamento da data mais tarde, começa-se pelas actividades que não são precedentes G e depois D e F e assim em diante.

O principal interesse na utilização do gráfico de Gantt reside na sua simplicidade de construção, apresentação e compreensão. Trata-se de uma ferramenta que permite visualizar a evolução da solução de um problema. Permite tomar em consideração as limitações modernas do "Just – in - time" através da sobreposição de tarefas e o escalonamento da data mais tarde. Por outro lado, existem numerosos "softwares" recentes que integram a técnica Gantt, contudo a sua aplicação torna-se difícil quando o número de actividades aumenta consideravelmente.

Exemplo 2: Uma empresa tem o projecto de preparação de um curso de curta duração, para isso organizou as actividades que estão na tabela abaixo. Os tempos de realização das actividades estão em semanas.

Tabela 97: Tempo de realização de actividades semanais

Actividades	Descrição	Duração (semanas)	Actividades precedentes
A	Fazer a concepção do curso e anúncios;	2	-
B	Identificar docentes potenciais;	1	-
C	Organizar a documentação informativa;	3	-
D	Enviar publicidade e fichas de inscrição;	4	A
E	Confirmar disponibilidade dos docentes;	2	B
F	Seleccionar docentes;	1	C , E
G	Acusar a recepção das inscrições;	2	D
H	Seleccionar material para o curso;	1	F
J	Preparar material de ensino;	3	G , H
K	Preparar instalações para o curso	1	G

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

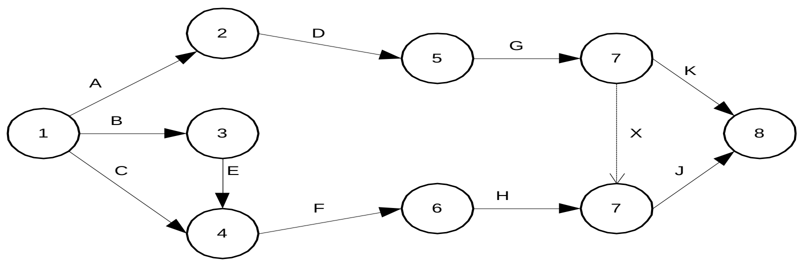
a) Represente a rede de planeamento do projecto com actividades nos arcos;

b) Faça o diagrama de Gantt e indique as actividades que têm folga, as que não têm folga e a duração total do projecto.

Resolução

a)

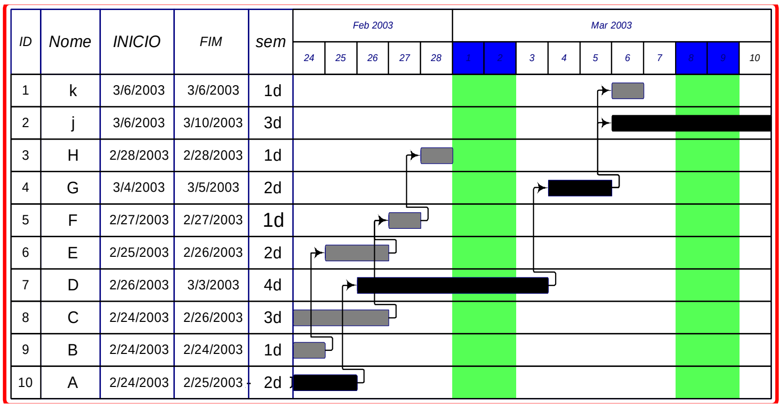
Figura 7: Representação da rede de planeamento do projecto com actividades nos arcos



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

b)

Figura 8: O diagrama de Gantt e indicação das respectivas actividades



ID	Nome	INICIO	FIM	sem
1	k	3/6/2003	3/6/2003	1d
2	j	3/6/2003	3/10/2003	3d
3	H	2/28/2003	2/28/2003	1d
4	G	3/4/2003	3/5/2003	2d
5	F	2/27/2003	2/27/2003	1d
6	E	2/25/2003	2/26/2003	2d
7	D	2/26/2003	3/3/2003	4d
8	C	2/24/2003	2/26/2003	3d
9	B	2/24/2003	2/24/2003	1d
10	A	2/24/2003	2/25/2003	2d

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Actividades sem folga: A – D – G – J, duração total = 11 semanas;

Actividades com folga: B; C; E; F; H; e K.

UNIDADE Temática 3.2. O Método PERT – CPM

Introdução

Entre os métodos de planeamento e controlo de projectos, o método CPM (Critical Path Method – método de caminho crítico), e as suas extensões, é aquele que com mais sucesso tem sido aplicado. O método CPM, foi desenvolvido por Kelley, J.E. e Walker, M.R. (1957) no decurso de um projecto interno de DuPont de Nemours e foi inicialmente aplicado no projecto da construção de uma indústria química, mais tarde veio a ser utilizado no planeamento e controlo de operações de manutenção.

Em paralelo com os trabalhos de Kelley e Walker a marinha dos Estados Unidos, desenvolveu a partir de 1958 o método PERT (Program Evaluation and Review Technique – técnica de avaliação e revisão de programas). Este método foi inicialmente utilizado no planeamento e controle do programa de mísseis Plaris.

Na prática, as técnicas CPM e PERT são bastante semelhantes e em geral são conhecidas como métodos PERT – CPM. Ainda que o método PERT pretende sobretudo evidenciar as ligações existentes entre as diferentes actividades de um projecto e definir claramente a noção de "*caminho crítico*", constituído pelas actividades na ordem em que elas podem ocorrer, onde o grafo é fundamental nos conceitos de acontecimento e actividade.

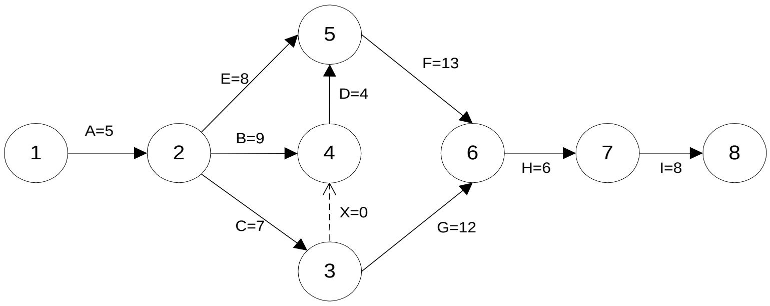
O método CPM, procura um equilíbrio entre o custo da operação e a data da conclusão do projecto, dando uma atenção especial aos constrangimentos de tempo sobre o aumento e/ou diminuição da produção e recursos para encontrar a duração da execução do projecto ou algumas das suas tarefas e o custo adicional e/ou reduzido provocado pelo aumento ou diminuição desses elementos.

Metodologia da construção das redes PERT - CPM

Uma rede PERT – CPM ou grafo, é uma representação gráfica de um projecto, apresentando a sequência lógica das actividades e as suas interdependências, tendo por fim alcançar um objectivo. Como foi apresentado na figura 1, uma rede PERT – CPM tem um início e um fim, e ainda composta por um conjunto de actividades, duração de cada actividade representada por um tempo em dias, semanas, meses, anos, etc., e o nome da actividade.

A título de exemplo a figura 9 abaixo é uma rede PERT – CPM.

Figura 9: Representação de uma rede PERT – CPM



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Para nos situar quanto ao tratamento dos elementos componentes da rede PERT-CPM consideremos alguns conceitos associados a sua representação gráfica:

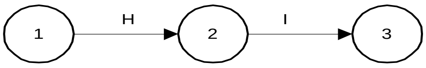
a) Uma rede PERT-CPM possui um único ponto de partida e um único ponto de chegada;

b) Uma actividade ou operação é representada por uma única seta;

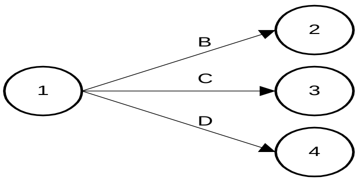
c) Os diagramas que se seguem, resumem as diversas situações que iremos encontrar dentro do nosso tratamento das redes PERT – CPM;

d) Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I e X actividades de um projecto:

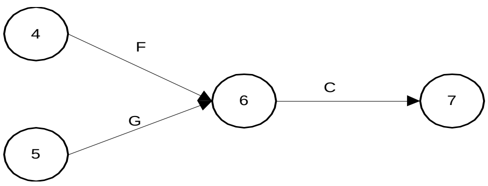
1. H e I são actividades sucessivas.



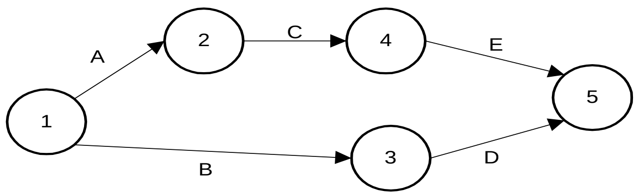
2. B, C e D são actividades simultâneas ou paralelas e divergentes



3. F e G são paralelas e convergentes, elas antecedem a mesma actividade C.

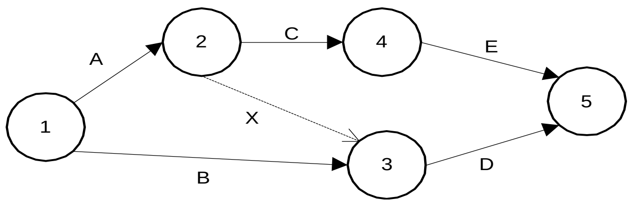


4. Consideremos a seguinte rede completa composta por 5 actividades:



Nesta rede PERT – CPM, temos A e B são paralelas divergentes, C sucede A, D e E são paralelas e convergentes.

Suponhamos que foi acrescida a condição suplementar A antecede D ou melhor a actividade D não poderá começar antes da actividade A estar concluída. Neste caso, cria-se uma actividade fictícia com uma duração nula, cujo objectivo é de alertar os que implementam este projecto a condição colocada. No nosso contexto todas actividades fictícias serão denotadas por x.



Ainda dentro da metodologia da construção das redes PERT-CPM deve-se:

- Identificar cada actividade a realizar no projecto;
- Decompor o projecto em actividades elementares se necessário;
- Determinar a sequência das actividades e construir a rede reflectindo as relações de precedência e simultaneidade entre as actividades;
- Calcular estimativas de tempo para cada actividade e introduzir na rede.

Entre muitas regras citadas para a construção das redes PERT-CPM salientam-se:

1. Respeitar as precedências;

2. As setas indicam apenas as precedências lógicas, não tendo significado o seu cumprimento;
3. A referência dos acontecimentos não deve ser duplicada;
4. Entre dois acontecimentos não deve existir mais de uma actividade, excepto nos casos em que é necessário usar a representação de uma actividade fictícia;
5. Quer acontecimentos quer as actividades devem estar ordenadas para permitir um bom acompanhamento do projecto;
6. A rede deve ter apenas um acontecimento do primeiro nível (estado sem sucessor) e um acontecimento do último nível (estado sem antecessor), digamos por meta e partida respectivamente.

Construção e ordenamento das redes

Para melhor compreensão da construção e ordenamento das redes considere um exemplo de um projecto constituído pelas seguintes actividades:

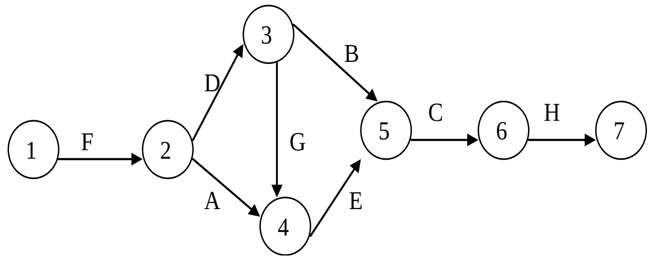
1. B sucede a D e tem que estar terminada antes de C;
2. C, sucede a B e E;
3. D, realiza-se ao mesmo tempo que A e ambas sucedem a F;
4. E, sucede a A e G e precede a C;
5. F, precede todas as actividades;
6. G, sucede a D e tem que estar concluída antes de E;
7. H é última actividade do projecto e começa depois de C.

a) Construa o grafo correspondente a rede PERT- CPM do projecto em curso.

b) Faça o ordenamento das actividades por níveis.

Resolução:

a) Construção da rede PERT – CPM



b) Para ordenar o grafo é necessário seguir os passos:

(1) Representar a matriz das adjacências do grafo, colocando 1 sempre que houver um arco de ligação entre dois nós segundo a orientação.

(2) Obter os valores dos Vi que correspondem as somas das ligações ao longo da linha da matriz;

(3) O nó que não tiver o seu sucessor sai da matriz, em seguida repete-se a soma para os nós restantes até em diante.

(4) O nível 1 corresponde ao nó sem antecessor e o último é o nó sem sucessor.

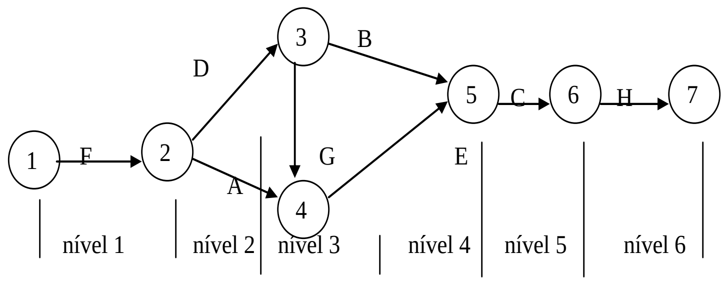
(5) Desenhar o novo grafo da rede PERT – CPM com todas as actividades ordenadas.

Tabela 98: Matriz das adjancências

	1	2	3	4	5	6	7	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
2	0	0	1	1	0	0	0	2	2	2	2	0	-
3	0	0	0	1	1	0	0	2	1	1	0	-	-
4	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	-	-
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	-	-	-
6	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-	-	-	-
7	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
								7	6	5	3, 4	2	1

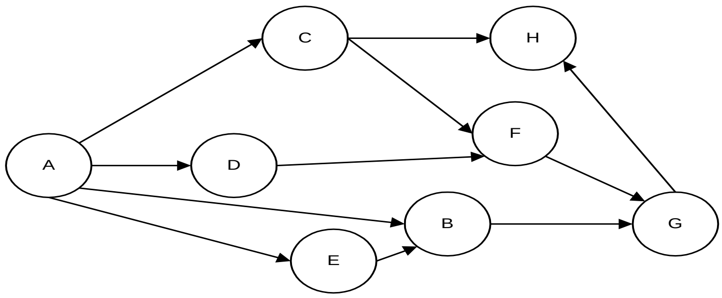
Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Figura 10: O novo grafo ordenada é:



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

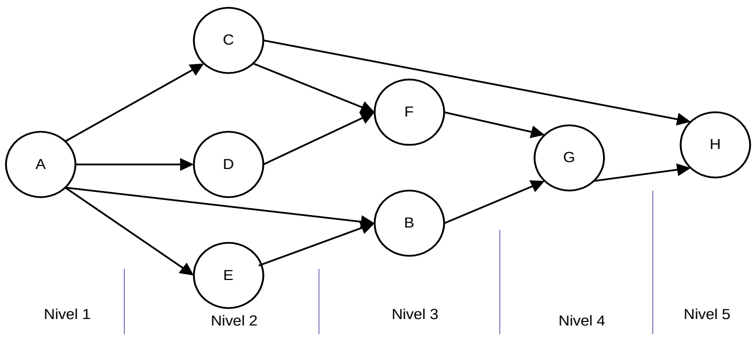
Exemplo 1: Suponhamos que um projecto pode ser descomposto em actividades, e sejam conhecidas as relações das actividades da seguinte forma.



Ordene o grafo por níveis dos seus nós ou vértices.

Resolução

	A	B	C	D	E	F	G	H	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4
A	0	1	1	1	1	0	0	0	4	4	4	3	0
B	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	-	-
C	0	0	0	0	0	1	0	1	2	1	1	0	-
D	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	-
E	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	-
F	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	-	-
G	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-	-	-
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-



Repare que nas duas situações preocupamo-nos por ordenar as actividades (caso 1), os nós (caso 2). Na prática estes cenários são equivalentes, pois ordenar a sequência como aparecem as actividades corresponde a colocar a lógica como elas vão ser realizadas.

Exemplo 2: Considere o problema de calendarizar um conjunto de 7 tarefas independentes, caracterizadas pela informação apresentada na *tabela 95, a seguir*.

Tabela 99: Calendarização dum conjunto de sete tarefas independentes

Tarefa	Tarefa precedente	Duração em semanas
A	-	3
B	A	3
C	A	2
D	B	1
E	B	3
F	B , C	7
G	B , C	5
H	D , f	6

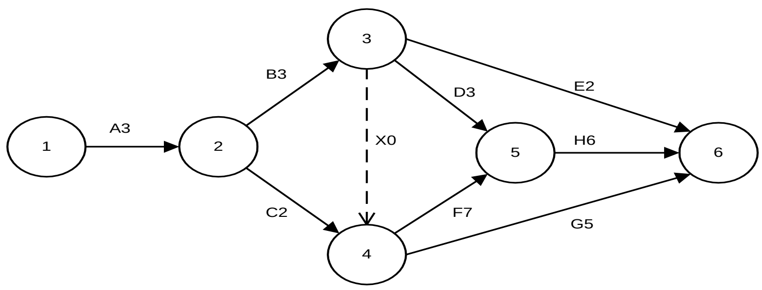
Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

a) Apresente a rede PERT – CPM que descreve esta série de actividades. Lembre-se de indicar a duração de cada actividade nos arcos.

b) Ordene as actividades do projecto.

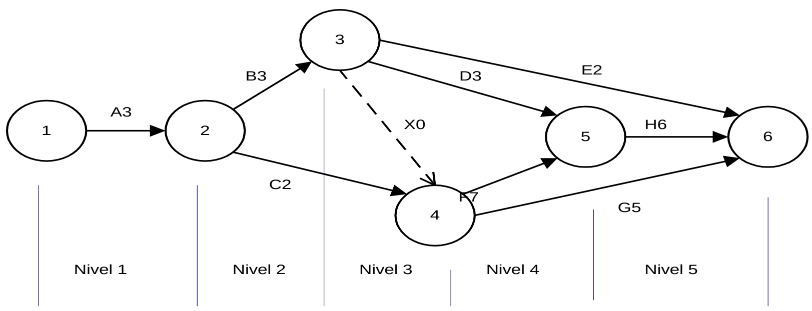
Resolução

a)



b)

	1	2	3	4	5	6	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
2	0	0	1	1	0	0	2	2	2	1	0	-
3	0	0	0	1	1	1	3	2	1	0	-	-
4	0	0	0	0	1	1	2	1	0	-	-	-
5	0	0	0	0	0	1	1	0	-	-	-	-
6	0	0	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-
							6	5	4	3	2	1



Exemplo 3: Um projecto de marketing cujas actividades se encontram caracterizadas na *tabela 96 abaixo*:

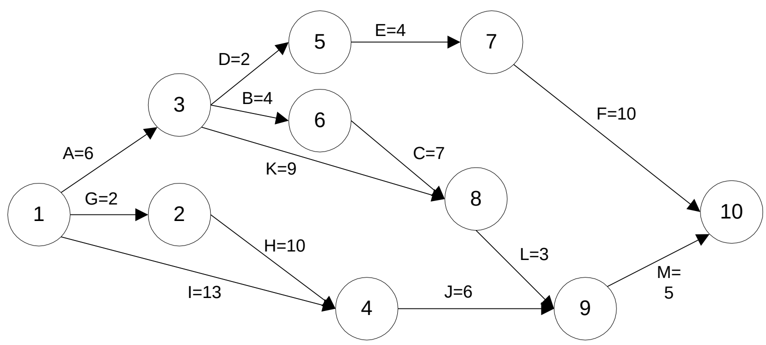
Tabela 100: Caracterização das actividades dum projecto de marketik

Actividades	Descrição	Precedência	Duração
A	Organizar o departamento de vendas	-	6
B	Contratar pessoal de vendas	A	4
C	Treinar pessoal contratado	B	7
D	Seleccionar uma agência de publicidade	A	2
E	Planear a campanha publicitária	D	4
F	Executar a campanha publicitária	E	10
G	Conceber a embalagem	-	2
H	Montar o processo de embalagem	G	10
I	Adquiri o produto no fabricante	-	13
J	Embalar o stock inicial	H , I	6
K	Seleccionar os distribuidores	A	9
L	Vender o produto aos distribuidores	C , K	3
M	Enviar o produto aos distribuidores	J , L	5

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

a) Desenhe a rede PERT – CPM, com as durações das actividades nos arcos.

Resolução:



Exemplo 4: Desenhar a rede PERT correspondente ao projecto seguinte.

Tabela 101: Tabela correspondente a rede PERT

Actividade	Actividade precedente
A	-
B	A
C	B
D	B
E	C
F	A
G	F
H	A
I	F
J	H
K	I, J
L	D, E, G
M	K
N	L, M

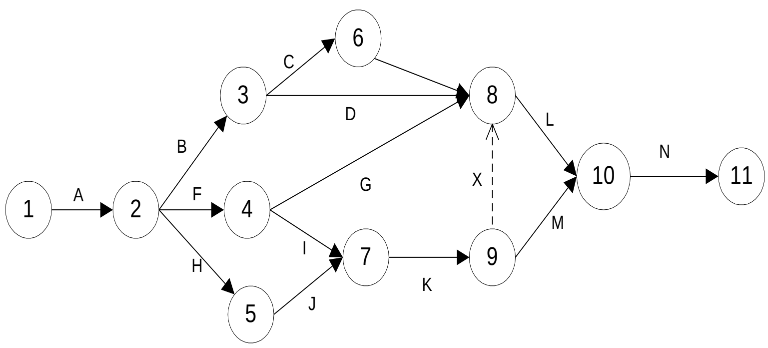
Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

a) Considere o número de actividades fictícias que lhe for mais cómodo;

b) Minimize o número de actividades fictícias;

c) Inclua "K como precedente de L.

Resolução



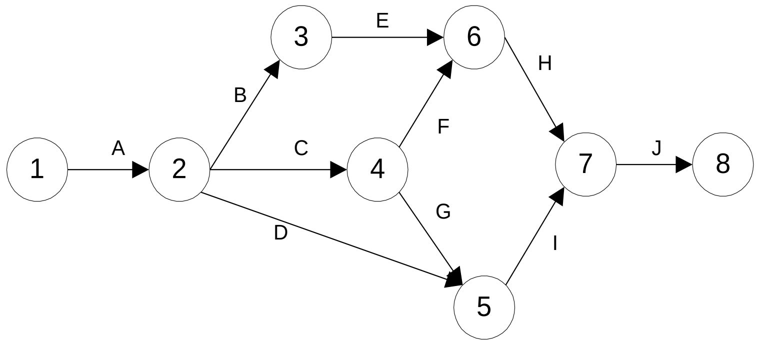
Exemplo 5: construir a rede PERT das seguintes actividades:

Tabela 102: Actividades para a construção duma rede PERT

Actividade	Actividade subsequente
A – estabelecer planos de engenharia	B, C, D
B – escolher o local	E
C – seleccionar vendedores	F, G
D – seleccionar pessoal	I
E – preparar terreno e local	H
F – Construir o reactor	H
G – preparar manual operatório	I
H – Instalar o reactor	J
I – treinar operadores	J
J – Obter licença	-

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Resolução



UNIDADE Temática 3.3. EXERCÍCIOS deste tema.

Exercícios de AVALIAÇÃO – 2:

1 – A empresa G. Duval, possui entre as suas diferentes actividades, uma actividade de concepção/ fabricação de motas de neve. Para responder as evoluções do mercado a empresa acaba de conceber um novo modelo de mota que conta colocar à venda durante o próximo inverno. As actividades a serem realizadas estão apresentadas na *tabela.*

Descrição das actividades	Actividade precedentes	Duração em dias
A – corte dos elementos dos chassis;	-	2
B – montagem do motor;	-	1
C – montagem, chassis, motor, cabina;	E , B , H	1
D – colocação de pára-brisas, volante, etc.;	C	2
E – Furação, soldadura do chassis;	A	1
F – verificação do funcionamento;	E , B , H	2
G – ensaio do motor;	D , F	1
H – preparação da cabina e acessórios.	-	3

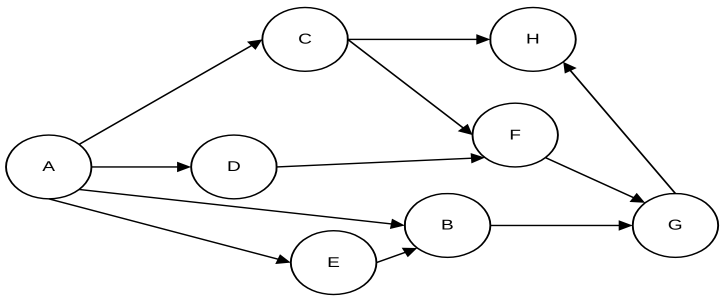
2 – Uma empresa tem o projecto de preparação de um curso de curta duração, para isso organizou as actividades que estão na tabela abaixo. Os tempos de realização das actividades estão em semanas.

Actividades	Descrição	Duração (semanas)	Actividades precedentes
A	Fazer a concepção do curso e anúncios;	2	-
B	Identificar docentes potenciais;	1	-
C	Organizar a documentação informativa;	3	-
D	Enviar publicidade e fichas de inscrição;	4	A
E	Confirmar disponibilidade dos docentes;	2	B
F	Seleccionar docentes;	1	C , E
G	Acusar a recepção das inscrições;	2	D
H	Seleccionar material para o curso;	1	F
J	Preparar material de ensino;	3	G , H
K	Preparar instalações para o curso	1	G

a) Represente a rede de planeamento do projecto com actividades nos arcos;

b) Faça o diagrama de Gantt e indique as actividades que têm folga, as que não têm folga e a duração total do projecto.

3 – Suponhamos que um projecto pode ser descomposto em actividades, e sejam conhecidas as relações das actividades da seguinte forma.



a) Ordene o grafo por níveis dos seus nós ou vértices.

4 – Considere o problema de calendarizar um conjunto de 7 tarefas independentes, caracterizadas pela informação apresentada na

tabela a seguir.

Tarefa	Tarefa precedente	Duração em semanas
A	-	3
B	A	3
C	A	2
D	B	1
E	B	3
F	B , C	7
G	B , C	5
H	D , f	6

a) Apresente a rede PERT – CPM que descreve esta série de actividades. Lembre-se de indicar a duração de cada actividade nos arcos.

b) Ordene as actividades do projecto.

5 – Um projecto de marketing cujas actividades se encontram caracterizadas na *tabela abaixo*:

Actividades	Descrição	Precedência	Duração
A	Organizar o departamento de vendas	-	6
B	Contratar pessoal de vendas	A	4
C	Treinar pessoal contratado	B	7
D	Seleccionar uma agência de publicidade	A	2
E	Planear a campanha publicitária	D	4
F	Executar a campanha publicitária	E	10
G	Conceber a embalagem	-	2
H	Montar o processo de embalagem	G	10
I	Adquiri o produto no fabricante	-	13
J	Embalar o stock inicial	H , I	6
K	Seleccionar os distribuidores	A	9
L	Vender o produto aos distribuidores	C , K	3
M	Enviar o produto aos distribuidores	J , L	5

a) Desenhe a rede PERT – CPM, com as durações das actividades nos arcos.

TEMA – IV: GESTÃO DE STOCKS

UNIDADE Temática 4.1. Modelos Deterministicos, Estocásticos e Previsão

UNIDADE Temática 4.2. Métodos de Previsão: Modelos de Regressão Linear, Séries Cronológicas e Modelos de Decomposição

UNIDADE Temática 4.3. EXERCÍCIOS deste tema

UNIDADE Temática 4.1. Modelos Determinísticos, Estocásticos e Previsão

Introdução

Neste tema vai se abordar sobre modelos determinísticos, estocásticos e previsão, política de encomenda, fixação do intervalo sobre encomendas, nível de encomenda de ecomenda, previsão cíclica. Previsão é um elemento chave na tomada de decisão.

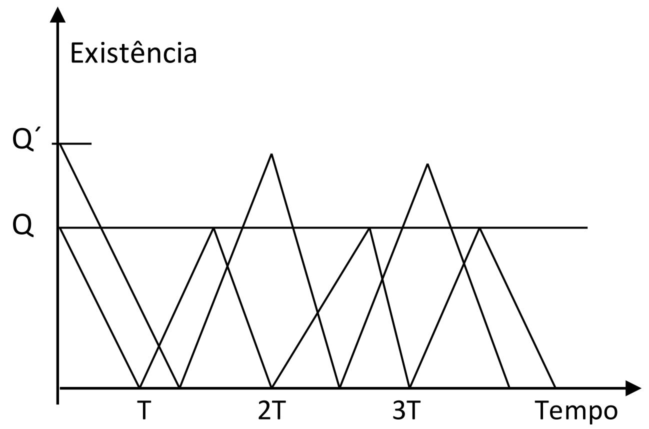
Modelos Determinísticos

Política nível de encomenda = política revisão cíclica

Fixar o intervalo entre encomendas = fixar a quantidade a encomendar

Q = T d

Reposição instantânea – ruptura não permitida



- Taxa de procura ***d*** determinística é constante;

- Quantidade encomendada ***Q*** fornecida de uma forma instantânea a intervalos fixos de tempo ***T***
- Não se verificam situações de ruptura do stock
- Custo de encomenda = ***A+c1Q***
- Custo deposse = ***c2 Q/2 T***
- Custo total CT = ***A+c1Q + c2 Q/2 T***
- Custo porunidade de tempo

$K = C_r/T = A/T + c_1Q/T + c_2Q/2 = (T = Q/d) = Ad/Q + c_1d + c_2Q/2$

Quantidade económica de encomenda Q*

$\partial K/\partial = -Ad/Q^2 + c_2/2 = 0 \rightarrow Q^* = \sqrt{2Ad/c_2}$

Custo mínimo porunidade de tempo K*

$K^* = c_1d + \sqrt{2c_2Ad}$

Custo de encomenda

- função não linear
- decrescente com Q

Custo de posse

- função linear com Q

Custo total

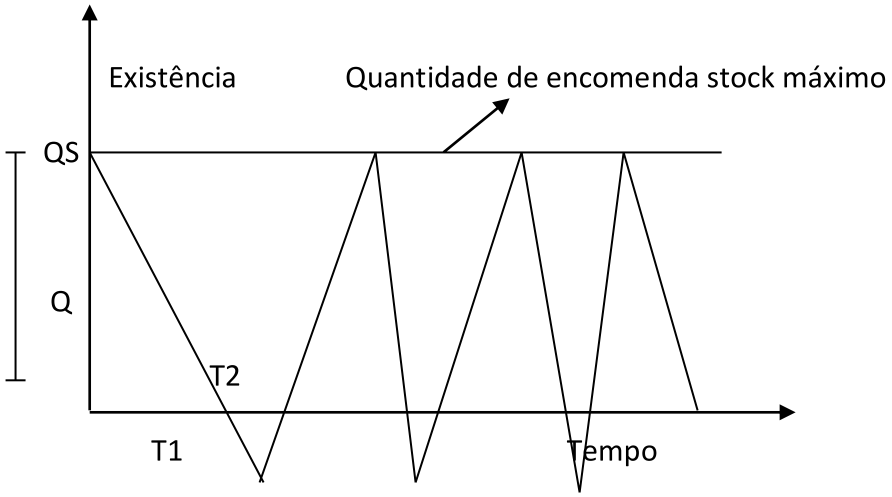
- função convexa
- mínimo associado a balanço
  - – investimento em stocks
  - – despesas de colocação e processamento de encomendas

Robustez da quantidade económica

$$q = Q/Q^*$$

$$K = K/K^* = \frac{\frac{Ad}{Q} + c_2Q/2}{\sqrt{2c_2Ad}} = 1/2(1/q + q)$$

Reposição instantânea -ruptura permitida



Taxa de procura ***d*** determinística e constante

Quantidade encomendada **Q** fornecida de uma forma instantânea a intervalos fixos de tempo ***T=T1+T2***

- Custo de encomenda = A+c1Q
- Custo deposse = c2 (Q-S)/2 T1
- Custo deruptura = c3 S/2 T2
- Custo total CT = $A+c_1Q + c_2\,(Q-S)/2\ T_1 + c_3\, S/2\ T_2$
- Custo porunidade de tempo

$$K(Q,S) = C_r/T = Ad/Q + c_1d + c_2/2\,(Q-S)^2/Q + c_3/2S^2/Q$$

- Quantidade económica de encomenda Q*
- Nível máximo de unidades em falta S*

$$\begin{cases} \partial K/\partial Q = 0 \\ \partial K/\partial S = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^* = \sqrt{2Ad/c_2}\ \sqrt{c_2 + c_3/c_3} \\ S^* = \sqrt{2Adc_2}\ \dfrac{1}{\sqrt{c_3(c_2+c_3)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{c_3 \to \infty} Q^* = \sqrt{2Ad/c_2} \\ \lim\limits_{c_3 \to \infty} S_* = 0 \end{cases}$$

Custo mínimo porunidade de tempo K*

$$K^* = c_1d + \sqrt{2Adc_2c_3/c_2 + c_3}$$

Descontos de Quantidade

- Decisõesatomar

– Quantidade a encomendar

– Em que momento encomendar

- Descontos de quantidade

– Preço reduzido quando se compra um bem em maiores quantidades

- Balanço entre preço mais baixo e aumento do custo de posse

Metodologia

- Calcular o valor da quantidade económica de encomenda (Qi*) para cada um dos níveis de desconto i.
- Ajustar os valores de Qi* para o valor mais próximo pertencente ao intervalo de desconto correspondente.
- Calcular os custos totais para cada Qi.
- Escolher a quantidade a encomendar Qi, correspondente ao menor custo.

Exemplo

A empresa Chunai vende, entre outros produtos, ratos ou mouse para PC. Recentemente a empresa fornecedora enviou uma nova tabela com discontos de quantidade.

O custo normal para cada rato ou mouse é de 5,00Mt, para encomendas entre 1.000 e 1.999 unidades o custo unitário baixa para 4,80Mt e finalmente para encomendas de mais de 2.000 unidades o custo é de 4,75Mt.

O custo de encomenda é de 49,00Mt por encomenda, a procura anual é de 5.000 mouses ou ratos e a taxa de armazenamento é de 0.2 x custo de aquisição.

Qual a quantidade a encomendar para minimizar o custo total de armazenamento?

Resolução exemplo

$Q^*_1 = \sqrt{2Ad/c_1} = \sqrt{2 \times 49 \times 5.000/0.2 \times 5} = 700$ [0, 1000]

$Q^*_2 = \sqrt{2 \times 49 \times 5.000/0.2 \times 4,8} = 714$ [1.000, 1.999]

$Q^*_3 = \sqrt{2 \times 49 \times 5.000/0.2 \times 4,75} = 718$ [2.000, ∞[

As quantidades a encomendar para cada nível de desconto serão as seguintes:

Nível de desconto 1: Q1*=700

Nível de desconto 2: Q2=1000

Nível de desconto 3: Q3=2000

Tabela 103: Quantidades a encomendar para cada nível de desconto

Custo por unidade	Quantidade a encomendar	Número de encomendas por ano	Custo de encomenda por ano	Custo de armazenamento por ano	Custo de aquisição por ano	Custo total por ano
5.00	700	7.14	350.00	350.00	25,000.00	25,700.00
4.80	1,000	5.00	245.00	480.00	24,000.00	24,725.00
4.75	2,000	2.50	122.50	950.00	23,750.00	24,822.50

Fonte: *Adaptado pelo autor (Matço, 2016)*

Restrições adicionais

- Stocks de milhares de artigos

– Restrições no capitala investir

– Restrições no espaço de armazenagem

– Restrições no número de encomendas

- Repartição dos recursos escassos pelos vários produtos

Restrições adicionais – restrições de investimento

- Gasto total com a encomenda não pode exceder **D**

$$\sum_{f-1}^{m} = (c_{1\,f} Q_f + A_f) \leq D$$

- Pretende-se minimizar o custo por unidade de tempo

$$\min K \sum_{f-1}^{m} = (A_f d_f / Q_f + c_{1f} d_f + c_{2f} Q_f / 2) \leq D$$

Restrições adicionais – outro tipo de restrições

- Restrições no espaço de armazenamento, onde o produto ***j*** ocupa ***fj*** unidades de capacidade e ***f*** é a capacidade total de armazenamento.

$$\sum_{j-1}^{m} f_j Q_f \leq f$$

- Restrições no número de encomendas, onde ***N*** é o número máximo de encomendas a colocar

$$\sum_{j-1}^{m} d_f / Q_f \leq N$$

Modelos Estocásticos

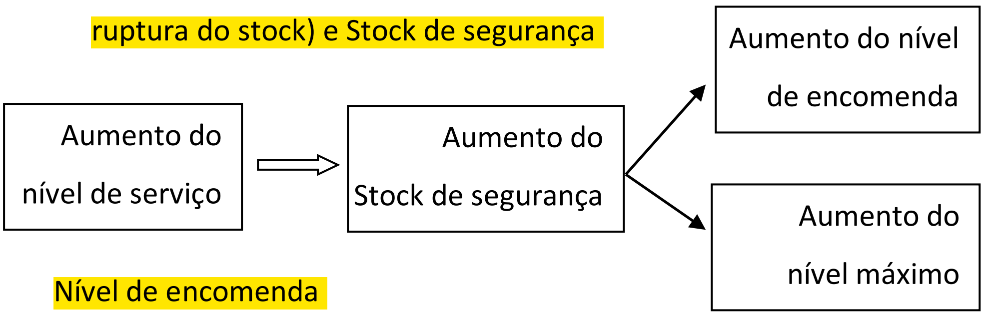
Procura estocástica (varia segundo distribuição normal)

Nível de encomenda: determinar nível de encomenda

Revisão cíclica: determinar nível máximo

Procura desconhecida: varia segundo uma distribuição normal

- Questões: quanto encomendar? e quando encomendar?
- Novos parâmetros a definir: Nível de serviço (1 – Probabilidade de ruptura do stock) e Stock de segurança



Nível de encomenda

– Nível de encomenda = E

– Procura média por unidade de tempo = d

– Número de unidades de tempo para entrega = L

- Com procura determinística e constante:

E = d x L

- Com procura estocástica (stock de segurança = s):

E = d x L + s

Exemplo – Nível de encomenda

Considere que está a gerir um armazém que distribui uma marca decomida para cães. Relativamente a esse produto conhece os seguintes dados:

- Procura média = 200 pacotes
- Tempo de reaprovisionamento = 4 dias
- Desvio padrão da procura diária = 150 pacotes
- Nível de serviço pretendido = 95%
- Custo de encomenda = 20um por encomenda
- Custo por pacote = 10um
- Taxa de armazenamento = 0.2 x custo de aquisição

Considere ainda que será usado o sistema de nível de encomenda eque o armazém está aberto 250 dias por ano

Resolução exemplo:

$Q = \sqrt{2Ad/c_2} = \sqrt{2 \times 20 \times 250 \times 200/0.2 \times 10} = 1.000$ pacotes

$d \times L = 200 \times 4 = 800$ pacotes

$\sigma = \sqrt{4} \times 150 = 300$ pacotes

$ns = 95\% \rightarrow z = 1.65$

$E = d \times L + z \times \sigma = 200 \times 4 + 1.65 \times 300 = 1.295$

Regra:

Colocar uma encomenda de 1.000 pacotes sempre que o stock passe abaixo de 1.295 pacotes.

Stock de segurança = 495 pacotes

Serão colocadas aproximadamente 50 encomendas por ano.

Revisão periódica

– Nível máximo = M

– Procura média por unidade de tempo = d

– Número de unidades de tempo para entrega = L

– Número de unidades de tempo entre revisões = T

- Com procura determinística e constante:

$$\boldsymbol{M = d \times (L + T)}$$

- Com procura estocástica (stock de segurança = s):

  (nível máximo até ao qual se encomenda tem que ser igual ao consumo entre revisões mais tempo de entrega)

$$\boldsymbol{M = d\,(L + T) + s}$$

Resolução exemplo:

$T = Q/d = \sqrt{2A/d \times c_2} = \sqrt{2 \times 20/250 \times 200 \times 0.2 \times 10} = 5$ dias

$d \times (L + T) = 200 \times (4 + 5) = 1.800$ pacotes

$\sigma' = \sqrt{9} \times 150 = 450$ pacotes

ns = 95% → z = 1.65

$M = d \times (L + T) + z \times \sigma' = 200 \times (4 + 5) + 1.65 \times 450 = 2.542$

Regra:

Rever o stock cada 5 dias e colocar encomenda para 2542 pacotes.

Stock de segurança = 742 pacotes

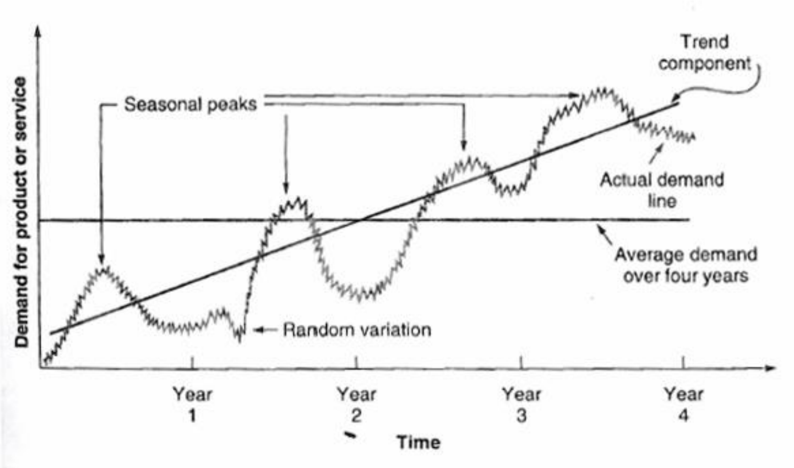
Serão colocadas aproximadamente 50 encomendas por ano.

Previsção

A previsão é usada nas áreas:

- Evolução tecnológica;
- Evolução da economia;
- Procura de artigos.
- A previsão da procura é aplicada no planeamento e controlo do sistema produtivo.

Gráfico 5: Componentes da procura



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Previsão → Predição de eventos futuros, com o intuito de diminuição de risco na tomada de decisão.

Erro

Custo Vs Benefício

Gráfico 6: Nível de esforço para previsão

Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Período da Previsão → Unidade básica de tempo na previsão.

Horizonte da Previsão → Número de períodos cobertos.

Intervalo de Previsão → Frequência de actualização

Poderíamos requerer uma previsão para as próximas dez semanas, com uma análise semanal, assim o horizonte seria dez semanas e o período de uma semana.

UNIDADE Temática 4.2. Métodos de Previsão: Modelos de Regressão Linear, Séries Cronológicas e Modelos de Decomposição

Introdução

Os métodos de previsão são usados em várias áreas, cita-se a título de exemplo, na evolução tecnológica, onde se prevêem novos produtos e processos de fabrico, na evolução da economia, onde as condições do negócio são calculadas e na procura, onde é feita uma previsão dos níveis de procura de produtos e/ou serviços.

Uma série temporal é uma sequência de observações sobre uma variável de interesse. A variável é observada em pontos temporais discretos, usualmente equidistantes, e a análise de tal comportamento temporal envolve a descrição do processo ou fenómeno que gera a sequência.

Modelos de Regressão Linear

A análise de regressão permite determinar a procura futura com base numa equação de regressão. Esta equação expressa a série que se pretende prever (variável dependente) em função dos factores que influenciam a procura (variáveis independentes). No caso do modelo de regressão linear existe apenas uma variável independente que afecta a procura que se pretende prever. A forma como estas variáveis se relacionam é descrita pela equação de uma recta:

$Y = a + bX$

Onde:

Y é o valor esperado da variável dependente, previsão da procura;

X é o valor observado da variável independente, factor que afecta a procura;

a é a intersecção na origem;

b é o declive da recta.

O método usado para determinar os valores óptimos de a e b e assim se obter a melhor recta que se adequa aos dados é o método dos mínimos quadrados. Esta técnica minimiza a soma dos quadrados da distância entre cada valor dos dados e o ponto correspondente na recta que se assumiu. Desta forma, as expressões que permitem calcular os valores de a e b são, respectivamente:

$a = \overline{y} - b\overline{x}$

$$b = \frac{\Sigma\, xy - \overline{nxy}}{\Sigma\, x^2\, nx^{-2}}$$

Onde:

x é o valor de x para cada ponto dos dados;

y é o valor de y para cada ponto dos dados;

$\overline{x}$ é a média de todos os x;

~~y~~ é a média de todos os y;

n é o número de dados.

O erro padrão da estimativa é:

O erro padrão da estimativa é:

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i)^2}{n}}$$

Onde:

Yi é o valor da variável dependente calculada a partir da equação de regressão.

Caso a série temporal para a qual se pretende determinar a procura contenhacomponentes tendência e sazonal é necessário proceder-se à metodologia: encontrar a componente sazonal, dessazonalizar a procura, encontrar a componente tendência, projectar a componente tendência para o futuro e, por fim, multiplicar a componente tendência pela componente sazonal.

Há casos em que a procura aumenta através de uma "razão constante" em cada período e não através de uma "quantidade" média, ou seja, trata-se de regressão curvilínea e não de regressão linear.

Séries Cronológicas ou temporais

Pode-se definir uma série temporal ou cronológica como sendo um conjunto de dados observados e ordenados segundo parâmetro de tempo e com dependência serial, sendo esse espaço de tempo entre os dados disponíveis equidistantes (horários, diário, semanal, mensal, trimestral, anual, etc.) (Souza & Camargo, 2004).

Para que uma determinada série seja classificada como uma série temporal, é necessário que ela preencha outro pré-requisito: os dados também devem apresentar uma dependência serial entre eles. Por exemplo: os dados de uma variável aleatória *z* (consumo de energia) no instante *t* , com *t* variando de 1 até N, possa, de certa maneira, conter informações necessárias para que seja determinado o valor dessa variável no instante *t*+1. Cabe mencionar que, N representa o número de observações da série temporal em questão. As séries temporais podem ser classificadas como discretas, contínuas, determinísticas, estocásticas, multivariadas e multidimensionais.

Os procedimentos de previsão de séries temporais ou cronológicas podem ser divididos, geralmente, em duas categorias:

a) **Automáticos**, que são aplicados directamente, com a estilização de programas simples de computador;

b) **Não-Automáticos**, que exigem a intervenção de pessoal especializado, para serem aplicados.

Automáticos

Previsão de Séries Localmente Constantes

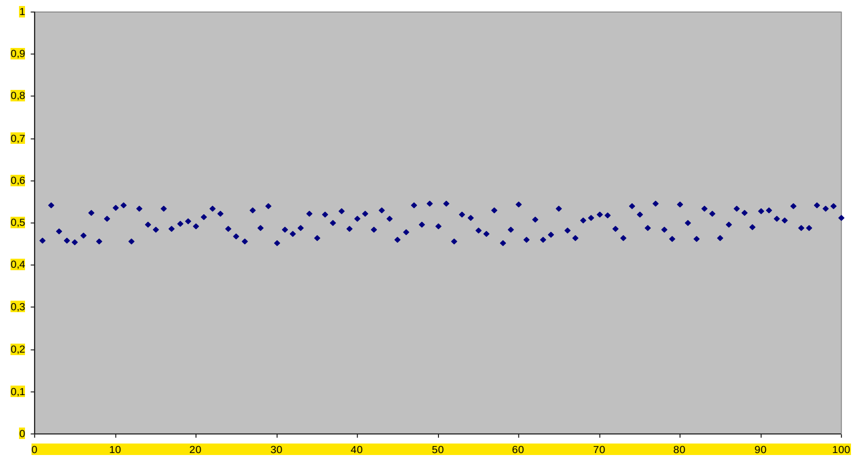
$$Z_t = \mu_t + a_t, \rightarrow t = 1, \ldots, N$$

Onde:

μ_t é o nível da série

A_t é um ruído branco

Gráfico 7: Previsão de Séries localmente constantes



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março*, 2016)

Previsão de Séries com Tendência

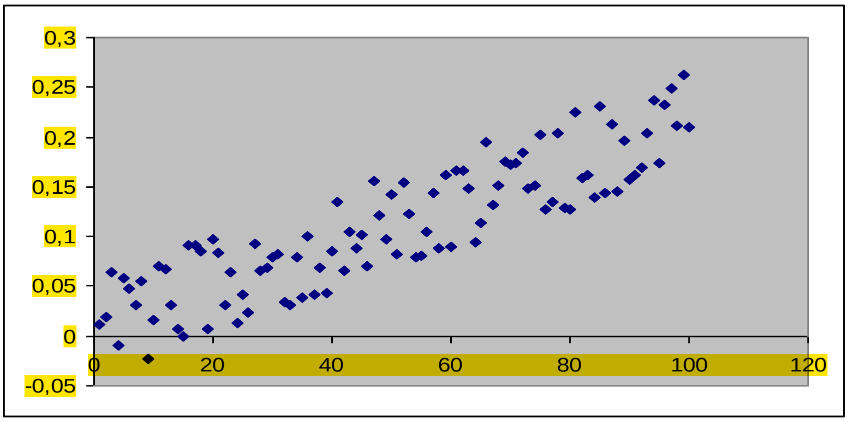
$Z_t = \mu_t + T_1 + a_t \rightarrow t = 1, \ldots, N$

μ_t é o nível da série

T_1 é a tendência (linear em t)

A_t é um ruído branco

Gráfico 8: Previsão de Séries com Tendência



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Previsão de Séries Sazonais

Sazonalidade Multiplicativa $\Rightarrow$ $Z_t = \mu_t F_t + T_t + a_t, \quad t = 1, \ldots, N$

Sazonalidade Aditiva $\Rightarrow$ $Z_t = \mu_t + T_t + F_t + a_t$

Gera-se três equações de alisamento, uma para a sazonalidade, uma para a tendência e outra para a série.

Este método é chamado de Alisamento Exponencial Sazonal de Holt-Winters.

ARIMA ou Não-automáticos

As séries que podem ser representadas pelos modelos já vistos têm que ser estacionária. Assim um procedimento de torná-las estacionárias e tiramos diferenças:

$$W_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t = \Delta Z_t$$

Ou tirando **d** diferenças: $W_t = \Delta^d Z_t$ ou $\Phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t$

Que é o modelo ARIMA (p, q, d).

Identificação

- De forma geral, o modelo ARIMA é parcimonioso, logo em geral d = 0, 1 ou 2 é suficiente para obtermos a identificação dos modelos;
- Faz as diferenças;
- Calcula-se as fac e facp para os dados;
- Analisa-se As funções obtidas com as dos modelos vistos;
- Identifica-se um conjunto de possíveis modelos.

Estimação

Existem basicamente dois procedimentos de estimação:

1) Procedimento Condicional;

2) Procedimento Não Condicional ou Incondicional.

Todos dos métodos realizam a minimização da função de verossimilhança (condicional e não condiciona).

$$S_*\left(n|W,W^*,a^*\right)=\sum_{t=1}^{n}a_t^2\left(n|W,W^*,a^*\right)$$

$$S\left(n|W,W^*,a^*\right)=\sum_{t=1}^{n}a_t^2\left(n|W,W^*,a^*\right)$$

Exemplo de Estimação

Supondo Um Modelo ARIMA (0, 1,1)

$W_t = \Delta Z_t = (1-\theta B)\, a_t$

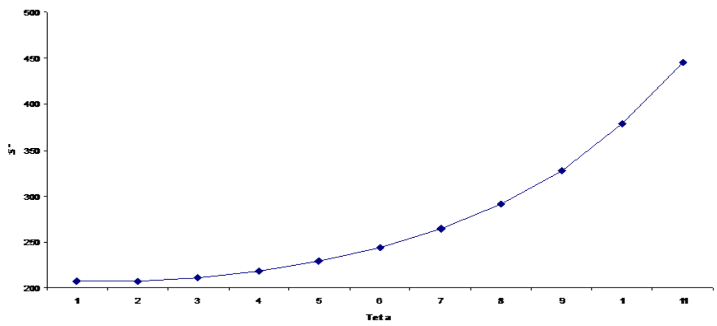
E suponha $\theta = 0{,}8$, termos $A_t = W_t + 0{,}8\, a_{t-1}$

Assim, supondo o método condicional ,

O menor valor de S_* é para $\theta = -0{,}4$

$$S_*(0{,}8)=\sum_{t=1}^{9}a_t^2\left(0{,}8|a_0=0\right)=\sum_{t=1}^{9}\left(W_t-0{,}8a_{t-1}\right)^2=801{,}26$$

Gráfico 9: Exemplo de estimação



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Verificação

Existem vários métodos de verificação, contudo exibiremos o método do Periodogram acumulado:

$$I_a\left(f_1\right)=\frac{2}{n}\left[\left(\sum_{t=1}^{n}a_t\cos\left(2\pi f_i t\right)\right)^2+\left(\sum_{t=1}^{n}a_t sen\left(2\pi f_i t\right)\right)^2\right]$$

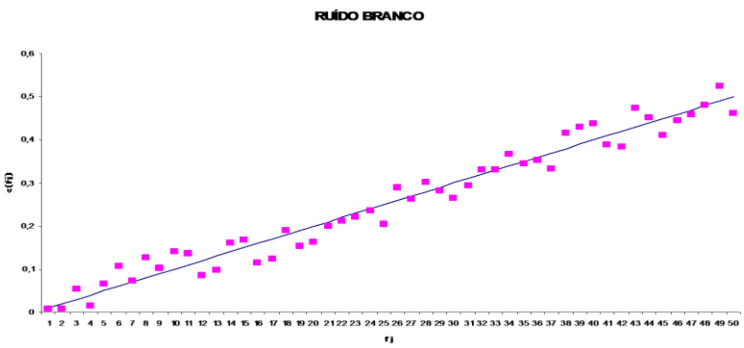
E o espectro aculumado é:

$$P_a(f)=\int_0^f p_a(g)dg=\begin{cases}0, & f<0\\ 2\sigma_a^2 f, & 0\le f<\frac{1}{2}\\ \sigma_a^2, & f\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

E o periodograma Acumulado é uma estimativa do espectro acumulado:

$$C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} I_a(f_i)}{n\sigma_a^2}$$

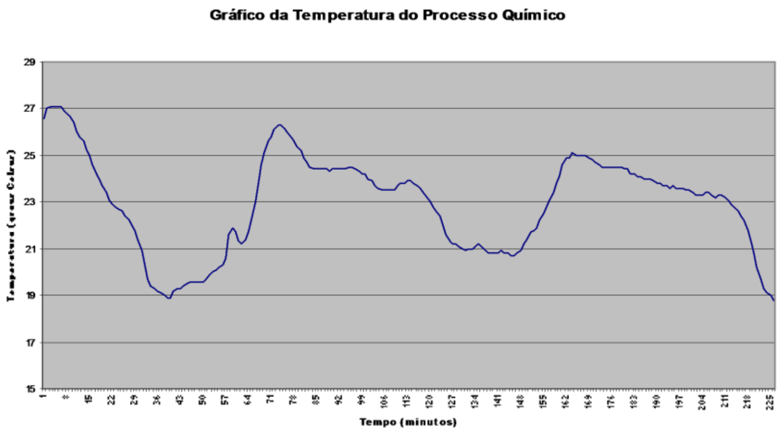
Gráfico 10: Ruído branco



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Aplicação do método ARIMA

Gráfico 11: Gráfico de temperatura do processo Químico



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

Estimativa

Modelos escolhido: ARIMA (1, 1, 0) e ARIMA (0, 2, 2)

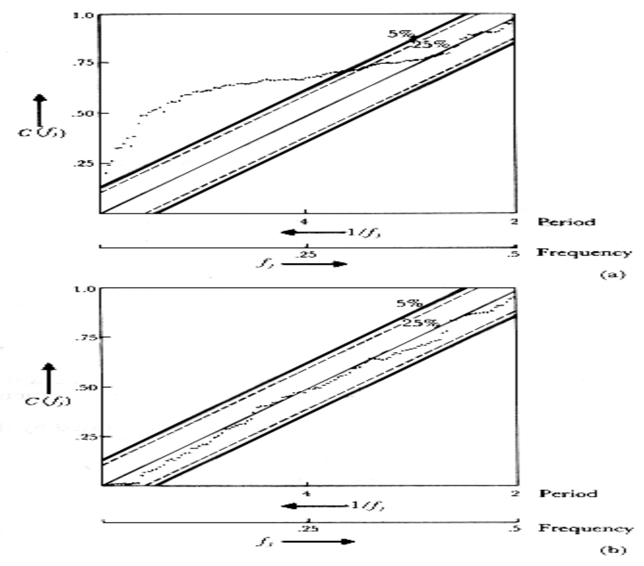
Table 104: ARIMA (1, 1, 0) e ARIMA (0, 2, 2)

Número de Observaçõe	Modelo Fitados	Variância Residual $S(\Phi,\Theta)/n$
226	$\Delta Z_{-t} - 0{,}82(\pm 0{,}04)\Delta Z_{t-1} = a_t$	0.018
226	$\Delta^2 Z_t = a_t - 0{,}13(\pm 0{,}07)a_{t-1} - 0{,}0{,}12(\pm 0{,}07)a_{t-2}$	0.019

Fonte: Adaptado pelo autor (Março, 2016)

Verificação

Gráfico 12: ARIMA (1, 1, 0) ARIMA (1, 1, 0), respectivamente



Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

- Os modelos Automáticos são bem mais fáceis de serem utilizados, porem requer um conhecimento prévio sobre a série.

- O Modelo ARIMA é bem mais preciso do que os modelos automáticos mencionados, porém requer mão de obrar super qualificada.

Padrões de Séries Temporais

- Processamentos que permanecem constantes sobre um certo nível todo o tempo, com variações de período a período devido a causas aleatórias.

- Padrões que ilustram tendências no nível dos processos, de maneira que a variação de um período ao outro é atribuída a uma tendência mais uma variação aleatória.

- Processos que variam ciclicamente no tempo, como em processos sazonais, atítulo de exemplo: o clima.

Modelos de Decomposição

A Decomposição Clássica consiste em um modelo univariado que utiliza formulações matemáticas simples para separar a série em quatro componentes principais, a partir dos quais, são feitas as previsões: (a) a tendência, que se refere à direção geral segundo a qual parece que o gráfico da série temporal se desenvolve em um longo intervalo de tempo; (b) o ciclo, que se refere às oscilações ao longo prazo ou aos desvios em torno da reta de tendência; (c) a sazonalidade, que se refere a padrões idênticos ou quase, que uma série temporal parece obedecer; e (d) o termo aleatório, que aparece com flutuações de curto período, com deslocamento inexplicável (Makridakis & Wheelwright, 1982; R. Souza, 1989).

O método de decomposição clássica para obter a procura no futuro separa as diferentes componentes da série e, em seguida, faz uso dessas componentes para efectuar previsões. Ou seja, separa as componentes sazonalidade, tendência, cíclica e de erros da série e estima-os individualmente, depois soma ou multiplica as componentes, caso as componentes sejam aditivas ou multiplicativas respectivamente, de forma a obter a previsão da procura.

Este método não é recomendado, pois apresenta várias desvantagens: só é eficaz quando aplicado a séries muito estáveis e ao se efectuar as previsões, não se atribui mais importância às observações mais recentes. Além disso, a utilização deste método implica a retenção em memória de vários dados e a incorporação de novas observações no procedimento de previsão implica um esforço computacional elevado.

UNIDADE Temática 4.3. EXERCÍCIOS deste tema.

Exercícios de AVALIAÇÃO – 2:

1 – A empresa Chunai vende, entre outros produtos, ratos ou mouse para PC. Recentemente a empresa fornecedora enviou uma nova

tabela com discontos de quantidade.

O custo normal para cada rato ou mouse é de 5,00Mt, para encomendas entre 1.000 e 1.999 unidades o custo unitário baixa para 4,80Mt e finalmente para encomendas de mais de 2.000 unidades o custo é de 4,75Mt.

O custo de encomenda é de 49,00Mt por encomenda, a procura anual é de 5.000 mouses ou ratos e a taxa de armazenamento é de 0.2 x custo de aquisição.

Qual a quantidade a encomendar para minimizar o custo total de armazenamento?

2 – A empresa Beira Show vende, entre outros produtos, ratos ou mouse para PC. Recentemente a empresa fornecedora enviou uma nova tabela com discontos de quantidade.

O custo normal para cada rato ou mouse é de 10,00Mt, para encomendas entre 2.000 e 3.998 unidades o custo unitário baixa para 9,60Mt e finalmente para encomendas de mais de 4.000 unidades o custo é de 9,50Mt.

O custo de encomenda é de 98,00Mt por encomenda, a procura anual é de 10.000 mouses ou ratos e a taxa de armazenamento é de 0.4 x custo de aquisição.

Qual a quantidade a encomendar para minimizar o custo total de armazenamento?

3 – Considere que está a gerir um armazém que distribui uma marca decomida para cães. Relativamente a esse produto conhece os seguintes dados:

a. Procura média = 200 pacotes
b. Tempo de reaprovisionamento = 4 dias
c. Desvio padrão da procura diária = 150 pacotes
d. Nível de serviço pretendido = 95%
e. Custo de encomenda = 20,00Mt por encomenda
f. Custo por pacote = 10,00Mt
g. Taxa de armazenamento = 0.2 x custo de aquisição

Considere ainda que será usado o sistema de nível de encomenda eque o armazém está aberto 250 dias por ano.

4 – Tendo como base o exercício nº 3, resolva considerando o dobro dos dados neles apreentados.

5 – Colocar uma encomenda de 1.000 pacotes sempre que o stock passe abaixo de 1.295 pacotes.

Stock de segurança = 495 pacotes

Serão colocadas aproximadamente 50 encomendas por ano.

6 – Usando o dobro dos dados do número anterior (5) prodeda com os calculos para o número 6.

TEMA – V: FILAS DE ESPERA

UNIDADE Temática 5.1. Teoria de Filas

UNIDADE Temática 5.2. EXERCÍCIOS deste tema

UNIDADE Temática 5.3. EXERCÍCIOS do módulo

UNIDADE Temática 5.1. Teoria de Filas

Introdução

Segundo dos Santos (2003), esperar em uma fila é uma das ocorrências mais comuns no nosso dia-a-dia. Nós esperamos na fila para fazer matrícula, para pagar em um supermercado, para pagar uma conta no banco, para comer um hamburguer, para colocar gasolina, etc.

O pioneiro no estudo das filas de espera foi A. Kendall Erlang, um engenheiro dinamarquês, que publicou, na década 1910-1920, vários trabalhos sobre o assunto quando da implantação do serviço telefónico em Copenhague.

Filas podem existir na forma de pessoas ou objectos esperando por algum tipo de serviço ou podem existir em um sentido abstracto, ou seja não tão visível, como por exemplo uma "fila" de navios esperando para atracar em um porto.

Porque as filas são "estudadas"

As filas são estudadas porque em toda fila, embora nem sempre se perceba, existe embutido um problema económico. E este problema económico surge porque em qualquer fila (mesmo a da padaria da esquina!) existem 2 custos envolvidos: **O Custo da Fila e o Custo do Serviço.**

Para que possamos entender o que vem a ser estes 2 custos, vamos examinar um exemplo clássico de fila: **a atracação de navios em um porto.**

Em qualquer porto, o de Maputo, por exemplo, existem os locais onde os navios podem atracar. Estes locais são chamados de "berços".

Assim o número de berços dá o número máximo de navios que podem estar atracados em um porto. Por sua vez, a legislação internacional que regulamenta o tráfego marítimo determina que se ao chegar a um porto (obviamente na data certa) não houver berço para atracar, a administração do porto tem que indemnizar a companhia, dona do navio, pelo tempo que ele ficar ao largo esperando berço livre para atracar.

Em resumo quando, por qualquer motivo, todos os berços de um porto estão ocupados, os navios que chegam formam uma fila (lógica) aguardando a sua vez. Podemos agora definir os custos da fila e do serviço envolvidos no caso de um porto.

Também podemos falar de filas de espera quando para descontar um cheque em um banco, para pagar pelas compras em um supermercado, para comprar ingresso em um cinema, para pagar uma taxa em uma estrada com portagem e tantas outras situações. Filas existem também em ambientes de produção, tais como de lingotes de alumínio aquecidos em uma fábrica como a MOZAL, em que os camiões esperam junto à fábrica a sua vez de serem carregados com minério para o Porto da Motola.

No nosso exemplo sobre a atracação no Porto, o **Custo do Serviço** é o custo de construir e manter em funcionamento os berços de atracação. Quanto mais berços oferecidos, ou seja, quanto maior o nível de serviço oferecido, maior este custo.

O **Custo da Fila** é o custo que a administração do porto tem pelo pagamento das indemnizações aos navios que esperam na fila.

Este custo é inversamente proporcional ao custo do serviço (número de berços). Se temos poucos berços o custo do serviço será pequeno mas como a fila será grande, o custo da fila será grande. Já se tivermos muitos berços, o custo do serviço será grande mas em compensação, como a fila será pequena, o custo da fila será pequeno.

Genericamente podem definir:

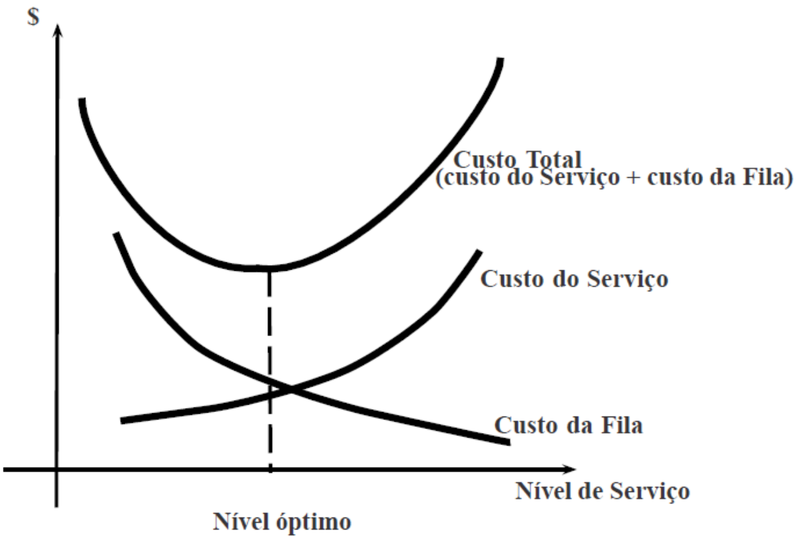
Custo do Serviço: É o custo de construir e manter em funcionamento as estações que prestam determinado serviço.

Custo da Fila: É o custo que se incorre devido ao fato de usuários de um sistema de fila terem que esperar na fila propriamente dita.

Custo Total: É a soma do Custo da Fila mais o Custo do Serviço.

A figura a seguir é uma representação destes custos:

Figura 11: Custo de fila de espera



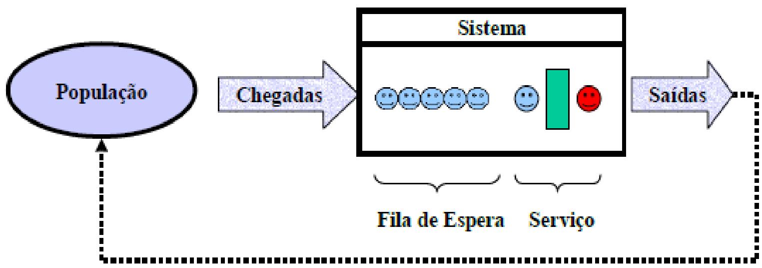
Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

O objectivo em qualquer sistema de filas é achar o ponto óptimo que minimiza a função do custo total, ou seja, achar o nível de serviço que minimiza o custo total.

Em quase todos os sistemas de filas é relativamente fácil, embora possa ser trabalhoso, achar o custo do serviço. Achar o custo da fila é bem mais complexo. Qual o custo da fila, por exemplo, em uma agência bancária? Temos pessoas na fila e o custo da fila é o equivalente monetário do tempo que as pessoas ficam na fila. A quantificação disto não é simples até porque na fila de uma agência bancária, podemos ter pessoas com "valor-hora" bastante diferentes.

Esquema de um sistema de Fila de Espera:

Figura 12: Sistema de fila de espera

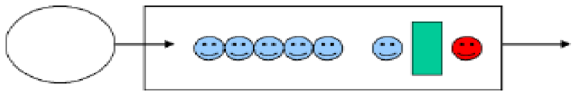


Fonte: *Adaptado pelo autor (Março, 2016)*

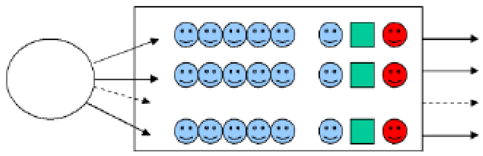
Configuração dos Sistemas de Filas

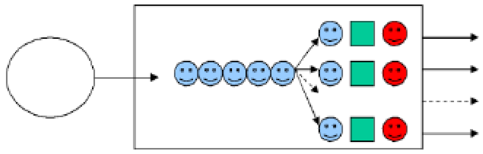
A configuração dos sistemas de Filas de Espera pode ser:

- Simples (A) (uma fila e um servidor)

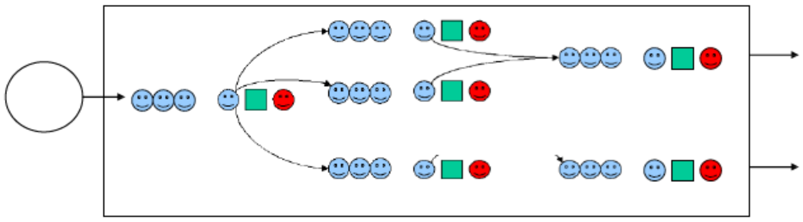


- Canais paralelos (B) (múltiplos servidores)





- Estádios múltiplos (C) (rede de filas de espera)



O número de canais é simplesmente o número de estações de serviço paralelas que prestam serviço às chegadas.

O número de fases, por outro lado, indica o número de etapas seqüenciais que cada chegada individual tem que passar.

Um exemplo da categoria (A) seria um pequeno posto bancário com somente 1 caixa para atendimento. Um exemplo da categoria (B) seria o caso de uma agência bancária com fila única e várias caixas. Para exemplificar o caso (C) poderíamos citar um pequeno hospital onde o paciente recebe um atendimento inicial por parte de um médico residente e a seguir é atendido pelo médico titular. Se tivéssemos vários residentes e vários médicos teríamos um exemplo do caso (D).

Podemos, sem muito esforço, identificar vários tipos de filas conhecidas que não se encaixam nas 4 categorias básicas. Isto é esperado pois estas são apenas as categorias básicas.

Para esquemas de filas mais complexos, a dificuldade em se obter soluções analíticas é imensa e, na maioria das vezes, inviável.

Como no processo de chegada, na grande maioria dos sistemas de filas, a duração do serviço prestado é aleatória e para descrevê-la precisamos definir uma distribuição probabilística.

Notação de Kendall

O professor D.G. Kendall criou, em 1953, uma notação para sistemas de filas que é hoje largamente usada.

Ela tem, na sua forma simplificada, o seguinte formato: (a/b/c) onde, **a** representa a distribuição das chegadas, **b** representa a distribuição do serviço e **c** indica o número de estações de serviço.

Modelo I (M/M/1) de Filas de Espera[3]

Este é o modelo mais simples de fila, ou seja tamanho população infinito, tamanho permitido para a fila infinito, chegadas seguindo a Poisson, duração do serviço seguindo a Exponencial, fila única com seleção FIFO (*First In First Out* – o primeiro a entrar é o primeiro a sair) e 1 estação de serviço.

Segundo Bronson e Naadimuthu (2001), um sistema M/M/1 é uma fila de espera com tempo entre chegadas exponencialmente distribuído, com parâmetro ʎ, com tempo de atendimento exponencialmente distribuído, com parâmetro µ; um servidor; sem limite na capacidade do sistema; e uma disciplina de fila de espera do tipo primeiro a chegar, primeiro a a ser atendido. A constante ʎ é a taxa média de

[3] Para mais detalhes sobre filas de espera consulte o texto do professor Maurício Pereira dos Santos (2003), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

chegada de clientes; a constante μ é a taxa média de atendimento de clientes. Ambas as taxas são definidas em unidades de clientes por tempo. O tempo esperado entre chegadas e o tempo esperado de atendimento de um cliente são 1/ Λ e 1/ μ, respectivamente.

Notações

A notação utilizada na teoria das filas é variada, mas em geral, as seguintes são comuns:

n – nº de clientes no sistema (estado do sistema)

λ_n – taxa de chegada quando há n clientes λ no sistema ($1/\lambda_n$ – intervalo de tempo médio entre chegadas);

μ_n – taxa de serviço quando há n clientes no sistema ($1/\mu_n$ –tempo médio de serviço);

P_n – probabilidade de existirem n clientes no sistema;

P_0 – probabilidade de existirem zero clientes no sistema (todos servidores livres)

S – número de servidores

L - número médio de clientes no sistema

Lq – número médio de clientes na fila

W – tempo médio no sistema (por cliente)

Wq – tempo médio de espera na fila (por cliente)

ρ – Taxa de ocupação

Formulário de Filas de Espera

O sistema de filas de espera pode variar em função da população e do número de pessoas que a fila pode acomodar. Assim, vamos apresentar as diversas situações:

Sistema M/M/1, População = ∞ ; Fila máxima = ∞
Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**). Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)
Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / \mu$ $(\rho < 1)$ Taxa de **desocupação** = $1 - \rho = P_0 = P(Wq = 0)$
$L = L_q + \lambda / \mu$ $L = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $L_q = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
$W = W_q + 1 / \mu$ $W = L / \lambda = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ $W_q = L_q / \lambda = \dfrac{\rho}{\mu - \lambda}$

$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$

$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$

$P(n > k) = \rho^{k+1}$

$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W}$ para $t \geq 0$

$P(W_q > t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho\, e^{-t/W}$ para $t \geq 0$

Sistema M/M/*S*, População = ∞; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 0,1,\ldots,S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / (S\mu)$ $(\rho < 1)$

Taxa de **desocupação** = $1 - \rho$

$L = L_q + \lambda / \mu$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$W = W_q + 1/\mu = L/\lambda$

$W_q = L_q / \lambda$

$P_0 = \left[\dfrac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$

$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \ldots, S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S+1, \end{cases}$

$P(W > t) = e^{-\mu t} \left[1 + \dfrac{(S\rho)^S P_0 \left(1 - e^{-\mu t (S-1-S\rho)}\right)}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right]$ para $t \geq 0$

$P(W_q > t) = \dfrac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu t(1-\rho)}$ para $t \geq 0$

$P(W_q = 0) = 1 - \dfrac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$

Sistema M/M/1/*K*, População = ∞; Fila máxima = *K* – 1

Número máximo de clientes no sistema = *K*

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema):

$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \ldots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases}$; $\bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / \mu$ Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / \mu$ Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda}/\mu = P_0 = P(W_q = 0) = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$
$L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & ;\rho \neq 1 \\ \dfrac{K}{2} & ;\rho = 1 \end{cases}$ $L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$
$W = W_q + 1 / \mu$ $W = L / \bar{\lambda}$ $W_q = L_q / \bar{\lambda}$
$P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = P(W_q = 0)$ $P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ;\rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ K/2 & ;\rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ;n > K \end{cases}$

Sistema M/M/*S*/K, População = ∞; Fila máxima = *K* – *S*
S $\leq$ **K; Nº máximo de clientes no sistema=K; Nº de servidores=*S*** Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema): $\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0,1,\ldots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases}$; $\bar{\lambda} = \lambda\,(1 - P_K)$ Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**. $\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$ Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)
Taxa de **pressão** $\rho = \lambda / (S\,\mu)$ Taxa de **ocupação** = $\bar{\lambda} / (S\,\mu)$ Taxa de **desocupação** = $1 - \bar{\lambda} / (S\,\mu)$
$P_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{S^S \rho^{S+1}(1-\rho^{K-S})}{S!(1-\rho)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{S} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[\dfrac{S^S}{S!}(K-S) + \displaystyle\sum_{n=0}^{S} \dfrac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$ $P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1,\ldots, S \\ \dfrac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S+1,\ldots, K \\ 0 & ; n \geq K+1 \end{cases}$ $P(W_q = 0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{S-1} P_n$

$L_q = \dfrac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{K-S}-(1-\rho)(K-S)\rho^{K-S}\right]$
$W_q = L_q / \bar{\lambda}$ W = Wq + 1 / μ ; L = $\bar{\lambda}$ $W = L_q + \bar{\lambda}$ / μ
Sistema M/M/*S*/*N*, População = *N* (Fila máxima = *N* – *S*)
S* ≤ *N*; Nº máximo de clientes no sistema=*N*; Nº de servidores=*S Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado *n* do sistema (isto é, do número *n* de clientes no sistema): $\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0,1,\ldots, N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases}$; $\bar{\lambda}$ = λ (*N* – *L*) Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de μ clientes por unidade de tempo por cada um dos ***S*** **servidores**. $\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1,2,\ldots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$ Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)
Taxa de **ocupação =** $\bar{\lambda}$ / (S μ) Taxa de **desocupação** = 1 – $\bar{\lambda}$ / (S μ)

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=S}^{N} \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular ***S* = 1**:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$ = taxa de desocupação

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & ; n = 1, \ldots, S \\ \dfrac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & ; n = S+1, \ldots, N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

Caso particular ***S* = 1**:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & ; n = 1, \ldots, N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \sum_{n=0}^{N} (n-S) P_n$$

Caso particular ***S* = 1**:

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

W = Wq + 1 / μ ; L = $\bar{\lambda}$ $W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$

Exemplo 1: Clientes chegam a uma barbearia, de um único barbeiro, com uma duração média entre chegadas de 20 minutos. O barbeiro gasta em média 15 minutos com cada cliente.

a) Qual a probabilidade de um cliente não ter que esperar para ser servido?

b) Qual o número esperado de clientes no salão de barbeiro na fila?

c) Quanto tempo, em média, um cliente permanece no salão?

d) Quanto tempo, em média, um cliente espera na fila?

e) Qual a probabilidade de que um cliente tenha que ficar mais de 30 minutos no salão?

f) O barbeiro está estudando a possibilidade de colocar outro barbeiro desde que o tempo de permanência médio de cada cliente no salão passe a 1, 25 horas. Para quanto deve aumentar a taxa de chegada de modo que este segundo barbeiro fique justificado?

Resolução:

ʎ=3/h μ=4/h

Dados:

a) $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{4} = 0.25 = 25\%$

b) $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3\, fregueses$

$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} 2.25\, fregueses$

Como pode ser visto acima L-L_q = 0,75 e a primeira vista poderá parecer que a diferença entre o número médio de clientes no sistema (L) e o número médio de clientes na fila (L_q) deveria ser 1, ou seja, o freguês que está sendo atendido pelo barbeiro.

Na verdade (L-L_q) representa o percentual médio de clientes atendidos por unidade de tempo e o resultado é menor que 1 porque as vezes o barbeiro fica ocioso.

c) $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4-3} = 1 hora$

d) $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4(4-3)} = 0,75 horas$

e) $P(T \succ 0.5) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-4\left(1-\frac{3}{4}\right)*0.5} = 0.61 = 61\%$

f) Queremos ʎ de modo que W=1.25 horas

$$1.25 = \frac{1}{4-\lambda} \Rightarrow \lambda = 3{,}2\, fregueses / hora$$

Exemplo 2: Pessoas chegam para comprar ingressos para um jogo à taxa de uma por minuto. Cada pessoa gasta em média 20 segundos para comprar um ingresso.

a) Se uma determinada pessoa chega 2 minutos antes do jogo começar e se ela gasta exatamente 1,5 minutos para chegar ao seu lugar após comprar o seu ingresso, ela estará sentada antes do jogo começar?

b) Qual a probabilidade da pessoa do ítem a estar sentada antes do jogo começar?

c) Com que antecedência deve a pessoa chegar para ter 99% de certeza de estar sentada antes do jogo começar?

Resolução:

$\lambda = 1/min$ $\mu = 3/min$

a) $W = 1/(\mu-\lambda) = 0{,}5$ minutos

Logo o tempo médio para comprar o ingresso e achar o lugar é 0,5 + 1,5 = 2 minutos, ou seja, a pessoa deverá estar sentada antes do jogo começar.

b) É igual a probabilidade do ingresso ser comprado em tempo menor ou igual a 0,5 minutos.

$P(T \leq 0{,}5) = 1-P(T > 0{,}5) = 1-e^{-\mu(1-\rho)t} = 1-e^{-3(1-1\ 3)0.5}$

$P(T \leq 0{,}5) = 0{,}63 = 63\%$

c) Queremos achar t de modo que:

$P(T > t) = 0{,}01$

$e^{-\mu(1-\rho)t} = 0{,}01 \Rightarrow e^{-3(1-1/3)t}$

$t = 2{,}3$ minutos

Logo: $P(T > 2{,}3) = 0{,}01$ $P(T \leq 2{,}3) = 0{,}99$

Como a pessoa gasta 1,5 minutos para achar seu lugar ela deve chegar 1,5+2,3 = 3,8 minutos antes do jogo começar.

IMPORTANTE

Como já foi dito anteriormente, a taxa de ocupação (λ/μ), tem que ser sempre menor que 1 pois, em caso contrário, a fila tende ao infinito.

Exemplo 3: Fregueses chegam aleatoriamente a uma padaria à taxa média de 12/hora. O único empregado da padaria pode servir fregueses à taxa média de 20/hora. O empregado recebe \$3/hora enquanto que o tempo que os fregueses "perdem" na padaria está estimado em \$8/hora. O dono da padaria está considerando a instalação de um equipamento de auto-serviço que fará com que a taxa de atendimento aos fregueses passe para 42 fregueses/hora. O custo do equipamento de auto-serviço é de \$30/dia.

Considerando que a padaria funciona 12 horas/dia, justifique economicamente se o equipamento de auto-serviço deve ou não ser comprado?

Resolução:

λ = 12/hora

Situação Atual

μ = 20/hora

Custo do empregado = \$3/hr ×12 hr/dia = \$36/dia⇒Custo do serviço

W = tempo médio que um freguês permanece na padaria.

W = 0, 125 horas

Custo = 0, 125 horas ×8/hr = \$1

Custo da fila = \$1 × 12 fregueses/hr × 12 hr/dia = \$144

Custo total = \$36 + \$144 = \$180/dia

Situação Proposta

μ = 42/hora

W = 0, 0333 horas

Custo = 0, 0333 horas ×\$8/hr = \$0, 266

Custo da fila = \$0, 266 × 12 fregueses/hr ×12 hr/dia = \$38, 40/dia

Custo do serviço = \$36 + \$30 = \$66/dia

Custo total = \$66 + \$38, 40 = \$104, 40/dia

***Resp: A situação proposta é melhor*.**

Exemplo 4: Um escritório tem 3 datilógrafas e cada uma pode datilografar, em média, 6 cartas por hora. As cartas chegam para serem datilografadas a taxa média de 15 por hora.

a) Qual o no médio de cartas esperando para serem datilografadas?

b) Quanto tempo, em média, uma carta demora para ficar pronta?

c) Qual a probabilidade de que uma carta demore mais de 20 minutos para ficar pronta?

d) Vamos supor que cada datilógrafa receba individualmente 5 cartas por hora, em média, para datilografar. Quanto tempo em média uma carta demora para ficar pronta?

Resolução

Modelo M/M/3 com ʎ = 15/hr e µ = 6/hr

a) Lq? P_0 = 0,0499 L_q = 3,511 cartas

b) b) W = ? L = 6,011 cartas W = 0,40 horas

c) P(T > 0, 333 hr) = 0,461 = 46, 1%

d) Modelo I: ʎ = 5/hr W = 1 hora

Este exemplo serve para exemplificar a vantagem em se ter uma fila única quando temos várias estações de serviço prestando o mesmo tipo de atendimento. Como podemos ver, com uma única fila, cada carta demora, em média, 0, 40 horas (24 minutos) para ficar pronta. Com fila individual demorará, em média, 1 hora.

Exemplo 5: Uma barbearia com 1 barbeiro tem 6 cadeiras para acomodar fregueses esperando atendimento. Os fregueses que chegam quando as 6 cadeiras estão cheias, vão embora sem esperar. Os fregueses chegam a taxa média de 3/hr e ficam em média 15 minutos na cadeira do barbeiro.

a) Qual a probabilidade de um freguês chegar e ir direto para a cadeira do barbeiro?

b) Qual o no médio de fregueses esperando atendimento?

c) Qual a taxa de chegada efetiva?

d) Quanto tempo, em média, um freguês fica na barbearia?

e) Que percentual dos fregueses potenciais vai embora sem esperar atendimento?

Resolução (Fila finita)

M = 7 λ=3/hr μ = 4/hr

a) P_0 = 0,2778 = 27,78%

b) L = 2,11 fregueses Lq = 1,39 fregueses

c) λef = 2, 89 fregueses/hr

d) W = 0,73 horas

e) $\frac{\lambda ef}{\lambda} = \frac{2,89}{3} = 0,963$ ⇒ **Percentual de fregueses atendidos**

Resp: 1 – 0,963 = 0,037 = 3, 7%

Exemplo 6: Uma barbearia com 2 barbeiros tem 5 cadeiras de espera. Os fregueses que chegam quando as 5 cadeiras estão ocupadas, vão embora. Os fregueses chegam a uma taxa média de 6/hora e ficam em média 15 minutos na cadeira de barbeiro.

a) Qual a probabilidade de um freguês chegar e ir direto para a cadeira de barbeiro?

b) Qual o no médio de fregueses esperando para serem atendidos?

c) Qual a taxa de chegada efetiva?

d) Quanto tempo, em média, um freguês fica na barbearia?

e) Que percentual de fregueses vai embora?

Resolução (Fila finita s>1)

M = 7 λ= 6/hr µ = 4/hr s = 2

a) $P_0 + P_1$ = 0,4032 = 40,32%

b) Lq = 1,014 fregueses

c) λef = 5,741 fregueses/hr

d) W= 0,426 horas

e) $1-\dfrac{\lambda ef}{\lambda}=0{,}0431=4{,}31\%$

UNIDADE Temática 5.2. EXERCÍCIOS deste tema.

Exercícios de AVALIAÇÃO – 2:

1 – Clientes chegam a uma barbearia, de um único barbeiro, com uma duração média entre chegadas de 20 minutos. O barbeiro gasta em média 15 minutos com cada cliente.

a) Qual a probabilidade de um cliente não ter que esperar para ser servido?

b) Qual o número esperado de clientes no salão de barbeiro na fila?

c) Quanto tempo, em média, um cliente permanece no salão?

d) Quanto tempo, em média, um cliente espera na fila?

e) Qual a probabilidade de que um cliente tenha que ficar mais de 30 minutos no salão?

f) O barbeiro está estudando a possibilidade de colocar outro barbeiro desde que o tempo de permanência médio de cada cliente no salão passe a 1, 25 horas. Para quanto deve aumentar a taxa de chegada de modo que este segundo barbeiro fique justificado?

2 – Pessoas chegam para comprar ingressos para um jogo à taxa de uma por minuto. Cada pessoa gasta em média 20 segundos para comprar um ingresso.

a) Se uma determinada pessoa chega 2 minutos antes do jogo começar e se ela gasta exatamente 1,5 minutos para chegar ao seu lugar após comprar o seu ingresso, ela estará sentada antes do jogo começar?

b) Qual a probabilidade da pessoa do ítem a estar sentada antes do jogo começar?

c) Com que antecedência deve a pessoa chegar para ter 99% de certeza de estar sentada antes do jogo começar?

3 – Fregueses chegam aleatoriamente a uma padaria à taxa média de 12/hora. O único empregado da padaria pode servir fregueses à taxa média de 20/hora. O empregado recebe $3/hora enquanto que o tempo que os fregueses "perdem" na padaria está estimado em $8/hora. O dono da padaria está considerando a instalação de um equipamento de auto-serviço que fará com que a taxa de atendimento aos fregueses passe para 42 fregueses/hora. O custo do equipamento de auto-serviço é de $30/dia. Considerando que a padaria funciona 12 horas/dia, justifique economicamente se o equipamento de auto-serviço deve ou não ser comprado?

4 – Um escritório tem 3 datilógrafas e cada uma pode datilografar, em média, 6 cartas por hora. As cartas chegam para serem datilografadas a taxa média de 15 por hora.

a) Qual o no médio de cartas esperando para serem datilografadas?

b) Quanto tempo, em média, uma carta demora para ficar pronta?

c) Qual a probabilidade de que uma carta demore mais de 20 minutos para ficar pronta?

d) Vamos supor que cada datilógrafa receba individualmente 5 cartas por hora, em média, para datilografar. Quanto tempo em média uma carta demora para ficar pronta?

5 – Uma barbearia com 1 barbeiro tem 6 cadeiras para acomodar fregueses esperando atendimento. Os fregueses que chegam quando as 6 cadeiras estão cheias, vão embora sem esperar. Os fregueses chegam a taxa média de 3/hr e ficam em média 15 minutos na cadeira do barbeiro.

a) Qual a probabilidade de um freguês chegar e ir direto para a cadeira do barbeiro?

b) Qual o no médio de fregueses esperando atendimento?

c) Qual a taxa de chegada efetiva?

d) Quanto tempo, em média, um freguês fica na barbearia?

e) Que percentual dos fregueses potenciais vai embora sem esperar atendimento?

6 – Uma barbearia com 2 barbeiros tem 5 cadeiras de espera. Os fregueses que chegam quando as 5 cadeiras estão ocupadas, vão embora. Os fregueses chegam a uma taxa média de 6/hora e ficam em média 15 minutos na cadeira de barbeiro.

a) Qual a probabilidade de um freguês chegar e ir direto para a cadeira de barbeiro?

b) Qual o no médio de fregueses esperando para serem atendidos?

c) Qual a taxa de chegada efetiva?

d) Quanto tempo, em média, um freguês fica na barbearia?

e) Que percentual de fregueses vai embora?

UNIDADE Temática 5.3. EXERCÍCIOS do Módulo.

Exercícios de AVALIAÇÃO – 3:

1 – Explique de forma sumária os principais passos da Investigação Operacional. E qual é a relação que se estabelece entre os passos e as caracteristicas da IO?

2 – A Empresa Macelular 2, SA produtora de equipamentos Celulares firmou um em que se compromete a fornecer a um cliente 1.000 unidades de Celulares 4G. Actualmente (final de dezembro 2011) dispõe em armazém 50 unidades deste tipo de celulares. O fornecimento das mil unidades deve obedecer ao seguinte calendário: Janeiro: 200 Unidades, Fevereiro: 300 unidades e Marco 500 unidades. A capacidade máxima de armazenamento é de 500 unidades.

3 – Uma empresa de electrónica fabrica dois tipos de circuitos A e B. Os do tipo A são vendidos por 4 euros e os do tipo B por 5 euros. No processo produtivo ambos os tipos de circuitos passam por duas máquinas. Na primeira máquina os circuitos são trabalhados durante 4 horas os do tipo A e 5 horas os do tipo B. Na outra máquina os circuitos passam 4 e 3 horas, respectivamente. A primeira máquina pode funcionar durante um máximo de 32 horas, enquanto a outra máquina não pode exceder as 24 horas de funcionamento. A empresa pretende maximizar a receita. Formule matematicamente o problema e resolva-o graficamente. Qual a receita máxima que a empresa pode obter?

4 – Considere o problema de Programação Linear:

$$MinZ = 10X_1 - 6X_2$$
$$s.a.\begin{cases} 4X_1 - 3X_2 \geq 28 \\ X_1 - X_2 \geq 6 \\ 3X_1 - 5X_2 \geq 14 \\ X_1 \geq 0; X_2 \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule utilizando o Método Big-M ou Duas Fases e classifique a solução óptima do problema de PL apresentado.

5 – Resolva os seguintes problemas pelo método dual simplex, se necessário apresente a solução pelo método gráfico. Nota: substituir as equações por duas inequações.

a) Min W = $4x_1 + 2x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min W = $2x_1+3x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

6 – A empresa Chunai vende, entre outros produtos, ratos ou mouse para PC. Recentemente a empresa fornecedora enviou uma nova tabela com discontos de quantidade.

O custo normal para cada rato ou mouse é de 5,00Mt, para encomendas entre 1.000 e 1.999 unidades o custo unitário baixa para 4,80Mt e finalmente para encomendas de mais de 2.000 unidades o custo é de 4,75Mt.

O custo de encomenda é de 49,00Mt por encomenda, a procura anual é de 5.000 mouses ou ratos e a taxa de armazenamento é de 0.2 x custo de aquisição.

Qual a quantidade a encomendar para minimizar o custo total de armazenamento?

7 – Considere que está a gerir um armazém que distribui uma marca decomida para cães. Relativamente a esse produto conhece os seguintes dados:

h. Procura média = 200 pacotes
i. Tempo de reaprovisionamento = 4 dias
j. Desvio padrão da procura diária = 150 pacotes
k. Nível de serviço pretendido = 95%
l. Custo de encomenda = 20,00Mt por encomenda
m. Custo por pacote = 10,00Mt
n. Taxa de armazenamento = 0.2 x custo de aquisição

Considere ainda que será usado o sistema de nível de encomenda e que o armazém está aberto 250 dias por ano.

8 – Colocar uma encomenda de 1.000 pacotes sempre que o stock passe abaixo de 1.295 pacotes.

Stock de segurança = 495 pacotes

Serão colocadas aproximadamente 50 encomendas por ano.

9 – A empresa G. Duval, possui entre as suas diferentes actividades, uma actividade de concepção/ fabricação de motas de neve. Para responder as evoluções do mercado a empresa acaba de conceber um novo modelo de mota que conta colocar à venda durante o próximo inverno. As actividades a serem realizadas estão apresentadas na *tabela.*

Descrição das actividades	Actividade precedentes	Duração em dias
A – corte dos elementos dos chassis;	-	2
B – montagem do motor;	-	1
C – montagem, chassis, motor, cabina;	E , B , H	1
D – colocação de pára-brisas, volante, etc.;	C	2
E – Furação, soldadura do chassis;	A	1
F – verificação do funcionamento;	E , B , H	2
G – ensaio do motor;	D , F	1
H – preparação da cabina e acessórios.	-	3

10 – Considere o problema de calendarizar um conjunto de 7 tarefas independentes, caracterizadas pela informação apresentada na *tabela a seguir*.

Tarefa	Tarefa precedente	Duração em semanas
A	-	3
B	A	3
C	A	2
D	B	1
E	B	3
F	B , C	7
G	B , C	5
H	D , f	6

a) Apresente a rede PERT – CPM que descreve esta série de actividades. Lembre-se de indicar a duração de cada actividade nos arcos.

b) Ordene as actividades do projecto.

11 – Clientes chegam a uma barbearia, de um único barbeiro, com uma duração média entre chegadas de 20 minutos. O barbeiro gasta em média 15 minutos com cada cliente.

a) Qual a probabilidade de um cliente não ter que esperar para ser servido?

b) Qual o número esperado de clientes no salão de barbeiro na fila?

c) Quanto tempo, em média, um cliente permanece no salão?

d) Quanto tempo, em média, um cliente espera na fila?

e) Qual a probabilidade de que um cliente tenha que ficar mais de 30 minutos no salão?

f) O barbeiro está estudando a possibilidade de colocar outro barbeiro desde que o tempo de permanência médio de cada cliente no salão passe a 1, 25 horas. Para quanto deve aumentar a taxa de chegada de modo que este segundo barbeiro fique justificado?

12 – Pessoas chegam para comprar ingressos para um jogo à taxa de uma por minuto. Cada pessoa gasta em média 20 segundos para comprar um ingresso.

a) Se uma determinada pessoa chega 2 minutos antes do jogo começar e se ela gasta exatamente 1,5 minutos para chegar ao seu lugar após comprar o seu ingresso, ela estará sentada antes do jogo começar?

b) Qual a probabilidade da pessoa do ítem a estar sentada antes do jogo começar?

c) Com que antecedência deve a pessoa chegar para ter 99% de certeza de estar sentada antes do jogo começar?

13 – Um escritório tem 3 datilógrafas e cada uma pode datilografar, em média, 6 cartas por hora. As cartas chegam para serem datilografadas a taxa média de 15 por hora.

a) Qual o no médio de cartas esperando para serem datilografadas?

b) Quanto tempo, em média, uma carta demora para ficar pronta?

c) Qual a probabilidade de que uma carta demore mais de 20 minutos para ficar pronta?

d) Vamos supor que cada datilógrafa receba individualmente 5 cartas por hora, em média, para datilografar. Quanto tempo em média uma carta demora para ficar pronta?

14 – Uma barbearia com 1 barbeiro tem 6 cadeiras para acomodar fregueses esperando atendimento. Os fregueses que chegam quando as 6 cadeiras estão cheias, vão embora sem esperar. Os fregueses chegam a taxa média de 3/hr e ficam em média 15 minutos na cadeira do barbeiro.

a) Qual a probabilidade de um freguês chegar e ir direto para a cadeira do barbeiro?

b) Qual o no médio de fregueses esperando atendimento?

c) Qual a taxa de chegada efetiva?

d) Quanto tempo, em média, um freguês fica na barbearia?

e) Que percentual dos fregueses potenciais vai embora sem esperar atendimento?

15 – Uma barbearia com 2 barbeiros tem 5 cadeiras de espera. Os fregueses que chegam quando as 5 cadeiras estão ocupadas, vão embora. Os fregueses chegam a uma taxa média de 6/hora e ficam em média 15 minutos na cadeira de barbeiro.

a) Qual a probabilidade de um freguês chegar e ir direto para a cadeira de barbeiro?

b) Qual o no médio de fregueses esperando para serem atendidos?

c) Qual a taxa de chegada efetiva?

d) Quanto tempo, em média, um freguês fica na barbearia?

e) Que percentual de fregueses vai embora?

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Eduardo Leopoldino de, "Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisões, 4ª Edição", Rio de Janeiro: LTC, 2009. 202p;
- BRONSON, R., NAADIMUTHU, G., (2001) – *Investigação Operacional, 2ª Edição,* Colecção Schaum's Outlines, MCGraw-Hill, Portugal;
- GOODWIN, P. e WRIGHT, G.; Decision Analysis for Management Judgment, John Wiley & Sons, Ltd, 2007;
- GUERREIRO, J.; A. Magalhães; M. Ramalhete; S/D - *Programação Linear,* Volumes I e II, McGraw-Hill Portuguesa;
- Heizer, Jay and Render, Barry; Operations Management, Prentice-Hall, Fifth edition, 1999;
- HILL, Manuela M, Dos SANTOS, Mariana, M., Investigação Operacional: Programação Linear. Volume I, Edições Sílabo, Portugal;
- HILL, Manuela M, Dos SANTOS, Mariana, M., Investigação Operacional: Transportes, Afectação e optimização de Redes. Volume III, Edições Sílabo, Portugal;
- HILL, Manuela M, Dos SANTOS, Mariana, M.; Investigação Operacional: Exercícios de Programação Linear. Volume II, Edições Sílabo, Portugal;
- HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN, Gerald J.; Introduction to operations research;
- LACHTERMACHER, Gerson, (2009) – Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões, 4ª Edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo;
- Makridakis, S., & Wheelwright, S. (1982). *The handbook of forecasting: a manager's guide*. New York: John Wiley & Sons, Inc.;
- MULENGA, Alberto, (2005) – Investigação Operacional: Uma Abordagem Introdutória, Apontamentos de Investigação

Operacional. Maputo. 2005;

- Oliveira, Rui Carvalho; Introdução aos modelos de gestão de stocks;
- Schroeder, Roger G.; Operations Management, Decision Making in the Operations Function, McGraw-Hill 1989 ;
- Souza, R. (1989, julho). Modelos estruturais para previsão de séries temporais: abordagens clássica e bayesiana. *Anais do Colóquio Brasileiro de Matemática*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 17;
- TAVARES, L. Valadares; OLIVEIRA, R. Carvalho, THEMIDO, Isabel H., CORREIA, F. Nunes, (1996) – *Investigação operacional,* McGraw-Hill, Portugal.
- Vasconcelos, Bernardo C.; Gestão de Stocks -2. Modelos Determinísticos, 1986.