IFCE - Engenharia de Telecomunicações - 2016.1

Cálculo 1 - Lista 1

Prof. Angelo Papa Neto - papaneto@gmail.com

---

1. Determine os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

   (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

   (f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

   (g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

2. Calcule o limite
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

3. Determine os limites abaixo.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

   (f) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

4. Determine $\delta > 0$ tal que
$$|x-2|<\delta \Longrightarrow |x^2-4|<\varepsilon$$
para $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\varepsilon = 0,001$.

5. As afirmações a seguir são **FALSAS**. Exiba contra-exemplos.

   (a) Se o valor absoluto de uma função $y = f(x)$ é contínuo no intervalo (a,b),então a função também é contínua no intervalo (a,b).

   (b) Se ambas as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são descontínuas em $x = a$, então $y = f(x) + g(x)$ também é descontínua em $x = a$.

   (c) Se ambas as funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são descontínuas em $x = a$, então $y = f(x)\cdot g(x)$ também é descontínua em $x = a$.

   (d) Se uma função $y = f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$, para $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

6. Para cada uma das seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre um inteiro n tal que $f(x_0) = 0$, para algum x_0 entre n e $n + 1$:

   (a) $f(x) = x^3 - x + 3$.

   (b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

   (c) $f(x) = x^5 + x + 1$.

   (d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

7. Mostre que a equação $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ tem uma solução no intervalo $(1, 2)$.

8. A equação $\frac{2x^2+2x+2}{2x-1} = 0$ tem alguma solução no intervalo $(1, 2)$?

AFIRMAÇÃO: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, se a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em (a, b) e $f(a) < f(b)$, então, para todo $N \in (f(a), f(b))$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

   (a) Dê um contra-exemplo para mostrar que esta afirmação é, em geral, **falsa**.

   (b) Exiba um exemplo onde a afirmação é verdadeira para *exatamente* um número $N \in (f(a), f(b))$.

   (c) Exiba um exemplo onde a afirmação é verdadeira para *exatamente* n ($n \in \mathbb{N}$) elementos do intervalo $(f(a), f(b))$.

   (d) Exiba um exemplo onde a afirmação é verdadeira para uma infinidade de elementos do intervalo $(f(a), f(b))$.

9. Para cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, encontre (se existirem) os pontos de descontinuidade.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & \text{se} \quad -\infty < x \le 1 \\ 6-5x & \text{se} \quad 1 < x < 3 \\ x-3 & \text{se} \quad 3 \le x < \infty \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ 3x & \text{se} \quad 3 < x \end{cases}$

(c) $f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$.

(d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

(e) $f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|}$.

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

10. A função $d : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, dada por

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é chamada **função de Dirichlet**[1] Mostre que d é descontínua em cada $x \in \mathbb{R}$.

11. Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x-a)^2(2d(x)-1)$, onde d é a função de Dirichlet, definida no problema anterior. Mostre que esta função é contínua em apenas um ponto e encontre esse ponto.

12. Considere a função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Encontre os pontos de descontinuidade da função composta $y = f(f(f(x)))$.

13. Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} \right)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{9x^2+1} - 3x)$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5^{2x/(x+3)}$.

14. Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1-x}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{7x}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/(3x)}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\operatorname{tg} x}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$.

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

(l) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

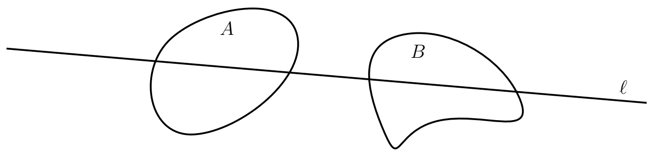
15. Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3} = e^{-8}$.

16. A população de um país cresce 2% ao ano. Quantas vezes, aproximadamente, a população desse país cresce em um século?

17. (Teorema do Ponto Fixo) Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Um número real c tal que $f(c) = c$ é chamado **ponto fixo** de f.

18. Um monge tibetano deixa o monastério às 7:00 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 19:00. No dia seguinte, ele acorda cedo e às 7:00 desce do topo do monte pelo mesmo caminho que usou na ida, chegando ao monastério às 19:00. Mostre que existe um ponto no caminho que o monge passará exatamente na mesma hora do dia na ida e na volta.

19. Sejam A e B duas regiões limitadas, com áreas finitas, de um mesmo plano. Mostre que existe uma reta ℓ que divide A e B simultaneamente ao meio.



[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859). http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html