



# **CONTROLE LINEAR I**

## **Parte A – Sistemas Contínuos no Tempo**

**PROF. DR. EDVALDO ASSUNÇÃO**  
**PROF. DR. MARCELO C. M. TEIXEIRA**

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores desejam agradecer ao aluno Pierre Goebel, que em uma tarde de verão decidiu digitar toda apostila de forma voluntária e com o prazer de proporcionar uma leitura agradável aos demais alunos.

**Muito obrigado Pierre!**

# Índice

<b>1- Introdução</b>	5.
<b>2- Classificação e linearização de Sistemas</b>	10.
2.1- Sistemas Lineares	10.
2.2- Linearização	17.
2.3- Linearização Envolvendo Equações Diferenciais	24.
2.4- Linearização Exata por Realimentação	26.
<b>3-Transformada de Laplace (revisão)</b>	28.
3.1- Definição	28.
Tabela de Transformadas de Laplace	30.
3.2- Propriedades das Transformadas de Laplace	31.
3.3- Transformada Inversa	36.
3.4- Resolução de Equações Diferenciais Lineares e Invariantes no Tempo	44.
<b>4- Função de Transferência</b>	48.
4.1 - Definição	48.
4.2- Função de Transferência de Circuitos com A.O	56.
4.2.1- Função de Transferência do A.O. Integrador	57.
4.3- Simulação com o MATLAB	59.
4.4- Função de Transferência de um Sistema Rotacional Mecânico	63.
4.5- Função de Transferência de um Motor de Corrente Contínua (CC)	64.
<b>5- Diagrama de Blocos</b>	66.
5.1- O Detector de Erros	66.
5.2- Função de Transferência de Malha Fechada	66.
5.3- Manipulação no Diagrama de Blocos	67.
5.4- Algumas Regras Úteis	69.
Tabela das Principais Regras para Redução de Diagrama de Blocos	71.
5.5- Simplificação de Diagrama de Blocos com o MATLAB	77.

<b>6- Modelo em Diagrama de Fluxo de Sinal</b>	79.
<b>7- Estabilidade de Sistemas Dinâmicos</b>	85.
7.1- O Conceito de Estabilidade	85.
7.2- O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	95.
7.3- Estabilidade Relativa	103.
7.4- Exemplos Completos de Projeto	105.
<b>8- Resposta Transitória de Sistemas de 1ª e 2ª ordem</b>	113.
8.1- Introdução	113.
8.2- Resposta Transitória de Sistema de 1a ordem (devido a entrada degrau)	113.
8.2.1- Exemplo	113.
8.2.2- Caso Genérico	115.
8.3- Resposta Transitória de sistemas de 2a ordem (devido a uma entrada degrau)	117.
8.3.1- Exemplo	117.
8.3.2- Caso Genérico	119.
Variação de P.O. em função de $\xi$	124.
8.3.3- Resposta Transitória X Localização dos Pólos no Plano s	126.
8.3.4- Resposta ao Degrau de Sistemas de Ordem Superior	131.
8.4- Resposta Transitório Usando o MATLAB	134.
8.5- Índices de Desempenho ITA, ISE, IAE	136.
<b>9- Erros de Regime (regime permanente)</b>	139.
9.1- Introdução	139.
9.2- Exemplos de Erro de Regime	139.
9.3- Erros de Regime	141.
Tabela de Erros de Regime	146.
<b>10- Sensibilidade de Sistemas de Controle a Variação de Parâmetros</b>	150.
10.1- Introdução	150.
10.2- Generalização	152.

<b>11- Sinais de Perturbação (ou ruído) em Sistemas de Controle</b>	<b>155.</b>
<b>12-Método do Lugar das Raízes (Root-Locus)</b>	<b>162.</b>
<b>APÊNDICE A – Laboratório 1 – Curso e Lista de Exercícios do MATLAB</b>	<b>206.</b>
<b>APÊNDICE B – Laboratório 2 – Introdução à Robótica</b>	<b>222.</b>
<b>APÊNDICE C – Laboratório 3 – Controle de Motor CC</b>	<b>226.</b>
<b>APÊNDICE D – Laboratório 4 – Resposta Transitória de Sistemas Dinâmicos e Erros de Regime Permanente</b>	<b>230.</b>
<b>APÊNDICE E – Bibliografia Básica e Critério de Avaliação</b>	<b>238.</b>
<b>APÊNDICE F – Alguns Artigos Científicos Publicados pelos Professores Marcelo C. M. Teixeira e Edvaldo Assunção</b>	<b>239.</b>

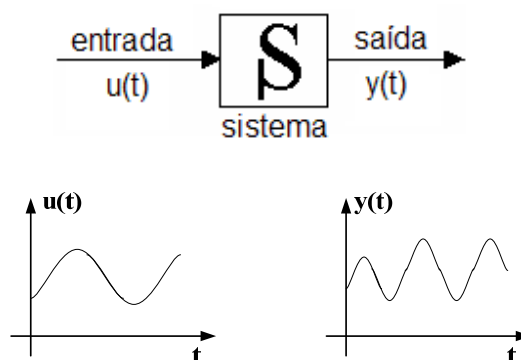
### 1-Introdução

A engenharia diz respeito ao conhecimento e ao controle de materiais e forças da natureza para o benefício da humanidade. Dizem respeito aos engenheiros de sistemas de controle o conhecimento e controle de segmentos à sua volta, chamados de sistemas, com a finalidade de dotar a sociedade de produtos úteis e econômicos. Os objetivos duplos de conhecimento e controle são complementares, uma vez que o controle efetivo de sistemas requer que os sistemas sejam compreendidos e modelados. Além disso, a engenharia de controle deve considerar muitas vezes o controle de sistemas mal conhecidos, como sistemas de processos químicos. O presente desafio ao engenheiro de controle é a modelagem e o controle de sistemas modernos, complexos e interligados, como sistemas de controle de tráfego, processos químicos, sistemas robóticos e automação industrial e controla-los em benefício da sociedade.

Um sistema de controle é uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistemas que produzirá uma resposta desejada do sistema. A base para análise de um sistema é formada pelos fundamentos fornecidos pela teoria dos sistemas lineares, que supõe uma relação de causa e efeito para os componentes de um sistema.

Apresentamos a seguir uma definição de sistema.

Sistema: é qualquer coisa que interage com o meio ambiente, recebendo deste informações ou ações chamadas entradas ou excitações e reagindo sobre ele dando uma resposta ou saída. Isto está sintetizado na figura abaixo:



Geralmente,  $u(t)$  e  $y(t)$  são relacionados matematicamente através de uma equação diferencial.

Exemplos de sistemas: i) um avião cuja entrada é o combustível e a saída é seu

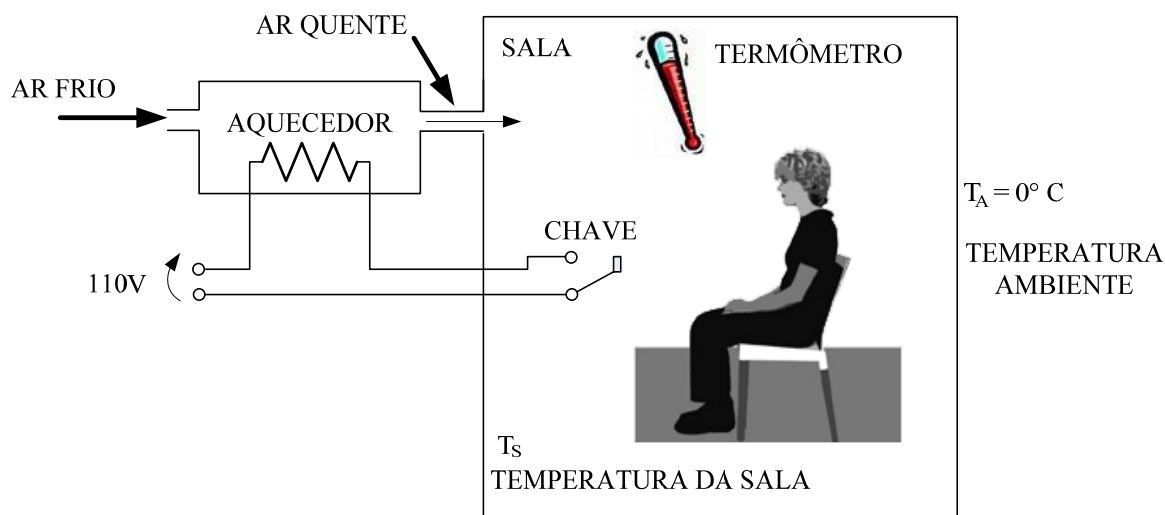
deslocamento, ii) uma caldeira cujas entradas são ar e combustível e a saída é a temperatura da água, iii) um automóvel cuja entrada é o ângulo do acelerador e a saída é a velocidade do automóvel, iv) o rastreador solar cuja entrada é a posição relativa do sol e a saída é a posição angular das placas conversoras de energia solar.

O modelo matemático de um sistema é muito importante (fundamental) para o projeto de controle automático. O modelo de um sistema é a relação entre a entrada  $u(t)$  e a saída  $y(t)$  do sistema. O modelo pode ser obtido usando-se leis físicas, por exemplo, leis de Newton, leis de Kirchhoff, etc. Ou então usando-se metodologias experimentais, com por exemplo respostas transitórias, respostas em frequência etc.

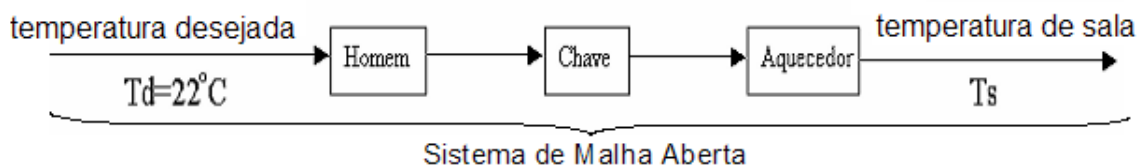
Controle de um sistema significa como agir sobre um sistema de modo a obter um resultado arbitrariamente especificado.

Um fundamento básico da teoria de controle é o uso da realimentação. Através de exemplos, iremos introduzir o conceito de realimentação.

**1º Exemplo:** Considere o seguinte problema no qual o homem deseja aquecer o interior de um prédio, tendo em vista que a temperatura externa é  $0^{\circ}\text{C}$ . Para isto ele dispõe de um aquecedor e um termômetro para leitura da temperatura interna da sala. O objetivo de controle é manter a temperatura da sala em  $T_s = 22^{\circ}\text{C}$ , mesmo na ocorrência de alguns eventos: abrir a porta, desligar o fogão etc. E que ele possa dormir.

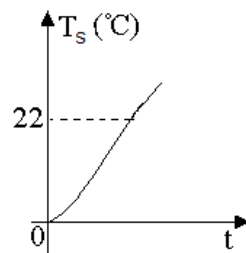


**1ª estratégia:** o homem fecha a chave e então vai dormir. O sistema de controle pode ser esquematizado no seguinte diagrama:



Neste caso temos que o sistema de controle é uma conexão série de três outros sistemas: HOMEM-CHAVE-AQUECEDOR. Esta configuração é chamada de sistema de malha aberta.

O resultado é que a temperatura da sala irá crescer indefinidamente se o aquecedor estiver super dimensionado e  $T_s > 22^\circ\text{C}$ . Essa estratégia falhou. Neste caso:

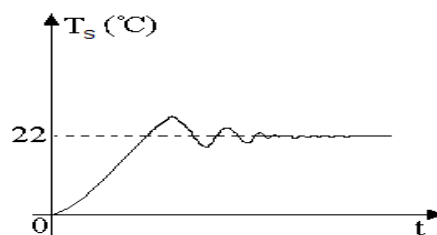


**2ª estratégia:** o homem lê o termômetro e usa a seguinte tática:

Se  $T_s \leq 22^\circ\text{C}$  ele liga a chave

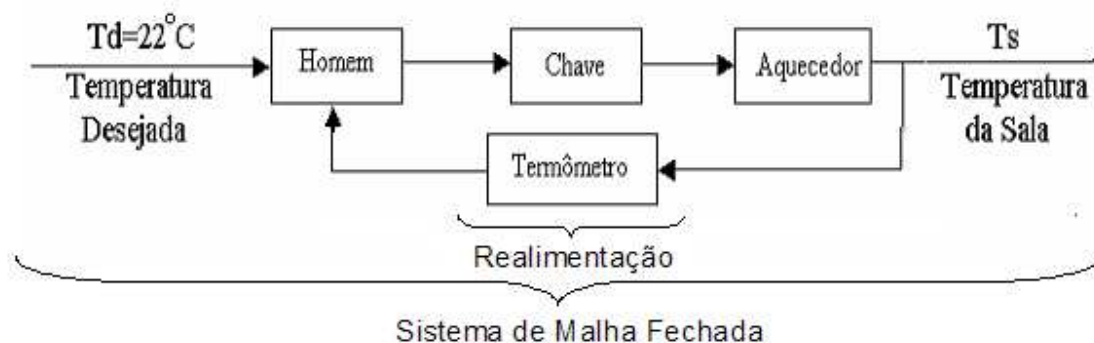
Se  $T_s > 22^\circ\text{C}$  ele desliga a chave

Neste caso teremos:



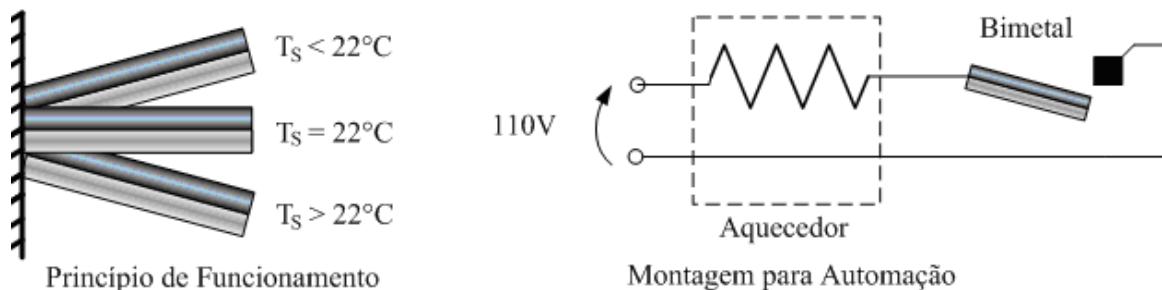
Neste caso o homem não terá altas temperaturas, esta estratégia é melhor que a 1ª porém, o homem não dormirá. O diagrama de blocos deste sistema de controle é:



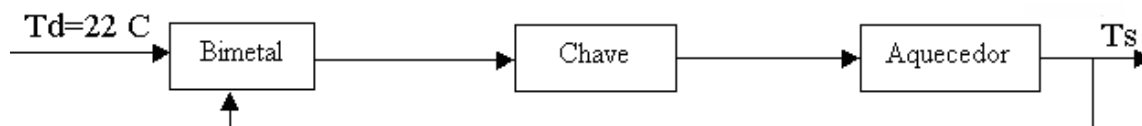


**3ª estratégia:** controle automático usando um bimetal.

O bimetal é composto de dois metais com coeficientes de dilatação térmica diferentes.

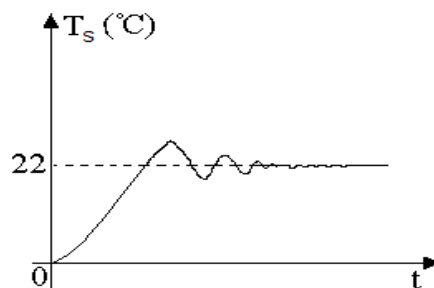


O diagrama de blocos deste sistema de controle é:



Note que este é um sistema de malha fechada.

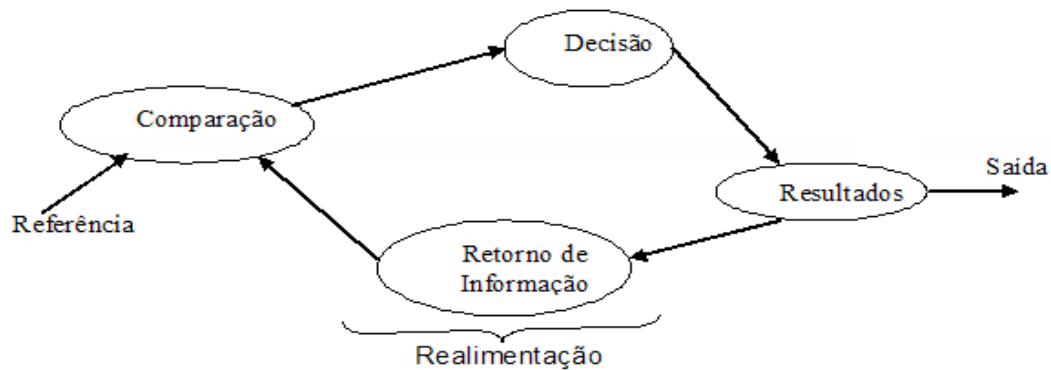
Esta é a melhor tática pois o homem poderá dormir e a temperatura da sala será mantida em  $T_s \approx 22^\circ\text{C}$ .



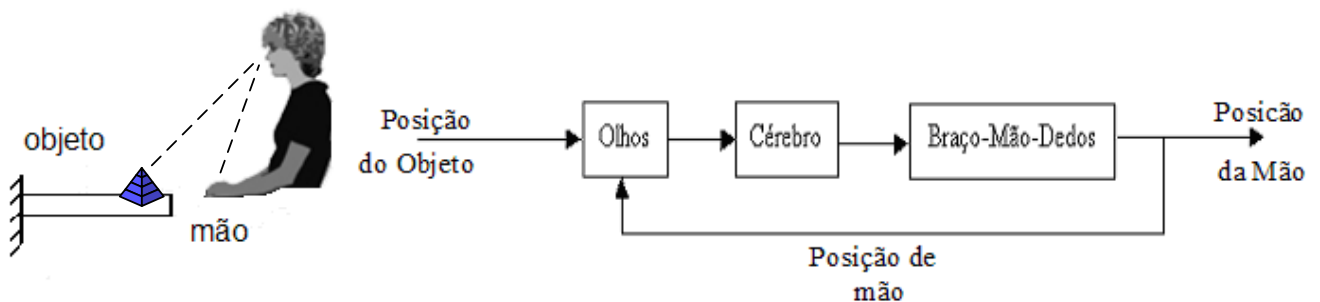
Fator de sucesso: a decisão é tomada após a comparação entre o que queremos e o realmente temos, ou seja, existe realimentação. Neste caso foi usado um sistema de malha

fechada.

O esquema genérico de um sistema de malha fechada é:



**2º Exemplo:** sistema de controle biológico, consistindo de um ser humano que tenta apanhar um objeto.



O sistema de malha aberta tem as seguintes vantagens:

- i.) Simples construção;
- ii.) Mais barato que a malha fechada;
- iii.) Conveniente quando a saída é de difícil acesso ou economicamente não disponível.

E ter as seguintes desvantagens:

- i.) Distúrbios e variações na calibração acarretam erros e a saída pode ser diferente da desejada;
- ii.) Para manter a qualidade na saída é necessária uma recalibração periódica;
- iii.) Inviável para sistemas instáveis

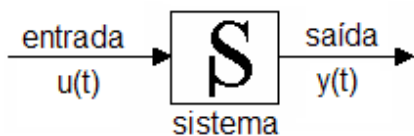
## **2-Classificação e Linearização de Sistemas**

As equações diferenciais dos movimentos dos principais processos utilizados em sistemas de controle são não-lineares. Tanto análise quanto projeto de sistemas de controle são mais simples para sistemas lineares do que para sistemas não-lineares. Linearização é o processo de encontrar um modelo linear que seja uma boa aproximação do sistema não-linear em questão. A mais de 100 anos, Lyapunov provou que se o modelo linear, obtido através de processo de linearização de um modelo não-linear, é válido em uma região em torno do ponto de operação e se é estável, então existe uma região contendo o ponto de operação na qual o sistema não-linear é estável. Então, para projetar um sistema de controle para um sistema não-linear, pode-se seguramente obter uma aproximação linear deste modelo, em torno do ponto de operação, e então projetar um controlador usando a teoria de controle linear, e usá-lo para controlar o sistema não-linear que se obterá um sistema estável nas vizinhanças do ponto de equilíbrio (ou ponto de operação). Técnicas modernas de projeto de controladores Fuzzy usando LMIs para sistemas não-lineares permitem que o sistema trabalhe em torno de vários pontos de operação e ainda garante-se não apenas a estabilidade do sistema não-linear controlado mas também o seu desempenho temporal.

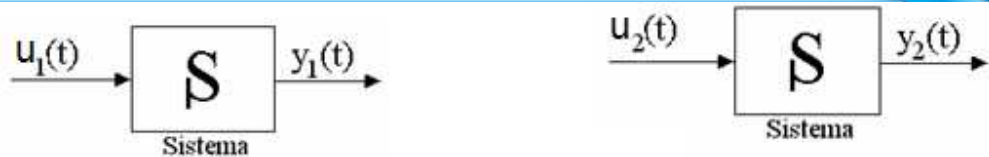
Antes de apresentar o processo de linearização, se faz necessário estudar o princípio da superposição útil na classificação de um sistema, verifica-se se um sistema é ou não sistema linear.

### **2.1-Sistemas Lineares**

Seja o sistema abaixo, com condições iniciais nulas, I.C.=0, em um sistema físico isto equivale a dizer que o sistema não possui energia armazenada em  $t=0$  ( o sistema estará em repouso).



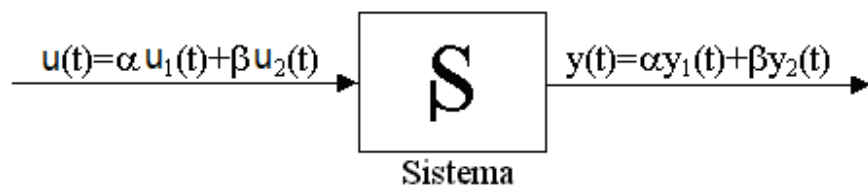
Suponha que a entrada  $u(t)=u_1(t)$  gera a saída  $y(t)=y_1(t)$  e que a entrada  $u(t)=u_2(t)$  gera a saída  $y(t)=y_2(t)$ , ou seja:



**Definição:** um sistema é dito linear em termos da sua excitação  $u(t)$  (entrada) e sua resposta (saída) se o princípio de superposição for “respeitado” pelo sistema.

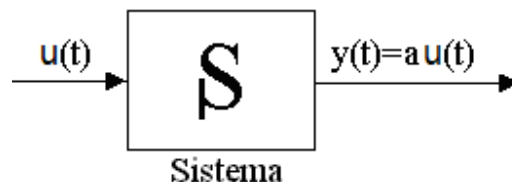
#### Princípio de Superposição

Se a entrada  $u(t) = u_1(t)$  gera a saída  $y(t) = y_1(t)$ , se a entrada  $u(t) = u_2(t)$  gera a saída  $y(t) = y_2(t)$  e se aplicarmos no sistema uma combinação linear das entradas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , ou seja,  $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$  a saída  $y(t)$  será a mesma combinação linear das saídas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , ou seja,  $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ,  $\forall \alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

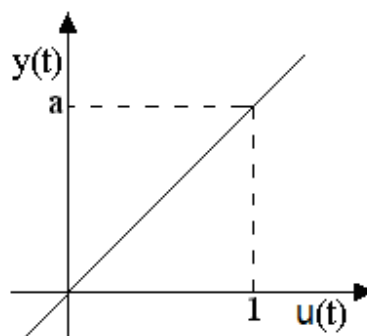


Desta forma, para verificar se um sistema é linear aplica-se o Princípio da Superposição.

**Exemplo 1:** Verifique se o sistema  $y(t) = au(t)$  é linear ou não.



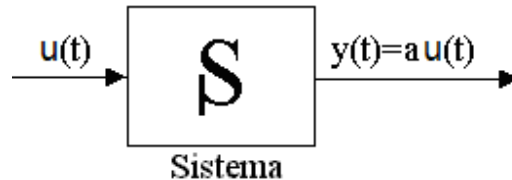
Uma interpretação gráfica deste sistema é:



Sol: Para verificar se o sistema é linear, utilizaremos o princípio da superposição, supondo a existência de duas entradas distintas,  $u(t) = u_1(t)$  e  $u(t) = u_2(t)$ , e em seguida aplicando a

seguinte combinação linear:

$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ , no sistema  $y(t) = a u(t)$ :



Para  $u_1(t)$  tem-se  $y_1(t) = a u_1(t)$  (1)

Para  $u_2(t)$  tem-se  $y_2(t) = a u_2(t)$  (2)

Para  $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$  tem-se  $y(t) = a[\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)]$

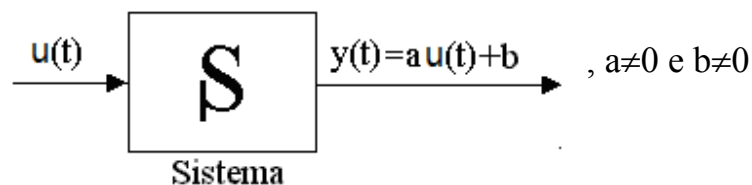
Ainda,  $y(t) = \alpha a u_1(t) + \beta a u_2(t)$  (3)

Substituindo (1) e (2) em (3) tem-se:

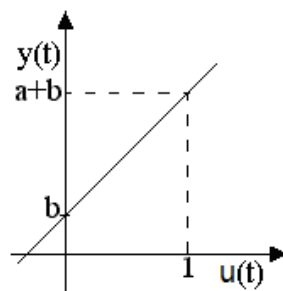
$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Portanto o princípio da superposição foi respeitado, logo o sistema em questão é linear.

**Exemplo 2:** verifique se o sistema dado por  $y(t) = a u(t) + b$  é linear ou não.



Graficamente:



Sol.:

$$u_1(t) \Rightarrow y_1(t) = a u_1(t) + b \text{ então } u_1(t) = \frac{y_1(t) - b}{a} \quad (1)$$

$$u_2(t) \Rightarrow y_2(t) = a u_2(t) + b \text{ então } u_2(t) = \frac{y_2(t) - b}{a} \quad (2)$$

se

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \Rightarrow y(t) = a[\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] + b \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3) tem-se:

$$y(t) = a \left[ \frac{\alpha(y_1(t) - b)}{a} + \frac{\beta(y_2(t) - b)}{a} \right] + b$$

ainda,

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) + b(1 - \alpha - \beta) \quad (4)$$

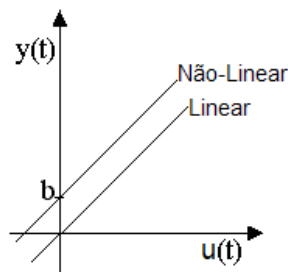
(4) será igual a  $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$  se e somente se

$$b = 0 \text{ ou } (1 - \alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta$$

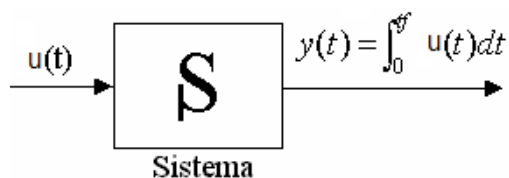
Mas no enunciado foi suposto que  $b \neq 0$ .

A expressão  $\alpha = 1 - \beta$  restringe os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  e para que seja linear é necessário que  $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ,  $\forall \alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , portanto não é linear.

Resumo: dos exemplos 1 e 2 conclui-se que:

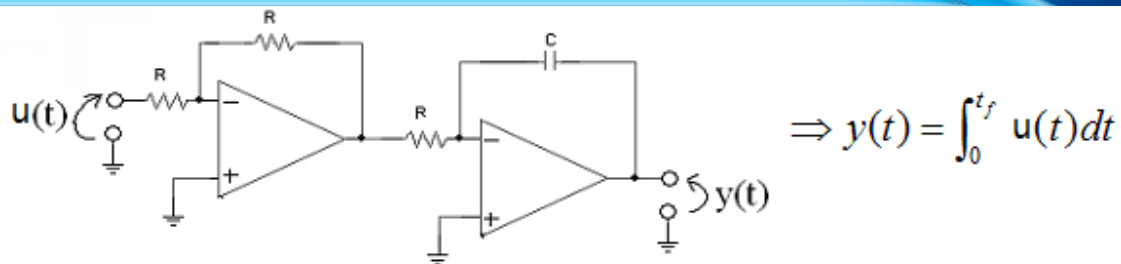


**Exemplo 3:** Mostre que o sistema chamado integrador eletrônico é linear.



(a saída é igual à integral da entrada)

Obs.: O circuito eletrônico que implementa o integrador utiliza um amplificador operacional (A.O.) é dado abaixo:



Sol.:  $u(t) = u_1(t) \Rightarrow y_1 = \int_0^{t_f} u_1(t) dt \quad (1)$

$u(t) = u_2(t) \Rightarrow y_2 = \int_0^{t_f} u_2(t) dt \quad (2)$

$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \Rightarrow y(t) = \int [\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] dt$  ou ainda, devido as propriedades lineares da integral:

$$y(t) = \alpha \int_0^{t_f} u_1(t) dt + \beta \int_0^{t_f} u_2(t) dt$$

Substituindo (1) e (2) em (3) tem-se

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

logo, o sistema é linear.

### Exercícios:

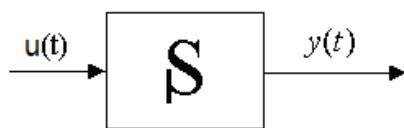
1. O sistema  $y(t) = u^2(t)$  é linear?
2. O sistema  $y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$ , que é um derivador, é linear?
3. O sistema  $y(t) = \cos(u(t))$  é linear?
4. O sistema  $y(t) = \frac{1}{u(t)}$ ,  $u(t) \neq 0$  é linear?
5. O sistema  $y(t) = u(t)$  é linear?
6. O sistema  $y(t) = 5 \int_0^{t_f} u(t) dt + 2 \frac{du(t)}{dt}$  é linear?
7. O sistema  $y(t) = \sqrt{u(t)}$  é linear?
8. O sistema  $y(t) = \frac{1}{u^2(t)}$  é linear?
9. O sistema que é um controlador industrial conhecido como controlador PID é o seguinte:

$$y(t) = 10u(t) + 22 \frac{du(t)}{dt} + 3 \int_0^{t_f} u(t) dt$$

Ele é linear?

**Exemplo 4:** Os sistemas dinâmicos de interesse neste curso, podem ser expressos por equações diferenciais da forma:

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^i(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) u^j(t) \quad (1)$$



Demonstrar para integrador:  $\dot{y}(t) = \frac{-1}{RC} u(t)$

sendo que:  $y^i(t)$  denota a i-ésima derivada de  $y(t)$

$u^j(t)$  denota a j-ésima derivada de  $u(t)$

Demonstre que este sistema é linear.

Sol.: Suponha que para a entrada  $u(t) = u_1(t)$  a solução de (1) proporciona  $y(t) = y_1(t)$  e que para  $u(t) = u_2(t) \Rightarrow y(t) = y_2(t)$ , assim tem-se:

$$u_1(t) \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i(t) y_1^i(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) u_1^j(t)$$

$$u_2(t) \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i(t) y_2^i(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) u_2^j(t)$$

Para  $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ , como  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes então  $u^j(t) = \alpha u_1^j(t) + \beta u_2^j(t)$ , então:

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^i(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) [\alpha u_1^j(t) + \beta u_2^j(t)]$$

ou ainda,

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^i(t) = \underbrace{\alpha \sum_{j=0}^m b_j(t) u_1^j(t)}_{\sum_{i=0}^n a_i(t) y_1^i(t)} + \underbrace{\beta \sum_{j=0}^m b_j(t) u_2^j(t)}_{\sum_{i=0}^n a_i(t) y_2^i(t)}$$



logo

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^i(t) = \alpha \sum_{j=0}^m a_j(t) y_1^j(t) + \beta \sum_{j=0}^m a_j(t) y_2^j(t)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^i(t) = \sum_{j=0}^m a_j(t) [\alpha y_1^j(t) + \beta y_2^j(t)]$$

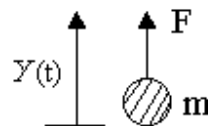
de onde conclui-se que  $y^i(t) = \alpha y_1^i(t) + \beta y_2^i(t)$  logo o sistema é linear.

Obs.: Se  $a_i(t)$  e  $b_j(t)$ , em (1), são constantes, para  $i=1, 2, \dots, n$  e  $j=1, 2, \dots, m$ ; então o sistema é dito linear e invariante no tempo (SLIT).

Se  $a_i(t)$  e  $b_j(t)$ , em (1), variam com o tempo,  $i=1, 2, \dots, m$ ; então o sistema é dito linear variante no tempo (SLVT).

Exemplos:

1. SLIT: considere a esfera de um levitador magnético, cuja ação da força da gravidade tenha sido quase compensada pela força magnética oriunda de uma bobina principal. Neste caso tem-se:



Sendo F a força resultante: força magnética menos força da gravidade.

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

Adotando  $u(t)=F(t)$ , de (1) tem-se

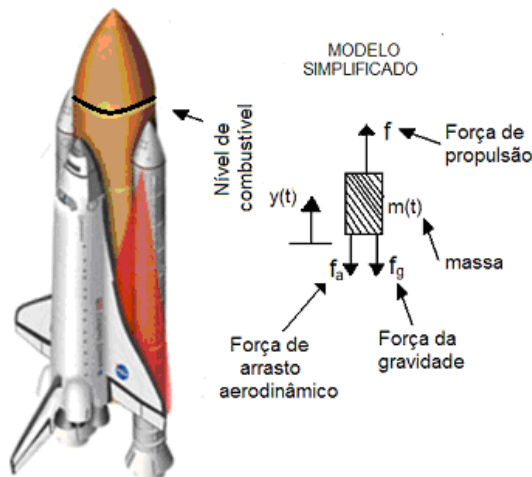
$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^i(t) = \sum_{j=0}^l b_j(t) u^j(t)$$

para  $n=2$  e  $l=0$  temos

$$\overset{a_0=0}{0} y(t) + \overset{a_1=0}{0} \dot{y}(t) + \overset{a_2=1}{1} \ddot{y}(t) = \overset{b_0=\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}} u(t)$$

Portanto este é um SLIT.

2. SLVT: considere o exemplo do foguete lançador de nave espacial. O combustível é consumido durante o percurso e, portanto a massa total do sistema varia ao longo do tempo.



Neste caso, a força resultante é igual a variação do momento linear em relação ao tempo, ou seja :

$$f(t) - f_g(t) - f_a(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (1)$$

sendo:

$$h(t) = m(t) \cdot v(t) \quad (2)$$

massa      velocidade

Seja  $u_r(t)$  a força resultante, ou seja:

$$u_r(t) = f(t) - f_g(t) - f_a(t) \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1) temos:

$$u_r(t) = \frac{d}{dt}(m(t) \cdot v(t)) = \frac{d}{dt}m(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot \frac{d}{dt}v(t)$$

ou ainda,

$$u_r(t) = \frac{dm(t)}{dt} \cdot v(t) + m(t) \cdot \ddot{y}(t)$$

Neste caso os coeficientes são variantes no tempo, logo este é um SLVT.

**Exercício:** Descreva 5 sistema que sejam SLIT e 5 que sejam SLVT. Não se esqueça de mostrar qual é a entrada do sistema e qual é a saída.

**Exercício:** Suponha que o sistema de deslocamento de um trem de metrô seja linear. Sabendo-se que o trem se move utilizando energia elétrica, entre uma estação e a próxima ele é SLIT ou SLVT? E entre as duas estações extremas da linha?

## 2.2-Linearização

Na engenharia de controle, uma operação normal do sistema pode ser em torno do

ponto de equilíbrio, e os sinais podem ser considerados pequenos sinais em torno do equilíbrio. Entretanto, se o sistema operar em torno de um ponto de equilíbrio e se os sinais envolvidos forem pequenos, então é possível aproximar o sistema não-linear por um sistema linear. Este sistema linear é equivalente ao sistema não-linear considerado dentro de um conjunto limitado de operações.

O processo de linearização apresentado a seguir tem como base o desenvolvimento da função não-linear em uma série de Taylor em torno de um ponto de operação e a retenção somente do termo linear.

A linearização de um sistema não-linear supõe que o sistema operará próximo de um ponto de operação (P.O.), também chamado de ponto de equilíbrio.

Considere que o sistema:



opera próximo ao ponto de operação (P.O.):

$$(y, x) = (y_o, x_o)$$

P.O.

Expandindo  $y=f(x)$  em uma série de Taylor em torno deste ponto, teremos:

$$y = f(x) = f(x) \Big|_{P.O.} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{P.O.} (x - x_o) + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2 2!} \Big|_{P.O.} (x - x_o)^2 + \dots \quad (1)$$

sendo: P.O. =  $(x_o, y_o)$ , que é o ponto de operação do sistema.

A suposição de que o sistema não-linear irá operar em torno do P.O., implica que  $x$  ficará próximo de  $x_o$ , logo  $(x - x_o)$  será pequeno e quando elevado a 2, 3, ... será menor ainda, portanto:

$$\frac{(x - x_o)^2}{2!} \cong 0, \quad \frac{(x - x_o)^3}{3!} \cong 0, \dots \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) tem-se:

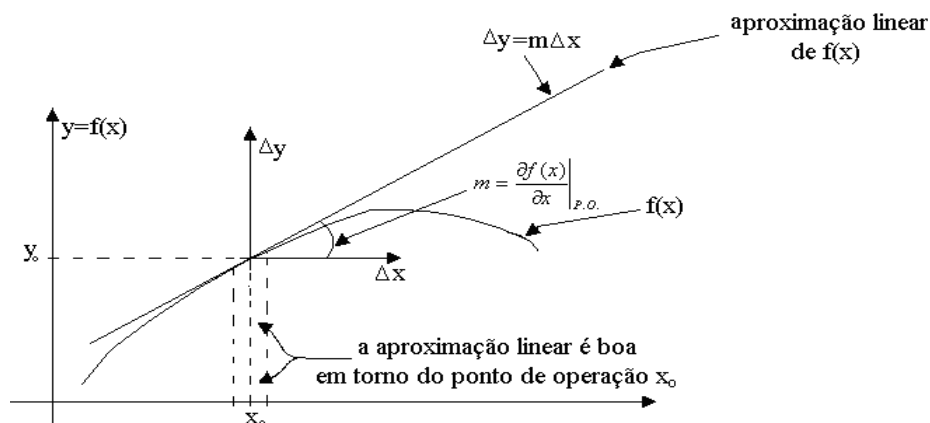
$$y \cong f(x) \Big|_{P.O.} + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{P.O.} (x - x_o)$$

ou

$$y \cong \underbrace{f(x_o)}_{y_o} + \underbrace{\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_o}}_m \underbrace{(x - x_o)}_{\Delta x} \Rightarrow y = y_o + m\Delta x \Rightarrow \underbrace{y - y_o}_{\Delta y} = m\Delta x \Rightarrow \Delta y = m\Delta x$$

que é um sistema linear  
(vide exemplo 1)

Interpretação geométrica



Se tivermos uma função de várias variáveis:

$$y(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } P.O. = (x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{no}, y_o)$$

a expansão em série de Taylor desprezando-se potências maiores que 1 é dada por:

$$y \cong \underbrace{f(\cdot) \Big|_{P.O.}}_{y_o} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{P.O.}}_{m_1} (x_1 - x_{1o}) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{P.O.}}_{m_2} (x_2 - x_{2o}) + \dots + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{P.O.}}_{m_n} (x_n - x_{no})$$

ou ainda,

$$\underbrace{y - y_o}_{\Delta y} \cong m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

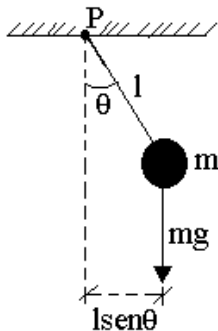
$$\therefore \Delta y = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

que é um  
sistema linear



Obs.: Se o cálculo de  $y_0, m_1, m_2, \dots, m_n$  não for possível de ser realizado devido à ocorrência de divisão por zero, diz-se que o sistema não é linearizável em torno do P.O. em questão.

Exemplo: Linearize a função que corresponde ao momento (torque) que a massa  $m$  faz com relação ao ponto "P" do pêndulo simples abaixo. Linearizar em torno do ponto de operação  $\theta = 0$ .



O momento é:  $I = F \cdot r$ , sendo  
 $r = l \sin(\theta)$  e  $F = mg$   
Logo  $I = mgl \sin(\theta)$

então  $g(\theta) = mgl \sin(\theta)$

Note que  $g(\theta)$  é não-linear, pois  
 $\theta = \theta_1 \Rightarrow \sin(\theta_1)$   
 $\theta = \theta_2 \Rightarrow \sin(\theta_2)$   
 se  
 $\theta = \alpha\theta_1 + \beta\theta_2 \Rightarrow \sin(\alpha\theta_1 + \beta\theta_2) \neq \alpha \sin\theta_1 + \beta \sin\theta_2$   
 $\therefore$  é não-linear

Neste caso, o ponto de operação é  $\theta = 0$ .

Expandindo na série de Taylor, temos:

$$g(\theta) \cong g(\theta)|_{\theta=0} + \left. \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} (\theta - 0) \quad (1)$$

mas,

$$g(\theta)|_{\theta=0} = mgl \sin(0) = 0 \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = mgl \cos(\theta) \text{ e } \left. \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = mgl \cos(0) = mgl \quad (3)$$

logo, substituindo (2) e (3) em (1) tem-se:

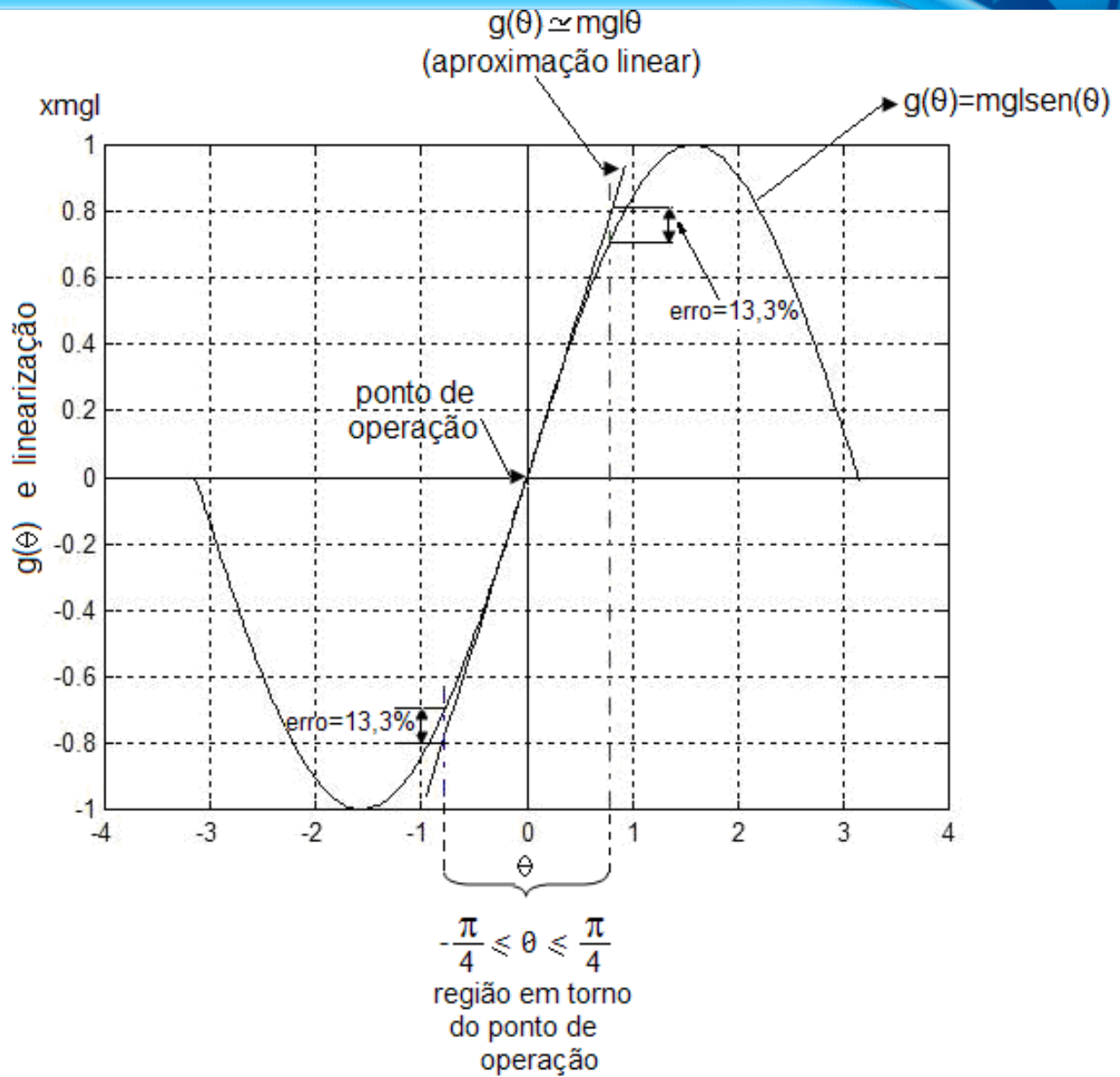
$$g(\theta) = mgl\theta$$

que é um modelo linear.

A figura a seguir mostra que para  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  o sistema linearizado é uma boa aproximação do sistema não-linear. Este gráfico foi feito com a utilização do MATLAB.

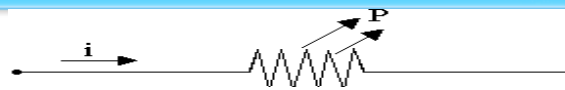
#### PROGRAMA EM MATLAB

```
teta=[-pi:0.03:pi*1.01];
teta2=[-0.96:0.1:0.98];
gteta=sin(teta);
linear=teta2;
%axes
plot(teta,gteta,'k',teta2,linear,'k',...
[-4 4],[0 0],'k',[0 0],[-1 1],'k',...
[-pi/4 -pi/4],[-0.63 -1],'-',[pi/4
pi/4],[0.88 -1],'-')
grid
```



**Exercício:** Repita o exemplo anterior para que  $g(\theta) = 0,1 \cos(\theta)$ , e  $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ . Use o MATLAB para desenhar os gráficos da função não-linear e a linearizada.

**Exemplo:** Linearize a função  $P(i) = ri^2$  em torno do P.O. :  $i_o = 1A$ .



$$R=100\Omega$$

Faça o gráfico (interpretação geométrica)

Sol.:

$$P = P|_{i_o=1} + \left. \frac{\partial P}{\partial i} \right|_{i_o=1} (i - i_o)$$

mas,

$$\frac{\partial P}{\partial i} = \frac{\partial ri^2}{\partial i} \quad e \quad \left. \frac{\partial P}{\partial i} \right|_{i_o=1} = 2r.1 \quad P|_{i_o=1} = r.1^2 = r$$

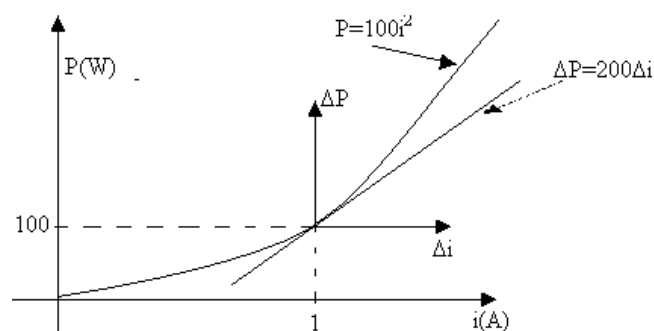
logo

$$P = r + 2r(i-1) \quad \text{ou} \quad \underbrace{P-r}_{\Delta P} = \underbrace{2r(i-1)}_{\Delta i}$$

ou

$$\Delta P = 2r\Delta i \quad \text{mas } r=100 \Rightarrow \Delta P = 200\Delta i$$

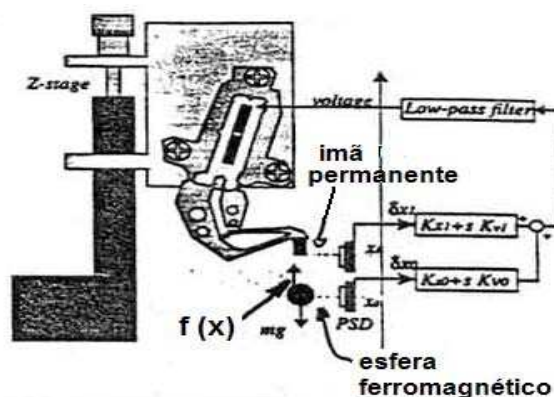
Interpretação geométrica:



**Exercício:** Uma área tecnológica de grande importância atualmente são as pesquisas para o desenvolvimento de micro e macro sistemas. A teoria de controle é fundamental para o seu avanço tecnológico. Considere o micro levitador dado na figura abaixo. O atuador é construído de PZT com um ímã permanente na ponta. A bola é de material ferromagnético e tem



distância de 2mm.



Microlevitation system using motion control.

Na figura a força de atração é dada por:

$$f(x) = \frac{k}{x^2}$$

sendo  $k=4,98 \times 10^{-8} \text{ N/m}^2$ .

Linearize o sistema no ponto de operação  $x_0=1\text{mm}$ , considere como saída de interesse  $y(x)=f(x)$ .

É possível linearizar este sistema em torno do ponto  $x_0=0\text{mm}$ ?

**Exercício:** Linearize as funções abaixo em torno P.O :  $x_0=1$ .

a)  $y(x)=5x+2$

b)  $y(x) = 3\sqrt{x} + 1$

c)  $y(x)=2x^3$

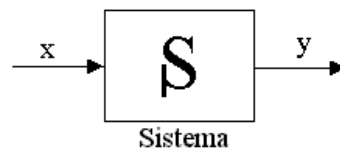
### 2.3-Linearização Envolvendo Equações Diferenciais.

No método de linearização mostrado, as funções não envolvem funções diferenciais neste caso, é necessário calcular o ponto de operação do sistema que é um ponto de equilíbrio (P.E.), que é obtido supondo que o sistema esteja em equilíbrio e, portanto não está variando ao longo do tempo, ou seja, todas as derivadas são nulas. Depois, expande-se o sistema em função das variáveis e suas derivadas:

$$g(x, \dot{x}) \cong g|_{P.E.} + \frac{\partial g}{\partial x}|_{P.E.} (x - x_{PE}) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}|_{P.E.} (\dot{x} - \dot{x}_{PE})$$



**Exemplo:** supondo o seguinte sistema não-linear:



sendo  $\dot{y} = 2x(t) - x^2(t)$  (que é não-linear).

Linearize em torno do ponto de equilíbrio (P.E.).

Sol.: É necessário primeiramente determinar o P.E., para isso supõe-se todas derivadas

nulas:  $\dot{y}(t) = 0$  tem-se:

$$0 = 2x_E(t) - x_E^2(t) \Rightarrow \begin{cases} X_E(t) = 2 & \text{e} & \dot{Y}_E(t) = 0 \\ \text{ou} \\ X_E(t) = 0 & \text{e} & \dot{Y}_E(t) = 0 \end{cases}$$

Neste caso,

$$g(x, \dot{y}) = -\dot{y}(t) + 2x(t) - x^2(t) = 0$$

O modelo linear é:

$$g(x, \dot{y}) \cong g|_{P.E.} + \left. \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \right|_{P.E.} (\dot{y} - \dot{y}_{PE}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{P.E.} (x - x_{PE})$$

ou seja, adotando-se P.E.:  $X_E=2$  teremos:

$$g(x, \dot{y}) \cong 0 + (-1) \underbrace{(\dot{y} - 0)}_{\Delta \dot{y}} + (2 - 2 \cdot 2) \underbrace{(x - 2)}_{\Delta x}$$

$$g(x, \dot{y}) = -\Delta \dot{y} - 2 \underbrace{(x - 2)}_{\Delta x}$$

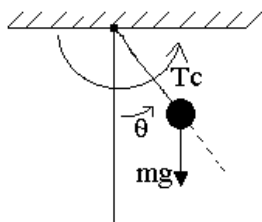
$$\therefore g(x, \dot{y}) = -\Delta \dot{y} - 2\Delta x \Rightarrow \Delta \dot{y} = -2\Delta x \quad \text{pois } g(x, \dot{y}) = 0$$

OBS. No ponto de equilíbrio, o sistema permanece nele se colocado nele (derivadas nulas) e todas as variáveis são constantes.

#### 2.4-Linearização Exata por Realimentação

Linearização por realimentação é obtida subtraindo-se os termos não-lineares das equações do sistema e adicionando-o ao controle.

**Exemplo:** Considere o pêndulo que possui o torque de entrada  $T_c$  (controle) agindo no eixo de rotação



$$\Rightarrow T_c - mgl \sin(\theta) = I \ddot{\theta}$$

sendo  $I$  momento de inércia  
em torno do eixo, neste caso:  
 $I = ml^2$ .

Suponha que o ângulo  $\theta$  possa ser medido, projete  $T_c(\theta)$  tal que o sistema tenha linearização exata.

Sol.: A equação diferencial é:

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = T_c(\theta) \quad (1)$$

Se escolher o torque  $T_c(\theta)$  como,

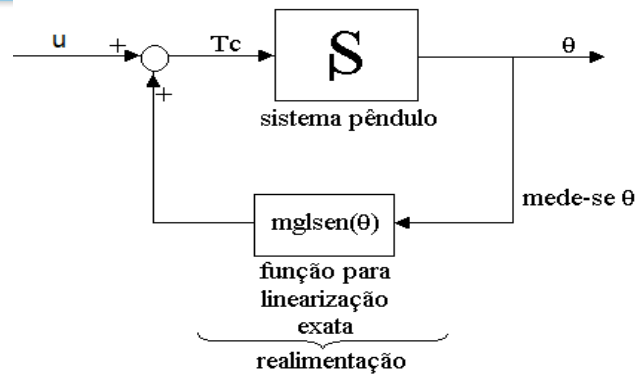
$$T_c(\theta) = mgl \sin(\theta) + u \quad (2)$$

e substituindo (2) em (1) tem-se:

$$ml^2 \ddot{\theta} = u \quad (3)$$

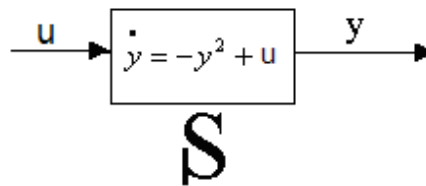
que é um sistema linear

O esquema é:



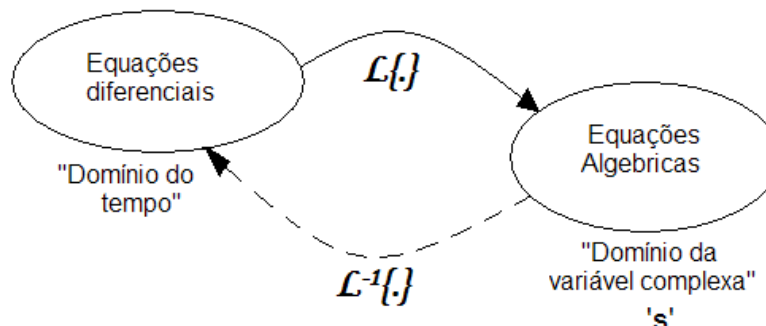
A equação (3) é linear, não importando quão grande o ângulo  $\theta$  seja. A realimentação proporciona um torque  $T_c$  baseado na medida de  $\theta$  tal que o sistema realimentado seja linear.

Exercício: Linearize o seguinte sistema na forma exata



### 3-Transformada de Laplace (revisão)

A capacidade de obter aproximações lineares de sistemas físicos permite ao projetista de sistemas de controle o uso de Transformada de Laplace. O método da transformada de Laplace substitui a solução mais difícil de equações diferenciais pela solução mais fácil de equações algébricas



Como os sistemas de controle são altamente complexos e largamente interconectados, o uso da Transformada de Laplace permite a manipulação de equações algébricas ao invés de equações diferenciais. Então os sistemas dinâmicos são modelados por equações diferenciais, primeiramente aplica-se a Transformada de Laplace, depois projeta-se o controlador no domínio 's' e finalmente implanta-se o controlador e analisa-se o resultado obtido no domínio do tempo.

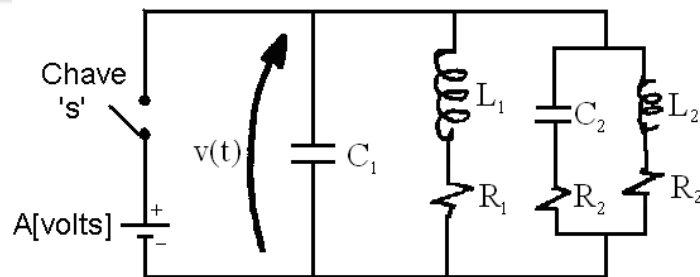
OBS.:Nesse curso a maioria das transformadas  $\mathcal{L}\{.\}$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{.\}$  serão utilizadas diretamente das tabelas.

3.1-Definição: a transformada de Laplace da Função  $f(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s)$$

sendo que o 's' é uma variável complexa que não depende de t,  $s=\sigma+j\omega$ .

Exemplo: Uma função que será muito utilizada neste curso é a função degrau. Iremos calcular sua Transformada de Laplace. Um exemplo da função degrau é o fechamento da chave "S" no circuito abaixo:

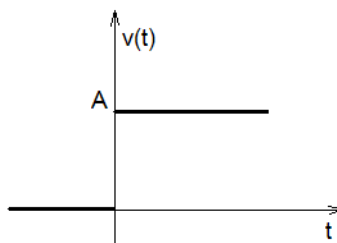


OBS.: É suposto que os capacitores estão descarregados e os indutores tem corrente nula no instante inicial  $t=0s$ .

A tensão  $v(t)$  é do tipo degrau de amplitude  $A$ , pois

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

sendo que a chave é fechada no instante  $t=0$ , graficamente:



Aplicando-se a Transformada de Laplace  $v(t)$  tem-se

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \int_0^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2) tem-se

$$V(s) = \int_0^{+\infty} A \cdot e^{-st} dt = A \cdot \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{+\infty} = \frac{A}{-s} \left[ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} - e^{-s \cdot 0} \right]$$

$$\therefore V(s) = \frac{A}{s}$$

A tabela a seguir mostra na linha 2 a transformada de Laplace de degrau unitário ( $A=1$ ):  $\mathcal{L}\{1(t)\} = 1/s$

Pares de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário $l(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
11	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
12	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2 - \omega^2)}$
13	$\text{cosh } \omega t$	$\frac{s}{(s^2 - \omega^2)}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$1 - e^{-\xi\omega_n t} \cdot \left[ \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right]$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$

As regras 22 e 23 são válidas para  $0 < \xi < 1$ .

Esta tabela reúne as principais transformadas utilizadas neste curso. Note que genericamente  $F(s)$  é a razão entre dois polinômios:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1}$$

### 3.2. Propriedades das Transformadas de Laplace

Suponha que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

1.  $\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$  (Linearidade)

Prova:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} &= \int_0^{+\infty} [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] e^{-st} dt = \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \beta \int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-st} dt = \alpha \cdot F_1(s) + \beta \cdot F_2(s) \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$

Prova:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t)$$



$$\text{Lembrete: } \int_a^b v du = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b u dv$$

Integrando por partes, temos:

$$\begin{cases} v = e^{-st} \Rightarrow dv = -se^{-st} dt \\ du = df(t) \Rightarrow u = f(t) \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} df(t) &= f(t)e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-se^{-st}) dt = \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_{+\infty} - f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0 + s \left[ \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \right] \\ &= -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

$$3. \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0}$$

Prova:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \right\} \stackrel{PROP.2}{=} s \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} - \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0} =$$

$$\stackrel{PROP.2}{=} s[sF(s) - f(0)] - \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0} = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(t) \Big|_{t=0}$$

$$4. \quad \mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) \Big|_{t=0}$$

Obs.: foi visto na tabela das transformadas de Laplace que genericamente  $F(s)$  é composto pela divisão de dois polinômios em 's', ou seja:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

**Exemplo:**  $F(s) = \frac{s+1}{s+2} \Rightarrow \begin{matrix} n(s) = s+1 \\ d(s) = s+2 \end{matrix}$

As raízes do numerador são chamadas de "zeros" e as raízes do denominador são chamadas de pólos.

$$z_1 = -1$$

Neste exemplo temos:  $P_1 = -2$

##### 5. Teorema do valor final ( $t \rightarrow +\infty$ ) – T.V.F.

Se os pólos de  $sF(s)$  possuem parte real negativa, ou seja  $\text{Re}\{p_i\} < 0$ , então:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Obs.: mais adiante neste curso, veremos que um sistema que tem todos os pólos com parte real negativa, é dito estável.

**Exemplo:** Sabendo que  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , determine o valor de  $f(t)|_{t \rightarrow +\infty}$  (também chamado de valor de regime permanente).

Sol.: Neste caso,  $sF(s) = s \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

que possui apenas um pólo:  $P_1 = -1$ . Como  $P_1 < 0$ , pode-se aplicar o T.V.F. :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

$$\therefore f(+\infty) = 1$$

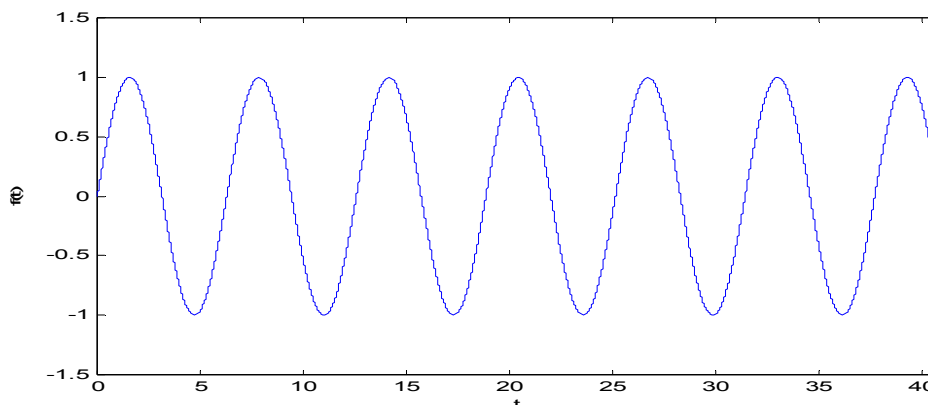
Para simples verificação, segundo a tabela na pg. 30, linha 14, tem-se:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = 1 - e^{-t}$$

logo  $f(t)|_{t \rightarrow +\infty} = (1 - e^{-t})|_{t \rightarrow +\infty} = 1$  que é o mesmo resultado obtido aplicando-se o T.V.F.

Obs.: o T.V.F. permite obter o valor de regime de um sistema tendo-se apenas a sua transformada de Laplace ( $F(s)$ ), sem a necessidade do conhecimento da função temporal ( $f(t)$ ). Ou seja, o T.V.F. é útil para determinar o valor de regime de  $f(t)$ , conhecendo-se apenas  $F(s)$ .

**Exemplo:**  $f(t) = \sin(t)$



Note que  $t \rightarrow +\infty$   $f(t)$  não tem um único valor.

Segundo a tabela:  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ , linha 10

Para  $s \cdot F(s) = s \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$ , os pólos são  $P_{1,2} = \pm j$

Logo  $\text{Re}\{P_1, P_2\} = 0$  e não pode-se aplicar o T.V.F.

Se erroneamente aplicarmos o T.V.F. teremos:

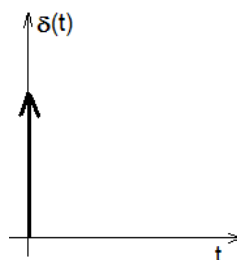
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0, \text{ porém, a senóide não tende a zero quando } t \rightarrow +\infty.$$

O erro foi aplicar o T.V.F. sendo que os pólos não são negativos (parte real).

**Exemplo:** Determinar a transformada de Laplace da função impulso,  $\delta(t)$ . Uma idéia de entrada impulsiva é o choque do taco de "baseball" com a bola, o choque tem uma grande intensidade e curtíssima duração.

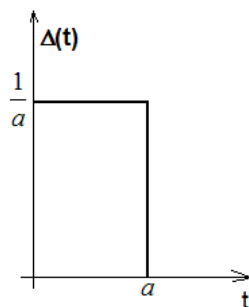
$$\text{A função } \delta(t) \text{ é dada por: } \delta(t) = \begin{cases} 0 & p / t \neq 0 \\ +\infty & p / t = 0 \end{cases} \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Graficamente



A função impulso é o caso limite da função pulso de área unitária:

Neste caso a área é  $A = \frac{1}{a} \cdot a = 1$  e  $\lim_{a \rightarrow 0} \Delta(t) = \delta(t)$



Sol.:

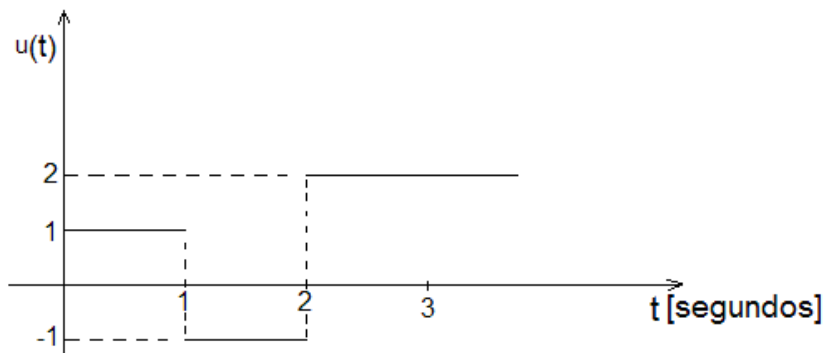
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_0^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt + \int_{0^+}^{+\infty} 0 dt = \int_0^{0^+} \delta(t) e^{-st} dt, \text{ para } 0^- < t < 0^+ \text{ tem-se que}$$

$e^{-st}$  neste intervalo é 1.

logo

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{Vide linha 1 da tabela, p.30})$$

**Exercício:** Calcule a transformada de Laplace de um sinal  $u(t)$  de controle típico de um sistema automático digital, ou seja controle por computador.



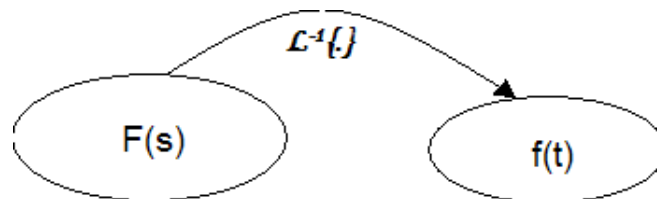
**Exercício:** Seja  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ , qual é o valor de  $f(t)|_{t \rightarrow +\infty}$  ?

**Exercício:** Seja  $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4s + 4)}$ , é possível aplicar o teorema do valor final?



### 3.3-Transformada Inversa

A idéia é encontrar



utilizando a expansão de funções em frações parciais e então utilizar a tabela para encontrar  $f(t)$ .

Seja:  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

sendo que  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios e  $\text{grau}(Q(s)) \geq \text{grau}(P(s))$ .

Polinômio  $Q(s)$  é da forma:

$$Q(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n, \text{ sendo } a_i \in \mathbb{R}, i=\{1, 2, \dots, n\} \text{ que pode ser expresso na forma:}$$

$$Q(s) = (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_{n-1})(s + s_n)$$

sendo:

$$s_i, i=1, 2, \dots, n \text{ as raízes de } Q(s).$$

1º Caso: Se o polinômio do denominador:

$$Q(s) = (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_{n-1})(s + s_n)$$

possuir somente raízes distintas ou seja,

$$s_i \neq s_j, i, j=1, 2, \dots, n, i \neq j$$

então fazemos a expansão:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{k_1}{s + s_1} + \frac{k_2}{s + s_2} + \dots + \frac{k_n}{s + s_n}$$

sendo:

$$k_i = (s + s_i) \cdot F(s) \Big|_{s=s_i}, i=1, 2, \dots, n$$



**Exemplo:**  $F(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ , determine  $f(t)$ .

Sol.: Neste caso,  $P(s)=5s+3$  e  $Q(s)=(s+1)(s+2)(s+3)$

temos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$\text{e } k_i = (s+s_i) F(s) \Big|_{s=s_i}$$

logo

$$k_1 = (s+1) \cdot \frac{(5s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$k_2 = (s+2) \cdot \frac{(5s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-2} = +7$$

$$k_3 = (s+3) \cdot \frac{(5s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-3} = -6$$

então

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

Finalmente, usando a linha 6 da tabela, tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

2º Caso: Se o polinômio do denominador:

$$Q(s) = (s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_{n-1})(s+s_n)$$

possuir raízes não distintas, ou seja, se a raiz  $s_i$  tiver multiplicidade 'r', teremos:

$$F(s) = \frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{k_1}{s+s_1} + \dots + \frac{k_{i-1}}{s+s_{i-1}} + \left[ \frac{A_1}{(s+s_i)} + \frac{A_2}{(s+s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s+s_i)^r} \right] + \frac{k_{i+1}}{s+s_{i+1}} + \dots + \frac{k_n}{s+s_n} \text{ sendo:}$$

$$A_r = (s + s_i)^r F(s) \Big|_{s=s_i}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[ (s + s_i)^r F(s) \right] \Big|_{s=s_i}$$

·  
·  
·

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[ (s + s_i)^r F(s) \right] \Big|_{s=s_i}$$

**Exemplo:** Se  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)}$ , determine  $f(t)$ .

Sol.: a raiz  $s=-1$  tem multiplicidade  $r=3$ , logo,

$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+2)} + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3}$$

neste caso:

$$k_1 = sF(s) \Big|_{s=0} = s \cdot \frac{1}{(s+1)^3(s+2)s} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = (s+2) \cdot \frac{1}{(s+1)^3(s+2)s} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Façamos: } G(s) = (s+1)^3 \cdot F(s) = (s+1)^3 \cdot \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}$$

então,

$$A_3 = G(s) \Big|_{s=-1} = -1$$

$$A_2 = \frac{d}{ds} G(s) \Big|_{s=-1};$$

mas

$$\frac{d}{ds} G(s) = \frac{d}{ds} \left[ s^{-1}(s+2)^{-1} \right] = \frac{-(s+2) - s}{s^2(s+2)^2} \quad (1)$$

logo

$$A_2 = \frac{-(s+2)-s}{s^2(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = 0$$

$$A_3 = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{ds^2} G(s) \Big|_{s=-1} \quad \text{que é obtida derivando-se (1)}$$

então

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds} \left[ \frac{2s-2}{s^2(s+2)^2} \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

finalmente:

$$F(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

Segundo as linhas 2, 6 e 8 da tabela (P.26) tem-se:

$$f(t) \frac{1}{2} \cdot 1(t)^* + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t}, \quad t \geq 0$$

\*função degrau unitário

**Exercício:** Dado  $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$ , calcule  $f(t)$ .

3º Caso: Se o polinômio do denominador tem raízes complexas distintas.

Vamos ilustrar o método através de um exemplo.

**Exemplo:** Determine a  $\mathcal{L}^{-1}\{.\}$  de  $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$

Sol.: Neste caso, as raízes do denominador são:

$$s_1 = 0$$

$$s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{raízes complexas conjugadas})$$

Neste caso é mais interessante usar a componente relativo às raízes complexas, na forma polinomial, ou seja:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2 s + C_3}{s^2 + s + 1} \quad (1)$$



Já sabemos calcular  $C_1$ :

$$C_1 = s \cdot \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \Big|_{s \rightarrow 0} = 1$$

Para que (1) seja satisfeita é necessário que:

$$\frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s} + \frac{C_2 s + C_3}{s^2 + s + 1}$$

ou ainda:

$$\frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{s^2 + s + 1 + C_2 s^2 + C_3 s}{s(s^2 + s + 1)}, \text{ logo}$$

$$1 = (C_2 + 1)s^2 + (C_3 + 1)s + 1 \Leftrightarrow C_2 + 1 = 0 \text{ e } C_3 + 1 = 0$$

então  $C_2 = -1$  e  $C_3 = -1$

Assim:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{(-s-1)}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

ou

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Que das linhas 20 e 21 da tabela (P. 27) temos:

$$f(t) = 1(t) - e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$$

Importante:

Se em algum dos casos anteriores, com  $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , com grau (Q(s))=grau (P(s)) então

faça primeiro a divisão:

$$\frac{P(s)}{R(s)} \Big| \frac{Q(s)}{R(s)} \Rightarrow F(s) = A + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

e depois proceda a expansão em frações parciais de  $\frac{R(s)}{Q(s)}$ .

**Exemplo:** Determine  $f(t)$  se  $F(s) = \frac{s}{s+1}$

Sol.: Neste caso,  $P(s)=s$  e  $Q(s)=s+1$  e logo grau ( $P(s)$ )=1 e grau ( $Q(s)$ )=1, então é necessário fazer:

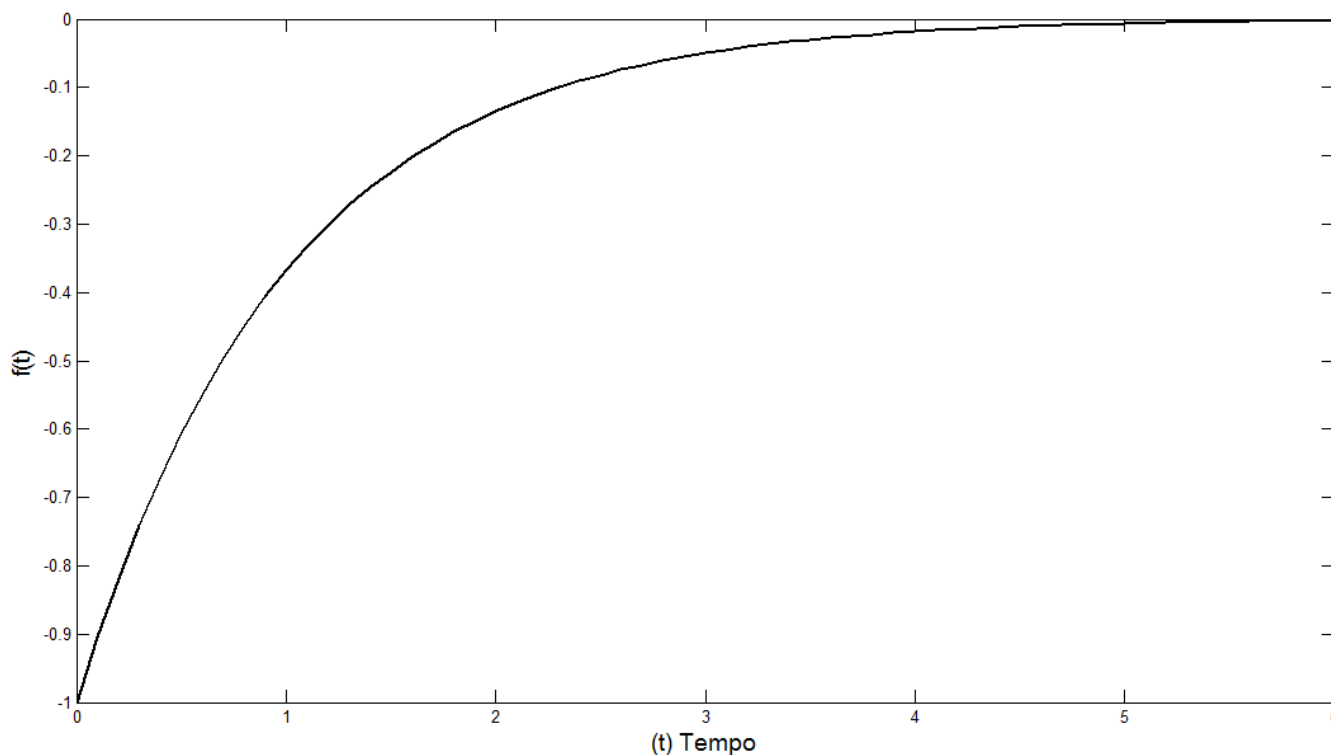
$$\begin{array}{r} -s \overline{) s+1} \\ \underline{s+1} \phantom{0} \\ 0-1 \phantom{0} \end{array}$$

$R(s)$        $A$

$$\therefore F(s) = 1 + \frac{(-1)}{s+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{F(s)\} = \delta(t) - e^{-t}$$

Obs.: se grau ( $Q(s)$ )=grau( $P(s)$ ) então aparecerá (sempre) uma componente impulsiva ( $\delta(t)$ ) em  $f(t)$ .

O gráfico de  $f(t)$  do exemplo anterior é:



### Expansão em Frações parciais usando o MATLAB

O exemplo abaixo foi retirado do Ogata (4ªed.):

Considere a seguinte função

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Para essa função

num = [2 5 3 6]

den = [1 6 11 6]

O comando

[r,p,k] = residue(num,den)

apresenta o seguinte resultado:

[r,p,k]=residue(num,den)

r=

-6,0000

-4,0000

3,0000

p=

-3,0000

-20000

-1,0000

k=

2

Essa é a representação em MATLAB da seguinte expansão em parciais de B(s)/A(s):

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$= \frac{-6}{s+3} + \frac{-4}{s+2} + \frac{3}{s+1} + 2$$

Para encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  basta usar a tabela.

Para sistemas que tenham pólos com multiplicidade, deve-se observar a seqüência de r e p no MATLAB.

Expandir a seguinte  $B(s)/A(s)$  em frações parciais com MATLAB:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Para essa função, temos:

num = [0 1 2 3]

den = [1 3 3 1]

O comando

[r,p,k]=residue(num,den)

apresenta o resultado mostrado adiante. É a representação em MATLAB da seguinte expressão em frações parciais de  $B(s)/A(s)$ :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

```
num = [0 1 2 3];
den = [1 3 3 1];
[r,p,k] =
residue(num,den)
r =
    1,0000
    0,0000
    2,0000
p =
   -1,0000
   -1,0000
   -1,0000
k =
    0
```

Note que o termo direito k é zero. Para obter a função original  $B(s)/A(s)$  a partir de r, p e k, insira o seguinte programa no computador:

```
num,den = residue(r,p,k);
printsys(num,den,s)
```

Assim, o computador apresentará o num/den, como se segue:

$$\text{num/den} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

Exemplo para sistemas com pólos complexos.

Seja:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}, \text{ pólos complexos}$$

```
>>num=[1];
```

```
>>den=[1 1 1 0];
```

```
>>[r,p,k]=residue(num,den)
```

```
r=
```

```
-0.5000+0.2887i
```

```
-0.5000-0.2887i
```

← resíduos complexos

```
p=
```

```
-0.5000+0.8660i
```

```
-0.5000-0.8660i
```

```
k=
```

```
>>[num,den]=residue(r,p,k)
```

```
>>
```

```
>>pritsys(num,den,'s')
```

```
num/den=
```

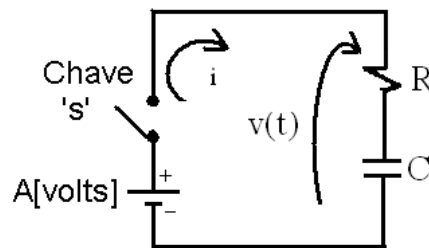
$$\frac{2.2204e-016s^2 + 2.2204e-016s + 1}{s^3 + s^2 + 1s} \Rightarrow \frac{1}{s^3 + s^2 + 1s}$$

$$F(s) = \frac{-0,5 + 0,288 + i}{s + 0,5 - 0,8660i} + \frac{-0,5 - 0,288i}{s + 0,5 + 0,8660i} + \frac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{-s - 1}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{s}$$

### 3.4-Resolução de Equações Diferenciais Lineares e Invariantes no Tempo

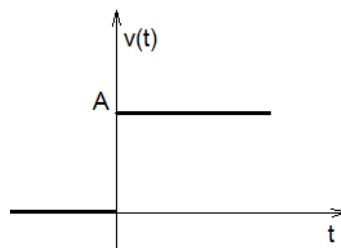
Considere o circuito abaixo



A tensão sobre o capacitor é  $v_c(t)$ . Suponha que o capacitor esteja descarregado inicialmente, ou seja:

$$v_c(t)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{ou} \quad v_c(0) = 0$$

Suponha que a chave seja fechada em  $t=0$ , ou seja



que é a função degrau e  $\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{A}{s}$ .

Determine o comportamento da tensão no capacitor,  $v_c(t)$ , ao fechar a chave.

Sol.: para o capacitor tem-se:  $q = C v_c(t)$  ou  $\frac{dq}{dt} = C \frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$

Segundo as tensões na malha tem-se:

$$v(t) = R i(t) + v_c(t)$$

ou

$$v(t) = R \cdot C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \quad \leftarrow \text{equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico do sistema}$$

Assim:

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = RC \mathcal{L}\left\{\frac{dv_c(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{v_c(t)\}$$

então

$$\frac{A}{s} = RC[sV_c(s) - v_c(0)] + V_c(s)$$

$$\frac{A}{s} = [RCs + 1] \cdot V_c(s) \Rightarrow V_c(s) = \frac{A}{s(RCs + 1)}$$

ou ainda:

$$V_c(s) = \frac{\frac{A}{RC}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{RC}}$$

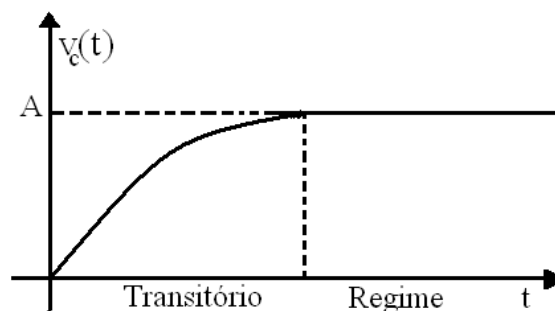
$$k_1 = s \cdot V_c(s) \Big|_{s=0} = A$$

$$k_2 = \left(s + \frac{1}{RC}\right) \cdot V_c(s) \Big|_{s=-\frac{1}{RC}} = -A$$

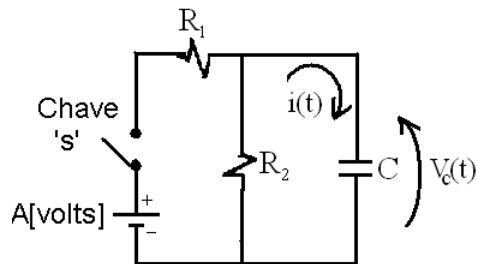
$$\therefore V_c(s) = \frac{A}{s} - \frac{A}{s + \frac{1}{RC}}, \text{ segundo as linhas 1 e 6 da tabela, (pg. 30)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} - \frac{A}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = A - Ae^{-\frac{t}{RC}} = A\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Graficamente



Exercício: Determine a evolução temporal de  $v_c(t)$  e  $i(t)$  no circuito:

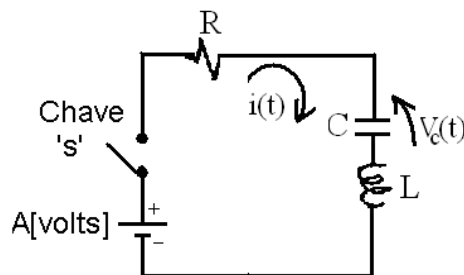


$$R_1 = R_2 = 1\Omega$$

$$C = 10^{-3}\text{F}$$

A chave é fechada em  $t=0\text{s}$  e  $v_c(t)=0\text{V}$

Exercício: Determine a evolução temporal de  $v_c(t)$  e  $i(t)$  no circuito:



$$R = 1\Omega$$

$$C = 10^{-3}\text{F}$$

$$L = 0,2\text{H}$$

Suponha que não tenha energia armazenada no circuito antes da chave se fechar, ou seja,  $v_c(t)=0$  e  $i(t)=0$ . Aplique o T.V.F. para determinar os valores de regime.

Exercício: Resolva a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$$

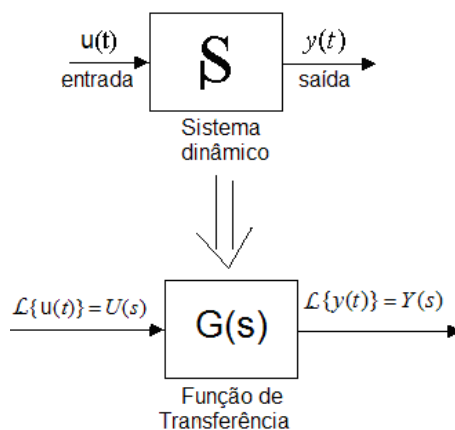
$$\text{sendo: } \ddot{x}(0) = \dot{x}(0) = x(0) = 0 \text{ e } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



#### 4-Função de Transferência

##### 4.1-Definição

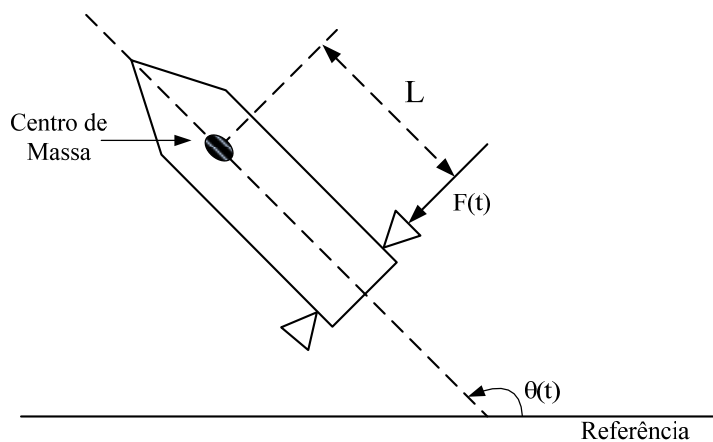
A função de transferência de um sistema de equações diferenciais lineares invariante no tempo é definida como a relação da Transformada de Laplace da saída (função resposta) para a transformada de Laplace da entrada (função excitação) sob a hipótese de que todas as condições iniciais são nulas.



tem-se:  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$

**Exemplo:** Considere o controle do satélite da figura a seguir, sendo que a entrada controladora é o torque  $T(t)$  da turbina. A saída que deseja-se controlar é a posição angular  $\theta(t)$  do satélite.

Admita que a velocidade de rotação  $\dot{\theta}(t)$  e a posição angular  $\theta(t)$  são nulas em  $t=0$ , ou seja:  $\dot{\theta}(0) = 0$  rad/s e  $\theta(0) = 0$  rad (C.I. nulas).





Neste caso, o torque é:  $T(t)=L.F(t)$ . Aplicando a segunda lei de Newton ao presente sistema e observando que não há nenhum atrito no ambiente dos satélites temos:

$$\sum \text{torques} = \left( \begin{array}{c} \text{Momento} \\ \text{de} \\ \text{Inércia} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \text{Aceleração} \\ \text{Angular} \end{array} \right)$$

ou

$$T(t) = J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (1)$$

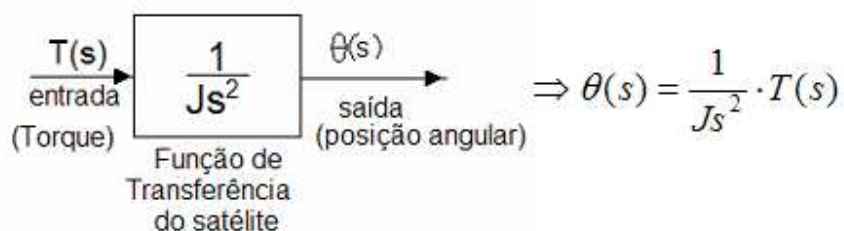
sendo que  $J$  é o momento de inércia do satélite. Nosso objetivo é encontrar a função de transferência que relaciona a entrada  $T(t)$  com a saída  $\theta(t)$ . Para isso, aplicamos a transformada de Laplace em (1):

$$\mathcal{L}\{T(t)\} = J \mathcal{L}\left\{ \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right\}$$

$$T(s) = J \left[ s^2\theta(s) - s\theta(t)\Big|_{t=0^-} - \dot{\theta}(t)\Big|_{t=0^-} \right]$$

$$T(s) = Js^2\theta(s) \Rightarrow \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2} \Rightarrow \frac{\theta(s)}{T(s)} = G(s)$$

Esquematicamente tem-se:

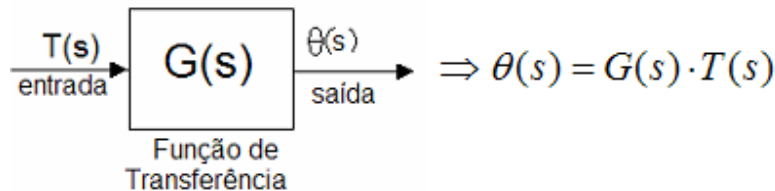


logo,  $G(s) = \frac{1}{Js^2}$  que é a função de transferência do satélite.

Genericamente a função de transferência é definida como a relação entre a saída e a entrada do sistema, ou seja:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

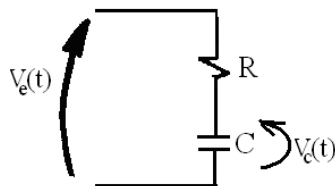
esquemáticamente,



Obs.: Note que a entrada utilizada foi  $T(t)$  e é qualquer (genérico). Desta forma  $G(s)$  não depende da entrada.

O conceito de função de transferência será muito útil neste curso, com ela analisaremos e projetaremos sistemas de controle automático.

Exercício: Determine a função de transferência do circuito:



sendo  $v_e(t)$  a entrada e  $v_c(t)$  a saída. Não se esqueça: C.I. nulas.

### Generalização

Mostraremos, a seguir, uma generalização do conceito de função de transferência.

Considere um sistema linear invariante no tempo (SLIT):



Suponha que  $u(t)=0$  para  $t<0$  e que as condições iniciais são nulas:

$$y(0) = \dot{y}(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(0_-) = \dot{u}(0_-) + \dots + u^{(m)}(0_-) = 0$$

O sistema é descrito pela equação diferencial:

$$a_o y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = b_o u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t) \quad (1)$$

Obs.: Já provamos no capítulo 2 (exemplo 4) que este sistema dinâmico é linear. Se  $a_i$  e  $b_i$  são constantes, então é SLIT.

Aplicando a Transformada de Laplace em (1) temos:

$$a_o Y(s) + a_1 (sY(s) - y(0^-)) + \dots + [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - \dots - y^{(n-1)}] = b_o U(s) + b_1 [sU(s) - u(0^-)] + \dots + b_m [s^m U(s) - s^{m-1} u(0^-) - \dots - u^{(m-1)}] \quad (2)$$

Como:  $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \dots = y^{(n-1)}(0^-) = 0$  e  $u(t)=0$  para  $t<0$  (logo todas as derivadas de  $u(t)$  são nulas para  $t<0$ ), a equação (2) torna-se

$$a_o Y(s) + a_1 sY(s) + \dots + s^n Y(s) = b_o U(s) + b_1 sU(s) + \dots + b_m s^m U(s)$$

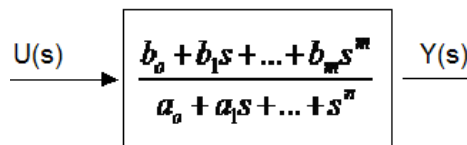
ainda:

$$Y(s) [a_o + a_1 s + \dots + s^n] = U(s) [b_o + b_1 s + \dots + b_m s^m] \quad (3)$$

Porém a função de transferência é a relação entre a saída e a entrada do sistema, para determiná-la isolamos  $\frac{Y(s)}{U(s)}$  em (3):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_o + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_o + a_1 s + \dots + s^n} = G(s) \text{ (função de transferência genérica)}$$

Esquematicamente temos:



tem-se:  $Y(s)=G(s).U(s)$

Observe que a F.T. genérica é uma razão entre dois polinômios genéricos.

Obs.:

1.  $G(s)$  independe do valor da entrada, é uma característica do sistema.
2. Se  $u(t)=\delta(t)$  (impulso unitário), temos  $U(s)=1$  logo

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s).U(s) = G(s).1 \\ \therefore Y(s) &= G(s) \end{aligned}$$

Portanto, a resposta  $Y(s)$  ao impulso de um sistema é matematicamente igual à função de transferência  $G(s)$  do sistema.

3. A F.T. relaciona a entrada e a saída do sistema de uma forma geral.

Como obter a Função de transferência

A- Experimentalmente- a metodologia experimental será abordada no laboratório.

B- Teoricamente- deve-se seguir os seguintes passos:

1- Escreva a equação diferencial do sistema, utilizando as leis físicas, mecânicas, circuitos elétricos, etc.

2- Aplique a transformada de Laplace na equação encontrada, considerando todas as C.I. nulas.

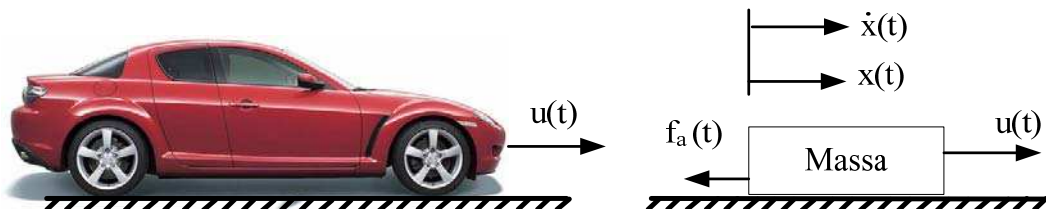
3- Isole a saída da entrada fazendo:

$$\frac{\mathcal{L}\{saída\}}{\mathcal{L}\{entrada\}} = \text{função de transferência}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Exemplo: Recentes pesquisas em controle automático estão desenvolvendo o piloto automático para automóveis.

O diagrama abaixo mostra o sentido das ações das forças: força do motor ( $u(t)$ ) e força de atrito ( $f_a(t)$ ).



A entrada do sistema é a força  $u(t)$  realizada pelo motor e a saída é a posição  $x(t)$  do carro. A saída de interesse pode também ser a velocidade  $v(t) = \dot{x}(t)$  do carro. Suponha que o carro esteja parado em  $t \leq 0$ , logo,  $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$  e que o motor esteja em ponto morto, ou seja :  $u(t) = 0$  para  $t \leq 0$ .

Por simplicidade, nós assumiremos que o momento de inércia das rodas são desprezíveis; neste caso, podemos aplicar:

$$\sum F_x = m.a = m.\ddot{x}(t)$$

A força de atrito se à força de opõe à força de impulsão  $u(t)$ , logo:

$$u(t) - b \dot{x}(t) = m \ddot{x}(t) \quad (1)$$

1º) Suponha que a saída de interesse é a posição  $x(t)$  do carro e que desejamos obter a função de transferência entre a força do motor e a posição:

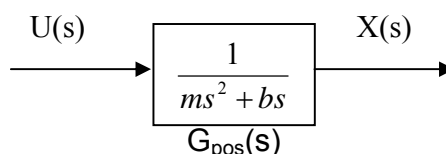
$$\frac{X(s)}{U(s)} = ?$$

Aplicando transformada de Laplace em (1) com C.I. nulas:

$$\mathcal{L}\{.\} \Rightarrow U(s) - bsX(s) = ms^2X(s)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} X(s)[ms^2 + bs] &= U(s) \\ \therefore \frac{X(s)}{U(s)} &= \frac{1}{ms^2 + bs} = G_{POS}(s) \end{aligned}$$



2º) Suponha que a saída de interesse é velocidade  $v(t) = \dot{x}(t)$  do carro:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = ?$$

substituindo-se  $v(t) = \dot{x}(t)$  em (1) tem-se

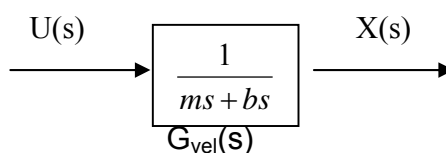
$$u(t) - bv(t) = m \dot{v}(t) = m \ddot{x}(t)$$

pois  $\dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

$$\mathcal{L}\{.\} \Rightarrow U(s) - bV(s) = msV(s)$$

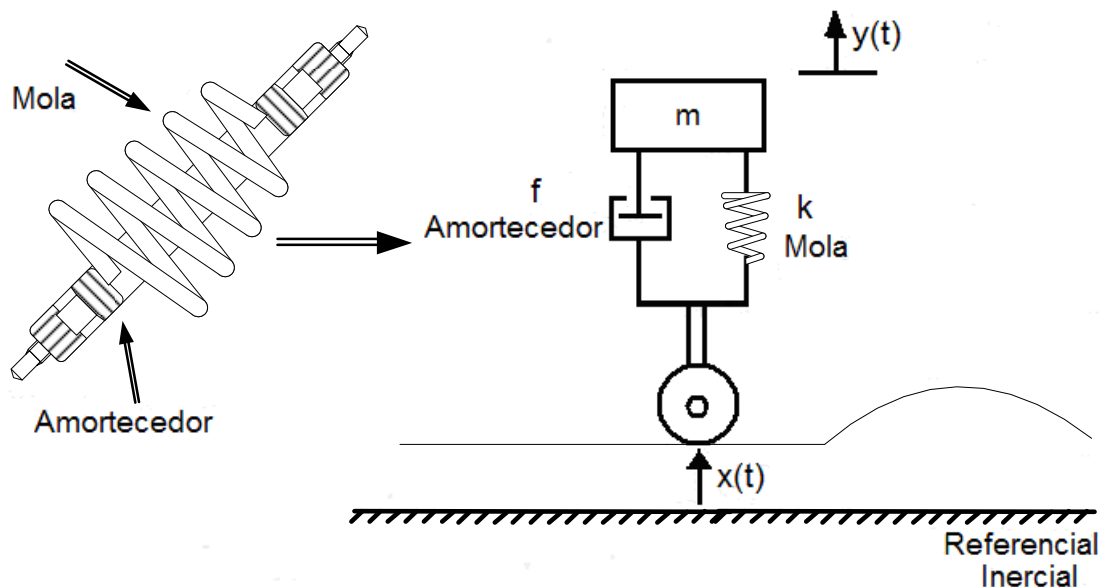
$$V(s)[ms + b] = U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b} = G_{VEL}(s)$$



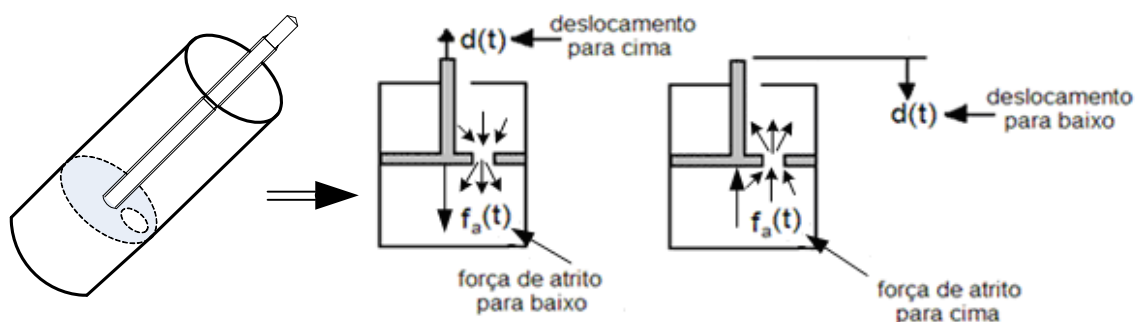
$G(s)$  - Função de Transferência que relaciona a velocidade  $v(t)$  do carro com a força  $u(t)$  do motor.  
VEL.

**Exemplo:** O sistema de suspensão do automóvel está ilustrado a seguir:



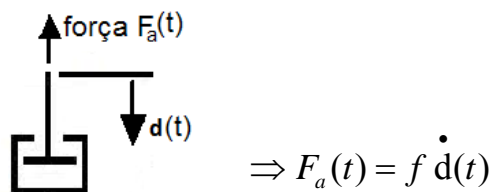
Este é um modelo que  $\frac{1}{4}$  de automóvel.

O cilindro do amortecedor contém ar que passa de um lado para o outro, quando ocorre um movimento relativo. Ele aplica sempre uma força de reação, ou seja contrária ao movimento de suas extremidades.

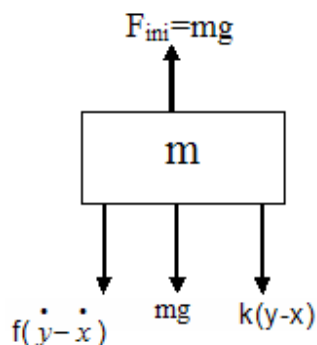


O amortecedor viscoso proporciona fricção viscosa, ou seja, ele se opõe a qualquer movimento relativo das duas extremidades, dissipando energia na forma de calor.

Modelo matemático



As forças sobre a massa  $m$  são:



Como estamos supondo C.I. nulas, inicialmente, o sistema está em equilíbrio e o peso ( $mg$ ) está sendo sustentado pela deflexão inicial do amortecedor e da mola

sendo: força da mola;  $F_m = k(y-x)$

força do amortecedor:  $F_a = f(\dot{y} - \dot{x})$

Sabemos que:

$$\sum F_y = m.a$$

logo:

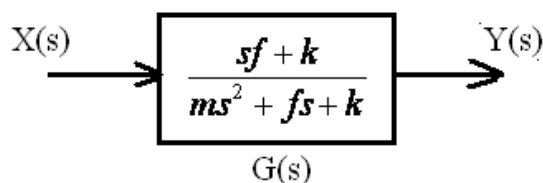
$$mg - f(\dot{y} - \dot{x}) - mg - k(y-x) = m\ddot{y}$$

Aplicando: Laplace com C.I. nulas

$$-f(sY(s) - sX(s)) - k[Y(s) - X(s)] = ms^2Y(s)$$

$$Y(s)[ms^2 + fs + k] = [sf + k]X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{sf + k}{ms^2 + fs + k} = G(s)$$

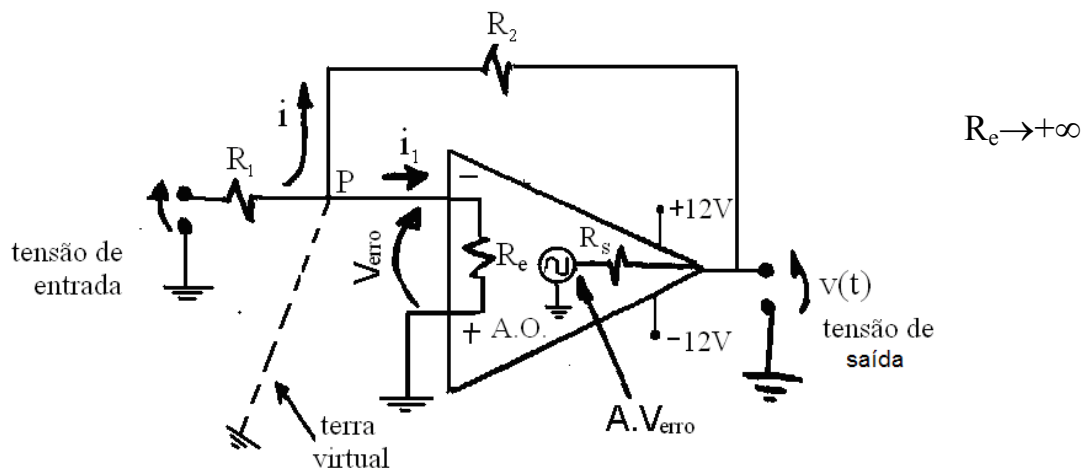




Note que a irregularidade  $x(t)$  da pista é a entrada do sistema (excitação) do sistema e o deslocamento  $y(t)$  da carroceria do carro é a saída (resposta)

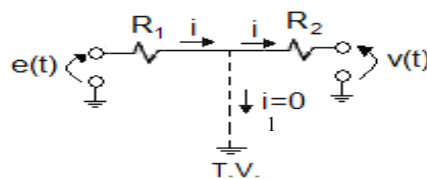
#### 4.2-Função de Transferência de Circuitos com Amplificador Operacional (A.O.)

O A.O. tem a característica de alta impedância de entrada e baixa de saída. Idealmente, a impedância de entrada é infinita, logo a corrente de entrada é nula. A figura abaixo mostra o circuito do A.O. na configuração inversora.



Como  $R_e \rightarrow +\infty$ , tem-se que a corrente  $i_1 \approx 0A$ , logo a tensão no nó P é igual a 0v, esse nó P é chamado de terra virtual.

Podemos fazer a seguinte equivalência:



tem-se:

$$e(t) = R_1 i(t) \Rightarrow i = \frac{e(t)}{R_1}$$

$$0 = R_2 i + v(t) \Rightarrow v(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)$$

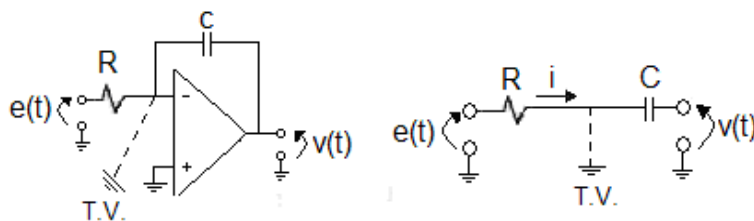
Aplicando  $\mathcal{L}\{.\}$ , temos:

$$V(s) = -\frac{R_2}{R_1} E(s)$$

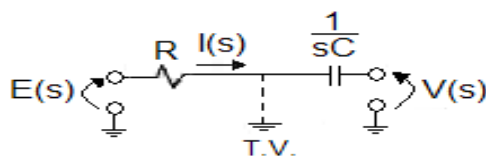
logo

$$\frac{V(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = G(s) \Rightarrow \begin{array}{c} E(s) \rightarrow \boxed{-\frac{R_2}{R_1}} \rightarrow V(s) \end{array}$$

#### 4.2.1-Função de Transferência do A.O. Integrador



O circuito pode então ser colocado na forma de impedâncias no domínio 's' (ver curso de Circuitos Elétricos):



temos:

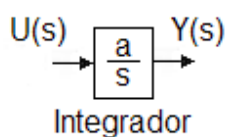
$$E(s) = R.I(s) + 0 \Rightarrow I(s) = \frac{E(s)}{R}$$

$$0 = \frac{1}{sC} I(s) + V(s)$$

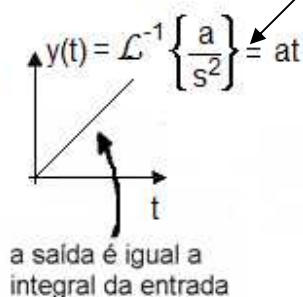
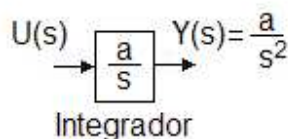
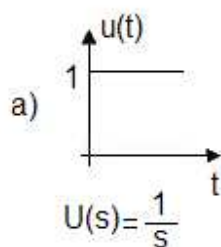
$$V(s) = -\frac{1}{RCs} E(s) \Rightarrow \frac{V(s)}{E(s)} = -\frac{1}{RCs} = G(s)$$

$$\begin{array}{c} E(s) \rightarrow \boxed{-\frac{1}{RCs}} \rightarrow V(s) \end{array}$$

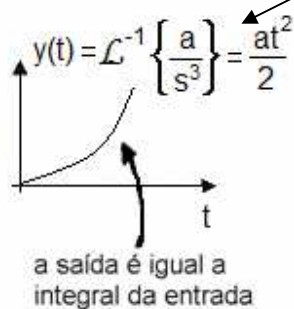
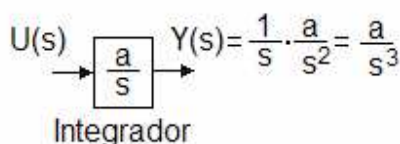
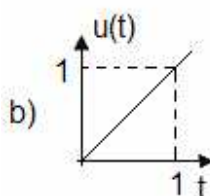
Esta é a função de transferência do integrador, ou seja, a saída é igual à integral da entrada, genericamente:



Verificação

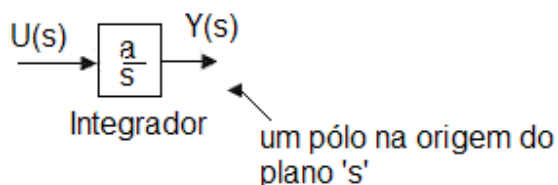


linha 3 da  
tabela da  
pg. 30.

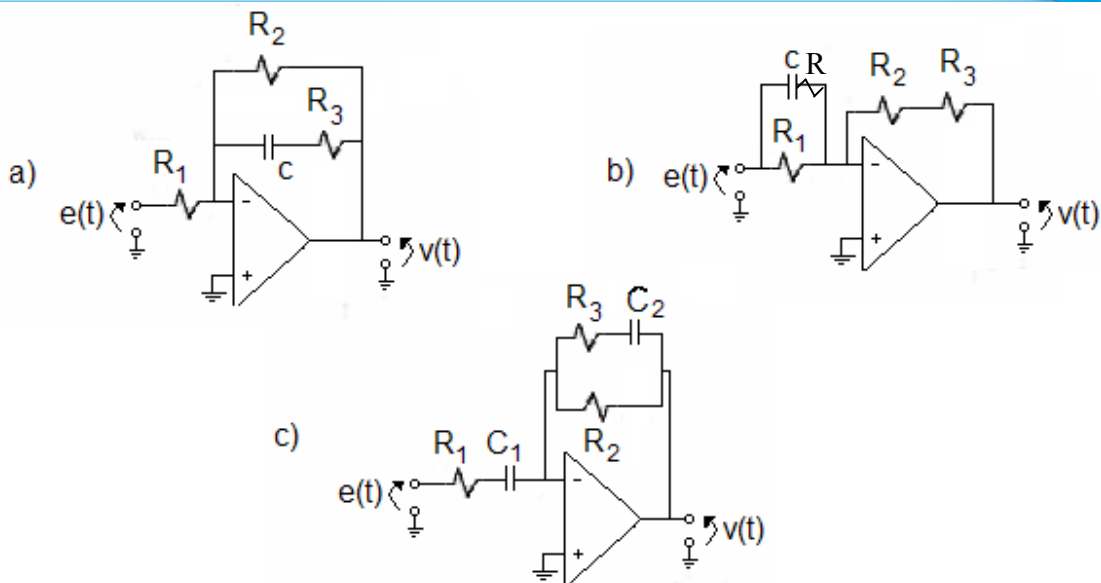


linha 3 da  
tabela da  
pg. 30.

Obs.: note que a função de transferência do integrador possui no denominador um polinômio de 1ª. ordem com apenas 's', o que proporciona o pólo  $s_1=0$ . Neste curso será muito útil o conceito de que a função de transferência do integrador é do tipo:



Exercício: Determine as funções de transferência dos circuitos abaixo:



#### 4.3-Simulação com o MATLAB

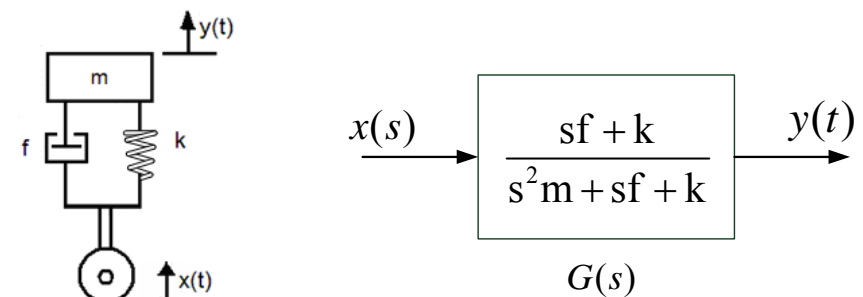
O MATLAB é utilizado para simular sistemas de controle. Os alunos do Grêmio de Engenharia Elétrica (Giovani e Clarice) prepararam um material introduzindo o uso do MATLAB em controle linear. Na próxima página está este material.

No Apêndice A consta um curso introdutório da utilização do MATLAB.

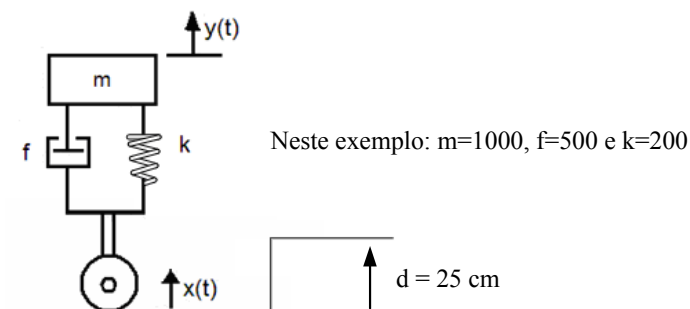
## MATLAB EM CONTROLE LINEAR

O MATLAB possui um "toolbox" com uma grande diversidade de funções apropriadas para a análise de sistemas de controle. Estas funções estão disponíveis através do comando: **help control**.

Para ilustrar a utilidade do MATLAB nesta análise, suponha que um automóvel em movimento passe por diferentes obstáculos (elevações) na pista. Abaixo temos apresentado um esquema representativo de um modelo para o automóvel com um amortecedor ( $f$ ) e uma mola ( $k$ ):



a) Suponha que o automóvel passe pela elevação representada a seguir:

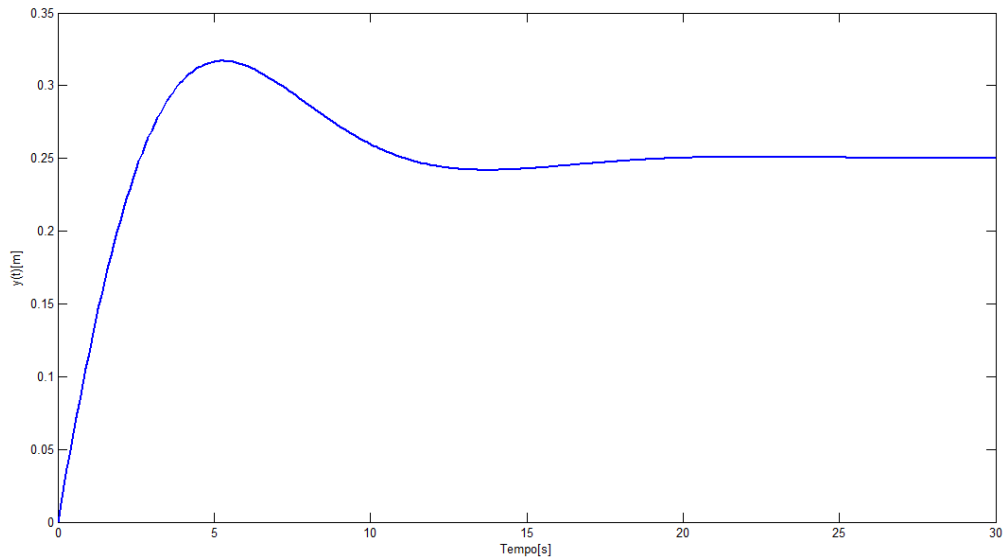


Esta elevação corresponde à entrada do sistema e é chamada de entrada degrau. Para observar a resposta do sistema (movimento do sistema massa-mola, amortecedor, ou seja, o suposto automóvel) executemos o seguinte programa:

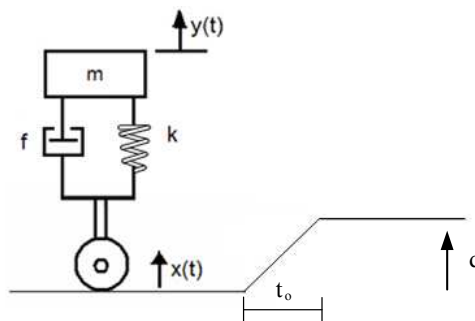
```
%Parâmetros do sistema
m=1000;
f=500;
k=200;
%Numerador
num=[f, k];
%Denominador
den=[m, f, k];
```

```
%Tempo de simulação
tempo=0:0.1:30;
%Função degrau
y=0.25*step(num,den,tempo);
%Gráfico
plot(tempo,y,'b')
xlabel('Tempo[s]');
ylabel('y(t) [m]');
```

Assim, podemos visualizar a seguinte resposta:



b) Supondo agora que o automóvel encontre o seguinte obstáculo (conhecido como função rampa):

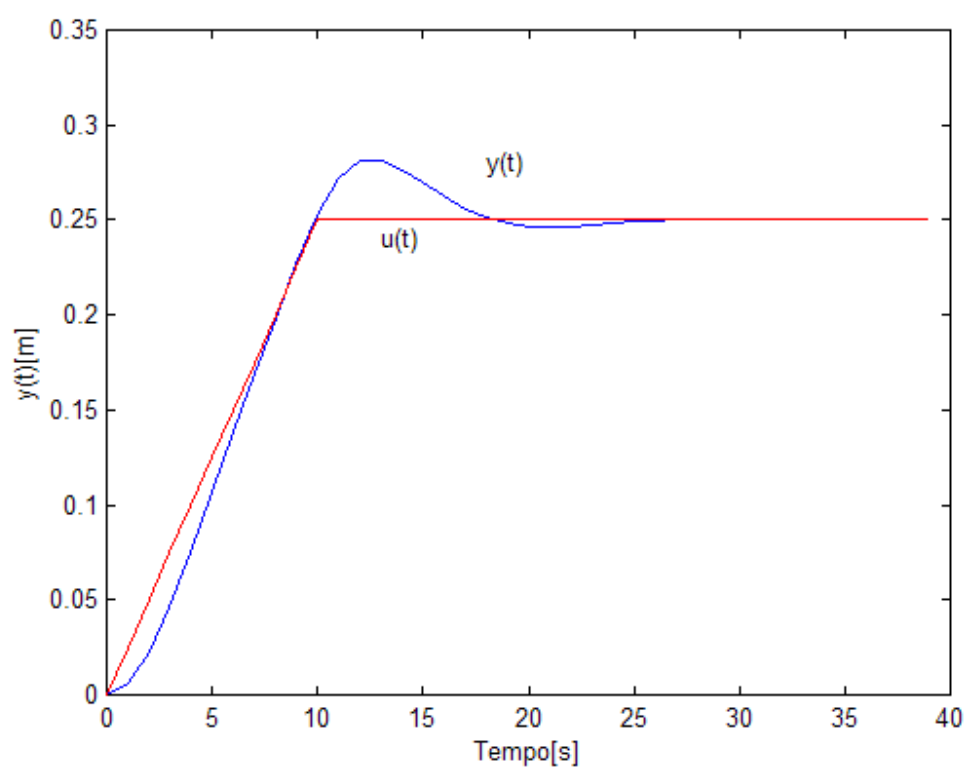


Pode-se verificar a saída do sistema  $[y(t)]$  (posição da massa) executando o seguinte programa:

```
%Parâmetros do sistema
num=[500,200];
den=[1000,500,200];
%Função rampa (vetor coluna)
u=0:.025:.225;
u=u';
a=0.25*ones(1,30);
a=a';
u=[u;a];
```

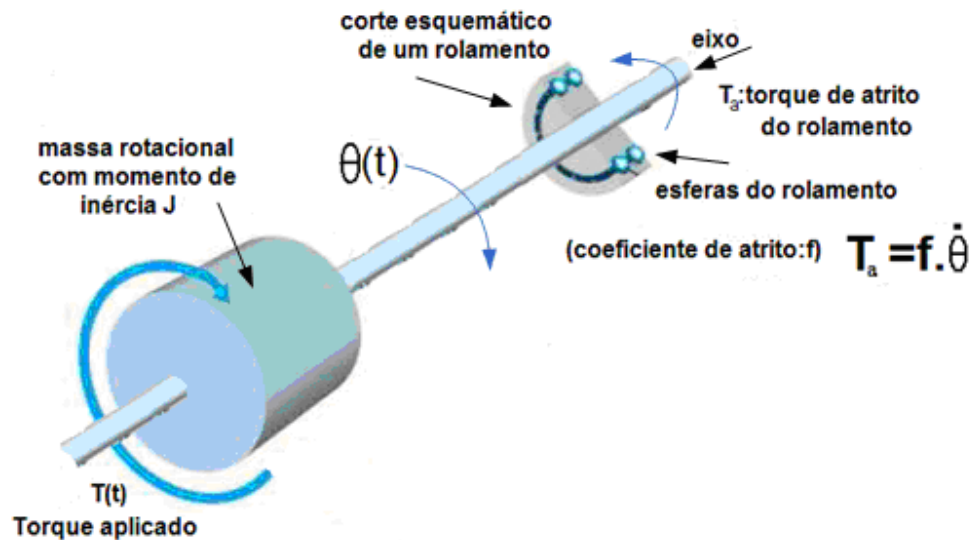
```
%Tempo de simulação
t=0:1:39;
[y,x]=lsim(num,den,u,t);
%Gráfico
plot(t,y,'b',t,u,'r')
xlabel('Tempo[s]');
ylabel('y(t) [m]');
text(18,0.28,'y(t)');
text(13,0.24,'u(t)');
```

Assim como resultados temos:



#### 4.4-Função de Transferência de um Sistema Rotacional Mecânico

Este sistema representa a carga que um motor elétrico tem em seu eixo. O sistema é



Sabemos que:  $\sum \text{torques} = (\text{momento de inércia}) \cdot (\text{aceleração angular})$

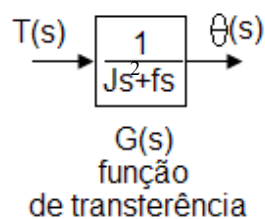
logo,

$$T(t) - f \dot{\theta}(t) = J \ddot{\theta}(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, sendo C.I. nulas, temos:  $T(s) - fs\theta(s) = Js^2\theta(s)$

ou ainda,

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + fs} = G(s)$$



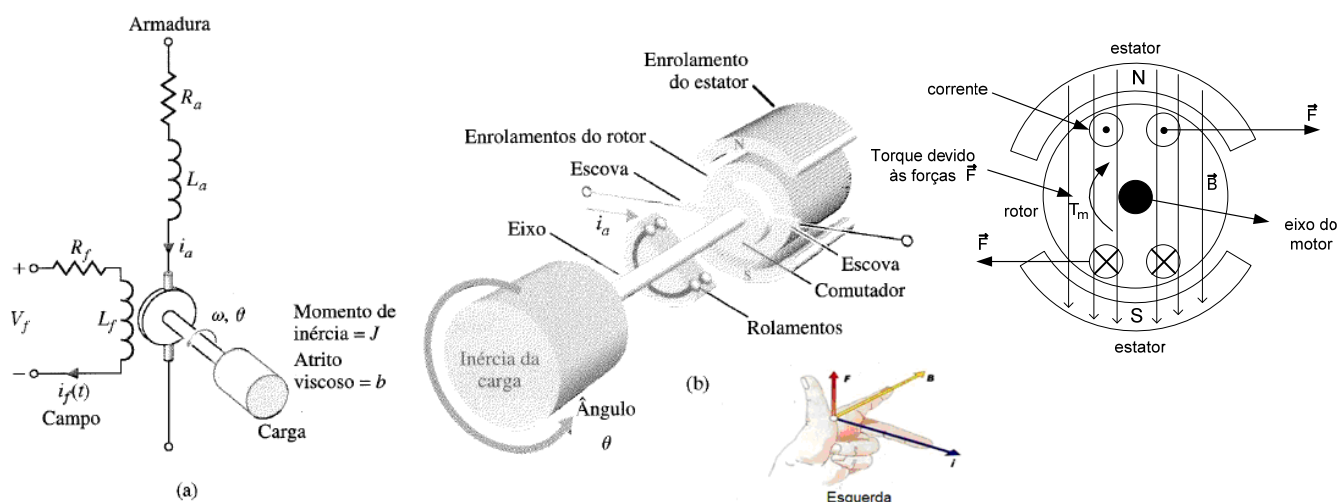
**Exercício:** Prove que se a saída de interesse fosse a velocidade de rotação  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  a F.T. será:

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + f}$$



#### 4.5-Função de Transferência de um Motor de Corrente Contínua (Motor CC)

O motor CC converte energia elétrica de corrente contínua em energia mecânica de movimento rotativo, vide Dorf 8ªed, pg. 40. Devido a recursos tais como torque elevado, possibilidade de controle de velocidade ou posição angular sobre uma ampla faixa de valores, portabilidade, característica velocidade-torque bem comportada e adaptabilidade a vários tipos de métodos de controle, os motores são usados largamente em numerosas aplicações de controle, incluindo manipuladores robóticos, mecanismos de transporte e fitas, acionadores de disco, máquinas-ferramentas e atuadores de sensoválvulas.



A função de transferência do motor CC será deduzida por meio de uma aproximação linear do motor real, e os efeitos de histerese e queda de tensões nas escovas, serão desprezados. A tensão de controle é aplicada no campo,  $v_f(t)$ .

Então neste sistema a entrada é  $v_f(t)$  e a saída a posição angular  $\theta(t)$  do eixo.

O fluxo no entreferro do motor é proporcional à corrente de campo:

$$\phi(t) = k_f i_f(t)$$

O torque desenvolvido pelo motor é admitido como sendo proporcional a  $\phi(t)$  e a corrente de armadura:

$$T_m(t) = k_1 \phi(t) i_a(t) = k_1 k_f i_f(t) i_a(t)$$

Como o motor é controlado pelo campo,  $i_a(t)$  é uma constante:  $i_a(t) = I_a$  logo:

$$T_m(t) = \underbrace{k_i k_f I_a}_{k_m} i_f(t) \Rightarrow T_m(s) = k_m I_f(s) \quad (1)$$

A corrente de campo se relaciona com a tensão de campo através de

$$V_f(s) = (R_f + sL_f) I_f(s) \quad (2)$$

O torque de atrito dos rolamentos é:

$$T_a(t) = b \dot{\theta}(t) \quad (3)$$

Sabemos que:  $\sum \text{torques} = \left( \begin{matrix} \text{Momento} \\ \text{de Inércia} \end{matrix} \right) \cdot \left( \begin{matrix} \text{Aceleração} \\ \text{Angular} \end{matrix} \right) \quad (4)$

$$T_m - T_a = J \cdot \ddot{\theta}(t)$$

Substituindo (1) e (3) em (4):

$$k_m i_f(t) - b \dot{\theta}(t) = J \cdot \ddot{\theta}(t)$$

Aplicando Laplace com C.I. nulas:

$$k_m I_f(s) = sb\theta(s) + Js^2\theta(s) \quad (5)$$

Isolando-se  $I_f(s)$  em (2) e substituindo em (5):

$$\frac{k_m}{R_f + L_f s} V_f(s) = (bs + Js^2)\theta(s)$$

ou ainda,

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{k_m}{(R_f + L_f s)(bs + Js^2)} = \frac{k_m}{s(R_f + L_f s)(b + Js)}$$

Normalmente,  $L_f$  é muito pequeno,  $L_f \approx 0$ ,

então,

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{k_m/R_f}{s(b + Js)} = G(s)$$

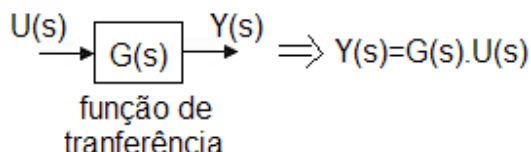
Exercício: Como seria a F.T. do motor CC se a saída de interesse fosse  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  ou seja a velocidade de rotação do eixo?

## 5-Diagrama de Blocos

Os sistemas dinâmicos que abrangem os sistemas de controle automático são representados matematicamente por um conjunto de equações diferenciais simultâneas. O uso da transformada de Laplace reduz o problema à solução de um conjunto de equações algébricas lineares. Como os sistemas de controle dizem respeito ao controle de variáveis específicas, isto requer a inter-relação entre as variáveis controladas e as variáveis de controle. Esta relação é representada pela função de transferência do subsistema que relaciona as variáveis de entrada e de saída (vide Dorf, 8º ed.). Ver exemplos da pág. 111 desta apostila.

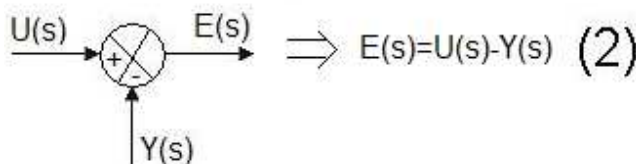
A importância da relação causa e efeito da função de transferência é evidenciada pela facilidade de representar a relação entre as variáveis do sistema através de diagramas. A representação das relações de sistemas em diagrama de blocos é predominante na engenharia de sistemas de controle.

O diagrama de blocos de um sistema é a representação das partes que o constituem e suas conexões. O elemento básico de um diagrama de blocos é a função de transferência:



### 5.1-O Detector de Erros

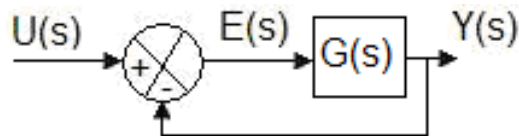
A realimentação utiliza o detector de erros:



### 5.2-Função de Transferência de Malha Fechada

A representação em diagrama de blocos permite que sistemas complexos sejam simplificados, facilitando sua análise.

Configuração básica:



O objetivo é determinar uma função de transferência que relaciona  $Y(s)$  com  $U(s)$ .

Temos:

$$Y(s) = G(s) \cdot E(s) \quad (3)$$

e

$$E(s) = U(s) - Y(s) \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4) temos:

$$Y(s) = G(s) \cdot [U(s) - Y(s)]$$

ou ainda,

$$Y(s) + G(s)Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

ainda:

$$Y(s)[1 + G(s)] = G(s) \cdot U(s)$$

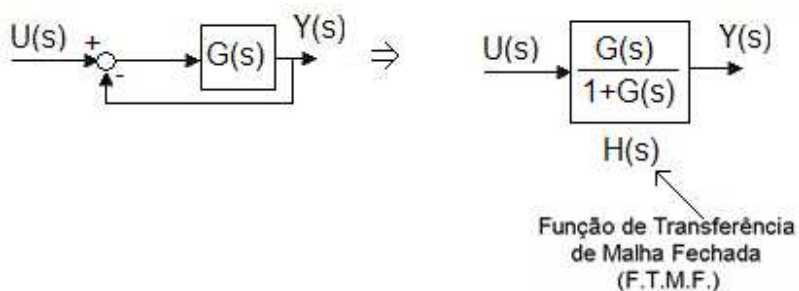
logo,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \cdot U(s)$$

A entrada  $U(s)$  é relacionada com a saída  $Y(s)$  através da função:

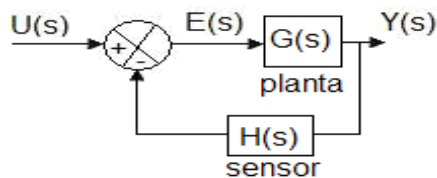
$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \Rightarrow Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

ou seja:



### 5.3-Manipulação no Diagrama de Blocos

Um diagrama de blocos muito comum em sistemas de controle automático é:



Verifique que este diagrama representa o diagrama de controle de temperatura mostrado no Capítulo 1 deste curso.

Do diagrama acima temos:

$$E(s) = U(s) - H(s)Y(s) \quad (a)$$

e

$$Y(s) = G(s)E(s) \quad (b)$$

Substituindo (a) em (b):

$$Y(s) = G(s)[U(s) - H(s)Y(s)]$$

ou

$$Y(s) = G(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

ainda:

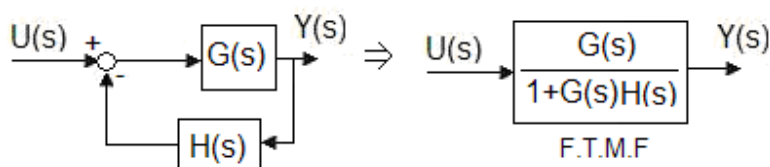
$$Y(s) + G(s)H(s)Y(s) = G(s)U(s)$$

logo,

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)U(s)$$

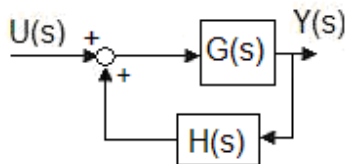
finalmente:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \cdot U(s)$$

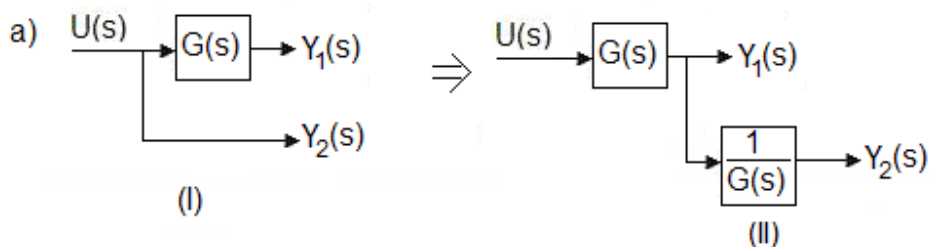


Exercício: Mostre que a F.T.M.F. do sistema abaixo é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$



#### 5.4-Algumas Regras Úteis



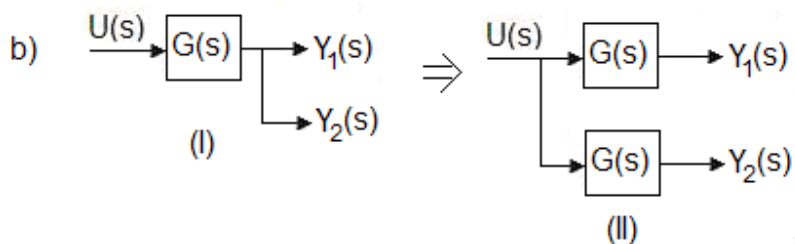
Verificação: de (I) tem-se

$$\left. \begin{array}{l} Y_1(s) = G(s)U(s) \\ Y_2(s) = U(s) \end{array} \right\} (a)$$

de (II) tem-se

$$\left. \begin{array}{l} Y_1(s) = G(s)U(s) \\ Y_2(s) = G(s) \cdot \frac{1}{G(s)} \cdot U(s) = U(s) \end{array} \right\} (b)$$

como (a) é equivalente a (b),  
então (I) é equivalente a (II).

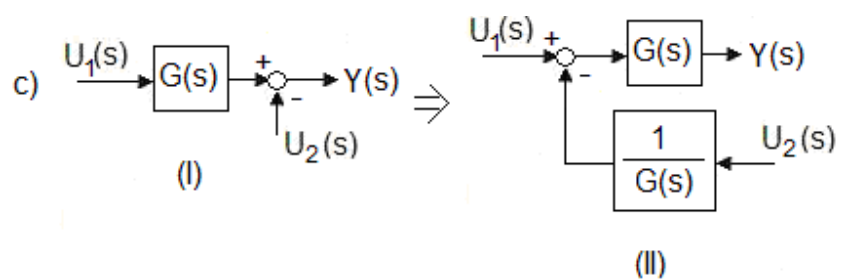


Verificação: (I)  $\Rightarrow Y_1(s) = G(s)U(s)$

$$Y_2(s) = G(s)U(s)$$

(II)  $\Rightarrow Y_1(s) = G(s)U(s)$

$$Y_2(s) = G(s)U(s)$$



temos:

$$Y(s) = U_1(s)G(s) - U_2(s)$$

$$Y(s) = U_1G(s) - U_2(s)$$

Em Ogata pode-se encontrar as principais regras para redução de diagrama de blocos:

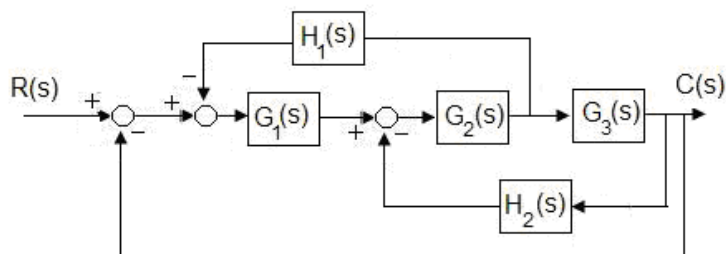
	Diagrama de blocos originais	Diagrama de blocos equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

Obs.: Já foi demonstrada a regra 13 nas páginas anteriores.



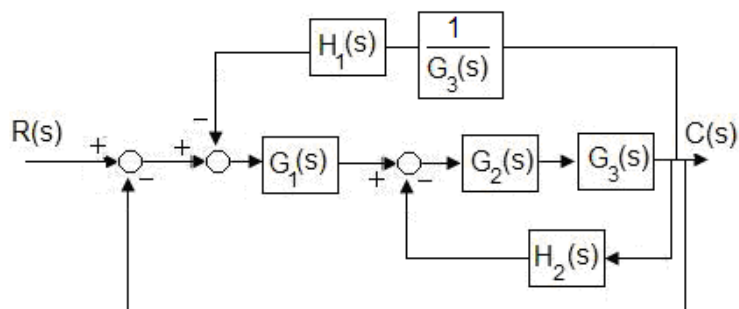
Exercício: Demonstre todas as regras da tabela anterior, menos aquelas já demonstradas neste texto.

Exemplo: Determine a F.T.M.F. de:

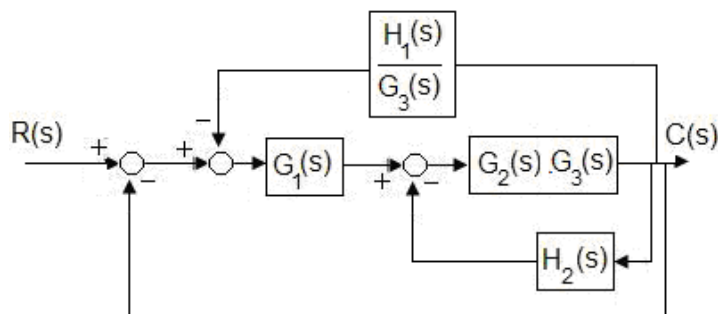


Sol.:

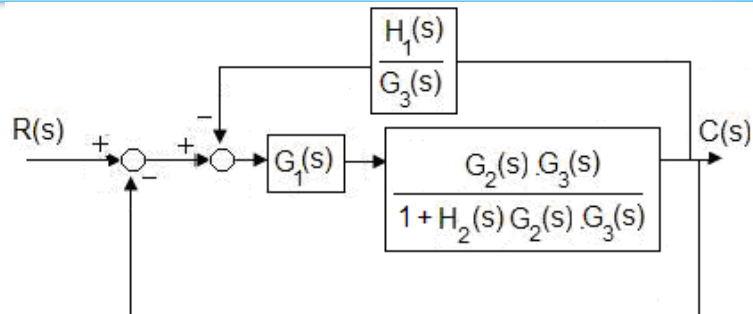
Usando a regra 9 da tabela temos:



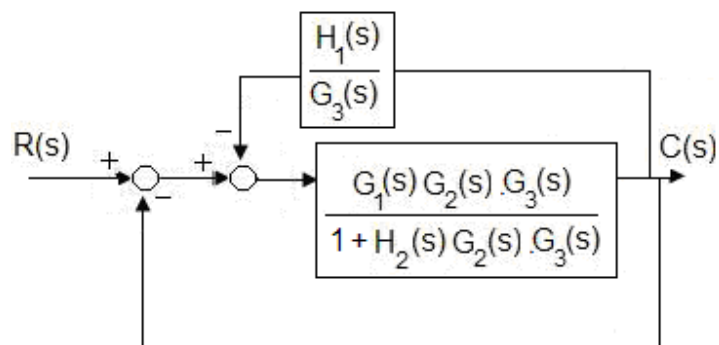
Agrupando os blocos que estão em série (regra 4 da tabela) tem-se:



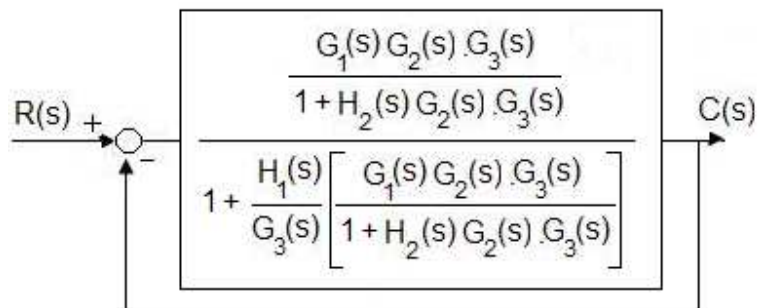
Usando a regra 13 tem-se:



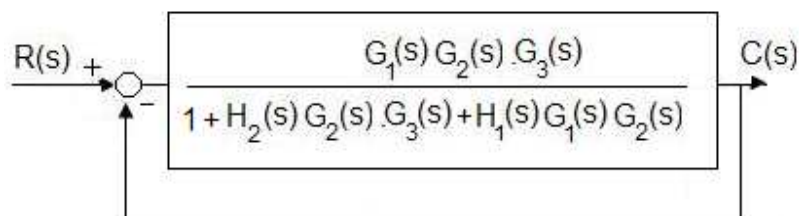
Usando a regra 4:



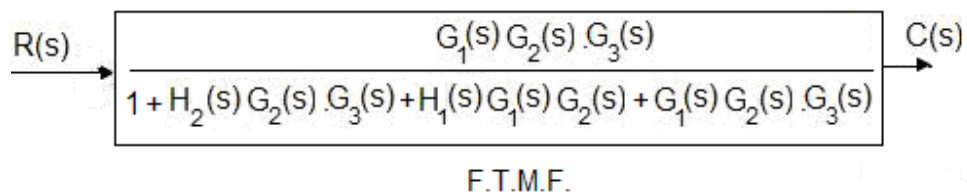
Usando a regra 13:



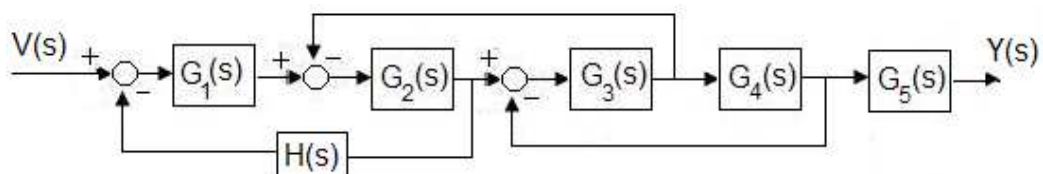
ou ainda,



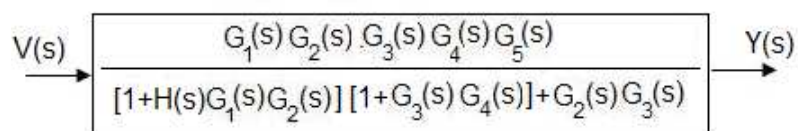
Aplicando novamente a regra 13 temos:



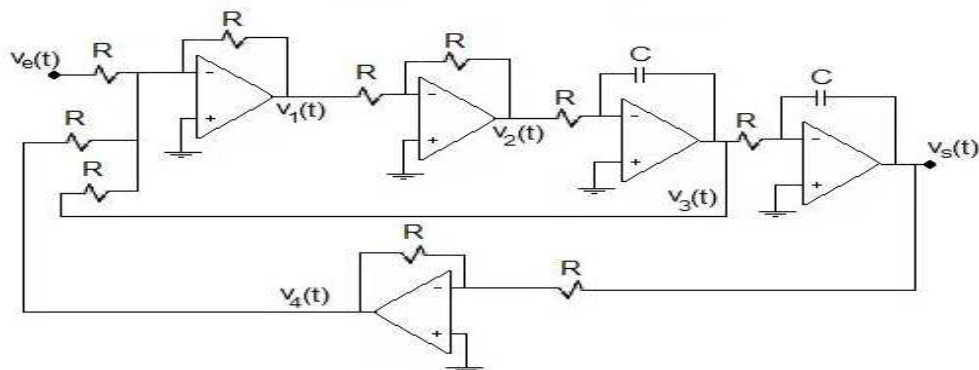
**Exercício:** Determine a função de transferência de malha fechada de:



Resposta:

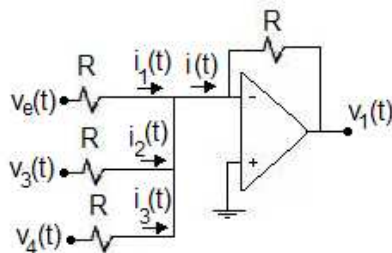


**Exemplo:** Determine a F.T.M.F. do circuito abaixo. Suponha  $R=10^3\Omega$  e  $C=10^{-6}F$ , com o MATLAB, simule o sistema sendo  $v_e(t)$  uma entrada degrau unitário, obtendo  $v_s(t)$ .



Sol.:

1. É necessário introduzir o equacionamento do A.O. na configuração somador:



tem-se:

$$i_1(t) = \frac{v_e(t)}{R}; \quad i_2(t) = \frac{v_3(t)}{R}; \quad i_3(t) = \frac{v_4(t)}{R}$$

e

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$0 = i(t)R + v_1(t) \Rightarrow v_1(t) = -Ri(t)$$

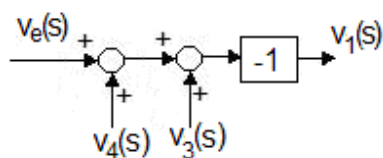
logo

$$v_1(t) = -R \left( \frac{v_e(t)}{R} + \frac{v_4(t)}{R} + \frac{v_3(t)}{R} \right) = -(v_e(t) + v_4(t) + v_3(t))$$

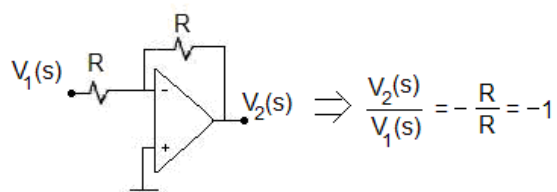
Aplicando a transformada de Laplace:

$$V_1(s) = -(V_e(s) + V_4(s) + V_3(s))$$

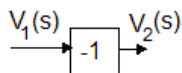
Logo o modelo em diagrama de blocos do A.O. somador é :



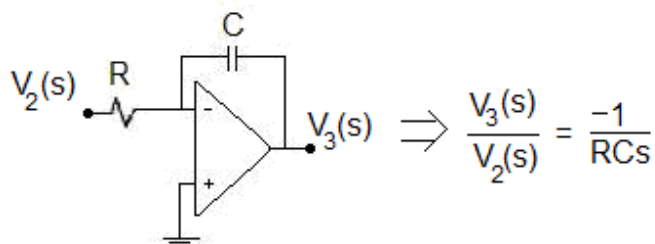
2.



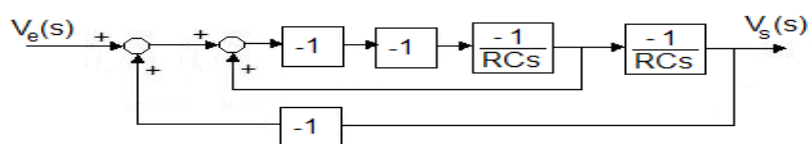
logo



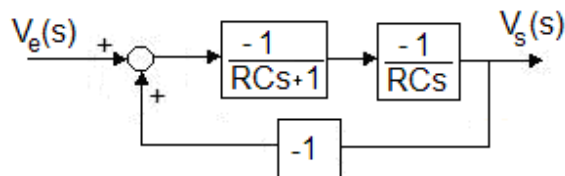
3.



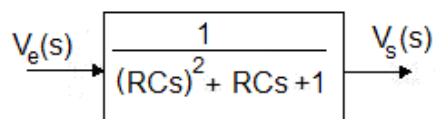
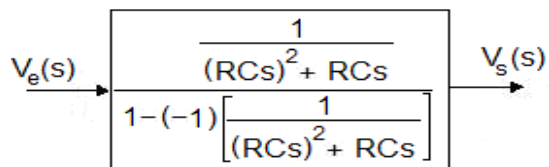
Então o diagrama de blocos do circuito completo é:



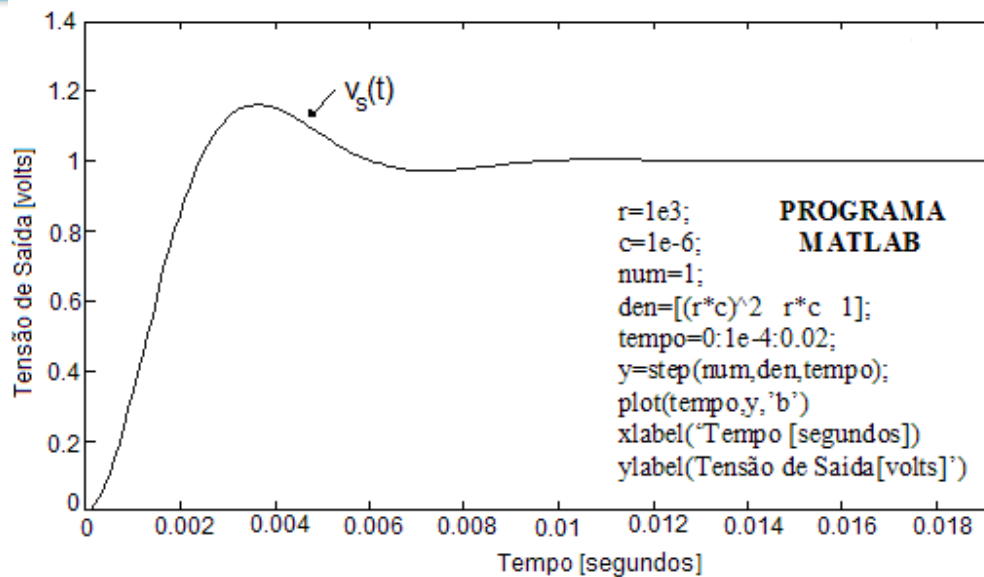
Fazendo associações série e depois usando a regra 13:



ou ainda:



O resultado da simulação está mostrado na figura abaixo, bem como o programa utilizado.



### 5.5-Simplificação de Diagrama de Blocos com o MATLAB

O MATLAB tem algumas funções para simplificação de diagrama de blocos (vide Ogata).

Suponha

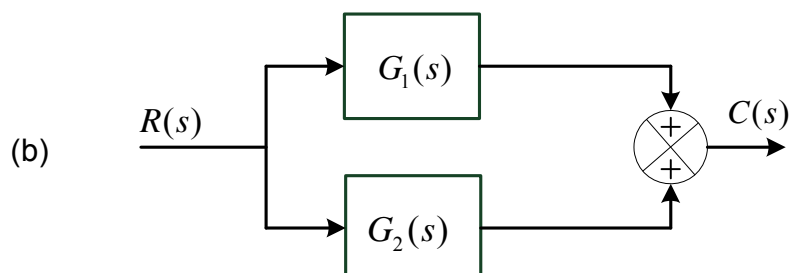
$$G_1(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}, \quad G_2(s) = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

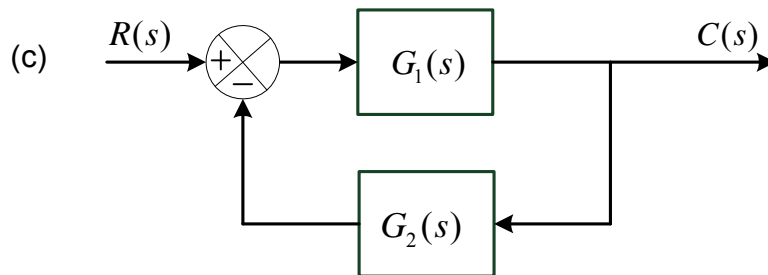
As associações são:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{series}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2})$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{parallel}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2})$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{feedback}(\text{num1}, \text{den1}, \text{num2}, \text{den2})$$





(a) sistema em cascata; (b) sistema em paralelo; (c) sistema com realimentação (de malha fechada).

Por exemplo, considere:

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}, \quad G_2 = \frac{5}{s + 5} = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

Um programa que realiza todas as associações acima é dado a seguir:

```
num1=[0 0 10];
den1=[1 2 10];
num2=[0 5];
den2=[1 5];
[num,den]=series(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =
          50
-----
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50

[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =
    5 s^2 + 20 s + 100
-----
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 50

[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2);
printsys(num,den)

num/den =
    10 s + 50
-----
s^3 + 7 s^2 + 20 s + 100
```

Para maiores detalhes digite no MATLAB: help feedback

## 6-Modelo em Diagramas de Fluxo de Sinal

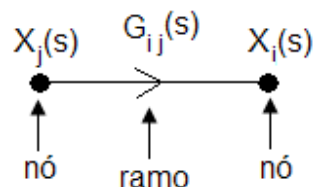
Os diagramas de blocos são adequados para a representação das inter-relações entre variáveis controladas e de entrada. Contudo, para um sistema com inter-relações razoavelmente complexas, o procedimento de redução do diagrama de blocos é trabalhoso, vide Dorf 8º ed. Um método alternativo para se determinar a relação entre variáveis de um sistema foi desenvolvido por Mason e é baseado em uma representação do sistema por meio de segmentos de arcos. Este método é chamado de diagrama de fluxo de sinal e sua vantagem é a disponibilidade de uma fórmula geral para determinar a função de transferência equivalente do sistema.

Consideremos:

$$X_i(s) = G_{ij}(s)X_j(s) \quad (1)$$

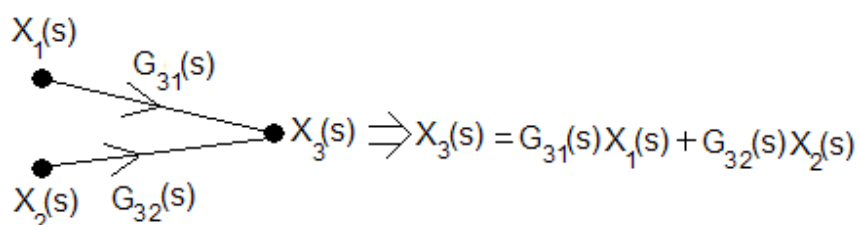
sendo  $X_i(s)$  e  $X_j(s)$  sinais e  $G_{ij}(s)$  função de transferência.

O diagrama de fluxo de sinal de (1) é :



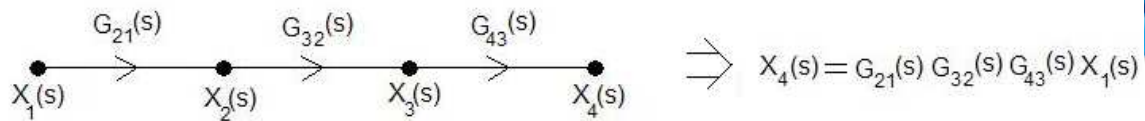
Toda variável num diagrama de fluxo de sinal é designada por um nó, e cada função de transferência por um ramo.

### Regra da adição



### Regra de Multiplicação





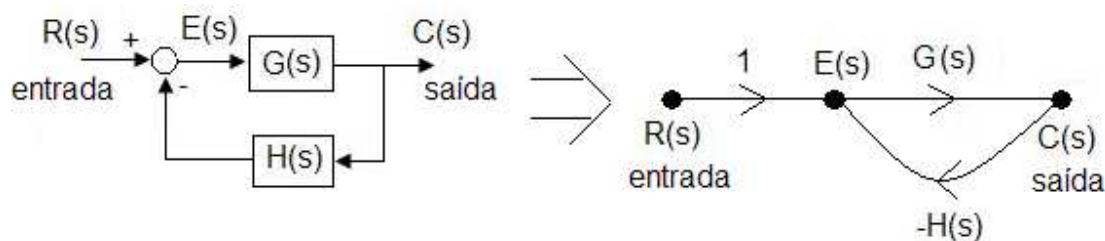
Percurso: é um ramo ou sequência contínua de ramos que podem ser atravessados de um sinal (nó) a outro sinal (nó).

Laço: é um percurso fechado que se origina e termina em um mesmo nó de modo que ao longo do percurso nenhum nó seja encontrado duas vezes.

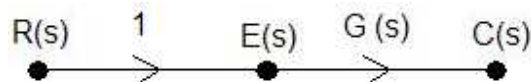
Laços disjuntos: dois laços são ditos disjuntos quando não possuem um nó comum. Dois laços que se tocam são não-disjuntos e compartilham um ou mais nós comuns.

Exemplo de construção de diagrama e fluxo a partir do diagrama de blocos.

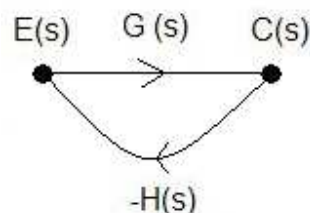
Considere o diagrama de blocos abaixo, o diagrama de fluxo equivalente é dado ao lado.



Neste caso, entre a entrada  $R(s)$  e a saída  $C(s)$  temos um único percurso:



Também temos um único laço:



Como temos apenas um laço, não existem laços disjuntos.

Ganho do Laço: é o produto dos ganhos dos ramos do laço.

No exemplo acima, o ganho do laço é:

$$L_1 = -G(s)H(s)$$

Ganho de Percurso: é o produto dos ganhos dos ramos encontrados atravessando-se o percurso.

No exemplo acima, o ganho do percurso entre a entrada e a saída é:

$$P_1 = G(s)$$

### Fórmula de Mason

A função de transferência  $T_{ij}(s)$  entre a variável  $X_i(s)$  e  $X_j(s)$  de um diagrama de fluxos é dada pela fórmula de Mason:

$$T_{ij}(s) = \frac{\sum_{k=1}^t P_{ijk} \Delta_{ijk}}{\Delta}$$

sendo  $P_{ijk}$ =k-éssimo percurso entre a variável  $X_i(s)$  e a variável  $X_j(s)$ .

$t$  = número total de percursos entre  $X_i(s)$   $X_j(s)$

$\Delta$ =determinante do diagrama

$\Delta_{ijk}$ =co-fator do percurso  $P_{ijk}$

O somatório é feito para todos os  $k$  percursos possíveis entre  $X_i(s)$  e  $X_j(s)$ . O co-fator  $\Delta_{ijk}$  é o determinante com todos os laços que tocam o percurso  $k$  removidos (Dorf 8ºed.). O determinante  $\Delta$  é:

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{\substack{m=1 \\ q=1}}^{M,Q} L_m L_q - \sum L_r L_s L_t + \dots ,$$

sendo  $L_q$  é igual ao valor da transmitância do q-éssimo laço. Portanto, a regra para calcular  $\Delta$  em termos dos laços  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_N$ , é (Dorf 8º ed.)

$\Delta=1$ -(soma de todos os ganhos de laços distintos)

+(soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de laços disjuntos 2 à 2)

-(soma dos produtos de ganhos de todos as combinações de laços disjuntos 3 à 3)

+...

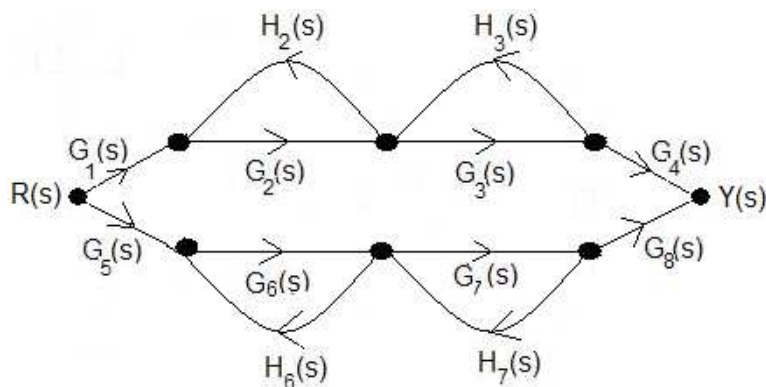
A função de transferência entre a entrada  $R(s)$  e a saída  $Y(s)$  é dada sob a forma um tanto simplificada:

$$T(s) = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

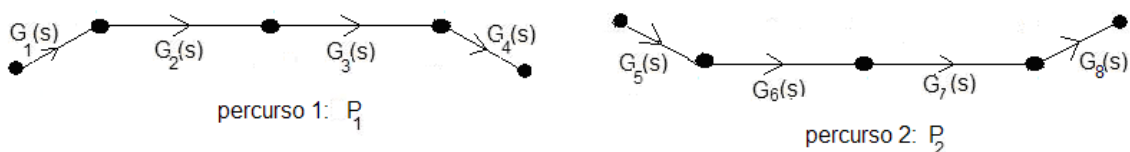
sendo  $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

Exemplo (Dorf 8ªed.):

Um diagrama do fluxo de sinal com dois percursos está mostrado a seguir. Um exemplo de sistema de controle com múltiplos percursos de sinal é o de um robô com diversas pernas.

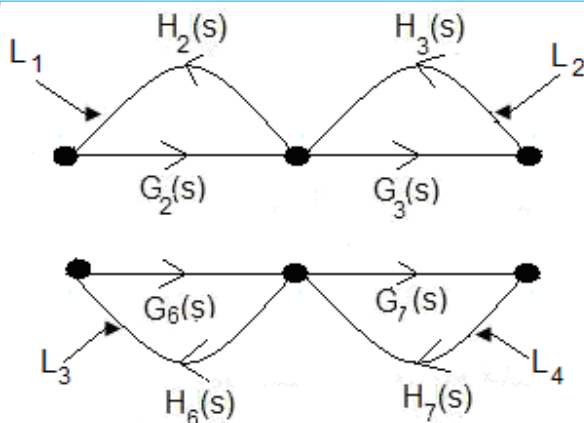


Os dois percursos conectando a entrada  $R(s)$  e a saída  $Y(s)$  são:



os ganhos são:  $P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$  e  $P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$ . (1)

Há quatro laços independentes (distintos):



os ganhos dos laços são:

$$L_1 = G_2 H_2, \quad L_2 = G_3 H_3, \quad L_3 = G_6 H_6 \text{ e } L_4 = G_7 H_7. \quad (2)$$

Os laços  $L_1$  e  $L_2$  não tocam  $L_3$  e  $L_4$ , logo o determinante é:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$$

pois não há combinações de laços disjuntos 3 a 3, ou maiores.

O co-fator do determinante ao longo do percurso 1 ( $P_1$ ) é calculado, a partir de  $\Delta$ , removendo-se os laços que tocam o percurso 1, assim

$$L_1 = L_2 = 0 \text{ e } \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

De modo semelhante, o co-fator para o percurso 2 é fazendo-se  $L_3 = L_4 = 0$  em  $\Delta$ , obtendo-se:

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

Portanto a função de transferência do sistema é

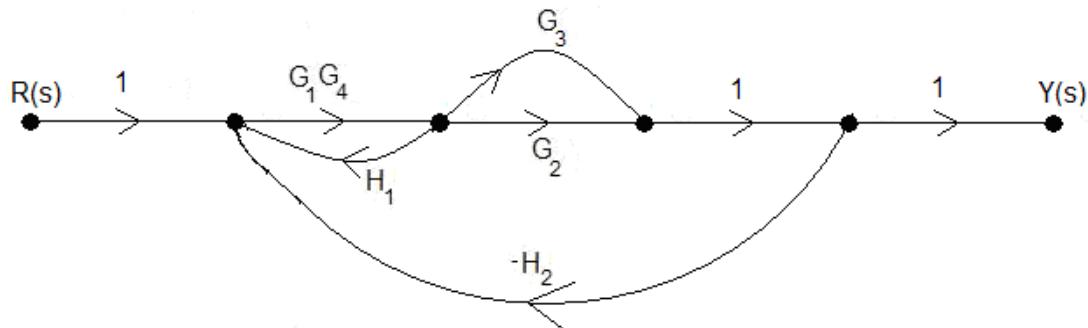
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{P_1 (1 - L_3 - L_4) + P_2 (1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4}$$

Substituindo-se (1) e (2) em (3):

$$T(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 [1 - (H_6 G_6 + H_7 G_7)] + G_5 G_6 G_7 G_8 [1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3)]}{1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_6 H_6 + G_7 H_7) + G_2 H_2 G_6 H_6 + G_2 H_2 G_7 H_7 + G_3 H_3 G_6 H_6 + G_3 H_3 G_7 H_7}$$

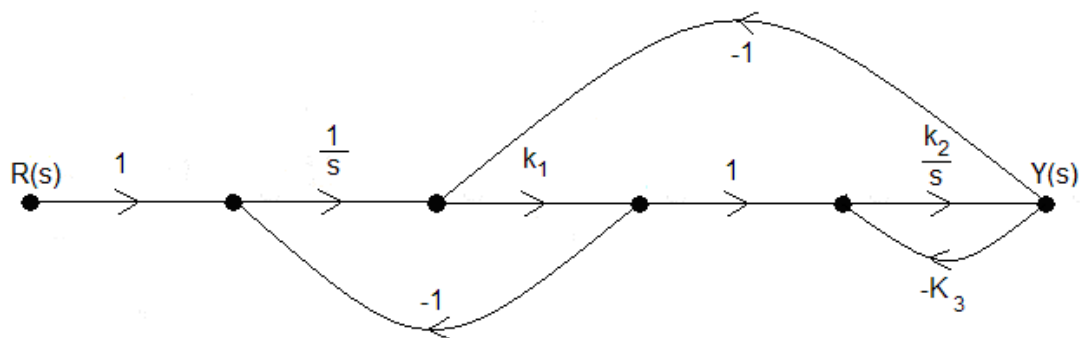
**Exercício:** Mostre que a função de transferência entre  $Y(s)$  e  $R(s)$  do diagrama abaixo é dada por:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 - G_1 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_4 H_2 + G_1 G_3 G_4 H_2}$$



Exercício: Determine a função de transferência de malha fechada  $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$  para o sistema

abaixo, sendo:  $k_1=3$ ;  $k_2=2$ ;  $k_3=5$ :



Exercício: Para o sistema em diagrama de blocos abaixo, encontre o diagrama de fluxo

equivalente e utilize a regra de Mason para determinar a F.T. entre Y(s) e R(s):  $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

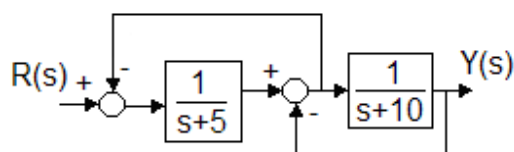


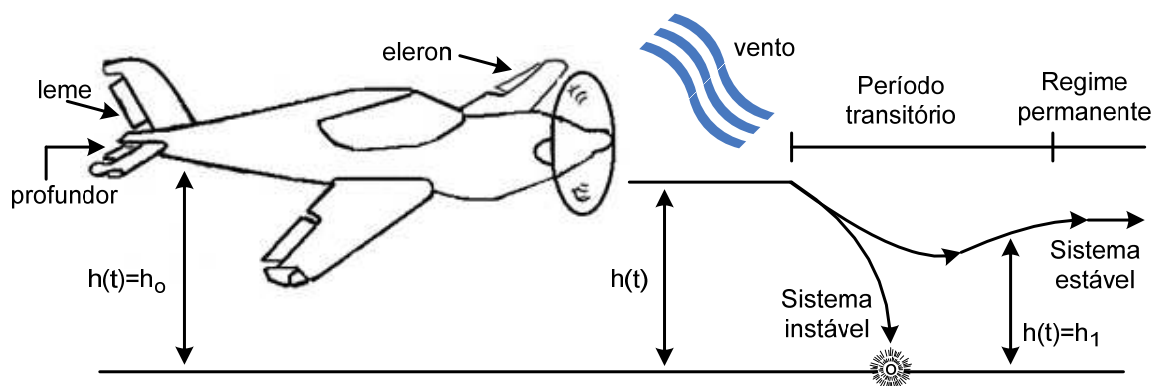
Diagrama de Blocos

Nota: um trabalho interessante desenvolvido pelo aluno Henrique F. Marchesi, elétrica, foi um programa em MATLAB que realiza a redução do diagrama de fluxo genericamente. No Apêndice F está uma cópia do artigo que foi publicada na revista americana IEEE Transaction on Education. O aluno trabalhou numa iniciação científica sob a orientação do Professor Marcelo. No mesmo apêndice tem uma versão em português.

## 7-Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

### 7.1-O Conceito de Estabilidade

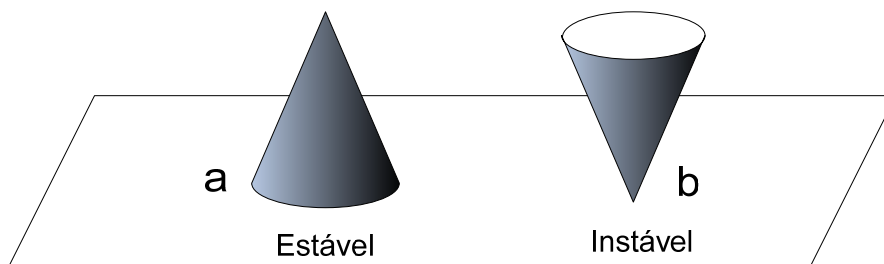
Um requisito fundamental de um sistema de controle é a sua estabilidade. Uma definição, sem rigor, de estabilidade é: um sistema é dito estável, se sua resposta a qualquer excitação "razoável", não sair do controle. Um exemplo de estabilidade é mostrado na figura abaixo.



sendo  $h(t)$  a altitude do avião ao longo do tempo.

Neste exemplo, o avião possui um sistema de controle automático de altitude. Este sistema é dito estável, se após ocorrer uma perturbação do vento, o avião continuar em uma altitude constante ( $h_1$ ). Se ele for instável, sua altitude diminuirá indeterminadamente, podendo colidir com a terra.

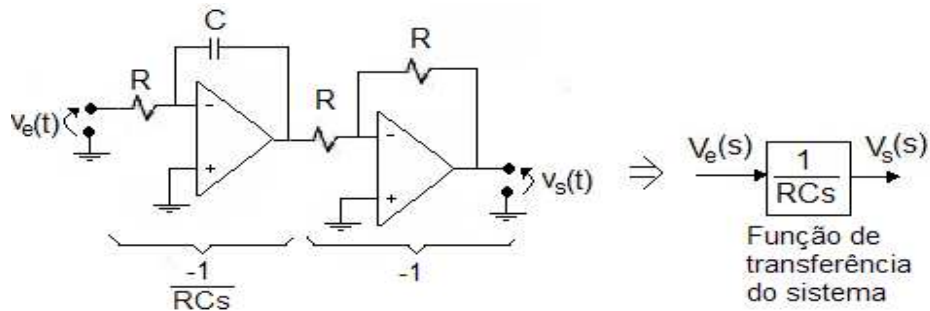
Um outro exemplo está mostrado abaixo.



Se movermos lentamente os cones, o cone "a" voltará à posição original e o cone "b" não vai retornar à posição original. Desta forma, o cone "a" está na posição estável e o cone "b" na posição instável.

A realimentação de sistemas é uma técnica que permite estabilizar sistemas instáveis, se utilizada corretamente. O exemplo abaixo ilustra a utilização da realimentação para estabilizar um sistema instável.

Exemplo: Considere o circuito abaixo com A.O.:



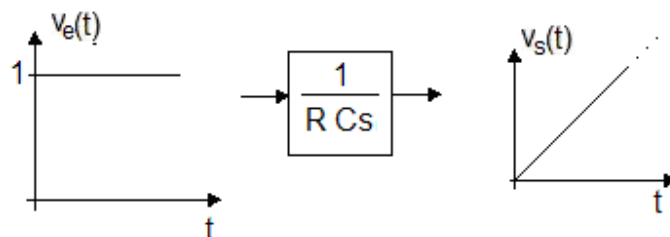
logo,  $V_s(s) = \frac{1}{RCs} \cdot V_e(s)$ .

Se  $v_e(t)$  for um degrau unitário, então:  $V_e(s) = \frac{1}{s}$  e  $V_s(s) = \frac{1}{RCs} \cdot \frac{1}{s}$ .

Para obter  $v_s(t)$  aplicando-se transformada inversa de Laplace :

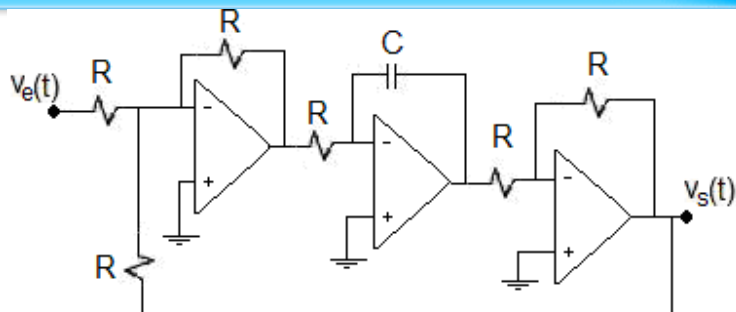
$$\mathcal{L}^{-1}\{V_s(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{RCs^2}\right\} = \frac{t}{RC}$$

Logo:

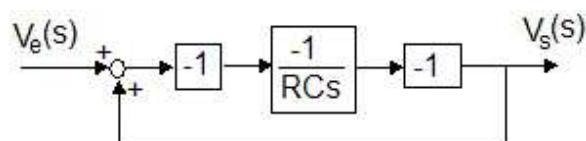


Então o sistema é instável pois a saída crescerá indeterminadamente. Mas o A.O. irá se saturar.

Realimentando, teremos:



O diagrama de blocos é:



Usando as regras de redução de diagramas de blocos temos:

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{-1}{1 + \frac{1}{RCs}} = \frac{-1}{RCs + 1}$$

Aplicando a mesma entrada degrau anterior temos:

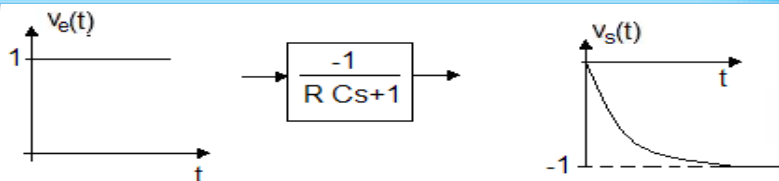
$$V_s(s) = \frac{-1}{RCs + 1} \cdot V_e(s) = \frac{-1}{RCs + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-1}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)s}$$

logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{V_s(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)s}\right\} \stackrel{\text{LINHA 14 Da TABELA}}{=} \\ &= \frac{-1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = -\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \end{aligned}$$

Logo:

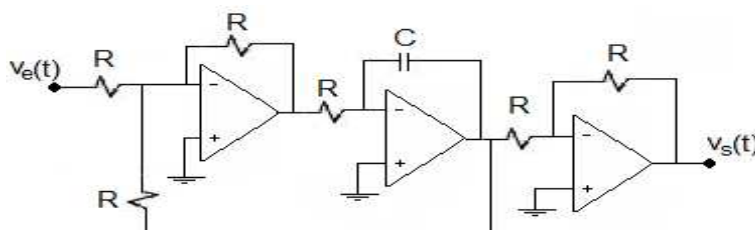




Conclusão 1: provavelmente este sistema é estável.

Conclusão 2: a realimentação pode estabilizar sistemas instáveis desde que seja feita convenientemente.

**Exercício:** Verifique se o sistema abaixo é estável ou instável.

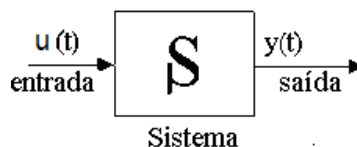


Note que este sistema é semelhante ao anterior, a única diferença é que a realimentação não foi feita pela saída do último A.O. e sim na saída do integrador.

Obs.: Como ainda não foi estabelecido um critério matemático para estabilidade de sistemas, nos exemplos anteriores aplicou-se um degrau e se a saída for crescente indeterminadamente (sempre), o sistema é dito instável.

Precisamos de um critério sistemático para determinar a estabilidade (ou instabilidade) de sistemas lineares.

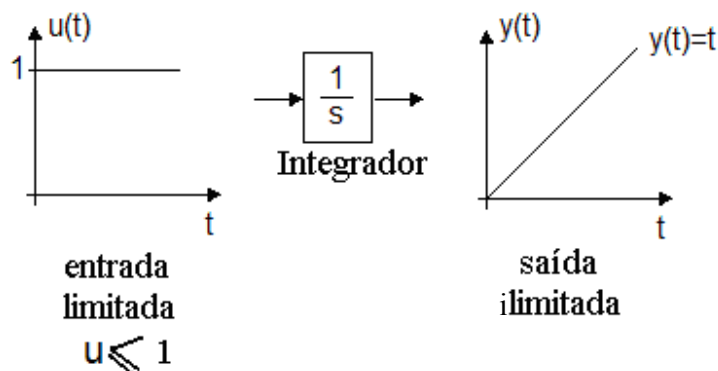
**Definição:** "Um sistema qualquer é estável se e somente se para qualquer entrada limitada a saída correspondente é limitada."



**Exemplo:** Considere o sistema tipo integrador (visto anteriormente) abaixo:



Para testar sua estabilidade, coloquemos uma entrada degrau, que é limitada, e verificaremos se a saída é limitada.

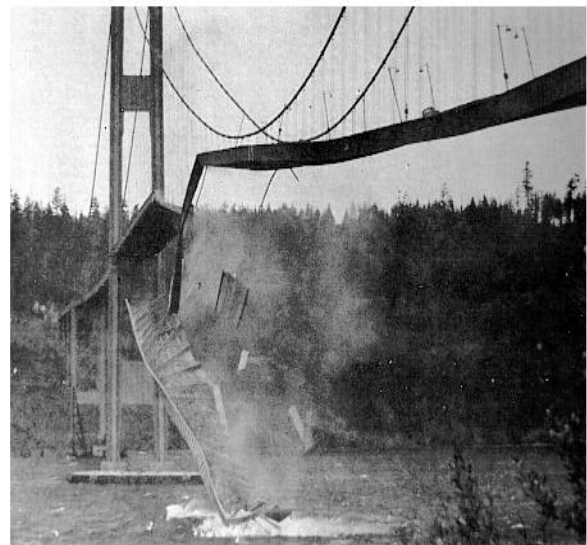


Como para uma entrada limitada, a saída foi ilimitada então esta sistema é instável.

Observações:

- 1 Este critério é chamado BIBO (Bounded Input, Bounded Output) e é válido para qualquer sistema linear ou não.
- 2 Para verificar se o sistema é estável, devemos aplicar todas as entradas limitadas e verificar se todas as saídas correspondentes são limitadas.

Um exemplo de sistema que aparentemente era estável para algumas entradas, e achava-se que era para todas as entradas limitadas é a ponte mostrada abaixo. Ela recebe um vento com tal intensidade que começou a oscilar e então se rompeu. Para esta entrada limitada a saída foi ilimitada (rompimento).



Ponte de Tacoma – No estado de Washington, no dia 7 de Novembro de 1940, a ponte suspensa sobre o estreito de Tacoma, apenas 4 meses depois de ter sido aberta ao tráfego, foi destruída durante um vendaval. A ponte apresentava um comprimento total de 1530 m, com um vão central de 850 m.

O critério de BIBO – estabilidade exige a análise da saída para todo tipo de entrada limitada. Para evitar este trabalho, pode-se utilizar o teorema dado a seguir.

Teorema: "Um SLIT é estável se e somente se o módulo da sua resposta ao impulso for integrável em um intervalo infinito", ou seja:

$$\int_0^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty$$

A seguir será demonstrada apenas a suficiência deste teorema.

Prova: se o sistema tem entrada  $u(t)$ , saída  $y(t)$ , e resposta impulsiva  $g(t)$ , então

$$y(t) = \int g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

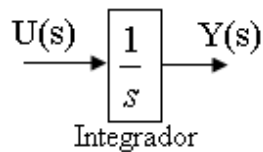
supondo que  $y(t)=0$  e  $u(t)=0$  para  $t<0$ .

Se  $u(t)$  é limitada, então existe uma constante  $M$  tal que  $|u| \leq M < +\infty$ , logo a saída será limitada por

$$|y| = \left| \int g(\tau)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int |g| \cdot |u| d\tau \leq \int |g| \cdot M \cdot d\tau = M \int |g| d\tau$$

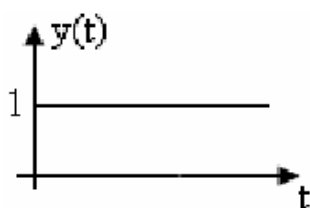
então, a saída será limitada se  $\int |g(t)| dt$  for limitada.

Exemplo: utilizando o teorema anterior, prove que o integrador é um sistema instável.



Sol.: Temos  $Y(s) = \frac{1}{s} U(s)$

Como  $U(s)$  é um impulso:  $U(s)=1$ , tem-se



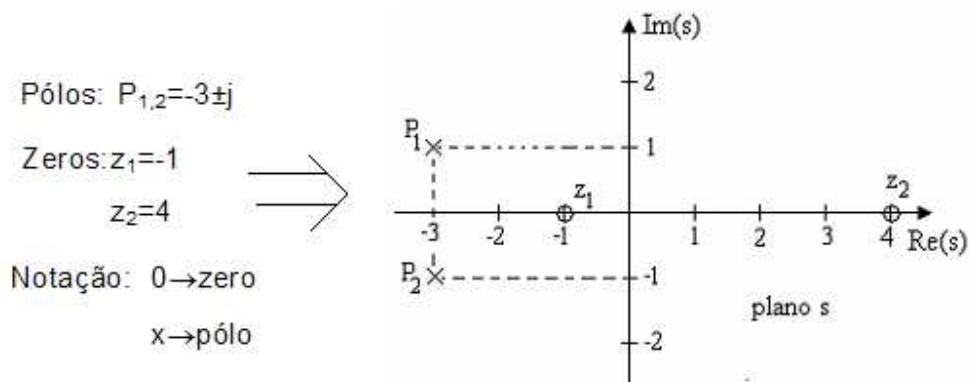
$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot 1 = \frac{1}{s} \quad \text{LINHA 2 DA TABELA} \Rightarrow y(t) = 1$$

Pelo teorema temos:  $\int_0^{+\infty} |y(t)| dt = \int_0^{+\infty} 1 dt = \int_0^{+\infty} 1 dt = t \Big|_0^{+\infty} = +\infty$

$\therefore$  o integrador é instável.

Este procedimento para determinar se um sistema é estável ou instável ainda é trabalhoso. O corolário mostrado a seguir simplifica em muito as coisas. Antes, vamos representar, os pólos e os zeros de uma função de transferência, no plano-s.

Exemplo:  $G(s) = \frac{(s+1)(s-4)}{(s+3+j)(s+3-j)}$



Corolário: “Um SLIT é estável se e somente se todos os pólos da função de transferência do sistema tiverem parte real negativa”.

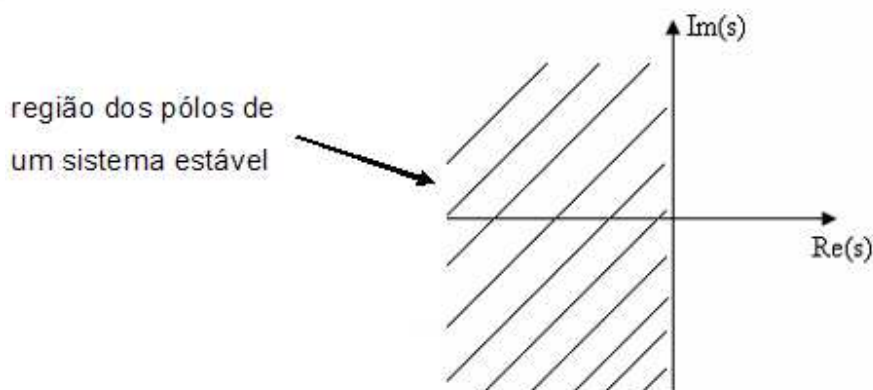
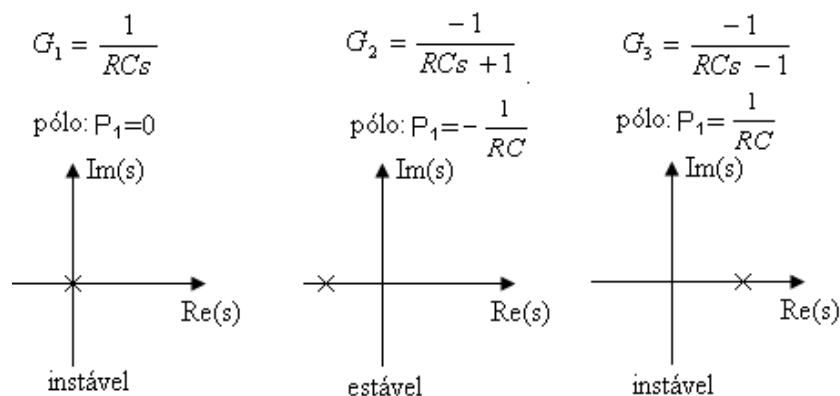


Ilustração: para ilustrar o corolário, consideremos o exemplo das páginas 87 à 89, sendo que a função de transferência do sistema sem realimentação (instável) é  $G_1(s) = \frac{1}{RCs}$  e do sistema com realimentação (estável) é  $G_2(s) = \frac{-1}{RCs+1}$ . No exercício da página 88, a função de transferência é  $G_3(s) = \frac{-1}{RCs-1}$  (e é instável). Os polos dessas funções de transferência estão colocados no plano-s:



Obs.: a resposta ao impulso de  $G_2(s)$  e  $G_3(s)$  são:

$$g_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{RCs+1}\right\} \stackrel{\text{LINHA 6 DA TABELA}}{=} -\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

que é limitada:  $\int_0^{+\infty} |g_2(t)| dt < M$ .

$$g_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_3(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{RCs-1}\right\} \stackrel{\text{LINHA 6 DA TABELA}}{=} -\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}$$

que tende a  $-\infty$  quando  $t$  tende a  $+\infty$ , portanto ilimitada. Note que  $g_2(t) = -\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$  sendo  $-\frac{1}{RC}$

o pólo de  $G_2(s)$ , e  $g_3 = -\frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}$  sendo  $\frac{1}{RC}$  o pólo de  $G_3(s)$ . Então, para um sistema que tenha pólos reais, o coeficiente da exponencial está diretamente ligado ao valor do pólo, se pólo  $< 0 \Rightarrow$  exponencialmente limitada, sistema estável ainda, se pólo  $> 0 \Rightarrow$  exponencial ilimitada (sistema instável).

Exemplo: Determine se o sistema abaixo é estável ou instável.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1,6s + 1}$$

Sol.: Os pólos são obtidos através de:  $s^2 + 1,6s + 1 = 0$

logo:  $\Delta = 1,6^2 - 4 = -1,44$

$$P_{1,2} = \frac{-1,6 \pm \sqrt{-1,44}}{2} \Rightarrow P_{1,2} = -0,8 \pm j0,6$$

Temos

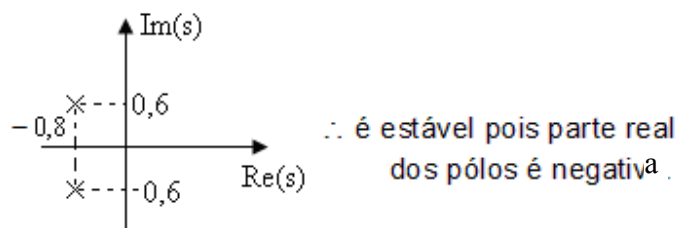


Ilustração: Vamos verificar a resposta impulsiva de  $G(s)$ :

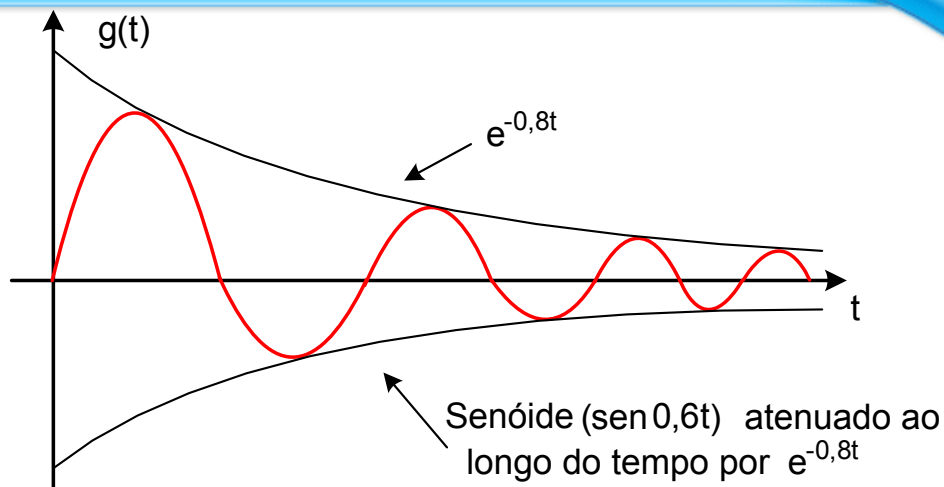
$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{\sqrt{1-0,8^2}} \cdot e^{-0,8t} \cdot \text{sen} \cdot \left[ (1 \cdot \sqrt{1-0,8^2}) \cdot t \right]$$

linha 22 da tabela com  $\omega_n = 1$  e  $\xi = 0,8$

então,

$$g(t) = \frac{1}{0,6} \cdot e^{-0,8t} \cdot \text{sen}(0,6t)$$

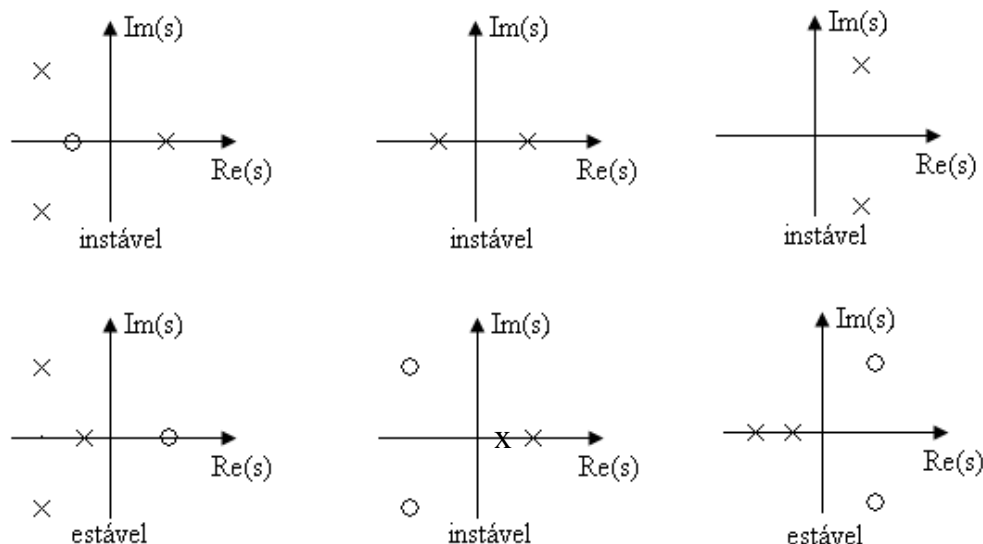
logo:



Como  $g(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , temos que a integral de  $|g(t)|$  é limitada, ou seja,  
 $\int_0^{+\infty} |y(t)| dt < \infty \Rightarrow$  sistema estável.

Deste gráfico, percebe-se que a parte real dos pólos  $(-0,8)$  proporciona o conteúdo exponencial ( $e^{-0,8t}$ ) da resposta e portanto é a parte real dos pólos é quem faz a resposta  $g(t)$  decrescer.

Exemplos:



**Obs.:** Esse estudo abordou apenas pólos reais e complexos conjugados, sem multiplicidade de pólos. Por motivos de simplicidade, os casos de pólos múltiplos foram omitidos neste texto.



O problema deste estudo é determinar as raízes de polinômio de ordem maior que 2. Um critério simples e prático para estudo de estabilidade de Routh (Routh-Hurwitz).

## 7.2-O critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

A. Hurwitz e E.J. Routh publicaram independentemente um método de investigar a estabilidade de um sistema linear (vide Ogata).

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz verifica se todos os pólos de uma função de transferência pertence ao semi-plano esquerdo do plano-s.

Suponha que a função de transferência é da forma:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}, \quad a_0 \neq 0$$

1º passo: identifique apenas o denominador de G(s):

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (1)$$

2º passo: verifique se qualquer destas constantes ( $a_i$ ) é igual a zero ou, negativa na presença de pelo menos uma constante positiva. Se isto ocorrer, conclua que o sistema é instável e não é necessário executar os próximos passos. Do contrário, nada pode-se concluir, vá para o 3º passo.

3º passo: construa a seguinte tabela:

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$
$\vdots$				
$s^1$	$l_1$	$l_2$	0	
$s^0$	$q_1$	0	0	

↑  
1º coluna

Os elementos  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são os coeficientes do denominador D(s) da equação (1).





Os elementos  $b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, \dots$  e todos os demais são calculados com as seguintes expressões:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

4º passo: aplique o seguinte critério de estabilidade de Routh-Hurwitz:

“O número de raízes de  $D(s)$  (pólos de  $G(s)$ ) com parte real maior que zero (positivo) é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna da tabela construída no 3º passo.”

Obs.: se pelo menos um elemento da 1ª. coluna for nulo ou se uma linha toda for nula, deve-se observar o caso especial que mostraremos mais adiante.

Exemplo: Seja  $G(s) = \frac{2s+1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}$  estude sua estabilidade.

Sol.:

1º passo:  $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$

2º passo: todos coeficientes de  $D(s)$  são positivos portanto nada pode-se concluir.

3º passo:

$$\begin{array}{rcl}
 s^4 & 1 & 3 \quad 5 \\
 s^3 & 2 & 4 \quad 0 \\
 s^2 & \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{2} = 1 & \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{2} = 5 \quad 0 \\
 s^1 & \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{1} = -6 & 0 \\
 s^0 & \frac{-6 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{-6} = 5 & 
 \end{array}$$

Neste caso, os elementos da 1ª coluna são:

	1ª Coluna	
$s^4$	1	Perceba que ocorreram duas mudanças de sinais, um de 1 para -6 é outra de -6 para 5, logo este sistema tem dois pólos do lado direito do plano-s, então o sistema é instável.
$s^3$	2	
$s^2$	1	
$s^1$	-6	
$s^0$	5	

Exemplo: Determine se o sistema é estável ou instável:

$$G(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3 + 3s^2 - s + 5}$$

Sol.: 1º passo:  $D(s) = s^3 + 3s^2 - s + 5$

2º passo: existe um coeficiente negativo na presença de outro positivo, logo o sistema é instável e não precisa ir ao passo seguinte

Exercício: O piloto automático de um avião tem a seguinte F.T.M.F.:

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{150s^3 + 900s^2 + 165s + 900}{s^5 + 15s^4 + 240,5s^3 + 1303,6s^2 + 1667,4s + 924}$$

verifique se o sistema é estável ou instável.

O cálculo dos pólos de um sistema (raízes de um polinômio) são fáceis para os usuários do MATLAB ou das calculadoras científicas atuais. Por exemplo, os pólos do exemplo acima

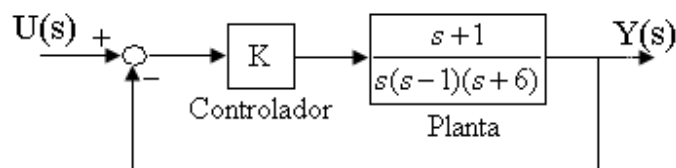
são calculados pelo MATLAB com o comando:

```
>>den=[1 3 -1 5];
```

```
>>roots(den)
```

Aparentemente o método de Routh-Hurwitz seria desnecessário, porém ele é extramente útil para projetar controladores, o exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo: Determine o intervalo de k, ganho do controlador, para o qual o sistema realimentado seja estável.



sol.: A F.T.M.F. é dada por:

$$H(s) = \frac{k \frac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)}}{1 + k \frac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)}} = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s+6) + k(s+1)}$$

Note que não é possível obter os pólos de H(s) usando a calculadora. Usemos o método de Routh-Hurwitz:

1º passo:  $D(s) = s^3 + 5s^2 + (k-6)s + k$

2º passo: Para que todos os coeficientes sejam positivos:

$$k-6 > 0 \Rightarrow k > 6$$

e

$$k > 0$$

$\therefore k > 6$  satisfaz (I)

3º passo:

$s^3$	1	$k-6$
$s^2$	5	$k$
$s^1$	$\frac{5(k-6)-1k}{5}$	0
$s^0$	$K$	

Para que elementos da 1ª. coluna sejam todos positivos, é necessário que:

$$\frac{5(k-6)-k}{5} > 0 \Rightarrow 5k - 30 - k > 0 \Rightarrow 4k - 30 > 0 \Rightarrow k > \frac{30}{4} \Rightarrow k > 7,5 \quad (II)$$

e

$$k > 0 \quad (III)$$

Logo, para  $k > 7,5$  o sistema será estável.

Como já foi dito, se tiver um zero (0) na primeira coluna de tabela ou se uma linha for nula, então deve-se usar o caso especial abaixo.

#### CASO ESPECIAL

Se o primeiro elemento de uma linha é zero, e pelo menos um elemento na mesma linha é diferente de zero, então substituiu-se o primeiro elemento de linha, que é zero, por um pequeno número  $\Delta$ , que poderá ser negativo ou positivo, e continua-se o cálculo das próximas linhas da tabela. O exemplo abaixo ilustra este caso.

Exemplo: Estude a estabilidade de

$$G(s) = \frac{5}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10}$$

1º passo:  $D(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$

2º passo: todos os coeficientes são positivos, nada pode-se concluir.

3º passo: construção da tabela:

$s^5$	1	2	11
$s^4$	2	4	10
$s^3$	$\frac{2 \times 2 - 1 \times 4}{2} = 0$	$\frac{2 \times 11 - 1 \times 10}{2} = 6$	0

$s^2$

$s^1$

$s^0$

neste caso aparece um 0 na 1ª coluna e outros elementos desta linha são diferentes de 0. Mostre que não é possível calcular os elementos da linha  $s^2$  pois seria necessário dividir por 0. Substitua o 0 por  $\Delta$  e continue:

$s^5$	1	2	11
$s^4$	2	4	10
$s^3$	$\Delta$	6	0
$s^2$	$\frac{\Delta \times 4 - 2 \times 6}{\Delta}$	10	0

$s^1$

$s^0$

para  $\Delta$  pequeno,  $\Delta \approx 0$ , tem-se a seguinte tabela:

$s^5$	1	2	11
$s^4$	2	4	10
$s^3$	$\Delta$	6	0
$s^2$	$-\frac{12}{\Delta}$	10	

$s^1$

$s^0$

$$\frac{-\frac{12}{\Delta}6 - 10\Delta}{-\frac{12}{\Delta}}$$

se  $\Delta = 0$  temos 6

$s^5$	1	2	11
$s^4$	2	4	10
$s^3$	$\Delta$	6	0
$s^2$	$-\frac{12}{\Delta}$	10	
$s^1$	6		
$s^0$	10		

Se  $\Delta \rightarrow 0$  pela esquerda, ou seja  $\Delta < 0$ , temos 2 trocas de sinais na primeira coluna.

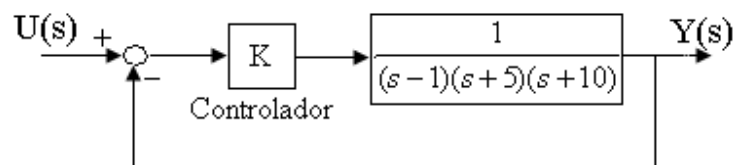
Se  $\Delta \rightarrow 0$  pela direita, ou seja  $\Delta > 0$ , temos também 2 trocas de sinais na primeira coluna.

Assim, o sistema é instável.

Exercício: Estude a estabilidade de:

$$G(s) = \frac{7}{s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9}$$

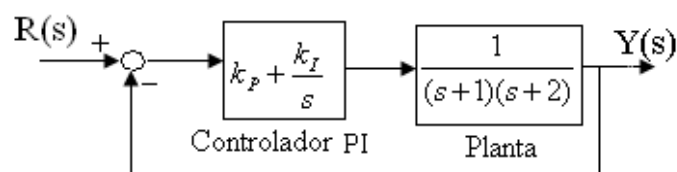
Exercício: Encontre a faixa de k tal que o sistema abaixo seja estável:



#### Estabilidade de sistema com projeto de controlador dependente de dois parâmetros

Um controlador industrial muito utilizado é o controlador P.I. (proporcional e integral). Neste caso a estabilidade fica dependente de dois parâmetros. Um exemplo de projeto ilustra o uso do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz para este caso, e está mostrado a seguir.

Exemplo: Para o sistema controlado por um controlador P.I. dado abaixo, encontre as faixas de  $k_p$  e  $k_i$  do controlador tal que o sistema abaixo seja estável:



Sol.: A F.T.M.F. é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{sk_p + k_I}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{(sk_p + k_I)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)}} = \frac{sk_p + k_I}{s(s+1)(s+2) + sk_p + k_I}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{sk_p + k_I}{s^3 + 3s^2 + (2+k_p)s + k_I}$$

1º passo:  $D(s) = s^3 + 3s^2 + (2+k_p)s + k_i$

2º passo: para estabilidade é necessário que:

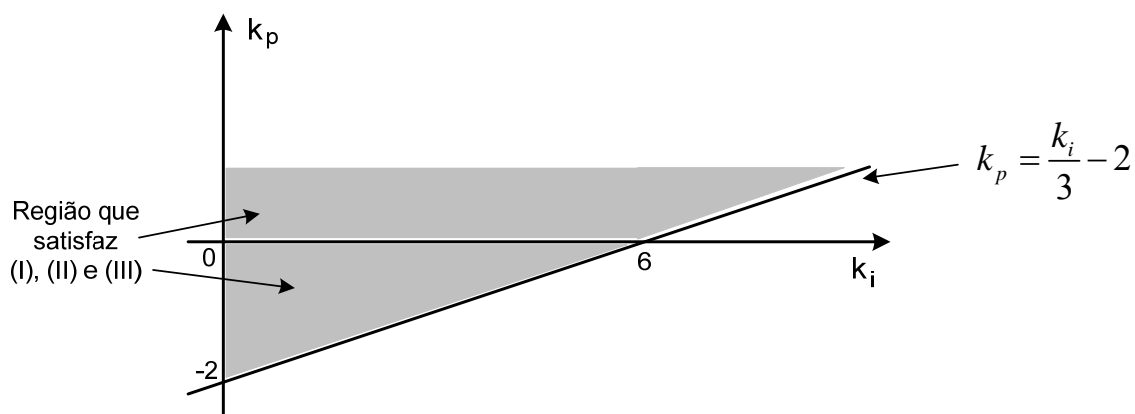
$$K_i > 0$$

$$\text{e } 2+k_p > 0 \Rightarrow k_p > -2 \quad (I)$$

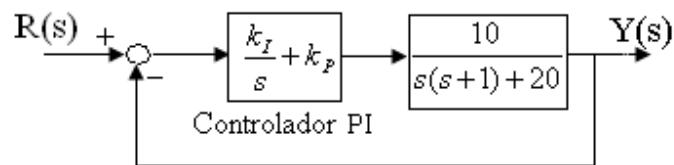
3º passo:

$s^3$	1	$2+k_p$	$\longrightarrow$	1ª coluna: $3(2+k_p) - k_i > 0$
$s^2$	3	$k_i$		
$s^1$	$\frac{3(2+k_p) - k_i}{3}$	0	$\longrightarrow$	$k_p > \frac{k_i}{3} - 2 \quad (II)$
$s^0$	$k_i$			$\text{e } k_i > 0 \quad (III)$

De (I), (II) e (III) tem-se a região:



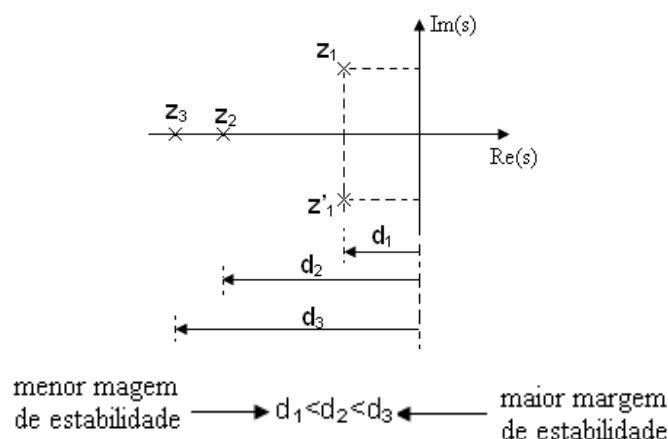
Exercício: Encontre a faixa de  $k_p$  e  $k_i$  do controlador abaixo tal que o sistema seja estável.



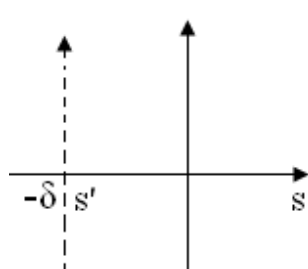
### 7.3-Estabilidade Relativa

A estabilidade estudada até agora neste curso é conhecida como estabilidade absoluta pois tem-se como referência o lado esquerdo do plano-s. Um outro conceito é o conceito de estabilidade relativa.

Pode-se determinar a margem de segurança que um sistema apresenta no tocante à sua estabilidade. Por exemplo, no plano-s abaixo, pode-se dizer que os pólos  $z_1$  e  $z_1'$  tem menor margem de estabilidade que os pólos  $z_2$  e  $z_3$ :



Pode-se usar o critério de Routh para estudar a margem de estabilidade relativa de um sistema, neste caso é necessário usar uma translação de eixo imaginário.



Os eixos acima são relacionados através da seguinte equação de translação de eixos:

$$s' = s + \delta$$

ou ainda

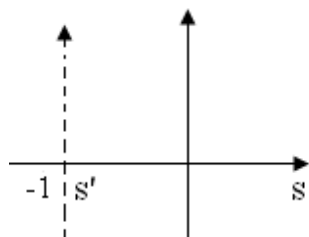
$$s = s' - \delta$$

Exemplo: Verifique se o sistema abaixo tem todos os pólos à esquerda de  $s = -1$ :

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$



Sol.: Neste caso, deve-se realizar a translação de eixos abaixo:



logo,  $s=s'-1$  em  $G(s)$ :

A translação do eixo imaginário é feita substituindo

$s=s'-1$  em  $G(s)$ :

$$G(s') = \frac{1}{(s'-1)^3 + 9(s'-1)^2 + 26(s'-1) + 24}$$

então,

$$G(s') = \frac{1}{(s'-1)(s'^2 - 2s' + 1) + 9(s'^2 - 2s' + 1) + 26s' - 26 + 24}$$

$$G(s') = \frac{1}{s'^3 + 6s'^2 + 11s' + 6}$$

logo,

$s'^3$	1	11
$s'^2$	6	6
$s'^1$	$\frac{66-6}{6} = \frac{60}{6} = 10$	0
$s'^0$	6	

$\therefore$  este sistema é estável, sua estabilidade relativa engloba o eixo  $s=-1$ . Portanto sua margem de estabilidade é  $>1$ .

Obs.: Para determinar a margem de estabilidade (total) de um sistema é necessário ir transladando o eixo  $s$  (imaginário) até o surgimento de um zero na 1ª coluna da tabela de Routh-Hurwitz, indicando que existe pólo sobre o eixo imaginário  $s'$ . Este trabalho pode ser evitado, utilizando-se as calculadoras científicas para obter todos os pólos do sistema (ou o MATLAB), a margem de estabilidade será igual ao módulo da parte real do pólo mais próximo ao eixo imaginário, supondo-se que todos os pólos são de sistema estável.

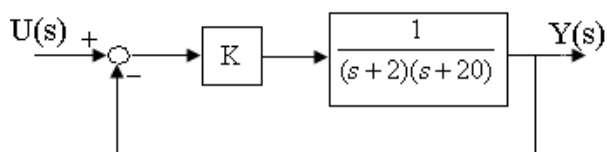
Exercício: Use o MATLAB ou a calculadora para determinar a margem de estabilidade do

sistema :  $G(s) = \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}$

Exercício: Verifique, usando o critério de Routh-Hurwitz se o sistema abaixo tem todos seus pólos à esquerda de  $s=-2$ .

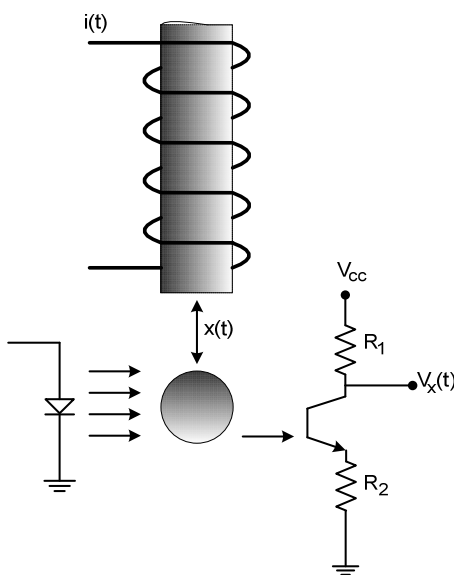
$$G(s) = \frac{s + 0,1}{s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s + 4}$$

Exercício: Projete  $k$  tal que o sistema abaixo tenha margem de estabilidade maior que 4.

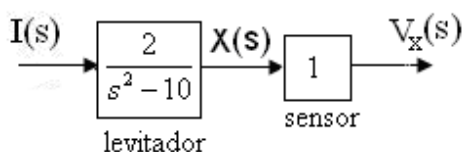


#### 7.4-Exemplos Completos de Projeto

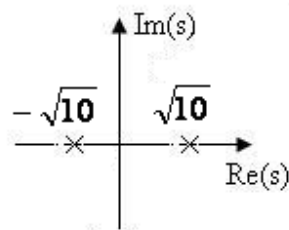
Exemplo: Dado o levitador magnético abaixo



O diagrama de blocos é:



Os pólos de  $G(s)$  são:  $s^2 - 10 \Rightarrow P_{1,2} = \pm \sqrt{10}$ , logo



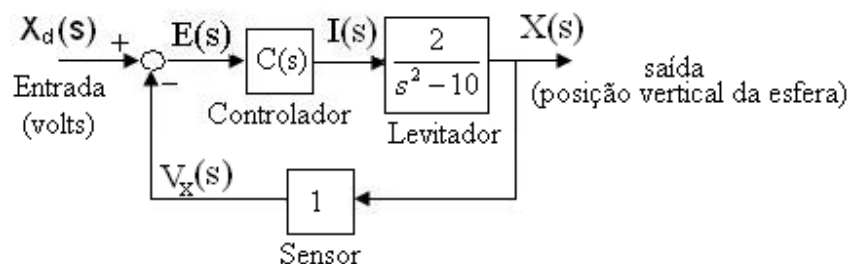
portanto o sistema é instável.

i) Verifique se é possível estabilizar o levitador usando realimentação com um dos controladores abaixo:

a)  $C(s)=k$  (proporcional)

b)  $C(s) = \frac{k(s+1)}{(s+2)}$

o sistema realimentado tem a forma abaixo:



ii) Projete o circuito com A.O. que implemente o controlador  $C(s)$  obtido no item i).

Sol.:

i → A F.T.M.F. é:

$$H(s) = \frac{2k}{s^2 - 10} = \frac{2k}{s^2 - 10 + 2k}$$

1º passo:  $D(s) = s^2 - 10 + 2k$

2º passo: Um dos coeficientes do polinômio é igual a zero, ou seja 0.s, portanto o sistema é instável pois  $k$  não modifica o valor deste coeficiente.

∴ não é possível estabilizar o levitador com um controlador do tipo  $C(s)=k$ .

b) Sendo  $C(s) = \frac{k(s+1)}{(s+2)}$  tem-se a F.T.M.F.:

$$H(s) = \frac{\frac{k(s+1)}{(s+2)} \cdot \frac{2}{(s^2-10)}}{1 + \frac{k(s+1)}{(s+2)} \cdot \frac{2}{(s^2-10)}} = \frac{2ks + 2k}{(s+2)(s^2-10) + 2ks + 2k}$$

$$\therefore H(s) = \frac{2ks + 2k}{s^3 + 2s^2 + (2k-10)s + 2k - 20}$$

1º passo:  $D(s) = s^3 + 2s^2 + (2k-10)s + 2k - 20$

2º passo: é necessário que

$$2k - 10 > 0 \Rightarrow k > 5$$

e

$$2k - 20 > 0 \Rightarrow k > 10$$

$$\therefore K > 10 \quad (I)$$

3º passo:

$s^3$	1	(2k-10)
$s^2$	2	(2k-20)
$s^1$	$\frac{2(2k-10) - (2k-20)}{2}$	0
$s^0$	2k-20	

é necessário que

$$\frac{2(2k-10) - (2k-20)}{2} > 0 \Rightarrow k > 0 \quad (II)$$

e

$$2k - 20 > 0 \Rightarrow K > 10 \quad (III)$$

De (I), (II) e (III), este controlador estabiliza o levitador com  $k > 10$ . Pode-se escolher  $k=20$ , logo

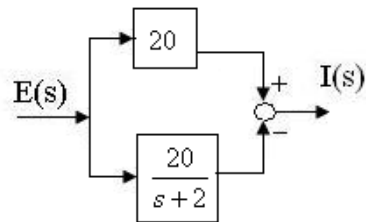
$$C(s) = \frac{20(s+1)}{(s+2)}$$

ii) Para implementar o controlador façamos:

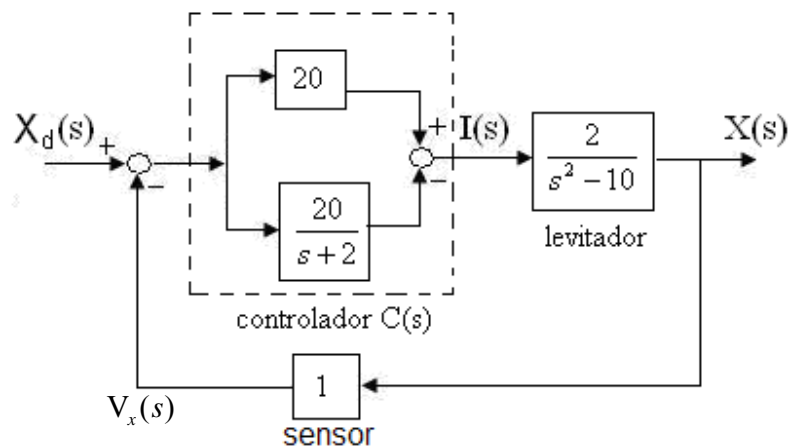
$$\begin{array}{r|l} 20s + 20 & s+2 \\ \hline 20s + 40 & 20 \\ \hline 0 & -20 \end{array}$$

$$C(s) = \frac{20(s+1)}{(s+2)} \Rightarrow$$

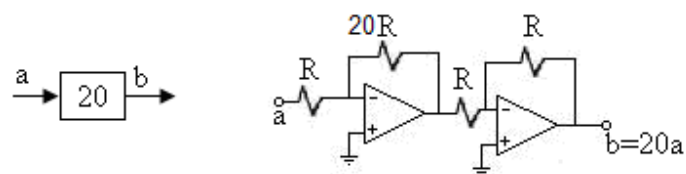
logo,  $C(s) = 20 - \frac{20}{s+2}$ , que equivale a :

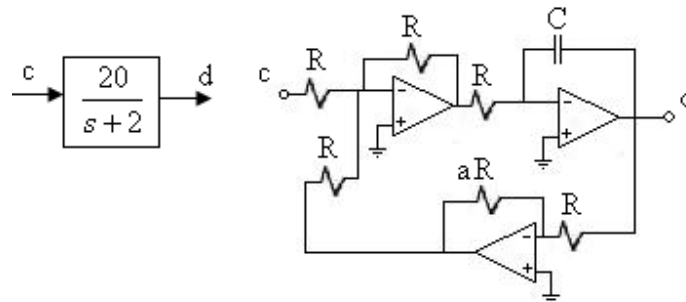


O diagrama completo fica



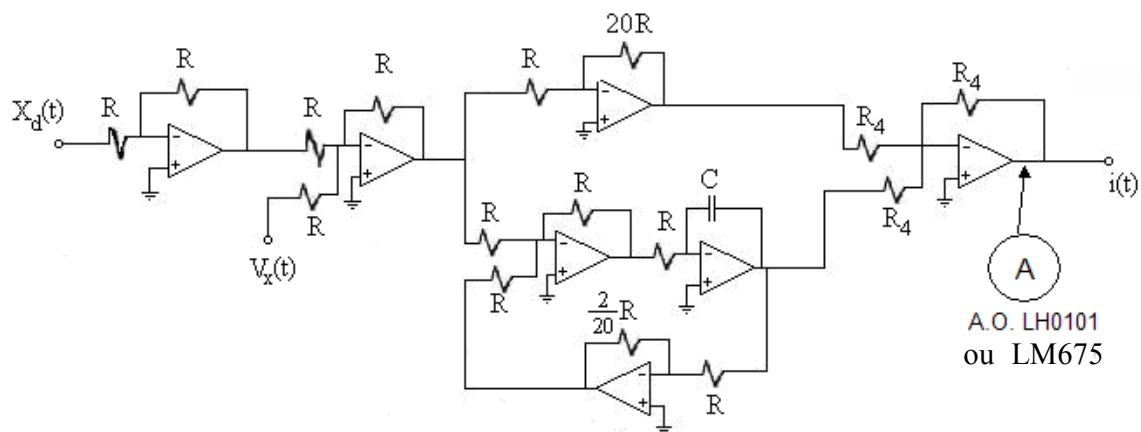
O circuito do controlador é implementado utilizando A.O:





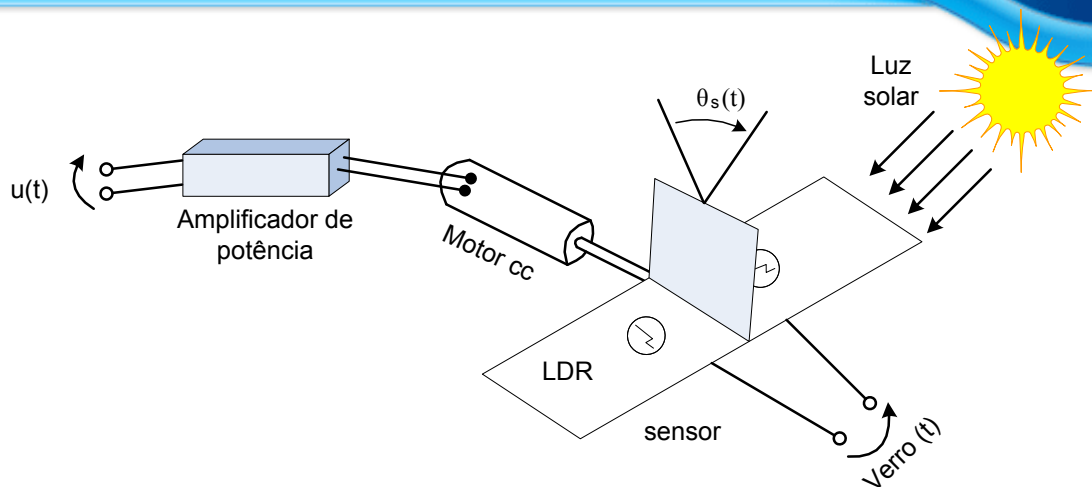
escolhe-se:  $RC = \frac{1}{20}$  e  $a = \frac{2}{20}$

Finalmente:

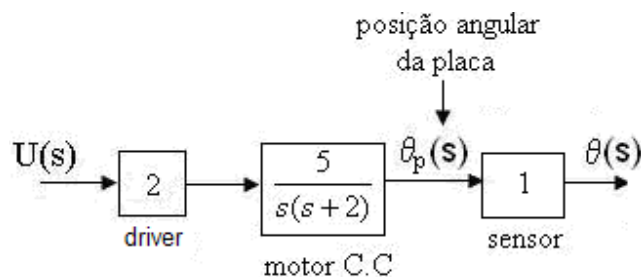


Os sinais  $x_d(t)$ ,  $v_x(t)$  e  $i(t)$  serão conectados com o levitador mostrado na figura das páginas anteriores. Como a corrente de saída do A.O é pequena, o sinal  $i(t)$  de saída do controlador deverá ter um amplificador de corrente antes de ser conectado na bobina. Outra alternativa é usar o A.O. sendo amplificador LH0101 em (A) da figura acima. Ele é de 60w, com pico de corrente de saída de 5A,  $V_{cc} = \pm 15v$  e necessita de dissipador de calor. Pode utilizar também o A.O. de potência LM 675.

Exercício: Considere o rastreador solar mostrado abaixo:

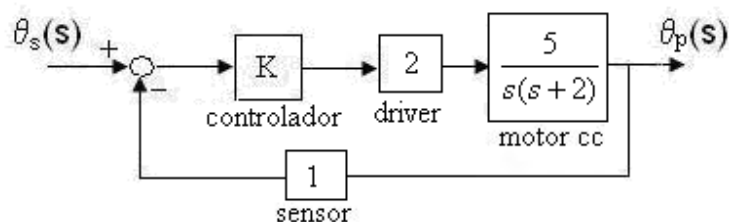


Este sistema possui o seguinte diagrama de blocos:

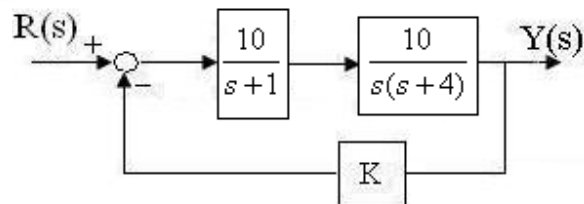


Note que este sistema é instável pois  $P_1=0$  e  $P_2=-2$ .

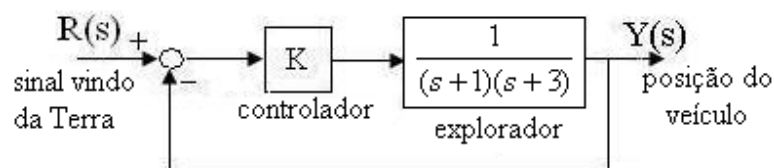
Realmente o sistema conforme o diagrama abaixo e determine a faixa de  $k$  para que o sistema seja estável. Projete o circuito do controlador usando A.O.



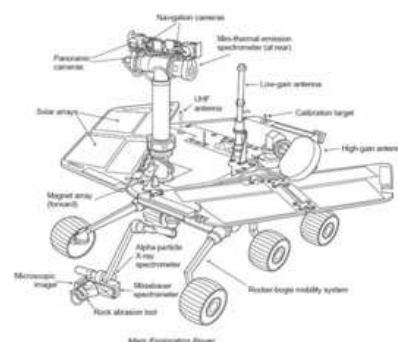
Exercício: No sistema abaixo, qual a faixa de  $k$  que resulta em estabilidade?



Exemplo: O veículo explorador de Marte, Sojourner, 1997, alimentado com energia solar está mostrado na figura, vide Dorf 8ª. edição. O veículo pode ser controlado da Terra enviando-lhe comandos  $r(t)$ . O diagrama de blocos do sistema é (vide Dorf):



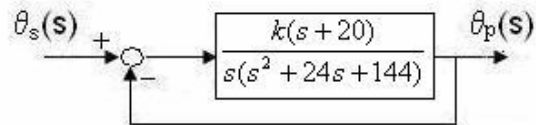
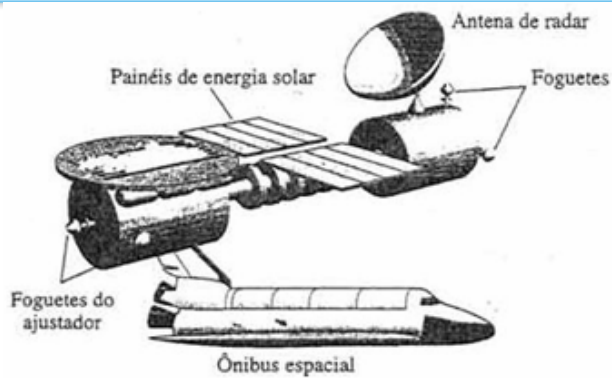
Encontre a faixa de  $k$  tal que o sistema seja estável. Este diagrama de blocos não inclui a presença de ruídos.



Veículo explorador de marte (ROVER).

Exercício: Um projeto de uma estação espacial orbital está mostrado na figura abaixo. É crítico o problema de manter a estação com uma orientação aproximada na direção do sol e da Terra para gerar energia e comunicações. O diagrama de blocos do sistema de controle é dado abaixo:





Determine a faixa de  $k$  tal que o sistema seja estável.

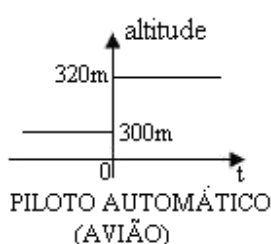
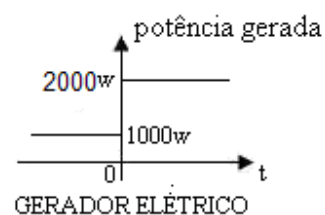
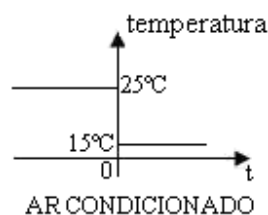
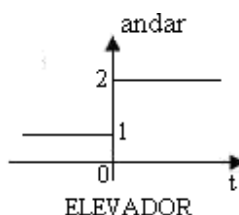
Nota: No Apêndice F encontra-se um artigo de Edvaldo e Marcelo sobre estabilidade de um micro motor levitador.

## 8-Resposta Transitória de Sistemas de 1ª e 2ª ordem

### 8.1-Introdução

As indústrias modernas estão exigindo, cada vez mais, sistemas de controle automático com alto desempenho. Por exemplo, no caso de robôs utilizados para soldagem em uma fábrica de automóveis, o processo da fabricação exige que o robô solde vários pontos em um certo período de tempo relativamente curto, especificado previamente. Para solucionar estes problemas de controle automático foram adotados alguns índices de desempenho, que permitem a especificação do comportamento desejado do sistema controlado, para a elaboração de um projeto. Neste capítulo, apresentaremos alguns índices de resposta transitória de sistemas dinâmicos em função de parâmetros de sua função de transferência.

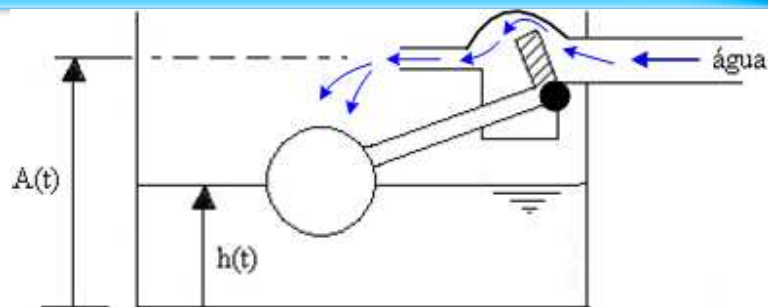
Os índices de desempenho dos sistemas de controle são estudados em função da resposta transitória do sistema devido a uma entrada degrau. Exemplos de entrada degrau:



### 8.2-Resposta Transitória de Sistema de 1ª ordem (devido a entrada degrau)

#### 8.2.1-Exemplo

Um exemplo de sistema de 1ª ordem é um tanque d'água controlado por uma bóia:



A taxa de variação de altura é proporcional a  $A(t) - h(t)$

$$\frac{d}{dt}h(t) = k[A(t) - h(t)]$$

Neste caso,  $A(t)$  é a entrada e  $h(t)$  é a saída, a função de transferência será:

$$sH(s) = kA(s) - kH(s), \text{C.I. nulas (sem água)}$$

logo:

$$\frac{H(s)}{A(s)} = \frac{k}{s + k}$$

Que é um sistema de 1ª ordem, pois o polinômio do denominador é de primeira ordem (tem apenas 1 pólo).

Como a base da bóia é constante,  $A(t)$  é constante, logo,

$$A(s) = \frac{A}{s}$$

temos:

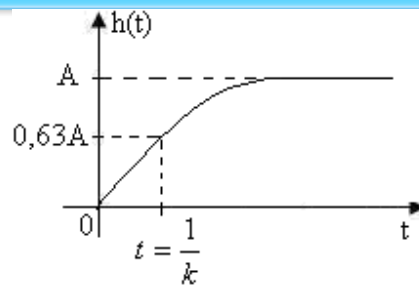
$$H(s) = \frac{k}{s + k} \cdot \frac{A}{s}$$

Assim, a resposta do sistema a essa entrada é obtida usando-se a transformada inversa de Laplace:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{(s + k)} \cdot \frac{A}{s}\right\}$$

$$h(t) = A(1 - e^{-kt})$$

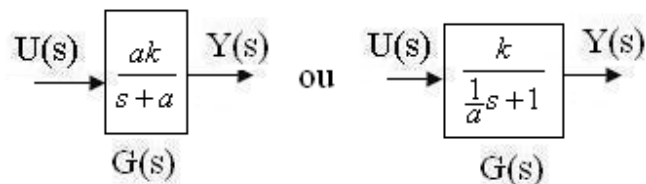
Logo,



Segundo o gráfico, se desejarmos que o reservatório se encha mais rapidamente, devemos aumentar o valor  $k$ . Note que o pólo deste sistema é:  $(s+k)=0 \Rightarrow s_1=-k$ , logo para variar a velocidade de enchimento varia-se o valor do pólo de sistema.

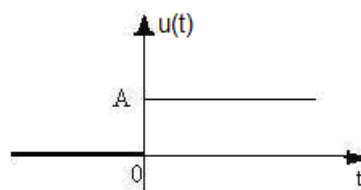
### 8.2.2-Caso Genérico

O sistema de 1ª ordem pode ser representado pelo sistema genérico abaixo:



Suponha que este sistema seja estável, ou seja,  $a>0$  pois pólo= $-a<0$ .

Suponha que  $u(t)=A$ ,  $t \geq 0$  ou seja uma entrada degrau:



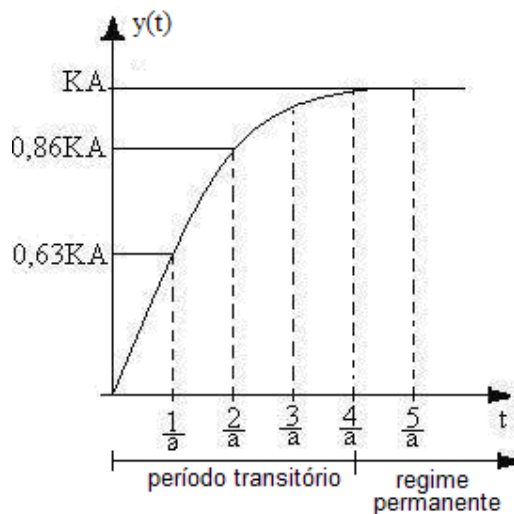
logo,  $U(s) = \frac{A}{s}$

Temos,  $Y(s) = G(s) \cdot U(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{ak}{(s+a)} \cdot \frac{A}{s}$

sabe-se que (veja tabela pg 30, linha 4):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = k.A(1 - e^{-at})$$

logo:



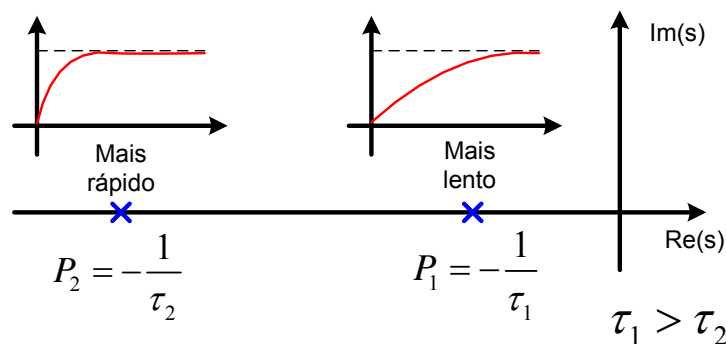
t	y(t)
$\frac{1}{a}$	0,63KA - 63% do regime
$\frac{2}{a}$	0,86 KA - 86% do regime
$\frac{3}{a}$	0,95KA - 95% do regime
$\frac{4}{a}$	0,98KA - 98% do regime
$\frac{5}{a}$	0,99KA - 99% do regime

Em termos práticos, considera-se  $t \geq \frac{4}{a}$ , o sistema já está em regime permanente.

O tempo  $t = \frac{1}{a}$  é chamado de constante de tempo do sistema, simbolizado por  $\tau$ :  $\tau = \frac{1}{a}$ .

Logo, para  $t = 4\tau$  é chamado de tempo de estabelecimento.

Note que o pólo de  $G(s)$  é  $P_1 = -a$  ou seja  $P_1 = -\frac{1}{\tau}$ , e ainda se  $\tau$  é pequeno, o sistema entra em regime mais rapidamente que outro com  $\tau$  maior, o diagrama ilustra este fato:



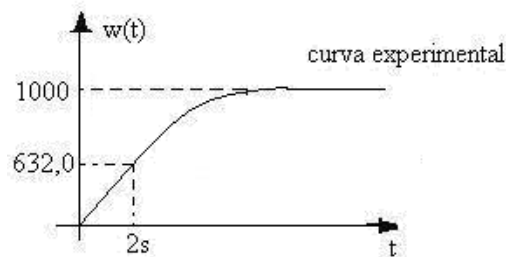
O exemplo abaixo ilustra uma metodologia de se medir uma função de transferência  $G(s)$  a partir de sua resposta transitória a uma entrada degrau.

Exemplo: Um motor de corrente contínua (C.C) possui a seguinte função de transferência, tendo como saída de interesse a velocidade de rotação do eixo ( $W(s)$ ):

$$\frac{W(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{k \cdot a}{s + a}$$

sendo  $V(s)$  a tensão de alimentação do motor C.C. Deseja-se medir experimentalmente a sua função de transferência ( $a$  e  $k$ ).

Para isto, aplica-se uma entrada degrau de amplitude  $A=2\text{volts}$ , a saída foi registrada pelo osciloscópio digital:



Comparando-se esta curva experimental com a teórica dada na página anterior, tem-se

$$k \cdot A = 1000$$

mas,  $A=2$  logo,  $k=500\text{rpm/v}$

ainda,  $\frac{1}{a} = 2s \Rightarrow a = 0,5 \text{ [s}^{-1}\text{]}$

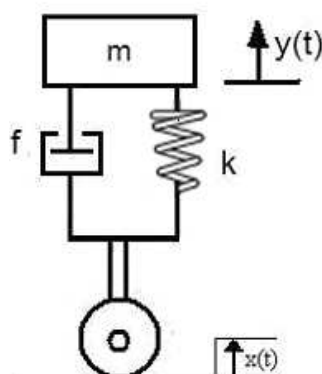
Finalmente:

$$G(s) = \frac{500 \cdot 0,5}{s + 0,5} = \frac{250}{s + 0,5} \text{ (Função de transferência do Motor c.c.)}$$

### 8.3-Resposta Transitória de sistemas de 2ª ordem (devido a uma entrada degrau)

#### 8.3.1-Exemplo

Um exemplo de sistema de 2ª ordem (sistema com 2 pólos) é o sistema de suspensão do automóvel (modelo 1/4):

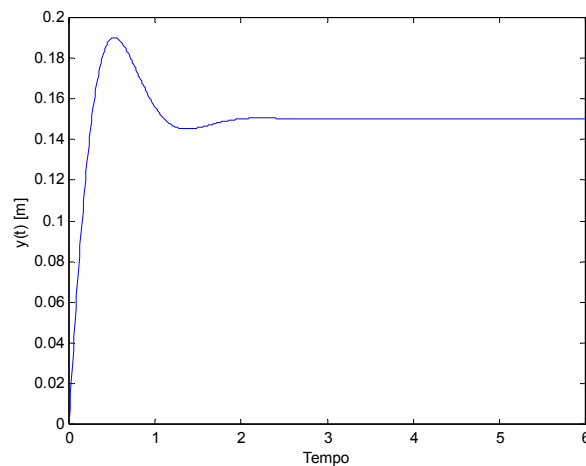


A função de transferência entre  $X(s)$  e  $Y(s)$  é (vide exemplo do capítulo 4):

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{fs + k}{ms^2 + fs + k}$$

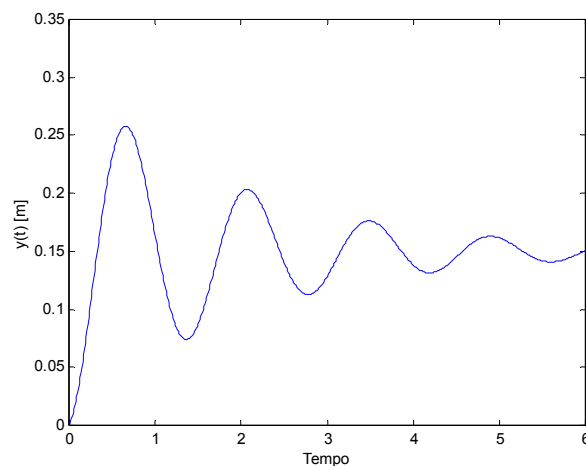
Note que este sistema é de 2ª ordem pois  $G(s)$  possui 2 pólos.

Na simulação realizada com o MATLAB, a resposta a entrada degrau foi:



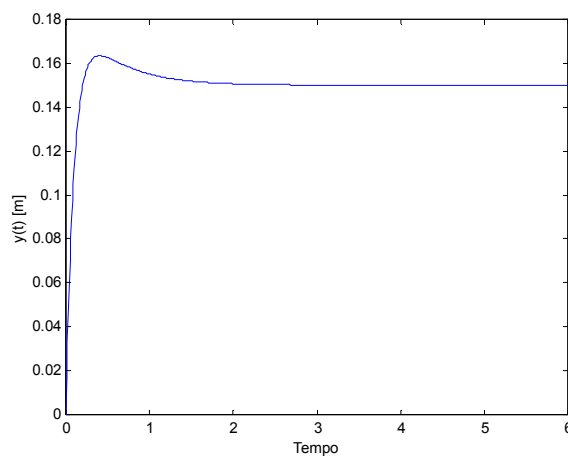
Percebe-se que esta resposta é diferente da resposta do sistema de 1ª ordem.

Simulou-se novamente, com valor menor do coeficiente  $f$  (amortecedor), o resultado foi:



note que o sistema "oscilou" mais.

Para  $f$  maior que todos anteriores, o resultado da simulação foi:



Portanto, aumentando-se  $f$ , o sistema ficou mais amortecido.

Na prática, especifica-se como deve ser grande a “oscilação” ou o “amortecimento” e então o projeto do controlador deverá atender a essas especificações.

### 8.3.2-Caso genérico

O sistema de 2ª ordem genérico pode ser representado por:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}} \xrightarrow{Y(s)} \end{array} \quad (1)$$

$G(s)$

sendo:  $\omega_n$  = frequência natural não-amortecida,  $\omega_n > 0$

$\xi$  = coeficiente de amortecimento,  $\xi > 0$

O caso de interesse é o caso de sub-amortecimento, sendo  $0 < \xi < 1$ . Os pólos de  $G(s)$  são encontrados fazendo:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

logo

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1)$$

$$P_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2 (\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

ou ainda,



$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(1-\xi^2)(-1)}$$

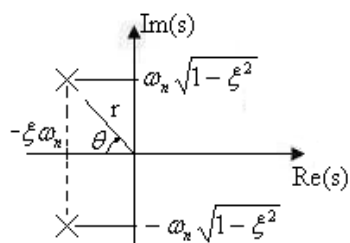
como  $0 < \xi < 1 \Rightarrow \xi^2 < 1$ , logo,  $(1-\xi^2) > 0$ , portanto

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(1-\xi^2)} \cdot \sqrt{(-1)} \quad j$$

finalmente

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)}$$

No plano-s:



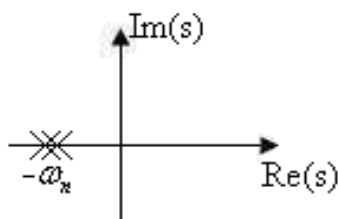
Sistema Sub-Amortecido

segundo o diagrama temos:

$$r^2 = \left(\omega_n \sqrt{(1-\xi^2)}\right)^2 + \left(\xi\omega_n\right)^2 \Rightarrow r = \omega_n$$

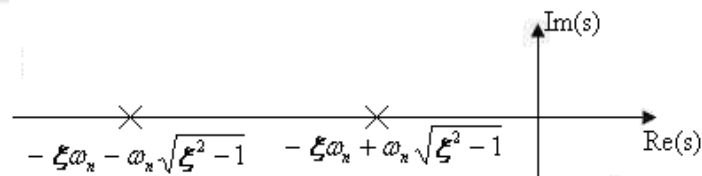
$$\cos \theta = \frac{\xi\omega_n}{r} = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi \Rightarrow \theta = \arccos \xi$$

Nota: i) Para o caso  $\xi=1$  (sistema criticamente amortecido) os pólos são:  $P_{1,2} = \omega_n$ , no plano-s :



Sistema Criticamente Amortecido

ii) Para o caso  $\xi > 1$  (o sistema superamortecido), os pólos são:  $P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{(\xi^2 - 1)}$ , que não tem componente imaginário:

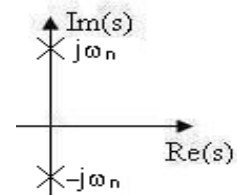


Sistema superamortecido

que corresponde a dois pólos de dois sistemas de primeira ordem. Neste caso a resposta transitória será a composição das respostas de cada sistema de primeira ordem calculadas separadamente.

iii) se  $\xi=0$  (sistema não-amortecido):  $P_{1,2} = \pm j\omega_n$

Lembre-se:  $\omega_n$  é a frequência natural não-amortecida.



As deduções mostradas a seguir referem-se apenas ao caso  $0 < \xi < 1$  (sistema sub-amortecido).

A resposta de (1) a uma entrada degrau unitário,  $U(s) = \frac{1}{s}$ , é:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

segundo Ogata (ver tabela da pg. 30), temos

$$y(t) = k \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cdot \left[ \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right] \right\}$$

sendo  $0 < \xi < 1$ .

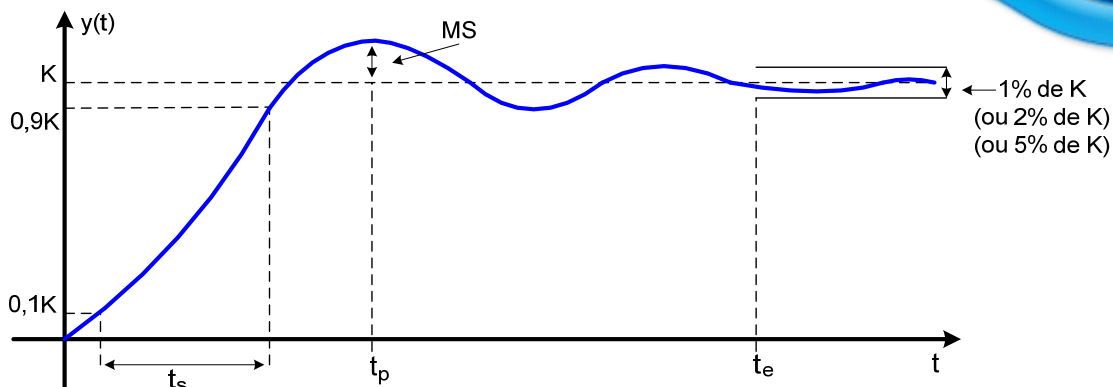
Por simplicidade, definimos:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \text{ e } \sigma = \xi\omega_n$$

logo,

$$y(t) = k \left[ 1 - e^{-\sigma t} \cdot \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \right) \right]$$

que tem a forma:



A resposta  $y(t)$  acima indica que podemos definir os seguintes índices de desempenho:

$t_s \rightarrow$  tempo de subida

$t_p \rightarrow$  tempo de pico ou instante de pico

$t_e \rightarrow$  tempo de estabelecimento (ou de estabilização ou de acomodação ou de assentamento).

MS  $\rightarrow$  máximo sobre sinal ou "overshoot"

Os cálculos desses índices são mostrados abaixo:

a) Tempo de pico ou instante de pico ( $t_p$ )

Para determinar o instante de pico devemos determinar o instante em que  $y(t)$  é máximo, para isto achamos  $\frac{d}{dt} y(t) = 0$ :

$$\frac{d}{dt} y(t) = k \left[ \sigma e^{-\sigma t} \cdot \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) - e^{-\sigma t} \cdot \left( -\omega_d \sin(\omega_d t) + \sigma \cos(\omega_d t) \right) \right] = 0$$

ou ainda:

$$\sigma e^{-\sigma t} \cdot \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma^2 e^{-\sigma t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \omega_d e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) - \sigma e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t) = 0$$

portanto

$$e^{-\sigma t} \cdot \left( \frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \omega_d \sin(\omega_d t) \right) = 0$$

como  $e^{-\sigma t} \neq 0$  para  $t < +\infty$ , temos:

$$\frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \omega_d \sin(\omega_d t) = 0$$

ou ainda,

$$\left( \frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d \right) \text{sen}(\omega_d t) = 0$$

portanto

$$\text{sen} \omega_d t = 0 \Rightarrow \omega_d t = 0 \text{ ou } \pi \text{ ou } 2\pi \text{ ou } 3\pi \dots$$

temos, se  $t=0 \Rightarrow$  ponto de mínimo (não serve)

se  $t = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow$  é o primeiro instante de derivada nula, logo este é o instante de pico.

mas,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

logo

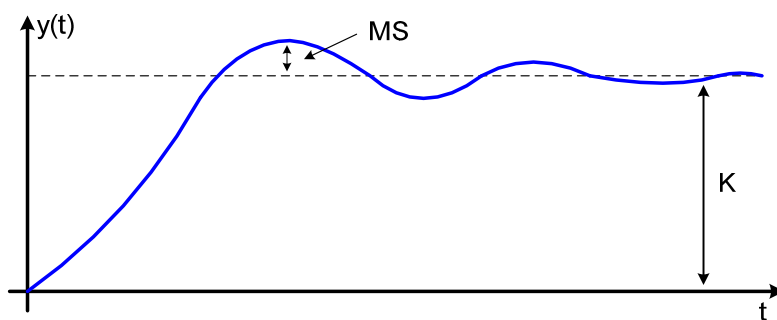
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

#### b) Porcentagem de Overshoot (P.O.)

A porcentagem de overshoot é definida como a porcentagem do máximo sobresinal (MS) em relação ao valor de regime de  $y(t)$ :

$$P.O.(\%) = \frac{MS}{k} \cdot 100(\%)$$

lembre-se :



como

$MS = y(t)|_{t=t_p} - k$ , teremos:

$$MS = -k + k \left[ 1 - e^{-\sigma \frac{\pi}{\omega_d}} \left( \cos \left( \omega_d \frac{\pi}{\omega_d} \right) + \frac{\sigma}{\omega_d} \text{sen} \left( \omega_d \frac{\pi}{\omega_d} \right) \right) \right]$$

$$MS = ke^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}}$$

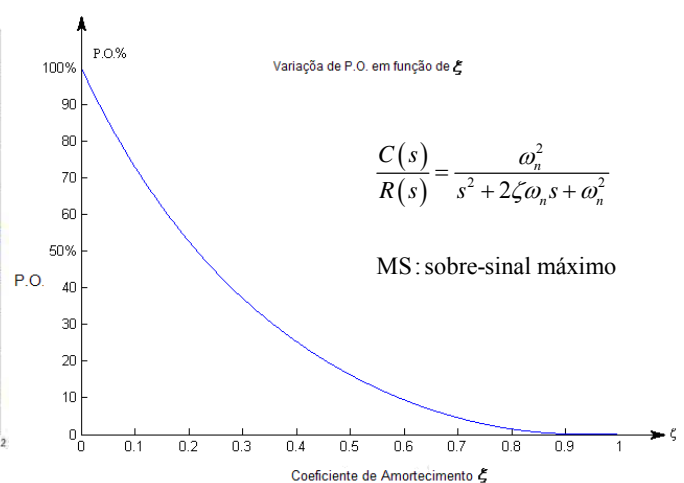
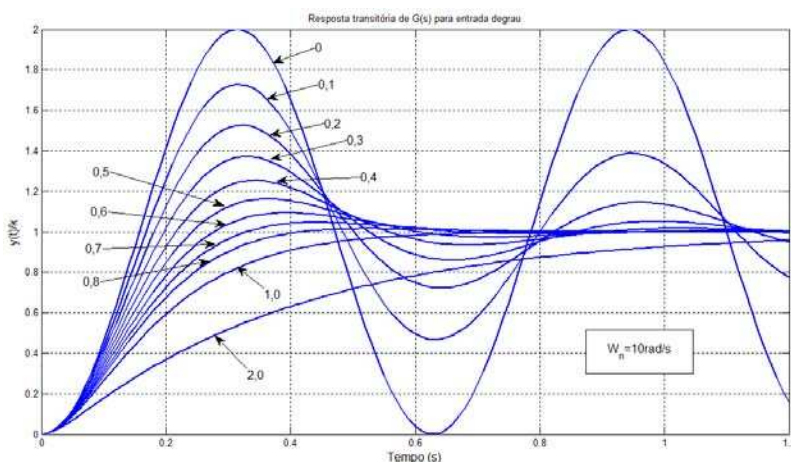
logo,  $P.O.(%) = \frac{ke^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}}}{k} \cdot 100(%) = e^{\frac{-\sigma\pi}{\omega_d}} \cdot 100(%)$

mas,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  e  $\sigma = \omega_n \xi$

então,  $P.O.(%) = e^{\frac{-\omega_n \xi \pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100(%)$

$$P.O. = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100, \text{ para } 0 < \xi < 1$$

Note que P.O. só depende de  $\xi$  e que quanto menor  $\xi$  maior o valor de P.O. A figura abaixo mostra o gráfico de P.O. x  $\xi$  e também a resposta ao degrau de  $G(s)$  para diversos valores de  $\xi$ .



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

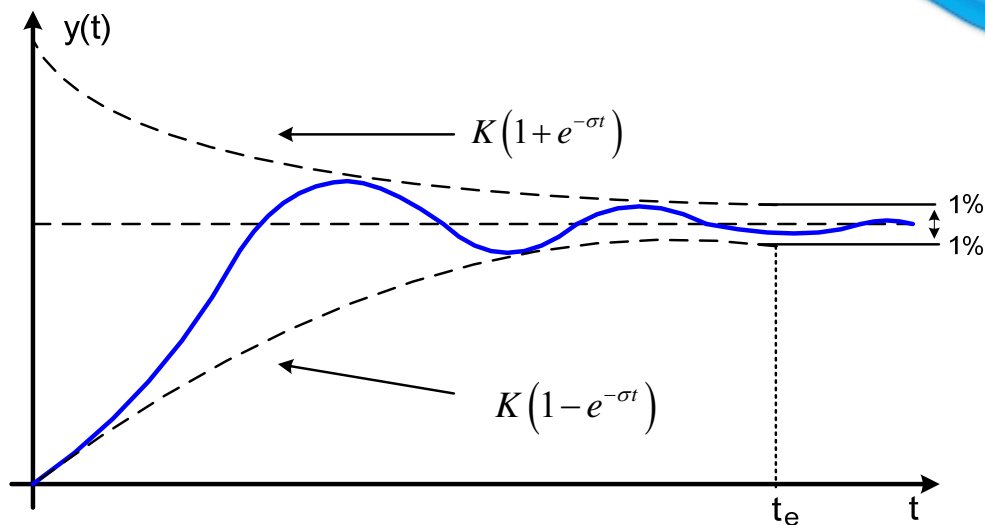
MS: sobre-sinal máximo

Note que P.O. diminui com o aumento de  $\xi$ , ou seja, quanto maior o coeficiente de amortecimento,  $\xi$ , menor é a oscilação da resposta.

### c) Tempo de estabelecimento ( $t_e$ )

A função  $y(t) = k \left[ 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \right]$  pode ser interpretada como um sinal

oscilatório com a amplitude que decresce ao longo do tempo:



Prova: vimos em a) tempo de pico, que os pontos de derivada nula :

$\frac{d}{dt} y(t) = 0$  ocorrem para  $t_i = \frac{k_i \pi}{\omega_d}$ ,  $k_i = 0, 1, 2, 3, \dots$  e assim,

$$y(t) = k \left[ 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos \omega_d t_i + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t_i \right) \right]$$

Note que  $\left( \cos \omega_d t_i + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d t_i \right) = \begin{cases} 1 & \text{se } k_i \text{ é par} \\ -1 & \text{se } k_i \text{ é ímpar} \end{cases}$

logo,

$$y(t) = k[1 - e^{-\sigma t}]$$

ou

$$y(t) = k[1 + e^{-\sigma t}]$$

que são as envoltórias exponenciais.

Para determinar  $t_e$ , basta fazer:

$$k(1 + e^{-\sigma t}) = k \cdot (1 + 0,01)$$

logo,

$$e^{-\sigma t_e} = 0,01 \Rightarrow -\sigma t_e = \ln 0,01$$

$$t_e = \frac{-\ln 0,01}{\sigma}$$

caso utilize a envoltória inferior:

$$k(1 - e^{-\sigma t_e}) = k(1 - 0,01)$$

$$\therefore e^{-\sigma t_e} = 0,01$$

ou  $\therefore -\sigma t_e = \ln 0,01$

$$\therefore t_e = \frac{-\ln 0,01}{\sigma}$$

Porém,  $\sigma = \omega_n \xi$

Logo,  $t_e = \frac{-\ln 0,01}{\omega_n \xi} = \frac{4,6}{\omega_n \xi}$

Se desejar 2%, tem-se

$$t_e = \frac{-\ln 0,02}{\omega_n \xi} = \frac{3,9}{\omega_n \xi}$$

Se desejar 5%, tem-se

$$t_e = \frac{-\ln 0,05}{\omega_n \xi} = \frac{3}{\omega_n \xi}$$

Note que aumentando o amortecimento ( $\xi \uparrow$ ), o tempo de estabelecimento diminui ( $t_e \downarrow$ ).

d) Tempo de subida ( $t_s$ )

O tempo de subida é dado por:

$$t_s \cong \frac{1,8}{\omega_n}$$

que é uma aproximação considerando  $\xi = 0,5$ , vide Ogata.

Exercício: Se  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1,2s + 1}$ , qual é o valor de: P.O.%,  $t_e$ ,  $t_p$  e  $t_s$  ?

Exercício: Repita o exercício anterior para:

a)  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$

b)  $G(s) = \frac{8}{s^2 + 0,8s + 4}$

### 8.3.3- Resposta Transitória x Localização dos Pólos no Plano s

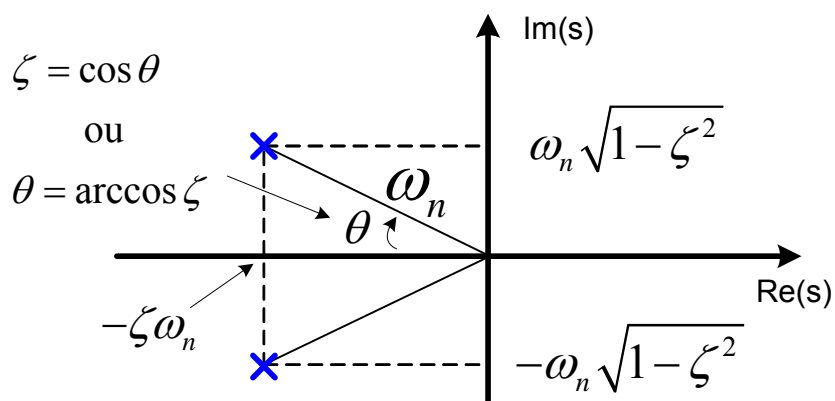
Como já foi visto, o sistema de 2ª ordem genérico tem a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

com os pólos:

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

que são os pólos de  $G(s)$  para o caso sub-amortecido. No plano  $s$  os pólos são representados por:

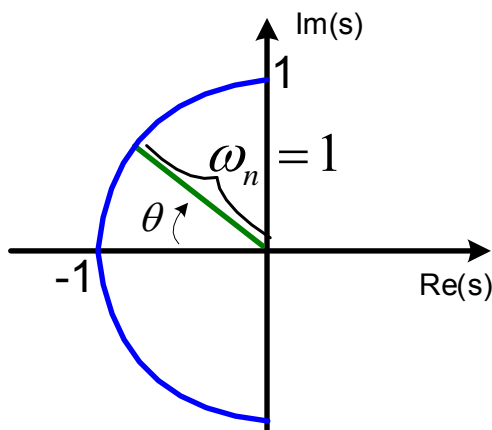


Como a localização dos pólos no plano  $s$  depende de  $\xi$  e  $\omega_n$ , e as especificações P.O.,  $t_s$ ,  $t_e$  dependem também de  $\xi$  e  $\omega_n$ , podemos relacionar essas especificações com a localização dos pólos.

a) Tempo de subida:  $t_s \cong \frac{1,8}{\omega_n}$

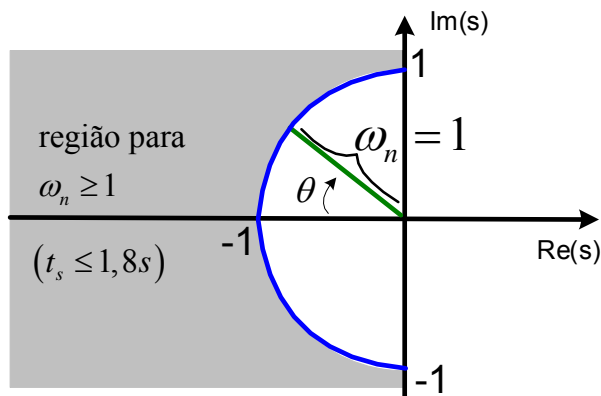
Por exemplo,  $t_s = 1,8$  segundos  $\Rightarrow \omega_n = 1$  e  $\xi \forall$ , logo:

Para  $t_s = 1,8$ s os pólos deverão estar sobre o semicírculo.



Se  $t_s \leq 1,8 \Rightarrow \omega_n \geq 1$ , então para  $t_s \leq 1,8$ s os pólos deverão estar dentro desta região:



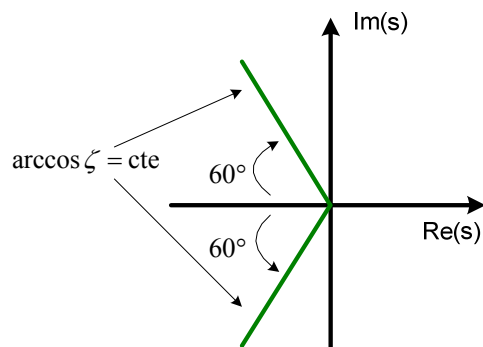


$$b) P.O. = 100 e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Por exemplo,  $P.O. = 16\% \Rightarrow \xi = 0,5$  e  $\omega_n \forall$ , logo:  $\arccos \xi = \arccos 0,5 = 60^\circ$

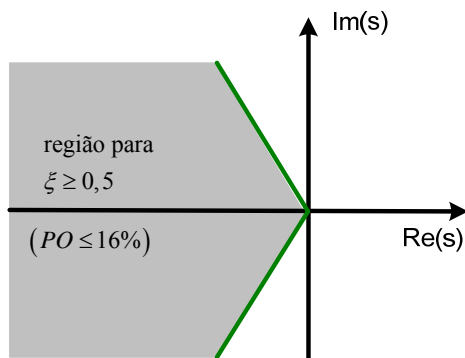
que no plano-s é representado por semi-retas.

Para  $P.O. = 16\%$ , os pólos deverão estar sobre as semi-retas



Se  $P.O. \leq 16\% \Rightarrow \xi \geq 0,5$ , neste caso:  $\arccos(\xi) \leq 60^\circ$  pois  $\cos\theta$  cresce se  $\theta$  decresce.

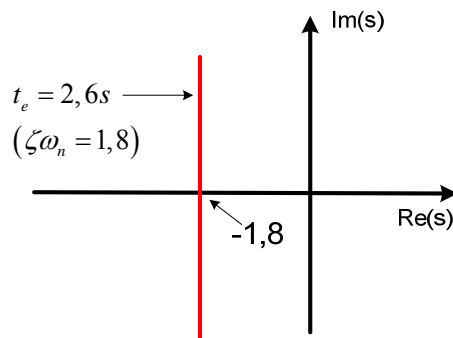
Para  $P.O. \leq 16\%$ , os pólos deverão estar dentro desta região.



c) Tempo de estabelecimento:  $t_e = \frac{4,6}{\xi \omega_n}$  (1%)

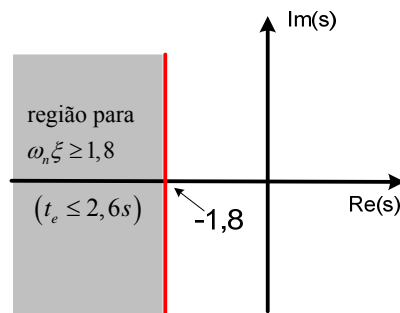
Por exemplo,  $t_e = 2,6s \Rightarrow \xi \omega_n = 1,8$ , sendo  $\omega_n \forall$  e também  $\xi \forall$ .

Para  $t_e = 2,6$  os pólos deverão estar sobre a reta vertical:



Se  $t_e \leq 2,6 \Rightarrow \omega_n \xi \geq 1,8$

Para  $t_e \leq 2,6$  os pólos deverão estar sobre a região

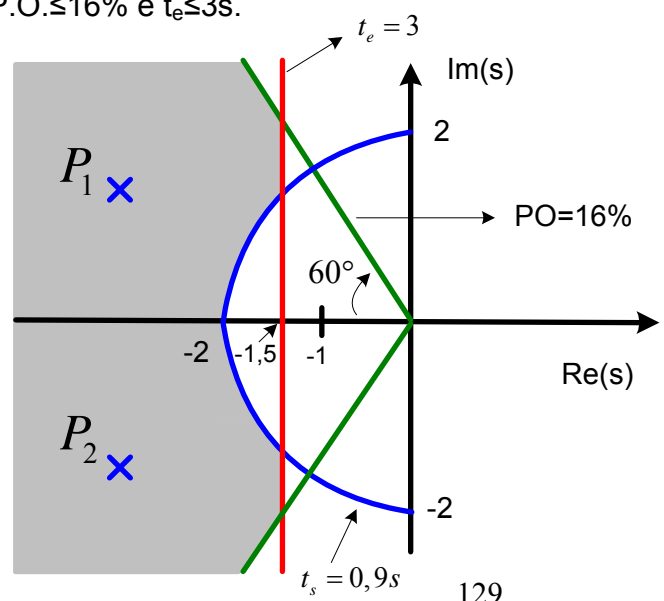


Exemplo: Desenhe a região do plano s na qual os pólos do sistema de 2º ordem deverão estar para atender às seguintes especificações:  $t_s \leq 0,9s$ , P.O.  $\leq 16\%$  e  $t_e \leq 3s$ .

Sol.: teremos:

- $t_s \leq 0,9s \Rightarrow \omega_n \geq 2$
- P.O.  $\leq 16\% \Rightarrow \xi \geq 0,5$
- $t_e \leq 3s \Rightarrow \xi \omega_n \geq 1,5$

A região satisfaz todos esses requisitos está mostrada ao lado. Como os pólos  $P_1$  e  $P_2$  estão dentro da região então  $G(s)$  atende às especificações.

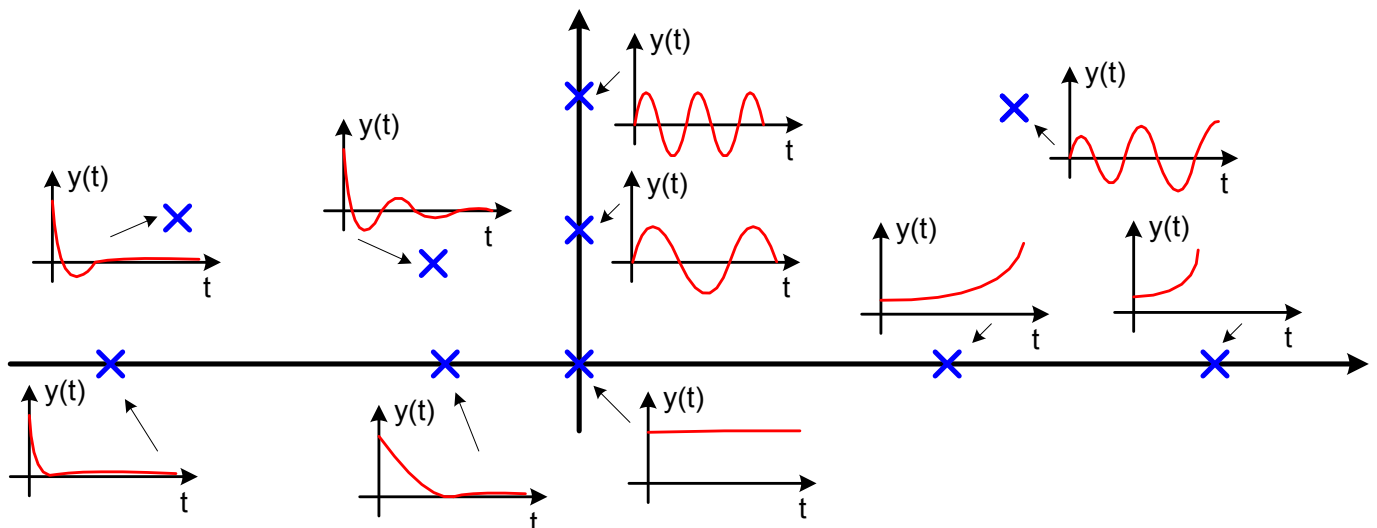


Obs.: Nos próximos capítulos estudaremos uma maneira de modificar a posição  $P_1$  e  $P_2$  dos pólos utilizando a realimentação. Isto será visto no lugar das raízes (root locus) que é uma técnica de projeto.

**Exercício:** Desenhe a região do plano  $s$  na qual os pólos do sistema de segunda ordem deverão estar para atender as seguintes especificações:

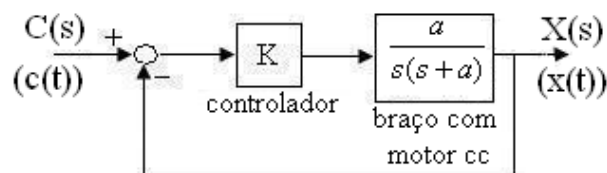
- $t_s \leq 1,2$ ,  $P.O. \leq 10\%$  e  $t_e \leq 4s$ .
- $t_s \leq 1,1$ ,  $P.O. \leq 20\%$  e  $1s \leq t_e \leq 6s$ .
- $t_s \leq 4$ ,  $P.O. \leq 15\%$  e  $1 \leq t_e \leq 4s$ .
- $t_s \leq 0,9$ ,  $10\% \leq P.O. \leq 20\%$  e  $1s \leq t_e \leq 4s$ .

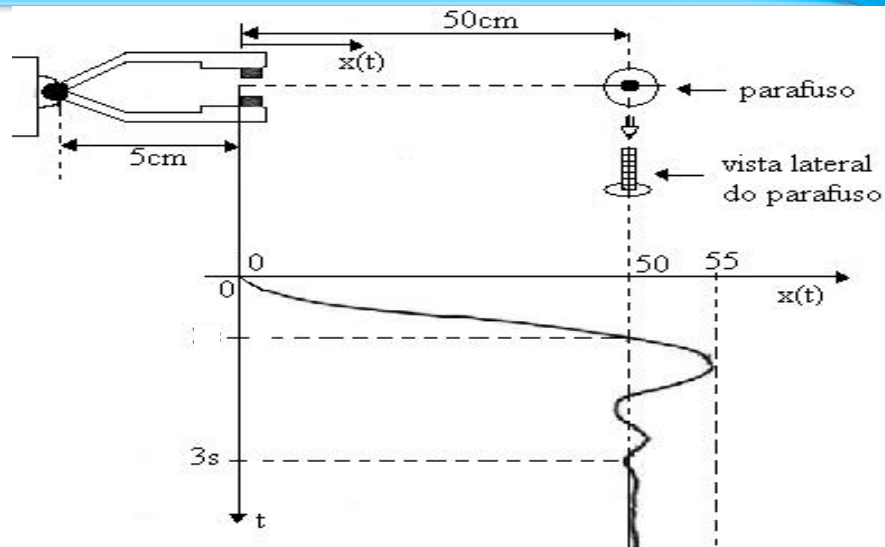
Como um resumo geral, o plano todo pode ser esquematizado na seguinte forma:



Obs.: Estas são repostas à entrada impulso.

**Exemplo:** Um braço mecânico deve sair de  $x=0$  em  $t=0$ , estar nas proximidades de  $x=50\text{cm}$  em  $t=2s$ , parar (critério 1%) em  $x=50\text{cm}$  em  $t=3s$  e não esbarrar no parafuso. O sistema controlado deverá ter a seguinte estrutura:





**Solução:** a resposta transitória do sistema deverá ter o formato acima.

Neste caso, as especificações de projeto deverão ser:

- $P.O. < \frac{5}{50} \cdot 100 = 10\% \Rightarrow \xi > 0,6$
- $t_s \leq 2 \text{ s} \Rightarrow \frac{1,8}{\omega_n} \leq 2 \Rightarrow \omega_n \geq 0,9 \text{ rad/s}$
- $t_e \leq 3 \text{ s} \Rightarrow \frac{4,6}{\xi \omega_n} \leq 3 \text{ (1\%)} \Rightarrow \xi \omega_n \geq 1,5$

**Exercício:** Desenhe no plano-s a região que satisfaz a todas as restrições de desempenho dados no exemplo acima.

### 8.3.4-Resposta ao Degrau de Sistemas de Ordem Superior

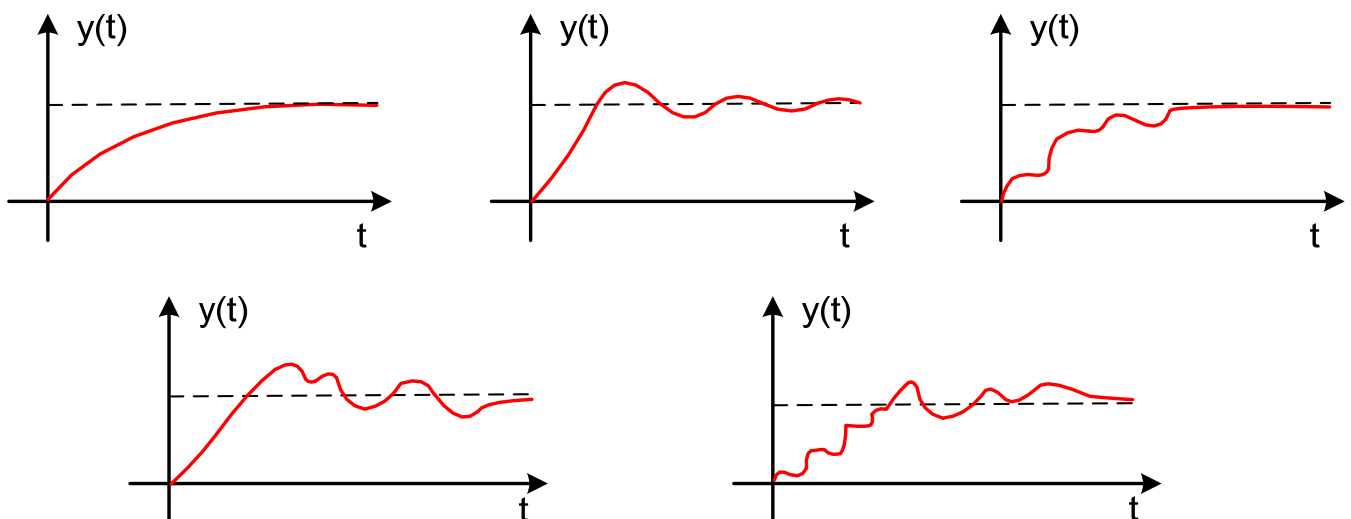
Os pólos de uma  $G(s)$  ou são reais ou pares complexos conjugados, então, uma função de transferência com número de pólos maior que 2 é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s + k_i)}{\prod_{j=1}^q (s + P_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

se os pólos forem distintos e a entrada tipo degrau unitário, a resposta será:  $Y(s)=G(s).\frac{1}{s}$  que expandida em funções parciais:

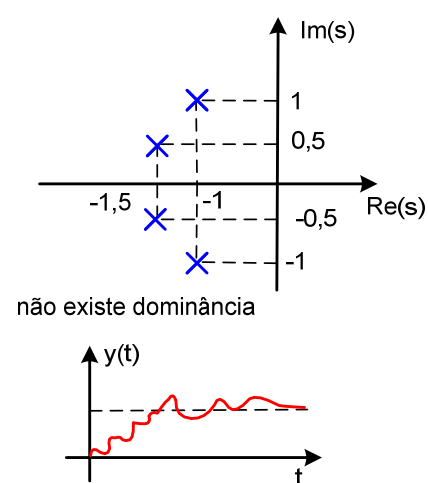
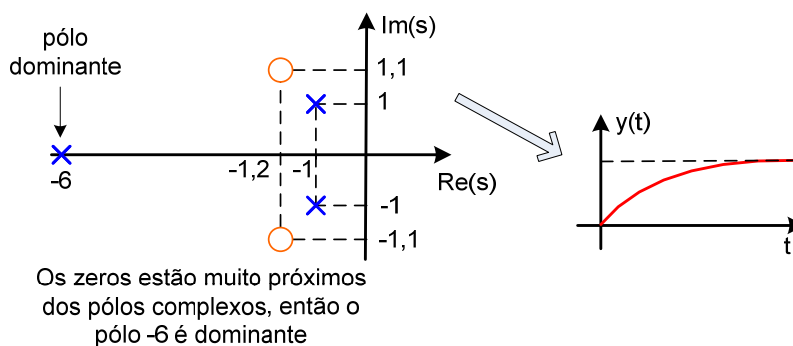
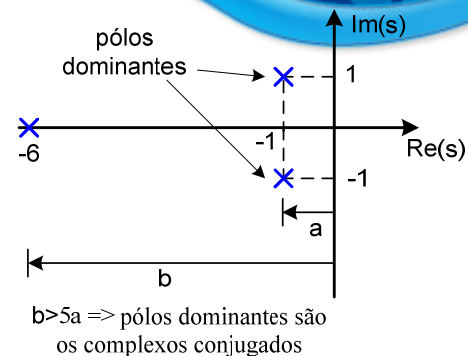
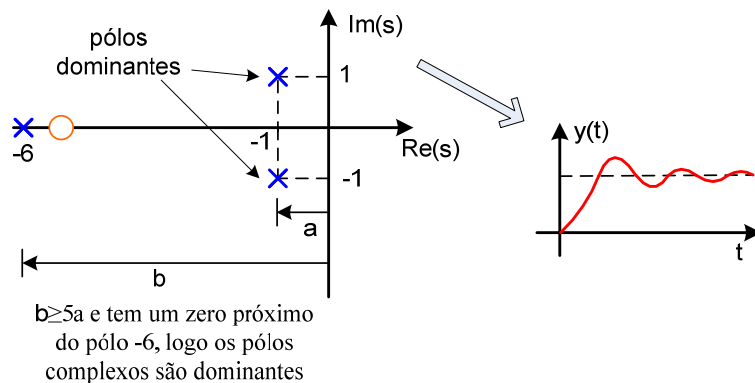
$$Y(s) = \frac{a}{s} + \underbrace{\sum_{k=j}^q \frac{a_j}{s + P_j}}_{1^{\text{a}} \text{ ordem}} + \underbrace{\sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \xi_k \omega_k) + C_k \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2}}_{2^{\text{a}} \text{ ordem}}$$

Percebe-se que a resposta  $Y(s)$  é composta de respostas de 1ª ordem e 2ª ordem. A curva de resposta de um sistema estável de ordem superior é a soma de certo número de curvas exponenciais (1ª ordem) e curvas senoidais amortecidas (2ª ordem). Assim, pequenas oscilações são superpostas em oscilações maiores ou sobre as curvas exponenciais:



Percebe-se que às vezes a resposta exponencial prevalece sobre a oscilatória ou vice-versa. Isto indica que a resposta de alguns pólos podem ser mais significativas que outros, a este fato damos o nome de dominância de pólos.

A dominância de pólos é determinada pela relação das partes reais dos pólos e dos valores dos resíduos que dependem dos zeros e pólos. Se as relações das partes reais excedem cinco, e não há zeros na vizinhança, então os pólos de malha fechada mais perto do eixo  $j\omega$  dominarão no desempenho da resposta transitória porque estes pólos correspondem a termos de resposta transitória que decaem lentamente.



Exemplo:  $G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$ , entrada degrau:  $\frac{1}{s}$

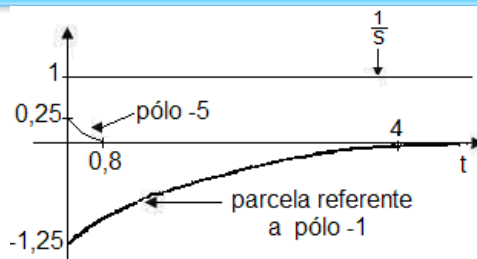
temos:

$$y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{s(s+1)(s+5)} = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{5}{4}}{(s+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(s+5)}$$

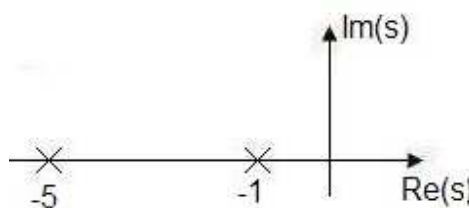
logo:

$$y(t) = 1 - \underbrace{\frac{5}{4}e^{-t}}_{\text{referente ao pólo -1}} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{-5t}}_{\text{referente ao pólo -5}}, t \geq 0$$

graficamente:



Note que os pólos são:



Obs.: Como os projetos dos controladores sempre terão as especificações P.O.,  $t_s$ ,  $t_e$ , retiradas da resposta de 2ª ordem, deverá sempre ser observado a existência de dominância de pólos.

#### 8.4-Resposta Transitória Usando o MATLAB

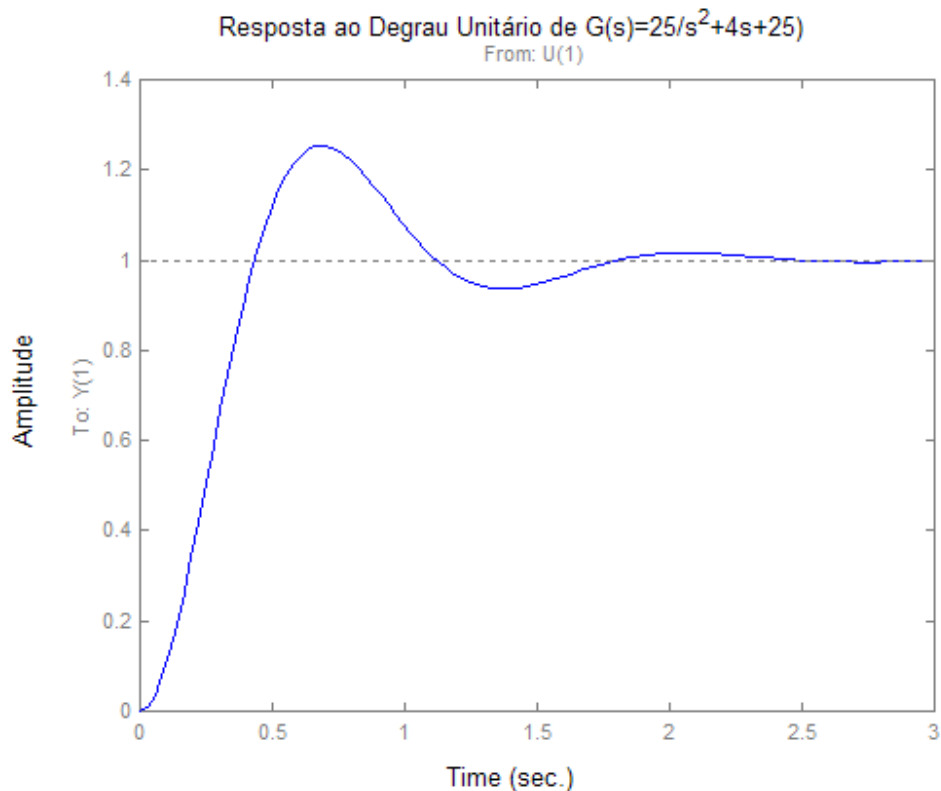
O programa abaixo mostra como a resposta ao degrau usando o MATLAB (vide Ogata):

Seja  $\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$

O programa abaixo aplica uma entrada degrau unitário no sistema:

```
%-----Resposta ao degrau unitário-----
%*****Digite o numerador e o denominador da função de transferência*****
num=[0 0 25];
den[1 4 25];
%****Digite o seguinte comando de resposta ao degrau*****
step(num,den)
%*****Digite os comandos para inserir a grade e o título do gráfico*****
grid
title ('Resposta ao Degrau de G(s)=25/(s^2+4s+25)')
```

Na tela gráfica teremos:



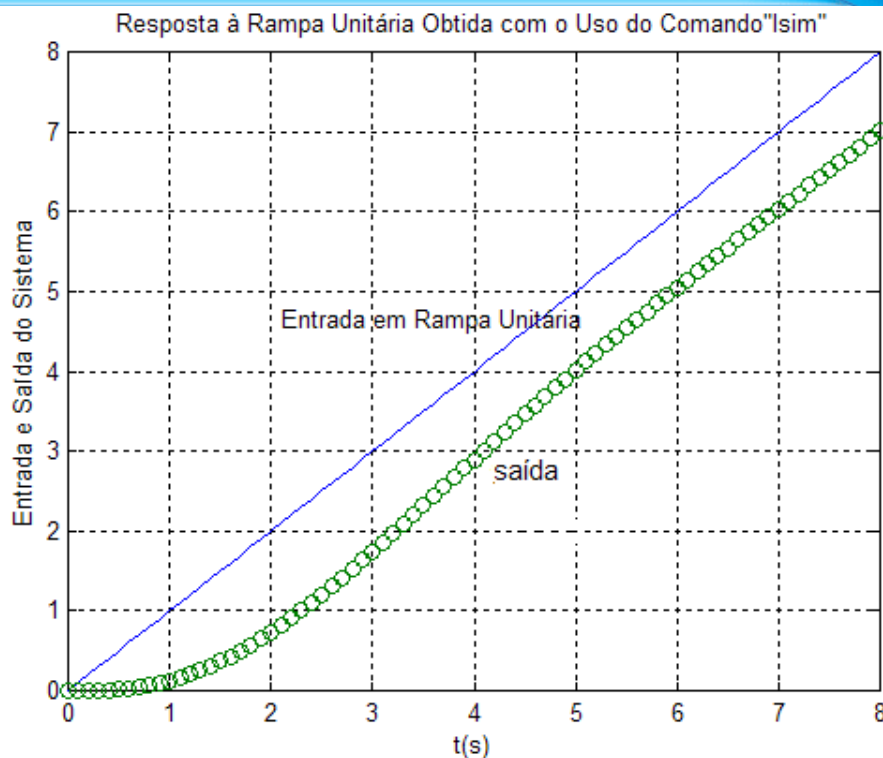
Para uma entrada tipo rampa usa-se o comando `lsim`. Por exemplo, para obter a resposta do sistema para uma entrada rampa, cuja função de transferência do sistema é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

utiliza-se o seguinte programa (vide Ogata):

```
%-----Resposta à Rampa-----
num=[0 0 1];
den=[1 1 1];
t=0:0.1:8;
r=t;
y=lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Resposta à Rampa Unitária Obtida com o Uso do Comando "lsim" ')
xlabel('t(s)')
ylabel('Entrada e Saída do Sistema')
text(2.1,4.65,'Entrada em Rampa Unitária')
text(4.5,2.0,'Saída')
```





### 8.5- Índices de Desempenho ITAE, ISE, IAE

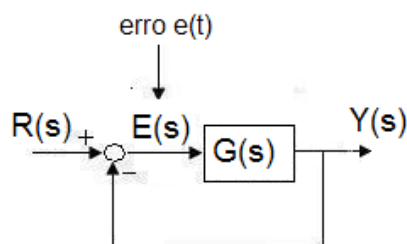
Além dos índices de especificações P.O.,  $t_e$ ,  $t_s$  e  $t_p$ , tem-se outros índices baseados na integral da variável em questão.

U índice de desempenho é uma medida quantitativa do desempenho de um sistema e escolhido de modo que a ênfase seja dada às especificações (Dorf 8ª. ed.)

Um índice de desempenho adequado é a integral do quadrado de erro, ISE (Integral of the Square of the Error):

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt$$

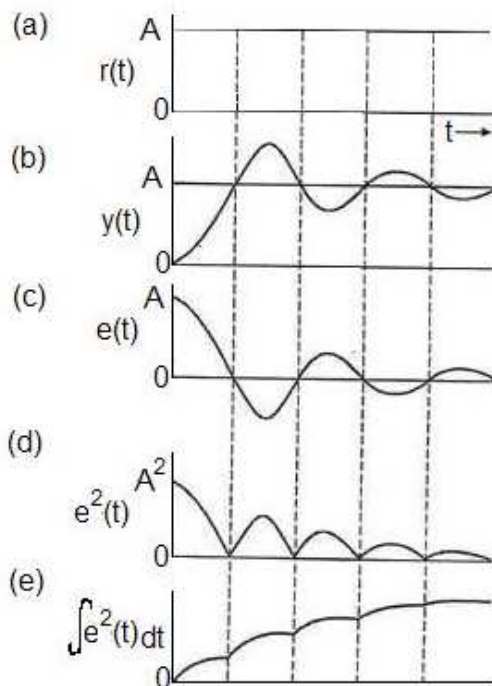
sendo:



Segundo Dorf, este critério discrimina sistemas excessivamente superamortecidos de

sistemas excessivamente sub-amortecidos.

De um modo genérico, o cálculo desta integral é ilustrado na figura seguinte, extraída do livro do Dorf.



Vide Dorf, 8ª edição

Outro critério de desempenho é o IAE (Integral of the Absolute magnitude of the Error):

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt$$

Para reduzir a contribuição de grandes erros iniciais no valor da integral e aumentar a contribuição para tempos maiores, tem-se:

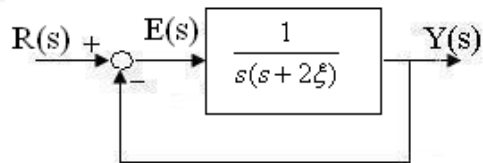
$$ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)| dt$$

O peso temporal para o ISE é:

$$ITSE = \int_0^T t e^2(t) dt$$

Em Dorf, 8ª. ed., é mostrado um exemplo de uso destes índices de desempenho, repetido a seguir.

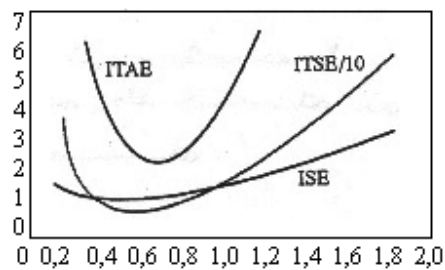
Exemplo: Considere o sistema abaixo:



cuja função de transferência de malha fechada é:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$$

Em Dorf, foram calculados todos os índices de desempenho, em função do valor de  $\xi$  e está reproduzido a seguir (calculadas para uma entrada degrau):



Mostra que o valor ótimo de  $\xi$  que minimiza o ITAE é  $\xi=0,6$ .

Para maiores detalhes, vide Dorf, 8ª. ed.

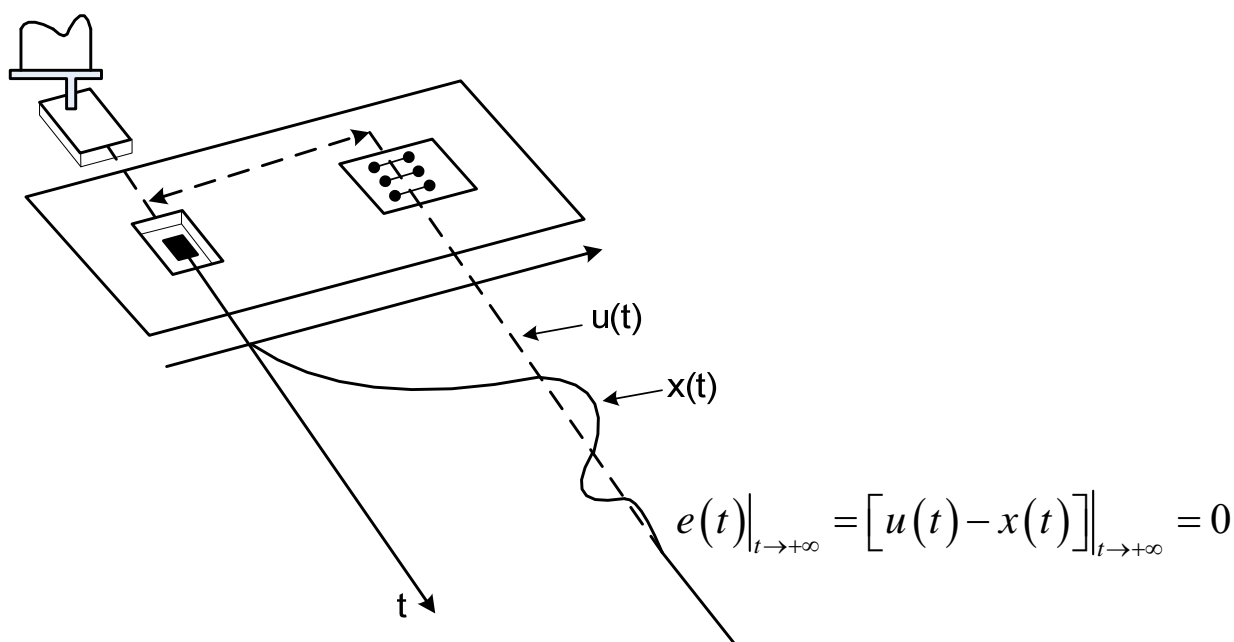
## 9- Erros de Regime (regime permanente)

### 9.1-Introdução

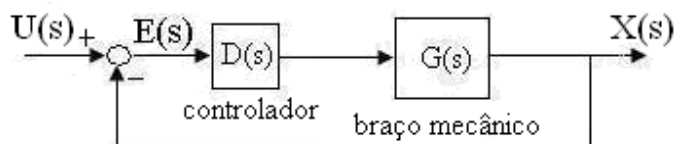
O objetivo deste capítulo é estudar a relação da precisão de sistemas de controle com os parâmetros do sistema. Será analisado o erro entre a entrada do sistema e a saída, verificando como diminuí-lo ou torná-lo nulo. A seguir mostraremos dois exemplos de entrada muito utilizadas em controle e o erro da saída em relação a elas. Estes erros são sempre tomados após ter ocorrido todos os transitórios, ou seja, são erros de regime (regime permanente).

### 9.2-Exemplos de Erro de Regime Permanente

O braço mecânico abaixo tem a função de colocar C.I.'s sobre a placa de circuito impresso e não deve ter erro no posicionamento.

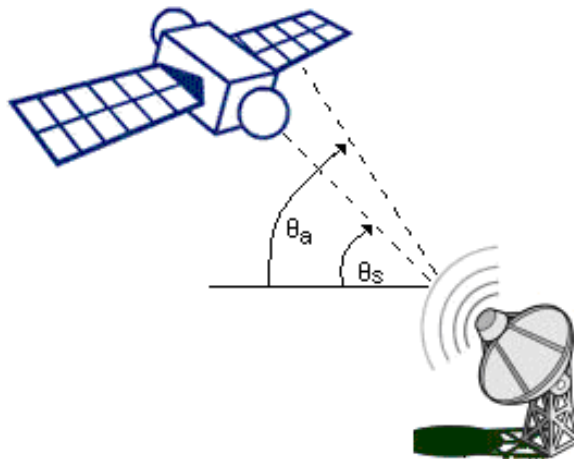


O diagrama de blocos será:



Note que  $u(t)$  é uma entrada tipo degrau. Este é um exemplo de sistema que deve ter pequeno erro de regime permanente para uma entrada tipo degrau.

A antena rastreadora de satélite tem o objetivo de se posicionar tornando muito pequeno o erro entre seu ângulo e o ângulo do satélite.



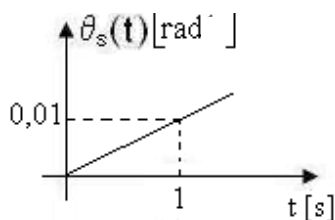
O satélite realiza um movimento com velocidade constante, por exemplo:  $\omega(t)=0,01\text{rad/s}$ .

Desta forma, o ângulo  $\theta_s(t)$  varia em função do tempo:

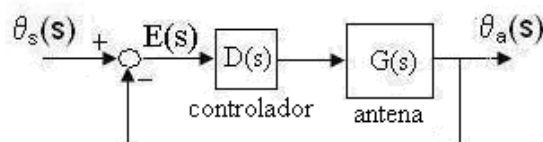
$$\omega(t) = \dot{\theta}_s(t) \Rightarrow \dot{\theta}_s(t) = 0,01 \Rightarrow \frac{d}{dt}\theta_s(t) = 0,01$$

$$\therefore \int_0^t d\theta_s(t) = \int_0^t 0,01 dt \Rightarrow \theta_s(t) - \theta_s(0) = 0,01t \Rightarrow \theta_s(t) = 0,01t$$

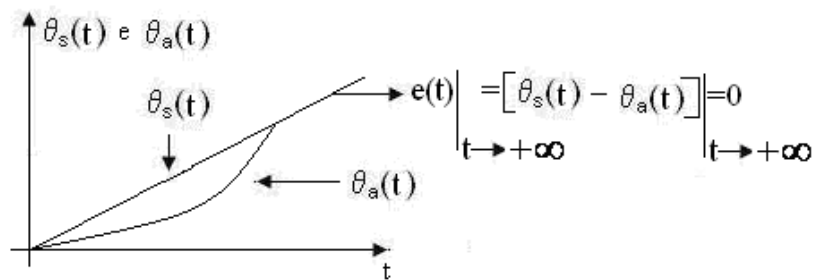
logo:



De onde percebe-se que  $\theta_s(t)$  é uma rampa. O diagrama de blocos do sistema posicionador é:



O rastreamento pode ser ilustrado no gráfico abaixo, onde a saída  $\theta_a(t)$  tenta ser igual a  $\theta_s(t)$ , ou seja:  $e(t)=\theta_s(t)-\theta_a(t)=0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

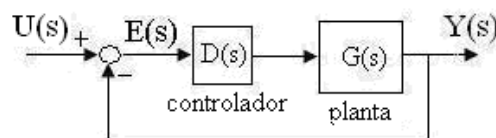


Este é um exemplo de sistema que deve ter pequeno erro de regime permanente para uma entrada tipo rampa.

A seguir mostraremos algumas condições necessárias de  $D(s)$  e  $G(s)$  para que essas especificações de erros de regime permanente sejam atendidas.

### 9.3- Erros de Regime Permanente

Nos dois exemplos anteriores, o sistema de controle é do tipo:



Para determinar o erro de regime permanente para uma determinada entrada, descreveremos o erro  $E(s)$  em função de  $U(s)$  utilizando as regras de diagrama de blocos:

$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

mas,

$$Y(s) = D(s) \cdot G(s) \cdot E(s)$$

logo,

$$E(s) = U(s) - D(s)G(s)E(s)$$

ou

$$E(s) + D(s)G(s)E(s) = U(s)$$

$$E(s)[1 + D(s)G(s)] = U(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + D(s)G(s)} \cdot U(s)$$

Para determinar o erro no regime permanente ( $t \rightarrow +\infty$ ), aplica-se o teorema do valor final (T.V.F.) na expressão acima:

$$e(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s)$$

Porém, os pólos de  $sE(s)$  deverão ter parte real menor que zero. Observe que a F.T.M.F. do diagrama é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}$$

que possui os mesmos pólos de  $\frac{E(s)}{U(s)}$ , portanto pode-se aplicar o T.V.F. se for verificado que

o sistema realimentado é estável e a entrada do tipo degrau. Neste caso:

$$e(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + D(s)G(s)} \cdot U(s) \quad e \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad (1)$$

Vamos analisar  $e(+\infty)$  para três tipos de entrada: degrau, rampa e parábola.

a) Entrada degrau

$$\text{Neste caso, } U(s) = \frac{A}{s} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), tem-se

$$e(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{[1 + D(s)G(s)]} \cdot \frac{A}{s}$$

então,

$$e(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + D(s)G(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} D(s)G(s)} \quad (3)$$

Sabemos que, genericamente,  $D(s)G(s)$  é uma razão entre dois polinômios de variável  $s$ , ou seja:

$$D(s)G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + P_j)} \quad (4)$$

a1) Se  $D(s)G(s)$  não possuir pólos na origem, ou seja,  $P_j \neq 0$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ , então:

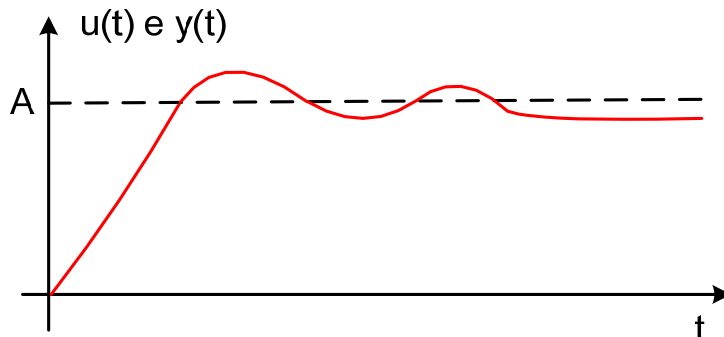
$$\lim_{s \rightarrow 0} D(s)G(s) = k_p \quad (5)$$

Substituindo (5) em (3) temos:

$$e(+\infty) = \frac{A}{1 + k_p} \neq 0 \quad (6)$$

Portanto o erro de regime permanente não será nulo

Interpretação:



$$e(+\infty) = \frac{A}{1 + k_p}$$

sendo

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} D(s)G(s)$$

a2) Se  $D(s)G(s)$  possuir um pólo na origem, ou seja  $P_1=0$ , então

$$D(s)G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \cdot \prod_{j=2}^n (s + P_j)}, \quad z_i \text{ e } P_j \neq 0 \quad (7)$$

Obs.: é suposto que também não exista nenhum zero na origem do plano  $s$ .

Neste caso, temos:

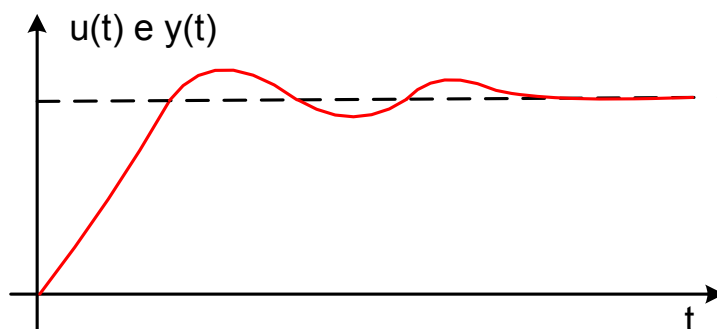
$$\lim_{s \rightarrow 0} D(s)G(s) = +\infty \quad (8)$$

substituindo (8) em (3) temos

$$e(+\infty) = \frac{A}{1 + \infty} = 0 \quad (9)$$

portanto, o erro de regime será nulo.

Interpretação:



$$e(+\infty) = 0$$

**Exercício:** Mostre que se  $D(s)G(s)$  tiver dois ou mais pólos na origem, o erro de regime também será nulo. Suponha que não tem zeros na origem e que a entrada é do tipo degrau.



b) Entrada rampa

Neste caso,

$$U(s) = \frac{A}{s^2} \quad (10)$$

Substituindo (10) em (1), tem-se

$$e(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{[1 + D(s)G(s)]} \cdot \frac{A}{s^2} \quad (11)$$

Para todas as deduções mostradas a seguir, supõe-se que  $D(s)G(s)$  não tenha zeros na origem do plano-s, ou seja,  $z_i \neq 0$  em (4).

b1) Se  $D(s)G(s)$  não possuir pólos na origem, ou seja  $P_j \neq 0$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  em (4) então o denominador de  $D(s)G(s)$  não cancelará o 's' que restou no denominador de (11). Assim não pode-se aplicar o T.V.F. pois

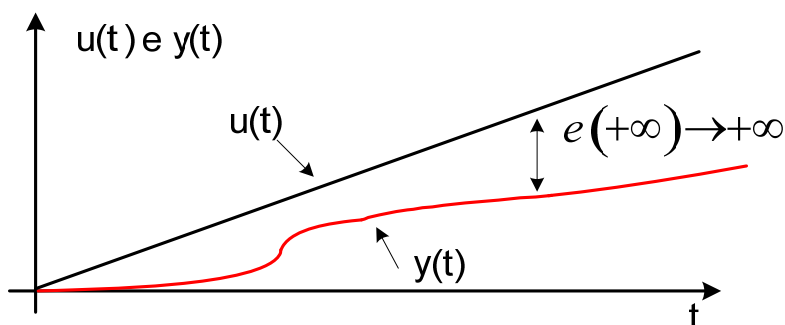
$$s \cdot E(s) = s \cdot \frac{1}{[1 + D(s)G(s)]} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{1}{[1 + D(s)G(s)]} \cdot \frac{A}{s}$$

que possui um pólo instável:  $s=0$ .

Para encontrar  $e(+\infty)$  expande-se  $E(s)$  em frações parciais:

$$E(s) = \frac{1}{[1 + D(s)G(s)]} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + H(s)$$

Neste caso  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{s^2}\right\} = A_1 t$ , que é uma rampa logo,  $e(t) \rightarrow +\infty$  para  $t \rightarrow +\infty$ . Interpretação:



Para estudar os casos seguintes, vamos simplificar (11):

$$e(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{[1 + D(s)G(s)]} \cdot \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sD(s)G(s)}$$

$$\therefore e(+\infty) = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s)} \quad (12)$$

b2) Se  $D(s)G(s)$  possuir um pólo na origem, ou seja:  $P_1=0$ , então

$$D(s)G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \cdot \prod_{j=2}^n (s + P_j)} \quad , z_i \text{ e } P_j \neq 0$$

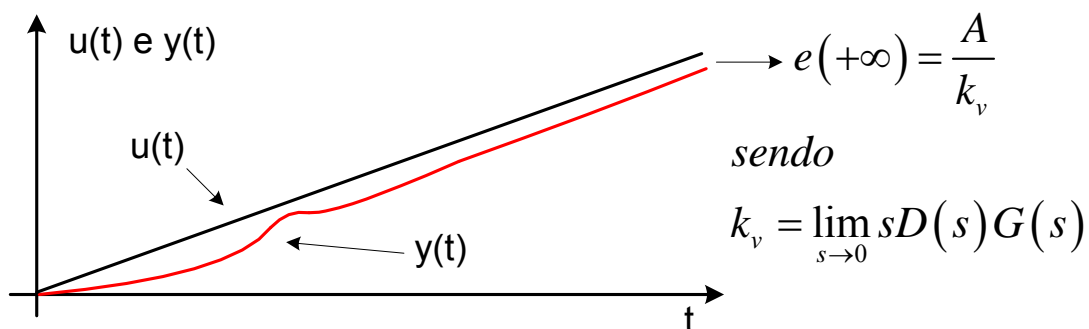
Neste caso temos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s) = k_v \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12):

$$e(+\infty) = \frac{A}{k_v} \neq 0 \quad \therefore \quad \text{o erro de regime permanente não será nulo e nem infinito.}$$

Interpretação:



b3) Se  $D(s)G(s)$  possuir dois pólos na origem, ou seja:

$P_1=0$  e  $P_2=0$ , então:

$$D(s)G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^2 \cdot \prod_{j=3}^n (s + P_j)} \quad , z_i \text{ e } P_j \neq 0$$

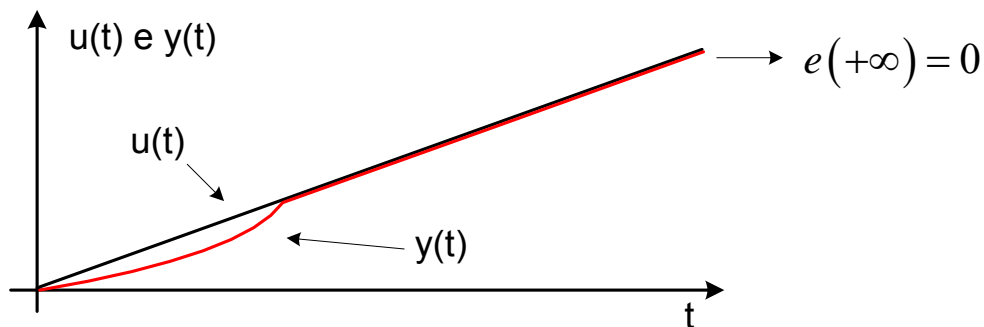
Neste caso temos;

$$\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s) = +\infty \quad (15)$$

Substituindo (15) em (12):

$$e(+\infty) = \frac{A}{+\infty} = 0 \quad \therefore \text{o erro de regime permanente será nulo.}$$

Interpretação:



**Exercício:** Mostre que se  $D(s)G(s)$  tiver 3 ou mais pólos na origem do plano- $s$ , o erro de regime também será nulo para uma entrada rampa.

c) Entrada tipo parábola: **Deduzir em casa ...**

Esses resultados podem ser resumidos na tabela abaixo:

número de pólos de $D(s)G(s)$ na origem do plano- $s$	tipo de sinal de entrada		
	Degrau $U(s) = \frac{A}{s}$	Rampa $U(s) = \frac{A}{s^2}$	Parábola $U(s) = \frac{A}{s^3}$
0	$\frac{A}{1+k_p}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{A}{k_v}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{A}{k_a}$
$\geq 3$	0	0	0

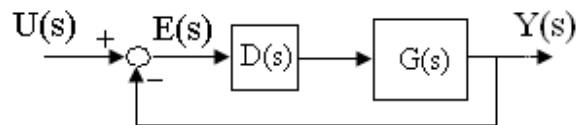
erro de regime  $e(+\infty)$

sendo:  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} D(s)G(s)$ ,  $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s)$  e  $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2D(s)G(s)$ .

Obs1.: Foi suposto que  $D(s)G(s)$  não possui zeros na origem do plano- $s$ . Caso  $D(s)G(s)$  tenha zero na origem, então efetuar primeiramente o possível cancelamento com os pólos de

$D(s)G(s)$  na origem e então depois aplicar a tabela acima.

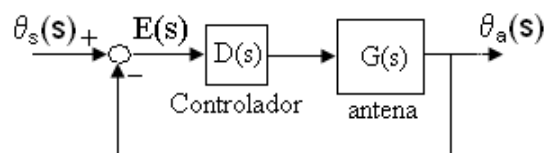
Obs2.: Inicialmente, foi suposto que o sistema



fosse estável para que se pudesse aplicar o T.V.F., portanto esta tabela só é válida se o sistema de malha fechada for estável.

Obs3.: Foi suposto que o sistema realimentado tivesse realimentação unitária, sensor com ganho unitário. Se isto não ocorrer, a tabela acima não é válida.

Exemplo: O sistema de controle da antena rastreadora de satélite é:



sendo:  $G(s) = \frac{1}{Js^2 + Bs}$ , quantos pólos na origem o controlador  $D(s)$  deverá possuir para que o

erro de regime permanente entre  $\theta_a(t)$  e  $\theta_s(t)$  seja nulo para uma entrada tipo rampa?

Sol.: Segundo a tabela anterior, o erro de regime será nulo para uma entrada tipo rampa se o número de pólos de  $D(s)G(s)$  na origem for igual a 2, no mínimo.

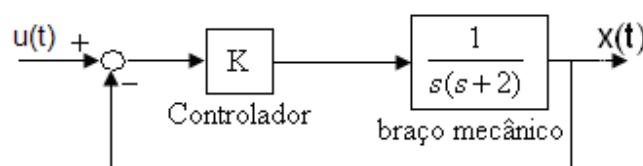
Temos:

$$D(s)G(s) = D(s) \cdot \frac{1}{Js^2 + Bs} = D(s) \cdot \frac{1}{s(Js + B)}$$

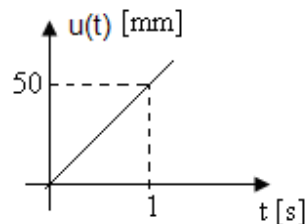
1 pólo na origem

Percebe-se que  $D(s)$  deverá ter um pólo na origem para que o erro de regime seja nulo.

Exercício: O sistema de controle do braço mecânico da linha de montagem de circuito impresso é:



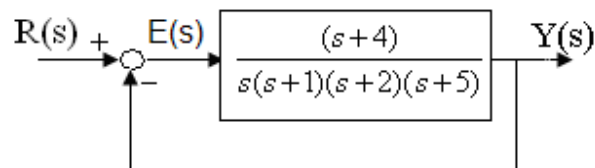
- Determine a faixa de  $k$  para que seja estável.
- Este sistema tem erro de regime permanente nulo para entrada degrau?
- Calcule o valor de  $k$  para que o erro em regime permanente para entrada rampa seja menor que 1mm, suponha:



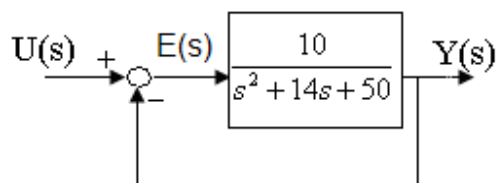
Obs.: não há necessidade que o erro seja nulo para entrada rampa.

- Utilize o MATLAB para verificar os resultados dos itens a, b, c, simulando o sistema.

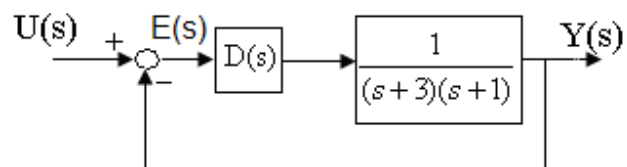
Exercício: Para o sistema abaixo calcule o erro de regime permanente para entrada degrau unitário e para entrada rampa de inclinação unitária ( $A=1$ ).



Exercício: Para o sistema abaixo, determine o erro de regime permanente para uma entrada degrau unitário e para rampa unitária ( $A=1$ ).



Exercício: Projete  $D(s)$  tal que o sistema abaixo tenha erro de regime permanente nulo para entrada degrau e seja estável:



Este é o controle de posição do veículo explorador de Marte (Pág. 112).

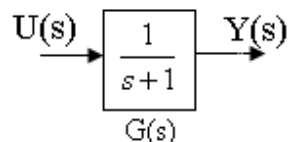
## 10-Sensibilidade de Sistemas de Controle a Variação de Parâmetros

### 10.1-Introdução

Uma vantagem de usar realimentação em sistemas de controle é reduzir a sensibilidade do sistema em relação a variações de parâmetros e distúrbios indesejáveis. Essas variações podem ser resultantes da alteração da temperatura, umidade pressão, cargas, envelhecimento, etc.

Vamos analisar a variação do valor de regime quando ocorrer uma variação no parâmetro do sistema. Primeiramente analisaremos o valor de regime da saída de um sistema sem realimentação.

Suponha que o sistema seja o seguinte:

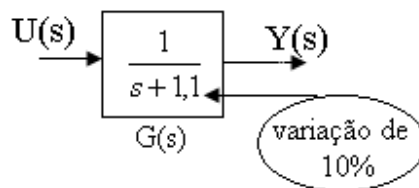


sendo  $U(s)$  uma entrada degrau unitário:  $U(s) = \frac{1}{s}$ . Como  $G(s)$  é estável, podemos aplicar o T.V.F. para encontrar o valor de regime permanente:

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(+\infty) = 1 \quad (1)$$

Suponha que ocorreu uma variação de 10% no valor do pólo, devido à variação de uma resistência elétrica, por exemplo:



Como ainda é estável, temos:

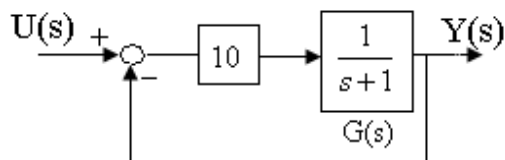
$$y_2(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+1,1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1,1} = 0,9091$$

A variação percentual de  $y(+\infty)$  é:

$$\Delta y(+\infty)\% = \frac{|y(+\infty) - y_2(+\infty)|}{y(+\infty)} \times 100\% = \frac{1 - 0,9091}{1} \times 100\% = 9,09\%$$

Portanto, uma variação de 10% no valor do pólo, causou uma variação de 9,09% em  $y(+\infty)$ .

Supondo agora que este mesmo sistema tenha sido realimentado:



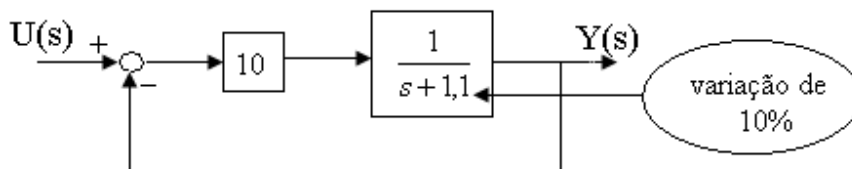
A F.T.M.F. é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{10}{s+1}}{1 + \frac{10}{s+1}} = \frac{10}{s+11}$$

Como o sistema é estável, teremos:

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s+11} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10}{11} = 0,9091$$

Se ocorrer uma variação de 10% no pólo:



A F.T.M.F. é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{10}{s+1,1}}{1 + \frac{10}{s+1,1}} = \frac{10}{s+11,1}$$

Que é estável, logo

$$y_2(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10}{s+11,1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10}{11,1} = 0,9009$$

A variação percentual de  $y(+\infty)$  é:



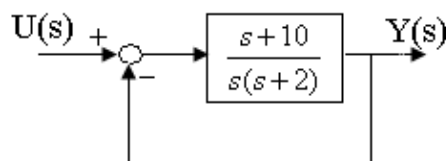
$$\Delta y(+\infty)\% = \frac{|y(+\infty) - y_2(+\infty)|}{y(+\infty)} \times 100\% = \frac{0,9091 - 0,9009}{0,9091} \times 100\% = 0,9\%$$

Portanto, no sistema realimentado, uma variação de 10% no valor do pólo causou uma variação de 0,9% no valor de regime da saída ( $y(+\infty)$ ), enquanto para esta mesma variação do pólo causou uma variação de 9,09% em  $y(+\infty)$  para o sistema sem a realimentação.

Desta forma, conclui-se que a realimentação diminui a sensibilidade de sistemas de controle.

Obs.: Note que se este sistema tivesse um pólo na origem, não teria variação de  $y(+\infty)$  (regime permanente) se ocorresse variação no valor do pólo, no sistema realimentado, dado que a entrada é um degrau.

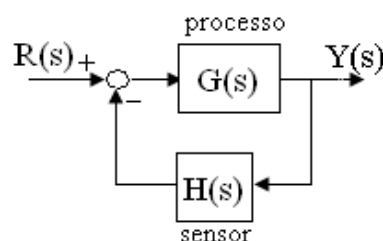
Exercício: Considere o sistema abaixo:



Suponha uma entrada degrau, determine a variação percentual de  $y(+\infty)$  se o pólo variar de -2 para -2,5 (25%) e o zero de -10 para -15 (50%).

## 10.2-Generalização

Considere o sistema de controle abaixo:



neste caso, a F.T.M.F. é:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Definição: A sensibilidade do sistema é definida pela relação entre a variação percentual na função de transferência do sistema ( $T(s)$ ) pela relação percentual da função de transferência

do processo central da função de transferência do processo ( $G(s)$ ), ou seja, a sensibilidade é definida como:

$$S = \frac{\frac{\Delta T(s)}{T(s)}}{\frac{\Delta G(s)}{G(s)}} \quad \text{ou} \quad S = \frac{\Delta T(s)}{\Delta G(s)} \cdot \frac{G(s)}{T(s)}$$

No limite para pequenas variações ( $\Delta \rightarrow \delta$ ), a equação acima torna-se:

$$S = \frac{\delta T(s)}{\delta G(s)} \cdot \frac{G(s)}{T(s)} \quad \text{ou} \quad S = \frac{\delta T}{\delta G} \cdot \frac{G}{T}$$

(vide Dorf., 8ºed.).

Note que a sensibilidade do sistema é a relação de malha fechada entre a mudança na função de transferência do processo (ou parâmetro) para uma pequena mudança incremental (vide Dorf., 8ºed.).

Exemplo: Considere o sistema dado na figura anterior. Obtenha a expressão genérica de sensibilidade da F.T.M.F. ( $T(s)$ ) em relação à variação de parâmetros no processo  $G(s)$ .

sol.: Neste caso teremos:

$$S_G^T = \frac{\delta T}{\delta G} \cdot \frac{G}{T}$$

$$\text{mas, } S_G^T = \frac{1}{(1+GH)^2} \cdot \frac{G}{\frac{G}{1+GH}} = \frac{1}{1+GH} \quad (1)$$

Nota: Para ter pequena sensibilidade, faz-se  $G(s)H(s)$  grande.

Exemplo: Repita o exemplo anterior considerando que a variação de parâmetro se deu no sensor ( $H(s)$ ) e não na planta de processo ( $G(s)$ ).

$$\text{sol.} \text{ Neste caso temos: } S_H^T = \frac{\delta T}{\delta H} \cdot \frac{H}{T}$$

$$\text{mas, } \frac{\delta T}{\delta H} = \frac{\delta}{\delta H} \left[ \frac{G}{1+GH} \right] = \frac{-G^2}{(1+GH)^2}$$

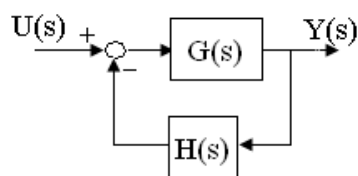
$$\text{logo, } S_H^T = \frac{-G^2}{(1+GH)^2} \cdot \frac{H}{\frac{G}{1+GH}} = \frac{-GH}{1+GH}$$

Nota:

Quando  $G(s)H(s)$  é grande, a sensibilidade ( $S_H^T$ ) se aproxima da unidade (100%), então variações em  $H(s)$  (sensor) afetam diretamente a resposta da saída. Portanto, é importante utilizar sensores de realimentação que não irão variar com mudanças ambientais.

Um sistema que tem pequena variação na saída devido a seus parâmetros (da planta) é dito ser um sistema robusto.

Exercício: Dado o sistema abaixo, calcule a sensibilidade da função de transferência de malha fechada, devido a variação nos parâmetros da planta, ou seja calcule  $S_G^T$ .



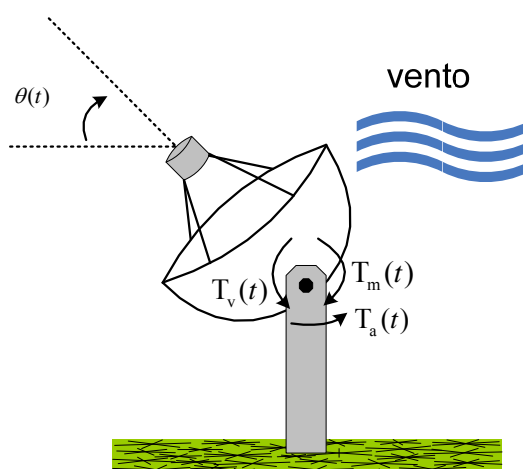
sendo  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  e  $H(s) = k+11s$

Responda,  $k$  deve ser grande ou pequeno para se ter robustez, ou seja baixo valor de  $S_G^T$ ?

## 11-Sinais de Perturbação (ou ruído) em Sistemas de Controle

Um sinal de perturbação é um sinal de entrada indesejável que afeta a saída do sistema (Dorf. 8ªEd.). Muitos sistemas de controle são submetidos a sinais de perturbação externos que fazem com que o sistema forneça uma saída inexata. Por exemplo, os A.O.s possuem ruído inerente gerado no interior dos circuitos integrados ou dos transistores; as antenas de radar são submetidas às rajadas de ventos etc. Os sistemas de controle com realimentação podem reduzir os efeitos de perturbação ou ruídos indesejáveis.

Exemplo: Considere a antena rastreadora de satélite abaixo:



Neste caso, tem-se presente na antena o torque do motor ( $T_m(t)$ ) que aciona o giro da antena, o torque de atrito ( $T_a(t)$ ) do eixo da antena e o torque devido à ação do vento  $T_v(t)$  na parte superior da antena. Seja  $J$  o momento de inércia da antena em torno ao eixo e  $B$  o coeficiente de atrito temos:

$$\sum \text{torque} = J \cdot \ddot{\theta}(t)$$

Neste caso:

$$T_m(t) - T_a(t) - T_v(t) = J \ddot{\theta}(t)$$

mas,  $T_a(t) = B \dot{\theta}(t)$ , logo

$$T_m(t) - B \dot{\theta}(t) - T_v(t) = J \ddot{\theta}(t)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace, supondo C.I. nulas, tem-se:

$$T_m(s) - sB\theta(s) - T_v(s) = Js^2\theta(s)$$

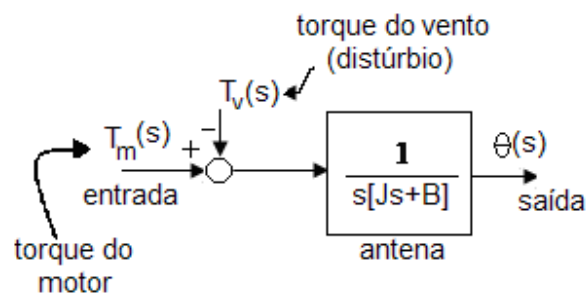
ainda,

$$T_m(s) - T_v(s) = (Js^2 + sB)\theta(s)$$

ou

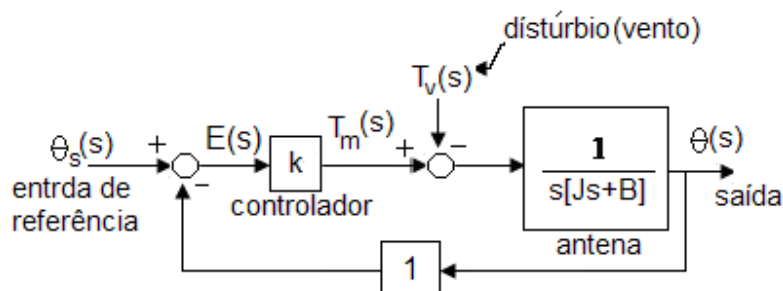
$$\theta(s) = \frac{1}{s(Js + B)} [T_m(s) - T_v(s)]$$

O diagrama de blocos que representa este sistema é:



Neste caso, o torque do vento é chamado de distúrbio, pois ele atrapalha o controle da posição angular ( $\theta(s)$ ) da antena realizada pelo torque do motor ( $T_m(s)$ ).

O sistema de controle com realimentação é:



Note que agora o sistema tem duas entradas,  $\theta_s(s)$  que é a referência (desejado) e  $T_v(s)$  que é o distúrbio provindo do vento (indesejável). A função de transferência entre a saída ( $\theta(s)$ ) e as duas entradas  $\theta_s(s)$  e  $T_v(s)$  é:

$$\theta(s) = \frac{1}{s[Js + B]} [T_m(s) - T_v(s)] \quad (1)$$

mas,

$$T_m(s) = k(\theta_s(s) - \theta(s)) \quad (2)$$

substituindo (2) em (1) tem-se:

$$\theta(s) = \frac{1}{s[J_s + B]} \cdot [k(\theta_s(s) - \theta(s)) - T_v(s)]$$

ou

$s[Js+B]\theta(s)+k\theta(s)=k\theta_s(s)-T_v(s)$ , então:

$$\theta(s) = \frac{k}{s[Js + B] + k} \theta_s(s) - \frac{1}{s[Js + B] + k} T_v(s)$$

Então, este sistema tem duas funções de transferência, uma de  $\theta_s(s)$  para  $\theta(s)$  e outra de  $T_v(s)$  para  $\theta(s)$  ou seja:

$$\theta(s) = G_1(s)\theta_s(s) + G_2(s)T_v(s)$$

sendo

$$G_1(s) = \frac{k}{s[Js + B] + k}$$

$$G_2(s) = \frac{-1}{s[Js + B] + k}$$

No projeto do controlador  $k$ , para que a perturbação  $T_v(s)$  influencie o mínimo possível na saída  $\theta(s)$ , faz  $k$  suficientemente grande e ainda, deve garantir a estabilidade do sistema.

Para que  $\theta(s)$  rastreie  $\theta_s(s)$ , sendo  $\theta_s(s)$  uma entrada rampa, deseja-se que o erro de regime seja o menor possível. Usando-se a tabela do capítulo 9 (Pg. 147), tem-se:

$$e(+\infty) = \frac{A}{K_v}$$

, pois o sistema de malha aberta tem apenas um pólo na origem, sendo

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sk \frac{1}{s[Js + B]} = \frac{k}{B}$$

logo:

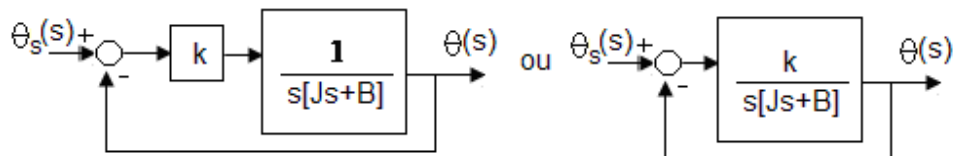
$$e(+\infty) = \frac{A \cdot B}{k}$$

Assim, para que o erro de regime seja pequeno,  $k$  tem que ser suficientemente grande.

Logo,  $k$  com valor grande é adequado neste sistema para rejeitar o distúrbio e ter erro de regime pequeno.

Vamos analisar robustez (sensibilidade). A relação entre  $\theta_s(s)$  e  $\theta(s)$  pode ser obtida

fazendo  $T_v(s)=0$ , no diagrama de blocos anterior:



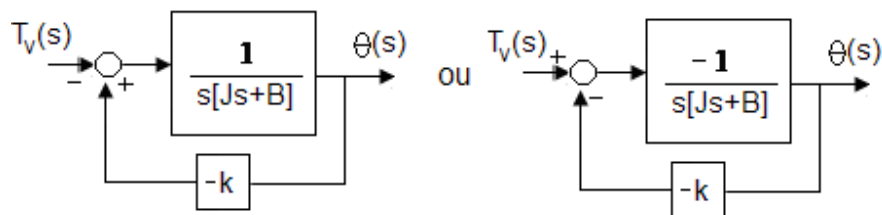
A sensibilidade  $S_G^{T_1}$  neste caso é dada pela equação 1 do capítulo 10:

$$S_G^{T_1} = \frac{1}{1+GH}$$

sendo  $G = \frac{k}{s[Js+B]}$  e  $H=1$ , logo

$$S_G^{T_2} = \frac{1}{1 + \frac{k}{s[Js+B]}} = \frac{s[Js+B]}{s[Js+B] + k}$$

Para  $T_v(s)$  e  $\Theta(s)$  a sensibilidade  $S_G^{T_2}$  é calculada fazendo  $\Theta_s(s)=0$  no diagrama de blocos:



Assim,  $S_G^{T_1} = \frac{1}{1+GH}$

sendo

$$G = \frac{-1}{s[Js+B]} \text{ e } H = -k$$

temos,

$$S_G^{T_2} = \frac{1}{1 + \frac{(-1)(-k)}{s[Js+B]}} = \frac{s[Js+B]}{s[Js+B] + k}$$

Assim, quanto maior for  $k$  menor serão as sensibilidades  $S_G^{T_1}$  e  $S_G^{T_2}$  logo melhor será a robustez do sistema devido às variações paramétricas da planta (antena)  $G(s)$ .

Então, grande valor de  $k$  diminuirá erro de regime permanente, irá rejeitar a influência do distúrbio e melhorar a robustez do sistema realimentado. Basta verificar se o sistema é

estável: neste caso analisamos o denominador de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  que é

$$D(s) = s[J s + B] + k = J s^2 + B s + k$$

1º passo:  $D(s) = J s^2 + B s + k$

2º passo: como J e B são positivos então é necessário que:  $k > 0$

3º passo:

$s^2$	J	K
$s^1$	B	0
$s^0$	k	$\Rightarrow k > 0$

Logo, basta que k seja positivo para a estabilidade.

O projeto do controlador para rejeição do ruído (ou perturbação) pode ser feito supondo que o distúrbio seja do tipo degrau e então analisa-se o valor de regime permanente de saída,  $y(+\infty)$ .

Suponha que o vento seja uma entrada tipo degrau:

$$T_v = \frac{1}{s}$$

$$\text{Então, } \theta(s) = G_2(s) \cdot T_v(s) = G_2(s) \cdot \frac{1}{s}$$

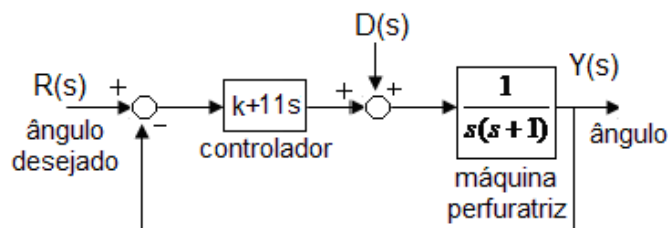
No regime permanente:

$$\theta(t) \Big|_{t \rightarrow +\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(-1)}{s(Ts + B) + k} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\therefore \theta(t) \Big|_{t \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{k}, \text{ logo } k \text{ deve ser grande.}$$

Exemplo: Foi construído um túnel sob o Canal da Macha, ligando a Inglaterra à França (Dorf, 2ºed.). Duas máquinas perfuratrizes foram usadas, saindo ambas das extremidades do canal, indo em direção ao centro, um total de 23,5 milhas. Para obter a precisão necessária para o encontro delas no meio do túnel foi montado um sistema de orientação a laser, um modelo do controle das máquinas é dado a seguir:





sendo  $D(s)$  o efeito de carga sobre a máquina, que é um distúrbio.

Neste caso tem-se

$$Y(s) = \frac{k+11s}{s^2+12s+k} R(s) + \frac{1}{s^2+12s+k} D(s) \quad (1)$$

Para projetar  $k$  tal que ocorra rejeição do distúrbio  $D(s)$  fez-se  $R(s)=0$  em (1) e  $D(s)$  uma

entrada tipo degrau:  $Y(s) = \frac{1}{s^2+12s+k} \cdot \frac{1}{s}$

Assim, o valor de regime permanente da saída é:

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2+12s+k} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(+\infty) = \frac{1}{k}$$

então é necessário que  $k$  seja grande para que a saída  $y(+\infty)$  seja pequeno, rejeitando a perturbação.

É necessário também que o sistema  $s^2+12s+k$  tenha raízes do lado esquerdo do plano- $s$ :

1º passo:  $D(s)=s^2+12s+k$

2º passo:  $k>0$

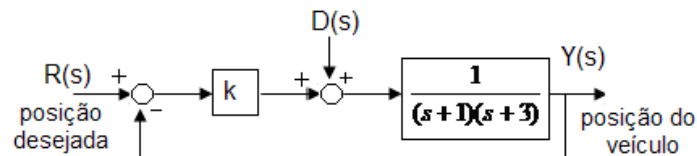
3º passo:

$s^2$	1	$k$
$s^1$	12	0
$s^0$	$k$	$\Rightarrow k>0$

Portanto é necessário que  $k>0$ .

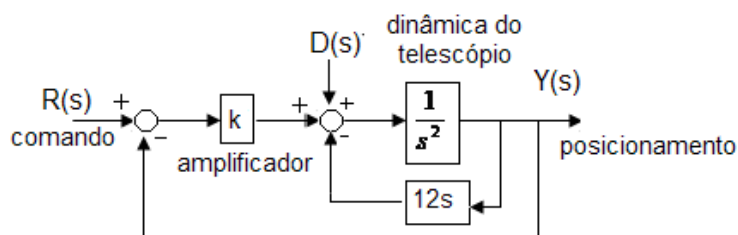
Em Dorf. (2ª ed.), seleciona-se  $k=20$  para uma boa rejeição de ruído  $D(s)$  (Perturbação).

Exercícios: Considere o veículo explorador de Marte dado no capítulo 8. O modelo do sistema considerando-se perturbações no seu deslocamento, tais como pedras, é



Projete  $k$  tal que o sistema seja estável e tenha uma boa rejeição do distúrbio  $D(s)$ .

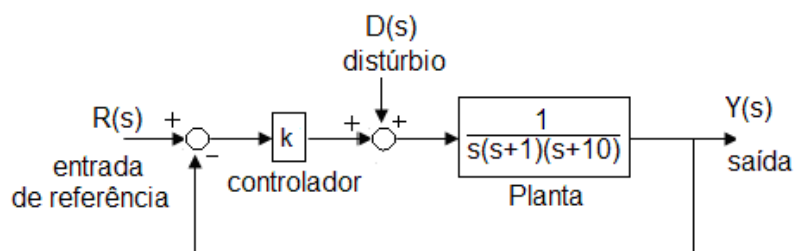
Exercício: O telescópio Hubble tem um sistema de posicionamento preciso pois pode focalizar uma moeda e uma distância de 400 milhas (vide Dorf. 8ªed.). O diagrama do sistema de controle é



Projete o amplificador  $k$  tal que sejam atendidos todos os itens abaixo:

- Seja estável;
- $PO\% \leq 10\%$ , sendo  $R(s)$  um degrau;
- Erro de regime permanente, para  $R(s)$  uma entrada rampa, menor possível;
- O efeito de uma perturbação  $D(s)$  do tipo degrau seja reduzida.

Exercício: Suponha que o sistema de controle abaixo sofre ação de distúrbio  $D(s)$ . Projete  $k$  tal que o sistema tenha a menor influência do distúrbio, em relação à saída  $Y(s)$ . E ainda tenha erro de regime permanente nulo para entrada degrau em  $R(s)$ .



## 12-Método do Lugar das Raízes (Root-Locus)

### 12.1 - Introdução

O método do lugar das Raízes foi criado por R. Evans em 1953. Permite estudar a evolução das raízes de uma equação, quando um parâmetro é variado continuamente. Possibilitando a determinação deste parâmetro de tal forma que o sistema atinja o comportamento dinâmico desejado.

Ambas as funções de transferência de sistemas contínuos e discretos são funções complexas, ou seja, funções que possuem variáveis complexas:  $s$  ou  $z$ , respectivamente. Desta forma, as regras do método do lugar das raízes são as mesmas para os dois sistemas, será mostrada aqui uma introdução deste tópico.

O princípio do método está baseado na realimentação mostrada a seguir:

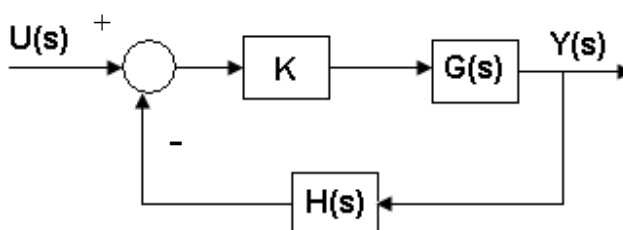


Figura 1 – Diagrama de Blocos do Sistema Realimentado

Sendo que deseja-se determinar a influência do ganho  $k$  ( $0 < k < +\infty$ ) sobre os pólos do sistema em malha fechada. A função de transferência de malha fechada do sistema da figura acima é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k G(s)}{1 + k G(s) \cdot H(s)}$$

O objetivo do método é estabelecer regras simples para traçar o lugar geométrico formado pelas raízes de  $1 + G(s)H(s)$  quando  $k$  variar de 0 a  $+\infty$ , sem o conhecimento explícito das raízes de malha fechada. Deseja-se estudar a seguinte equação:

$$1 + kG(s)H(s) = 0, \text{ para } 0 < k < +\infty$$

cujas soluções são os pólos de malha fechada do sistema da Figura 1, acima.

### Exemplo de Sistema de Controle

Considere um acionador de disco rígido mostrado na figura abaixo, retirado do Dorf (8ª. Ed.). O objetivo do dispositivo leitor do acionador de disco é posicionar o cabeçote de leitura das trilhas de dados armazenados (ver Dorf). Deve-se controlar com precisão a posição angular do cabeçote. Segundo Dorf, o disco gira com uma velocidade entre 1.800 e 7.200 rpm, e a cabeça "voa" acima do disco a uma distância menor que 100nm. A especificação de projeto é que o cabeçote vá da trilha **a** para a trilha **b** em 50ms.

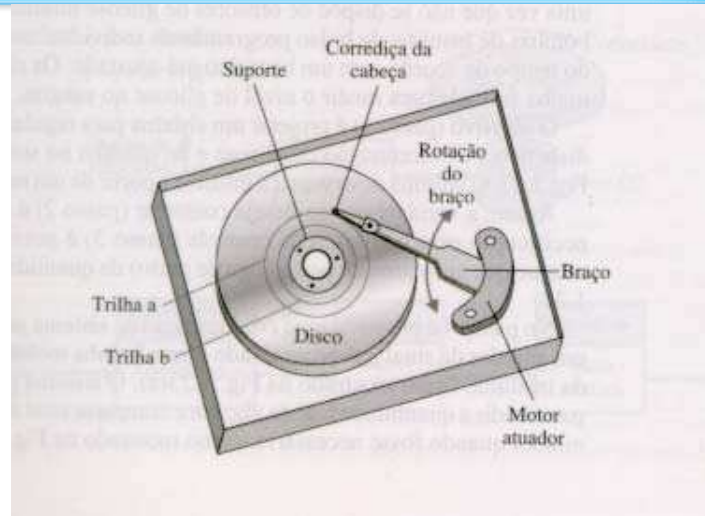


Figura 2 – Sistema de um acionador de disco rígido.

O sistema de malha fechada deste sistema posicionador do cabeçote ( dado em Dorf) é dado na figura abaixo:

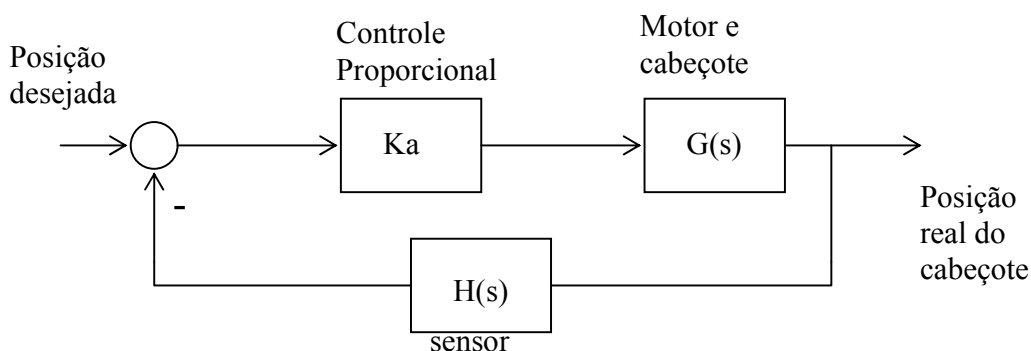


Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo do sistema de controle.

Em Dorf, é admitido que o sensor possui função de transferência  $H(s)=1$  e a função de transferência do motor e cabeçote é:

$$G(s) = \frac{k_m}{s(Js + b)(Ls + R)}$$

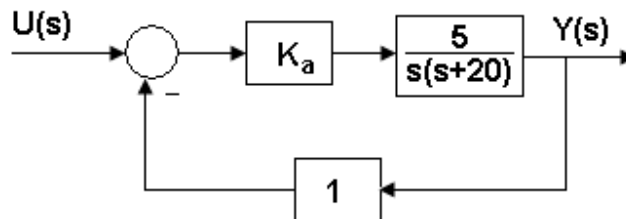
sendo: J momento de inércia, b coeficiente de atrito viscoso, L indutância do motor, R resistência elétrica e  $k_m$  constante de torque do motor.

Em Dorf, constante elétrica do motor é desprezada ( $L \approx 0$ ) e substituindo os valores de J, B, R e  $k_m$ , tem-se:

$$G(s) = \frac{5}{s(s + 20)}$$



Podemos verificar que a posição dos pólos de malha fechada do sistema realimentado depende do valor de  $k_a$ . Desejamos estudar os pólos de malha fechada quando  $k_a$  assume os valores  $k_a=0$  até  $k_a \rightarrow +\infty$ . Vamos desenhar o root locus do sistema calculando-se as raízes do denominador da função de transferência de malha fechada (FT.M.F.), para cada valor de  $k_a$ .



temos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_a \cdot 5}{s(s+20)}}{1 + \frac{5 \cdot k_a}{s(s+20)}} = \frac{5 \cdot k_a}{s^2 + 20s + 5k_a}$$

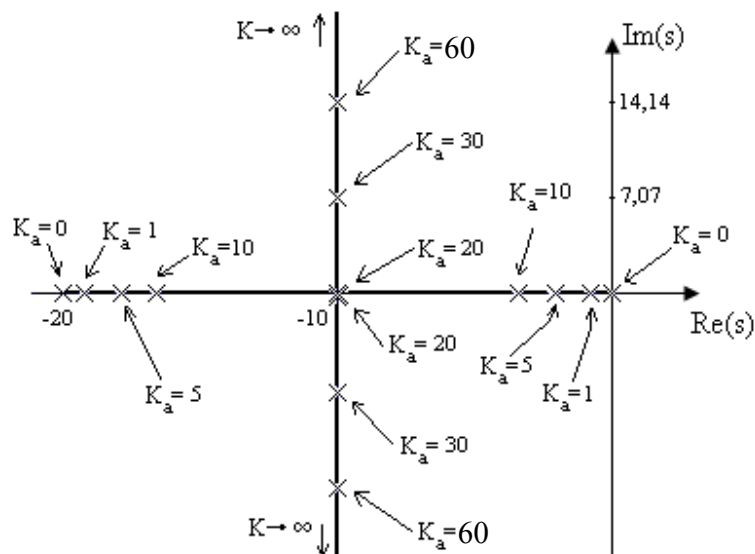
Os pólos de malha fechada são dados por:

$$s_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 5 \cdot k_a}}{2} = -10 \pm \sqrt{100 - 5 \cdot k_a}$$

Monta-se a tabela:

$k_a$	$s_1$	$s_2$
0	-20	0
1	-19,75	-0,25
5	-18,66	-1,34
10	-17,07	-2,93
20	-10	-10
30	-10+j7,07	-10-j7,07
60	-10+j14,14	-10-j14,14
$\rightarrow \infty$	$-10+j\infty$	$-10-j\infty$

Podemos então traçar o root locus:



O lugar geométrico acima é o lugar geométrico das raízes da F.T.M.F., chamado de root locus. Com esse estudo pode-se determinar o lugar geométrico que ocupam os pólos de malha fechada do sistema realimentado, quando  $k$  variar de 0 a  $+\infty$ . Evans propôs um método genérico para levantar estes lugares geométricos, baseado em algumas regras simples para montagem do root-locus.

### As regras do Root-Locus

**Regra 1** – Os ramos do “root-locus” começam nos pólos de  $G(s)H(s)$ , nos quais  $k=0$ . Os ramos terminam nos zeros de  $G(s)H(s)$ , inclusive zeros no infinito. O número de “zeros no infinito” é igual a:

$$N_{z\infty} = N_p - N_z \quad (5.1)$$

onde  $N_p$  – nº de pólos de  $G(s)H(s)$   
 $N_z$  – nº de zeros de  $G(s)H(s)$

Exemplo: Suponha que no sistema da Figura 1,  $G(s)$  e  $H(s)$  são:

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s^2} \quad e \quad H(s) = \frac{(s+5)}{(s+4)} \quad (5.2)$$

As raízes de  $1+kG(s)H(s)$  serão determinadas por:

$$1 + k \cdot \frac{(s+2)(s+5)}{s^2(s+4)} = 0 \quad (5.3)$$

ou ainda:

$$s^2(s+4)+k(s+2)(s+5)=0 \quad (5.4)$$

i – se  $k=0$ , a equação acima ficará:

$$s^2(s+4)=0$$

logo:  $s_1=s_2=0$  e  $s_3=-4$

Note que esses são os pólos de  $G(s)H(s)$ .

ii – Se  $k \rightarrow +\infty$ , para analisar este intervalo, vamos reescrever a equação (5.4):

$$k = -\frac{s^2(s+4)}{(s+2)(s+5)} \quad (5.5)$$

Se  $k \rightarrow +\infty$ , o lado direito da equação (5.5) se iguala a  $+\infty$  se e somente se

$s \rightarrow -2$  (pela esquerda)

$s \rightarrow -5$  (pela esquerda)

ou

$s \rightarrow -\infty$

sendo que  $s_1=-2$  e  $s_2=-5$  são os zeros de  $G(s)H(s)$  e  $s \rightarrow -\infty$  é um “zero no infinito”.

Neste caso,

$$N_p=3 \text{ e } N_z=2 \text{ logo } N_{z\infty}=3-2=1$$

**Regra 2** – As regiões do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos mais zeros de  $kG(s)H(s)$  pertencem ao “root-locus”.

Exemplo: para os valores do exemplo anterior teremos

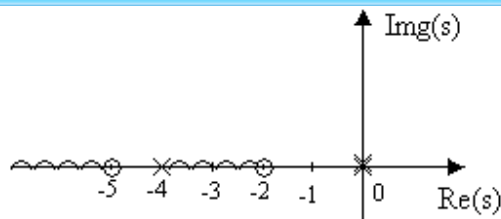
$$kG(s)H(s) = \frac{k(s+2)(s+5)}{s^2(s+4)}$$

Os zeros são:  $z_1=-2$  e  $z_2=-5$

Os pólos são:  $P_1=P_2=0$  e  $P_3=-4$

No plano imaginário os pólos são representados por “X” e os zeros por “O”.

A aplicação da regra 2 neste caso será:



Esta regra é facilmente obtida verificando-se a condição de ângulo da equação  $1+kG(s)H(s)=0$ , que pode ser reescrita na forma:

$$kG(s)H(s) = -1, \quad k > 0$$

Para que esta equação seja verdadeira, o ângulo deverá ser:

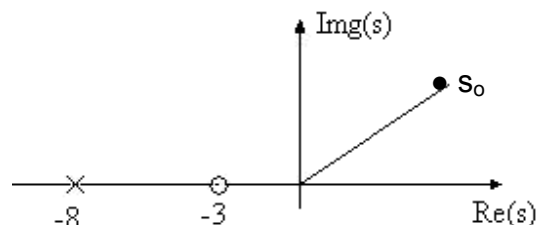
$$\angle kG(s)H(s) = \angle -1 = (2i+1) \cdot 180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Nota:** A condição de módulo da equação característica do root locus é

$$|kG(s)H(s)| = |-1| \Rightarrow |kG(s)H(s)| = 1$$

**Nota:** Na figura acima,  $G(s)H(s)$  é avaliada em um ponto  $s=s_0$  através do uso de vetores que unem cada pólo e cada zero ao ponto  $s_0$  em  $H(s)G(s)$ . Vamos ilustrar com um exemplo numérico:

Seja  $H(s)G(s) = \frac{(s+3)}{(s+8)}$  e queremos avaliar  $H(s)G(s)|_{s=s_0}$ :

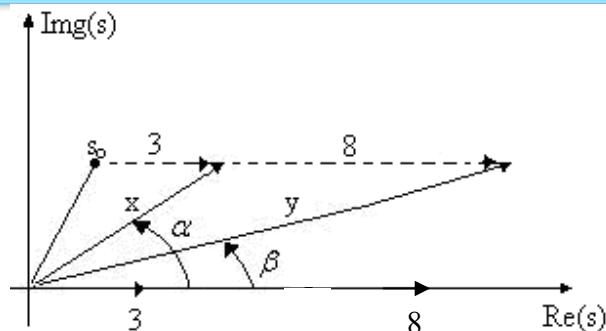


Neste caso:

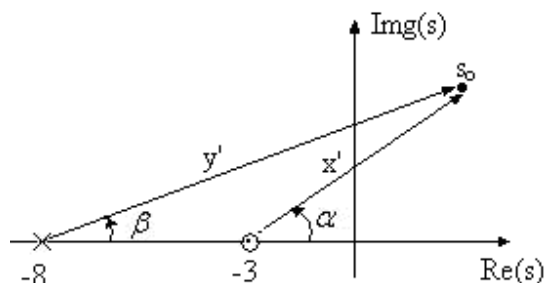
$$H(s_0)G(s_0) = \frac{(s_0+3)}{(s_0+8)} \Rightarrow |H(s_0)G(s_0)| = \frac{|s_0+3|}{|s_0+8|}$$

mas  $(s_0+3)$  e  $(s_0+8)$  são os vetores  $x$  e  $y$ , respectivamente, mostrados abaixo:





Logo,  
 $\angle H(s_0)G(s_0) = \alpha - \beta$ . Se trasladarmos x horizontalmente de -3 e y de -8 teremos:



O que não muda os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  e resulta nos vetores  $x'$  e  $y'$  que ligam o zero e pólo de  $G(s)H(s)$  ao ponto  $s_0$ .

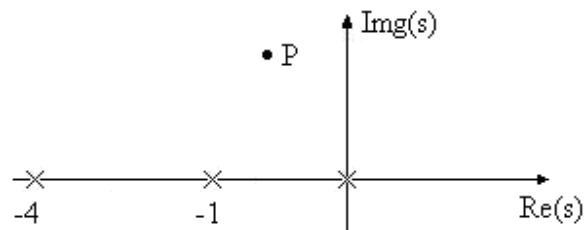
Note que os módulos de x e y não mudam com a translação ou seja:  $|x| = |x'|$  e  $|y| = |y'|$ .

**Regra 3** – Quando k se aproxima de  $+\infty$ , os ramos do “root-locus” que tendem a infinito e assintotam retas com inclinação

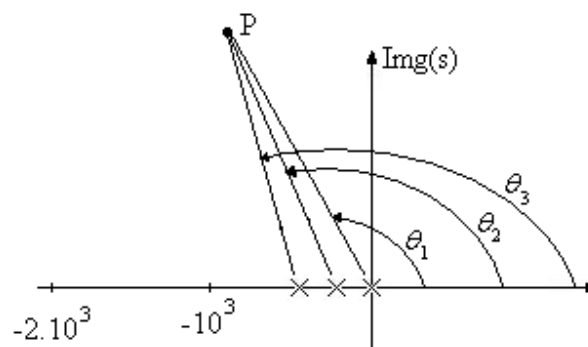
$$\frac{2i+1}{n_p - n_z} \cdot 180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N_p - N_z - 1$$

sendo  $n_p$  – número de pólos de  $G(s)H(s)$   
 $n_z$  – número de zeros de  $G(s)H(s)$

Verificação: Considere  $kG(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+4)}$ , temos:  $n_p=3$  e  $n_z=0$ . no plano complexo teremos:



Fazendo o ponto P crescer infinitamente, e para verificar se pertence ao root-locus, vamos reescrever a figura acima:



O ponto P pertencerá ao "root-locus", se

$$\left| G(s)H(s) \right|_{s=p} = (2i+1) \cdot 180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Sendo que  $p \rightarrow \infty$ ,  $\theta_1 \cong \theta_2 \cong \theta_3 \cong \theta$ , logo:

$$\left| G(s)H(s) \right|_{s=p \rightarrow \infty} = -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = -3\theta = (2i+1) \cdot 180^\circ$$

$$\text{Logo, } \theta = \frac{(2i+1)(-180^\circ)}{3} = \frac{(2i+1) \cdot 180^\circ}{3}$$

Porém,  $n_p - n_z = 3$  então:

$$\theta = \frac{(2i+1) \cdot 180^\circ}{n_p - n_z}, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Retornando ao exemplo, os ângulos das assíntotas serão:

$$\theta = \frac{(2i+1) \cdot 180^\circ}{3-0} = (2i+1) \cdot 60^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Para  $i = 0 \Rightarrow \theta = 60^\circ$ ;  $i = 1 \Rightarrow \theta = 180^\circ$  e  $i = 2 \Rightarrow \theta = 300^\circ$

$i = -1 \Rightarrow \theta = -60^\circ$ ;  $i = -2 \Rightarrow \theta = -180^\circ$  e  $i = -3 \Rightarrow \theta = -300^\circ$

Porém, das relações trigonométricas temos as seguintes equivalências:  
 $180^\circ = -180^\circ$ ,  $60^\circ = -300^\circ$ ,  $-60^\circ = 300^\circ$

Logo:  $\theta_1 = 60^\circ$ ,  $\theta_2 = -60^\circ$  e  $\theta_3 = 180^\circ$ .

**Regra 4** – O ponto de partida das assíntotas é o centro de gravidade (C.G.) da configuração de pólos e zeros de  $G(s)H(s)$ , ou seja:

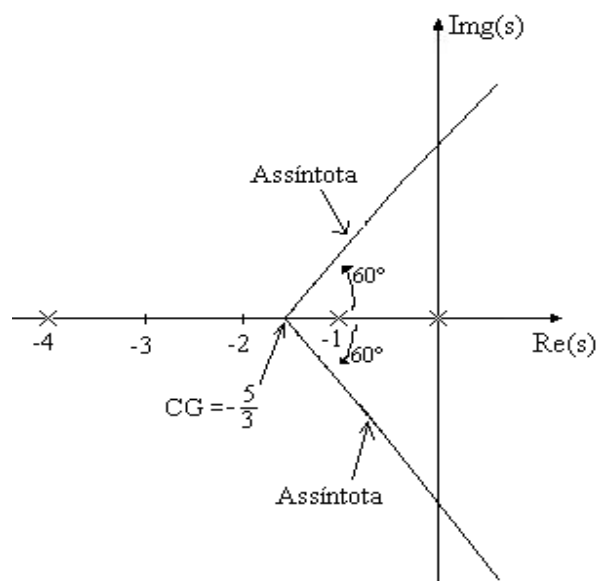
$$CG = \frac{\sum \text{pólos} - \sum \text{zeros}}{n_p - n_z}$$

Exemplo: Para o sistema do exemplo anterior, onde  $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$ , teremos :

- $n_p=3$  e  $n_z=0$ ;
- os pólos são:  $p_1=0$ ,  $p_2=-1$  e  $p_3=-4$ ;
- os zeros são: nenhum.

Logo,  $CG = \frac{(0-1-4)-0}{3-0} = -\frac{5}{3}$

Então:



**Regra 5** – Os pontos nos quais os ramos do “root-locus” deixam (ou entram) o eixo real são determinados utilizando-se a seguinte relação

$$\frac{d}{ds} [ (G(s)H(s))^{-1} ] = 0$$

No exemplo descrito anteriormente, teremos:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+1)}$$

Então,  $(G(s)H(s))^{-1} = s(s+4)(s+1) = s^3 + 5s^2 + 4s$

Logo,

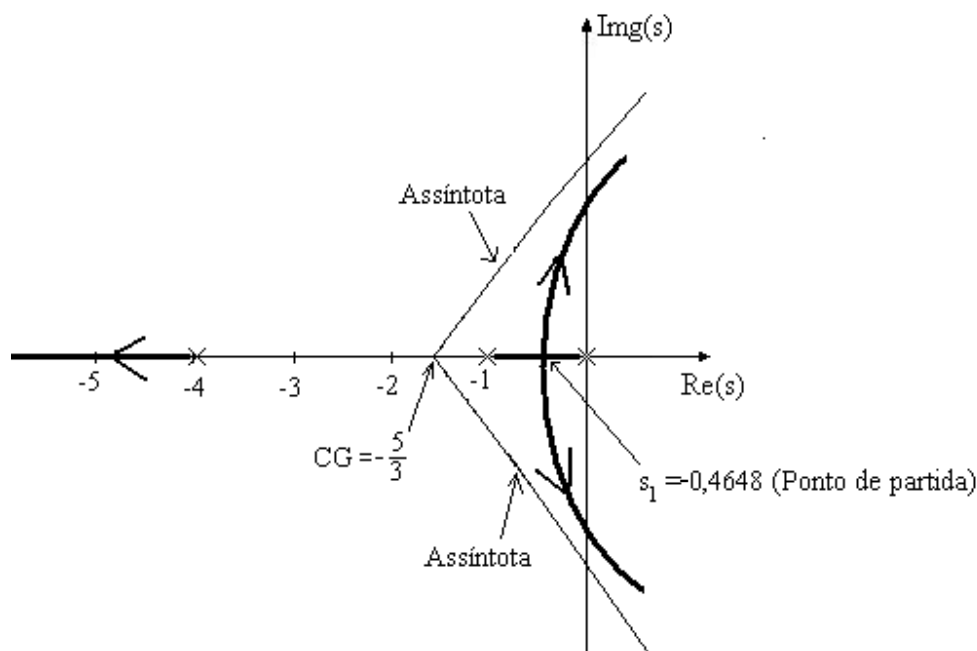
$$\frac{d}{ds}[(G(s)H(s))^{-1}] = \frac{d}{ds}(s^3 + 5s^2 + 4s) = 3s^2 + 10s + 4 = 0$$

As soluções são:  $s_1 = -0,4648$

e

$s_2 = -2,8685$  (desprezado pois não pertence ao root-locus)

O root-locus será:



**Regra 6** – Duas raízes deixam ou entram no eixo real com ângulos  $\pm 90^\circ$ .

**Regra 7** – O “root-locus” é simétrico em relação ao eixo real.

Isto decorre do fato de que as raízes de um polinômio de coeficientes reais ou são reais ou pares complexos conjugados.

**Regra 8** – para se determinar o ganho  $k$  associado a um ponto  $p$  do “root-locus”, deve-se utilizar a condição de módulo da equação:

$$1 + kG(s)H(s) = 0$$

Que pode ser colocada numa forma mais direta reescrevendo-se a equação acima:

$$kG(s)H(s) = -1$$

Pela condição de módulo temos:

$$|k_1 G(s)H(s)| = |-1|$$

como  $0 < k < +\infty$  temos:

$$k_1 |G(s)H(s)| = 1$$

Para  $s=p$  teremos:

$$k_1 |G(s)H(s)|_{s=p} = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{|G(s)H(s)|_{s=p}}$$

Exemplo: Suponha que no sistema da fig.1, as funções de transferência são:

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \text{ e } H(s) = \frac{1}{s}.$$

Calcule o máximo valor de  $k$  de tal forma que os pólos de malha fechada do sistema fiquem dentro do círculo. Trace o "root-locus" do sistema para ajudar.

Neste caso, teremos:  $kG(s)H(s) = \frac{k}{s(s-1)}.$

Temos: pólos:  $p_1=0$  e  $p_2=1$

zeros: nenhum

$$n_p=2 \Rightarrow N_{z\infty}=2-0=2$$

$$n_z=0$$

- Ângulo das assíntotas:

$$\theta = \frac{(2i+1) \cdot 180}{n_p - n_z} = \pm 90^\circ$$

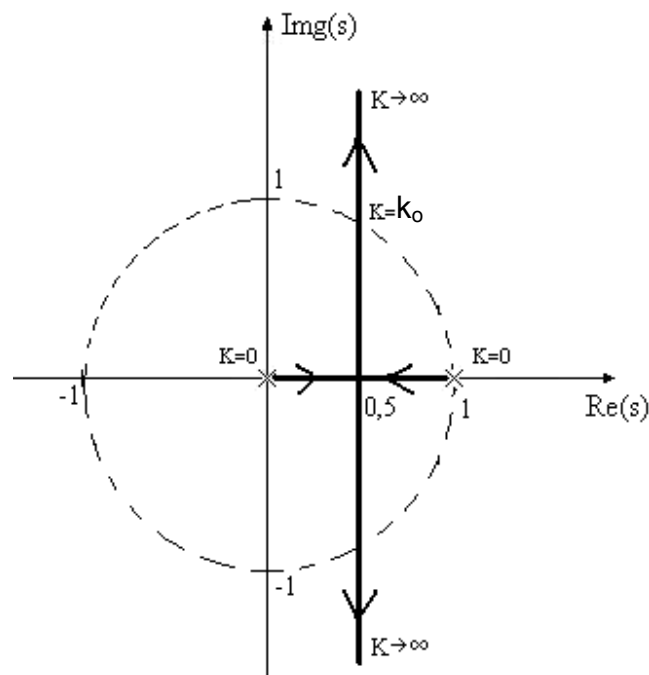
- CG das assíntotas:

$$CG = \frac{\sum \text{pólos} - \sum \text{zeros}}{n_p - n_z} = \frac{0+1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

- Ponto de partida:

$$\frac{d}{ds} ([G(s)H(s)]^{-1}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} (s^2 - s) = 2s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

O "root-locus"



Veremos mais adiante que um sistema discreto será estável se as raízes da F.T.M.F. ficar dentro do círculo unitário. Isto é respeitado se e somente se  $0 < k < k_0$ . Para determinar  $k_0$ , iremos utilizar a regra 8, sendo que o ponto de cruzamento do “root-locus” com o círculo unitário é:

$$s_o = \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pela regra 8, a condição de módulo é:

$$k_o = \frac{\prod_{j=1}^n |p - p_j|}{\prod_{i=1}^m |p - z_i|} = \left| \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right| \left| \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = 1$$

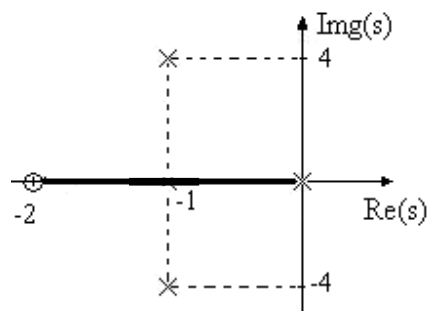
Logo, para que o sistema discreto seja estável, é necessário que:  $0 < k < 1$ .

Obs: Este não é o critério de estabilidade para sistemas contínuos no tempo.

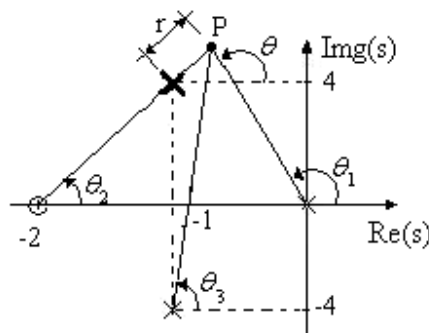
**Regra 9:** Os ângulos de saída (chegada) de pólos (aos zeros) são determinados a partir do condição geral de ângulo.

Exemplo: Seja  $kG(s)H(s) = \frac{k(s+2)}{s(s+1+4j)(s+1-4j)}$

Neste caso:  $N_{z\infty}=3-1=2$ , portanto teremos 2 assíntotas.  
O esboço inicial do "root-locus" é:



Precisa-se determinar o ângulo  $\theta$  com o qual o "root-locus" deixa os pólos complexos. Para isto, verificamos qual é o ângulo de um ponto P próximo a esse pólo, fazendo:



Pela condição de ângulo, teremos:

$$\left| \frac{G(s)H(s)}{s} \right|_{s=p} = \theta_2 - \theta - \theta_1 - \theta_3 = (2i+1) \cdot 180^\circ, \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Se a distância entre p e o pólo for nula, ou seja  $r \rightarrow 0$ , os ângulos serão:

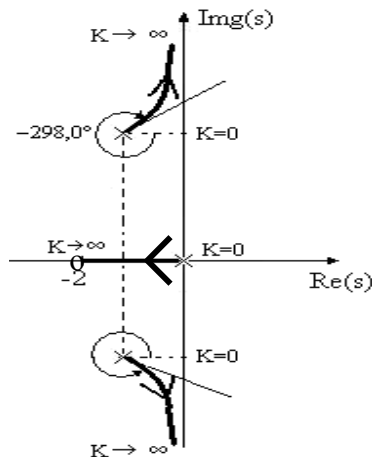
$$\begin{cases} \theta_1 = (\arctg \frac{1}{4}) + 90^\circ = 104,04^\circ \\ \theta_2 = \arctg \frac{4}{1} = 75,96^\circ \\ \theta_3 = 90^\circ \\ \theta = ? \end{cases}$$

Logo, substituindo esses valores na equação de ângulo, teremos:

$$75,96^\circ - \theta - 104,04^\circ - 90^\circ = (2i+1) \cdot 180^\circ$$

Para  $i = 0 \Rightarrow \theta = -298,08^\circ$ , que é ângulo de partida dos pólos.

O "root-locus" será:



Exemplo: Suponha que no sistema da Fig. 1, tenhamos:  $kG(s)H(s) = \frac{k(s+0,5)}{s(s-1)}$ . Trace o "root-locus".

Este sistema tem dois pólos e um zero, é conhecido que neste caso, o "root-locus" é um círculo centrado no zero. Para determinar o raio basta calcular o ponto de partida com a relação:

$$\frac{d}{ds} [G(s)H(s)^{-1}] = 0 \quad (\text{regra 5})$$

Neste caso,

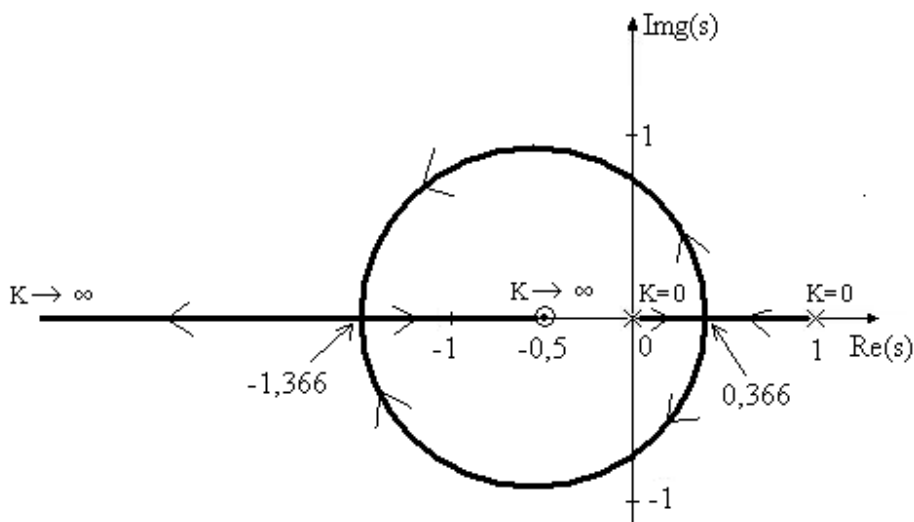
$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{s(s-1)}{(s+0,5)} \right] = 0$$

$$\frac{(2s-1)(s+0,5) - (s^2-s)}{(s+0,5)^2} = 0 \Rightarrow s^2 + s - 0,5 = 0$$

Então:  $s_1 = 0,366$   
 $s_2 = -1,366$

O "root-locus" será:





Este sistema tem os mesmo pólos que o do exemplo dado na regra 8, mais um zero em -0,5. Comparando os dois "root-locus" dos exemplos, percebe-se que a presença do zero 'atrai' o "root-locus".

No próximo capítulo, serão apresentadas as especificações de um sistema de controle e os principais métodos de projeto de controladores.

Exercício: Trace o root locus de cada um dos três sistema:

$$i) G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$ii) G_2(s)H_2(s) = \frac{(s+4)}{s(s+1)}$$

$$iii) G_3(s)H_3(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

Conclua que zeros atraem o R-L e pólos repelem o R-L.

**Regra 10** – O ponto onde o root locus cruza o eixo imaginário é obtido fazendo-se  $s=j\omega$  na equação característica.

Exemplo: Na Figura 1, suponha que  $kG(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s}$  e  $H(s) = 1$ .

A equação característica é:  $1+kG(s)H(s)=0$

Então:

$$1 + \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s} = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Fazendo } s=j\omega \Rightarrow & (j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2j\omega + k = 0 \\ & -j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + k = 0 \\ & j(2\omega - \omega^3) + (k - 3\omega^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\omega - \omega^3 = 0 & (i) \\ k - 3\omega^2 = 0 & (ii) \end{cases} \end{aligned}$$

$$k - 3\omega^2 = 0 \quad (ii)$$

de (i) temos  $\omega(2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = 0$  ou  $\omega = \pm\sqrt{2}$

$$\text{de (ii) temos } k - 3\omega^2 = 0 \Rightarrow k = 3\omega^2 \quad (iii)$$

- $\omega = 0$  não é aceito pois ocorre quando  $k = 0$
- $\omega = \sqrt{2}$  é a solução.

Para  $\omega = \sqrt{2}$ , o valor de  $k$  é obtido através da expressão (iii)  $k = 3(\sqrt{2})^2 \Rightarrow k = 6$ .

$$\text{Vamos traçar o R-L completo: } kG(s)H(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{k}{(s+1)(s+2)s}$$

Pólos:  $P_1 = -1$ ;  $P_2 = -2$ ;  $P_3 = 0$

Zeros: nenhum

$$N_p = 3; N_z = 0 \Rightarrow N_{z\infty} = 3 - 0 = 3$$

$$\text{Ângulos das assíntotas: } \theta = \frac{(2i+1) \cdot 180^\circ}{n_p - n_z} = (2i+1) \cdot 60^\circ = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ.$$

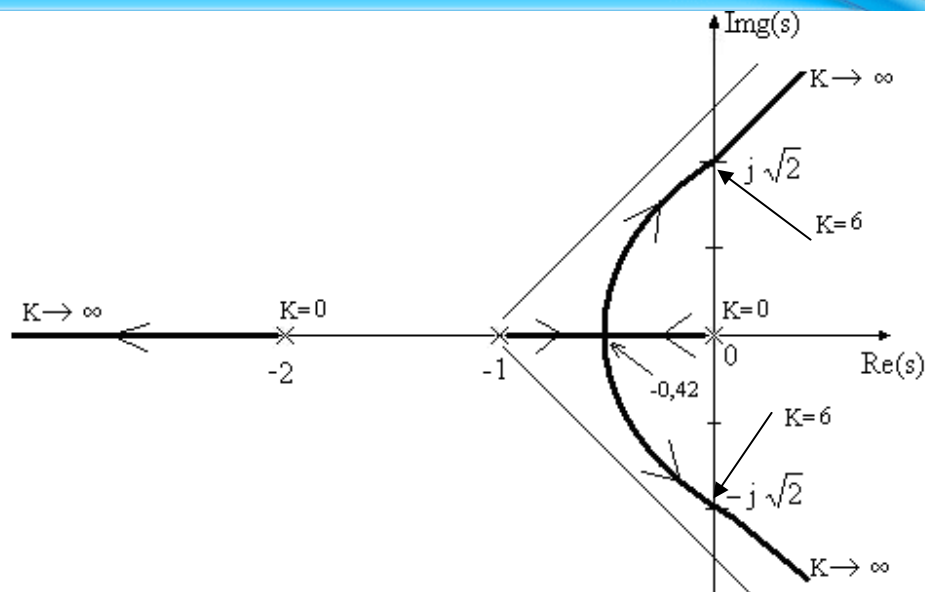
$$\text{Ponto de ramificação (de partida): } \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \right)^{-1} \right] = 0$$

$$\frac{d}{ds}(s^3 + 3s^2 + 2s) = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6s + 2 = 0$$

$$\Delta = 36 - 24 = 12; s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{6} \begin{cases} s_1 = -1,58 \\ s_2 = -0,42 \end{cases}$$

$$\text{CG das assíntotas: } CG = \frac{\sum \text{pólo} - \sum \text{zeros}}{n_p - n_z} = \frac{(-1 - 2 + 0) - 0}{3 - 0} = -1$$

Temos:



Pode-se concluir pelo root locus que o sistema é estável para  $0 < k < 6$ .

O cruzamento do R-L com o eixo imaginário também pode ser determinado usando o critério de estabilidade de Routh, dado nos capítulos anteriores. Vide exemplo abaixo.

Exemplo: Para o mesmo exemplo anterior, determine o valor de  $k$  quando o R-L cruze o eixo imaginário usando o critério de Routh.

Sol.: F.T.M.F será:

$$\frac{kG(s)H(s)}{1+kG(s)H(s)} = \frac{\frac{k}{s^3+3s^2+2s}}{1+\frac{k}{s^3+3s^2+2s}} = \frac{k}{s^3+3s^2+2s+k}$$

Logo o polinômio característico é:  $s^3+3s^2+2s+k$

1º)  $k > 0$

2º)  $s^3+3s^2+2s+k$

3º) Montar tabela:

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$k$
$s^1$	$\frac{3 \cdot 2 - k}{3}$	0
$s^0$	$k$	

$$\therefore \frac{6-k}{3} > 0 \Rightarrow k < 6$$

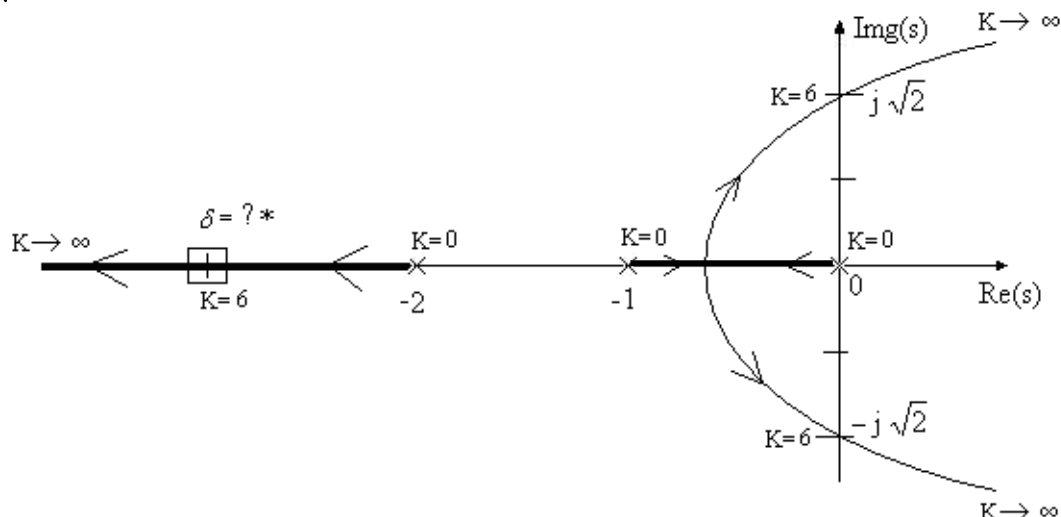
$$k > 0$$

Portanto o sistema será estável se  $0 < k < 6$ , e quando  $k=6$ , a raiz da F.T.M.F estará sobre o eixo imaginário, quando o R-L cruza o eixo imaginário.

**Regra 11** – Se pelo menos dois ramos do Root Locus vão para o infinito (ou seja se tem pelo menos 2 assíntotas), então a soma dos pólos de malha fechada correspondentes a um mesmo  $k$  é uma constante independente de  $k$ .

Exemplo: No exemplo anterior, calcule todos os pólos do sistema de malha fechada quando  $k=6$ .

Deseja-se determinar a 3ª raiz do R-L, quando  $k=6$  pois as outras duas já sabemos:  
 $\omega = \pm j\sqrt{2}$ .

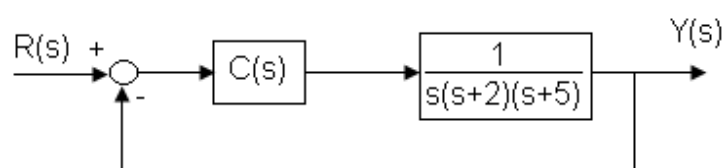


Neste caso temos 3 assíntotas, portanto podemos aplicar a regra 11:

$$\sum \text{pólos} \Big|_{k=0} = \sum \text{pólos} \Big|_{k=6}$$

$$-2 - 1 - 0 = -j\sqrt{2} + j\sqrt{2} + \delta \Rightarrow \delta = -3 *$$

Exercícios: Um sistema de controle está mostrado abaixo:



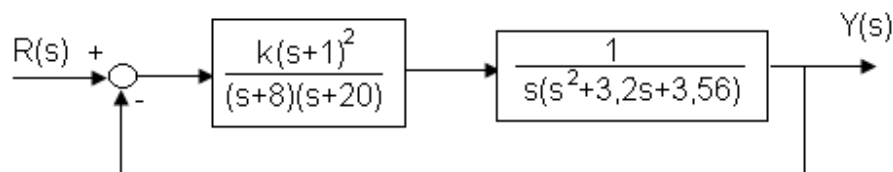
Esboçar o root locus para cada um dos sistemas que tenham:

- $C(s) = k$
- $C(s) = k(s+1)$
- $C(s) = \frac{k(s+1)}{(s+10)}$

$$d) C(s) = \frac{k(s+1)(s+3)}{s+10}$$

Obs.: o controlador não deverá ter mais pólos que zeros, devido a dificuldade de implementação prática.

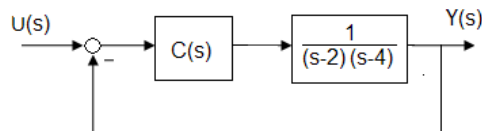
Exercícios: trace o root locus do seguinte sistema de controle



### Técnicas de Projeto de Controladores usando o Root-Locus

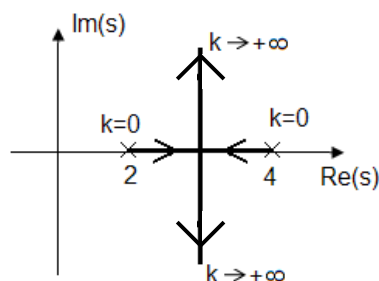
Uma propriedade importante do Root-Locus, dada como exercício na pg. 176, é que zeros atraem a Root-Locus e pólos repelem o Root-Locus. Então, utiliza-se esta propriedade para projetar controladores que estabilizem a planta (sistema de malha fechada) e ainda atendam as especificações de desempenho: PO%,  $t_e$  e erro de regime permanente.

Exemplo: Projete um controlador  $C(s)$ , tal que o sistema abaixo seja estável:



1º tentativa: propõem-se o controlador  $C(s)$  o mais simples possível, ou seja  $C(s)=K$ , apenas um ganho  $k$ . Será que existe  $k$ , tal que, o sistema de malha fechada seja estável? Usemos o Root-Locus para verificar:

$$C(s) \cdot G(s) = \frac{K}{(s-2)(s-4)};$$



$$N_p=2$$

$$N_z=0 \Rightarrow N_{z\infty}=2-0=2$$

$$\theta_{as \sin t} = \frac{(2i+1)}{2} \cdot 180 = \pm 90^\circ$$

$$CG = \frac{(2+4)-0}{2} = 3$$

$$\text{Ponto de Partida} = \frac{d}{ds}(s^2 - 6s + 8) = 2s - 6 \Rightarrow s = 3$$

∴ Não é possível estabilizar o sistema com  $C(s)$  igual a apenas um ganho.

2º tentativa: atrair o Root-Locus para a região de estabilidade colocando zeros no lado esquerdo do plano  $s$ , zeros do controlador. Como o controlador deve ser implementado, o número de zeros não pode ser maior que o número de pólos. Então, sugerimos:

$$C(s) = \frac{K(s+2)(s+4)}{(s+100)(s+200)}$$

Então:

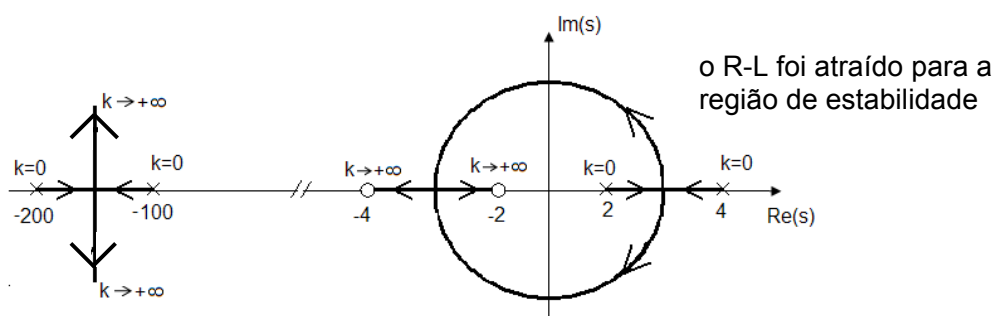
$$G(s)C(s) = \frac{K(s+2)(s+4)}{(s+100)(s+200)} \cdot \frac{1}{(s-2)(s-4)}$$

Pólos:  $p_1 = -100$ ,  $p_2 = -200$ ,  $p_3 = 2$ ,  $p_4 = 4$ ,  $N_p = 4$

Zeros:  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = -4$ ;  $N_z = 2$

$N_{zoo} = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \theta_{assint} = \pm 90^\circ$

$$CG = \frac{\sum p - \sum z}{N_p - N_z} = \frac{-100 - 200 + 2 + 4 + 2 + 4}{4 - 2} = \frac{-288}{2} = -144$$



É necessário determinar o valor de  $k$  tal que o sistema seja estável:  
Usando a regra 10:

$$1 + \frac{1 \cdot K(s+2)(s+4)}{(s-2)(s-4)(s+100)(s+200)} \Big|_{s=j\omega} = 0$$

$$\left[ (s^2 + 6s + 8)(s^2 + 300s + 20000) + K(s^2 + 6s + 8) \right]_{s=j\omega} = 0$$

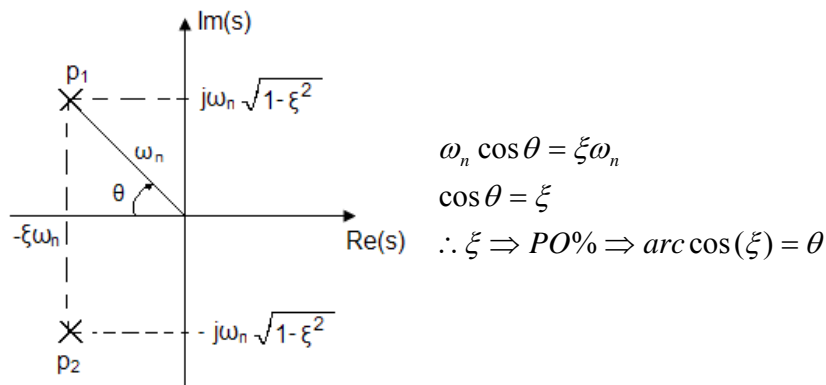
$$K = 20.015 \text{ e } \omega = 2,9$$

Então,  $K > 20.015$  soluciona o problema, por exemplo, use  $K = 20.040$ .

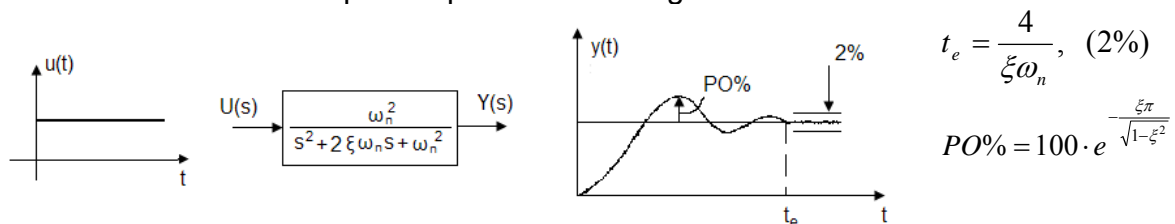
Não é apenas a estabilidade uma necessidade de projeto de sistemas de controle, mas também, os índices de desempenho estudados no Capítulo 8,  $PO\%$  e  $t_e$ . Relembrados abaixo, segundo localização no plano- $s$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Raízes:  $s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$  para  $0 < \xi < 1$



Índices de desempenho: para entrada degrau

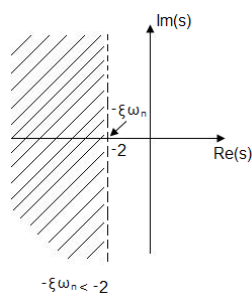


Exemplo: Deseja-se  $PO\% \leq 5\%$  e  $t_e \leq 2s$ . Especifique a região na qual os pólos do sistema devem estar no plano-s. Use o critério de 2% para o tempo de estabelecimento.

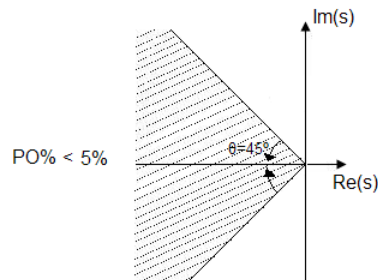
Sol:

- $t_e = \frac{4}{\xi \omega_n} \leq 2 \Rightarrow \xi \omega_n \geq 2 \Rightarrow -\xi \omega_n \leq -2$

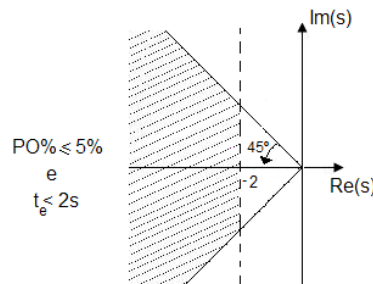
logo



- $PO\% \leq 5\% \Rightarrow \xi \geq 0,7 \Rightarrow \theta < 45^\circ$   
logo



As duas especificações são satisfatórias na intersecção das regiões acima, ou seja:



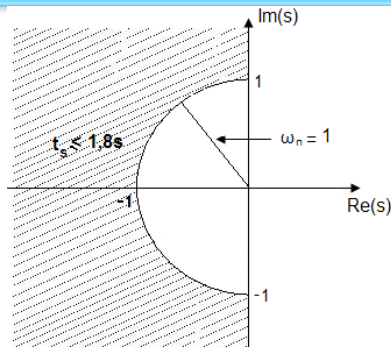
Assim, os pólos de malha fechada do sistema de controle, para o qual necessita-se de  $PO\% \leq 5\%$  e  $T_e < 2s$ , deverão estar dentro da região acima. os pólos do Root-Locus deverão passar dentro desta região e então escolher um valor de K tal que os pólos fiquem dentro.

### Tempo de Subida ( $t_s$ )

Como visto nos capítulos anteriores, o tempo de subida é dado por:  $t_s \cong \frac{1,8}{\omega_n}$ , que é uma aproximação considerando  $\xi=0,5$ .

Exemplo: Se  $t_s = 1,8s \Rightarrow \omega_n \geq 1$  logo, a região que satisfaz é:

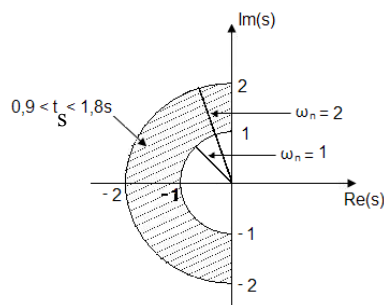




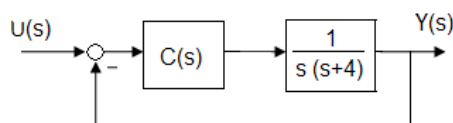
Exemplo: Deseja-se  $0,9s \leq t_s \leq 1,8s$  logo:

- $\frac{1,8}{\omega_n} \leq 1,8 \Rightarrow \omega_n \geq 1$
- $\frac{1,8}{\omega_n} \geq 0,9 \Rightarrow \omega_n \leq 2$

temos:



Exemplo: Projete o controlador  $C(s)$  abaixo tal que o sistema tenha  $PO\% \leq 5\%$  e  $T_e \leq 4s$ , tempo de estabelecimento para critério de 2%.



sol: Primeiramente desenha-se a região do plano-s que satisfaz todas as especificações:

$$PO\% < 5 \Rightarrow \xi > 0,7 \Rightarrow \theta < 45^\circ$$

$$t_e < 4 \Rightarrow \frac{4}{\xi \omega_n} < 4 \Rightarrow \xi \omega_n > 1 \Rightarrow -\xi \omega_n < -1$$

a região que satisfaz todas especificações está mostrada na página seguinte.

Primeira tentativa: suponhamos  $C(s)=K$ , temos

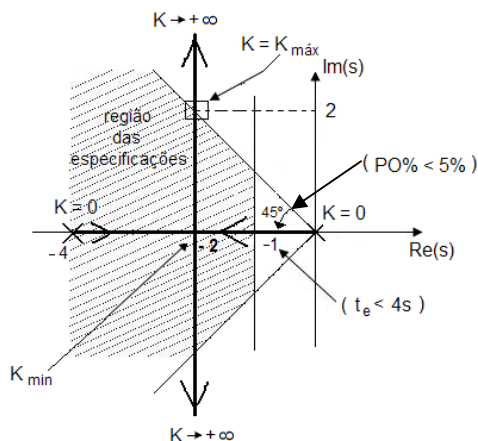
$$G(s)C(s) = \frac{K}{s(s+4)} \Rightarrow N_p = 2$$

$$N_z = 0 \Rightarrow N_{z\infty} = 2$$

$$\theta_{as \sin t} = \pm 90^\circ$$

$$CG = \frac{0-4+0}{2-0} = -2$$

Temos



Note que o sistema de malha fechada será sempre estável.

O  $K_{\min}$  é necessário para que o sistema tenha pólos complexos conjugados,  $\xi > 0$   
 $0 < \xi < 1$

É necessário determinar o valor de  $K$  tal que, para valores menores de  $K$  os pólos de malha fechada estejam dentro da região especificada, ou seja,  $K=K_{\max}$ .

Pela figura anterior, para  $K=K_{\max}$ , tem-se  $s=-2+j2$ , pois  $\theta=45^\circ$ . Então:  
 $1+G(s)C(s)=0$ , condição de módulo:

$$K_{\max} \frac{1}{|s(s+4)|} \Big|_{s=-2+j2} = |-1|$$

$$K_{\max} = |-2+j2| \cdot |-2+j2+4| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} \Rightarrow \therefore K_{\max} = 8$$

$$K_{\min} \frac{1}{|s(s+4)|} \Big|_{s=-2} = |-1| \Rightarrow \therefore K_{\min} = 4$$

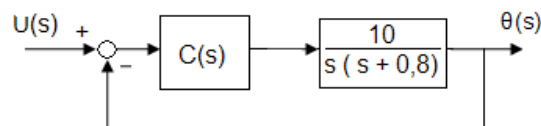
$$\therefore 4 < K \leq 8$$

Logo pode usar  $K=6$ , por exemplo.

Então:  $C(s)=6$

Obs: Não use o  $K=K_{\min}$  pois o sistema está no caso sub amortecido. É necessário que  $K > K_{\min}$ .

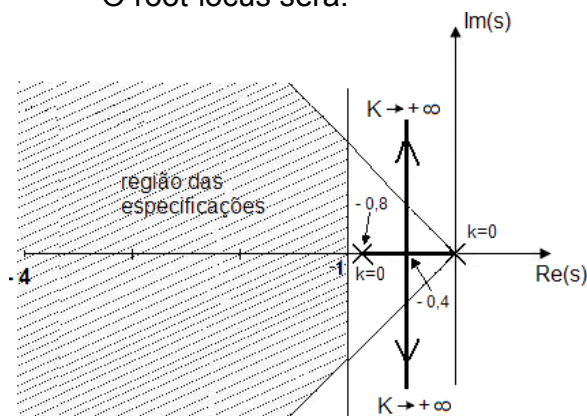
Uma outra técnica de projeto de controladores é a técnica de cancelamento de pólos e zeros (todos do lado esquerdo do plano  $s$ ), de tal forma que o R-L passe dentro da região das especificações. Isto é ilustrado seguir:  
Exemplo: O rastreador solar, dado nos capítulos anteriores, tem a seguinte estrutura de controle:



Projete o controlador  $C(s)$  tal que o sistema de malha fechada tenha,  $PO\% < 5\%$  e  $t_e < 4s$  (critério 2%).  
sol: Note que a região das especificações são as mesmas do exemplo anterior.  
primeira tentativa:  $C(s) = K_c$ , temos:

$$KG(s)C(s) = K_c \frac{10}{s(s+0,8)} = \frac{k}{s(s+0,8)}, \quad k = K_c \cdot 10$$

O root-locus será:

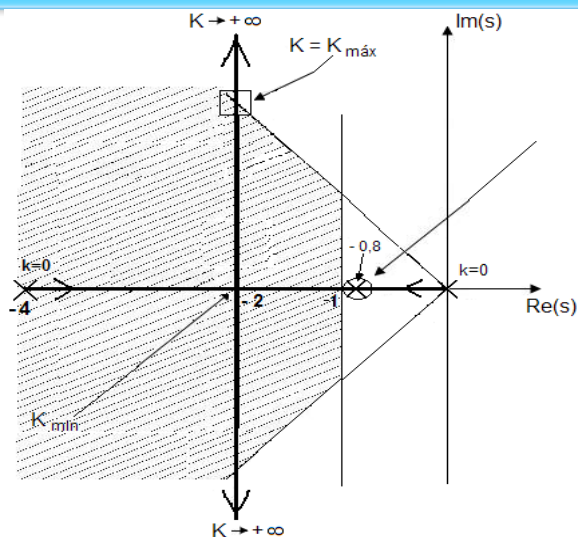


Note que o root-locus não passa dentro da região das especificações, logo não existe  $K$  tal que as especificações sejam atendidas.

Segunda tentativa: iremos cancelar o pólo  $-0,8$  da planta com um zero do controlador  $C(s)$  e colocar um pólo do controlador tal que o novo R-L passe dentro da região das especificações:  $C(s) = \frac{K_c(s+0,8)}{(s+4)}$ , temos:

$$KG(s)C(s) = \frac{K_c(s+0,8)}{(s+4)} \cdot \frac{10}{s(s+0,8)} = \frac{k(s+0,8)}{(s+4)s(s+0,8)}, \quad k = K_c \cdot 10$$

Neste caso o root-locus será



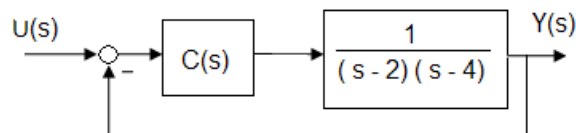
O pólo  $p_1=0,8$  da planta foi cancelado pelo zero  $z_1=-0,8$  do controlador

Neste caso  $k_{\max}=8$ , mas  $k=K_c \cdot 10 \Rightarrow K_{c\max}=0,8$   
 $k_{\min}=4 \Rightarrow K_{c\min}=0,4$

Temos: 
$$C(s) = \frac{0,7(s+0,8)}{(s+4)}$$

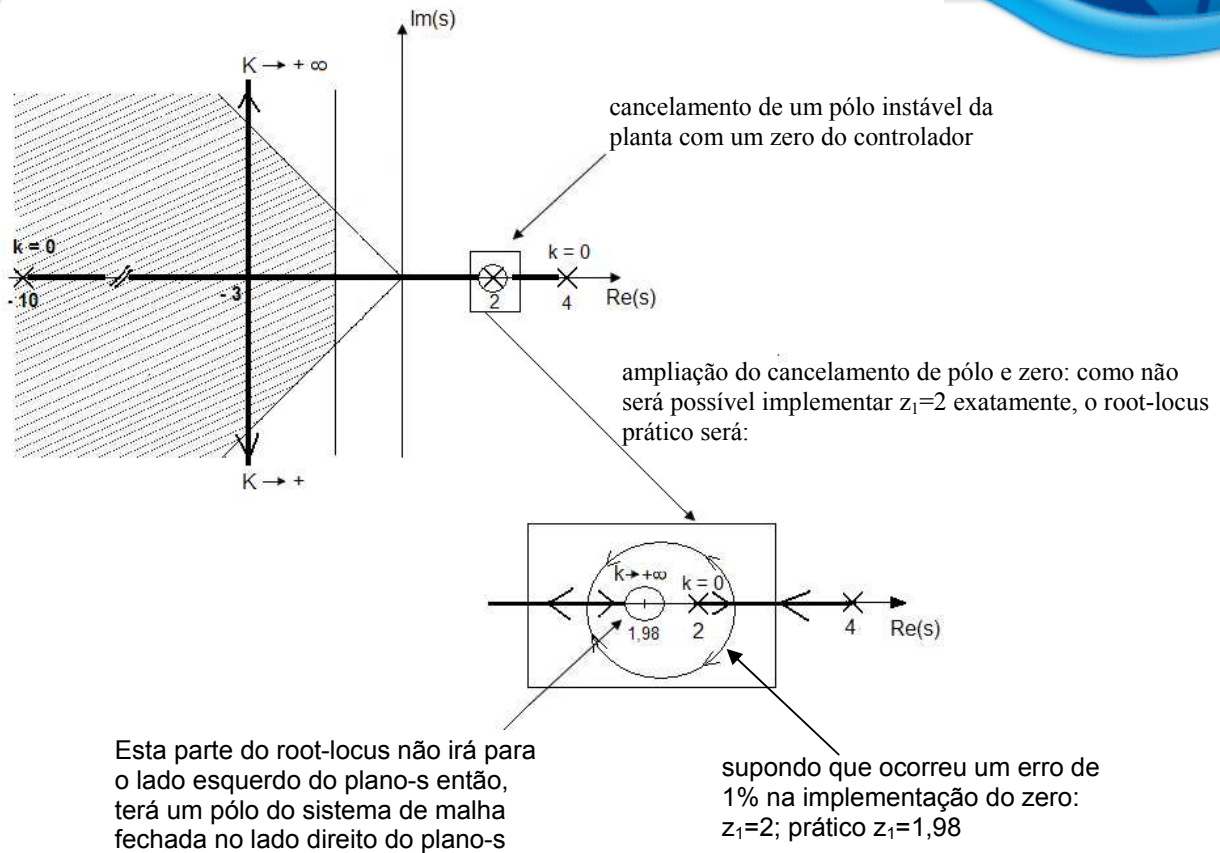
Exercício: Projete um circuito com A.O. (Amplificador Operacional) que implemente o controlador projetado acima. Dica, use os capítulos anteriores desta apostila.

Nota Importante: o cancelamento de pólos e zeros mostrado anteriormente não pode ocorrer no lado direito do plano-s ou no eixo imaginário. Isto se deve ao fato de que o controlador  $C(s)$  projetado nunca poderá ser implementado na prática com um erro nulo. Na prática a implementação de  $C(s)$  não será ideal. Por exemplo, poderíamos propor o cancelamento de pólos e zeros para o exemplo da pg. 181, onde



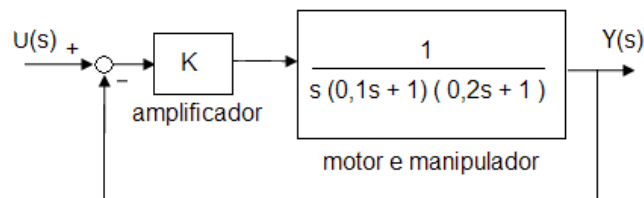
Assim, para atrair o R-L para o lado esquerdo do plano-s e colocá-lo dentro da região de estabilidade e especificações, podem propor o simples controlador, cancelando o pólo em  $p_1=2$ :

$$C(s) = \frac{K(s-2)}{(s+10)}$$



**Nota:** Ao projetar um controlador, deve-se observar a dominância dos pólos que ficam dentro das regiões das especificações. A dominância de pólos já foi estudada nesta apostila. No exemplo da página 182, os pólos do controlador foram colocados em -100 e -200, para que os pólos mais próximos da origem, de malha fechada, fossem dominantes.

**Exercício:** Os lasers podem ser usados para perfurar o colo do fêmur na bacia visando a inserção apropriada de uma prótese. O uso de laser na cirurgia requer alta precisão na resposta de posição e de velocidade. O sistema de controle que usa um manipulador com motor CC é dada abaixo:

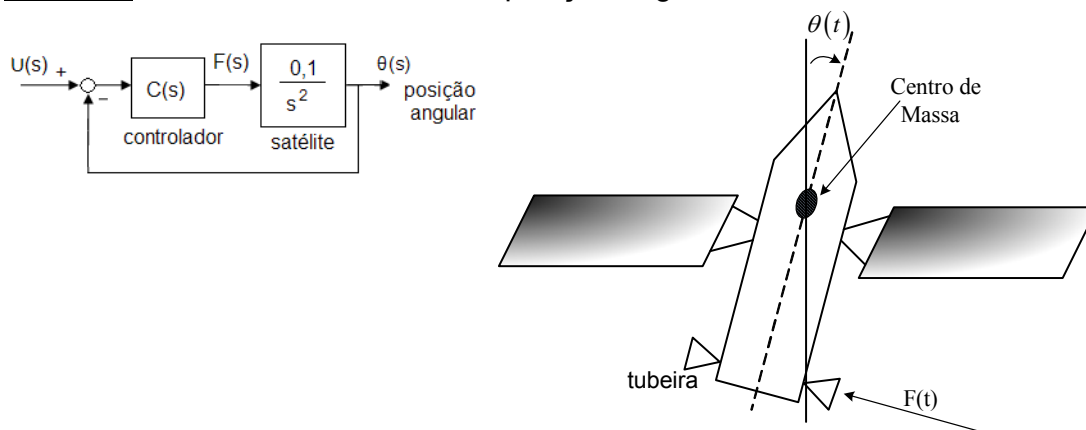


O ganho  $K$  do amplificador deve ser projetado de modo que o erro estacionário para uma entrada rampa  $u(t)=At$ ,  $A=1\text{mm/s}$ , seja menor ou igual a

0,3mm, ainda, ser estável, ter  $PO\% < 20\%$  e  $t_e < 8s$  (para 2% de regime). Use o root-locus e o conceito de pólos dominantes. Lembre-se que  $\varepsilon(\infty) = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)G(s)}$  (para

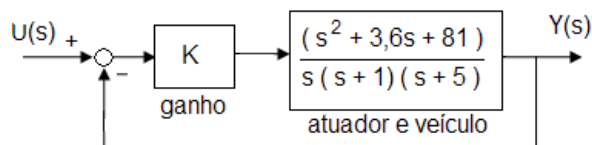
$D(s)G(s)$  com 1 pólo na origem)

Exercício: O sistema de controle de posição angular de um satélite é dado abaixo.



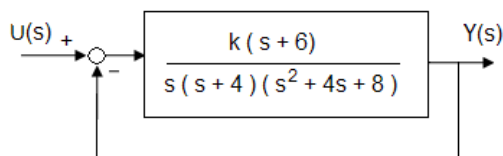
Projete  $C(s)$  tal que o sistema seja estável, tendo-se  $PO\% < 5\%$  e  $t_e < 0,1s$ .

Exercício: Nos últimos anos vêm sendo utilizados nas fábricas muitos sistemas de controle automáticos para veículos autoguiados. O sistema de controle de um deles é dado abaixo:



Monte o root-locus e determine um valor adequado para o ganho  $K$  de modo que  $\xi = 0,707$  das raízes complexas conjugadas dominantes.

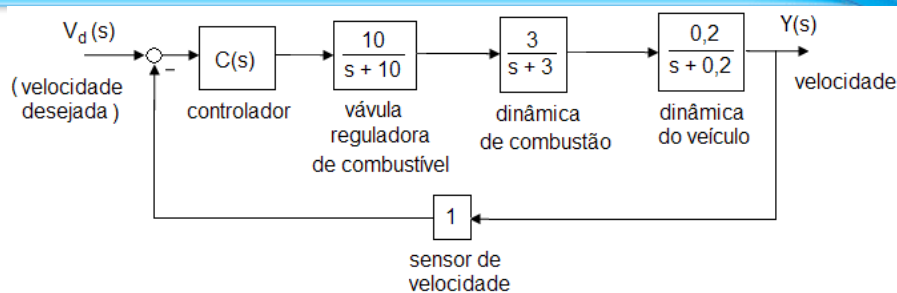
Exercício: Um avião a jato de elevado desempenho tem sistema de controle dado abaixo:



Monte o lugar das raízes e determine o ganho  $K$  de modo que  $\xi$  dos pólos complexos conjugados próximos ao eixo  $j\omega$  (pólos dominantes) seja o maior possível. Calcular as raízes para este valor de  $K$  e prever a resposta ao degrau do sistema (qual serão  $PO\%$  e  $t_e$ ?). Use o MATLAB para obter  $y(t)$  para  $u(t)$  degrau e compare com o esperado. Existe dominância?

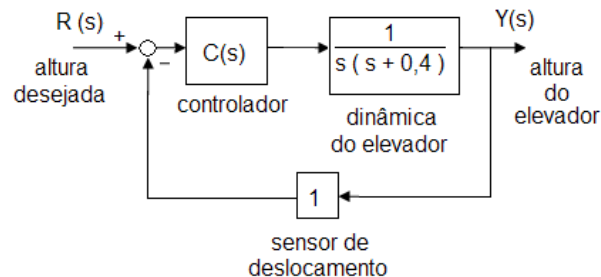
Exercício: O diagrama de blocos do sistema de controle da velocidade de um automóvel autônomo é mostrado abaixo:





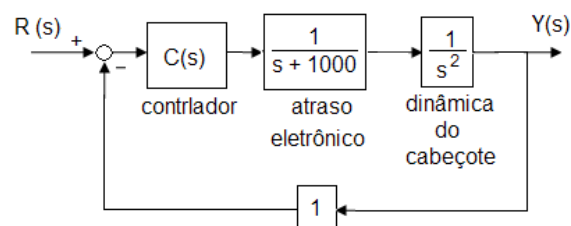
Para melhorar a resposta do veículo, é necessário projetar o controlador tal que o sistema de malha fechada não tenha overshoot, ou seja,  $\xi \geq 0,9$ ; e que o tempo de subida esteja entre:  $3,0 \leq t_s \leq 6,0s$ .

Exercício: O sistema de controle de um elevador de cargas automático é mostrado abaixo:

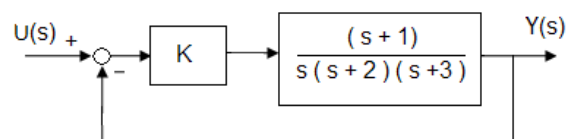


Projete o controlador tal que o sistema tenha  $PO\% \leq 10\%$ , tempo de subida aproximadamente  $0,5s$  e erro de regime nulo para entrada degrau.

Exercício: Para o sistema posicionador do cabeçote do disco rígido (Winchester) dos computadores, dado na figura abaixo, projete o controlador tal que o sistema tenha tempo de subida de  $18 \leq t_s \leq 22ms$  e overshoot  $\leq 20\%$ .



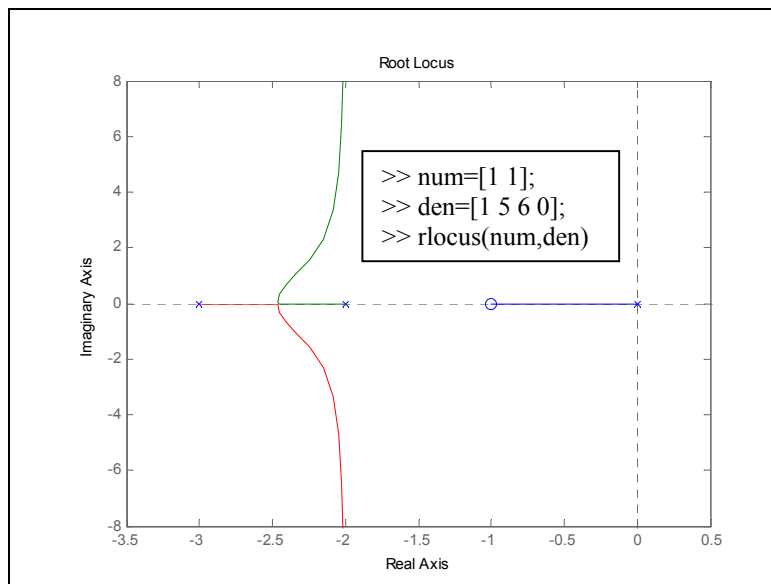
O MATLAB traça o root-locus facilmente. Por exemplo para traçar o root-locus de



Basta definir o numerador e o denominador de  $G(s)H(s)$ :

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3 + 5s^2 + 6s}$$

e usar a função 'rlocus( )':



Caso deseja-se obter o valor  $k$  para um ponto sobre a root-locus, use a função.

`rlocfind(num, den)`

e então posicione o cursor sobre o root-locus e pressione 'enter', na tela irá aparecer

ponto selecionado=-2,0509+4,3228i

ans=

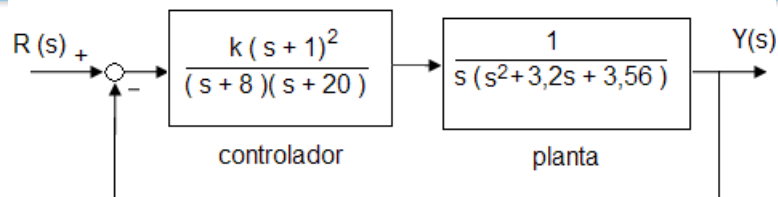
20,5775 (este é o valor de  $k$  quando o pólo for -2,0509+4,3228i)

A região que atende "as especificações podem ser colocadas no root-locus do MATLAB usando-se a função 'sgrid'. Digite: Help sgrid para maiores detalhes.

Após ter projetado o controlador usando MATLAB, o aluno pode simular em seguida o sistema para uma entrada degrau ( ou outras) usando a função 'step' vista nos capítulos anteriores desta apostila.

Exercício: Use o MATLAB para traçar o root-locus do sistema abaixo, e selecione  $k$  tal que a resposta ao degrau tenha  $PO\% < 20\%$  e tempo de estabelecimento menor que 5s.





Simule o sistema com  $k$  projetado e verifique se realmente ocorreu a dominância, modifique os pólos ou zeros do controlador de tal forma a ocorrer a dominância.

O MATLAB tem ainda uma facilidade para projetar e traçar o root-locus chamado 'rltool', que abre uma janela que traça o root-locus, resposta de grau, Bode, Nyquist, etc. Digite no MATLAB: 'rltool'. Veja o exemplo na página seguinte.

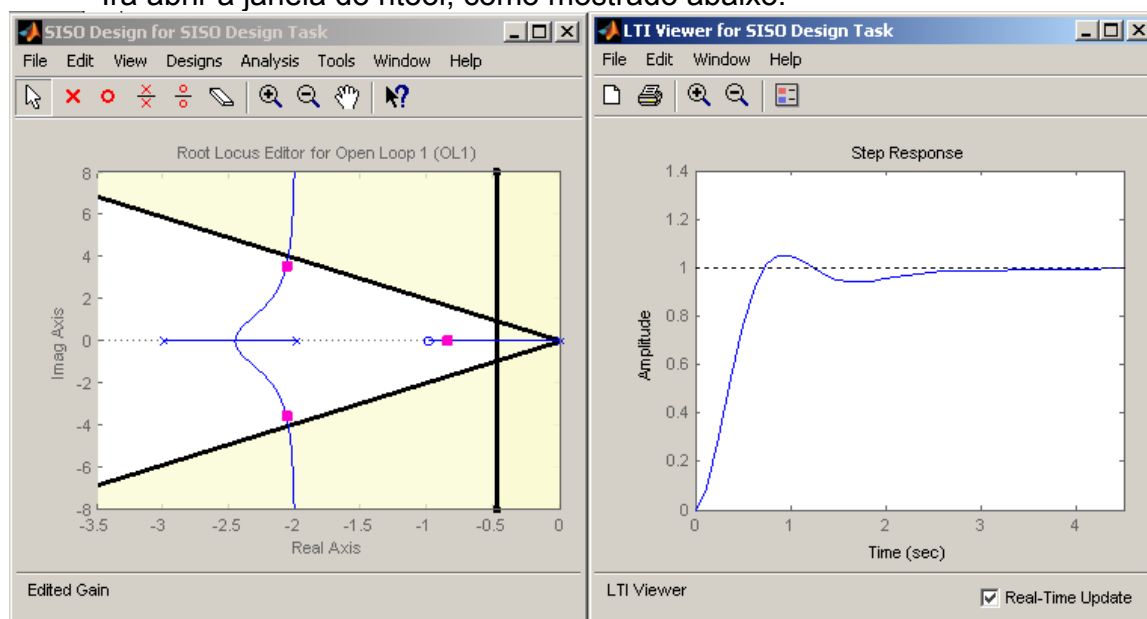
Exemplo: Para

$$G(s)H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3+5s^2+6s}$$

digite no MATLAB:

```
num=[1 1]; den=[1 5 6 0]; sys=tf(num,den); rltool(sys)
```

Irá abrir a janela do rltool, como mostrado abaixo:

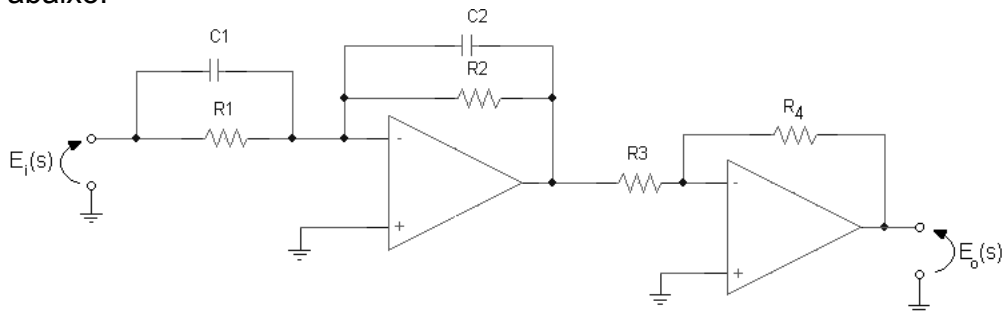


Na janela do Root-Locus, dê um "click" com o botão direito do mouse e selecione: "Design Requirements" → "New" → "Settling Time (sec) = 8". Novamente "New" → "Percent Overshoot = 20". Veja que aparece no root-locus a região que atende essas especificações.

Na figura acima, a resposta ao degrau foi obtida usando a ferramenta "analysis", através de uma janela do "rltool".

### Controlador tipo Avanço (Lead)

A figura abaixo mostra um circuito com A.O. cuja função de transferência é dada abaixo:

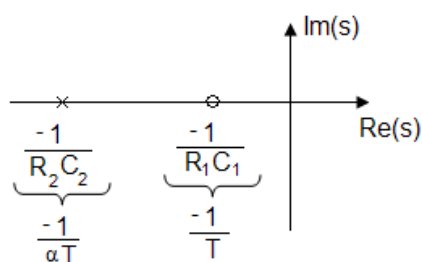


$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

Sendo

$$T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_2 C_2 \quad e \quad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

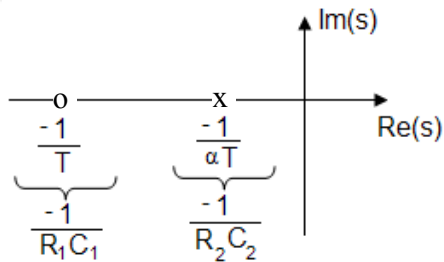
Se  $\alpha < 1 \Rightarrow$  Circuito com avanço de fase (lead) e as raízes no plano-s são:



#### Característica

- Melhora a resposta transitória
- Pouca influência na resposta em regime permanente
- Melhora estabilidade

Se  $\alpha > 1 \Rightarrow$  Circuito com atraso de fase (lag) e as raízes no plano-s são:

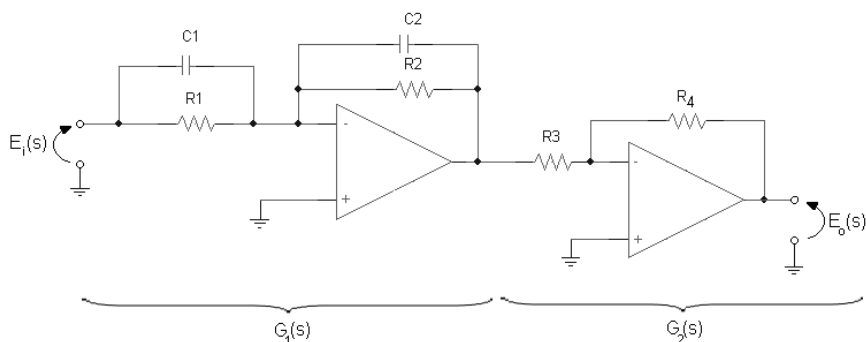


#### Característica

- Melhora a resposta em regime permanente
- Pouca influência na resposta transitória
- Piora a estabilidade

Demonstração do cálculo da função de transferência do circuito da página anterior.

O circuito anterior está repedido abaixo:



Como este é um circuito com A.O., a função de transferência de  $E_o(s)$  para  $E_i(s)$  é:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Claramente que  $G_2 = \frac{-R_4}{R_3}$

Da mesma forma,  $G_1 = \frac{-Z_2}{Z_1}$

Neste caso,

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\frac{1}{sC_1}} \Rightarrow Z_1 = \frac{R_1}{1 + R_1C_1s}$$

Da mesma forma,  $Z_2 = \frac{R_2}{1 + R_2C_2s}$

logo,

$$G_1 = -\frac{\frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}}{\frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + R_2 C_2 s}$$

ou ainda,

$$G_1 = \frac{\cancel{-R_2} \cdot \cancel{R_1 C_1} \cdot \left[ \frac{1}{\cancel{R_1 C_1}} + s \right]}{\cancel{R_1} \cdot \cancel{R_2 C_2} \cdot \left[ \frac{1}{\cancel{R_2 C_2}} + s \right]}$$

∴

$$G_1 = \frac{-C_1}{C_2} \cdot \frac{\left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{\left( s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)}$$

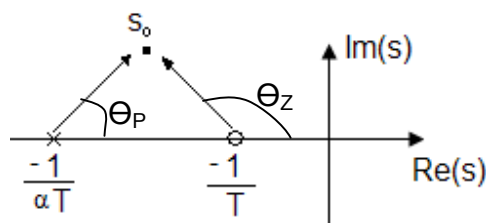
$$\therefore \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \cdot \frac{\left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{\left( s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)} \quad \text{c.q.d}$$

Então a função de transferência deste controlador é:

$$C(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}; \quad T = R_1 C_1; \quad \alpha T = R_2 C_2 \quad e \quad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}$$

A seguir será mostrada uma técnica de projeto de controlador em avanço (lead).

Nota: O controlador é dito em avanço devido ao fato de  $\Theta_Z > \Theta_P$ :

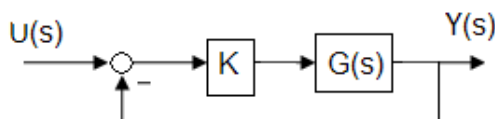


$$\text{Logo: } \angle C(s_0) = \Theta_Z - \Theta_P > 0$$

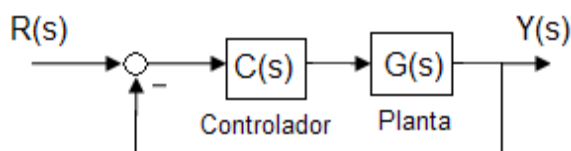
Sendo  $C(s)$  a função de transferência do controlador em avanço (lead) dada anteriormente.

### Técnica de projeto de Controlador em Avanço (lead)

- 1- Partindo das especificações de desempenho ( $PO\%$ ,  $t_e$ ) determine as localizações desejadas dos pólos dominantes no plano-s.
- 2- Verifique se, usando apenas um ganho na malha aberta, é possível satisfazer as especificações de projeto, para isto use o root-locus



- 3- Se for possível, o projeto está terminado, do contrário vá para o passo 4.
- 4- Fixe um ponto no plano-s ( $s=s_o$ ) tal que todas as especificações sejam obedecidas ( $PO\%$  e  $t_e$ ). Encontre um compensador  $C(s)$  na configuração:



$C(s)$  → controlador em avanço  
de tal forma que  $s=s_o$  pertença ao root-locus deste sistema.  
Para isto, deve-se ter

$$1 + C(s) \cdot G(s) \Big|_{s=s_o} = 0 \Rightarrow C(s_o) \cdot G(s_o) = -1$$

ou

$$C(s_o) = \frac{-1}{G(s_o)} \Rightarrow |C(s_o)| = \frac{1}{|G(s_o)|} \quad e \quad \beta = \angle C(s_o) = \pi - \angle G(s_o) - 2h\pi$$

ou

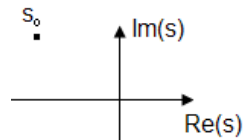
$$\beta = (2h+1)\pi - \angle G(s_o), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \beta = \text{contribuição angular do controlador}$$

Obs.: Dependendo do valor de  $\beta$ , será necessário usar várias redes em avanço em série, sendo que a defasagem de cada rede é  $<90^\circ$  (na prática,  $<56^\circ$ ,  $\alpha=0,1$ ).

O problema agora é determinar  $\alpha$  e  $T$  de modo que  $\angle C(s_o) = \beta$ , sendo  $\beta$  a defasagem necessária do controlador lead, para que o root-locus passe por  $s=s_o$ .

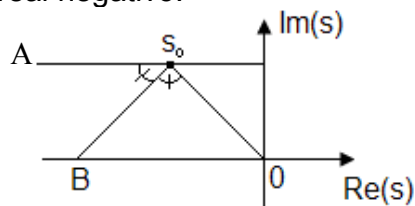
Existem muitos valores de  $\alpha$  e  $T$  que solucionam este problema. O procedimento mostrado a seguir obtém o maior valor possível de  $\alpha$  de modo que o ganho adicional exigido pelo amplificador  $k$  seja o menor possível.

- a) Seja  $s=s_0$  o ponto desejado que o root-locus passe:



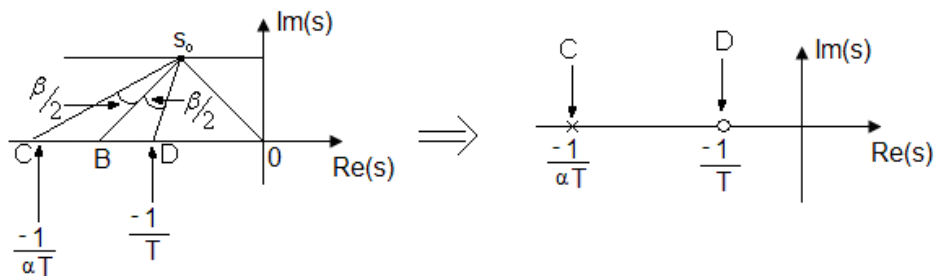
Trace uma reta horizontal ao eixo real passando por  $s=s_0$ .

- b) Una o ponto  $s_0$  com a origem e trace a bissetriz do ângulo  $\angle s_0 0$ , determine o ponto B no eixo real negativo.



- c) Desenhe duas retas  $s_0 C$  e  $s_0 D$  que fazem ângulos  $\pm \frac{\beta}{2}$  com a bissetriz  $s_0 0$ .

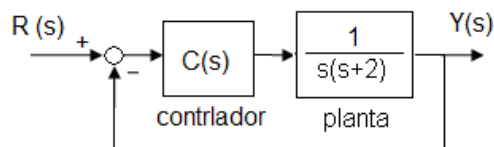
B



As intersecções de  $s_0 C$  e  $s_0 D$  com o eixo real negativo determinam  $-\frac{1}{T}$  e  $-\frac{1}{\alpha T}$  desejados, ou seja, o pólo e o zero desejado do controlador.

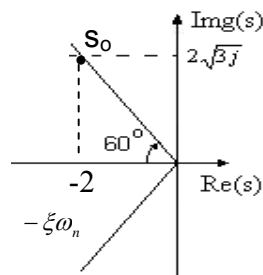
- 5- Coloque este controlador  $C(s)$  projetado na malha do sistema e simule usando o MATLAB. Se o desempenho não estiver como desejado, deve-se tentar outro controlador, do contrário pare.

Exemplo: Projete o sistema de controle abaixo de modo que o sistema de malha fechada tenha  $PO\% \approx 17\%$  e tempo de estabelecimento de 2s (2%), para os pólos dominantes.

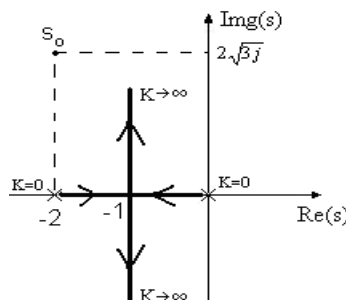


1- As especificações no plano-s são:  
 $PO\% = 17\% \Rightarrow \xi = 0,5 \Rightarrow \theta = 60^\circ$

$$t_e(2\%) = 2s \Rightarrow T_e = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow \xi\omega_n = 2$$



2- Verifique se  $C(s)=k$  soluciona:  $kC(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s(s+2)}$ , o root-locus é:



Portanto o R-L não passa por  $s_0$ , logo  $\nexists k$  que soluciona o problema. Ir para passo 3.

3- Usar compensador lead:  $C(s) = k \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{s + \frac{1}{\alpha T}}$ .

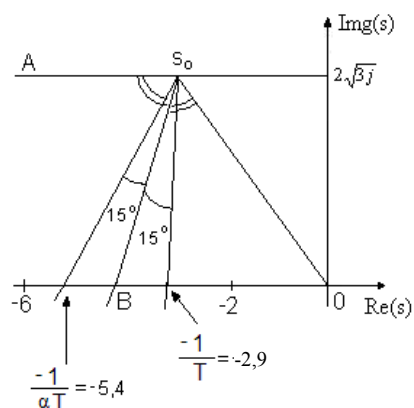
Neste caso a defasagem necessária do controlador será:

$$\beta = (2h+1)180^\circ - \angle G(s_0), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

mas

$$\angle G(s_0) = \left| \frac{1}{(-2 + 2\sqrt{3}j) \cdot (-2 + 2\sqrt{3}j + 2)} \right| = -210^\circ$$

logo  $\beta = -180^\circ + 210$ , com  $h = -1$ ,  $\Rightarrow \beta = 30^\circ$ ,  $\beta > 0$  sempre



Assim,

$$C(s) = k \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

∴

$$C(s) = k \frac{(s + 2,9)}{s + 5,4}$$

Determinação do ganho  $k$ :  $|C(s_o)| = \frac{1}{|G(s_o)|}$

mas:

$$|G(s_o)| = \left| \frac{1}{s(s+2)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} \quad e \quad |C(s_o)| = k \left| \frac{(s+2,9)}{(s+5,4)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j}$$

logo

$$k = \frac{1}{\left| \frac{1}{s(s+2)} \cdot \frac{(s+2,9)}{(s+5,4)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j}} = 18,7$$

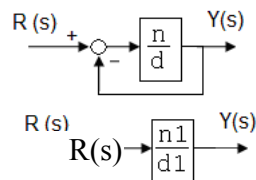
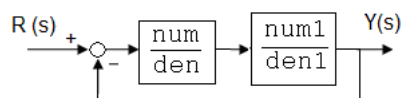
Então o controlador será:  $C(s) = 18,7 \cdot \frac{(s+2,9)}{(s+5,4)}$

O root-locus do sistema compensado será:

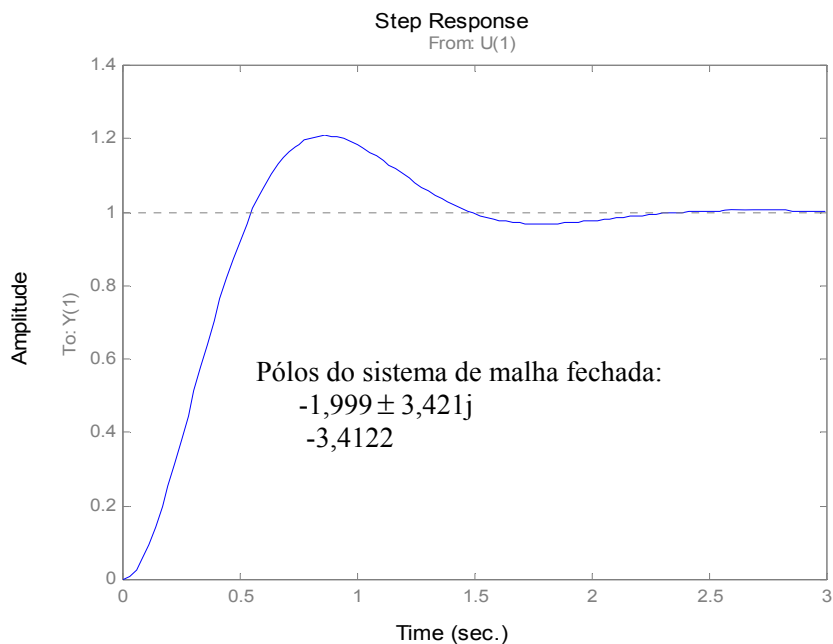
```
num=18.7*[1 2.9];
den=conv([1 2 0], [1 5.4])
rlocus(num,den)
```

E a resposta ao degrau está mostrada na figura seguinte, sendo que a F.T.M.F. foi obtida usando os comandos "series" e "feedback" do MATLAB, o programa está mostrado abaixo.

```
num=18.7*[1 2.9];
den=[1 5.4];
num1=[1];
den1=[1 2 0];
[n,d]=series(num,den,num1,den1);
[n1,d1]=feedback(n,d,[1],[1]);
step(n1,d1)
```







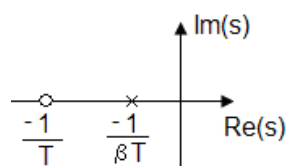
A PO% medida no gráfico é  $PO\% \approx 20\%$ , e o tempo de estabilização é  $t_e = 2s$ . Neste caso apenas a PO% ficou um pouco maior a especificada no enunciado do problema. Isto deve ao fato que os pólos complexos conjugados dominantes não apresentarem dominância plena, pois o pólo do controlador está relativamente próximo aos pólos complexos conjugados, trace o root-locus para verificar isto.

### Técnica de projeto de controlador em Atraso (Lag)

Já foi dado na pg. 194, o circuito do controlador em atraso e sabe-se que sua função de transferência é:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}, \quad \beta > 1$$

com



e  $k_c$  será igual a 1,  $K_c=1$ , pois assim o controlador irá influenciar pouco na estabilidade e transitório do sistema.

Este controlador melhora a resposta em regime permanente, diminuindo o erro de regime, mantendo as características da resposta transitória.

Inicialmente é suposto que o sistema realimentado tem boa resposta transitória porém erro de regime permanente ruim.

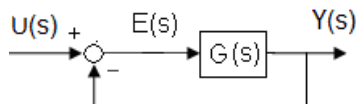


Fig. 1 – Sistema realimentado com boa resposta transitória e erro de regime ruim.

Então, insere-se um controlador  $G_c(s)$  na malha, como mostrado a seguir, e deseja-se melhorar o regime permanente sem modificar muito o transitório.

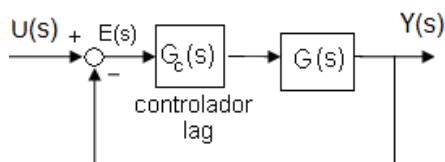


Fig. 2 – Sistema com o lag.

temos

$$E(s) = U(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G_c(s) \cdot G(s) \cdot E(s)$$

$$\text{logo } E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \cdot U(s) \quad (1)$$

O erro de regime permanente é calculado fazendo-se  $s \rightarrow 0$  em (1) e  $G_c(s)$  irá diminuir esse erro de regime se  $G_c(s)|_{s \rightarrow 0}$  for suficientemente grande. Se apenas aumentar  $k_c$ , poderá tirar o root-locus da dominância.

O objetivo de projetar o controlador em atraso é aumentar o ganho de malha aberta, sem modificar muito a posição dos pólos dominantes, que são responsáveis pela resposta transitória.

### Técnica de Projeto

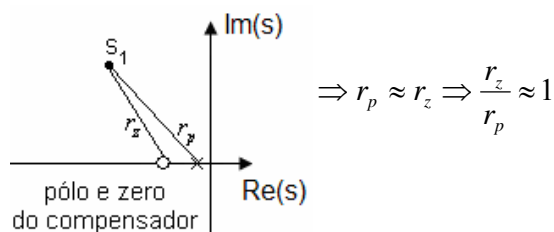
- 1- No sistema não compensado, vide fig. 1, determine os pólos dominantes  $s_1$  e o coeficiente de erro (constante de erro) em regime permanente para a entrada desejada (por exemplo rampa ou degrau). Vide capítulos anteriores.
- 2- Comparando o coeficiente de erro especificado no enunciado do problema (desejado) e o obtido em 1, determine aumento necessário ao coeficiente de erro do sistema de malha aberta:

$$\beta = \frac{\text{coef. do erro desejado}}{\text{coef. de erro do sistema sem o controlador em atraso}}$$

- 3- Escolha um controlador  $G_c(s)$  em atraso, com pólo e zero bem próximo do eixo  $j\omega$ , de modo que para  $s=s_1$ =pólo dominante tenha-se:

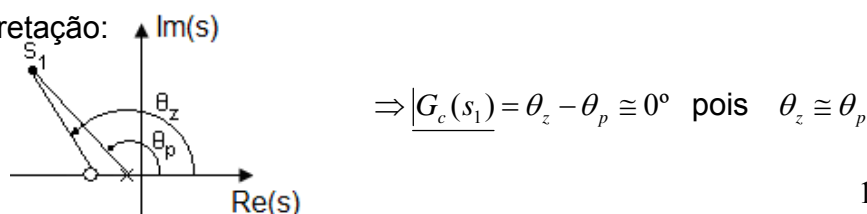
$$\bullet \quad |G_c(s_1)| = \frac{\left| s_1 + \frac{1}{T} \right|}{\left| s_1 + \frac{1}{\beta T} \right|} \cong 1 \Rightarrow \text{O compensador comporta-se como um ganho unitário em } s=s_1 \text{ e portanto não modificará muito o transitório do sistema de malha fechada}$$

Interpretação



$$\bullet \quad \angle G_c(s_1) \cong 0^\circ \text{ (poucos graus)}$$

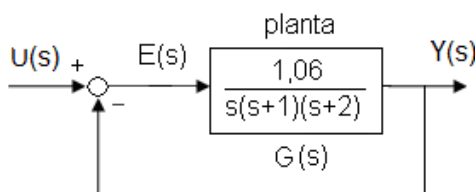
Interpretação:



Assim teremos:  $|G_c(s_1)| \cong 1|0^\circ$ , e no regime permanente:  $G_c(s)|_{s \rightarrow 0} = \frac{1}{\beta T} = \beta$    
  $\beta$  correção necessária

- 4- Verifique se os pólos dominantes do sistema compensado, de malha fechada, permanecem próximos aos anteriores. Use o MATLAB para simular o sistema.

Exemplo: Projete um controlador para o sistema abaixo de modo que o coeficiente de erro de velocidade ( $k_v$ ) seja  $5s^{-1}$ , entrada rampa, sem modificar sensivelmente o seu desempenho transitório.



Sol.

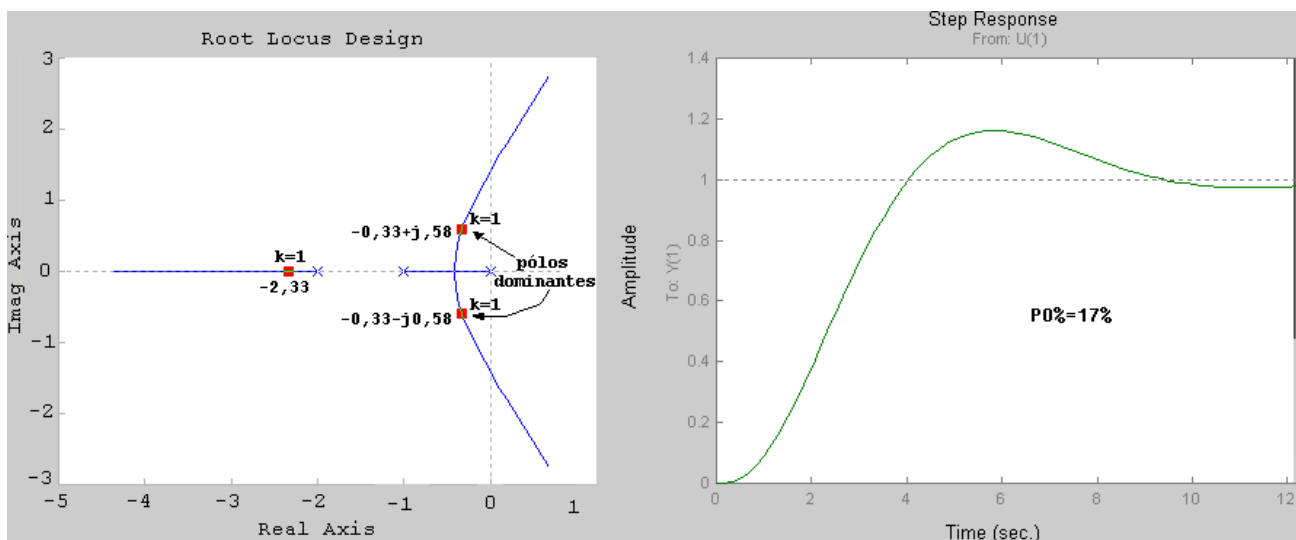
- 1- Determinação dos pólos dominantes de F.T.M.F.:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1,06}{1 + \frac{1,06}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{1,06}{(s+0,33-j0,58)(s+0,33+j0,58)(s+2,33)}$$

Assim os pólos dominantes são:

$$s_{1,2} = -0,33 \pm j0,58$$

O root-locus e a resposta ao degrau são dados abaixo:



A constante de erro de regime permanente para entrada rampa é calculada por:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \frac{1,06}{2} = 0,53 s^{-1}$$

Vide tabela da pg. 147. Note que o sistema de malha aberta tem um pólo na origem.

2-  $k_v$  do sistema sem controlador =  $0,53 s^{-1}$

$\hat{k}_v$  do sistema com o controlador (desejado) =  $5 s^{-1}$

$$\beta = \frac{\hat{k}_v}{k_v} = \frac{5}{0,53} \cong 10 \text{ vezes}$$

3- Escolhemos  $\beta=10$ . Para que o pólo e o zero do controlador fiquem próximo à origem, escolhemos  $T=10$ , então pólo em  $-0,01$  e zero em  $-0,1$ , logo:

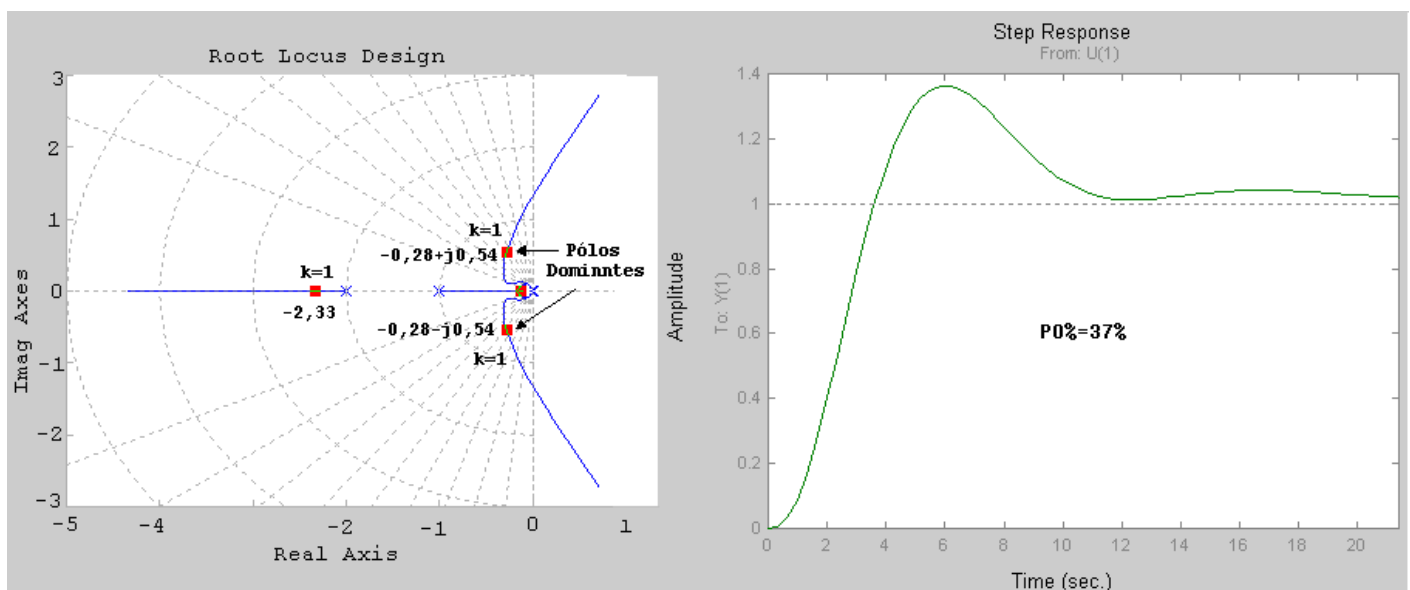
$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T}\right)}{\left(s + \frac{1}{\beta T}\right)} = \frac{(s+0,1)}{(s+0,01)}$$

Note que  $\left| \underline{G_C(s)} \right|_{s=-0,33+j0,58} = \frac{(-0,33+j0,58)+0,1}{(-0,33+j0,58)+0,01} = -8^\circ$  (que não é  $\cong 0^\circ$ )

e

$$\left| G_C(s) \right|_{s=-0,33+j0,58} = \left[ \frac{(0,23)^2 + (0,58)^2}{(0,32)^2 + (0,58)^2} \right]^{1/2} = \frac{12,5}{13,5} \cong 0,93 \quad \text{que não é } \cong 1$$

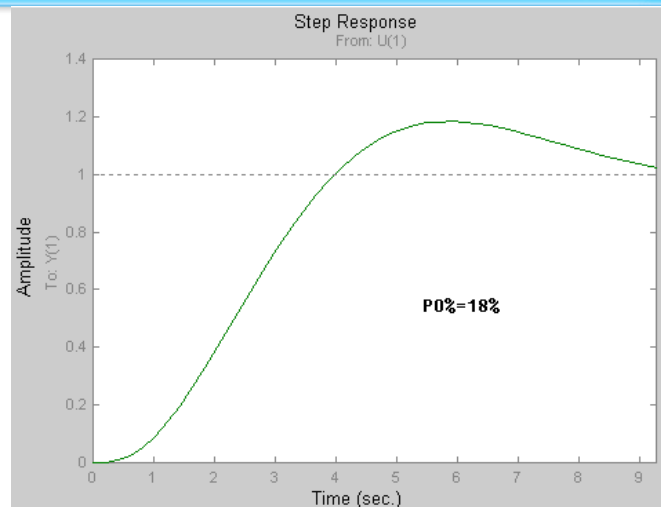
O root-locus do sistema com este compensador inserido segundo a fig. 2 e a resposta ao degrau é:



- 4- A simulação do sistema para entrada degrau está mostrada acima, usou-se o MATALAB. Note que  $PO\%=37\%$ . Sendo que o sistema original tinha  $PO\%=17\%$ . Assim, o projeto modificou a resposta transitória. Uma solução é levar o pólo e o zero do controlador mais próximo da origem. Para isto adotamos  $T=100$ , logo:

$$G_C(s) = \frac{\left( s + \frac{1}{100} \right)}{\left( s + \frac{1}{1000} \right)} = \frac{s + 0,01}{s + 0,001}; \text{ logo: } \begin{aligned} \left| G_C(s_o) \right| &= -0,7^\circ \cong 0 \\ \left| G_C(s_o) \right| &= 0,99 \cong 1 \end{aligned}$$

A resposta ao degrau com este controlador na fig. 2 é:

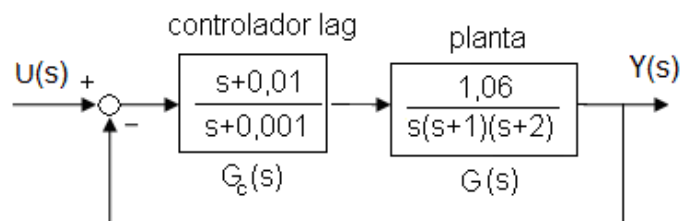


Que satisfaz o enunciado do problema.

Neste caso

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_C(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(s+0,01)}{(s+0,001)} \cdot \frac{1,06}{s(s+1)(s+2)} = 5,3$$

O sistema controlado é dado a seguir:



Neste exemplo, usou-se o software MATLAB para traçar o root-locus e a resposta ao degrau do sistema. Utilizou-se o 'rltool'.

Pode se projetar um controlador misto avanço-atraso (lead-lag) para compensar resposta transitória e regime permanente, adequadamente. Vide Ogata para maiores detalhes.



## **APÊNDICE A – Laboratório 1 – Curso e Lista de Exercícios do MATLAB**

**Importante:**

*Trazar pendriver em todas aulas de laboratório!*

**Importante:**

*Na etapa prática deste laboratório, o aluno  
deverá começar, a parte que utiliza o  
osciloscópio, 1h antes do término da aula.*

# ***CURSO INTRODUTÓRIO SOBRE O MATLAB***

Uma apostila mais detalhada sobre o MATLAB pode ser encontrada na home page do **Laboratório de Pesquisa em Controle do DEE**:  
<http://www.dee.feis.unesp.br/projetos/lpc/pagina7.htm>

## **1. INTRODUÇÃO**

- U **MATrix LABoratory**
- U **Inicialmente escrito em FORTRAN**
- U **Novo MATLAB escrito em C**
- U **Várias plataformas**
- U **Win, Unix, Linux, Macintosh**

### U **Características:**

- U **Álgebra matricial**
- U **Versatilidade: O usuário cria novas ferramentas**
- U **Programação com macro funções**
- U **ToolBoxes específicos**
- U **Vários livros baseados em Matlab**



U' Atualmente na versão 7.14

U' [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

## 2. EXECUÇÃO DO MATLAB

U' No Windows, selecione o ícone "MATLAB with  
SIMULINK"

## 3. COMANDOS E VARIÁVEIS

☞ = Comando de atribuição

☞ [ ] Delimita elementos de matrizes e vetores

☞ % Comentário

☞ Help Tópicos de ajuda

### DEFINIÇÃO DE UM ESCALAR

```
>> a=2500/20
```

```
>> a=2500/20;
```

```
>> a=1/0
```

```
>> 0/0
```

### DEFINIÇÃO DE UM VETOR

```
>> b1=[1 2 3 4 5 6 7 8 9]
```

```
>> b2=[1; 2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9]
```

### DEFINIÇÃO DE UMA MATRIZ

```
>> c=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```

```
>> c=[c;[10 11 12]]
```

```
>> c(2,2)=0
```

### CRIAÇÃO DE VETORES COM INCREMENTO

```
>> x=1:2:9
```

```
>> x=0:pi/3:pi;
```

```
>> y=sin(x)
```

### MATRIZES COM EXPRESSÕES

```
>> x=[-1.5 cos(pi/4) 2^3]
```

### OPERADOR :

```
>> A=[4 6 8;2 4 0;3 4 9];
>> A(1,:)= [1 1 1]
>> A(2:3,1:2)=[10 10;10 10]
```

### COMANDO format

```
>> format short % 4 casas
>> a=4/3
>> format long e % 14 casas
>> a=(4/3)*1000
```

Internamente: 53 bits mantissa  
11 bits expoente

### 4. OPERAÇÕES COM MATRIZES E VETORES TRANSPOSTA, ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

```
>> a=[1 2 3;4 5 6;7 8 9];
>> b=a'
>> c=a+b
>> c=a-b
```

### MULTIPLICAÇÃO E ADIÇÃO COM ESCALAR

```
>> x=[-1 0 2];
>> y=[-2 -1 1]';
>> x*y
>> c=x+2
```

### INVERSÃO E DIVISÃO

```
>> a=[1 0 2;0 3 4;5 6 0];
>> b=inv(a)*a

>> c=b/a % c=b*inv(a)

>> c=b\ a % c=inv(b)*a
```

### RESOLVENDO SISTEMAS LINEARES

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

**Solução :**  $X = A^{-1} \cdot B$

### RESOLVENDO COM O MATLAB

```
>> A=[1 2 0;-1 5 -3;4 -2 1];
>> B=[5 0 3]';
>> X=A\B
```

```
>> X=inv(A)*B
```

### OPERAÇÃO ELEMENTO A ELEMENTO - MATRIZ E VETOR

☞	.*	<b>Multiplicação</b>
☞	./	<b>Divisão à direita</b>
☞	.\	<b>Divisão à esquerda</b>
☞	.^	<b>Exponenciação</b>

```
>> x=[1 -2 3];
>> y=[4 3 2];
>> z=x.*y
```

```
>> z=x.^y
```

```
>> y.^2
```

### 5. OPERAÇÃO COM NÚMEROS COMPLEXOS

```
>> z=3+4*i           % i=sqrt(-1)
```

```
>> a=[1 2;3 4]+i*[5 6;7 8]
```

```
>> Mz=abs(z)
```

```
>> Az=angle(z)
```

### 6. UTILITÁRIOS PARA MATRIZES

```
>> a=eye(3)          % Matriz identidade
```

```
>> a=zeros(4)        % Matriz nula
```

```
>> a=ones(3)         % Matriz unitária
```

```
>> a=rand(2,3)% Matriz com n. aleatórios

>> a=[2 0 0;0 3 0;0 0 -1];
>> d=det(a)    % Determinante da matriz a
                AUTOVALORES E AUTOVETORES
                 $A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i$ 
>> a=[1 0 0;0 -2 0;0 0 3];
>> l=eig(a)

>> a=[1 0 2;0 -2 0;0 1 3];
>> [x,l]=eig(a)
```

## 7. TRAÇANDO GRÁFICOS

↳ Gráfico do tipo y(t) x t

```
>> t=0:0.07:6*pi;
>> y=sin(t);
>> plot(t,y,'k')
>> xlabel('tempo [s]')
>> ylabel('sen(t)')
```

↳ Duas ou mais curvas do tipo y(t) x t

```
>> z=cos(t);
>> plot(t,y,'b',t,z,'r-.')

>> title('Funções Trigonômétricas')
>> xlabel('Tempo [s]')
>> ylabel('Sen(t) e Cos(t)')

>> text(3,0.6,'Seno')
>> text(2.2,-0.5,'Cosseno')
```

↳ Desenhando uma superfície 3D

```
>> x=-8:0.5:8;
>> y=x';
>> X=ones(size(y))*x;
>> Y=y*ones(size(x));
>> R=sqrt(X.^2+Y.^2)+eps;
```

```
>> Z=sin(R)./R;
>> surf(X,Y,Z);
>> xlabel('eixo X'); ylabel('eixo Y');
>> zlabel('eixo Z')
>> title('Chapéu Mexicano'); grid;
```

## Aquisição de Dados com Osciloscópios Tektronix

### U Obtendo dados do canal 1

```
>> [t,v]=curva(1); %Autoria do Prof. Tokio
>> % No osciloscópio Tektronix TDS 1001B use: [t,v]=curva 1001(1);
>> tmin=min(t);
>> figure(1); plot(t-tmin,v)
>> xlabel('t (s)'); ylabel('volts')
>> title('Curva - Canal 1')
>> grid on
```

### U Salvando os dados

```
>> save DadosCanal1
>> clear
```

### U Obtendo dados do canal 1 ou 2

```
>> [t1,v1]=curva(1);
>> [t2,v2]=curva(2);
>> tmin1=min(t1);
>> tmin2=min(t2);
>> figure(2); plot(t1-tmin1,v1, t2-tmin2,v2)
>> xlabel('t (s)'); ylabel('volts')
>> title('Curva - Canal 1 e 2')
>> grid on
>> save DadosCanal12
```

### U Carregando dados salvos

```
>> load DadosCanal1
>> tmin=min(t);
>> figure(1); plot(t-tmin,v)
>> xlabel('t (s)'); ylabel('volts')
>> title('Curva - Canal 1')
>> grid on % ver (Figura 1)
```

*% Para o osciloscópio 320 (grande) usar: curva320(1)*

## Usando Filtragem Digital

```
>>load DadosCanal1
>>tmin=min(t);
>>vfiltrado=filtdeg(v,60) ; % Autoria do Prof. Tokio
>>figure(3);
>>plot(t-tmin,v,'y',t-tmin,vfiltrado,'b');
>>xlabel('t (s)')
>>ylabel('volts')
```

## 8. IMPORTANDO GRÁFICOS DO MATLAB PARA O WORD

└ Após criar o gráfico, digite:

```
>> print -dmeta
```

└ O MATLAB envia o gráfico para a área de transferência;

└ Dentro do WORD, basta colar (CTRL+V)

└ Outra opção - comandos da janela gráfica (File-Save, File-Export, Edit-Copy Figure)

## 9. PROGRAMANDO COM O MATLAB

└ Um programa consiste de uma sequência de comandos do MATLAB

└ O arquivo deverá ser gravado no diretório de trabalho do MATLAB

└ Deve-se criar um arquivo com extensão .m

└ Exemplo: teste.m

### 9.1. COMANDOS DE CONTROLE DE FLUXO

└ O comando "for"

–Formato:

```
for i=expressão
    comandos;
end
```

└ Exemplo: digite o seguinte arquivo teste1.m

(File >> New >> M-File)

```
n=3;m=3;
for i=1:m
    for j=1:n
```

```

        a(i,j)=i+j;
    end
end
s=sprintf('\nMatriz A:a(i,j)=i+j\n');disp(s);disp(a)
(File >> Save)

```

```
>> teste1           % execução do programa
```

⌵ Exemplo: digite o seguinte arquivo teste2.m  
(File >> New >> M-File)

```

n=1;
while n<=23
n=n+1;
end
disp(sprintf('\n n final: %d',n));

```

(File >> Save)

⌵ No MATLAB digite

```
>> teste2
```

⌵ Exemplo: digite o seguinte arquivo teste3.m

```

%Este programa determina se o num. n é par ou ímpar
for n=1:4
resto=rem(n,2);
if resto==0
disp(sprintf('\n %d é par\n',n));
else
disp(sprintf('\n %d é ímpar\n',n));
end
end
end

```

⌵ No MATLAB digite

```
>> teste3
```

## 9.2. CRIANDO SUBROTINAS

⌚ Digite o seguinte arquivo com a função `media.m`

```
function x=media(u)
% Esta função calcula a média dos elementos de u
x=sum(u)/length(u);
```

⌚ Digite o seguinte arquivo `teste4.m`

```
v=1:1:10;
m=media(v);
disp(sprintf('\n A média de 1 a 10 é: %4.2f', m));
```

No MATLAB digite

```
>> teste4
```

10. SAINDO DO MATLAB

```
>> quit
```

ou

```
>> exit
```



### O RELATÓRIO DEVERÁ CONTER:

1. Descrever no relatório 4 comandos (ou conjuntos) que achou mais interessantes;
2. Medir e desenhar usando o Tektronix e o MATLAB:
  - 2.1. Senóide de 2v de pico e 500Hz;
  - 2.2. No canal 1 onda quadrada do osciloscópio e no canal 2 senóide de 3v de pico e 1kHz.
  - 2.3 Filtrar essas curvas usando o "filtdeg". Plotar todas curvas em seu relatório. Levar o programa "filtdeg.m" para casa.

### LISTA DE EXERCÍCIOS - COMANDOS BÁSICOS DO MATLAB

Execute os seguintes comandos e interprete os resultados. As linhas que começam com um '%' não precisam ser digitadas – são apenas comentários para o aluno seguir

*% Inicialmente mude para o seu diretório de trabalho, selecionando seu diretório de trabalho modificando o campo do MATLAB (V7): "current directory".*

```
a= 2500/20
a=2500/20;
b=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 ]
c=[1 2 3 ; 4 5 6; 7 8 9]
c=[c ; [10 11 12]]
c(2,2)=0
d=c(1:2,1:3)
l=length(b)
[m,n]=size(b)
[m,n]=size(c)
who
whos
clear
who
x=1:2:9
x=(0:pi/10:2*pi);
y=sin(x)
help sin
dir
a=2^3
a=4/3
format long
a=4/3
format short
clear
a=[1 2 3; 4 5 6 ; 7 8 9];
b=a'
c=a+b
```

```
c=a-b
a(1,:) = [-1 -2 -3]
c=a(:,2)
c=a(2:3,2:3)
```

```
clear
```

```
% RECURSOS DE GRAVAÇÃO (ARMAZENAGEM) DE DADOS
```

```
help save
help load
a=[1 2 3 4 5 6 7 8];
b=a*2;
c=a-1;
save arquivo1 a b c
dir
clear
whos
load arquivo1
whos
% Em que arquivo estão gravados os vetores a, b e c?
```

```
clear
```

```
% RECURSOS GRÁFICOS
```

```
y=[0 2 5 4 1 0];
plot(y)
help pi
t=0:pi/10:4*pi
y=sin(t)
z=cos(t);
plot(t,y,'--',t,z,'-.')
title('Funções')
xlabel('t')
ylabel('Seno e Cosseno')
text(3,0.5,'Seno')
% Após o próximo comando, selecione a posição que deseja
%colocar o texto 'Cosseno' com o mouse
gtext('Cosseno')
% REALIZAR O ITEM 2 DA PG 216: AQUISIÇÃO DE DADOS COM O
% OSCILOSCÓPIO DIGITAL (VER DETALHES NA PG 212).
% Vetores
x=[-1 0 2];
y=[-2 -1 1];
x.*y
```

```
x*y'
c=x+2
a=[1 0 2; 0 3 4; 5 6 0];
size(a)
b=inv(a);
c=b*a
c=b/a

c=b\a
clear a b c x y
whos

% Trabalhando com números complexos
i=sqrt(-1)
z=3+4*i
a=[1 2; 3 4]+i*[5 6 ; 7 8]
realz=real(z)
imagz=imag(z)
modz=abs(z)
fasez=angle(z)

% Multiplicação de polinômios
% x3 = (x^2 + 3x + 2).(x^2 - 2x + 1)

x3=conv([1 3 2],[1 -2 1])    % Como ele faz isto?

% Determinação das raízes de um polinômio
roots([1 3 2])
roots([1 -2 1])
roots(x3)

% Utilitários para matrizes
a=eye(4)
a=rand(5)
help rand
b=[2 0 0; 0 3 0; 0 0 -1];
d= det(b)
l=eig(b)
help det
help eig

% AJUSTE DE CURVAS DE DADOS EXPERIMENTAIS

t=(-1:.1:1);
x=t.^2;
xr=x+0.2*(rand(size(x))-0.5);
figure(1);plot(t,xr,'g*')
```

```
p=polyfit(t,xr,2)
xa=polyval(p,t);
figure(1);plot(t,xr,'g*',t,xa)
% Após a próxima instrução, clique em dois pontos do gráfico,
% e os valores das coordenadas serão retornados em [x,y]
[x,y]=ginput(2)
```

% PROGRAMANDO COM O MATLAB

% Abra um arquivo a partir do Matlab (File, New, M-File)  
% e você estará trabalhando no editor de texto do matlab.  
% Digite os seguintes comandos e grave o arquivo com o nome  
% testel.m, no diretório de usuários, ou seu diretório  
%particular.

```
n=3;
m=3;
for i=1:m
    for j=1:n
        a(i,j)=i+j;
    end;
end
disp('Matriz A')
disp(a)
%final do programa testel.m
```

% Para executar o programa acima, certifique-se que o Matlab  
%está trabalhando com o  
% diretório no qual foi gravado o seu programa.  
% Para verificar qual o diretório o Matlab está trabalhando,  
%digite

```
pwd
% Para modificar o seu diretório de trabalho, selecione seu
%diretório de
% trabalho modificando o campo do MATLAB: "current
%directory".
```

% Para executar o programa testel.m, digite:  
testel

% CRIANDO UMA SUBROTINA

% Abra outro arquivo, salvando-o com nome de teste2.m  
% Digite os seguintes comandos neste arquivo

```
v=1:1:10;
m=media(v);
```

```
s=sprintf('\n A média é: %4.2f',m);
disp(s);
%final do programa teste2.m
```

Agora crie o seguinte arquivo, com o nome de media.m

```
function x = media(u)
%function x=media(u) calcula a média do vetor u, colocando o
%resultado em x
```

```
x=sum(u)/length(u);
%final da subrotina media.m
```

%Na linha de comando do Matlab, digite:

```
teste2
echo on
teste2
echo off
```

% CRIANDO UM PROGRAMA EXEMPLO DE GRÁFICO 3D

% Abra outro arquivo, gravando-o com nome de teste3.m  
% Digite os seguintes comandos neste arquivo

```
clear
n=30;
m=30;

for i=1:m
    for j=1:n
        a(i,j)=sqrt(i+j);
    end
end
b=[a+0.5 a'-0.5;
(a.^2)/5 ((a'-0.1).^2)/2];
mesh(b)
```

**% CRIANDO UM PROGRAMA EXEMPLO DE GRÁFICO 3D**

% Abra outro arquivo, gravando-o com nome de teste3.m  
% Digite os seguintes comandos neste arquivo

```
clear
```

```
n=30;
m=30;
for i=1:m
    for j=1:n
        a(i,j)=sqrt(i+j);
    end
end
b=[a+0.5 a'-0.5;
(a.^2)/5 ((a'-0.1).^2)/2];
figure(1)
mesh(b)
figure(2)
surf(b)
```

## **APÊNDICE B – Laboratório 2 – Introdução à Robótica**

## 2ª Experiência: Introdução à Robótica

### 1 - Objetivos

Esta experiência tem o objetivo de introduzir conceitos de robótica industrial. Serão montados robôs acionados por computador. O elemento básico do robô é o servomotor.

### 2 – Introdução

O servomotor é um motor de corrente contínua que possui internamente ao invólucro um sensor de posição angular. Não há nenhuma realimentação do servomotor para o microcomputador que o aciona. Há um sistema de realimentação que usa um potenciômetro como sensor de posição angular do eixo, dentro do próprio servomotor, que permite manter a posição que o microcomputador determinou. O alcance da rotação do eixo do servomotor é  $180^{\circ}$ . Para maiores detalhes sobre o funcionamento interno do servomotor vide pg. 30 e 31 do Manual do RCS-6. O servomotor também é conhecido como “servo”.

Na indústria, Uma forma que os técnicos e engenheiros fazem os robôs operarem é o uso do treinamento manual. Primeiro eles manualmente acionam os servomotores e gravam a operação realizada em um programa. Depois executa-se o programa gravado e o robô repete as operações realizadas pelo treinador.

### 3 – Segurança Pessoal

Os robôs podem mover-se repentinamente e sem aviso, mantenha sua face, ombro, perna etc fora do limite do alcance do braço do robô.

Nunca faça o robô atirar algo pesado, use apenas bola de tênis de mesa ou objeto leve e macio. Não use pedras, bolas de vidro ou ferro.

### 4 – Segurança do Equipamento

Não deixe os servomotores em posição que os force muito, pois poderá superaquecê-lo. Se o braço do robô ficar esticado por muito tempo irá superaquecer o servomotor.

Não aperte demais os parafusos ou roscas.

Não bata as partes metálicas.

Não retire os cabos segurando nos fios, mas sim puxando o conector suavemente.

Não prenda inicialmente os fios ao robô e sim apenas no final da montagem.

Note que os servomotores tem cabos com diferente tamanhos.

Não deixe equipamentos próximos ao robô nos quais ele poderá colidir.

### 5- Inicializando e treinando o robô

Na tela do Windows, execute o programa: “RASCAL”.

Leia as precauções de segurança e clique em “OK”. Aparece o ambiente do programa



ROBIX RASCAL CONFIGURATION. A configuração já está adequada.

Selecione o "ícone" que representa um braço mecânico azul, sobre plano laranja e em seguida selecione "CONTROL" e dentro de "CONTROL" selecione "OPEN ROBOT CONSOLE". Aparece o ambiente ROBIX RASCAL CONSOLE.

Selecione "VIEW" e em seguida "OPEN TEACH WINDOW". Aparece o ambiente ROBOT1 – TEACH. Você encontra uma barra vertical para cada um dos servomotores. Com o mouse deslize-o para cima ou para baixo verificando que o servomotor selecionado gira seu eixo. Se o servomotor não responder ao seu comando, alguma coisa está errada. Teste todos os servomotores que conectou no adaptador.

Volte à tela ROBIX RASCAL CONSOLE, selecione "CONTROL" e em seguida "RESTART ROBOT". Com esta operação você colocou todos os eixos dos motores na posição de  $0^0$ . O eixo poderá se mover para  $+ 90^0$  ou para  $- 90^0$ , totalizando  $180^0$ . Importante, o seu robô será montado inicialmente com os motores na posição angular dos eixos em  $0^0$ .

Retorne novamente à tela ROBIX RASCAL CONSOLE, selecione "VIEW" e em seguida "OPEN TEACH WINDOW". Acione os servomotores para a próxima posição que deseja para cada servomotor, dando assim o primeiro "passo" da trajetória que o robô deverá executar, grave este "passo" clicando ( na janela ROBOT1 – TEACH) em "ADD TO SCRIPT". Note que na tela ROBIX RASCAL CONSOLE foi colocada uma linha de programa que executa a operação que você treinou seu robô. Faça outro "passo" do robô e grave o comando. Ensine quantos passos desejar. Para que ele repita todos os passos já gravados no programa, entre na tela ROBIX RASCAL CONSOLE, selecione "CONTROL" e então "RUN FROM TOP".

## COMPLEMENTO PARA ROBIX NOVO - 2009

### 1 - Objetivos

Este complemento serve para o Robô ROBIX, comprado em 2008 e começou a ser utilizado em 2009. Nele foi montado o segundo manipulador industrial de 6 servomotores. A placa de interface tem comunicação com o PC do tipo USB.

### 5- Inicializando e treinando o robô

Na tela do Windows, execute o programa: "USBOR".

A configuração na placa foi feita para se usar o **Pod1**, que corresponde ao primeiro conjunto de 6 servomotores da placa de interface do ROBIX. A placa pode acionar os grupos: Pod1, Pod2, Pod3 e Pod4. Sendo que cada um desses grupos pode-se colocar 6 servomotores.

No Windows selecione o ícone "USBOR NEXUS", executando-o. Abrirá a tela "USBOR NEXUS 1.1.0" e os motores já estão ativados pelo programa Usbor.

Volte ao Windows e execute o programa "USBOR NEXWAY", abrirá a tela "USBOR NEXWAY 1.1.0". Entre na pasta "LOCALHOST" e clique em "OK". Entre na pasta "3QB97P6SWQP". Selecione "POD1". Selecione "CONTROL", "OPEN POD GUI", e em seguida selecione "CONTROL" e então "OPEN TEACH MODE". Aparece o ambiente TEACH.

Você encontra uma tabela com teclas associadas a cada um dos servomotores. Acione o teclado segundo a tabela abaixo, verificando que o servomotor selecionado gira seu eixo. Se o servomotor não responder ao seu comando, alguma coisa está errada. Teste todos os servomotores que conectou no adaptador.

Número do motor	1	2	3	4	5	6
Giro grosso +	1	2	3	4	5	6
Giro grosso -	Q	W	E	R	T	Y
Giro fino +	A	S	D	F	G	H
Giro fino -	Z	X	C	V	B	N
UTILIZE ESSAS TECLAS PARA ACIONAR OS MOTORES						

Retorne novamente à tela Pod1-Usbor", selecione "CONTROL" e em seguida "OPEN TEACH MODE". Aparece o ambiente TEACH. Acione os servomotores para a próxima posição que deseja para cada servomotor, dando assim o primeiro "passo" da trajetória que o robô deverá executar, grave este "passo" clicando em "ADD TO SCRIPT". Note que na tela ROBIX CONSOLE foi colocada uma linha de programa que executa a operação que você treinou seu robô. Faça outro "passo" do robô e grave o comando. Ensine quantos passos desejar. Para que ele repita todos os passos já gravados no programa, entre na tela ROBIX CONSOLE, selecione "CONTROL" e então "RUN FROM TOP".

## **APÊNDICE C – Laboratório 3 – Controle de Motor CC**

Se utilizar o osciloscópio grande (Tektronix 320) use o programa curva320.m .

### 3ª Experiência - Controle de Velocidade de um Motor CC.

#### I - Objetivo

Este laboratório tem o objetivo de apresentar um sistema de controle analógico, determinar a função de transferência do motor cc e projetar e implementar um controlador proporcional analógico.

#### II - Determinação da Função de Transferência do Motor CC.

##### II.1 - Fundamentos Teóricos.

Como foi visto no curso teórico, o motor cc é um sistema dinâmico de 1ª ordem, cuja função de transferência é dada por

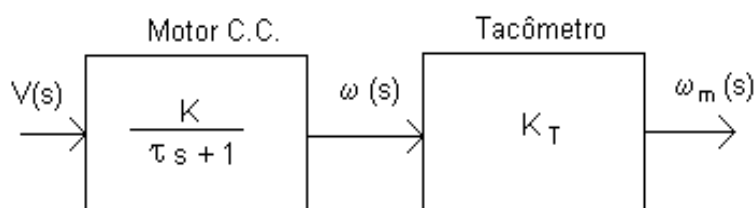


Fig. 1 - Função de Transferência do Motor C. C.

sendo  $V$  - tensão aplicada no motor,  $\omega$  - velocidade angular do motor,  $\tau$  - constante de tempo do motor,  $K$  - ganho do motor em regime,  $K_T$  - ganho do tacômetro,  $\omega_m$  - velocidade medida.

Para a determinação da função de transferência do motor c.c., será aplicada uma tensão  $v(t)$  do tipo degrau e então, a partir de medidas da saída  $\omega_m(t)$ , serão calculados os parâmetros  $K$ ,  $K_T$  e  $\tau$ .

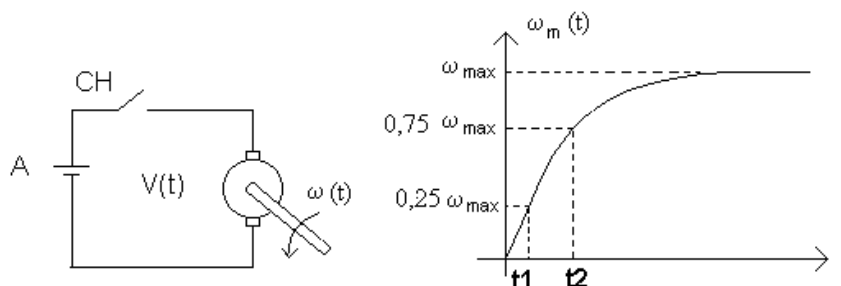


Fig. 2 - Montagem para a obtenção experimental da função de transferência.

A Fig. 2 mostra o gráfico da função  $\omega_m(t) \times t$ , quando a chave CH é fechada em  $t=0$ . Os parâmetros  $\tau$  e  $KK_T$  da função de transferência do motor podem ser calculados pelas

seguintes expressões:

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln(3)} \quad \text{e} \quad KK_T = \frac{\omega_{\max}}{A}$$

Sabendo que  $\omega_m(t) = AKK_T[1 - \exp(-t/\tau)]$ , deduza as equações acima.

## II.2 - Procedimento Experimental.

1. Fazer as seguintes conexões:
  - Comprovar que o interruptor  $S_1$  está na posição NORMAL.
  - Conectar a saída do potenciômetro do nível de referência  $P_2$  à entrada da interface do motor.
  - Conectar a saída do gerador tacométrico ( $V_T$ ) à entrada positiva  $IN_2$  do detector de erro.
  - Conectar a saída da tensão de offset à entrada negativa  $IN_1$  do detector de erro.
  - Conectar a saída do detector de erro ao osciloscópio digital.
2. Colocar o interruptor de tensão da unidade de controle em ON.
3. Comprovar que o interruptor de perturbação do nível de referência está em OFF.
4. Fixar a velocidade do motor em 800 rpm, em sentido horário, por meio do potenciômetro do nível de referência.
5. Ajustar as escalas do osciloscópio digital. Ajustar a tensão de offset de tal forma a proporcionar a maior amplitude do sinal na tela do osciloscópio.
6. Aplicar um degrau de tensão ao motor, passando a ON o interruptor de perturbação do nível de referência. Registre a resposta transitória no osciloscópio. Use o MATLAB para armazenar a resposta transitória. Não salve a figura, mas sim os dados com "save".
7. Voltar a posição OFF o interruptor de tensão da unidade de controle. Desligue o módulo.
8. Use o filtro digital `filtdeg.m` (Prof. Tokio) para retirar o ruído do sinal armazenado no MATLAB. Digite `help filtdeg` para aprender a usar o filtro digital. Use  $N=60$  (ordem do filtro).
9. Usando os resultados acima, faça um programa MATLAB para identificar a função de transferência do motor-tacômetro. Use o comando "find", por exemplo: `índice=find(v>=0.25*Wmax)`. Para truncar os pontos da curva indesejáveis use o operador ":".
10. No relatório, plotar no mesmo gráfico a resposta ao degrau experimental filtrada e a resposta ao degrau da função de transferência obtida com seu programa. Discutir os resultados obtidos.

## III- Controle Proporcional de um Motor C. C.

### III.1 - Projeto.

Projete um sistema de controle proporcional, especificando o ganho  $K_r$  na configuração abaixo, de modo que o sistema atinja a velocidade de regime mais

rapidamente, em menos de 1 segundo.

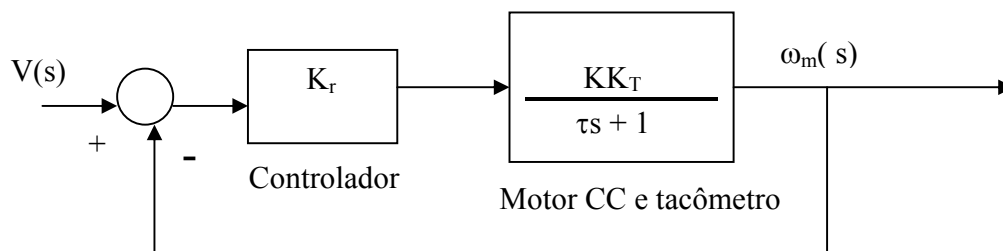


Fig. 3 Controle Proporcional de um motor c.c.

Lembre-se que o tempo de estabelecimento para sistemas de 1ª ordem é:  $T_e = 4\tau_r$ , sendo  $\tau_r$  a constante de tempo do sistema realimentado acima.

Desconecte todos os cabos da montagem anterior.

### III.2 - Implementação

Implemente no amplificador somador o ganho  $K_r$  projetado.

1. Conectar os seguintes elementos na unidade central:

- Verificar se o interruptor  $S_1$  está na posição NORMAL.
  - Conectar a saída do potenciômetro do nível de referência  $P_2$  a entrada positiva (IN<sub>2</sub>) do detector de erro.
  - Conectar a saída do gerador tacométrico a entrada negativa (IN<sub>1</sub>) do detector de erro.
  - Conectar a saída do detector de erro a entrada IN1 do amplificador somador.
  - Conectar a saída do amplificador somador à entrada da interface do motor
- Conectar a saída do gerador tacométrico a entrada do osciloscópio digital.

- Certifique-se que esta montagem implementa o sistema realimentado da figura 3.

2. Verificar se o interruptor de perturbação do nível de referência  $S_3$  está em OFF.

3. Colocar na posição ON o interruptor de tensão da unidade de controle.

4. Ajustar a velocidade do motor em 800 rpm (giro no sentido horário) mediante o ajuste do potenciômetro do nível de referência  $P_2$ .

5. Aplicar um degrau passando o interruptor  $S_3$  para posição ON. Ajustar as escalas do osciloscópio digital e registrar a resposta ao degrau com o MATLAB.

6. Passar para OFF o interruptor de tensão da unidade de controle.

7. Usar seu programa para identificar a função de transferência do sistema realimentado.

8. Determinar as constantes de tempo para cada um dos casos analisados e compará-los com os valores teóricos esperados.



## **APÊNDICE D – Laboratório 4 – Resposta Transitória de Sistemas Dinâmicos e Erros de Regime Permanente**

*Se utilizar o osciloscópio grande (Tektronix 320) use o programa curva320.m .*

### Controle Linear I

#### 4ª Experiência - Resposta Transitória de Sistemas Dinâmicos e Erros de Regime Permanente

##### I - Objetivos

Este laboratório tem o objetivo de estudar a resposta transitória de sistemas de 1ª e 2ª ordem e aplicar os resultados teóricos na identificação de funções de transferência implementadas em um computador analógico.

Obs.: Antes de cada montagem, o aluno deverá obter teoricamente todas as respostas transitórias.

##### II - Introdução à Simulação Analógica

A função de transferência de um motor de corrente contínua (C.C) é representada abaixo:

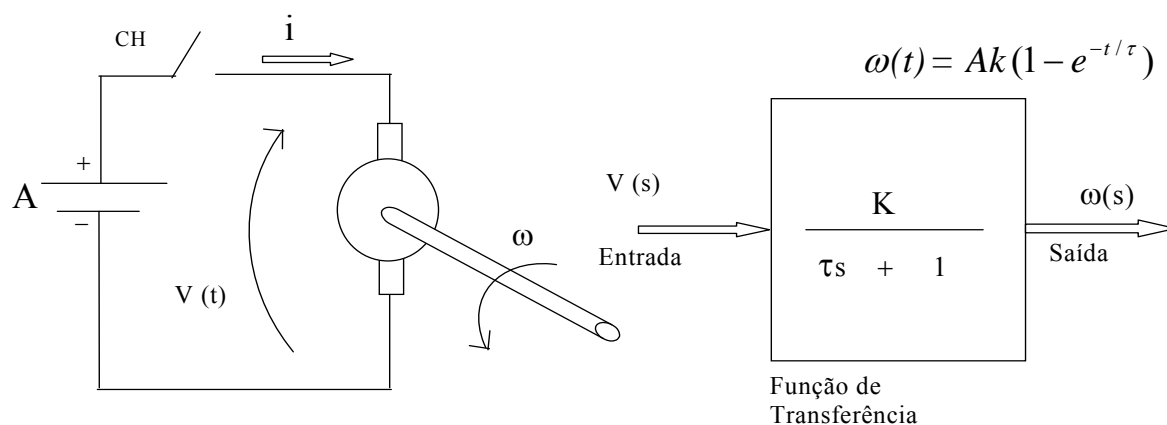


Fig. 1 -Função de transferência de um motor C.C.

Outra representação matemática deste motor, adequada para simulações em computadores analógicos é dada a seguir:

$$\tau \frac{d\omega(t)}{dt} = kv(t) - \omega(t) \Rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{k}{\tau} v(t) - \frac{\omega(t)}{\tau}. \quad (1)$$

Como no computador analógico o elemento básico é o integrador, é conveniente representar a

equação (1):

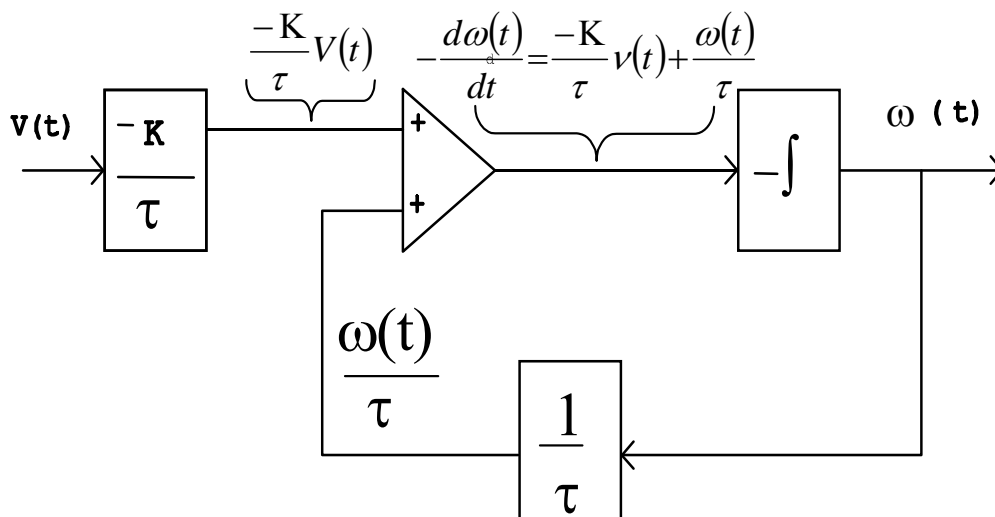
$$\int_0^t \frac{d\omega(t)}{dt} dt = \int_0^t \left( \frac{k}{\tau} v(t) - \frac{\omega(t)}{\tau} \right) dt \quad (2)$$

Integral e a derivada são funções inversas e considerando-se que a velocidade inicial do motor seja  $\omega(0)=0$ , tem-se de (2) que



$$\int_0^t d\omega(t) = \omega(t) - \omega(0) = \omega(t) = \int_0^t \left( \frac{k}{\tau} v(t) - \frac{\omega(t)}{\tau} \right) dt. \quad (3)$$

A equação (3) pode ser representada através do seguinte diagrama de blocos:



**Fig. 2 - Representação Analógica de um Sistema de Primeira Ordem.**

O Computador Analógico possui vários elementos eletrônicos que implementam os blocos acima, tais como integradores, somadores, subtratores, amplificadores e fontes de tensão. Desta forma, com o Computador Analógico é possível estudar o comportamento de sistemas dinâmicos mecânicos, elétricos, hidráulicos, térmicos, etc, implementando eletricamente os seus modelos matemáticos.

### III- Parte Experimental

#### III.1 - Sistemas de 1ª Ordem

1 - Conecte os sinais  $C_1$  e  $C_2$  (control output) da placa 7/1 com os respectivos terminais  $C_1$  e  $C_2$  (control input) da placa 7/2.

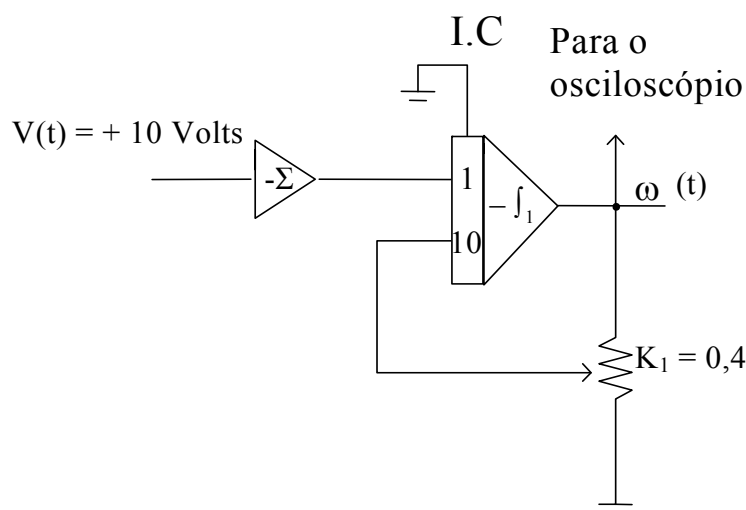
2 - Coloque as chaves nas seguintes posições:

Chave	Placa	Posição
TRIGGER	7/1	int.
$S_1$	7/2	x100
$S_2$	7/2	x100

3 - A seguir será obtida experimentalmente a resposta transitória do sistema de primeira ordem

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{0,25}{0,25 s + 1} \quad (4)$$

para uma entrada degrau  $V(t)$  com amplitude  $V(t)=10$  volts. Comparando-se a equação (4) com a Fig.1, identifica-se  $\tau=0,25$  e  $K=0,25$ . Implemente este sistema dinâmico, montando o esquema eletrônico abaixo, que corresponde ao diagrama da Fig.2, já estudado, com  $\tau=k=0,25$ .



**Fig. 3 –implementação de (4) no computador analógico.**

4 - Coloque a chave **TIME** da placa 7/1 na posição 0,1s. Ligue o osciloscópio. Ligue o módulo e ajuste a chave **TIME-FINE** até obter uma boa figura no osciloscópio. Assegure que o modo de operação do módulo esteja em **REPETIÇÃO (REP)**.

5 - Copie o sinal  $\omega(t) \times t$  ligado no osciloscópio, utilizando o MATLAB. Anote aqui o nome do arquivo que gravou os dados: \_\_\_\_\_.

Observação: Se as chaves  $S_1$  e  $S_2$  estiverem na posição  $\times 100$ , os intervalos de tempo lidos no osciloscópio deverão ser multiplicados por 100.

6 - Compare a curva levantada experimentalmente com a curva teórica, mostrando no relatório a curva experimental e a teórica, plotando-as em um mesmo gráfico.

7 - Desligue o módulo e retire todas as ligações, excetuando-se  $C_1$  e  $C_2$ .

## III.2 - Sistema de Segunda Ordem

### III.2.1 - Introdução

Nesta experiência será estudada a resposta transitória de sistemas de 2ª ordem, dados pela função de transferência abaixo

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}, \quad (5)$$

para entradas  $V(t)$  do tipo degrau. Para a simulação no computador analógico é necessária a representação de (5) em termos de uma equação diferencial. Tem-se de (5):

$$(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)y(s) = k \omega_n^2 V(s) \quad (6)$$

e assim,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k \omega_n^2 V(t). \quad (7)$$

### III.2.2 - Simulação Analógica

A seguir serão obtidas experimentalmente as respostas transitórias do sistema

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 100 k_1 \frac{dy(t)}{dt} + 100y(t) = V(t) \quad , t \geq 0, \quad (8)$$

$$y(0) = \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad e \quad V(t) = 10 \text{ volts}. \quad (9)$$

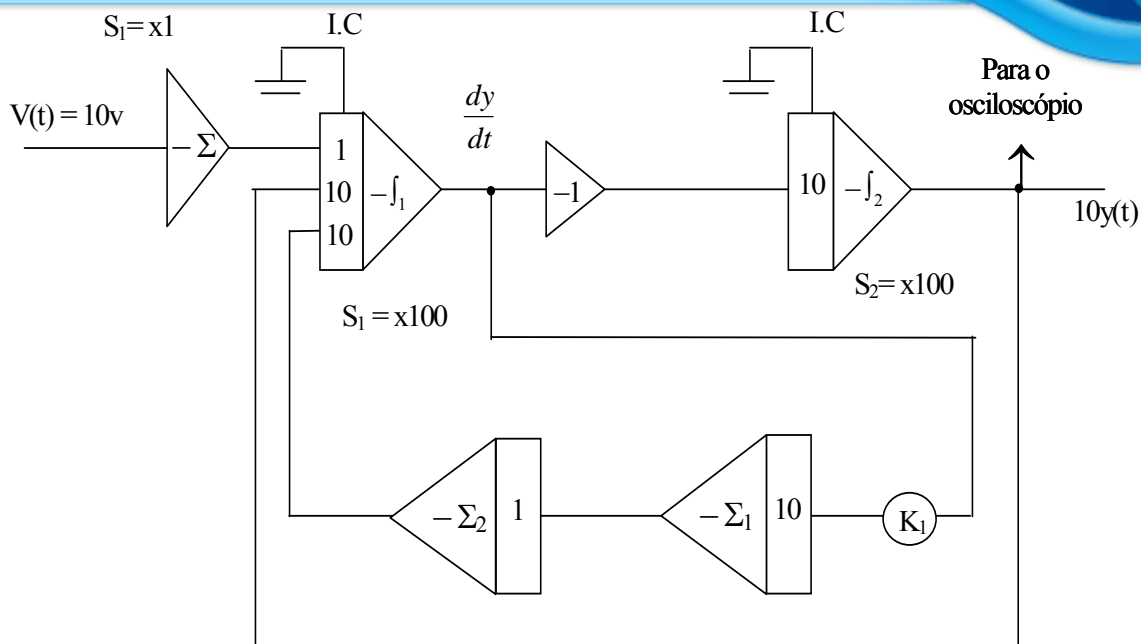
Comparando-se estas equações com a equação (7), obtêm-se:

$$\omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10 \text{ rad/s}, \quad (10)$$

$$2\xi \omega_n = 100 k_1 \Rightarrow \xi = 5 k_1, \quad (11)$$

$$k \omega_n^2 = 1 \Rightarrow k = 0,01. \quad (12)$$

O sistema dado em (8) e (9) pode ser implementado no computador analógico da seguinte forma:



**Fig. 3 - Implementação do Sistema (8) e (9) no Computador Analógico.**

- 1 - Monte o circuito da Fig.3 no computador analógico.
- 2 - Ligue o osciloscópio, assegure que o módulo esteja no modo **REP**, coloque a chave **TIME** na posição 0,1 segundos e atue no potenciômetro  $k_1$  e na chave **TIME-FINE** de modo que apareça na tela um sinal com overshoot.
- 3 - Varie  $k_1$  de modo a obter as porcentagens de overshoot dadas na tabela abaixo e anote os outros valores solicitados na tabela. Grave os dados de cada curva obtida utilizando o MATLAB.

Observação: Se as chaves  $S_1$  e  $S_2$  estão na posição  $\times 100$ , então os intervalos de tempo lidos no osciloscópio deverão ser multiplicados por 100.

P.O.=10%		P.O.=50%		P.O.=70%	
Nome do arquivo		Nome do arquivo		Nome do arquivo	
$K_1(\text{medido})=$		$K_1(\text{medido})=$		$K_1(\text{medido})=$	
Tempo de Pico (medido) =		Tempo de Pico (medido) =		Tempo de Pico (medido) =	

	$\xi$			Tempo de Pico		
P.O	$\xi_{\text{Teórico}}$ (Tabela)	$\xi_{\text{exp}}=5K_1$	Erro %	Tempo de Pico Teórico(Tabela)	Tempo de Pico Exp.	Erro %
10%						
50%						
70%						

4 – Usando o MATLAB, plote os três gráficos  $y(t)$  x  $t$  em um mesmo gráfico.

5 - Plote com o MATLAB as curvas teóricas e experimentais, em um mesmo gráfico, porém um gráfico para cada porcentagem de overshoot.

6 - Qual a influência do coeficiente de amortecimento  $\xi$  na porcentagem de overshoot?

7 - Desligue o módulo, o osciloscópio e retire todas as ligações.

### III.3 – Erro de regime permanente.

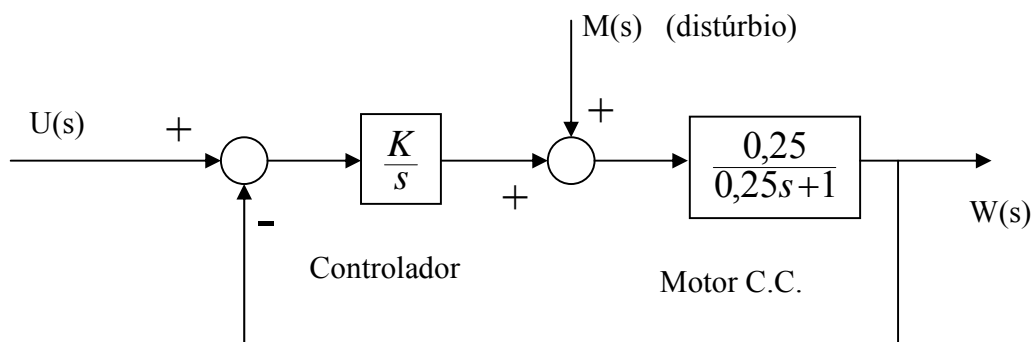
#### III.3.1 – Sistema sem distúrbio.

Projete um controlador  $D(s)$  tal que o motor C.C. dado, tenha erro de regime permanente nulo para entrada degrau. A função de transferência do motor C.C. foi dada pela equação (4).

Projete o circuito do computador analógico que implementa o controlador  $D(s)$  projetado. Implemente todo o sistema realimentado e meça a resposta transitória, o nome do arquivo de dados é: \_\_\_\_\_. No módulo, coloque as chaves S1 e S2 na posição x1. Utilize os botões "I.C." e "Compute" da placa 7/1 para realizar a simulação. Ajuste a escala temporal do osciloscópio digital tal que todo transitório e parte do regime permanente apareçam na tela. Plote no mesmo gráfico a curva teórica e a experimental, para entrada degrau unitário. Mostre no relatório o circuito completo.

#### III.3.2 – Sistema com distúrbio.

Com o controlador anterior, suponha a presença de um distúrbio na entrada do motor:



Projete  $K$  tal que se tenha boa rejeição do distúrbio  $m(t)$  sobre  $w(t)$ . Tome cuidado para não especificar  $K$  muito grande, pois poderá causar saturação dos A. O. . No módulo, coloque as chaves S1 e S2 na posição x1. Utilize os botões "I.C." e "Compute" da placa 7/1 para realizar a simulação. Ajuste a escala temporal do osciloscópio digital tal que todo transitório e parte do regime permanente apareçam na tela.

Aplique um degrau unitário em  $u(t)$  e faça  $m(t)$  uma senóide de amplitude 5volts, sem nível DC e com 100Hz. Meça  $w(t)$ , o nome do arquivo de dados é \_\_\_\_\_.

#### IV – Resposta Transitória e Erro de Regime Permanente.

Projete um controlador que atenda a todos os requisitos de projeto dados nos itens III.3.1 e III.3.2 e ainda, apresente  $P\acute{O}\% \leq 20\%$  e  $T_e \leq 4s$ . Implemente no computador analógico o sistema completo e registre a resposta transitória no MatLab. Não se esqueça de aplicar o degrau  $U(s)$  e a senóide do distúrbio  $M(s)$ . O nome do arquivo de dados é \_\_\_\_\_. Use o Root-Locus para realizar seu projeto (MatLab).

# APÊNDICE E – Bibliografia Básica e Critério de Avaliação

## Bibliografia

OGATA, K. – Engenharia de Controle Moderno, 4ª ed., Prentice Hall, 2003.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. – Sistemas de Controle Modernos, 8ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 1998.

KUO, B. C. – Sistemas de Controle Automático, 4ª ed., PHB, Rio de Janeiro, 1985.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. – Feedback Control of Dynamic Systems, 3ª ed., Addison Wesley, New York, 1994.

CHEN, C. T. – Analog and Digital Control System Design Transfer-function, State-space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, New York, 1993.

## CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM:

O critério de avaliação desta disciplina consta de notas de provas e relatórios de laboratório. A média final (MF) será calculada por:

$$\begin{array}{ll} MF = 0,8\bar{P} + 0,2\bar{L} & \text{se } \bar{P}, \bar{L} \geq 5 \text{ ou } \bar{P}, \bar{L} \leq 5, \\ MF = 0,9\bar{P} + 0,1\bar{L} & \text{se } \bar{P} < 5 \text{ e } \bar{L} \geq 5, \\ MF = 0,1\bar{P} + 0,9\bar{L} & \text{se } \bar{P} \geq 5 \text{ e } \bar{L} < 5. \end{array}$$

sendo:

$\bar{P}$  = média das provas;

$\bar{L}$  = média das notas de relatório, lista de exercícios e projetos;

$$\bar{P} = (2P_1 + 3P_2) / 5.$$

A avaliação final é a seguinte:

- Aprovado, quando  $MF \geq 5$  ;
- Reprovado, quando  $MF < 5$  .

Haverá uma prova substitutiva opcional que será relativa a toda a matéria ministrada no final do semestre. Sua nota substituirá a nota  $P_1$  ou  $P_2$  , que resulte na maior média final. Não haverá período de recuperação.

**-Trazer pendriver e disquete em todas as aulas de laboratório!!!**

## APÊNDICE F

**Alguns Artigos Científicos Publicados  
pelos Professores Marcelo C. M. Teixeira  
e Edvaldo Assunção**