فريق الكريّات الحمراء التطوعي

كلية الهندسة المعلوماتية

السنة الثالثة

مدخل إلى البرمجة الخطية

عملي

1

7

350

20/10/2022

د. مهند بكر

بحوث العمليات

RBCs Informatics;

تدور الأيام دورتها وتتابع الليالي فتنقضي سنة ويحل عام، ويذهب موسم ويقترب آخر، قبل أشهر قليلة كنًا نستعد لامتحانات نهاية العام الدراسي الثاني في الجامعة ثم اجتزناها واستقبلنا إجازةً صيفيّةً ممتعةً استحققناها بعد كل ذلك التعب والجهد. ثم عدنا من جديد نستقبل عاماً دراسياً آخراً فنسأل الله أن يكون عامنا هذا عام خيرٍ وجدٍّ ونجاح.

من هنا ستبدأ رحلتكم معنا في القسم العملي لمادة بحوث العمليّات, أحد أجمل وأهم المواد التي ستتعلمها في هذا الفصل, نرجو أن تكون سهلة وممتعة بالنسبة لكم وأن تنال إعجابكم. كلّ التوفيق.

تنويه: في عملي مادة بحوث العمليات سيبدأ الأستاذ مهند بحل المسائل لذلك لا بد من حضور محاضرات النظري لفهمها قبل حل المسائل.

Are you ready? Let's begin our journey together

البرمجة الخطية

النمذجة باستخدام البرمجة الخطية:

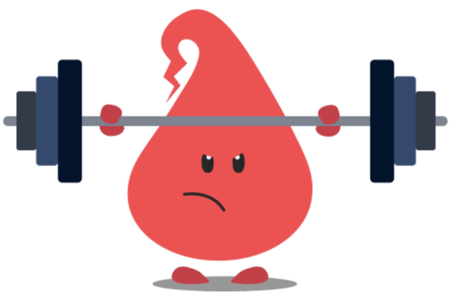
صياغة نموذج رياضي باستخدام البرمجة الخطية واختصاراً صياغة نموذج رياضي خطّي.

أي كيف نحوّل المسألة من صيغة كلامية إلى صيغة برمجة خطية بمتغيرات x_1, x_2 لمعادلات ومتراجحات خطية وحلها فيما بعد للحصول على الهدف المطلوب من المسألة.

الدالة الخطية:

تعريف1:

نقول عن الدالة: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ أنها دالة خطية إذا حققت الشرطان:



1. $f(x+y) = f(x) + f(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $f(ax) = af(x);\ \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$: يوجد إحداثي واحد فقط (فضاء) $\Leftarrow f(x)$

$f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$: يوجد إحداثيين (فضاء مربع) $\Leftarrow f(x_1,x_2)$

$f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$: يوجد ثلاث إحداثيات (فضاء مكعب) $\Leftarrow f(x_1,x_2,x_3)$

أمثلة:

$f(x)=3x$

الشرط الأول:

الطرف الأول:

$f(x+y)=3(x+y)$

الطرف الثاني:

$f(x)+f(y)=3x+3y$

نلاحظ أنَّ الشرط الأول محقق.

وأيضاً الشرط الثاني محقق.

$f(x)=x+3$

الشرط الأول:

الطرف الأول:

$f(x+y)=x+y+3$

الطرف الثاني:

$f(x)+f(y)=x+3+y+3$

$=x+y+6$

نلاحظ أنهما غير متساويان (غير محقق).

$f(x)=x^3$

الشرط الأول:

الطرف الأول:

$f(x+y)=(x+y)^3$

الطرف الثاني:

$f(x)+f(y)=x^3+y^3$

نلاحظ أنهما غير متساويان (غير محقق).

استنتاج:

إذا كانت الدالة مرفوعة إلى قوة أو مضاف إليها عدد ثابت سواء أكان موجب أم سالب فهي ليست خطية أي يجب أن يكون شكل الدالة الخطية بالشكل:

$$f(x)=ax;\ a \text{ عدد حقيقي}$$

تعريف2:

الدالة $f(x_1,x_2,x_3,\ldots.,x_n)$ تكون خطية إذا وفقط إذا وجِد:

$$c_1,c_2,c_3,\ldots.,c_n\in\mathbb{R}$$

بحيث:

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots.,x_n)=cx_1+cx_2+cx_3+\cdots+cx_n$$

توضيح:

إذا كانت الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ فإنها تكون خطية إذا كانت بالشكل:

$$f(x) = cx; c \in \mathbb{R}$$

وإذا كانت معرفة على $\mathbb{R}^2$ أي الدالة تحتوي على متغيرين x_1, x_2 فإنها تكون خطية إذا كُتبت بالشكل:

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

المعادلة والمتراجحة الخطية:

إذا كان لدينا دالة خطيّة f وكانت $b \in \mathbb{R}$ فإن الشرط:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = b$$

يسمى معادلة خطيّة.

في حين إنّ الشرط $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ أو $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ يسمى متراجحة خطية.

مثال:

ليكن لدينا دالة معرفة على $\mathbb{R}^3$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

نلاحظ أنها دالة خطية لأنها كتبت بالشكل:

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

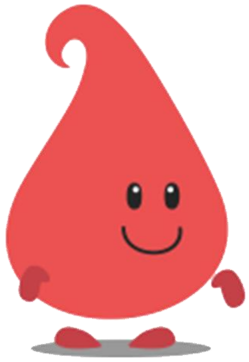
وفرضاً كان:

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \Leftarrow$ فهي معادلة خطية لأنها حققت الشرط.

وَ: $2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \Leftarrow$ فهي متراجحة خطية.

صياغة نماذج البرمجة الخطية (حل المسائل):

- تحديد المتحولات المجهولة (القرار) وتمثيلها برموز جبرية $X_1, X_2, \dots, X_n$.
- تحديد قيود المسألة (subject to) والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات خطية بحيث تكون كدالة لمتحولات المسألة في طرف والقيد في طرف.
- تحديد دالة الهدف Z : وهي عبارة عن دالة خطية لمتحولات المسألة ونبحث عن أكبر قيمة لها $Max\ Z$ أو أصغر قيمة لها $Min\ Z$.



Note:

من ضمن القيود الضرورية في كل مسألة هي قيد اللاسلبية

نعبر عنه بالصيغة:

فرضاً: المتحولات $X_1, X_2 \Leftarrow X_1 , X_2 \geq 0$

مثال على شكل مسألة البرمجة الخطية:

a) نحدد متحولات المسألة ولتكن X_1, X_2 مثلاً.

b) نحدد قيود المسألة ولتكن:

يجب أن تكون كل من X_1 و X_2 قابلة للقياس (عدد, قيمة, ارتفاع, مسافة).

$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 4$$

بالإضافة لقيد اللاسلبية: $X_1 + X_2 \geq 0$

c) دالة الهدف ولتكن Z ومن ثم حسب الطلب في نص المسألة نحدد فيما إذا كانت Min أو Max :

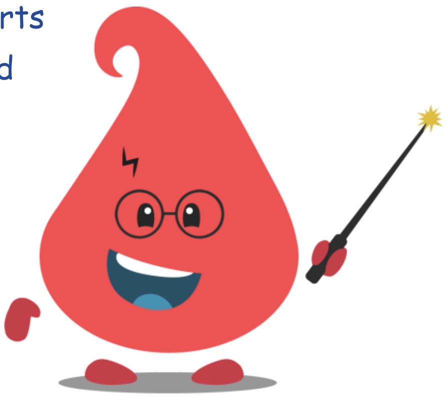
$$Max\ Z = 5X_1 + 9X_2$$

أو:

$$Min\ Z = 5X_1 + 9X_2$$

Success is the sum of the small efforts repeated

أي يمكن صياغة المسألة بالشكل التالي (النموذج الرياضي الخطي):



$$Max\ Z = 5X_1 + 9X_2$$
s.t:
$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

نستنتج مما سبق أنَّ مسألة البرمجة الخطية هي محاولة إيجاد القيمة العظمى او الصغرى لدالة خطية بحيث تكون جميع القيود معادلات خطية أو متراجحات خطية. بالإضافة لذلك فإن أي متغير لا بد ان يكون غير سالب.

المسألة1:

شركة لإنتاج الحقائب ترغب في تحقيق أقصى ربح ممكن من إنتاج نوع واحد من الحقائب الجلدية. ربح الحقيبة الواحدة 500 ليرة يلزم لإنتاج الحقيبة الواحدة 4 ساعات عمل, يتوفر لدى الشركة 40 ساعة عمل في الأسبوع الواحد, ما هو عدد الحقائب التي يمكن انتاجها في الأسبوع من أجل تحقيق هدف الشركة (أقصى ربح) ؟

أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

الحل:

	الزمن اللازم لإنتاج الحقيبة	الربح
الحقيبة	4ساعات الشركة تملك 40 ساعة عمل في الاسبوع	500 ليرة

الهدف هو تحقيق أكبر ربح ممكن في الأسبوع(Max) .

Every problem can
be fixed no
matter what

متحولات المسألة:

X عدد الحقائب المنتجة في الأسبوع.

دالة الهدف: (في المسائل يمكن تحديد دالة الهدف قبل القيود).

الربح يأتي من بيع الحقائب:

$$Max\ Z = 500X$$

القيود:

- الوقت اللازم لإنتاج الحقيبة الواحدة يحتاج 4 ساعات عمل. بحيث تكون ساعات إنتاج الحقائب لا تتجاوز ساعات العمل (أي أصغر أو تساوي) :

$$4X \leq 40$$

- قيد اللاسلبية: $X \geq 0$.

$\Leftarrow$ النموذج الرياضي الخطي لهذه الشركة يُكتب بالشكل:

$$Max\ Z = 500X$$

s.t:

$$4X \leq 40$$
$$X \geq 0$$

وبحل هذا النموذج ينتج لدينا عدد الحقائب.

المسألة 2:

تقوم مطبعة بطباعة نوعين من الكتب هما كتب الرياضيات وكتب العلوم. حيث أنّ تكلفة الورق لكتاب الرياضيات 3 ليرات وتكلفة الورق لكتاب العلوم هي 4 ليرات. حيث أنّ كتاب الرياضيات يستهلك كمية من الحبر وتكلفتها 8 ليرات ويستهلك كتاب العلوم 10 ليرات. إنّ ربح المطبعة من الكتاب الأول هي 20 ليرة ومن الكتاب الثاني 25 ليرة.

مع العلم أن المطبعة **تمتلك كمية من الورق بقيمة 200 ليرة وكمية من الحبر بقيمة 400 ليرة.**

تهدف المطبعة لتحقيق أكبر كمية ربح ممكنة عن طريق تحديد عدد الكتب الأمثل من كل نوع.

أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

الحل:

	تكلفة الورق	تكلفة الحبر	الربح
كتاب الرياضيات	3	8	20
كتاب العلوم	4	10	25

200 400

تملك المطبعة

الهدف هو تحقيق أكبر كمية ربح ممكنة (Max).

متحولات المسألة:

X_1 : عدد كتب الرياضيات.

X_2 : عدد كتب العلوم.

دالة الهدف:

$$Max\ Z = 20X_1 + 25X_2$$

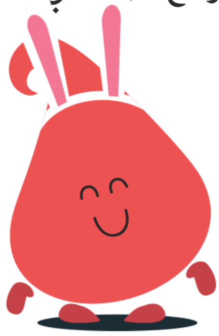
القيود:

- تكلفة ورق الرياضيات وورق العلوم لا يتجاوز 200 ليرة.
  $$3X_1 + 4X_2 \le 200$$
- تكلفة الحبر لورق الرياضيات والعلوم لا يتجاوز 400 ليرة:
  $$8X_1 + 10X_2 \le 400$$
- قيد اللاسلبية: $X_1, X_2 \ge 0$

وَتذكر أنَّ هذه اللحظات
الصعبة ستمضي
ويبقى أثرُها مُزهر

وبالتالي النموذج الرياضي الخطي لهذه الشركة يُكتب بالشكل:

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 20X_1 + 25X_2 \\ &\text{s.t:} \\ &3X_1 + 4X_2 \leq 200 \\ &8X_1 + 10X_2 \leq 400 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$



وبحل هذا النموذج ينتج لدينا عدد الكتب الأمثل من كل نوع.

الوظيفة:

شركة لإنتاج الحقائب ترغب في تحقيق أقصى ربح ممكن من إنتاج نوعين من الحقائب الجلدية, النوع الأول (حقائب كبيرة) حيث ربح الحقيبة الواحدة من هذا النوع هو 500 ليرة ويلزم لانتاج الحقيبة الواحدة من هذا النوع 4 ساعات من العمل. أما النوع الثاني (حقائب صغيرة) حيث ربح الحقيبة من هذا النوع هو 300 ليرة ويلزم لانتاج الحقيبة الواحدة من هذا النوع 2 ساعة عمل.

يتوفر لدى الشركة 40 ساعة عمل في الأسبوع الواحد.

ما هو عدد الحقائب الممكن انتاجها في الأسبوع من أجل تحقيق هدف الشركة؟

المطلوب: أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

THE END

See you later ♡

"Today is never too late to be brand new"