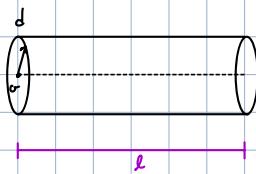


STATICA DI SISTEMI PIANI DI ASSI O DI TRAVI

→ Presa una generica sezione, la sua traslazione rigida individua un'asta



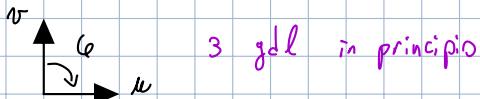
• $l > 5d \rightarrow$ sufficientemente allungato

→ Studieremo l'equilibrio delle strutture in assenza di forze d'inerzia

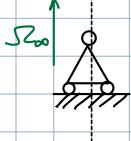
- Nell'ambito di questo corso, studieremo quindi solo la STATICA
- Affinche' si possa realizzare questa situazione, bisogna impostare VINCOLI
 - Tali vincoli devono impedire qualsiasi MOTO RIGIDO

→ Consideriamo ora i vincoli nel caso di un'asta rigida dal punto di vista cinematico

VINCOLI



→ CARRELLO: impedisce lo spostamento verticale

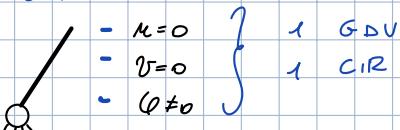


- $u \neq 0$
- $v = 0$
- $\varphi \neq 0$

- Centri di istantanea rotazione
 - punto infinito in direzione verticale per la u
 - carrello stesso per la rotazione

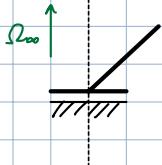
↳ No infiniti centri di istantanea rotazione

→ CERNIERA



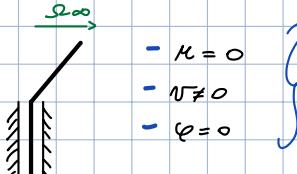
- $u = 0$
- $v = 0$
- $\varphi \neq 0$

→ PATTINO:



- $u \neq 0$
- $v = 0$
- $\varphi = 0$

→ MANICOTTO



- $u = 0$
- $v \neq 0$
- $\varphi = 0$

→ INCASOIRO



- $u = 0$
- $v = 0$
- $\varphi = 0$

ANALISI CINEMATICA

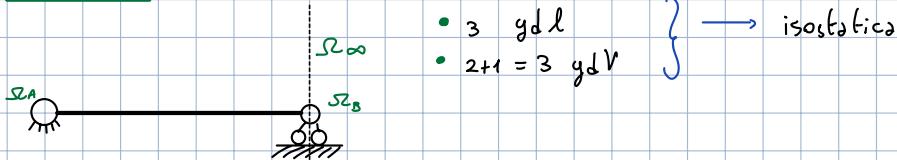
→ Le **STRUTTURE** possono essere

- **LABILI**: Se esiste un centro di istantanea rotazione comune a tutti i vincoli:
 - Dunque non esiste soluzione equilibrata
- **NON LABILI**: Se non esiste un centro di istantanea rotazione comune a tutti i vincoli:
 - Dunque esiste soluzione equilibrata per ogni sistema di forze esterne
 - Dunque tale caratterizzazione dipende solo dai vincoli, non dai corpi

→ Le **STRUTTURE** possono essere

- **IPOSTATICHE** $\Rightarrow gdl < gdV$
 - Tali strutture sono sempre **LABILI**
 - **ISOSTATICHE** $\Rightarrow gdV = gdl$
 - **IPERSTATICHE** $\Rightarrow gdV > gdl$
- $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$ Possono essere sia labili che non labili;

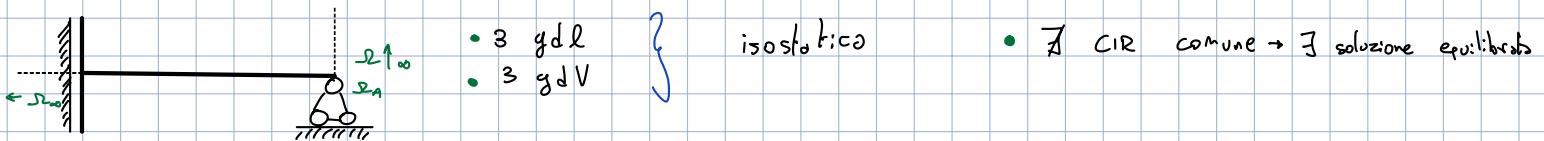
ESEMPIO



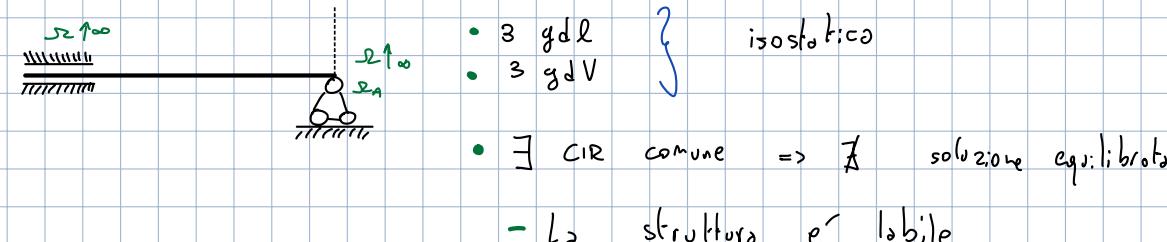
→ Consideriamo i centri di istantanea rotazione

- Non c'è CIR comune ai 2 vincoli; → non labile

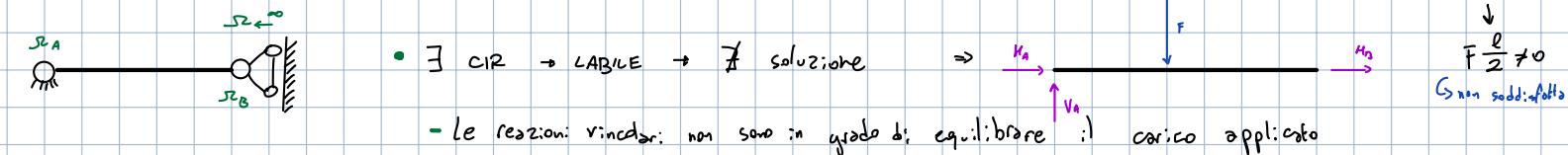
ESEMPIO



ESEMPIO



ESEMPIO

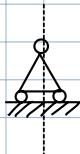


ANALISI STATICA

→ Esiste un principio di dualità tra analisi statica e cinematica

→ Consideriamo il caso del **CARRELLO**

- Se una direzione del moto è libera, il relativo vincolo è nullo, e viceversa



$$\begin{array}{l} - \mu \neq 0 \longrightarrow H=0 \\ - V=0 \longrightarrow V \neq 0 \\ - \varphi \neq 0 \longrightarrow M=0 \end{array}$$

PRINCIPIO DI DUALITÀ

Ogni qualvolta un grado di libertà è lasciato libero dal vincolo, la corrispondente reazione vincolare è nulla. Se invece il grado di libertà è rimosso dal vincolo, la corrispondente reazione vincolare è non nulla.

CERNIERA



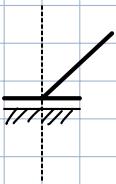
$$\begin{array}{l} - \mu = 0 \longrightarrow H \neq 0 \\ - V=0 \longrightarrow V \neq 0 \\ - \varphi \neq 0 \longrightarrow M=0 \end{array}$$

MANICOTTO



$$\begin{array}{l} - \mu = 0 \longrightarrow H \neq 0 \\ - V \neq 0 \longrightarrow V=0 \\ - \varphi = 0 \longrightarrow M \neq 0 \end{array}$$

PATTINO



$$\begin{array}{l} - \mu \neq 0 \longrightarrow H=0 \\ - V=0 \longrightarrow V \neq 0 \\ - \varphi \neq 0 \longrightarrow M \neq 0 \end{array}$$

INCASTRO



$$\begin{array}{l} - \mu = 0 \longrightarrow H \neq 0 \\ - V=0 \longrightarrow V \neq 0 \\ - \varphi = 0 \longrightarrow M \neq 0 \end{array}$$

→ Richiamiamo le **EQUAZIONI DI EQUILIBRIO**

- Si ha equilibrio quando: $\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$

- Possiamo scrivere: $\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_{\text{ATTIVE}} + \vec{R}_{\text{REATIVE}} \\ \vec{M} = \vec{M}_{\text{ATTIVE}} + \vec{M}_{\text{REATIVE}} \end{cases}$

- Dunque differenziamo dunque tra forze attive e reattive

- In due dimensioni mi riduco a 3 equazioni scalari. (al massimo)

$$\begin{cases} R_x^{\text{ATT}} + R_x^{\text{REAT}} = 0 \\ R_y^{\text{ATT}} + R_y^{\text{REAT}} = 0 \\ M_{(o)}^{\text{ATT}} + M_{(o)}^{\text{REAT}} = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO



- Isostatico e non labile poiché l'incastro non fornisce C.R.
- Calcoliamo l'equilibrio



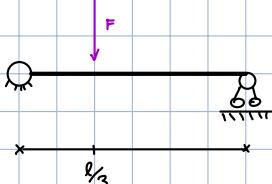
$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F = 0 \rightarrow V_A = F \\ M_A + F \cdot l = 0 \rightarrow M_A = -F \cdot l \end{cases}$$

- Dunque ri-disegno il diagramma del corpo libero



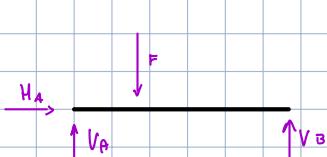
soluzione

ESEMPIO



3 g d.l }
 3 g d.v } ISO statica, non labile

- In rappresentazione del corpo libero

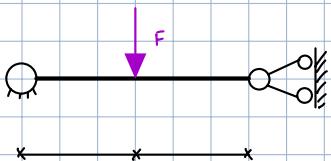


$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F + V_B = 0 \\ \frac{2}{3}F - lV_B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} V_B &= \frac{2}{3}F \\ V_B &= \frac{F}{3} \end{aligned}$$

→ All'interno della struttura nasce un insieme di azioni interne che permette l'equilibrio del sistema

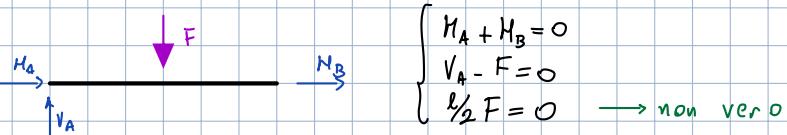
- Tali sollecitazioni in caso di struttura malprogettata possono causare rotture

ESEMPIO



- Struttura isostatica e labile

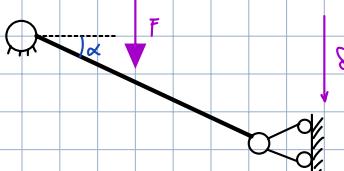
↓ rappresentazione del corpo libero



$$\begin{cases} H_A + H_B = 0 \\ V_A - F = 0 \\ \frac{1}{2}F = 0 \end{cases} \rightarrow \text{non vero}$$

- L'asta tende a spostarsi

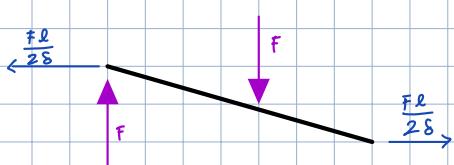
- Analizziamo il comportamento statico della struttura in deformazione



$$\begin{cases} H_A + H_B = 0 \rightarrow H_B = -\frac{F\ell}{2\delta} \\ V_A = F \\ \frac{1}{2}F - H_B\delta = 0 \rightarrow H_B = \frac{F\ell}{2\delta} \end{cases}$$

($\delta \rightarrow 0 \rightarrow \cos(\alpha) \approx 1$)

- No ottenuto una soluzione equilibrata



- Non appena si deforma, la struttura trova l'equilibrio, dunque non entra mai in dinamica

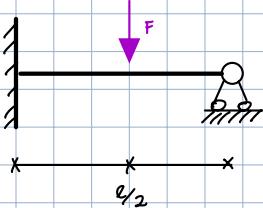


Tali spostamenti sono detti GRANDI SPOSTAMENTI in quanto sono in grado di caratterizzare l'equilibrio

→ Dunque le strutture **LABILI** possono trovare l'equilibrio in 2 modi:

- In **GRANDI SPOSTAMENTI**, arrivando in una configurazione d'equilibrio statico
- In **EQUILIBRIO DINAMICO**
- Noi studieremo solo strutture non labili;

ESEMPPIO



• Struttura iperstatica e non labile



→ Dunque esistono infinite soluzioni

↳ Le strutture iperstatiche non labili assumono infinite soluzioni.

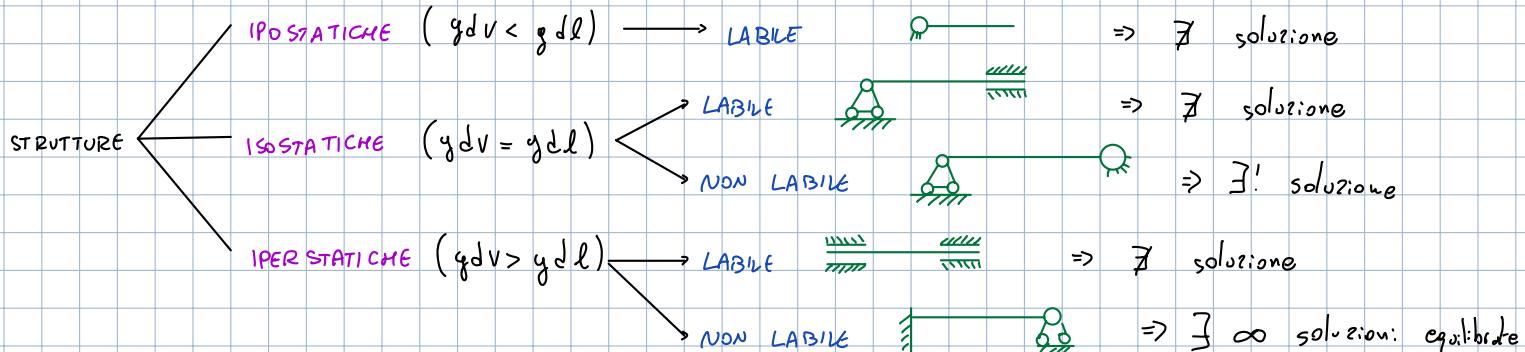
$$\begin{cases} M_A = 0 \\ V_A + V_B = F \\ M_A + F \frac{l}{2} - V_B l = 0 \end{cases}$$

2 equazioni
e 3 incognite

PROBLEMA INDETERMINATO

La risposta è definita tramite l'utilizzo d'ulteriori equazioni che coinvolgono, ad esempio, le caratteristiche del materiale

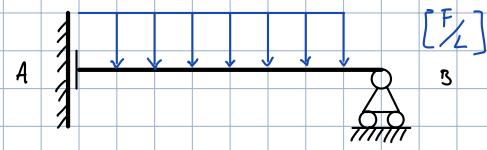
→ Dunque riprendiamo la categorizzazione già vista



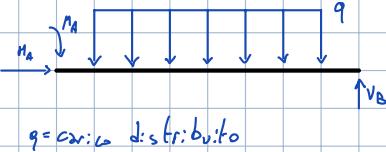
• Si pone un problema di **qualità** dei vincoli:

- In principio ho un numero di gradi d'vincolo minimo alto a rendere la struttura non labile
- Posso però scegliere male il tipo d'vincolo e far rimanere la struttura labile

→ Introduciamo il concetto di **CARICO DISTRIBUITO**, ovvero una forza per unità di lunghezza



⇒



$$\begin{cases} M_A = 0 \\ V_B - \int_0^l q dx = 0 \rightarrow V_B = q l \\ M_A + \int_0^l q x dx - V_B l = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow M_A = -\frac{1}{2} q l^2 + q l^2 = \frac{1}{2} q l^2$$

STATICA DEI Mezzi CONTINUI

- Si consideri un mezzo continuo tridimensionale di volume V e superficie S soggetto a forze agenti al suo interno e/o sulla superficie laterale

• Definiamo ΔM = momento risultante su un elemento infinitesimo di volume/superficie ($\Delta V/\Delta S$)

• Definiamo ΔR = forza risultante su un elemento infinitesimo di volume/superficie ($\Delta V/\Delta S$)

↓

• Definiamo $F = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta V}$ dove F = forza di volume

• Definiamo $f = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S}$ dove f = forza superficiale

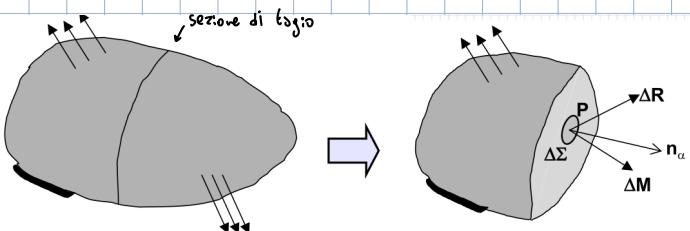
- inoltre

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = 0$$

e

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0$$

Definizione di sforzo



- P : generico punto interno
- $\Delta\Sigma$: sezione interna infinitesima
- ΔR : forza risultante
- ΔM : momento risultante
- n_α : normale a $\Delta\Sigma$

• **SFORZO**: sollecitazione che, dato una generica sezione di taglio; i due corpi risultanti dal taglio si spostino nel punto P

- Tale quantità dipende dalla sezione di taglio considerata

- In particolare, dipende da n_α

- Complessivamente dovrei volutare infinite sezioni di taglio

• Si postula che:

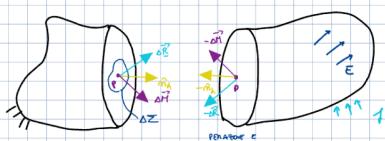
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta\Sigma} = \sigma_\alpha \\ \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta\Sigma} = 0 \end{array} \right.$$

se esiste è finito e nullo

- $\sigma_\alpha(P, n_\alpha)$ = sforzo nel punto P rispetto alla normale \vec{n}_α

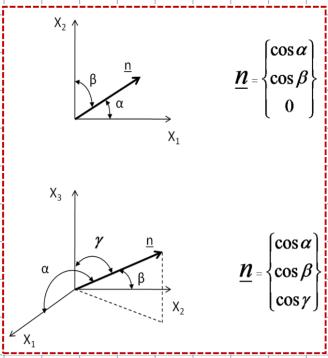
- L'insieme di tutti i vettori σ_α al variare di \vec{n}_α individua lo stato di sforzo in P

• Inoltre: $\sigma_{-\alpha} = -\sigma_\alpha$ →



• Introduciamo il concetto di **VERSORE**

• Sarà utile per definire una giacitura rispetto alla quale volutare il vettore sforzo



$$\bullet \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{--- } h^2 + h^2 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

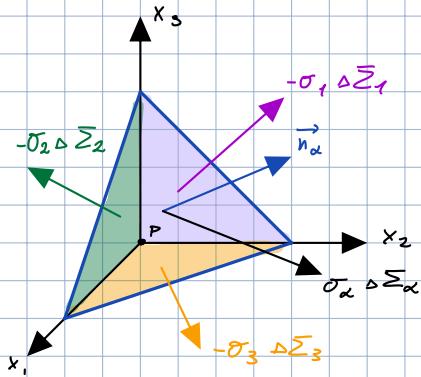
$$\bullet \alpha = \beta = \gamma$$

$$\text{--- } h^2 + h^2 + h^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

→ RELAZIONE DI CAUCHY

- Consideriamo 4 superfici di taglio, d: dimensione infinitesima

- 3 d: queste sono matsu mafe ortogonali, la quarta ha orientamento generico \vec{n}_α



• Della $\Delta \Sigma_i$: la superficie della faccia i-esima, metto in evidenza: vettore sforzo per ogni faccia

$$-\Delta \Sigma_i = \Delta \Sigma_\alpha \cdot \cos(\vec{n}_\alpha \wedge \vec{i}) = -\Delta \Sigma_\alpha h_\alpha;$$

angolo formato tra

- Imposto l'equazione di equilibrio alla trascrizione

$$-\vec{\sigma}_\alpha \Delta \Sigma_\alpha + (-\vec{\sigma}_1 \Delta \Sigma_1) - \vec{\sigma}_2 \Delta \Sigma_2 - \vec{\sigma}_3 \Delta \Sigma_3 + \vec{F} \cdot \Delta V =$$

a infinitesimo del terzo ordine

- Ottengo la RELAZIONE DI CAUCHY

$$-\vec{\sigma}_\alpha = \vec{\sigma}_1 h_{\alpha 1} + \vec{\sigma}_2 h_{\alpha 2} + \vec{\sigma}_3 h_{\alpha 3}$$

- Esprimendo in forma matriciale, considerato che ciascun vettore ha 3 componenti (x_1, x_2, x_3)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\alpha 1} \\ h_{\alpha 2} \\ h_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$

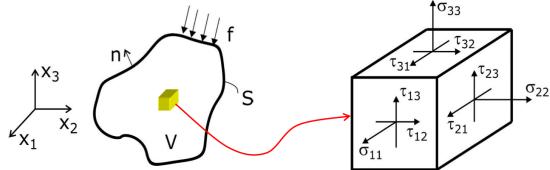
$$-\text{Dunque: } \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\alpha 1} \\ h_{\alpha 2} \\ h_{\alpha 3} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma}_{\alpha \delta} = \vec{\sigma}_{i \delta} h_{\alpha i}$$

- Definisco $\vec{\sigma}_{i \delta} = \text{TENSORE DI SFORZO}$

* Se il tensore di sforzo è noto, "conosco" il sistema

NOTA: Per ordini superiori a 3, però la rappresentazione matriciale

→ Dunque introduco lo STATO DI SFORZO



- le componenti normali sono $\vec{\sigma}_{ii}$ dove $i = 1, 2, 3$

- Le componenti tangenziali sono:

- $\vec{\sigma}_{ij} = \vec{\tau}_{ij}$ dove $i \neq j$

↳ Molti materiali hanno resistenze diverse rispetto alle diverse componenti

- i = asse ortogonale al piano su cui agisce la componente di sforzo
- j = direzione della componente di sforzo

- Nello stato di sforzo, riscriviamo il tensore di sforzo come: $\vec{\sigma}_{ij} = p S_{ij} + S_{ij}$

- $p S_{ij}$ = componente idrostatica di sforzo

- $\times S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

- S_{ij} = componente deviatorica di sforzo

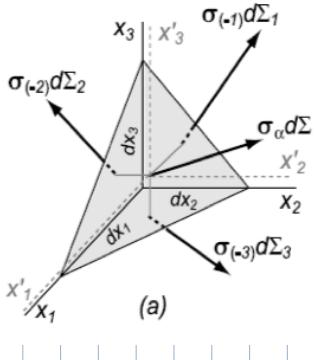
- In forma matriciale

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}-p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22}-p & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33}-p \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33}}{3} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \frac{-\sigma_{11}+2\sigma_{22}-\sigma_{33}}{3} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \frac{-\sigma_{11}-\sigma_{22}+2\sigma_{33}}{3} \end{bmatrix}$$

- p = pressione idrostatica

→ Discutiamo ora la simmetria del tensore sforzo

- La simmetria del tensore σ consegue dall'equilibrio alla rotazione del tetraedro



- Si considerino tre assi x' paralleli a x ; ma passanti per il baricentro delle facce normale \vec{n}_α , dove è applicata la forza $\vec{\sigma}_\alpha d\Sigma$

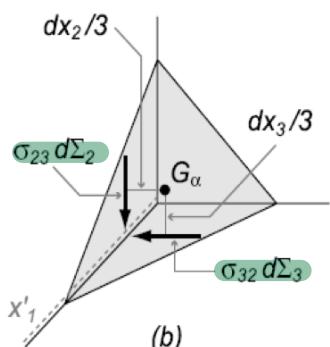
- Le distanze da G_α dei baricentri G_i delle altre tre facce sono $\frac{1}{3} dx_i$???

- Il volume del tetraedro è: $dV = d\Sigma_1 \frac{dx_1}{3} = d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3} = d\Sigma_3 \frac{dx_3}{3}$

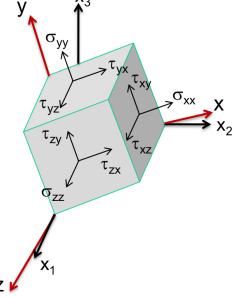
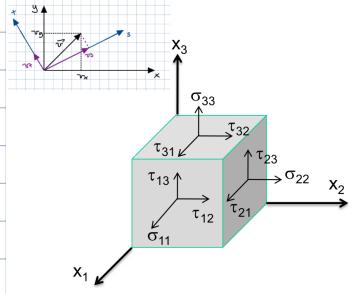
- Nell'equilibrio alla rotazione del tetraedro intorno all'asse x' intervengono solo le forze $\sigma_{23} d\Sigma_2$ e $\sigma_{32} d\Sigma_3$

- Volendo trascurare gli infinitesimi di ordine superiore al terzo ottengo

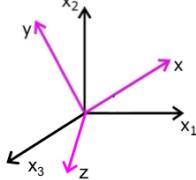
$$\sigma_{23} d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3} = \sigma_{32} d\Sigma_3 \frac{dx_3}{3} \rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32}$$



→ Ci poniamo ora il problema della rotazione di un tensore col sistema di riferimento



- Noto lo stato di sforzo rispetto al sistema (x_1, x_2, x_3) , si vuole valutare lo stato di sforzo rispetto alle 3 direzioni di un nuovo Sistema di riferimento (x, y, z)



- Conosciamo $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \sigma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ matrice dei versori: trasposta

- Scrivo $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \sigma_{yy} & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{x1} & h_{x2} & h_{x3} \\ h_{y1} & h_{y2} & h_{y3} \\ h_{z1} & h_{z2} & h_{z3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \sigma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{x1} & h_{y1} & h_{z1} \\ h_{x2} & h_{y2} & h_{z2} \\ h_{x3} & h_{y3} & h_{z3} \end{bmatrix}$

- σ_{xx} è la componente del vettore lungo il versore: $\underline{\sigma}_{xx} = \underline{h}_x \cdot \underline{\sigma}$

- $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \sigma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{x1} & h_{y1} & h_{z1} \\ h_{x2} & h_{y2} & h_{z2} \\ h_{x3} & h_{y3} & h_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{y1} & \sigma_{z1} \\ \sigma_{x2} & \sigma_{y2} & \sigma_{z2} \\ \sigma_{x3} & \sigma_{y3} & \sigma_{z3} \end{bmatrix}$ prodotto intermedio legato ad entrambi i sistemi;

• Dunque otengo la **REGOLA DI ROTAZIONE DEL TENSORE**

- $\underline{\underline{\sigma}}^{(x, y, z)} = \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{\sigma}}^{(x_1, x_2, x_3)} \underline{\underline{N}}$

SFORZI E DIREZIONI PRINCIPALI

→ Abbiamo introdotto il vettore sforzo rispetto alla direzione \underline{n}_α :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{relazione di Cauchy} \\ \underline{\sigma}_\alpha = \underline{\sigma} \underline{n}_\alpha \\ \underline{\sigma}_\alpha = \sigma \underline{n}_\alpha \end{array} \right.$$

• Ottengo un'equazione agli autovettori: $\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}_\alpha = \sigma \underline{n}_\alpha$

- $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) \underline{n}_\alpha = 0$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \sigma_{yy} - \sigma & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\alpha 1} \\ h_{\alpha 2} \\ h_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0 \Rightarrow \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$

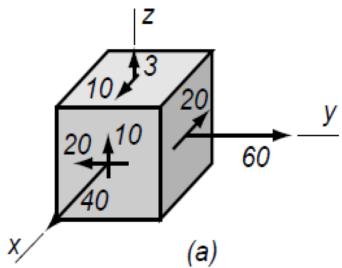
* Poiché $\underline{\underline{\sigma}}$ è simmetrica, il teorema dell'algebra lineare assicura l'esistenza di tre radici reali:

- $\begin{cases} \underline{n}_1, \sigma_1 \\ \underline{n}_2, \sigma_2 \\ \underline{n}_3, \sigma_3 \end{cases}$ → **SFORZI E DIREZIONI PRINCIPALI**
(autovettori) (autovettori)

- J_1, J_2, J_3 sono detti **INVARIANTI DI SFORZO**

\times
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \bar{J}_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \tau_{12}\tau_{21} - \tau_{23}\tau_{32} - \tau_{13}\tau_{31} \\ \bar{J}_3 = \det(\underline{\sigma}) \end{array} \right.$$

ESEMPIO d: calcolo di sforzi e direzioni principali:



- $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 10 \\ -20 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (MPa)

- $\bar{J}_1 = 103$ MPa
- $\bar{J}_2 = 2200$ MPa
- $\bar{J}_3 = 0$ MPa

- $s^3 - 103s^2 + 220s = 0$

- Ottengo gli sforzi principali:

- $s_I = 72.766$ MPa
- $s_{II} = 30.234$ MPa
- $s_{III} = 0$ MPa

- Sostituendo gli autovettori calcolati in $(\underline{\sigma} - s \underline{I})n_a = 0$

$$\begin{bmatrix} 40-s_I & -20 & 10 \\ -20 & 60-s_I & 0 \\ 10 & 0 & 3-s_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{Ix} \\ n_{Iy} \\ n_{Iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32.766 & -20 & 10 \\ -20 & -12.766 & 0 \\ 10 & 0 & -63.766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{Ix} \\ n_{Iy} \\ n_{Iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

det=0 e rank=2

- Ottengo $n_I = \begin{pmatrix} 0.536 \\ -0.840 \\ 0.077 \end{pmatrix}$

\times
$$\begin{cases} -32.8n_{I1} - 20n_{I2} + 10n_{I3} \\ -20n_{I1} - 12.8n_{I2} = 0 \\ 10n_{I1} - 6.3n_{I3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{I1} = \alpha \\ n_{I2} = -1.57\alpha \\ n_{I3} = 0.14\alpha \end{cases}$$

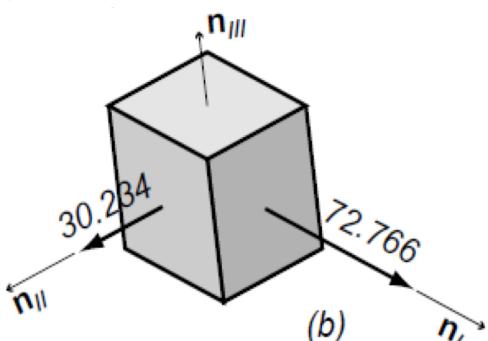
\times $n_I = [\alpha, -1.57\alpha, 0.14\alpha]$

\times Un verso ha modulo unitario: $|n_I| = (\alpha^2 + (-1.57\alpha)^2 + (0.14\alpha)^2)^{1/2} = 1 \Rightarrow \alpha = 0.54$

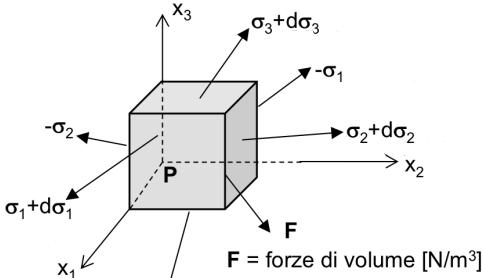
- Allo stesso modo: $n_{II} = \begin{pmatrix} 0.794 \\ 0.533 \\ 0.282 \end{pmatrix}$

$$n_{III} = \begin{pmatrix} -0.286 \\ -0.085 \\ 0.853 \end{pmatrix}$$

\times Queste componenti sono fra loro ortogonali e tali che lo sforzo ha componente normale data dal solo sforzo principale



EQUILIBRIO IN FORMA FORTE AL CONTORNO



• L'obiettivo è calcolare la funzione forza

- Per equilibrio alla traslazione

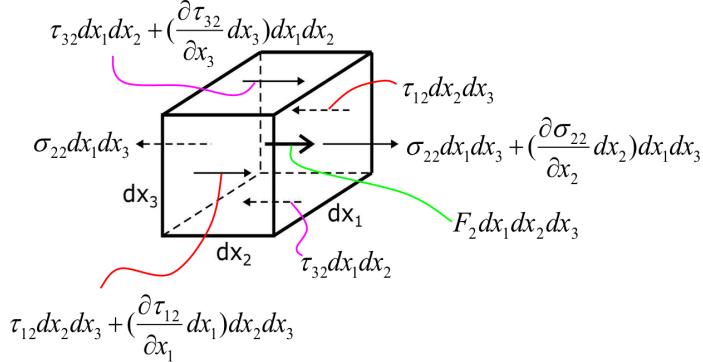
$$\begin{aligned} & -\cancel{\sigma_1 dx_2 dx_3} - \cancel{\sigma_2 dx_1 dx_3} - \cancel{\sigma_3 dx_1 dx_2} + (\cancel{\sigma_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 + \\ & + (\cancel{\sigma_2} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} dx_2) dx_1 dx_3 + (\cancel{\sigma_3} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} dx_3) dx_1 dx_2 + \underline{F} dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \\ & - \text{Ottengo: } \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + \underline{F} = 0 \end{aligned}$$

- Scrivo le equazioni di equilibrio IN FORMA FORTE (scomponendo su 1, 2, 3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0$$

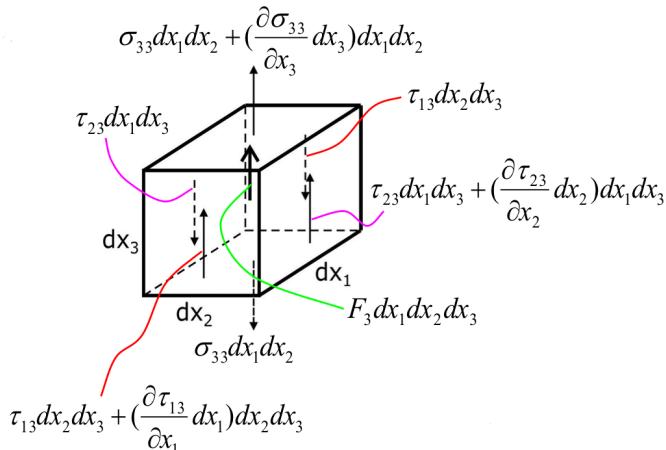
- Dunque l'equilibrio alla rotazione impone la simmetria del tensore $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

• Innanzitutto l'equilibrio alla traslazione in direzione x_2



$$\bullet \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0$$

• Allo stesso modo, imponiamo l'equilibrio alla traslazione in direzione x_3



$$\bullet \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0$$

- L'equilibrio al contorno impone che lo sforzo che affiora in superficie sia uguale alla forza di superficie imposto f

- Matematicamente, ciò equivale ad isolare un tetraedro attorno ad un punto P in superficie e ad applicare la relazione di Cauchy: $\underline{\sigma} \underline{n} = f$

• Dunque scrivo $\underline{\sigma}_1 h_1 + \underline{\sigma}_2 h_2 + \underline{\sigma}_3 h_3 = f$

- $\forall (x_1, x_2, x_3) \in S$ vede
(\leftrightarrow superficie)

$$\begin{cases} \sigma_{11} h_1 + \sigma_{21} h_2 + \sigma_{31} h_3 = f_1 \\ \sigma_{12} h_1 + \sigma_{22} h_2 + \sigma_{32} h_3 = f_2 \\ \sigma_{13} h_1 + \sigma_{23} h_2 + \sigma_{33} h_3 = f_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\sigma}_i h_i = f_i$$

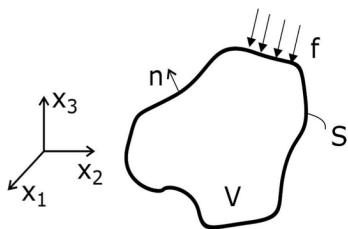
\times non e' la normale alla superficie in P

NOTA: No in tutto 3 equazioni e 6 incognite, cioè il continuo generico è statisticamente indeterminato, ovvero le sole equazioni di equilibrio non permettono di calcolare la sua risposta in termini di stato sforzo interno per effetto di azioni esterne note

RIASSUMENDO

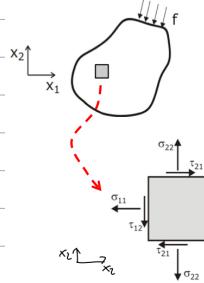
Per l'equilibrio in forma forte e del contorno:

→ Sul volume V: $\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{cases}$



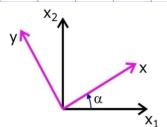
→ Sulla superficie S: $\begin{cases} \sigma_{11} h_1 + \tau_{21} h_2 + \tau_{31} h_3 + f_1 = 0 \\ \tau_{12} h_1 + \sigma_{22} h_2 + \tau_{32} h_3 + f_2 = 0 \\ \tau_{13} h_1 + \tau_{23} h_2 + \sigma_{33} h_3 + f_3 = 0 \end{cases}$

→ Consideriamo ora uno spazio generico superficie infinitesima del corpo e introduciamo lo **STATO DI SFORZO PIANO**



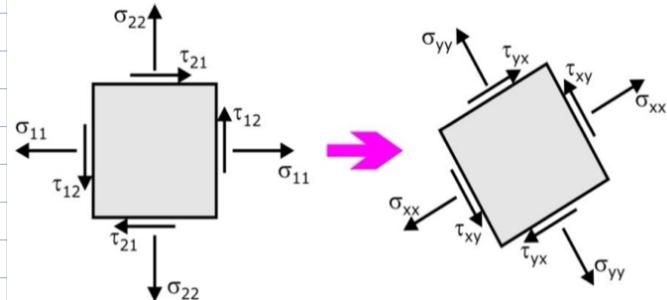
• $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\sigma} = \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{cases}$

→ Ora, discutiamo la ROTAZIONE DI UNO STATO DI SFORZO PIANO



• $\underline{n} = \begin{cases} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{cases} = \begin{cases} \cos(\beta\alpha+\alpha) \\ \sin\alpha \end{cases}$

• $\underline{n} = \begin{cases} \cos(\beta\alpha+\alpha) \\ \cos\alpha \end{cases}$

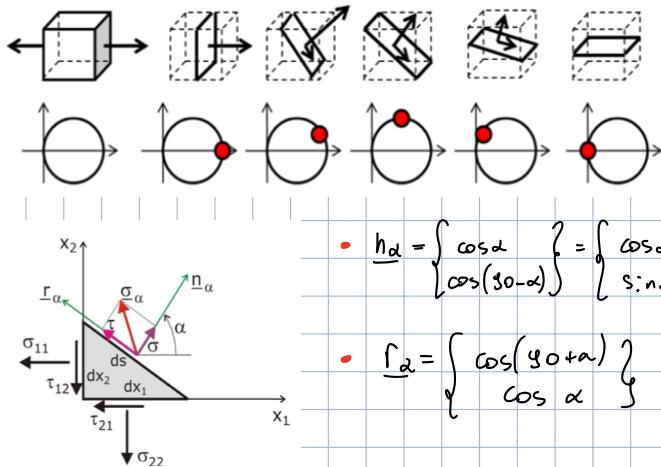


• $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

- $\begin{cases} \sigma_{xx} = \underline{n}^T \underline{\sigma} \underline{n} = \sigma_{11} \cos^2\alpha + \sigma_{22} \sin^2\alpha + 2\tau_{12} \sin\alpha \cos\alpha \\ \sigma_{yy} = \underline{n}^T \underline{\sigma} \underline{n} = \sigma_{11} \sin^2\alpha + \sigma_{22} \cos^2\alpha - 2\tau_{12} \sin\alpha \cos\alpha \\ \tau_{xy} = \underline{n}^T \underline{\sigma} \underline{n} = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin\alpha \cos\alpha + \tau_{12} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{cases}$

CERCHIO DI MOHR

- Il cerchio di Mohr fornisce le componenti normali e tangenziali corrispondenti ad uno stato di sforzo piano in un dato punto su una qualsiasi giacitura.



• Vediamo come ricavarlo

$$\underline{h}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos(30 - \alpha) \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\underline{l}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos(30 + \alpha) \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

- Ottengo la componente di $\underline{\sigma}_\alpha$ parallela ad \underline{n}_α

$$-\sigma = \underline{h}_\alpha^T \underline{\sigma} \underline{n}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\times \sigma = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

- Ottengo la componente di $\underline{\sigma}_\alpha$ ortogonale ad \underline{n}_α

$$-\gamma = \underline{n}_\alpha^T \underline{\sigma} \underline{n}_\alpha = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad * \text{ Cauchy: } \underline{\sigma}_\alpha = \underline{\sigma} \underline{h}_\alpha$$

$$\times \gamma = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

- Ricordo alcune identità trigonometriche

$$-\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \quad -\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \quad -\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

- Sostituisco

$$-\begin{cases} \sigma = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \gamma = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

$$-\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha + \tau_{12} \sin 2\alpha \\ \gamma = -\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\alpha + \tau_{12} \cos 2\alpha \end{cases}$$

- Per rimuovere la dipendenza da α , elevo al quadrato e sommo

$$-\left[\sigma - \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right]^2 + \gamma^2 = \left[\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right]^2 + \tau_{12}^2$$

$$\times \text{Definisco } C = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$R = \left[\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right]^2 + \tau_{12}^2$$

- Ho ottenuto l'equazione del cerchio: $(\sigma - c)^2 + \tau^2 = R^2$

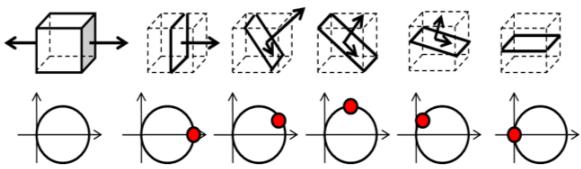
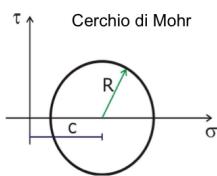
$$- C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}$$

$$- R = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2}{4} + \tau_{xz}^2}$$

- Equazione di una circonferenza nel piano $\sigma - \tau$, con centro nel punto $(\sigma = c, \tau = 0)$ e raggio R

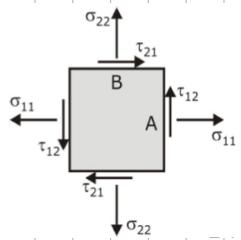
$$(\sigma - c)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$c = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \quad R = \sqrt{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2}{4} + \tau_{xz}^2}$$



\hookrightarrow Stati tensionali possibili su diverse giaciture in uno stesso punto soggetto a tensione uniaxiale

ISTRUZIONI OPERATIVE:

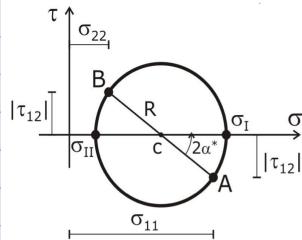


- A ($\sigma = \sigma_{xx}, \tau = -\tau_{xz}$)
- B ($\sigma = \sigma_{zz}, \tau = \tau_{xz}$)

- τ positiva se oraria
- σ positiva se d: Giroire

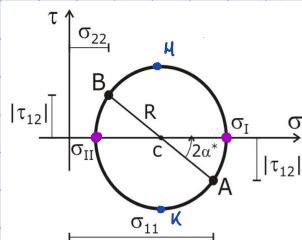
- Esistono due giaciture ortogonali su cui la tensione tangenziale τ è nulla, tali giaciture definiscono le direzioni principali:

- Su queste giaciture agiscono gli sforzi principali: σ_I e σ_{II}



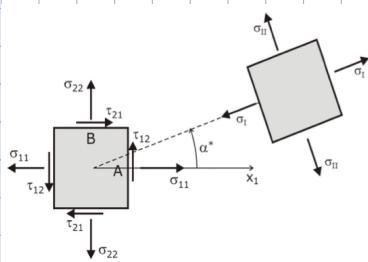
$$\bullet \sigma_I, \sigma_{II} = c \pm R$$

$$- t_{\text{tan}}(2\alpha^*) = \frac{|\tau_{xz}|}{\frac{1}{2} |\sigma_{xx} - \sigma_{zz}|}$$



- Le tensioni tangenziali massime si trovano su giaciture ruotate di 45° rispetto alle giaciture principali:

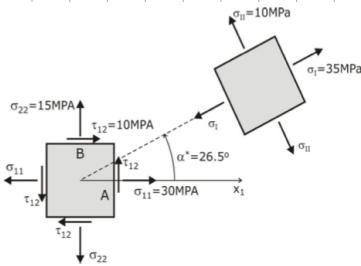
$$- \tau_{\text{max}} = \frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}|$$



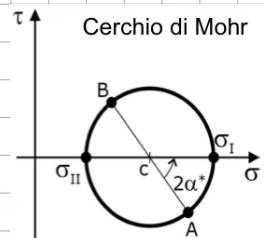
- Gli sforzi principali σ_I e σ_{II} sono il massimo e il minimo fra gli sforzi normali ai variabili delle giaciture in un punto

ESEMPIO

Determinare gli sforzi principali e le direzioni principali del seguente stato di sforzo



- $A = (\sigma = 30 \text{ MPa}, \tau = -10 \text{ MPa})$
- $B = (\sigma = 15 \text{ MPa}, \tau = 10 \text{ MPa})$
- $\begin{cases} C = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{22}}{2} = 22.5 \\ R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \tau_{12}^2} = 12.5 \end{cases}$



- Sforzi principali:

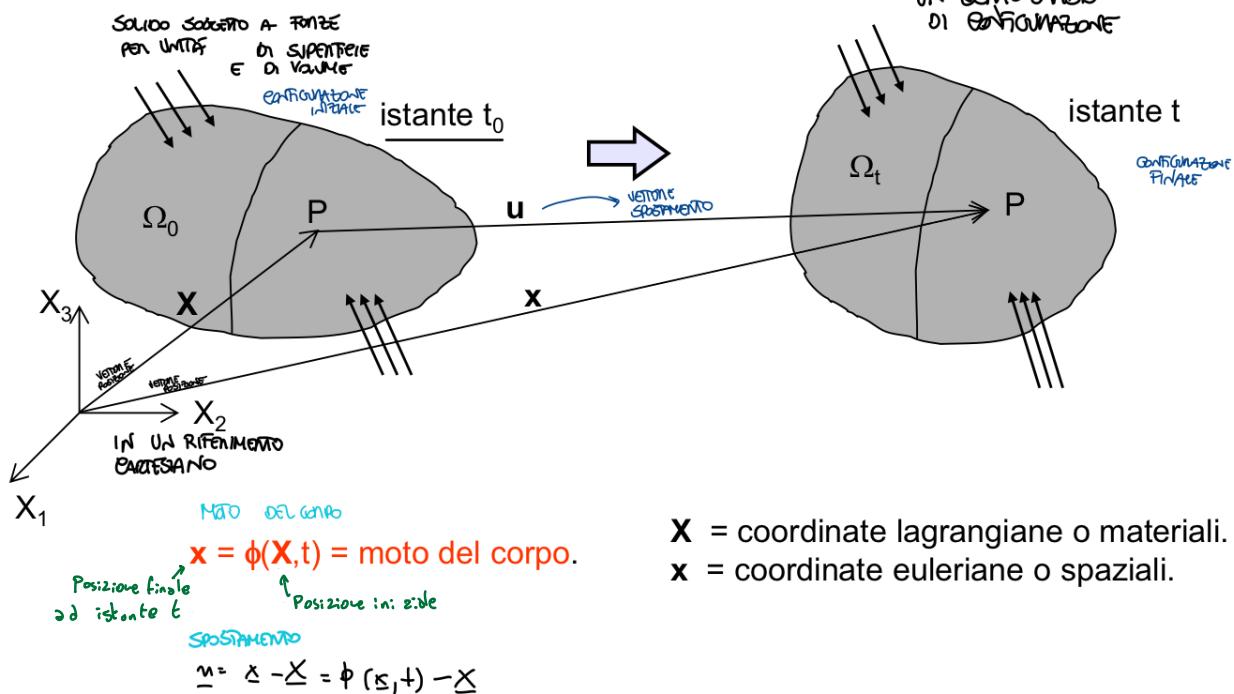
$$- S_I = C + R = 35 \text{ MPa}$$

$$- S_{II} = C - R = 10 \text{ MPa}$$

- Direzioni principali:

$$- \alpha^* = \frac{1}{2} \arctan \frac{|\tau_{12}|}{\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_{II}|} \approx 0.46 \text{ rad} \approx 26.5^\circ$$

CINEMATICA DEI MEZZI Continui



\underline{x} = coordinate lagrangiane o materiali.
 x = coordinate euleriane o spaziali.

→ Due approcci possono essere utilizzati per descrivere lo stato deformativo di un corpo continuo

① DESCRIZIONE LAGRANGIANA: le coordinate indipendenti sono quelle lagrangiane e il tempo t

- Utilizzato principalmente in meccanica dei solidi;

② DESCRIZIONE EUCLIANA: le coordinate indipendenti sono quelle euleriane e il tempo t

- Utilizzato principalmente in meccanica dei fluidi;

→ Assumendo la descrizione lagrangiana si ha che:

$$\begin{aligned} \underline{s}(\underline{X}, t) &= \underline{x} - \underline{X} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X} \\ \underline{\sigma}(\underline{X}, t) &= \frac{\partial \underline{s}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \underline{s}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \dot{\underline{s}} \\ \underline{\alpha}(\underline{X}, t) &= \frac{\partial \underline{\sigma}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{s}(\underline{X}, t)}{\partial t^2} = \ddot{\underline{s}} = \ddot{\underline{s}} \end{aligned} \quad \left. \right\} \text{Material time derivative}$$

→ Un cambiamento di configurazione si dice CONGRUENTE se:

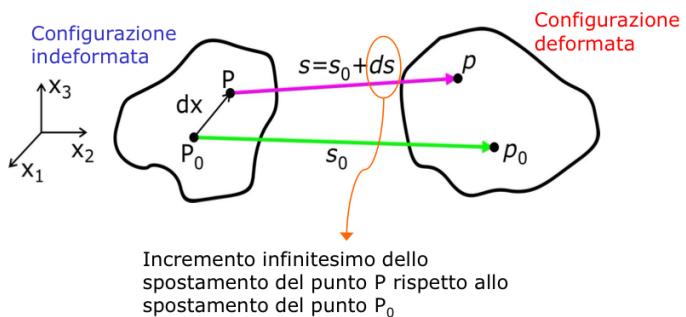
- $\underline{\sigma}(\underline{X}, t)$ è continuo \rightarrow No laciazioni;
- $\underline{\sigma}(\underline{X}, t)$ è a un sol valore di \underline{X} \rightarrow No penetrazione;
- $\underline{\sigma}(\underline{X}, t)$ è rispettosa delle condizioni al contorno (vincoli imposti al problema)

$$\begin{cases} S_1 = \bar{S}_1 \\ S_2 = \bar{S}_2 \\ S_3 = \bar{S}_3 \end{cases} \quad \text{su } S_u$$

→ Introduciamo l'IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI

- Spostamenti e deformazioni sono così piccoli da non influenzare il modo con cui l'equilibrio si instaura nella struttura
- Cio' consente di imporre le equazioni di equilibrio nella configurazione iniziale (t_0)
 - \times Essenzialmente posso impostare l'equilibrio nella condizione iniziale senza causare errori gravi, ma solo errori trascurabili;
- $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_3} + F = 0$ in J_{t_0}
- Permette di confondere lo traiettoria con lo spostamento
- Assimilo la cinematica finita a quella di un salto di moto a partire dalla configurazione iniziale

→ Voglio introdurre una MISURA DELLA DEFORMAZIONE LOCALE



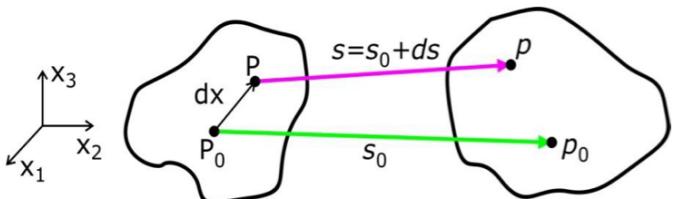
- Per le ipotesi di congruenza punti vicini restano vicini

$$\begin{aligned} \bullet \quad d\underline{\varepsilon} &= \left\{ \begin{array}{l} ds_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_1}{\partial x_3} dx_3 \\ ds_2 = \frac{\partial s_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_3} dx_3 \\ ds_3 = \frac{\partial s_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} dx_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$- \underline{\varepsilon} = \underline{\Psi} \underline{dX}$$

$\times \underline{\Psi} = \underline{\text{gradiente di spostamento}}$

→ Possiamo introdurre il TENSORE DELLE PICCOLE DEFORMAZIONI



$$\bullet \quad \text{Scrivo } \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\theta}}$$

$$- \text{ Inoltre pongo } \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = S_{i,j}$$

PARTE SIMMETRICA

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^T)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{1,1} + S_{1,1} & S_{1,2} + S_{2,1} & S_{1,3} + S_{3,1} \\ S_{2,1} + S_{1,2} & S_{2,2} + S_{2,2} & S_{2,3} + S_{3,2} \\ S_{3,1} + S_{1,3} & S_{3,2} + S_{2,3} & S_{3,3} + S_{3,3} \end{bmatrix}$$

Tensore di deformazione → doppio simmetrico

PARTE ASIMMETRICA

$$\underline{\underline{\theta}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^T)$$

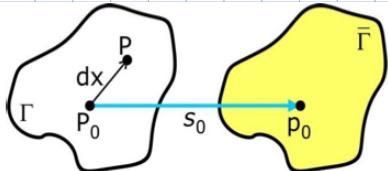
$$\underline{\underline{\theta}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S_{1,2} - S_{2,1} & S_{1,3} - S_{3,1} \\ S_{2,1} - S_{1,2} & 0 & S_{2,3} - S_{3,2} \\ S_{3,1} - S_{1,3} & S_{3,2} - S_{2,3} & 0 \end{bmatrix}$$

- Ricordando $\underline{s} = \underline{s}_0 + \underline{\epsilon} d\underline{x} = \underline{s}_0 + d\underline{s}$

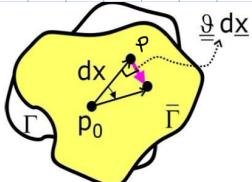
- $d\underline{s} = \underline{\epsilon} d\underline{x} + \underline{\theta} d\underline{x}$

- Otengo lo spostamento del punto P nell'intorno di P_0

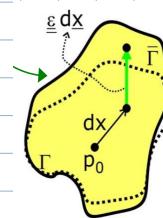
- $\underline{s} = \underline{s}_0 + \underline{\theta} d\underline{x} + \underline{\epsilon} d\underline{x}$



\underline{s}_0 è relativo a una
TRANSIZIONE RIGIDA



$\underline{\theta} d\underline{x}$ è relativo a una
ROTAZIONE RIGIDA



$\underline{\epsilon} d\underline{x}$ è relativo a una
DEFORMAZIONE PURA

→ Spostamenti e deformazioni sono così piccoli da poter assimilare la cinematica finita a quella di un atto di moto a partire dalla configurazione iniziale (t_0)

- Lo spostamento di un punto P distante $d\underline{x}$ da P_0 , il cui spostamento sia \underline{s}_0 , vale:

- $\underline{s} = \underline{s}_0 + \frac{d\underline{s}_0}{d\underline{x}} d\underline{x}$

- $\underline{s}_0 = \underline{s}_{0i} + \frac{\partial \underline{s}_0}{\partial x_i} d\underline{x}_i = \underline{s}_{0i} + \underline{\theta}_{ij} d\underline{x}_j + \underline{\epsilon}_{ij} d\underline{x}_j$

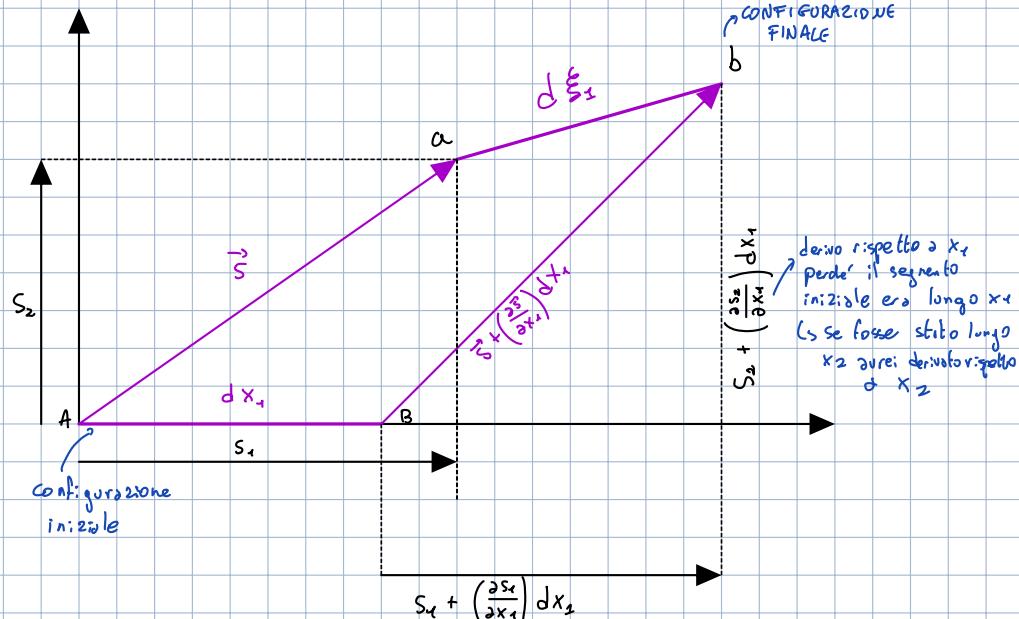
① TRASLAZIONE RIGIDA

② ROTAZIONE RIGIDA: $\underline{\theta}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{s}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \underline{s}_j}{\partial x_i} \right)$

③ DEFORMAZIONE PURA: $\underline{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \underline{s}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \underline{s}_j}{\partial x_i} \right)$

→ Indaghiamo il significato fisico delle componenti del tensore $\underline{\epsilon}$

- Poniamoci nel piano $X_1 - X_2$ con s_0 non nullo



- s_1 è lo spostamento orizzontale del punto A

- Lo spostamento del punto B è dato da $s_2 + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} d x_2$

- s_2 è lo spostamento verticale del punto A

- Lo spostamento del punto B è dato da $s_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} d x_1$

Lo spostamento totale è legato alla natura tensoriale doppia

• Vogliamo calcolare la lunghezza finale della fibra (inizialmente dx_1)

$$\begin{aligned} - d\tilde{s}_1 &= \sqrt{\left(dx_1 + s_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx_1 - s_1\right)^2 + \left(s_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} dx_1 - s_2\right)^2} = dx_1 \sqrt{\left(1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)^2} = \\ &= dx_1 \sqrt{1 + 2 \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)^2} \approx dx_1 \left(1 + 2 \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right)^{1/2} \approx dx_1 \left(1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right) \end{aligned}$$

(per derivata molto piccola prossima a zero)

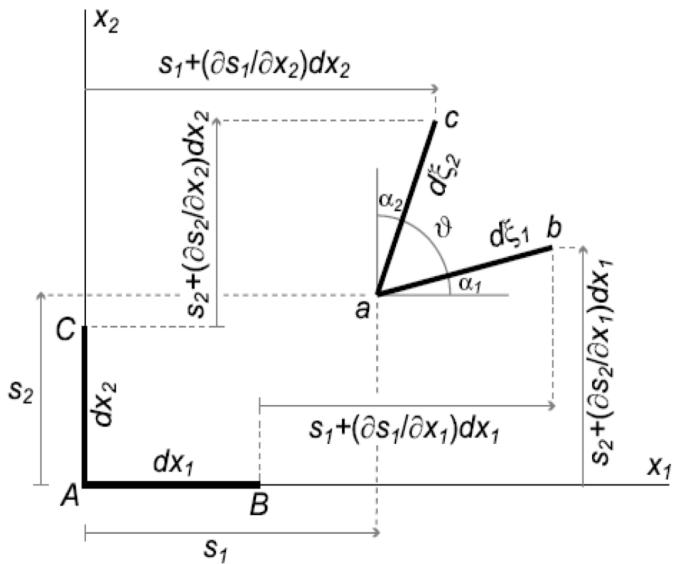
$|1+2y| \approx 1+y$

Eras corribili: nell'ipotesi
di piccoli spostamenti

$$-\frac{d\tilde{s}_1 - dx_1}{dx_1} = S_{1,1} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}$$

• Dunque tale tensore misura la variazione di lunghezza di una fibra unitaria originariamente disposta con X_1

- Analoghe considerazioni valgono per le fibre dirette con gli assi X_2 e X_3



angolo piccolo
per piccoli spostamenti:

- $\alpha_1 \approx \tan(\alpha_1) = \frac{s_2 + (\frac{\partial s_2}{\partial x_1}) dx_1 - s_2}{dx_1 + s_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx_1 - s_1} = \frac{(\frac{\partial s_2}{\partial x_1}) dx_1}{dx_1 (1 + \varepsilon_{11})} = \frac{\frac{\partial s_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial s_2}{\partial x_1}$
- $\alpha_2 \approx \tan(\alpha_2) = \frac{s_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx_2 - s_1}{dx_2 + s_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} dx_2 - s_2} = \frac{\frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2 (1 + \varepsilon_{22})} \approx \frac{\frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} = \frac{\partial s_1}{\partial x_2}$

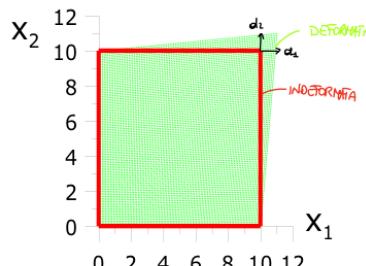
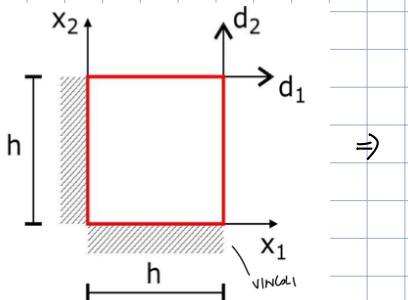
$$\bullet \gamma_{12} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}$$

$$- \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12}$$

- Metà della variazione di angolo fra fibre originariamente ortogonalì e disposte secondo gli assi delle coordinate

- Non necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2$ ma nel tensore $\underline{\varepsilon}$ si riporta in ε_{12} e ε_{21} la semisomma dei due angoli: al fine di simmetria

ESEMPIO



• Il campo di spostamenti è convergente

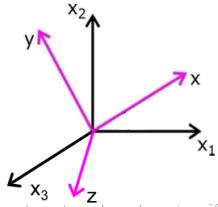
$$\bullet \underline{S}(x) = \begin{bmatrix} S_1(x_1, x_2, x_3) \\ S_2(x_1, x_2, x_3) \\ S_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (S_{i,j} + S_{j,i})$$

(le deformazioni sono grandezze direzionali)

$$\bullet \begin{cases} S_1(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{h^2} d_1 \\ S_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{h^2} d_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{h^2} d_1 \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{h^2} d_2 \\ \gamma_{12}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{h^2} d_1 + \frac{x_2}{h^2} d_2 \end{cases}$$

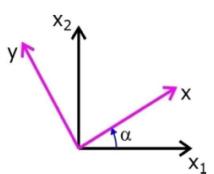
→ Vediamo ora come funziona la rotazione del tensore di deformazione col sistema di riferimento (stessa regola vista per il tensore di sforzo, in quanto entro i tensori sono doppi simmetrici)



$$\bullet \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{x1} & h_{x2} & h_{x3} \\ h_{y1} & h_{y2} & h_{y3} \\ h_{z1} & h_{z2} & h_{z3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{x1} & \varepsilon_{z1} \\ \varepsilon_{x1} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{z2} \\ \varepsilon_{z1} & \varepsilon_{z2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{x1} & h_{y1} & h_{z1} \\ h_{x2} & h_{y2} & h_{z2} \\ h_{x3} & h_{y3} & h_{z3} \end{bmatrix}$$

$$- \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,y,z)} = \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,y,z)} \underline{\underline{N}}$$

- Poneندoci nel piano, in 2 dimensioni:



$$- \quad \underline{h} = \begin{cases} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{cases} = \begin{cases} \cos \alpha \\ \cos(90 - \alpha) \end{cases}$$

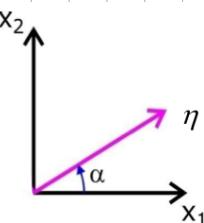
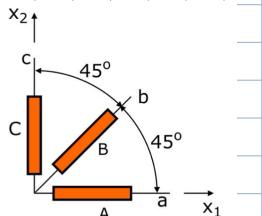
$$- \quad \underline{h} = \begin{cases} -\cos(90 - \alpha) \\ \sin \alpha \end{cases} = \begin{cases} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{cases}$$

$$- \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{x1} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,y)} = \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,z)} \underline{\underline{N}}$$

- Svolgendo: calcolando le componenti del tensore nel piano ruotato

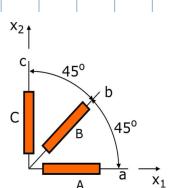
$$- \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \underline{h}_x^T \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{h}_x = \varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy} \sin^2 \alpha + 2\varepsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \varepsilon_{yy} = \underline{h}_y^T \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{h}_y = \varepsilon_{xx} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{yy} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \varepsilon_{xy} = \underline{h}_y^T \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{h}_x = -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

→ Introduciamo la ROSETTA ESTENSIMETRICA



$$\bullet \quad \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{yy} \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

ESEMPIO



$$\bullet \quad \eta = \alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{xx} \cos^2(0^\circ) + \varepsilon_{yy} \sin^2(0^\circ) + \gamma_{xy} \sin(0^\circ) \cos(0^\circ) = \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{xx} \cos^2(90^\circ) + \varepsilon_{yy} \sin^2(90^\circ) + \gamma_{xy} \sin(90^\circ) \cos(90^\circ) = \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_b = \varepsilon_{xx} \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_{yy} \sin^2(45^\circ) + \gamma_{xy} \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{array} \right.$$

$$\bullet \quad \eta = C \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_c = \varepsilon_{xx} \cos^2(90^\circ) + \varepsilon_{yy} \sin^2(90^\circ) + \gamma_{xy} \sin(90^\circ) \cos(90^\circ) = \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_b = \varepsilon_{xx} \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_{yy} \sin^2(45^\circ) + \gamma_{xy} \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{array} \right.$$

$$\bullet \quad \eta = b \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_b = \varepsilon_{xx} \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_{yy} \sin^2(45^\circ) + \gamma_{xy} \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{array} \right.$$

- Possiamo ricavare i tensori di deformazione

$$- \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\eta\eta}$$

$$- \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_c$$

$$- \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_{\eta\eta} - \varepsilon_c$$

- Esiste un riferimento xyz tale che il nuovo tensore di deformazione sia diagonale, così come avevamo fatto per le direzioni e gli sforzi principali

→ Introduciamo le DEFORMAZIONI PRINCIPALI

- \exists un sistema di riferimento (x, y, z) detto PRINCIPALE in cui ε è diagonale (come per gli sforzi)

- Con le deformazioni cambia la lunghezza delle fibre ma non gli angoli → problemi agli autovalori

$$\bullet (\underline{\varepsilon} - e \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n}_x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - e & \frac{1}{2}\gamma_{21} & \frac{1}{2}\gamma_{31} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} - e & \frac{1}{2}\gamma_{32} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} - e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{x2} \\ n_{x3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

- $I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{31}$

- $I_3 = \det(\underline{\varepsilon})$

- $\det(\underline{\varepsilon} - e \underline{\underline{I}}) = 0 \rightarrow$ poiché $\underline{\varepsilon}$ è simmetrica, il teorema dell'algebra lineare assicura l'esistenza di tre soluzioni

- $e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$

$$\begin{cases} e_I, n_I \\ e_{II}, n_{II} \\ e_{III}, n_{III} \end{cases}$$

autovalori ↑ autovettori

- Deformazioni e direzioni principali: non dipendono dal sistema di riferimento assunto

- Ne consegue che i coefficienti nellequazioni devono essere indipendenti dal sistema di riferimento assunto

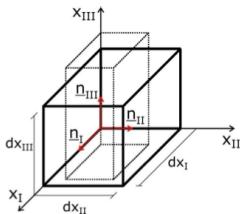
- Dato $e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$

- $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

- $I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \frac{1}{4}(\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{23}\gamma_{32} + \gamma_{13}\gamma_{31})$

- $I_3 = \det(\underline{\varepsilon})$

→ Calcoliamo la VARIAZIONE DI VOLUME nel caso di una deformazione



- $dV_i = dX_I dX_{II} dX_{III}$

- $dV_d = \{dX_I(1+e_I)\} \{dX_{II}(1+e_{II})\} \{dX_{III}(1+e_{III})\}$

- $\frac{dV_d}{dV_i} = (1+e_I)(1+e_{II})(1+e_{III}) = 1 + I_1 + I_2 + I_3$

- Dunque la variazione di volume è indipendente dal sistema di riferimento

- Per piccole deformazioni: $I_1 \gg I_2 \gg I_3$

- $\frac{dV_d - dV_i}{dV_i} = I_1 = e_I + e_{II} + e_{III}$

- Quindi l'invariante lineare I_1 rappresenta la variazione di volume nell'intorno del punto

→ Immaginiamo il caso di una deformazione a volume nullo: dobbiamo introdurre un deviatore di deformazione

- $\underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{I}}$

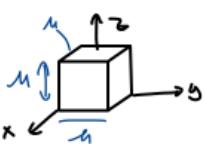
- $\underline{\underline{\eta}}$ = componente deviatorica

- $\Theta = \frac{1}{3} I_1$ e' INVARIANTE PRIMO $= \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$

- $\underline{\underline{\eta}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{21} & \frac{1}{2} \gamma_{31} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} & \varepsilon_{22} - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{32} \\ \frac{1}{2} \gamma_{13} & \frac{1}{2} \gamma_{23} & \varepsilon_{33} - \Theta \end{bmatrix}$

- Tale matrice ha invarianti lineari nulli: $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\Theta = 0$

ESERCIZIO



$$\left\{ \begin{array}{l} S_{xx}(x, y, z) = \frac{M}{h^2} x^2 z \\ S_{yy}(x, y, z) = \frac{M}{h^2} y^2 z \\ S_{zz}(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \text{ MCA}$$

(ROTASI DI
PICCOLI
SPOSTAMENTI)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = 2 \frac{M}{h^2} x z \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = 2 \frac{M}{h^2} y z \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \xi_x}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial x} = \frac{M}{h^2} x^2 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial y} = \frac{M}{h^2} y^2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{2M}{h^2} z (x+y)$$

$$dV_{\text{fin}} = dx dy dz$$

$$\Rightarrow dV_{\text{fin}} = \left[1 + \frac{2M}{h^2} z (x+y) \right] dx dy dz$$

$$\Rightarrow V_{\text{fin}} = \int_0^h \int_0^1 \int_0^1 dV_{\text{fin}} = \int_0^h \int_0^1 \int_0^1 \left[1 + \frac{2M}{h^2} z (x+y) \right] dx dy dz =$$

$$= h^3 + \int_0^h \int_0^1 \int_0^1 \frac{2M}{h^2} z (x+y) dz dy dx = h^3 + \frac{2M}{h^2} \frac{h^2}{2} \int_0^h \int_0^1 (x+y) dy dx = h^3 + M \int_0^h \left(\frac{h^2}{2} + yh \right) dy =$$

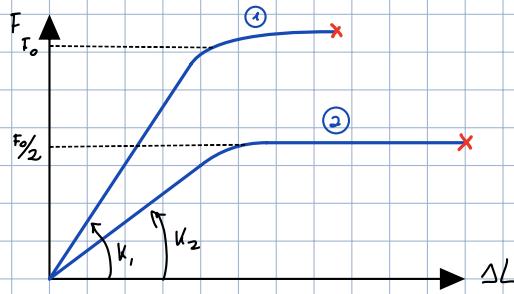
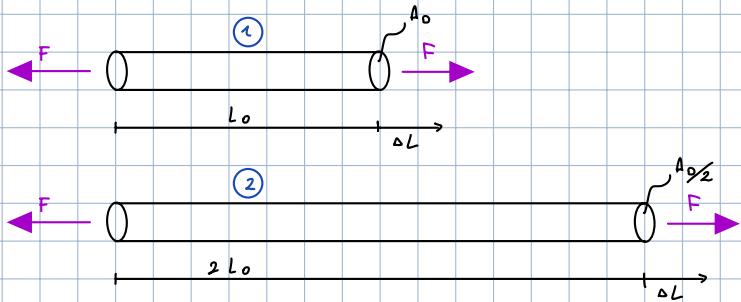
$$= h^3 + M \left(\frac{h^3}{2} + M \frac{h^2}{2} \right)$$

LEGAME COSTITUTIVO

→ Il legame costitutivo crea un legame matematico tra mondo statico (sforzi: σ_{ij}) e mondo cinematico (deformazioni: ε_{ij})

- Si tratta di un modello fenomenologico, che coglie il comportamento del materiale alla macroscala

- Non si tratta di una semplice interpolazione di dati sperimentali, ma del loro inserimento in un modello basato su certi postulati fisico/meccanici (teoria assiomatica) e dipendenti da un certo numero di parametri, il cui valore è desunto da opportune prove sperimentali



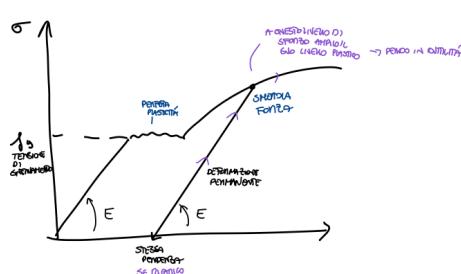
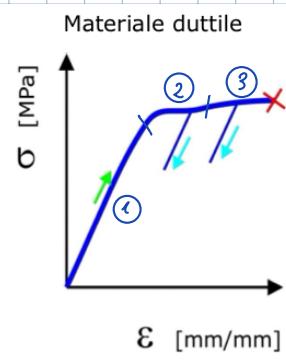
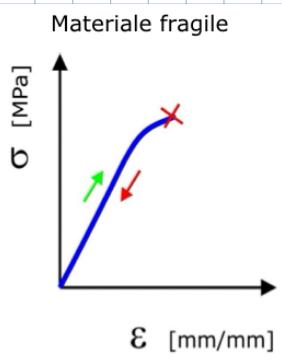
→ Discutiamo ora il **COMPORTAMENTO DEL MATERIALE**, e in particolare la relazione tra **sforzo** e **deformazione**

$$\bullet \theta = \frac{F}{A}$$

$$\bullet E = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\bullet \sigma = E \varepsilon \quad \begin{matrix} \text{sforzo} \\ \uparrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{deformazione} \\ \downarrow \end{matrix}$$

- Ad esempio, differenziamo il comportamento fragile da quello duttile



(1) **FASE ELASTICA**: legge lineare e trasformazione reversibile

- Sforzo d: snervamento → tensione d: snervamento

(2) **FASE PLASTICA PERFETTA**:

- Porta allo sviluppo di deformazione permanente

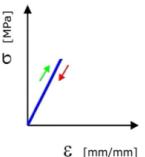
- Il corpo continua a deformati a sforzo costante

(3) **FASE DI INCLUDIMENTO**:

- Aumenta la resistenza del corpo

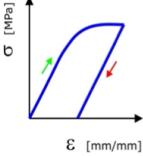
→ Quando sotto posto a sforzo, il corpo può esibire tre tipi di comportamento

① ELASTICO: Il legame $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij})$ è reversibile



- Lo sforzo dipende solo dal valore corrente della deformazione
- La maggior parte dei materiali presenta inizialmente un comportamento di questo tipo

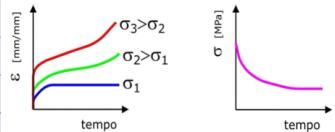
(2) PLASTICO: La deformazione non è più totalmente reversibile, ma una parte di essa è irreversibile per effetto di una duratura modifica della microstruttura



- **ESEMPIO:** Movimenti delle dislocazioni nel reticolo cristallino dei metalli

- Lo sforzo dipende dal valore corrente della deformazione e dalla "storia" seguita per raggiungerla

(3) VISCOSO: Sforzi e deformazioni variano nel tempo a condizioni esterne immutate



- Nei primi due comportamenti la deformazione conseguente istantaneamente dall'applicazione del carico
- Il **CREEP** è l'aumento della deformazione a sforzo costante
- Il **RILASSAMENTO** è la diminuzione di sforzo a deformazione costante

→ Per effettuare le **PROVE MECCANICHE** si usano macchinari specifici con valori nominali normalmente simili a

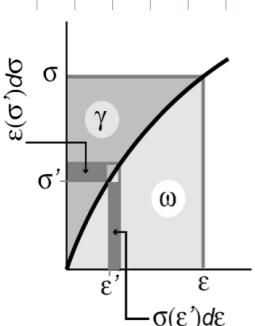
- **CARICO MASSIMO:** Compressione: 5000 kN
Trazione: 3000 kN

- **CARICO MINIMO:** 0.01 N

→ Discutiamo ora le proprietà e caratteristiche del **LEGAME ELASTICO LINEARE**

- Si tratta della prima fase del legame costitutivo e del range entro il quale vogliamo che lavori il materiale
 - Difatti in questa fase il legame $\sigma - \epsilon$ è lineare e la trasformazione reversibile
- Vogliamo ricavare un modello che rappresenti tale legame e sia applicabile a qualunque materiale
- Per quanto riguarda gli **ASPECTI ENERGETICI**
 - Ipolizziamo l'esistenza di un **POTENZIALE DI DEFORMAZIONE** (energia d: deformazione w)
 - Il lavoro compiuto per deformare un solido è immagazzinato sotto forma di energia per unità di volume
 - Quando la causa è rimossa le deformazioni vengono recuperate e l'energia di deformazione viene rilasciata.

• Formuliamo una **TEORIA FG NOHENGLOGICA**



- $w(E) = \int_0^{E_{ij}} \sigma_{ij} (\epsilon'_{ij}) d\epsilon_{ij}$
funzione di: ε
- **w(E) = POTENZIALE DI DEFORMAZIONE**

X Energia immagazzinata dal corpo per unità di volume

- Gli indici soffrono intendono una sommatoria: $\sum_i \sum_j \int_0^{E_{ij}} \sigma_{ij} (\epsilon'_{ij}) d\epsilon_{ij}$

$$-\text{Offen} \circ : \quad \sigma_{i,j} \, d\varepsilon_{i,j} = dw = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{i,j}} \, d\varepsilon_{i,j} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i,j} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{i,j}}$$

- Ipotizzo un legame lineare fra sforzo e deformazione (8e costanti Diogene)

$$-\sigma = E \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

* Ogni componente del tensore d' stress e' combinazione lineare di tutte le componenti del tensore deformazione

- Nonostante la simmetria dei tensori di sforzo si trova comunque di 36 costanti:

$$-\bar{D}_g: x_0 = D_{i\delta n e}$$

⇒

$$-\bar{D}_{ijkl} = D_{ijkl}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{array} \right\}$$

- Infatti essendo $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x_{ij}} \\ D_{ijkl} E_{kl} \end{array} \right.$

$$-\omega(\varepsilon; \delta) = \frac{1}{2} D_{;\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta}$$

- In forma mobilicide : 4

12

γ_{23}

83

$$\begin{matrix} E_{21} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{matrix}$$

FORMA QUADRATICA

- Dovrebbe dipendere da 36 costanti. Vogliamo ridurre questo numero

- Imponiamo che w sia un differenziabile esatto per il teorema di Schwartz

- In quanto ω dipende solo dal valore finale di deformazione e non dalla "storia" di carico

- Quindi σ_{ij} de'j e' un differenziale esatto \rightarrow 21 costanti

$$-\sigma = \underline{D}\underline{\varepsilon}$$

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\Rightarrow D_{\text{igne}} = D_{\text{keis}}$$

- In forms middle: $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T$

- Non siamo però tenendo conto del fatto che i motori si possono avere piani di simmetria c/o comportamento uguale in tutte le direzioni che ridurrebbe ulteriormente il numero delle costanti;

• E' il caso di: un materiale LINEARE-ELASTICO-ISOTROPO

Ricordiamo che si dice invariante una grandezza che esprime l'indipendenza del sistema di riferimento

→ A tal proposito, introduciamo i concetti di: **ISOTROPIA** e **ANISOTROPIA**

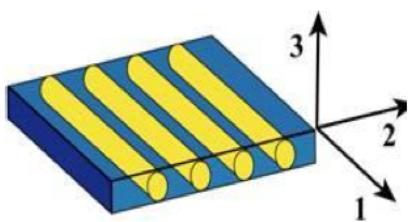
- Le proprietà del materiale sono associate ad una direzione o asse

- ESEMPI: Durezza, resistenza, coefficiente di espansione termica

- Un materiale è **ISOTROPO** se le proprietà si mantengono costanti lungo tutte le direzioni:

- Ha infiniti piani di simmetria

- Un materiale è **ANISOTROPO** se le proprietà intensive variano al variare della direzione o dell'orientamento degli assi:



- Ad esempio i materiali composti (**fibro rinforzati**) sono anisotropi, generalmente **ORTOTROPICI**, con tre piani mutuamente perpendicolari di simmetria delle proprietà del materiale
 - L'intersezione fra questi piani definisce tre assi mutualmente ortogonali: detti assi principali del materiale

→ Quindi discutiamo il **LEGAME ELASTICO LINEARE ISOTROPO**

- Un materiale isotropo non presenta direzioni preferenziali di compiimento e il suo legame costitutivo dovrà risultare indipendente dal sistema di riferimento in cui le componenti di sforzo e deformazione sono rappresentate

- Nel caso elastico, ciò implica che l'energia di deformazione dipenda dalla deformazione stessa solo attraverso i suoi invarianti

x Nell'ipotesi d'isotropia: $w(\varepsilon_{ij}) = w(I_1, I_2, I_3)$
(invarianti di deformazione)

x Dunque w deve essere indipendente dal sistema di riferimento

- Gli invarianti I_1, I_2, I_3 sono funzioni rispettivamente lineare, quadratica e cubica delle componenti di deformazione

- Nel caso lineare, w è una forma quadratica e l'invariante cubico non può comparire

- L'unica possibile espressione è: $w = aI_1^2 + bI_2$

x Inserire I_3 mi darebbe una dipendenza cubica che derivando w mi darebbe più un andamento lineare

- Le costanti a e b rappresentano i **PARAMETRI COSTITUTIVI**

x Il legame elastico-lineare e isotropo è quindi governato da due sole costanti indipendenti

x Tali costanti sono determinate e diverse per ogni materiale nonostante abbiano tutta la stessa forma analitica

- Con un cambio di parametri: $w = \frac{1}{2}(\lambda + 2G)I_1^2 - 2GI_2$

- Abbiamo introdotto le **COSTANTI DI LAMÉ**: λ e G

x $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(\lambda + 2G) \\ b = -2G \end{cases}$

- Essendo $\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$ il legame diventa

$$-\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \omega}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = (\lambda + 2G) I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

\times Ricordando che I_1 e' la traccia del tensore deformazione: $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

$$\times I_2 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{31} - \varepsilon_{31} \varepsilon_{12}$$

- Ad esempio

$$\times \sigma_{11} = (\lambda + 2G) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{11}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{11}} = (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - 2G(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \\ = (\lambda + 2G)\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22} + 2\varepsilon_{33}$$

• In forma matriciale

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} - \sigma_{12} = \tau_{12} - (\lambda + 2G) I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{12}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{12}} = \\ = (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - 2G(-\varepsilon_{12}) = \\ = 2G \varepsilon_{12} = G \gamma_{12}$$

• Introduciamo le COSTANTI INGEGNERISTICHE

$$- E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} \quad - \nu = \frac{1}{2(\lambda + G)}$$

• Il legame diventa

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} - D = \text{MATRICE DI RIGIDITÀ}$$

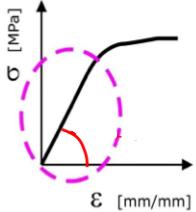
• In forma inversa il legame diventa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow C = D^{-1}$$

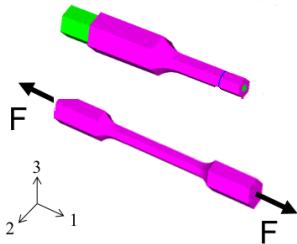
$$- C = \text{MATRICE DI CEDIMENTO}$$

$$C = D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix}$$

→ Approfondiamo il significato delle **COSTANTI INGEGNERISTICHE**



- Nel legare elastico lineare isotropo
 - E = modulo elastico (di Young)
 - γ = coefficiente di contrazione trasversale (di Poisson)



- In formule

$$- E = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}$$

$$- \gamma = - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = - \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}$$

- $\sigma_{xx} = \frac{F}{A}$ e $\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L_0}$ e $\epsilon_{x2} = \frac{\sigma_{x2}}{E}$

- $\sigma_{22} = \gamma_{23} - \gamma_{12} - \gamma_{12} - \gamma_{23} = 0$

- $\epsilon_{22} = - \frac{\gamma}{E} \sigma_{xx} = - V \epsilon_{xx}$
- $\epsilon_{33} = - \frac{\gamma}{E} \sigma_{xx} = - V \epsilon_{xx}$

- Da considerazioni precedenti:

- $- E > 0$
- $- \frac{1}{3} E < G \leq \frac{1}{2} E$
- $- 0 \leq \gamma < 0.5$

RIASSUMENDO

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

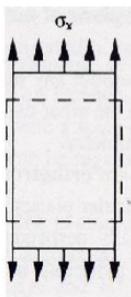


$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = D_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix}$$

- D è una matrice 6×6 simmetrica
 - Nel caso di materiale completamente anisotropo ho 21 costanti indipendenti
- Se il comportamento del materiale è simmetrico rispetto a tre assi mutuamente ortogonali: si parla di **ORTOTROPIA**
 - Ho 9 costanti;
- Se il materiale presenta simmetria di rotazione attorno ad uno di questi assi, si dice **TRASVERSAMENTE ISOTROPICO**
 - Ho 5 costanti;
- Se il comportamento del materiale è simmetrico rispetto a qualunque asse, si parla allora di **ISOTROPIA**
 - Ho 2 costanti (a, b oppure λ, G)

→ Consideriamo un MATERIALE ISOTROPO

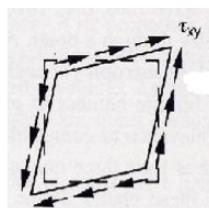
Sforzo normale



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Sforzo di taglio



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2\tau_{xy}(1+\nu)}{E}$$

- Nel caso di sforzi di puro taglio si generano deformazioni puramente angolari

- Un elemento cubico si trasforma in un rombo a lati uguali.

- Lo sforzo normale non genera deformazioni taglienti e viceversa

ESEMPIO di alcuni valori

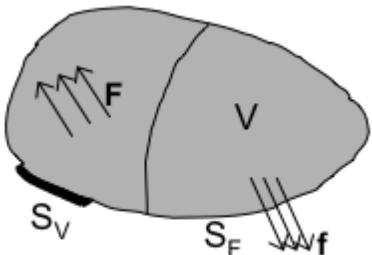
	E (GPa)	ν	G (GPa)
Acciaio ordinario	200-210	0.30	80
Leghe di alluminio	70-75	0.36	27
Rame	120	0.35	44
Calcestruzzo	20-30	0.12-0.14	9-13
Vetro	70	0.10	32
Gomma	0.009-0.1	≈ 0.5	0.003-0.03

Tabella 3.1: Valori indicativi delle costanti elastiche per alcuni materiali

→ Un particolare tipo di deformazioni sono le **DEFORMAZIONI TERMICHE**

- Di particolare interesse è il caso di deformazioni termiche, prodotte da una variazione di temperatura $\Delta T(x)$ nel corpo
- In un materiale isotropo, tale variazione non produce scorrimenti angolari
- Le deformazioni termiche presentano solo componenti dirette, uguali in ogni direzione e legate a ΔT attraverso il coefficiente di dilatazione termica α del materiale
 - Tale quantità definisce la deformazione conseguente a una variazione di temperatura unitaria
 - Dimensionalmente, α è un numero per grado centigrado
- Le deformazioni termiche si scrivono quindi come
 - $\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z) + \alpha \Delta T$
 - $\gamma_{xy} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}$ (e analoghe)

• Occupiamoci ora della **FORMULAZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO LINEARE 3D**



- Sono noti:

- Geometria
- Proprietà del materiale (E, ν)
- Condizioni al contorno in termini di spostamenti impressi

$$\text{• } \underline{\bar{s}} = [\bar{s}_1(\underline{x}) \quad \bar{s}_2(\underline{x}) \quad \bar{s}_3(\underline{x})] \text{ su } S_V$$

e carichi applicati

$$\text{• } \underline{F} = [F_1(\underline{x}) \quad F_2(\underline{x}) \quad F_3(\underline{x})] \text{ in } V$$

$$\text{• } \underline{f} = [f_1(\underline{x}) \quad f_2(\underline{x}) \quad f_3(\underline{x})] \text{ su } S_F$$

- Si vuole determinare

1) Velocità degli spostamenti \rightarrow 3 campi incogniti:

$$- \underline{s}(\underline{x}) = [s_1(\underline{x}) \quad s_2(\underline{x}) \quad s_3(\underline{x})]$$

2) Tensori delle deformazioni \rightarrow 6 campi incogniti:

$$- \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = [\varepsilon_{11}(\underline{x}) \quad \varepsilon_{22}(\underline{x}) \quad \varepsilon_{33}(\underline{x}) \quad \varepsilon_{12}(\underline{x}) \quad \varepsilon_{13}(\underline{x}) \quad \varepsilon_{23}(\underline{x})]$$

3) Tensori degli sforzi \rightarrow 6 campi incogniti:

$$- \underline{\sigma}(\underline{x}) = [\sigma_{11}(\underline{x}) \quad \sigma_{22}(\underline{x}) \quad \sigma_{33}(\underline{x}) \quad \tau_{12}(\underline{x}) \quad \tau_{13}(\underline{x}) \quad \tau_{23}(\underline{x})]$$

- Le equazioni governanti: i) problemi sono

$$- \begin{cases} \sigma_{ij,i} + f_j = 0 & \text{in } V \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + f_1 = 0 & \text{su } S_F \end{cases} \quad \begin{matrix} 3 \text{ equazioni di equilibrio} \\ 3 \text{ equazioni di congruenza} \end{matrix}$$

$$- \begin{cases} \varepsilon_{ij,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) & \text{in } V \\ s_i = \bar{s}_i & \text{su } S_V \end{cases} \quad \begin{matrix} 6 \text{ equazioni di congruenza} \\ 6 \text{ equazioni del legame costitutivo} \end{matrix}$$

- Con il teorema di Kirchhoff, si dimostra che la soluzione esiste ed è unica

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases}$$

3 equazioni di equilibrio + c.c.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad \text{in } V$$

6 equazioni di congruenza + c.c.

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{cases} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix}$$

6 equazioni del legame costitutivo

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

PRIMA PARTE

→ Dato una statica equilibrata: sforzi σ_{ij} , forze di volume F_j e forze di superficie f_j tali che:

$$\bullet \sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } V \quad [\sigma_{ij} h_i = f_j \text{ su } S_F]$$

→ Dato una cinematica congruente: deformazioni ε_{ij} e spostamenti s_i , tali che:

$$\bullet \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } V \quad [s_i = \bar{s}_i \text{ su } S_V]$$

↳

• Si proverà dimostrare che vale la seguente identità:

$$-\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_V F_j s_j dx + \int_{S_F} f_j s_j ds$$

L: Le

SECONDA PARTE

→ Dato una certa statica: sforzi σ_{ij} , forze di volume F_j e forze di superficie f_j

↳

• Si dimostra che impone la seguente equazione: $\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_V F_j s_j dx + \int_{S_F} f_j s_j ds$

— A cinematica congruente, cioè deformazioni ε_{ij} e spostamenti s_i , tali che:

$$\times \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } V \quad [s_i = 0 \text{ su } S_V]$$

• qui vale dunque le equazioni d'equilibrio