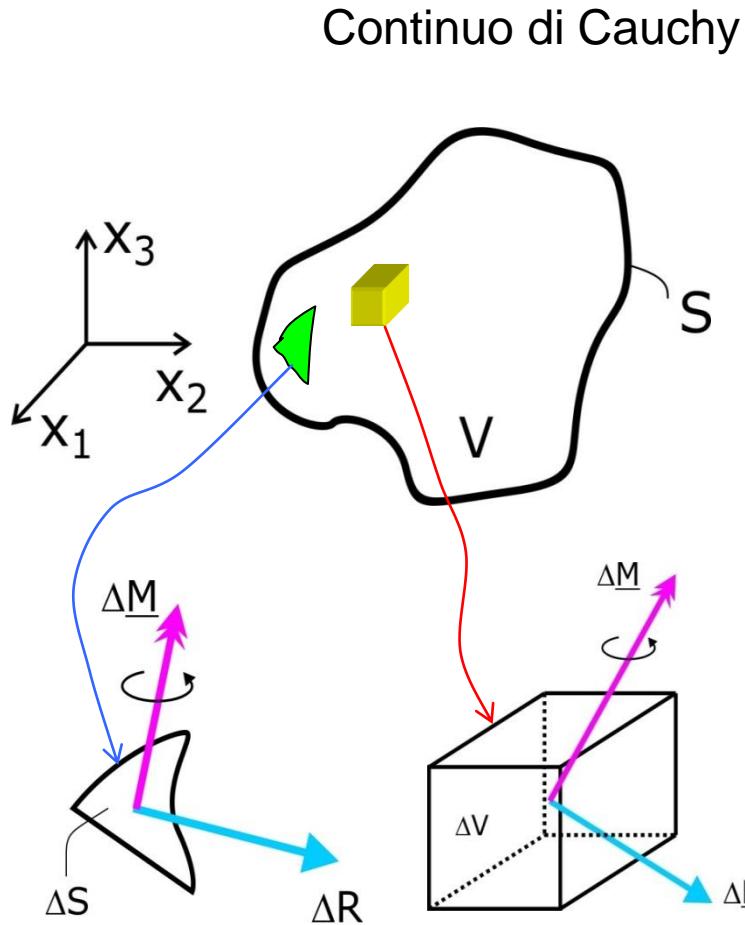


STATICHE DEI MEZZI CONTINUI

Si consideri un mezzo continuo tridimensionale di volume V e superficie S soggetto a forze agenti al suo interno (es. peso proprio) e/o sulla superficie laterale (es. pressione del vento).



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)



Continuo di Cauchy

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta R}}{\Delta V} = \underline{F}$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta M}}{\Delta V} = \underline{0}$$

F = forza di volume
 $[F]/[L^3]$

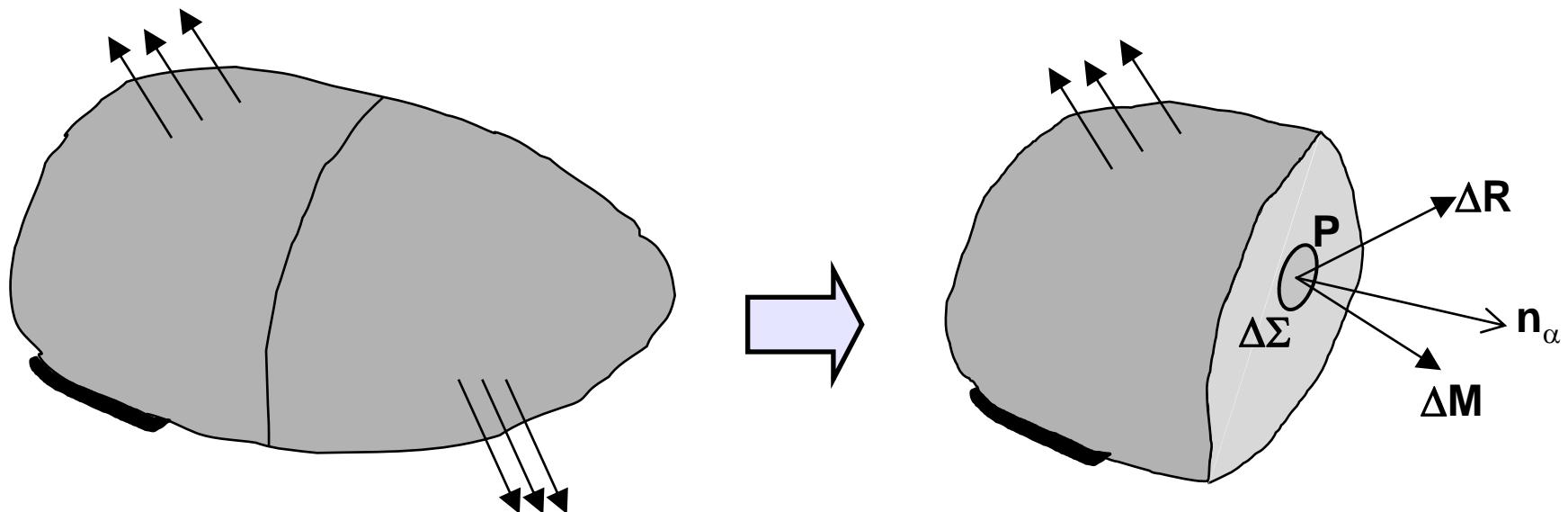
$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta R}}{\Delta S} = \underline{f}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta M}}{\Delta S} = \underline{0}$$

f = forza superficiale
 $[F]/[L^2]$

STATICHE DEI MEZZI CONTINUI

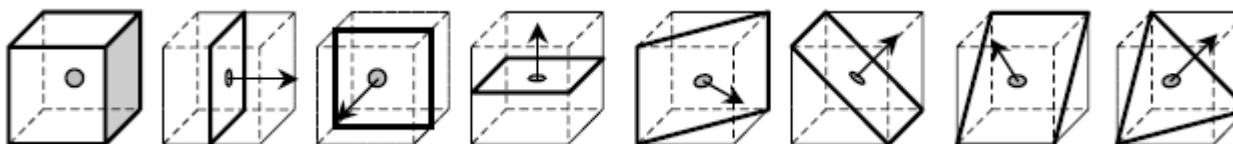
- Definizione di sforzo



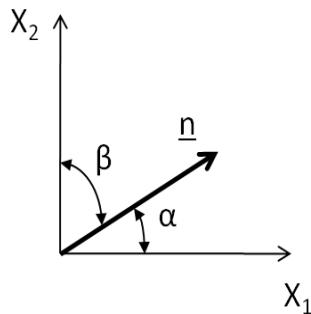
Si postula che:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta\Sigma} = \sigma_\alpha \\ \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta\Sigma} = 0 \end{cases}$$

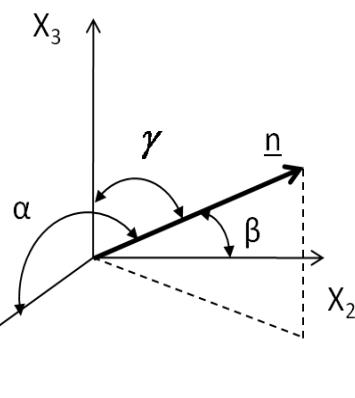
- Il vettore $\sigma_\alpha(P, n_\alpha)$ è detto sforzo nel punto P ; il suo valore dipende dalla posizione di P e dalla normale n_α
- L'insieme di tutti i vettori σ_α al variare di n_α individua lo stato di sforzo in P
- $\sigma_{-\alpha} = -\sigma_\alpha$



- **Concetto di versore:** utile per definire una giacitura rispetto alla quale valutare il vettore sforzo



$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

Esempio 1: versore nel piano (x_1, x_2)

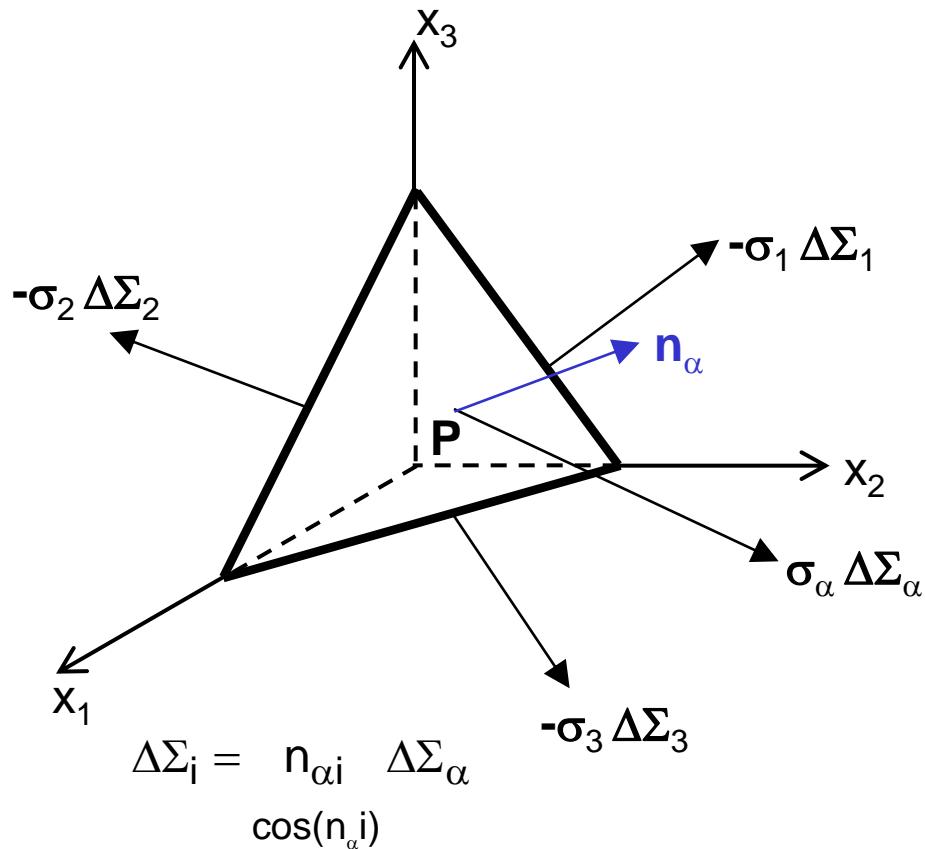
$$\gamma = \pi/2 \text{ e } \alpha = \beta = \pi/4$$

$$n^2 + n^2 + 0 = 1 \quad \rightarrow \quad \underline{n} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esempio 2: trisettrice primo ottante, $\alpha = \beta = \gamma$

$$n^2 + n^2 + n^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \underline{n} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

RELAZIONE DI CAUCHY



$$\sigma_{\alpha j} = \sigma_{ij} n_{\alpha i}$$

Per equilibrio alla traslazione:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha \Delta \Sigma_\alpha &= \sigma_1 \Delta \Sigma_1 + \sigma_2 \Delta \Sigma_2 + \sigma_3 \Delta \Sigma_3 \\ &= (\sigma_1 n_{\alpha 1} + \sigma_2 n_{\alpha 2} + \sigma_3 n_{\alpha 3}) \Delta \Sigma_\alpha\end{aligned}$$



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 n_{\alpha 1} + \sigma_2 n_{\alpha 2} + \sigma_3 n_{\alpha 3}$$

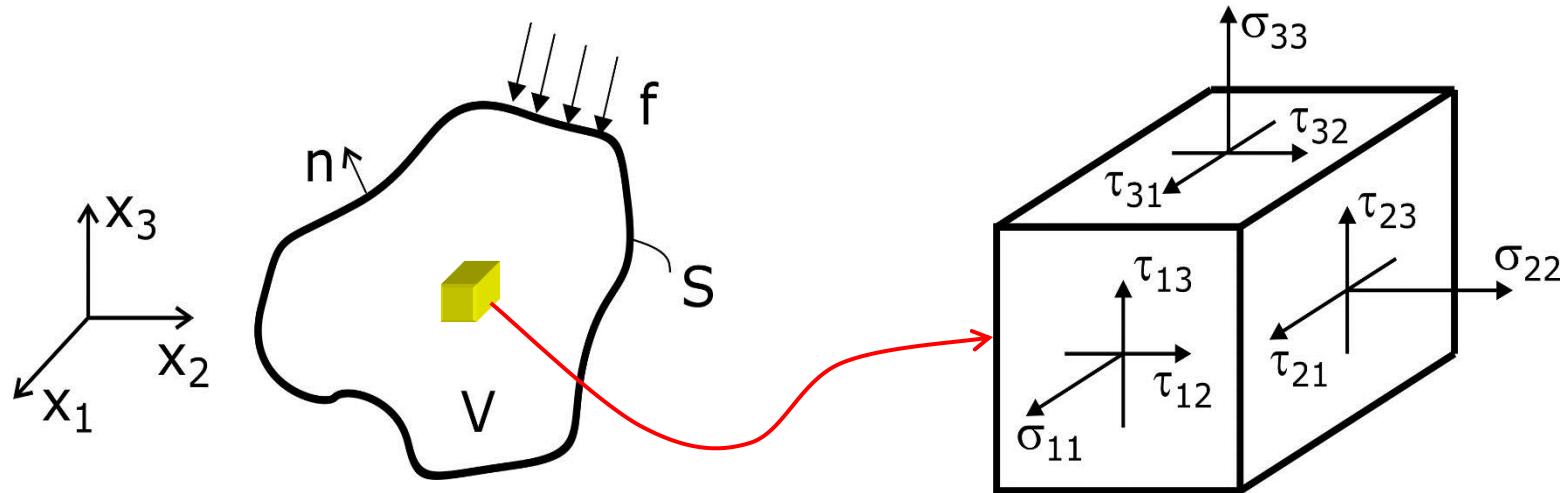


$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\alpha 1} \\ n_{\alpha 2} \\ n_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{\alpha 1} \\ n_{\alpha 2} \\ n_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$

STATO DI SFORZO



componenti normali

$$\sigma_{ii} \quad (i = 1, 2, 3)$$

componenti tangenziali

$$\tau_{ij} \quad (i \neq j)$$

τ_{13}
asse ortogonale al piano su cui agisce la componente di sforzo
direzione della componente di sforzo

Stato di sforzo: componente idrostatica e deviatorica

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + S_{ij}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

componente idrostatica di sforzo → p

componente deviatorica di sforzo → S_{ij}

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} - p & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}$$

Pressione Idrostatica

$$p = \frac{J_1}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Deviatore di Sforzo

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \frac{-\sigma_{11} + 2\sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \frac{-\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\sigma_{33}}{3} \end{bmatrix}$$

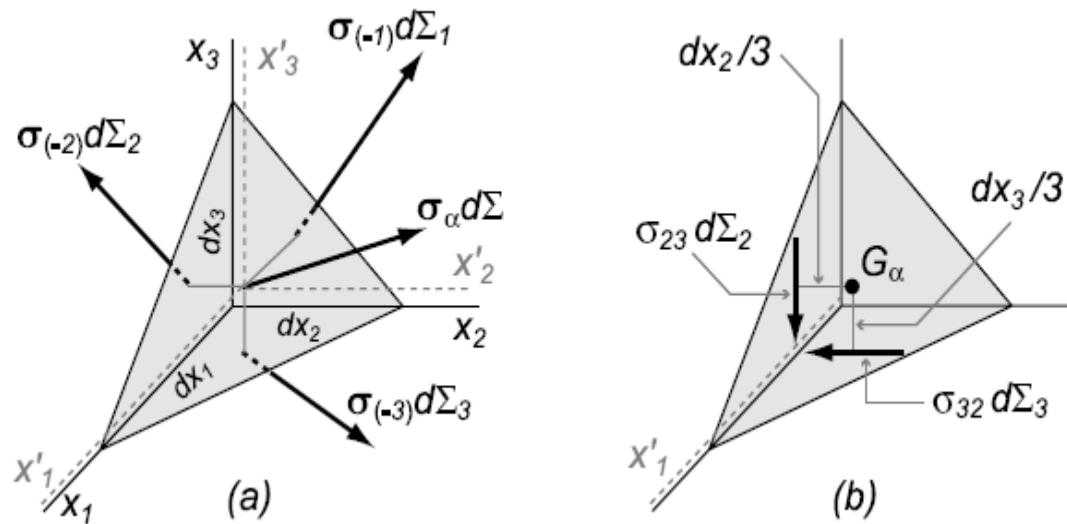
SIMMETRIA DEL TENSORE DI SFORZO

La simmetria del tensore σ consegue dall'equilibrio alla rotazione del tetraedro. Si considerino tre assi x'_i paralleli a x_i ma passanti per il baricentro G_α della faccia di normale n_α , dove è applicata la forza $\sigma_\alpha d\Sigma$ (Fig. 1.7). Le distanze da G_α dei baricentri G_i delle altre tre facce sono $dx_i/3$. Il volume del tetraedro è invece

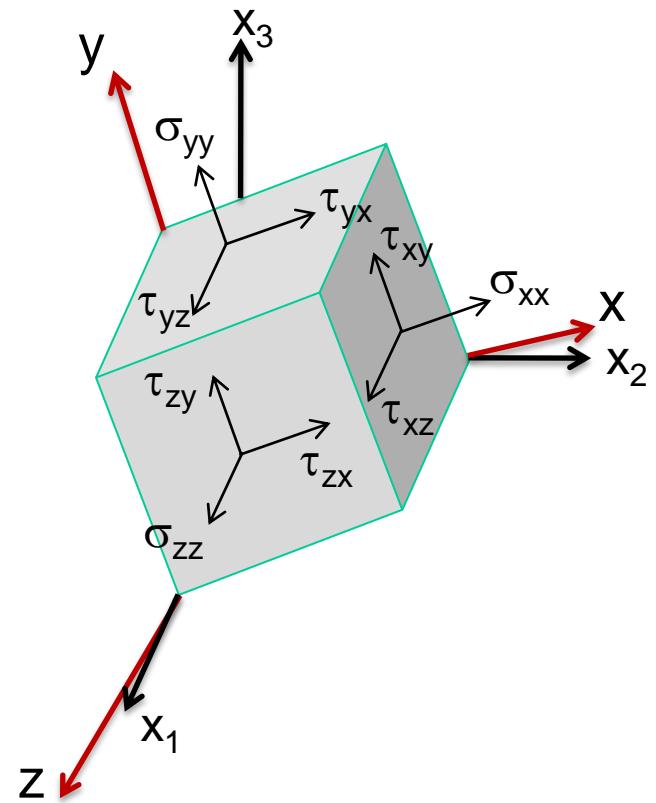
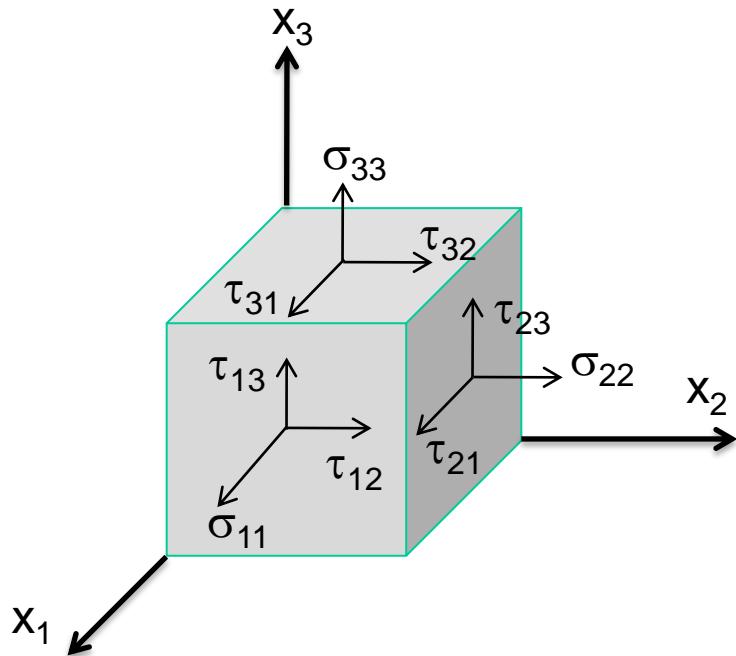
$$dV = d\Sigma_1 \frac{dx_1}{3} = d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3} = d\Sigma_3 \frac{dx_3}{3} \quad (b1)$$

Nell'equilibrio alla rotazione del tetraedro attorno all'asse x'_1 intervengono solo le forze $\sigma_{23} d\Sigma_2$ e $\sigma_{32} d\Sigma_3$ (indicate in Figura 2.7b con le convenzioni stabilite in Figura 2.6 per le componenti su giaciture di normale $n_{(-i)}$). A meno di infinitesimi di ordine superiore al terzo, si ottiene allora

$$\sigma_{23} d\Sigma_2 \frac{dx_2}{3} = \sigma_{32} d\Sigma_3 \frac{dx_3}{3} \rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (b2)$$



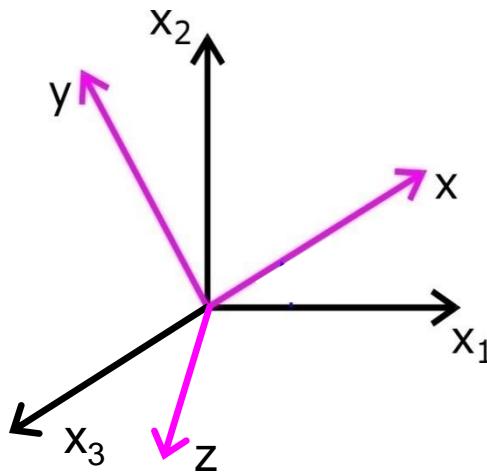
ROTAZIONE DI UN TENSORE COL SISTEMA DI RIFERIMENTO



Problema:

noto lo stato di sforzo rispetto al sistema (x_1, x_2, x_3) , si vuole valutare lo stato di sforzo rispetto alle 3 giaciture di un nuovo sistema di riferimento (x, y, z) .

ROTAZIONE DI UN TENSORE COL SISTEMA DI RIFERIMENTO



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_{x1} & n_{x2} & n_{x3} \\ n_{y1} & n_{y2} & n_{y3} \\ n_{z1} & n_{z2} & n_{z3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{z1} \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{z2} \\ n_{x3} & n_{y3} & n_{z3} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{y1} & \sigma_{z1} \\ \sigma_{x2} & \sigma_{y2} & \sigma_{z2} \\ \sigma_{x3} & \sigma_{y3} & \sigma_{z3} \end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^{(x,y,z)} = \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{\sigma}}^{(1,2,3)} \underline{\underline{N}}$

SFORZI E DIREZIONI PRINCIPALI

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}_{\alpha} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{\alpha} = \sigma \underline{n}_{\alpha} \end{cases} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}_{\alpha} = \sigma \underline{n}_{\alpha} \rightarrow (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) \underline{n}_{\alpha} = \underline{0}$$

↓

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{\alpha 1} \\ n_{\alpha 2} \\ n_{\alpha 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0$$

Matrice σ simmetrica \Rightarrow
teorema algebra lineare
assicura l'esistenza di tre
radici reali.

$$\begin{cases} \mathbf{n}_I, \sigma_I \\ \mathbf{n}_{II}, \sigma_{II} \\ \mathbf{n}_{III}, \sigma_{III} \end{cases}$$

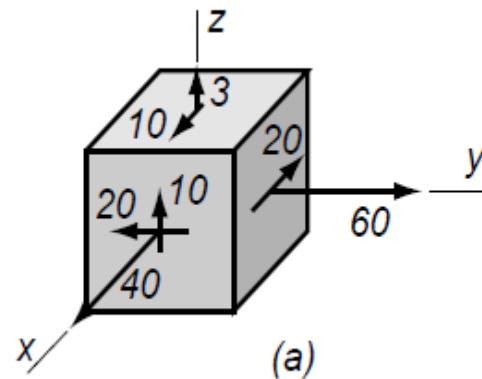
Sforzi e direzioni
principali

dove: $\begin{cases} J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \tau_{12}\tau_{21} - \tau_{23}\tau_{32} - \tau_{13}\tau_{31} \\ J_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) \end{cases}$

Invarianti di sforzo

SFORZI E DIREZIONI PRINCIPALI

Esempio di calcolo di sforzi e direzioni principali



$$\sigma = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 10 \\ -20 & 60 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

$$J_1 = 103 \text{ MPa}$$

$$J_2 = 2200 \text{ MPa}^2$$

$$J_3 = 0 \quad (MPa^3)$$

$$s_I = 72.766 \text{ MPa}$$

$$s_{II} = 30.234 \text{ MPa}$$

$$s_{III} = 0$$

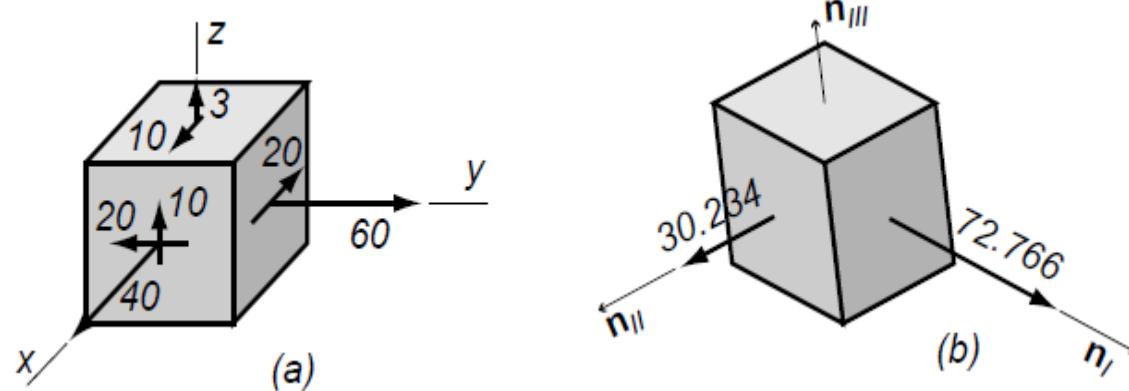
$$\begin{bmatrix} 40 - s_I & -20 & 10 \\ -20 & 60 - s_I & 0 \\ 10 & 0 & 3 - s_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{Ix} \\ n_{Iy} \\ n_{Iz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -32.766 & -20 & 10 \\ -20 & -12.766 & 0 \\ 10 & 0 & -69.766 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{Ix} \\ n_{Iy} \\ n_{Iz} \end{Bmatrix}}_{\text{Determinante nullo e rango 2}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determinante nullo e rango 2

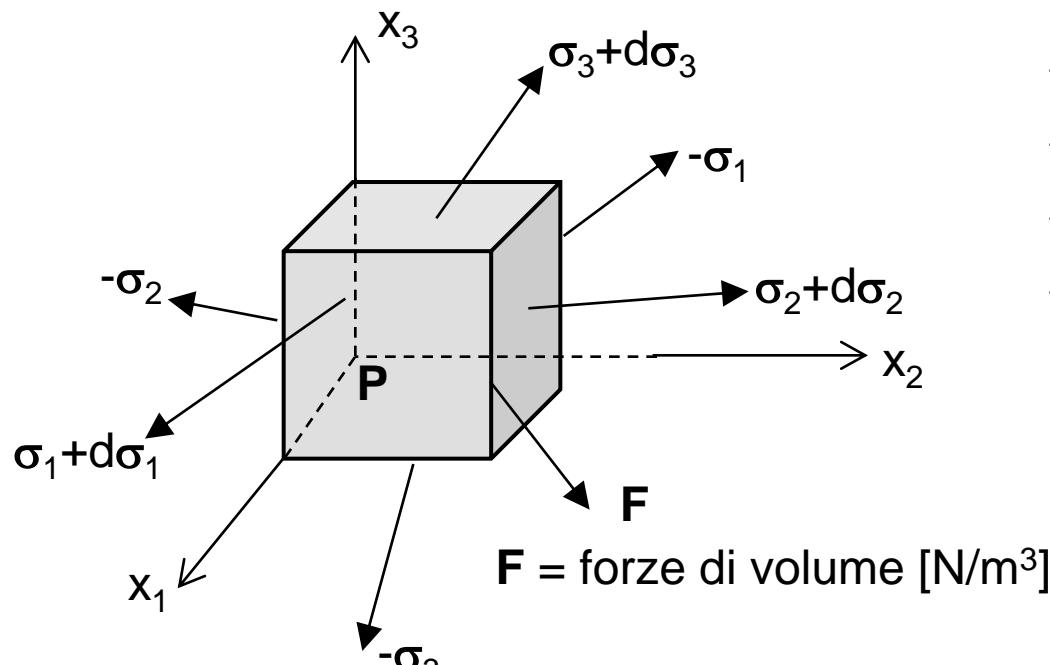
$$\mathbf{n}_{II} = \begin{Bmatrix} 0.794 \\ 0.533 \\ 0.292 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_{III} = \begin{Bmatrix} -0.286 \\ -0.095 \\ 0.953 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_I = \begin{Bmatrix} 0.536 \\ -0.840 \\ 0.077 \end{Bmatrix}$$



EQUILIBRIO IN FORMA FORTE E AL CONTORNO



$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0$$

Per equilibrio alla traslazione:

$$\begin{aligned} -\sigma_1 dx_2 dx_3 + (\sigma_1 + d\sigma_1) dx_2 dx_3 + \\ -\sigma_2 dx_1 dx_3 + (\sigma_2 + d\sigma_2) dx_1 dx_3 + \\ -\sigma_3 dx_2 dx_1 + (\sigma_3 + d\sigma_3) dx_2 dx_1 + \\ + \mathbf{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

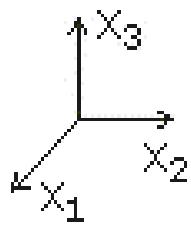


$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

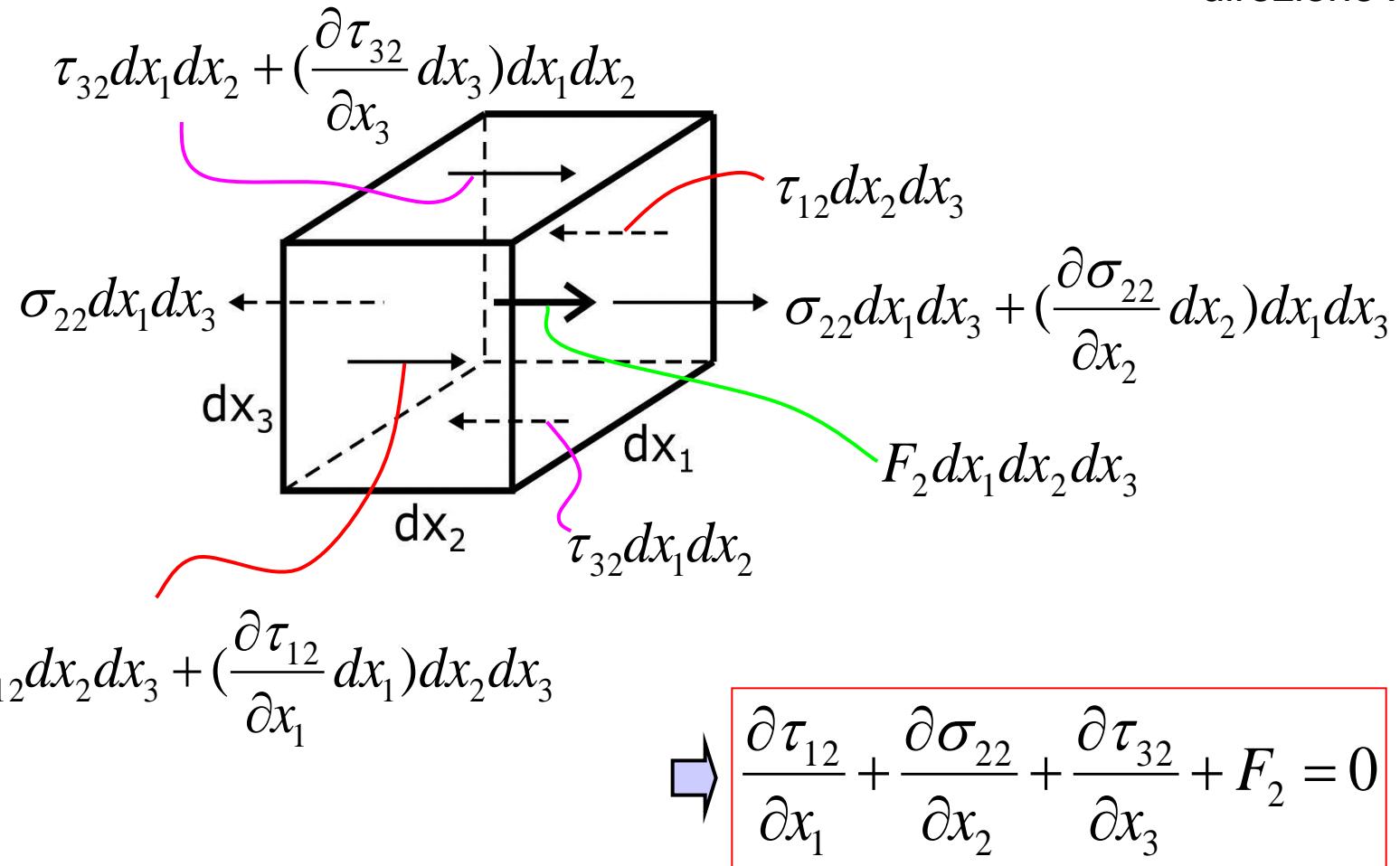


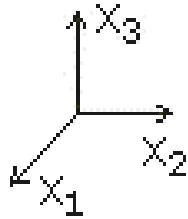
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{array} \right.$$

L'equilibrio alla rotazione impone la simmetria del tensore: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$



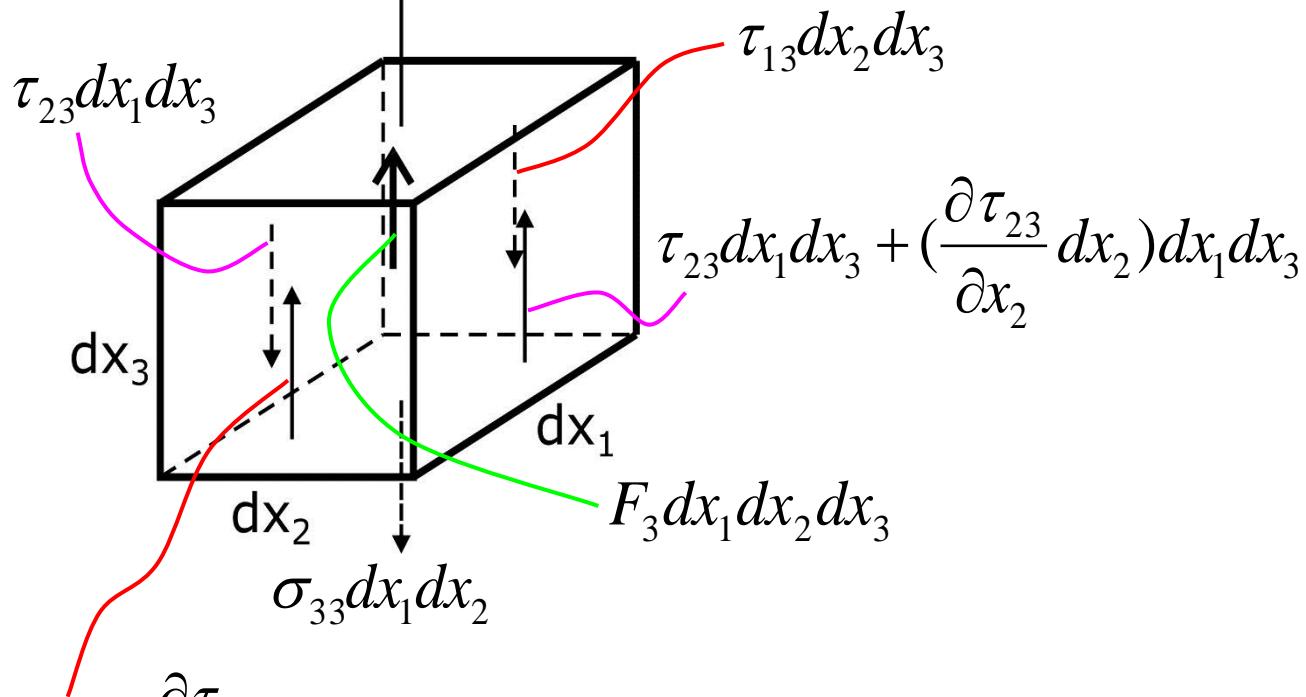
Equilibrio alla
traslazione in
direzione x_2





$$\sigma_{33}dx_1dx_2 + \left(\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3\right)dx_1dx_2$$

Equilibrio alla
traslazione in
direzione x_3



$$\tau_{13}dx_2dx_3 + \left(\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1} dx_1\right)dx_2dx_3$$

➡

$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0$$

L'equilibrio al contorno impone che lo sforzo che affiora in superficie sia uguale alla forza di superficie imposta \mathbf{f} .

Matematicamente ciò equivale ad isolare un tetraedro attorno ad un punto P in superficie e ad applicare la relazione di Cauchy:

$$\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = \mathbf{f}$$



$$\begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = f_1 \\ \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 = f_2 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = f_3 \end{cases}$$



$$\sigma_{ij} n_i = f_j$$

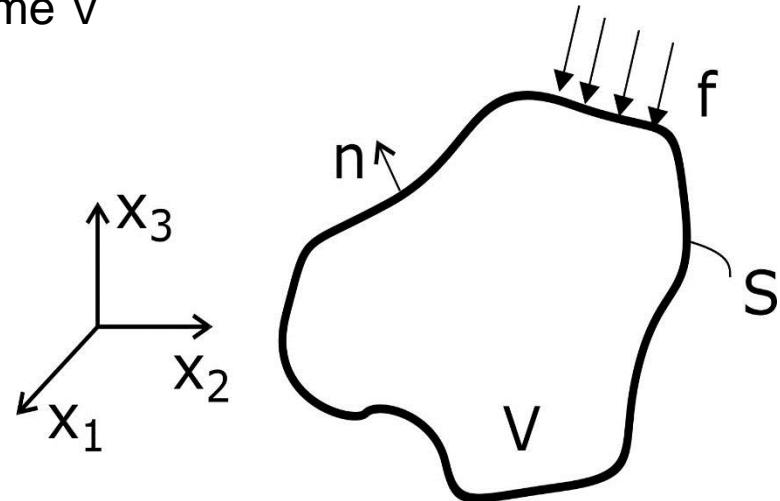
Essendo \mathbf{n} la normale alla superficie in P.

NB.

Ho in tutto 3 equazioni e 6 incognite, cioè il continuo generico è staticamente indeterminato, ovvero le sole equazioni di equilibrio non permettono di calcolare la sua risposta in termini di stato sforzo interno per effetto di azioni esterne note.

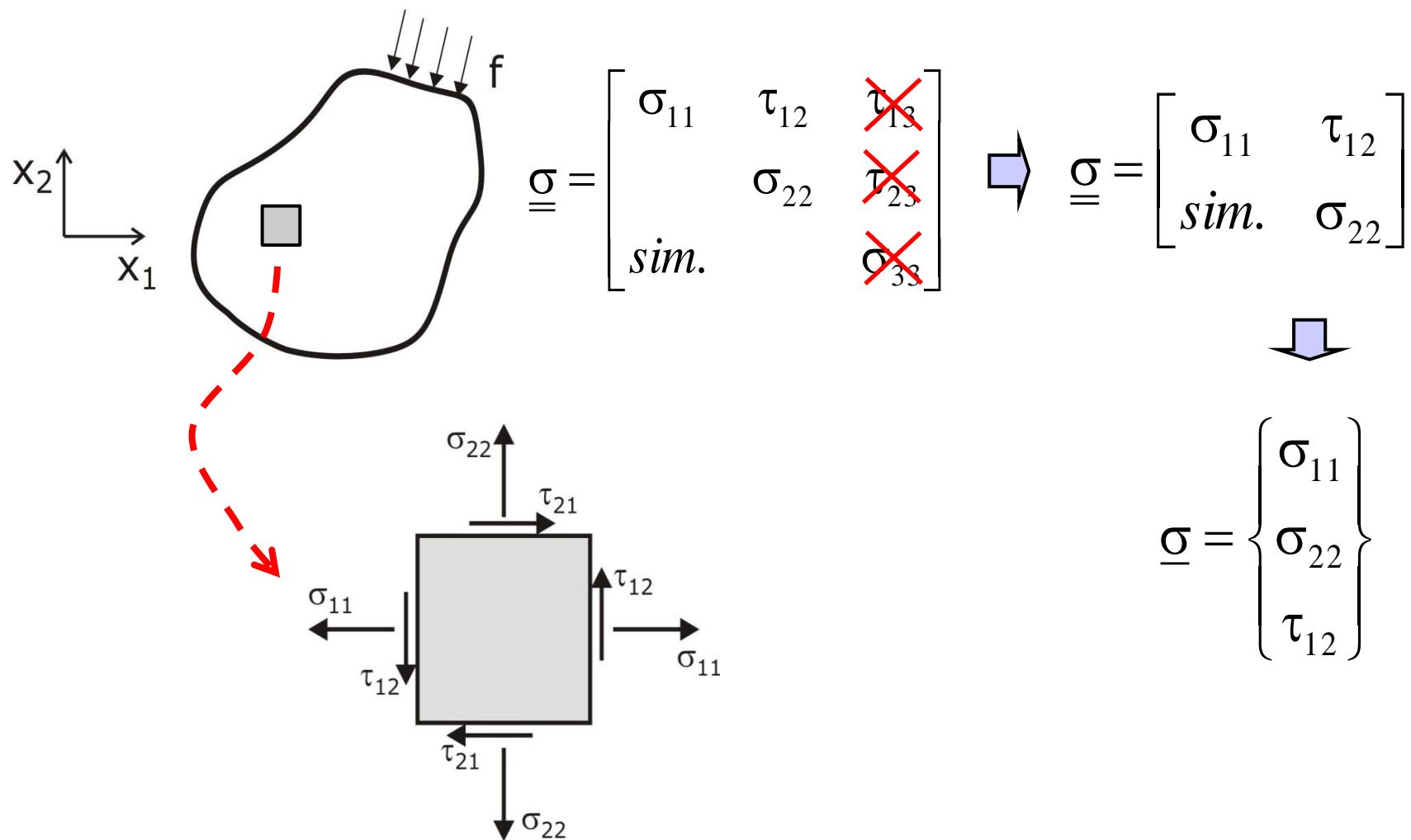
EQUILIBRIO IN FORMA FORTE E AL CONTORNO

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{sul volume } V$$



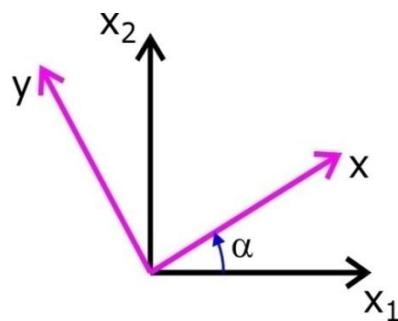
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 + \tau_{31}n_3 + f_1 = 0 \\ \tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{32}n_3 + f_2 = 0 \\ \tau_{13}n_1 + \tau_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 + f_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{sulla superficie } S$$

STATO DI SFORZO PIANO



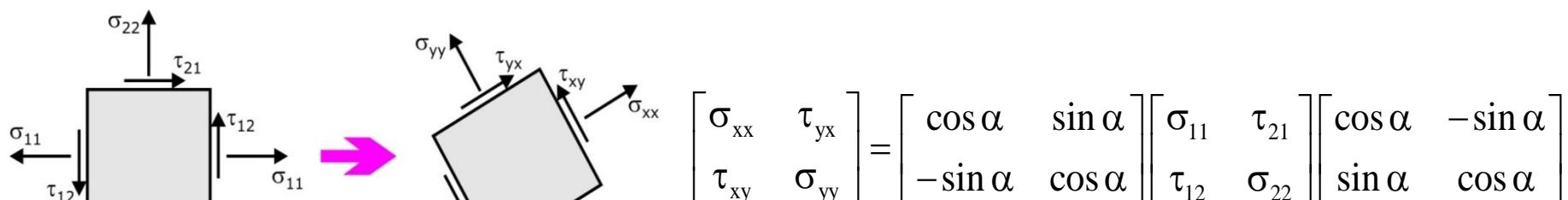
ROTAZIONE DI UNO STATO DI SFORZO PIANO

Rotazione del sistema di riferimento



$$\underline{n}_x = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos(90 - \alpha) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

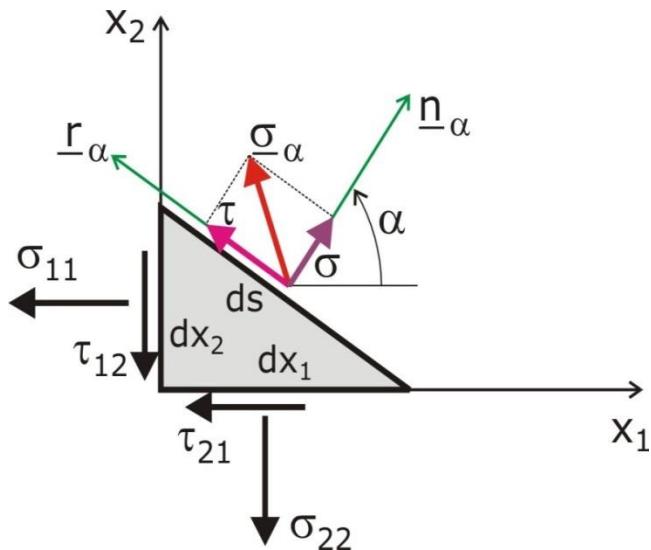
$$\underline{n}_y = \begin{Bmatrix} \cos(90 + \alpha) \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \underline{n}_x^T \underline{\sigma} \underline{n}_x = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma_{yy} = \underline{n}_y^T \underline{\sigma} \underline{n}_y = \sigma_{11} \sin^2 \alpha + \sigma_{22} \cos^2 \alpha - 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{xy} = \underline{n}_y^T \underline{\sigma} \underline{n}_x = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

STATO DI SFORZO PIANO (CERCHIO DI MOHR)



$$\underline{n}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos(90 - \alpha) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\underline{r}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos(90 + \alpha) \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

- Componente di $\underline{\sigma}_\alpha$ parallela ad \underline{n}_α : $\sigma = \underline{n}_\alpha^T \underline{\sigma} \underline{n}_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$
 $= \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha$

- Componente di $\underline{\sigma}_\alpha$ ortogonale ad \underline{n}_α : $\tau = \underline{r}_\alpha^T \underline{\sigma} \underline{n}_\alpha = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$
 $= -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$

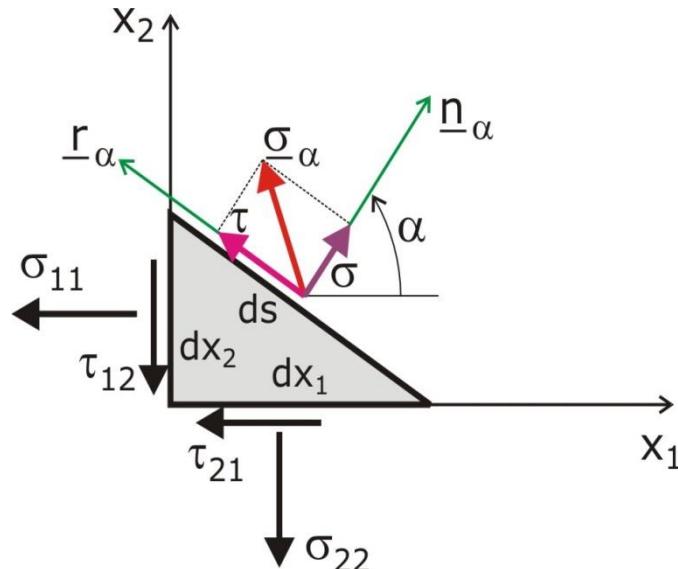
STATO DI SFORZO PIANO (CERCHIO DI MOHR)

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2\tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha + \tau_{12} \sin 2\alpha \\ \tau = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\alpha + \tau_{12} \cos 2\alpha \end{array} \right.$$

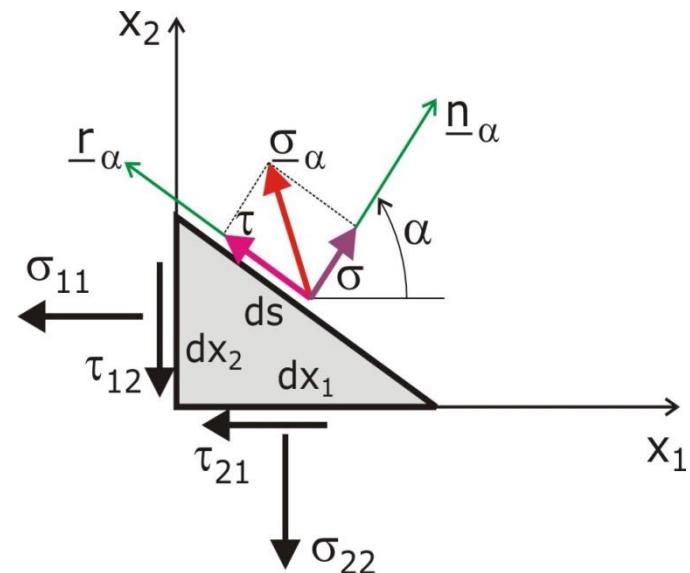
STATO DI SFORZO PIANO (CERCHIO DI MOHR)

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\alpha + \tau_{12} \sin 2\alpha \\ \tau = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\alpha + \tau_{12} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando si ottiene:

$$(\sigma - c)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \tau_{12}^2}$$

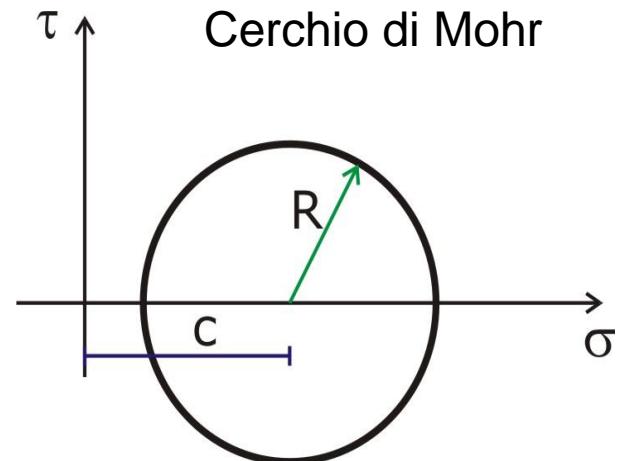


Equazione di una circonferenza nel piano $\sigma-\tau$, con centro nel punto $(\sigma=c, \tau=0)$ e raggio R

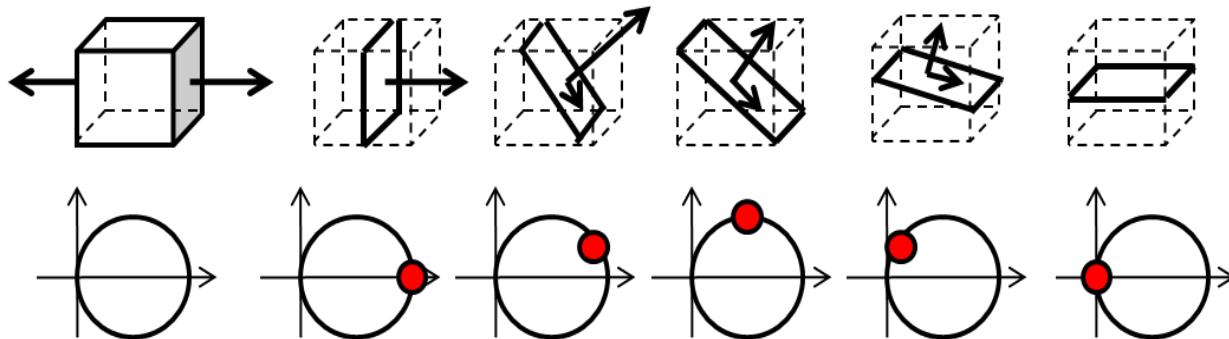
STATO DI SFORZO PIANO (CERCHIO DI MOHR)

$$(\sigma - c)^2 + \tau^2 = R^2$$

$$c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \tau_{12}^2}$$



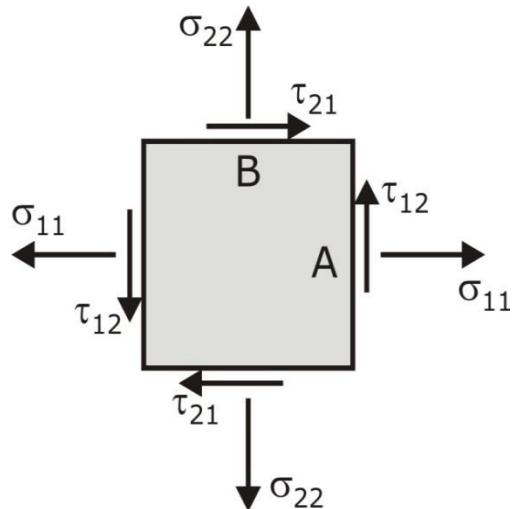
Il cerchio di Mohr fornisce le componenti normale e tangenziale corrispondenti ad uno stato di sforzo piano in un dato punto su una qualsiasi giacitura.



Stati tensionali possibili su diverse giaciture in uno stesso punto soggetto a tensione monoassiale

STATO DI SFORZO PIANO (CERCHIO DI MOHR)

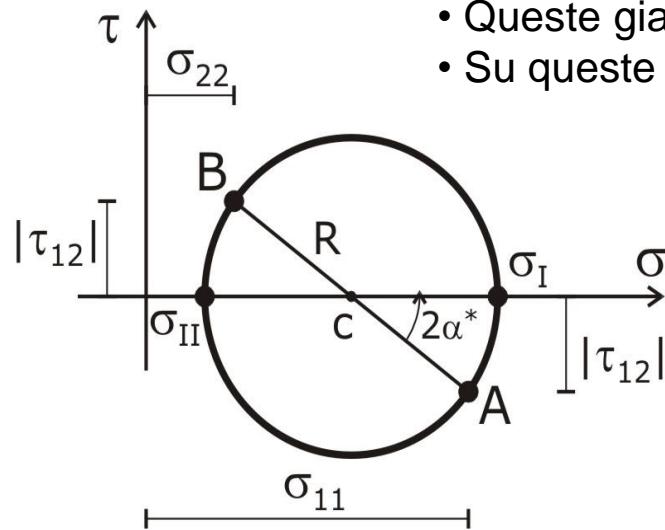
Cerchio di Mohr: istruzioni operative



$$A(\sigma = \sigma_{11}, \tau = -\tau_{12})$$
$$B(\sigma = \sigma_{22}, \tau = \tau_{21})$$

τ positiva se oraria
 σ positiva se di trazione

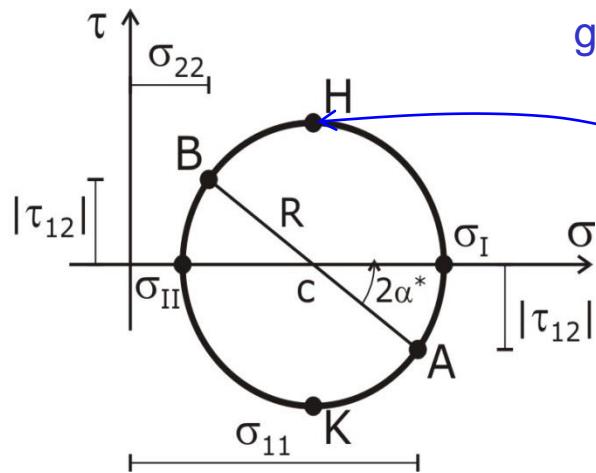
- Esistono due giaciture ortogonali su cui la tensione tangenziale τ è nulla;
- Queste giaciture definiscono le direzioni principali;
- Su queste giaciture agiscono gli sforzi principali σ_I e σ_{II}



$$\sigma_I, \sigma_{II} = c \pm R$$

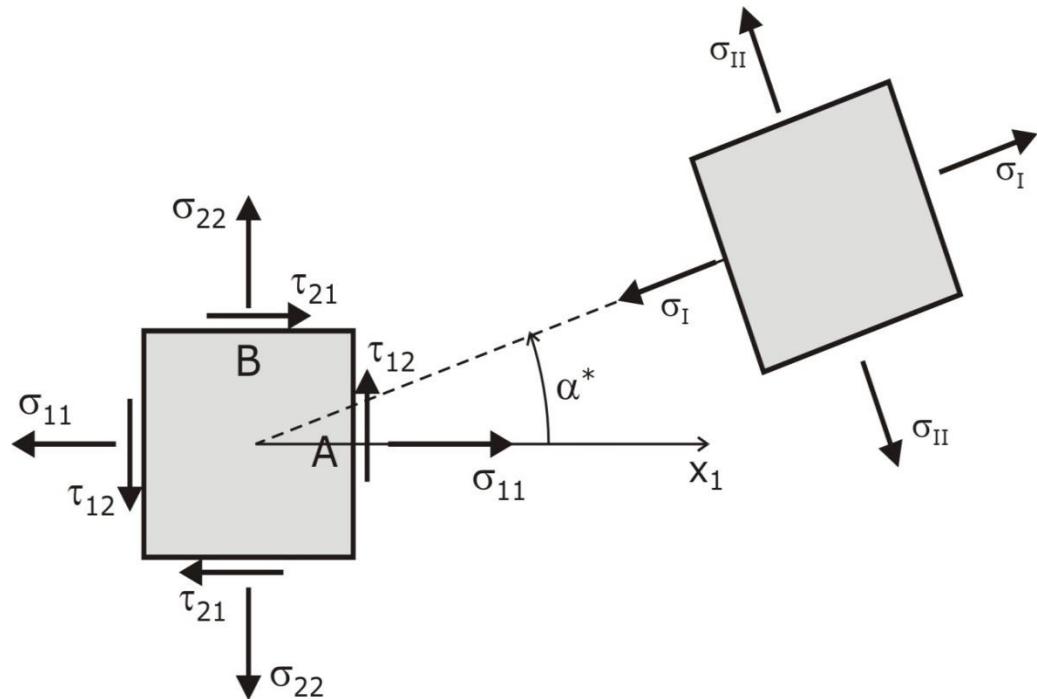
$$\tan(2\alpha^*) = \frac{|\tau_{12}|}{\frac{1}{2}|\sigma_{11} - \sigma_{22}|}$$

STATO DI SFORZO PIANO (CERCHIO DI MOHR)



Le tensioni tangenziali massime si trovano su giaciture ruotate di 45^0 rispetto alle giaciture principali

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}|$$

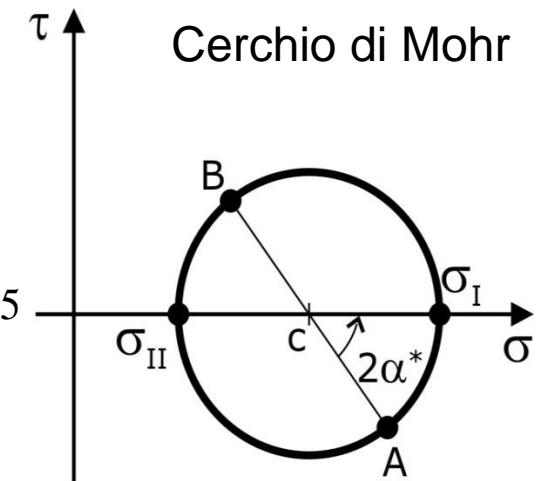
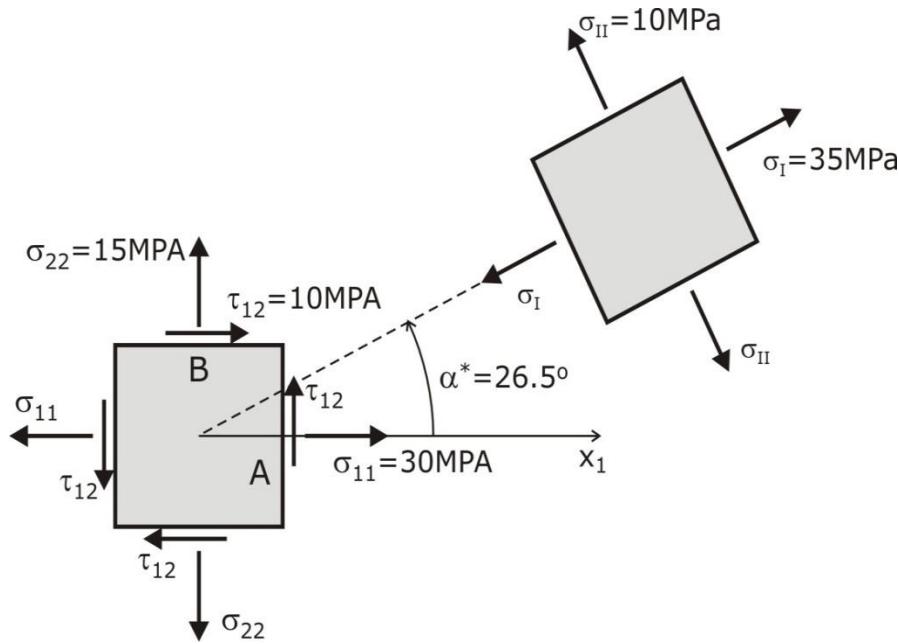


Gli sforzi principali σ_I e σ_{II} sono il massimo e il minimo tra gli sforzi normali al variare delle giaciture in un punto.

Esempio 1: Determinare gli sforzi principali e le direzioni principali del seguente stato di sforzo:

$$\begin{aligned} A(\sigma = 30 \text{ MPa}, \tau = -10 \text{ MPa}) \\ B(\sigma = 15 \text{ MPa}, \tau = 10 \text{ MPa}) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = 22.5 \\ R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \tau_{12}^2} = 12.5 \end{array} \right.$$



Sforzi principali

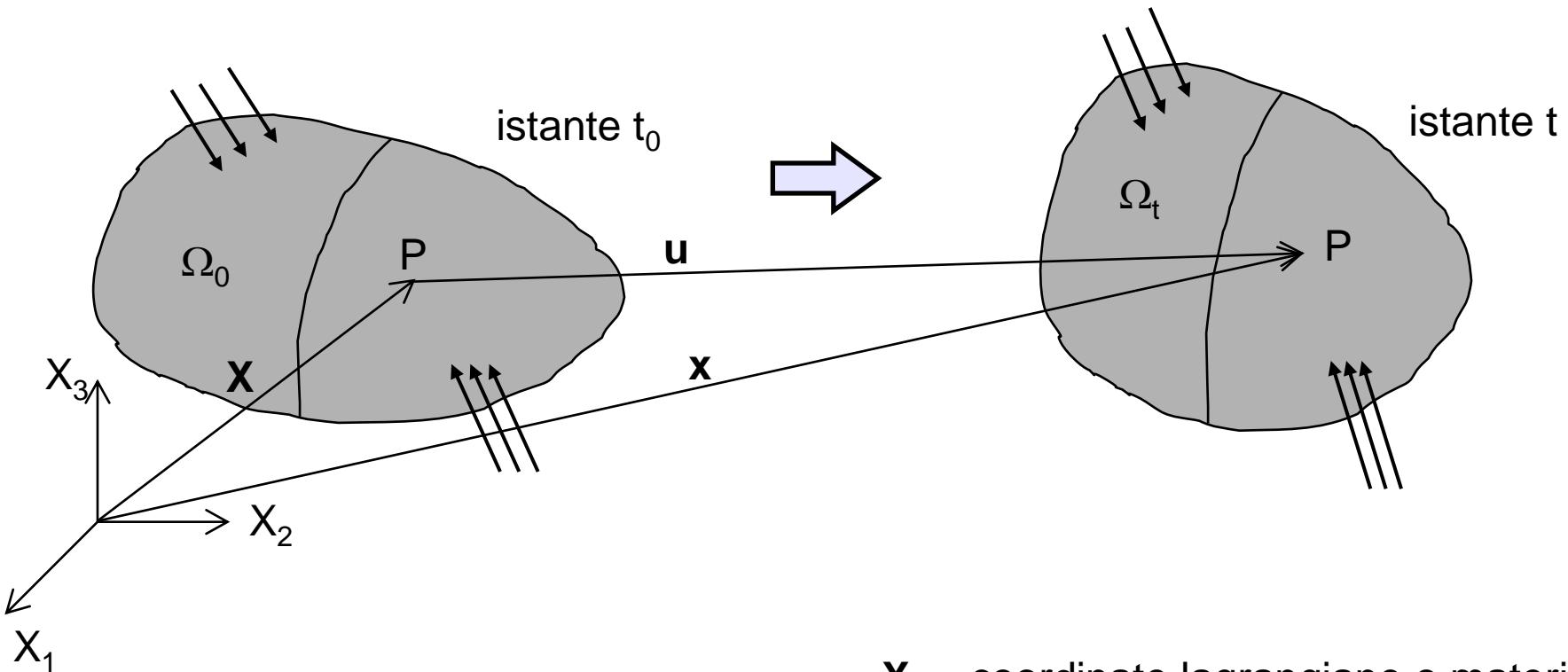
$$s_I = c + R = 35 \text{ MPa}$$

$$s_{II} = c - R = 10 \text{ MPa}$$

Direzioni principali

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \arctan \frac{|\tau_{12}|}{\frac{1}{2} |\sigma_{11} - \sigma_{22}|} \approx 0.46 \text{ rad} \approx 26.5^\circ$$

CINEMATICA DEI MEZZI CONTINUI



$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \text{moto del corpo.}$

\mathbf{X} = coordinate lagrangiane o materiali.
 \mathbf{x} = coordinate euleriane o spaziali.

Due approcci possono essere utilizzati per descrivere lo stato deformativo di un corpo continuo:

1. **Descrizione lagrangiana**: le coordinate indipendenti sono quelle lagrangiane e il tempo t. Usato principalmente in meccanica dei solidi.
2. **Descrizione euleriana**: le coordinate indipendenti sono quelle euleriane e il tempo t. Usato principalmente in meccanica dei fluidi.

Assumendo la descrizione lagrangiana si ha che:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \\ \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{s}} \\ \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{s}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \ddot{\mathbf{s}} \end{aligned} \right\} \text{Material time derivative}$$

Un cambiamento di configurazione si dice **congruente** se:

- $\phi(\mathbf{X},t)$ è continua (no lacerazioni);
- $\phi(\mathbf{X},t)$ è a un sol valore di \mathbf{X} (no compenetrazioni);
- $\phi(\mathbf{X},t)$ rispettosa delle condizioni al contorno.

$$\begin{cases} s_1 = \bar{s}_1 \\ s_2 = \bar{s}_2 \quad \text{su } S_u \\ s_3 = \bar{s}_3 \end{cases}$$

Ipotesi piccoli spostamenti

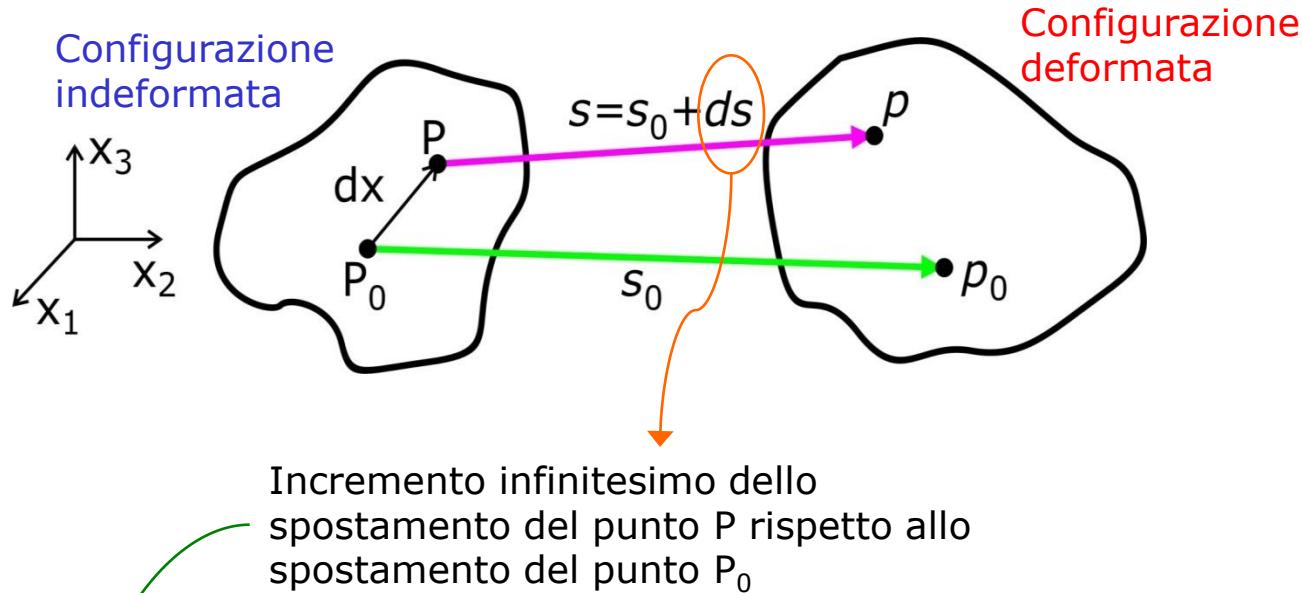
- Spostamenti e deformazioni sono così piccoli da non influenzare il modo con cui l'equilibrio si instaura nella struttura. Ciò consente di imporre le equazioni di equilibrio nella configurazione iniziale (istante t_0).



$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial X_3} + F = 0 \quad \text{in } \Omega_0$$

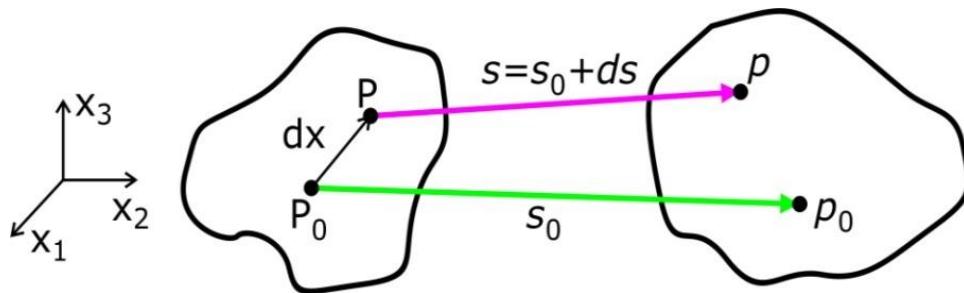
- Permette di confondere la traiettoria con lo spostamento, ovvero assimilare la cinematica finita a quella di un atto di moto a partire dalla configurazione iniziale.

Misura della deformazione locale



$$ds = \begin{cases} ds_1 = \frac{\partial s_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial s_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial s_1}{\partial X_3} dX_3 \\ ds_2 = \frac{\partial s_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial s_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial s_2}{\partial X_3} dX_3 \\ ds_3 = \frac{\partial s_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial s_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial s_3}{\partial X_3} dX_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial X_1} & \frac{\partial s_1}{\partial X_2} & \frac{\partial s_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial X_1} & \frac{\partial s_2}{\partial X_2} & \frac{\partial s_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial X_1} & \frac{\partial s_3}{\partial X_2} & \frac{\partial s_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{s} = \boldsymbol{\Psi} d\mathbf{X}$$

Tensore delle piccole deformazioni



Gradiente di spostamento

$$\Psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial X_1} & \frac{\partial s_1}{\partial X_2} & \frac{\partial s_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial X_1} & \frac{\partial s_2}{\partial X_2} & \frac{\partial s_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial X_1} & \frac{\partial s_3}{\partial X_2} & \frac{\partial s_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\theta}$$

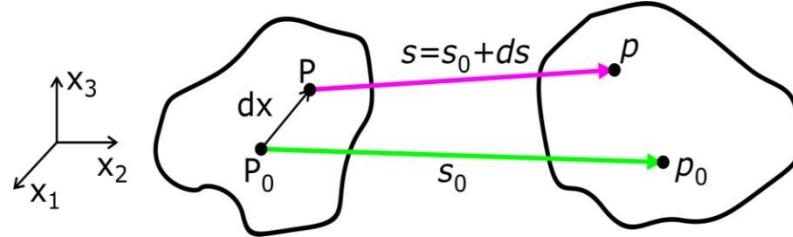
parte simmetrica

parte emisimmetrica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{1,1} + s_{1,1} & s_{1,2} + s_{2,1} & s_{1,3} + s_{3,1} \\ s_{2,1} + s_{1,2} & s_{2,2} + s_{2,2} & s_{2,3} + s_{3,2} \\ s_{3,1} + s_{1,3} & s_{3,2} + s_{2,3} & s_{3,3} + s_{3,3} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Theta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s_{1,2} - s_{2,1} & s_{1,3} - s_{3,1} \\ s_{2,1} - s_{1,2} & 0 & s_{2,3} - s_{3,2} \\ s_{3,1} - s_{1,3} & s_{3,2} - s_{2,3} & 0 \end{bmatrix}$$



$$ds = \Psi dX$$

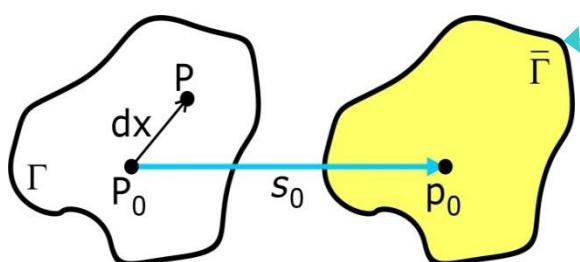


$$ds = \epsilon dX + \theta dX$$



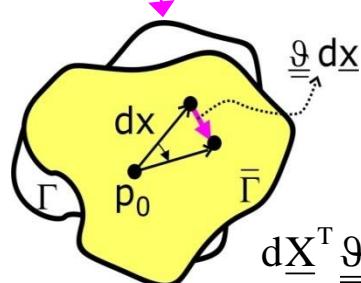
spostamento del punto P
nell'intorno di P_0

$$s = s_0 + \theta dX + \epsilon dX$$



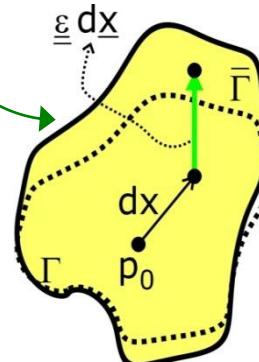
Traslazione rigida

$$+$$



Rotazione rigida

$$dX^T \underline{\underline{\theta}} dX = 0$$



Deformazione pura

Spostamenti e deformazioni sono così piccoli da poter assimilare la cinematica finita a quella di un atto di moto a partire dalla configurazione iniziale (istante t_0);



Lo spostamento di un punto P distante $d\mathbf{X}$ da P_0 , il cui spostamento sia \mathbf{s}_0 , vale:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \frac{d\mathbf{s}_0}{d\mathbf{X}} d\mathbf{X} \rightarrow s_i = s_{0i} + \frac{ds_{0i}}{dX_j} dX_j = s_{0i} + \vartheta_{ij} dX_j + \varepsilon_{ij} dX_j$$

$\psi_{ij} \equiv \vartheta_{ij} + \varepsilon_{ij}$

Traslazione rigida

Rotazione rigida

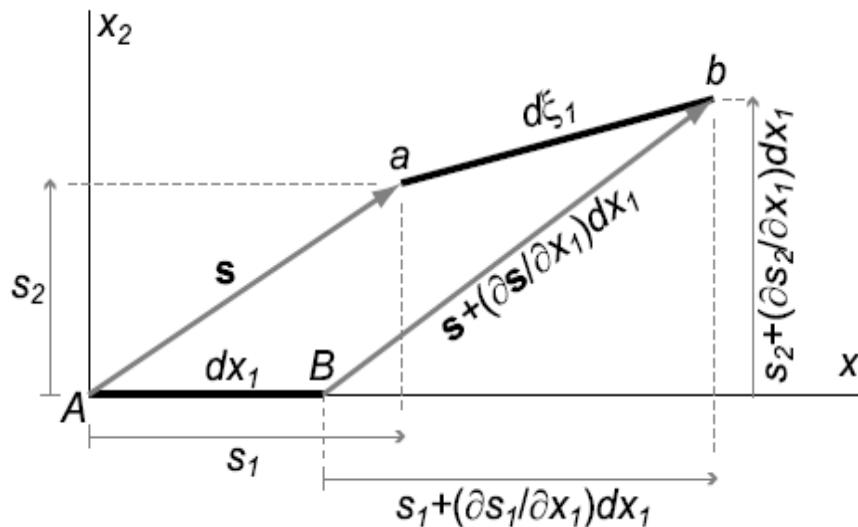
Deformazione pura

$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial X_j} - \frac{\partial s_j}{\partial X_i} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial X_j} + \frac{\partial s_j}{\partial X_i} \right)$$

Significato fisico delle componenti del tensore ε

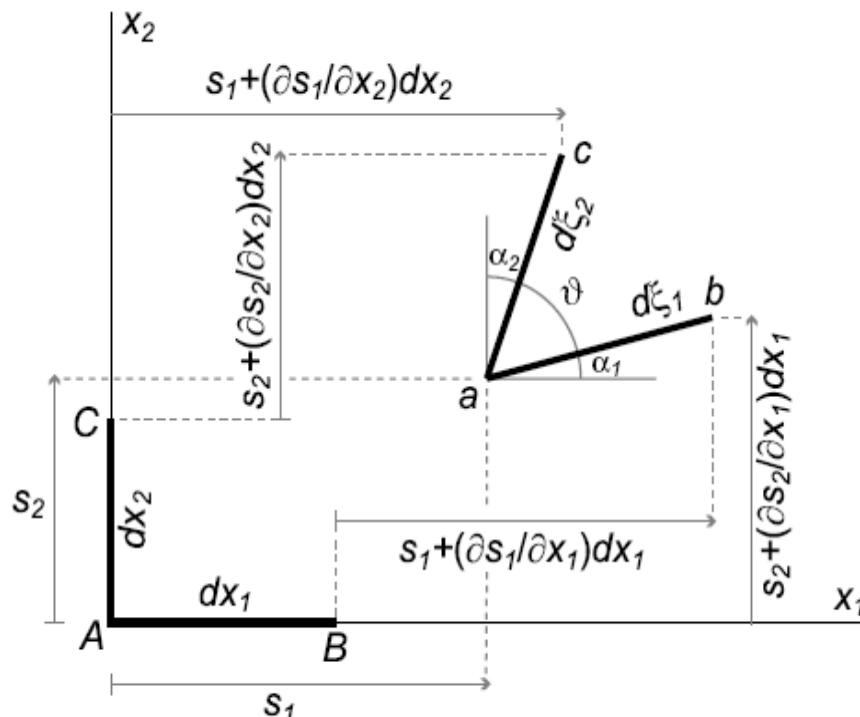
Nel piano $X_1 - X_2$ con s_0 non nullo



$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \sqrt{\left(dX_1 + s_1 + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} dX_1 - s_1\right)^2 + \left(s_2 + \frac{\partial s_2}{\partial X_1} dX_1 - s_2\right)^2} = dX_1 \sqrt{\left(1 + \frac{\partial s_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial X_1}\right)^2} \\ &= dX_1 \sqrt{1 + 2 \frac{\partial s_1}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial s_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial X_1}\right)^2} \approx dX_1 \left(1 + \frac{\partial s_1}{\partial X_1}\right) \rightarrow \frac{d\xi_1 - dX_1}{dX_1} = s_{1,1} = \varepsilon_{11} \end{aligned}$$

Misura la variazione di lunghezza di una fibra unitaria originariamente disposta come X_1 . Analoghe considerazioni valgono per le fibre dirette come gli assi X_2 e X_3 .

(cont.)



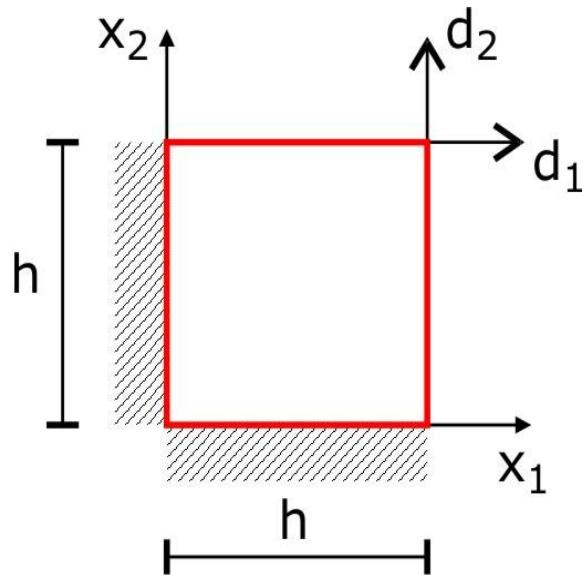
$$\alpha_1 \approx \tan(\alpha_1) = \frac{s_2 + (\partial s_2 / \partial X_1) dX_1 - s_2}{dX_1 + s_1 + (\partial s_1 / \partial X_1) dX_1 - s_1} = \frac{(\partial s_2 / \partial X_1) dX_1}{dX_1 (1 + \varepsilon_{11})} \approx \frac{(\partial s_2 / \partial X_1) dX_1}{dX_1} = \partial s_2 / \partial X_1$$

$$\alpha_2 \approx \tan(\alpha_2) = \frac{s_1 + (\partial s_1 / \partial X_2) dX_2 - s_1}{dX_2 + s_2 + (\partial s_2 / \partial X_2) dX_2 - s_2} = \frac{(\partial s_1 / \partial X_2) dX_2}{dX_2 (1 + \varepsilon_{22})} \approx \frac{(\partial s_1 / \partial x_2) dx_2}{dX_2} = \partial s_1 / \partial X_2$$

$$\gamma_{12} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial s_1}{\partial X_2} + \frac{\partial s_2}{\partial X_1}$$

$\varepsilon_{12} = \gamma_{12}/2$, metà della variazione di angolo tra fibre originariamente ortogonali e disposte secondo gli assi delle coordinate. Non necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2$ ma nel tensore $\boldsymbol{\varepsilon}$ si riporta in ε_{12} e ε_{21} la semisomma dei due angoli al fine di simmetrizzarla.

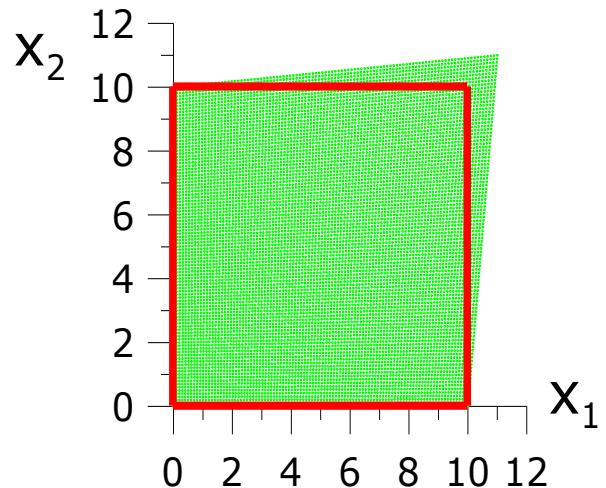
Esempio



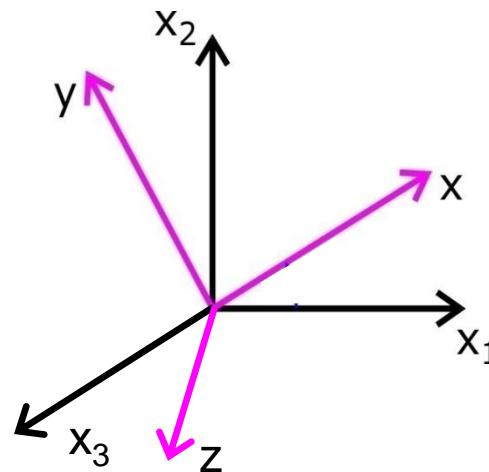
$$\begin{cases} s_1(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{h^2} d_1 \\ s_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{h^2} d_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{h^2} d_1 \\ \varepsilon_{22}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{h^2} d_2 \\ \gamma_{12}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{h^2} d_1 + \frac{x_2}{h^2} d_2 \end{cases}$$



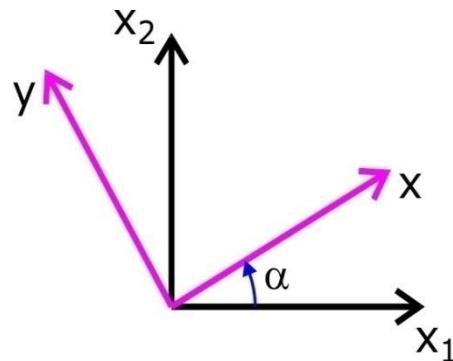
Rotazione del tensore di deformazione col sistema di riferimento (stessa regola vista per il tensore di sforzo)



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x1} & n_{x2} & n_{x3} \\ n_{y1} & n_{y2} & n_{y3} \\ n_{z1} & n_{z2} & n_{z3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_{x1} & n_{y1} & n_{z1} \\ n_{x2} & n_{y2} & n_{z2} \\ n_{x3} & n_{y3} & n_{z3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{(x,y,z)} = \mathbf{N}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(1,2,3)} \cdot \mathbf{N}}$$

Nel piano



$$\mathbf{n}_x = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos(90 - \alpha) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_y = \begin{Bmatrix} -\cos(90 - \alpha) \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

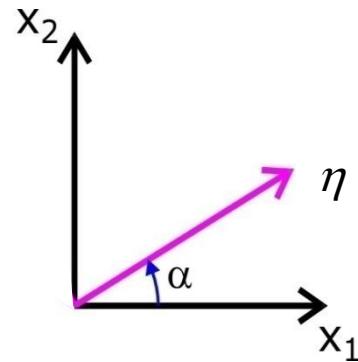
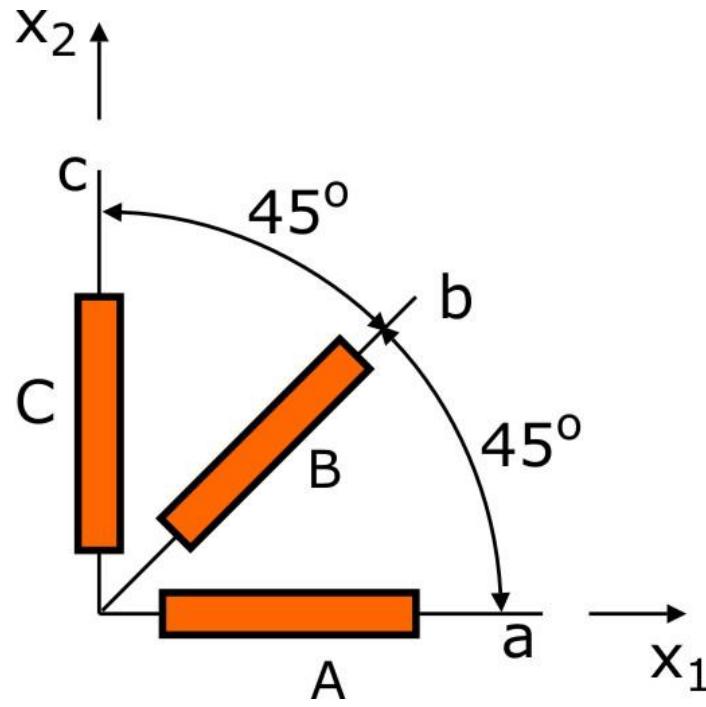
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{(x,y)} = \mathbf{N}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(1,2)} \cdot \mathbf{N}}$$

$$\varepsilon_{xx} = \mathbf{n}_x^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_x = \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_{yy} = \mathbf{n}_y^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_y = \varepsilon_{11} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_{xy} = \mathbf{n}_y^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_x = -(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Rosetta estensimetrica



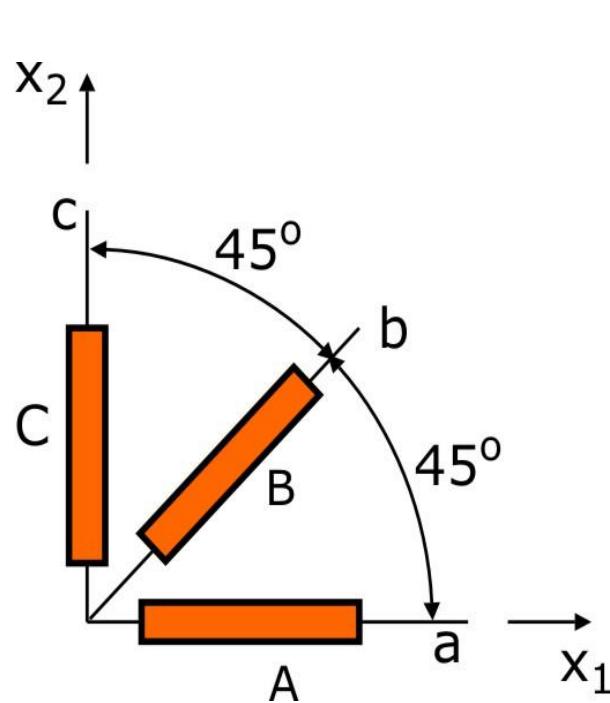
$$\varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \gamma_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

Esempio

$$\eta \equiv a \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{11} \cos^2(0^\circ) + \varepsilon_{22} \sin^2(0^\circ) + \gamma_{12} \sin(0^\circ) \cos(0^\circ) = \varepsilon_{11} \end{cases}$$

$$\eta \equiv c \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_c = \varepsilon_{11} \cos^2(90^\circ) + \varepsilon_{22} \sin^2(90^\circ) + \gamma_{12} \sin(90^\circ) \cos(0^\circ) = \varepsilon_{22} \end{cases}$$

$$\eta \equiv b \rightarrow \begin{cases} \varepsilon_b = \varepsilon_{11} \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_{22} \sin^2(45^\circ) + \gamma_{12} \sin(45^\circ) \cos(45^\circ) = \frac{\varepsilon_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_{22}}{2} + \frac{\gamma_{12}}{2} \end{cases}$$



$\varepsilon_{11} = \varepsilon_a$
 $\varepsilon_{22} = \varepsilon_c$
 $\gamma_{12} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$

Deformazioni principali

(Diagonalizzazione della matrice delle deformazioni, stessa equazione degli sforzi principali)

$$(\boldsymbol{\varepsilon} - e\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - e & \frac{1}{2}\gamma_{21} & \frac{1}{2}\gamma_{31} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} - e & \frac{1}{2}\gamma_{32} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} - e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{\alpha 1} \\ n_{\alpha 2} \\ n_{\alpha 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon} - e\mathbf{I}) = 0 \rightarrow e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ simmetrica \Rightarrow teorema algebra lineare
assicura l'esistenza di tre radici

autovalori:
 e_I, e_{II}, e_{III} deformazioni principali

autovettori:
 $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ direzioni principali

Deformazioni e direzioni principali non dipendono dal sistema di riferimento assunto. Ne consegue che i coefficienti dell'equazione devono essere indipendenti dal sistema di riferimento assunto:

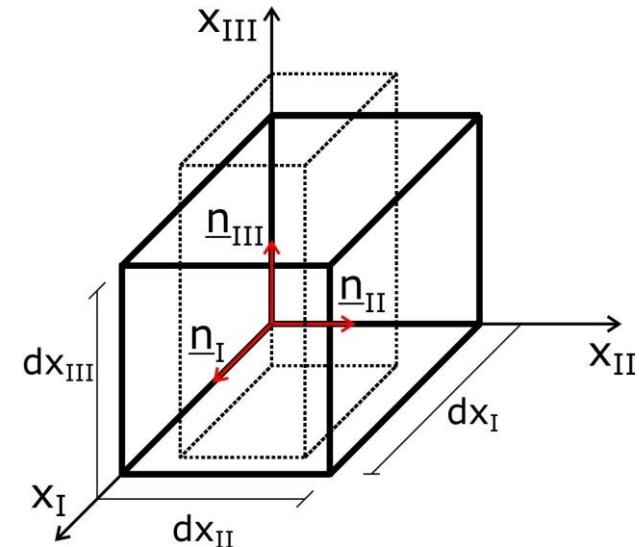
$$e^3 - I_1 e^2 + I_2 e - I_3 = 0$$

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \frac{1}{4}(\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{23}\gamma_{32} + \gamma_{13}\gamma_{31})$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Variazione di volume



$$dV_i = dX_I dX_{II} dX_{III}$$

$$dV_d = \left\{ dX_I (1 + e_I) \right\} \left\{ dX_{II} (1 + e_{II}) \right\} \left\{ dX_{III} (1 + e_{III}) \right\}$$

$$\frac{dV_d}{dV_i} = (1 + e_I)(1 + e_{II})(1 + e_{III}) = 1 + I_1 + I_2 + I_3$$

Variazione di volume indipendente
dal sistema di riferimento

Per piccole deformazioni

$$I_1 \gg I_2 \gg I_3$$



$$\frac{dV_d - dV_i}{dV_i} = I_1 = e_I + e_{II} + e_{III}$$

L'invariante lineare I_1 rappresenta la variazione di volume nell'intorno del punto

Deviatore di deformazione

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \rightarrow \vartheta = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \vartheta & \frac{1}{2}\gamma_{21} & \frac{1}{2}\gamma_{31} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} - \vartheta & \frac{1}{2}\gamma_{32} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} - \vartheta \end{bmatrix}$$

Ha invarianti lineare nullo $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\vartheta = 0$

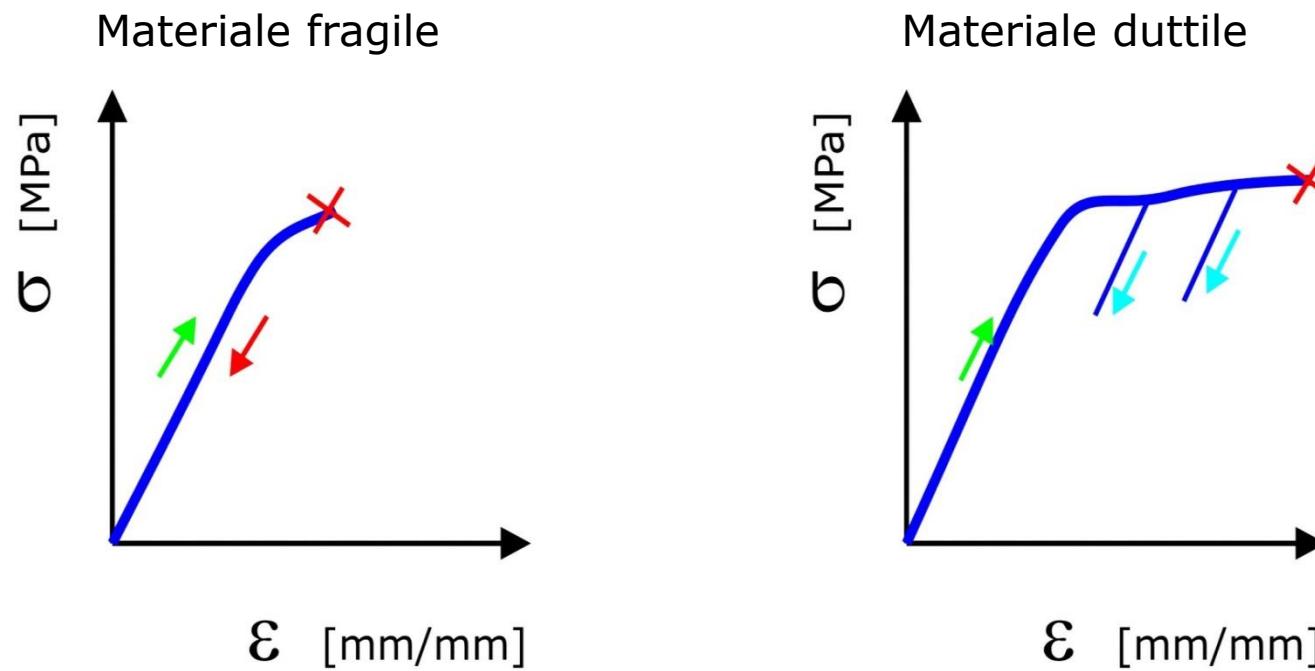
Variazione di volume nulla

Rappresenta perciò una deformazione a volume costante

LEGAME COSTITUTIVO

- Crea un legame matematico tra mondo statico (sforzi σ_{ij}) e mondo cinematico (deformazioni ε_{ij}).
- Si tratta di un modello fenomenologico, che coglie il comportamento del materiale alla macroscala. Non si tratta però di una semplice interpolazione di dati sperimentali, ma del loro inquadramento in un modello basato su certi postulati fisico/meccanici (teoria assiomatica) e dipendenti da un certo numero di parametri, il cui valore è desunto da opportune prove sperimentali.

COMPORTAMENTO DEL MATERIALE (LEGAME COSTITUTIVO)



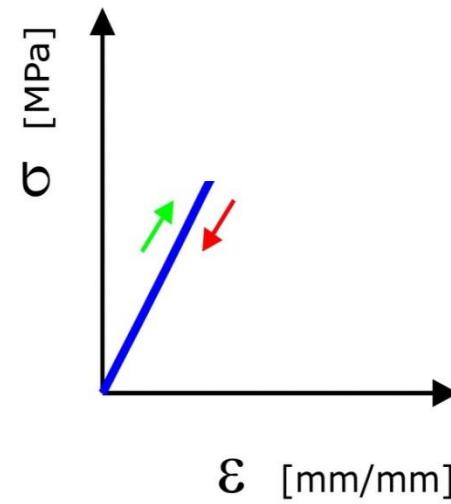
LEGAME COSTITUTIVO

Vi sono tre comportamenti fondamentali:

- **elastico**, il legame $\sigma_{ij}=f(\varepsilon_{ij})$ è reversibile, lo sforzo quindi dipende solo dal valore corrente della deformazione; la maggior parte dei materiali presenta inizialmente un comportamento di questo tipo.



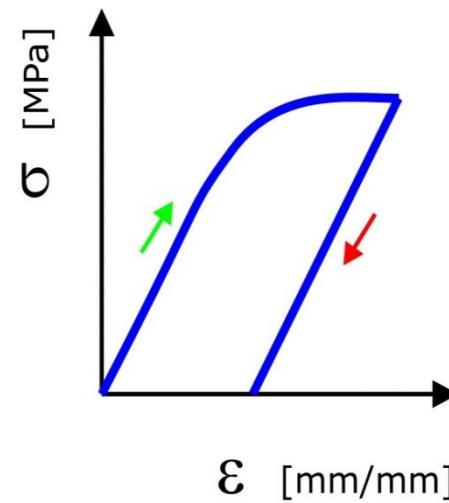
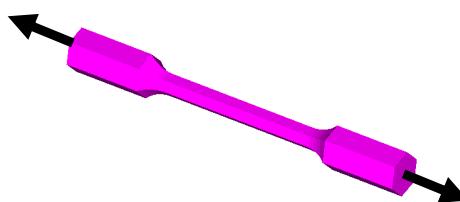
Comportamento elastico



LEGAME COSTITUTIVO

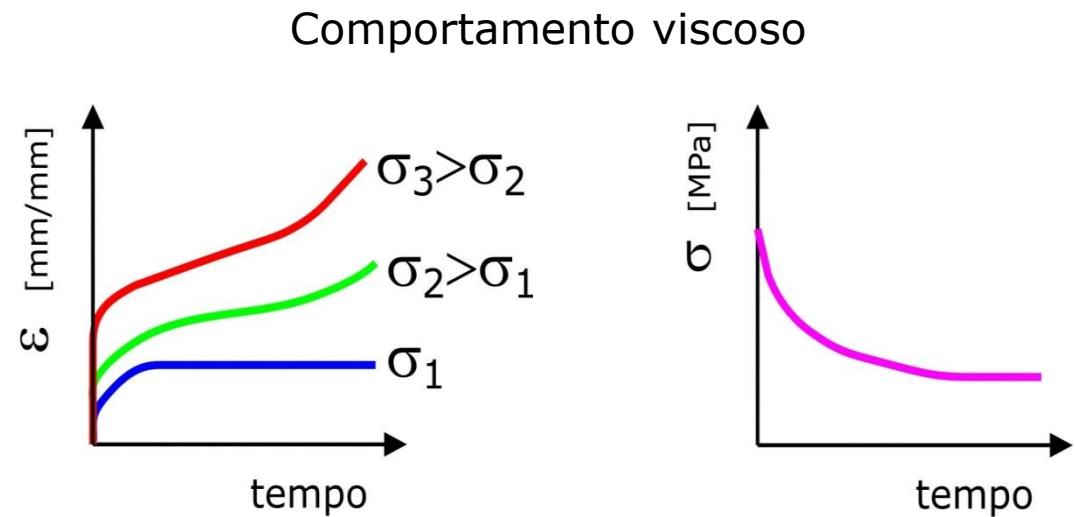
- **plastico**, la deformazione non è più totalmente reversibile, ma una parte di essa è irreversibile per effetto di una avvenuta modifica della microstruttura (esempio: movimenti delle dislocazioni nel reticolo cristallino nei metalli); lo sforzo dipende dal valore corrente della deformazione e dalla storia seguita per raggiungerla.

Comportamento elasto-plastico



LEGAME COSTITUTIVO

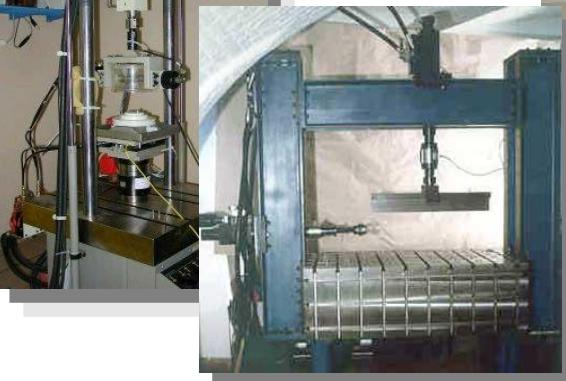
- **viscoso**, nei primi due comportamenti la deformazione consegue istantaneamente all'applicazione del carico; nei materiali viscosi sforzi e deformazioni variano nel tempo a condizioni esterne immutate; il creep è l'aumento della deformazione a sforzo costante (calcestruzzo); il rilassamento è la diminuzione di sforzo a deformazione costante.



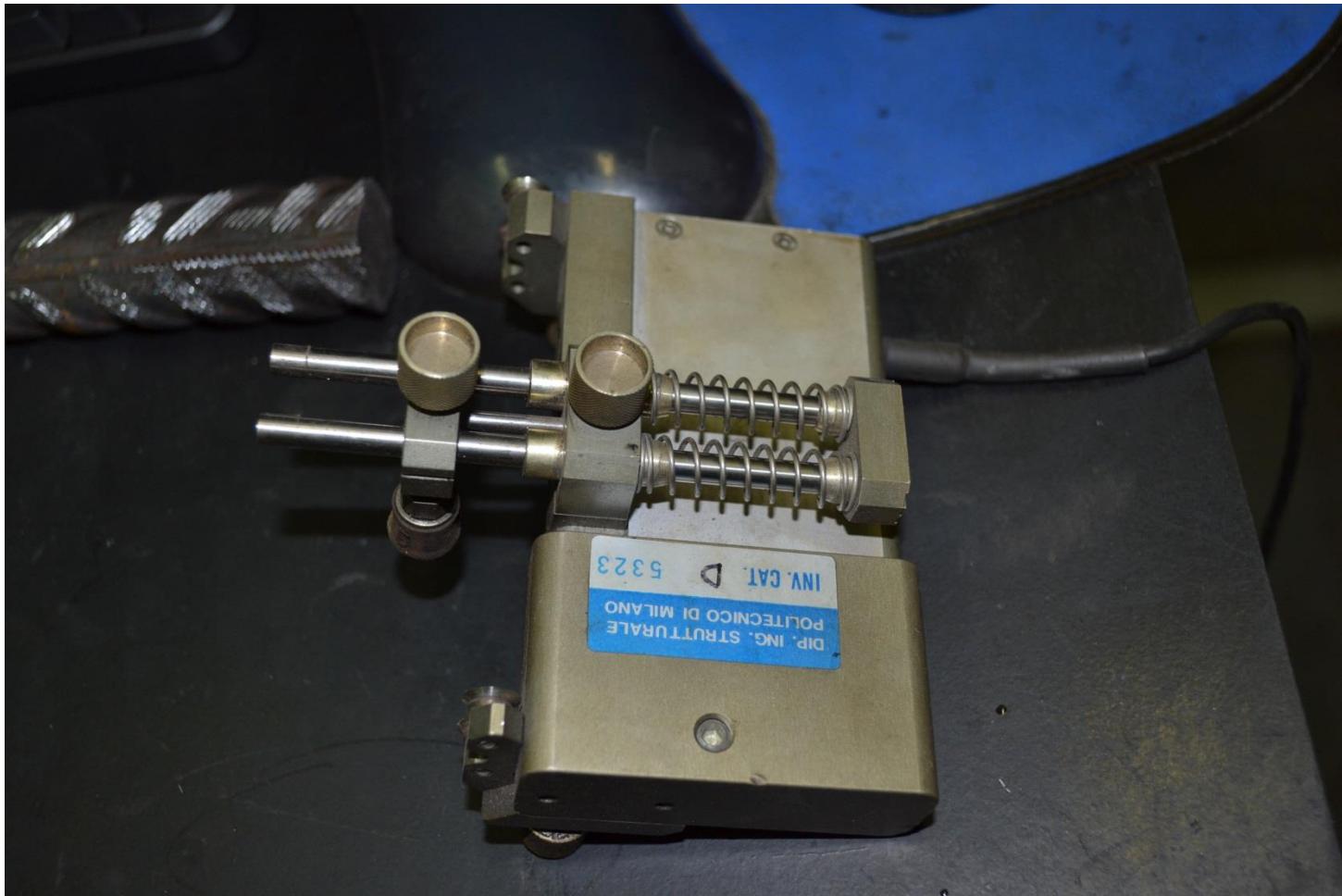
LE ATTREZZATURE DI PROVA

Macchine per prove meccaniche

Carico massimo	5000 kN compressione 3000 kN trazione
Carico minimo	0.01 N

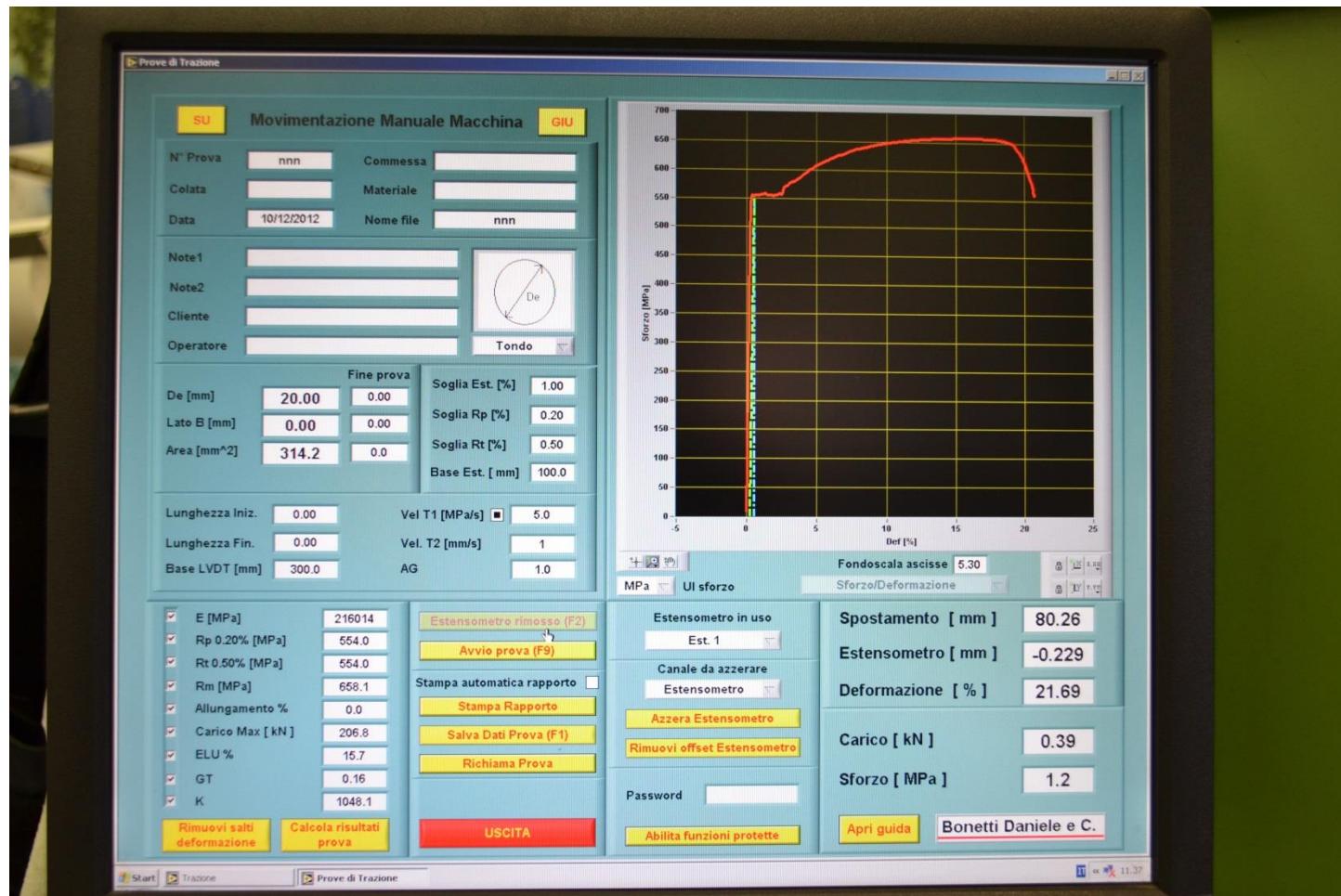


PROVE DI TRAZIONE SU MATERIALI METALLICI



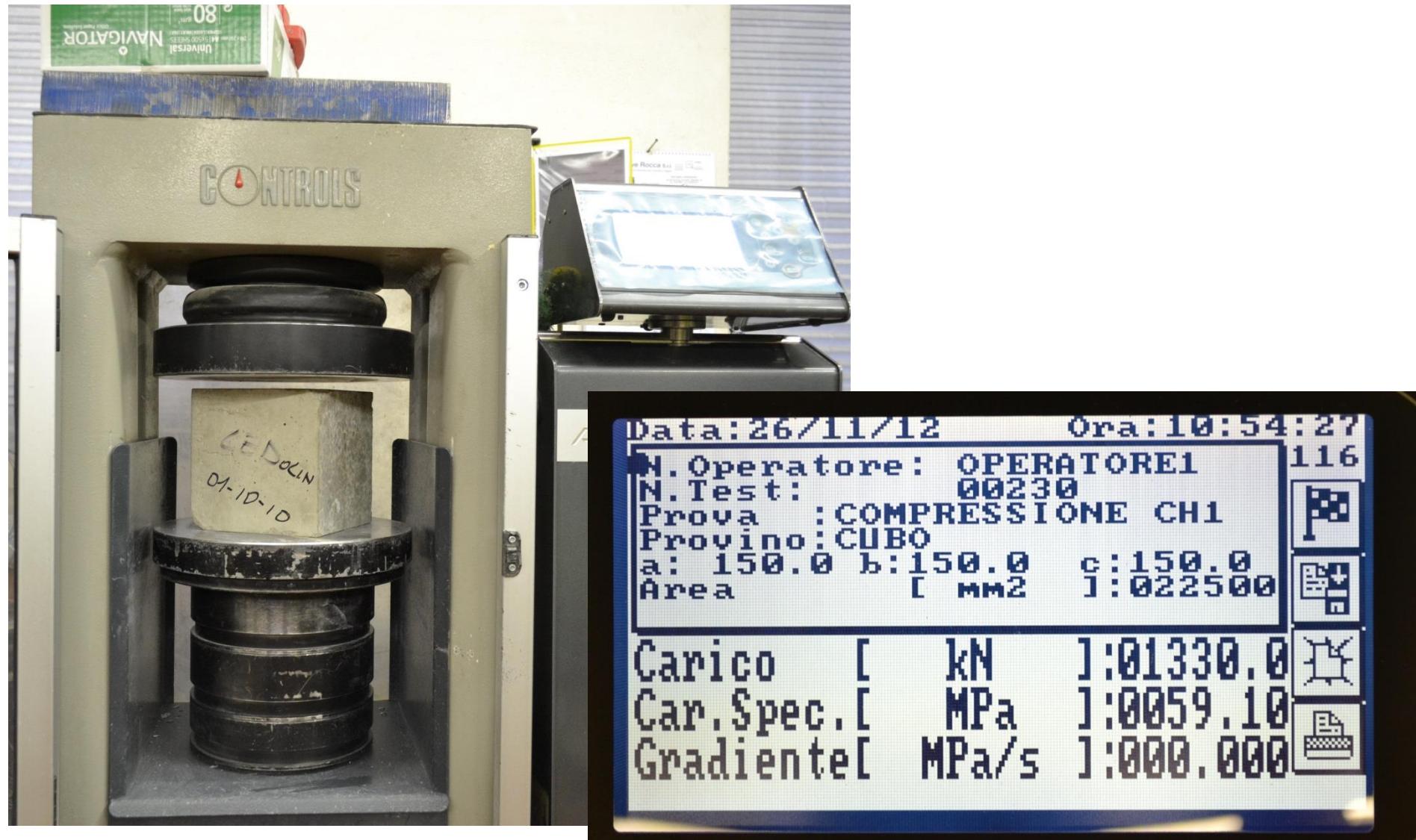
Estensometro

PROVE DI TRAZIONE SU MATERIALI METALLICI



Programma acquisizione dati prova

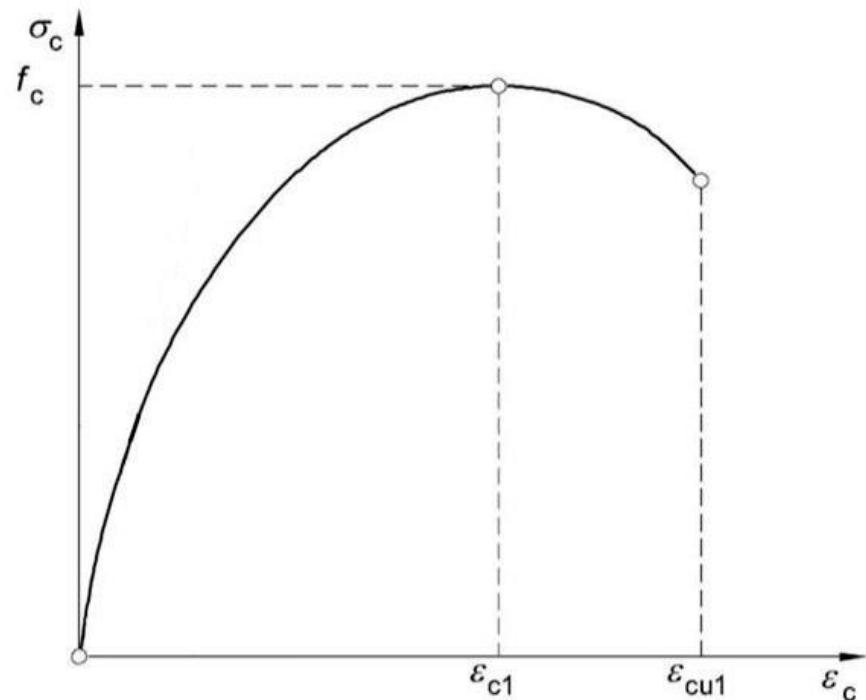
PROVE DI COMPRESSIONE SU CALCESTRUZZI



PROVE DI COMPRESSIONE SU CALCESTRUZZI



Legame sforzi-deformazioni



IL LEGAME ELASTICO LINEARE

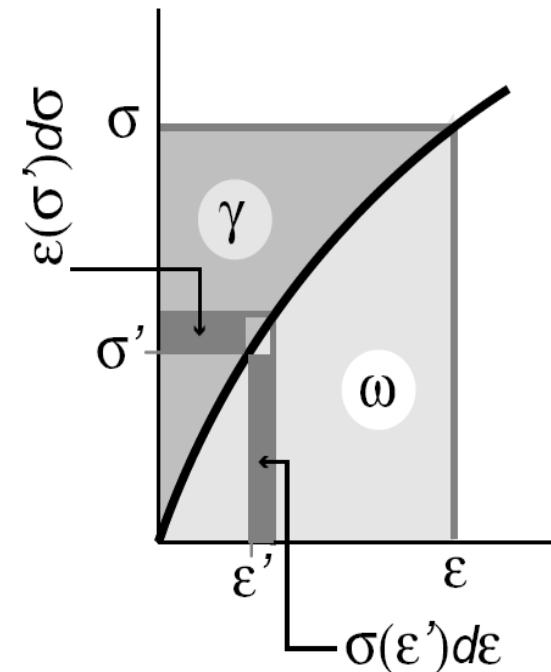
Aspetti energetici

Ipotesi: esistenza di un potenziale della deformazione (energia di deformazione ω). Il lavoro compiuto per deformare un solido è immagazzinato sotto forma di energia. Quando la causa è rimossa le deformazioni vengono recuperate e l'energia di deformazione viene rilasciata.

$$\omega(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} (\epsilon'_{kl}) d\epsilon_{ij} \text{ (Energia per unità di volume)}$$



$$\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_{ij}}$$



Si ipotizza un legame lineare tra sforzo e deformazione (81 costanti D_{ijkl}):

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= D_{12kl}\varepsilon_{kl} \\ &= \sum_k \sum_l D_{12kl}\varepsilon_{kl} \\ &= D_{1211}\varepsilon_{11} + D_{1212}\varepsilon_{12} + D_{1213}\varepsilon_{13} + \\ &\quad D_{1221}\varepsilon_{21} + D_{1222}\varepsilon_{22} + D_{1223}\varepsilon_{23} + \\ &\quad D_{1231}\varepsilon_{31} + D_{1232}\varepsilon_{32} + D_{1233}\varepsilon_{33}\end{aligned}$$

Simmetria del tensore di sforzo e deformazione (36 costanti)

$$D_{jikl} = D_{ijkl} \quad D_{ij\ell k} = D_{ijkl}$$

In forma matriciale:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccccc} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{array} \right]}_{\boldsymbol{D}} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{array} \right\}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \longrightarrow \quad \omega(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

In forma matriciale:

$$\omega(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \cdot [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31}] \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

ω dipende solo dal valore finale di deformazione e NON dalla storia di carico:
 $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$ è un differenziale esatto (21 costanti)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \rightarrow \quad D_{ijkl} = D_{klij}$$

In forma matriciale:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$$

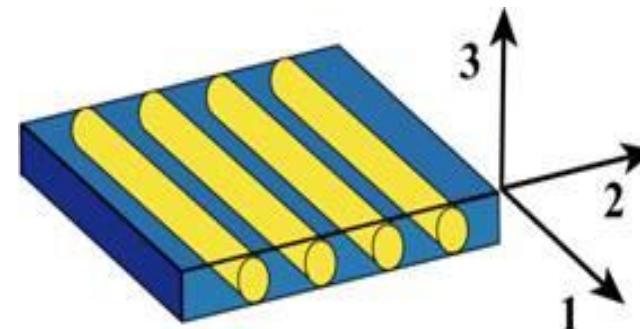
ISOTROPIA / ANISOTROPIA

Le proprietà del materiale sono associate ad una direzione o asse (rigidezza, resistenza, coefficiente di espansione termica).

Un materiale è isotropo se le proprietà si mantengono costanti lungo tutte le direzioni (∞ piani di simmetria).

Un materiale è anisotropo se le proprietà variano al variare della direzione o dell'orientamento degli assi.

Ad esempio i materiali compositi (fibrorinforzati) sono anisotropi, generalmente ortotropi, con tre piani mutuamente perpendicolari di simmetria delle proprietà del materiale. L'intersezione tra questi piani definisce tre assi mutuamente ortogonali detti assi principali del materiale.



IL LEGAME ELASTICO LINEARE ISOTROPO

Un materiale isotropo non presenta direzioni preferenziali di comportamento e il suo legame costitutivo dovrà risultare indipendente dal sistema di riferimento in cui le componenti di sforzo e deformazione sono rappresentate. Nel caso elastico, ciò implica che l'energia di deformazione dipenda dalla deformazione stessa solo attraverso i suoi invarianti

$$\omega(\varepsilon_{ij}) = \omega(I_1, I_2, I_3)$$

Gli invarianti I_1, I_2, I_3 sono funzioni rispettivamente lineare, quadratica e cubica delle componenti di deformazione. Nel caso lineare, ω è una forma quadratica e l'invariante cubico non può comparire. È facile verificare che l'unica possibile espressione è la seguente

$$\omega = aI_1^2 + bI_2$$

Le costanti a e b rappresentano i parametri costitutivi. Il legame elastico-lineare e isotropo è quindi governato da *due sole costanti indipendenti*. Un semplice cambio di parametri permette di scrivere:

$$\omega = \frac{1}{2} (\lambda + 2G) I_1^2 - 2GI_2$$

IL LEGAME ELASTICO LINEARE ISOTROPO

Essendo $\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_{ij}}$ il legame diretto diventa

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \omega}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = (\lambda + 2G)I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Ad esempio

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{11}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{11}} \\ &= (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - 2G(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= (\lambda + 2G) \cdot \varepsilon_{11} + \lambda \cdot \varepsilon_{22} + \lambda \cdot \varepsilon_{33}\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\}$$

Costanti ingegneristiche:

$$E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

Il legame diventa:

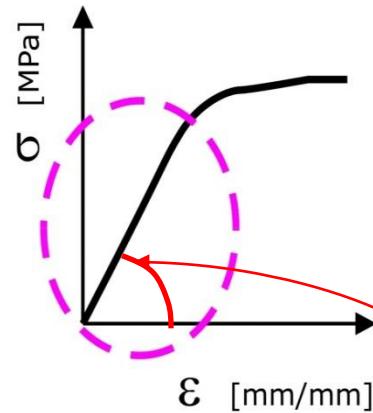
$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

In forma inversa il legame diventa :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{bmatrix}$$

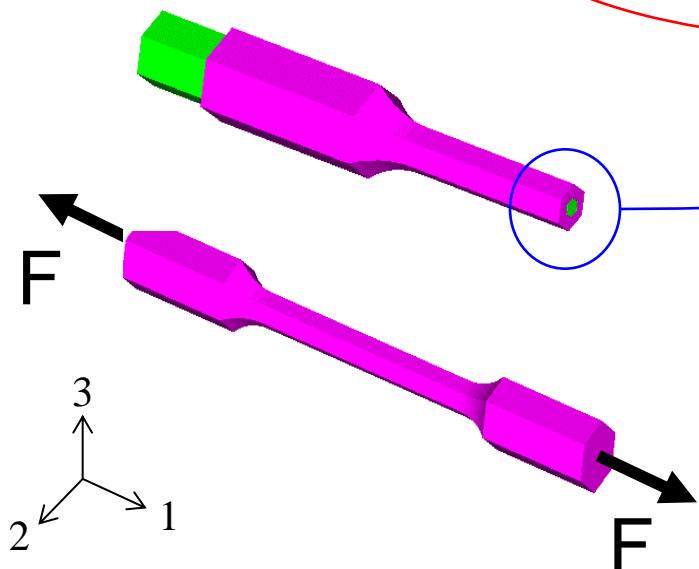
COSTANTI INGEGNERISTICHE



Legame elastico lineare isotropo

E = modulo elastico (di Young)

ν = coefficiente di contrazione traversale (di Poisson)



$$E = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} = -\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}$$

$$E > 0 \quad \frac{E}{3} < G \leq \frac{E}{2} \quad 0 \leq \nu < 0.5$$

MATERIALE ELASTICO - LINEARE

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix}$$

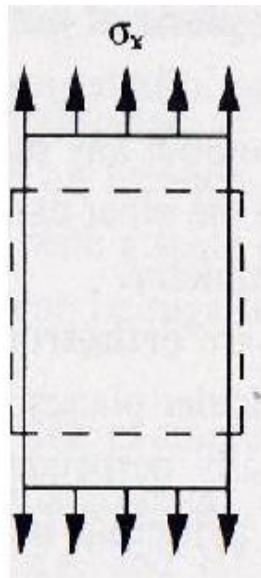
σ **ϵ**

\mathbf{D} è una matrice 6×6 simmetrica; quindi nel caso di materiale completamente anisotropo ho 21 costanti indipendenti.

- Se il comportamento del materiale è simmetrico rispetto a tre assi mutuamente ortogonali, si parla di *ortotropia* (9 costanti).
- Se il materiale presenta anche simmetria di rotazione attorno ad uno di questi assi, si dice *trasversamente isotropo* (5 costanti).
- Se il comportamento del materiale è simmetrico rispetto a qualunque asse, si parla allora di *isotropia* (2 costanti).

MATERIALE ISOTROPO

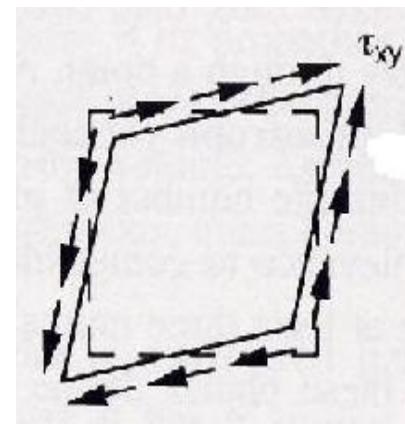
Sforzo normale



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Sforzo di taglio



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2\tau_{xy}(1+\nu)}{E}$$

- Nel caso di sforzi di puro taglio si generano deformazioni puramente angolari (un elemento cubico si trasforma in un rombo con lati uguali)
- Lo sforzo normale non genera deformazioni taglienti e viceversa.

Alcuni valori:

	E (GPa)	ν	G (GPa)
Acciaio ordinario	200-210	0.30	80
Leghe di alluminio	70-75	0.36	27
Rame	120	0.35	44
Calcestruzzo	20-30	0.12-0.14	9-13
Vetro	70	0.10	32
Gomma	0.009-0.1	≈ 0.5	0.003-0.03

Tabella 3.1: Valori indicativi delle costanti elastiche per alcuni materiali

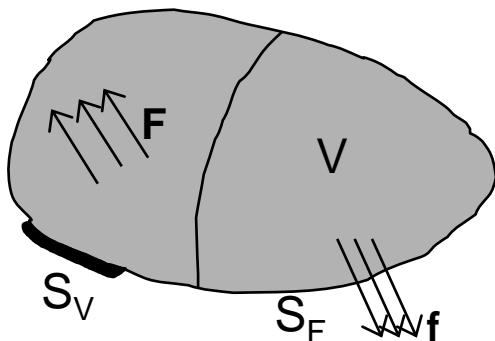
DEFORMAZIONI TERMICHE

Di particolare interesse è il caso di deformazioni termiche, prodotte da una variazione di temperatura $\Delta T(x)$ nel corpo. In un materiale isotropo, tale variazione non produce scorrimenti angolari. Le deformazioni termiche presentano solo componenti dirette, uguali in ogni direzione e legate a ΔT attraverso il coefficiente di dilatazione termica α del materiale, che definisce la deformazione conseguente a una variazione di temperatura unitaria (dimensionalmente, α è un numero per grado centigrado). Le deformazioni termiche si scrivono quindi

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z) + \alpha \Delta T$$
$$\gamma_{xy} = 2 \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy}$$

(e analoghe)

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO LINEARE 3D



Note:

- Geometria;
- Proprietà del materiale (E, ν);
- Condizioni al contorno:
in termini di spostamenti impressi

$$\bar{\mathbf{s}} = [\bar{s}_1(\mathbf{x}) \quad \bar{s}_2(\mathbf{x}) \quad \bar{s}_3(\mathbf{x})] \quad \text{su } S_V$$

e carichi applicati

$$\mathbf{F} = [F_1(\mathbf{x}) \quad F_2(\mathbf{x}) \quad F_3(\mathbf{x})] \quad \text{in } V$$

$$\mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad f_3(\mathbf{x})] \quad \text{su } S_F$$

Si vuole determinare:

- Vettore degli spostamenti (**3** campi incogniti)

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \quad s_2(\mathbf{x}) \quad s_3(\mathbf{x})]$$

- Tensore delle deformazioni (**6** campi incogniti)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = [\varepsilon_{11}(\mathbf{x}) \quad \varepsilon_{22}(\mathbf{x}) \quad \varepsilon_{33}(\mathbf{x}) \quad \varepsilon_{12}(\mathbf{x}) \quad \varepsilon_{13}(\mathbf{x}) \quad \varepsilon_{23}(\mathbf{x})]$$

- Tensore degli sforzi (**6** campi incogniti);

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = [\sigma_{11}(\mathbf{x}) \quad \sigma_{22}(\mathbf{x}) \quad \sigma_{33}(\mathbf{x}) \quad \tau_{12}(\mathbf{x}) \quad \tau_{13}(\mathbf{x}) \quad \tau_{23}(\mathbf{x})]$$

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO LINEARE 3D

Le equazioni governanti il problema sono:

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } V \quad [\sigma_{ij}n_i = f_j \quad \text{su } S_F]$$

3 equazioni di equilibrio + c.c.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial X_j} + \frac{\partial s_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{in } V \quad [s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } S_V]$$

6 equazioni di congruenza + c.c.

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{in } V$$

6 equazioni del legame costitutivo

NB: Si dimostra che la soluzione esiste ed è unica!
(Teorema di Kirchhoff)

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA ELASTICO LINEARE 3D

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \quad \text{in } V \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}n_1 + \tau_{21}n_2 + \tau_{31}n_3 = f_1 \\ \tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{32}n_3 = f_2 \\ \tau_{13}n_1 + \tau_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = f_3 \end{array} \right. \text{ su } S_F \quad \text{3 equazioni di equilibrio + c.c.}$$

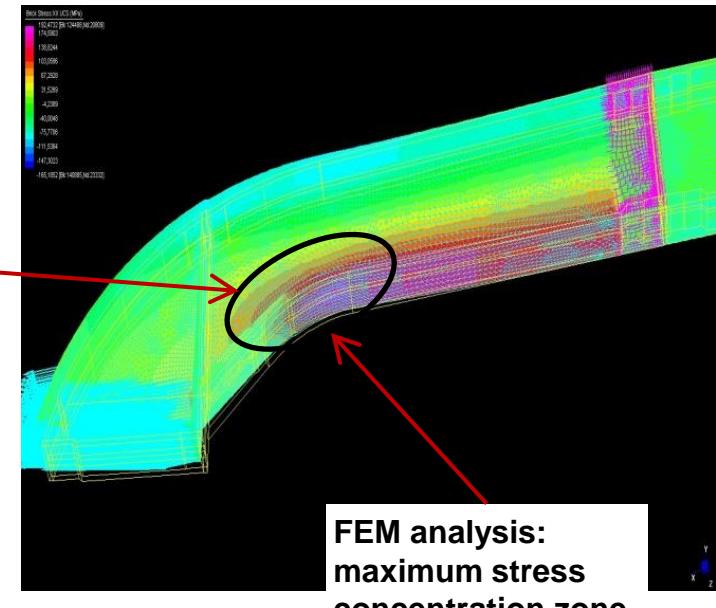
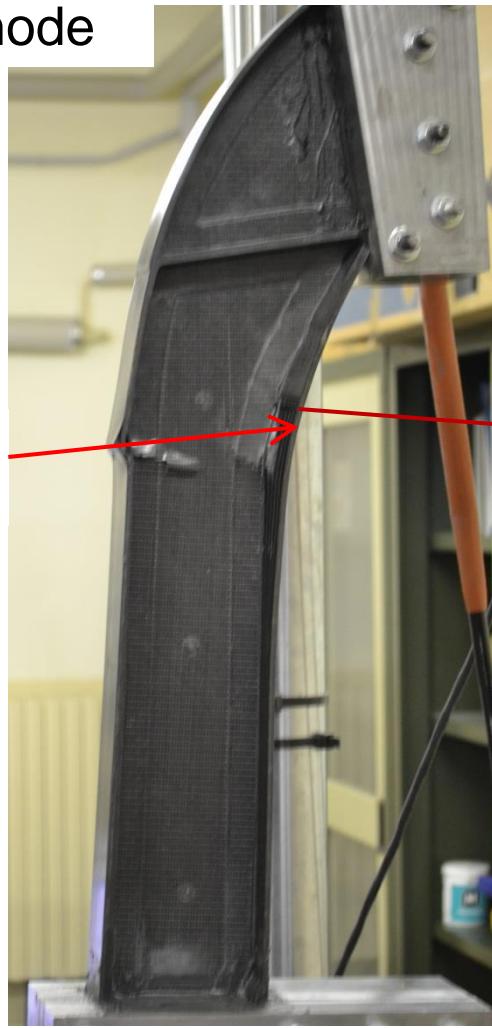
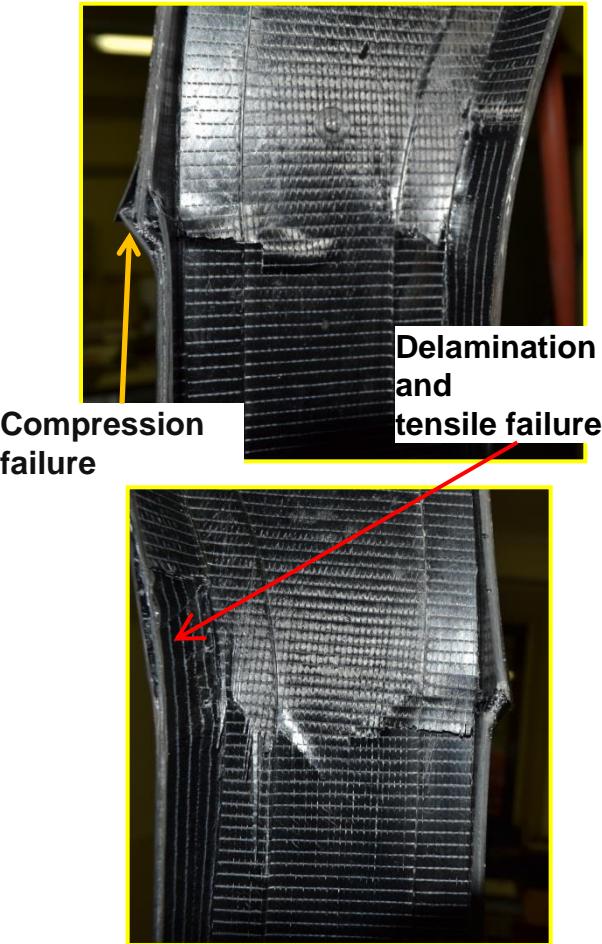
$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \\ \epsilon_{22} = \frac{\partial s_2}{\partial x_2} \\ \epsilon_{33} = \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \\ \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} \right) \quad \text{in } V \\ \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_1} \right) \\ \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} \right) \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} s_1 = \bar{s}_1 \\ s_2 = \bar{s}_2 \\ s_3 = \bar{s}_3 \end{array} \right. \text{ su } S_V \quad \text{6 equazioni di congruenza + c.c.}$$

$$\left[\begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{array} \right] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left[\begin{array}{cccccc} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{array} \right] \quad \text{6 equazioni del legame costitutivo}$$

ESEMPI

Experimental and numerical study of carbon composite components for aeronautical applications

Failure mode



IL PROBLEMA PIANO

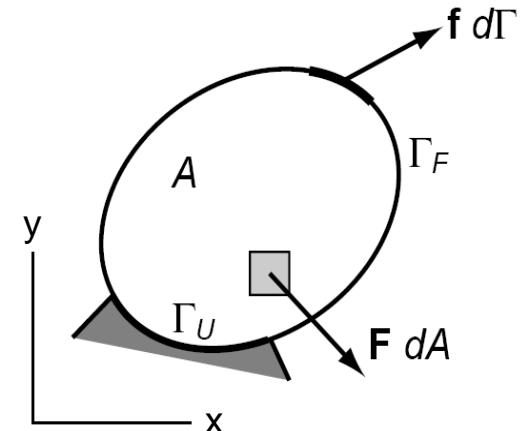


Figura 4.3:

Si consideri un solido di forma cilindrica. La sua sezione trasversale, di area A e contorno Γ , sia posta nel piano (x, y) (Fig. 4.3) e le azioni esterne nel piano siano indipendenti da z . In notazione matriciale, si può quindi scrivere

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad \text{in } A \qquad \mathbf{f}(x, y) = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad \text{su } \Gamma_F \qquad \bar{\mathbf{s}}(x, y) = \begin{Bmatrix} \bar{s}_x \\ \bar{s}_y \end{Bmatrix} \quad \text{su } \Gamma_U \quad (4.18a)$$

Si supponga inoltre che forze di volume e di supericie non abbiano componenti secondo z

$$F_z = 0 \quad \text{in } A \qquad f_z = 0 \quad \text{su } \Gamma_F \quad (4.18b)$$

e che le condizioni di congruenza su Γ_U non coinvolgano la componente di spostamento s_z . Per semplicità, non viene in un primo tempo considerata la presenza di deformazioni anelastiche.

É

possibile semplificare il problema riconducendolo alla sola sezione trasversale. Ci si propone, in altre parole, di formulare il problema elastico in termini delle sole variabili nel piano,

che si ipotizzano indipendenti da z e si riconducono a otto sole componenti di spostamento, deformazione e sforzo. Precisamente

$$\mathbf{s}(x, y) = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Il problema si suppone governato solo dalle seguenti equazioni di equilibrio indefinite e al contorno

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + F_y = 0 \quad \text{in } A \quad (4.20a)$$

$$\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = f_x \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = f_y \quad \text{su } \Gamma_F \quad (4.20b)$$

dalle relazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial s_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \quad \text{in } A \quad (4.21a)$$

$$s_x = \bar{s}_x \quad s_y = \bar{s}_y \quad \text{su } \Gamma_U \quad (4.21b)$$

nonché dal legame elastico-lineare, esprimibile attraverso relazioni algebriche del tipo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} \quad (4.22)$$

E' quindi necessario esprimere il legame costitutivo con solo variabili nel piano:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{d} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

Anche se per ipotesi le azioni esterne sono tutte contenute nel piano, le componenti sia del tensore di sforzo che di deformazione fuori dal piano possono essere diverse da zero e quindi l'espressione delle matrici \mathbf{d} (di dimensione 3x3) cambia in funzione di certe ipotesi che vediamo nel seguito.

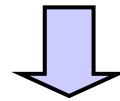
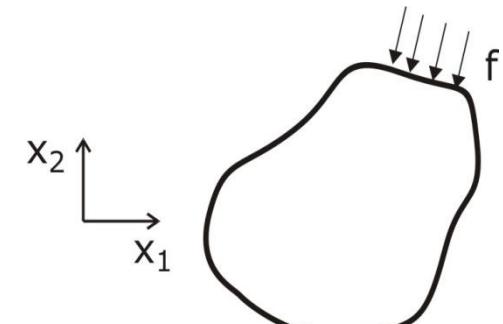
Il problema piano nelle deformazioni

Ipotesi (valida per solidi infinitamente lunghi):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cancel{\varepsilon_{13}} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cancel{\varepsilon_{23}} \\ sim. & sim. & \cancel{\varepsilon_{33}} \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ sim. & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & (1-v) & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & (1-v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22}] \\ \sigma_{22} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} [v\varepsilon_{11} + (1-v)\varepsilon_{22}] \\ \sigma_{33} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} [v\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22}] \\ \tau_{12} = G\gamma_{12} \end{cases}$$

Stato di sforzo non piano

Da cui:

$$\mathbf{d} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

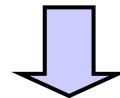
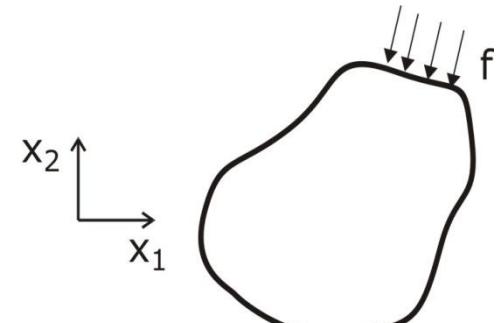
Il problema piano negli sforzi

Ipotesi (approssimativamente valida per piccoli spessori):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \cancel{\tau_{13}} \\ sim. & \sigma_{22} & \cancel{\tau_{23}} \\ \cancel{\sigma_{33}} & & \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ sim. & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - v\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [-v\sigma_{11} + \sigma_{22}] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [-v\sigma_{11} - v\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G} \tau_{12} \end{cases}$$

Stato di deformazione
non piano

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \tau_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} (1-v) & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & (1-v) & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & (1-v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per definire **d** serve un po' di algebra:

$$0 = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} [v\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22} + (1-v)\varepsilon_{33}] \rightarrow \varepsilon_{33} = -\frac{v}{1-v} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Da cui, nell'ottica di formulare il problema con solo variabili nel piano:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)} ((1-v)\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22} + v\varepsilon_{33}) = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left((1-v)\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22} - \frac{v^2}{1-v} [\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}] \right) \\ &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left(\varepsilon_{11} - v\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22} - \frac{v^2\varepsilon_{11} + v^2\varepsilon_{22}}{1-v} \right) \\ &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left(\frac{\varepsilon_{11} - v\varepsilon_{11} - v\varepsilon_{11} + v^2\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22} - v^2\varepsilon_{22} - v^2\varepsilon_{11} - v^2\varepsilon_{22}}{1-v} \right) \\ &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left(\frac{\varepsilon_{11} - 2v\varepsilon_{11} - 2v^2\varepsilon_{22} + v\varepsilon_{22}}{1-v} \right) = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \left(\frac{\varepsilon_{11}(1-2v) + v\varepsilon_{22}(1-2v)}{1-v} \right) \\ &= \frac{E}{(1+v)(1-v)} (\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22}) \\ &= \frac{E}{1-v^2} (\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22}) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu \varepsilon_{11} + (1-\nu) \varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{33}) \\ &= \dots\dots \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\end{aligned}$$

Da cui:

$$\mathbf{d} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI - Parte 1

Data una statica equilibrata: sforzi σ_{ij} , forze di volume F_j e forze di superficie f_j tali che:

$$\sigma_{ij,i} + F_j = 0 \quad \text{in } V \quad [\sigma_{ij}n_i = f_j \quad \text{su } S_F]$$

Data una cinematica congruente: deformazioni ε_{ij} e spostamenti s_i , tali che:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial X_j} + \frac{\partial s_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{in } V \quad [s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } S_V]$$

Si può dimostrare che vale la seguente identità

$$\underbrace{\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv}_{L_i} = \underbrace{\int_V F_j s_j dv}_{L_e} + \underbrace{\int_{S_F} f_j s_j ds}_{L_e}$$

Segue la dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV = \\
&= \int_V \frac{1}{2} [\sigma_{11} (s_{1,1} + s_{1,1}) + \sigma_{22} (s_{2,2} + s_{2,2}) + \sigma_{33} (s_{3,3} + s_{3,3}) + \sigma_{12} (s_{1,2} + s_{2,1}) + \sigma_{21} (s_{2,1} + s_{1,2}) + \\
&\quad \sigma_{13} (s_{1,3} + s_{3,1}) + \sigma_{31} (s_{3,1} + s_{1,3}) + \sigma_{32} (s_{3,2} + s_{2,3}) + \sigma_{23} (s_{2,3} + s_{3,2})] dV \\
&= \int_V \frac{1}{2} [\sigma_{11} (2s_{1,1}) + \sigma_{22} (2s_{2,2}) + \sigma_{33} (2s_{3,3}) + \\
&\quad \sigma_{12} (2s_{1,2} + 2s_{2,1}) + \sigma_{13} (2s_{1,3} + 2s_{3,1}) + \sigma_{32} (2s_{3,2} + 2s_{2,3})] dV = \\
&= \int_V [\sigma_{11} (s_{1,1}) + \sigma_{22} (s_{2,2}) + \sigma_{33} (s_{3,3}) + \\
&\quad \sigma_{12} (s_{1,2} + s_{2,1}) + \sigma_{13} (s_{1,3} + s_{3,1}) + \sigma_{32} (s_{3,2} + s_{2,3})] dV \\
&= \int_V [\sigma_{11} s_{1,1} + \sigma_{22} s_{2,2} + \sigma_{33} s_{3,3} + \sigma_{21} s_{1,2} + \sigma_{12} s_{2,1} + \sigma_{31} s_{1,3} + \sigma_{13} s_{3,1} + \sigma_{23} s_{3,2} + \sigma_{32} s_{2,3}] dV \\
&= \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dV
\end{aligned}$$

Da cui:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dV$$

Posto $g_i = \sigma_{ij} s_j$, applico il teorema di Green ($\int_V g_{i,i} dv = \int_{S_F} g_i n_i ds$) e segue che:

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\sigma_{ij} s_j)_i dv = \\
 &= \int_V (\sigma_{i1} s_1 + \sigma_{i2} s_2 + \sigma_{i3} s_3)_i dv = \int_V \left(\underbrace{\sigma_{i1,i} s_1}_{\text{red dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i1} s_{1,i}}_{\text{blue dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i2,i} s_2}_{\text{red dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i2} s_{2,i}}_{\text{blue dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i3,i} s_3}_{\text{red dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i3} s_{3,i}}_{\text{blue dashed circle}} \right) dv = \\
 &= \int_V \left(\overbrace{\sigma_{11,1} s_1 + \sigma_{21,2} s_1 + \sigma_{31,3} s_1}^{\text{red bracket}} + \sigma_{i1} s_{1,i} + \sigma_{i2,i} s_2 + \sigma_{i2} s_{2,i} + \sigma_{i3,i} s_3 + \sigma_{i3} s_{3,i} \right) dv = \\
 &= \int_V (\sigma_{ij,i} s_j + \sigma_{ij} s_{j,i}) dv
 \end{aligned}$$

ma per il teorema di Green :

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\sigma_{ij} s_j)_i dv = \\
 &= \int_S \sigma_{ij} s_j n_i ds = \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_V (\sigma_{ij,i} s_j + \sigma_{ij} s_{j,i}) dv = \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds \rightarrow \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dv = - \int_V \sigma_{ij,i} s_j dv + \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds$$

da cui :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = - \int_V \sigma_{ij,i} s_j dv + \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds$$

Per l'ipotesi di forze e sforzi equilibrati ho:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,i} + F_j = 0 & \text{in } V \\ \sigma_{ij} n_i = f_j & \text{su } S_F \end{cases}$$

Da cui :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V F_j s_j dv + \int_{S_F} f_j s_j ds$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI - Parte 2

Data una certa statica: sforzi σ_{ij} , forze di volume F_j e forze di superficie f_j ; si dimostra che imporre la seguente equazione:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_V F_j s_j dv + \int_{S_F} f_j s_j ds$$

\forall cinematica congruente, cioè deformazioni ε_{ij} e spostamenti s_i , tali che:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_i}{\partial X_j} + \frac{\partial s_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{in } V \quad [s_i = 0 \quad \text{su } S_V]$$

equivale ad imporre le equazioni di equilibrio:

Segue la dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (s_{i,j} + s_{j,i}) dV = \\
&= \int_V \frac{1}{2} [\sigma_{11}(s_{1,1} + s_{1,1}) + \sigma_{22}(s_{2,2} + s_{2,2}) + \sigma_{33}(s_{3,3} + s_{3,3}) + \sigma_{12}(s_{1,2} + s_{2,1}) + \sigma_{21}(s_{2,1} + s_{1,2}) + \\
&\quad \sigma_{13}(s_{1,3} + s_{3,1}) + \sigma_{31}(s_{3,1} + s_{1,3}) + \sigma_{32}(s_{3,2} + s_{2,3}) + \sigma_{23}(s_{2,3} + s_{3,2})] dV \\
&= \int_V \frac{1}{2} [\sigma_{11}(2s_{1,1}) + \sigma_{22}(2s_{2,2}) + \sigma_{33}(2s_{3,3}) + \\
&\quad \sigma_{12}(2s_{1,2} + 2s_{2,1}) + \sigma_{13}(2s_{1,3} + 2s_{3,1}) + \sigma_{32}(2s_{3,2} + 2s_{2,3})] dV = \\
&= \int_V [\sigma_{11}(s_{1,1}) + \sigma_{22}(s_{2,2}) + \sigma_{33}(s_{3,3}) + \\
&\quad \sigma_{12}(s_{1,2} + s_{2,1}) + \sigma_{13}(s_{1,3} + s_{3,1}) + \sigma_{32}(s_{3,2} + s_{2,3})] dV \\
&= \int_V [\sigma_{11}s_{1,1} + \sigma_{22}s_{2,2} + \sigma_{33}s_{3,3} + \sigma_{21}s_{1,2} + \sigma_{12}s_{2,1} + \sigma_{31}s_{1,3} + \sigma_{13}s_{3,1} + \sigma_{23}s_{3,2} + \sigma_{32}s_{2,3}] dV \\
&= \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dV
\end{aligned}$$

Da cui:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dV$$

Posto $g_i = \sigma_{ij} s_j$, applico il teorema di Green ($\int_V g_{i,i} dv = \int_{S_F} g_i n_i ds$) e segue che:

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\sigma_{ij} s_j)_i dv = \\
 &= \int_V (\sigma_{i1} s_1 + \sigma_{i2} s_2 + \sigma_{i3} s_3)_i dv = \int_V \left(\underbrace{\sigma_{i1,i} s_1}_{\text{red circle}} + \underbrace{\sigma_{i1} s_{1,i}}_{\text{blue dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i2,i} s_2}_{\text{red circle}} + \underbrace{\sigma_{i2} s_{2,i}}_{\text{blue dashed circle}} + \underbrace{\sigma_{i3,i} s_3}_{\text{red circle}} + \underbrace{\sigma_{i3} s_{3,i}}_{\text{blue dashed circle}} \right) dv = \\
 &= \int_V \left(\overbrace{\sigma_{11,1} s_1 + \sigma_{21,2} s_1 + \sigma_{31,3} s_1}^{\text{red bracket}} + \sigma_{i1} s_{1,i} + \sigma_{i2,i} s_2 + \sigma_{i2} s_{2,i} + \sigma_{i3,i} s_3 + \sigma_{i3} s_{3,i} \right) dv = \\
 &= \int_V (\sigma_{ij,i} s_j + \sigma_{ij} s_{j,i}) dv
 \end{aligned}$$

ma per il teorema di Green :

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\sigma_{ij} s_j)_i dv = \\
 &= \int_S \sigma_{ij} s_j n_i ds = \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_V (\sigma_{ij,i} s_j + \sigma_{ij} s_{j,i}) dv = \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds \rightarrow \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dv = - \int_V \sigma_{ij,i} s_j dv + \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds$$

da cui :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} s_{j,i} dV = - \int_V \sigma_{ij,i} s_j dv + \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds$$

Sostituisco nell'equazione iniziale e trovo :

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv = - \int_V \sigma_{ij,i} s_j dv + \int_{S_F} \sigma_{ij} s_j n_i ds = \int_V F_j s_j dv + \int_{S_F} f_j s_j ds \quad \forall s_j$$

da cui raccogliendo trovo:

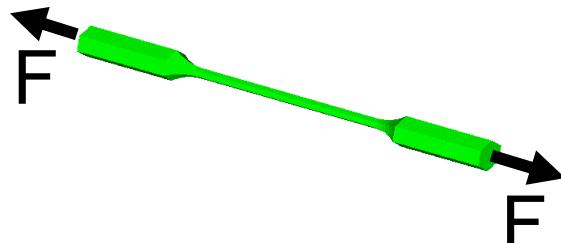
$$\int_V (\sigma_{ij,i} + F_j) s_j dV + \int_{S_F} (f_j - \sigma_{ij} n_i) s_j dS = 0 \quad \forall s_j$$

da cui :

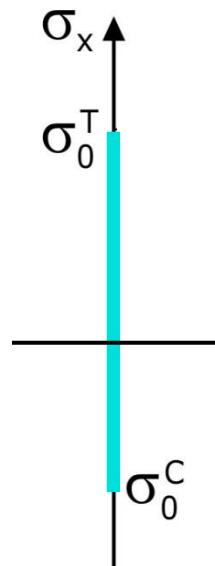
$$\begin{cases} \sigma_{ij,i} + F_j = 0 \\ \sigma_{ij} n_i = f_j \end{cases}$$

LA SICUREZZA STRUTTURALE: VERIFICHE DI RESISTENZA

Sforzo interno indotto dalle forze esterne



Resistenza del materiale



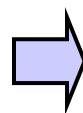
Intervallo di sicurezza
r 1 componente di sforzo normale



$$\sigma_0^C \leq \sigma_x \leq \sigma_0^T$$

$$(\sigma_x = F/A)$$

Per uno stato di sforzo tridimensionale (6 componenti), come verificare che esso sia tale da mantenere il materiale in sicurezza?



Grandezza Indice di Pericolo
(G.I.P.)

Misura scalare dello stato di sforzo che indica quanto uno stato di sforzo è distante dall'esaurimento della resistenza del materiale

LA SICUREZZA STRUTTURALE: VERIFICHE DI RESISTENZA

Criterio di resistenza per materiali fragili

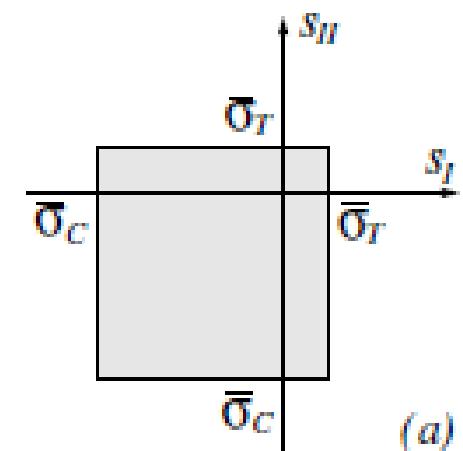
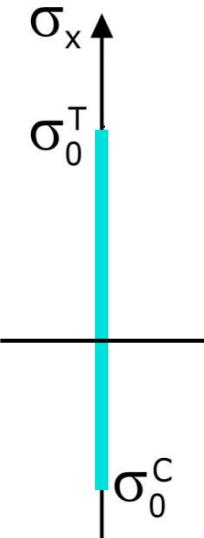
Criterio di Rankine - Galileo - Navier

G.I.P. = sforzo normale massimo e minimo

$$\sigma_0^C \leq s_\alpha \leq \sigma_0^T \quad \alpha = I, II, III$$

Stato piano di sforzo ($s_{III}=0$)

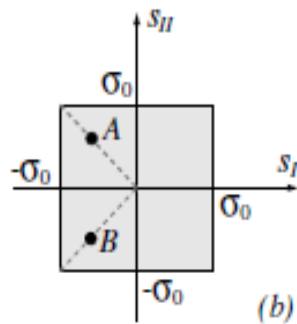
$$\begin{cases} \sigma_0^C \leq s_I \leq \sigma_0^T \\ \sigma_0^C \leq s_{II} \leq \sigma_0^T \end{cases}$$



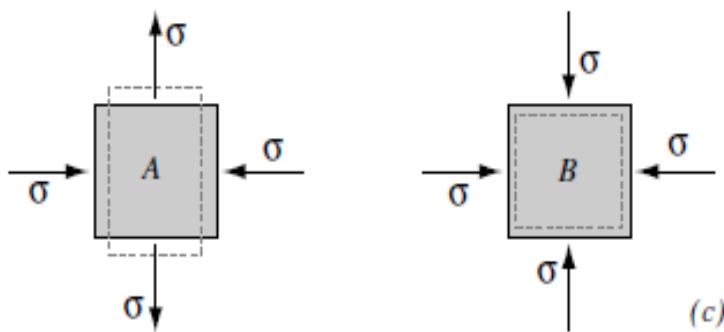
Attendibile per materiali (es. calcestruzzo) tali che: $\sigma_0^T \ll \sigma_0^C$

Criterio di Rankine- Galileo - Navier

$$\text{se } \sigma_0^T = -\sigma_0^C$$



A e B ugualmente sicuri

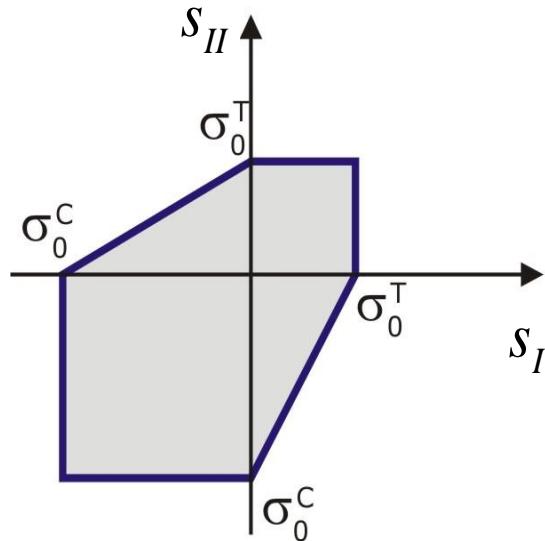


B intuitivamente più sicuro;
in A deformazioni si sommano

LA SICUREZZA STRUTTURALE: VERIFICHE DI RESISTENZA

Criterio di Mohr

Criterio di resistenza per materiali fragili



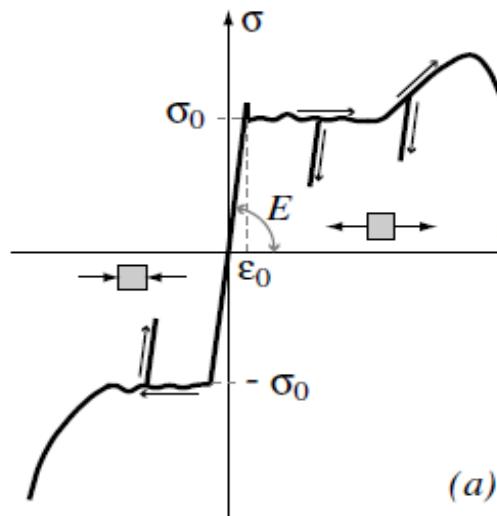
LA SICUREZZA STRUTTURALE: VERIFICHE DI RESISTENZA

Criteri di snervamento per metalli

Limite di sicurezza identificato con lo snervamento del materiale metallico, limite oltre al quale si ha lo sviluppo di deformazioni permanenti (plastiche).

Proprietà comuni a molti materiali metallici:

- Limite di snervamento uguale a trazione e compressione;
- Limite di snervamento non cambia con l'aggiunta di una pressione idrostatica.



Stato di sforzo: componente idrostatica e deviatorica

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + S_{ij}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

componente idrostatica di sforzo → Pressione Idrostatica

componente deviatorica di sforzo → Deviatore di Sforzo

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - p & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} - p & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} - p \end{bmatrix}$$

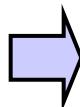
$$p = \frac{J_1}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(s_I + s_{II} + s_{III})$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \frac{-\sigma_{11} + 2\sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \frac{-\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2\sigma_{33}}{3} \end{bmatrix}$$

LA SICUREZZA STRUTTURALE: VERIFICHE DI RESISTENZA

Criteri di snervamento per metalli

Limite di snervamento uguale
a trazione e compressione

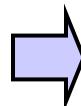


Criteri di snervamento
simmetrici



G.I.P. deve essere invariante rispetto
al cambiamento di segno di tutte
le componenti del tensore degli sforzi

Limite di snervamento non cambia
con l'aggiunta di una pressione
idrostatica

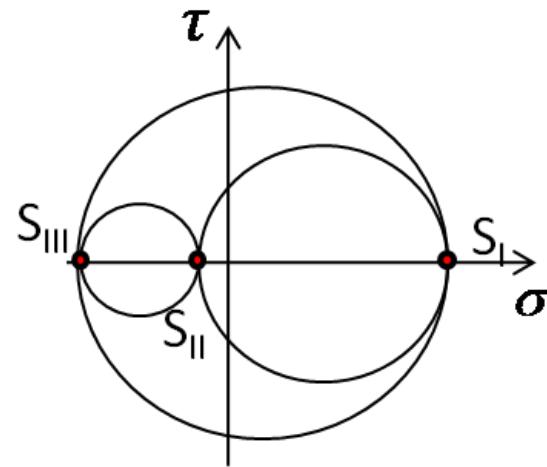


La G.I.P. deve essere
indipendente dalla
pressione idrostatica

Criterio di Tresca

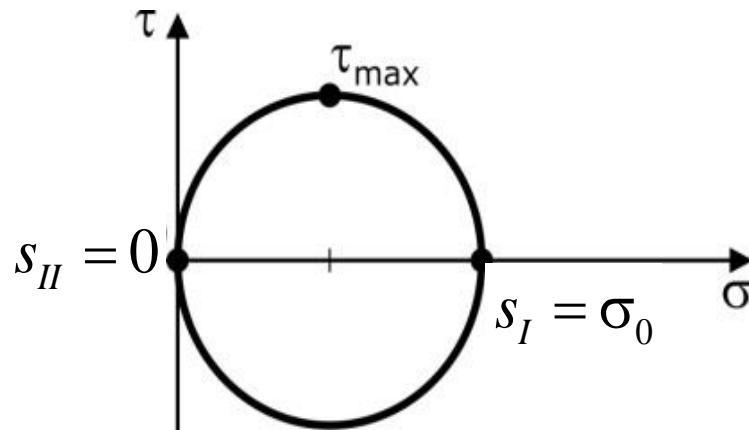
G.I.P. = tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{|s_I - s_{II}|}{2}, \frac{|s_I - s_{III}|}{2}, \frac{|s_{III} - s_{II}|}{2} \right) \leq k$$



Criterio di Tresca

Il termine di confronto k è uguale al valore che la GIP assume al limite elastico in una prova di trazione monoassiale.



$$s_I = \sigma_0, \quad s_{II} = 0, \quad s_{III} = 0$$

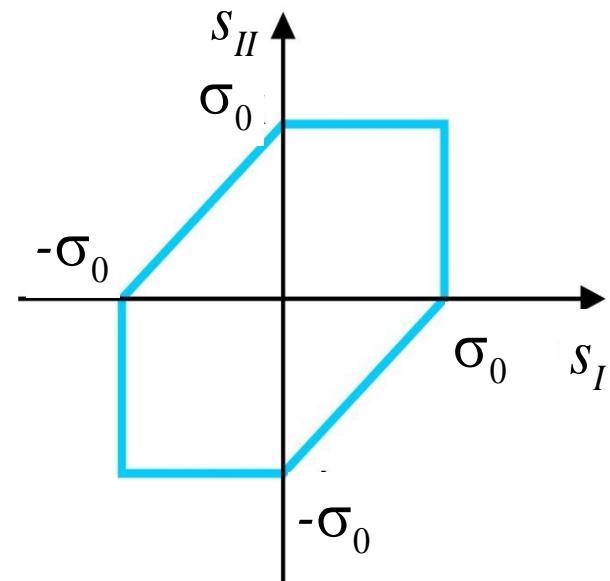
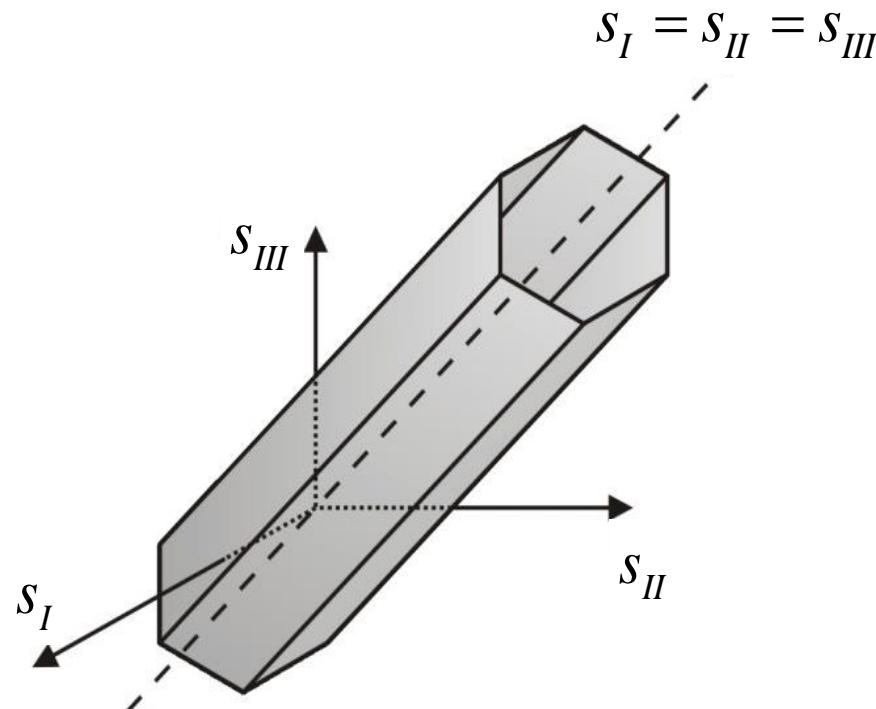


$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{|\sigma_0 - 0|}{2}, \frac{|\sigma_0 - 0|}{2}, \frac{|0 - 0|}{2} \right) = k \quad \rightarrow \quad k = \frac{\sigma_0}{2}$$



$$\begin{cases} |s_I - s_{II}| \leq \sigma_0 \\ |s_I - s_{III}| \leq \sigma_0 \\ |s_{III} - s_{II}| \leq \sigma_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\sigma_0 \leq s_I - s_{II} \leq \sigma_0 \\ -\sigma_0 \leq s_I - s_{III} \leq \sigma_0 \\ -\sigma_0 \leq s_{III} - s_{II} \leq \sigma_0 \end{cases}$$

Nello spazio delle tensioni principali il dominio di sicurezza è delimitato da un cilindro a base esagonale che intersecandosi col piano $s_{III}=0$, genera un esagono irregolare



Criterio di Mises

Si assume come G.I.P. l'invariante secondo del deviatore di sforzo.

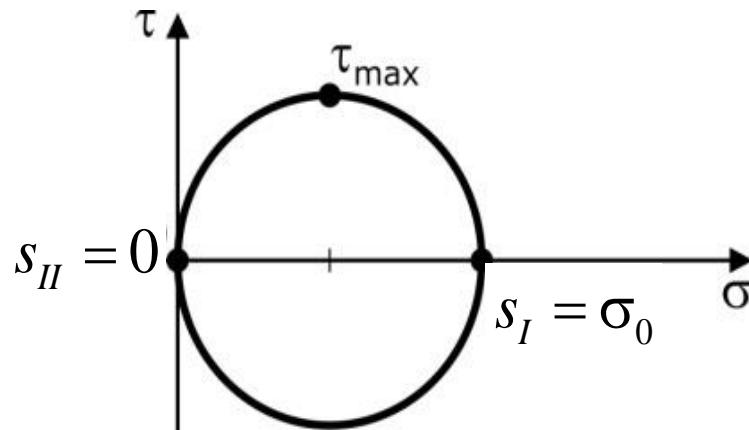
Essendo associata alla sola parte deviatorica delle tensioni questa G.I.P. risulta indipendente dalla pressione idrostatica. Essendo poi questa una forma quadratica delle componenti di sforzo risulta simmetrica.



$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(s_I - s_{II})^2 + (s_I - s_{III})^2 + (s_{III} - s_{II})^2 \right] \leq k$$

Criterio di Mises

Il termine di confronto k è uguale al valore che la GIP assume al limite elastico in una prova di trazione monoassiale.



$$s_I = \sigma_0, \quad s_{II} = 0, \quad s_{III} = 0$$



$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_0 - 0)^2 + (\sigma_0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 \right] = k \rightarrow k = \frac{\sigma_0^2}{3}$$

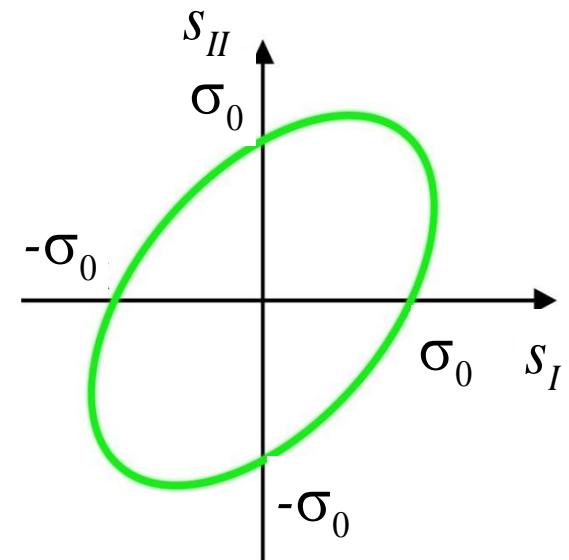
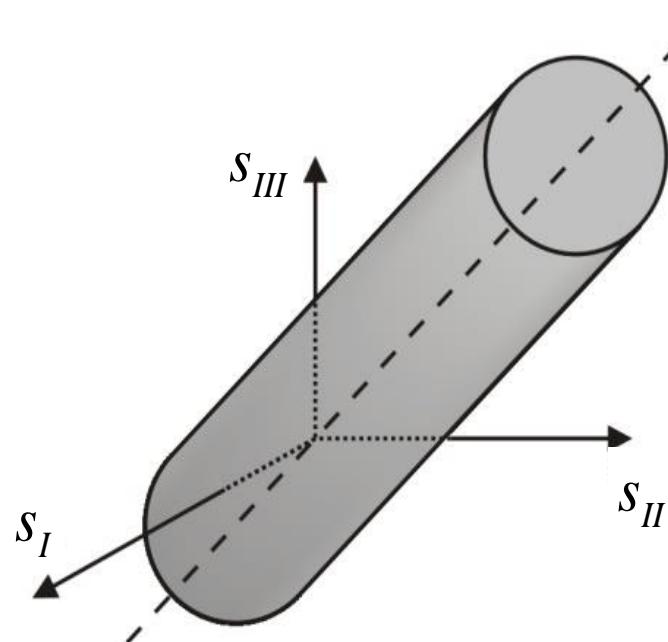


$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(s_I - s_{II})^2 + (s_I - s_{III})^2 + (s_{III} - s_{II})^2 \right] \leq \frac{\sigma_0^2}{3} \rightarrow 3J_2 \leq \sigma_0^2 \rightarrow \sqrt{3J_2} \leq \sigma_0$$

Sforzo di Mises

Nello spazio delle tensioni principali il dominio di sicurezza è delimitato da un cilindro a base circolare che intersecandosi col piano $s_{III}=0$, genera un'ellisse.

$$s_I = s_{II} = s_{III}$$



LA SICUREZZA STRUTTURALE: VERIFICHE DI RESISTENZA

Criteri di snervamento per metalli

