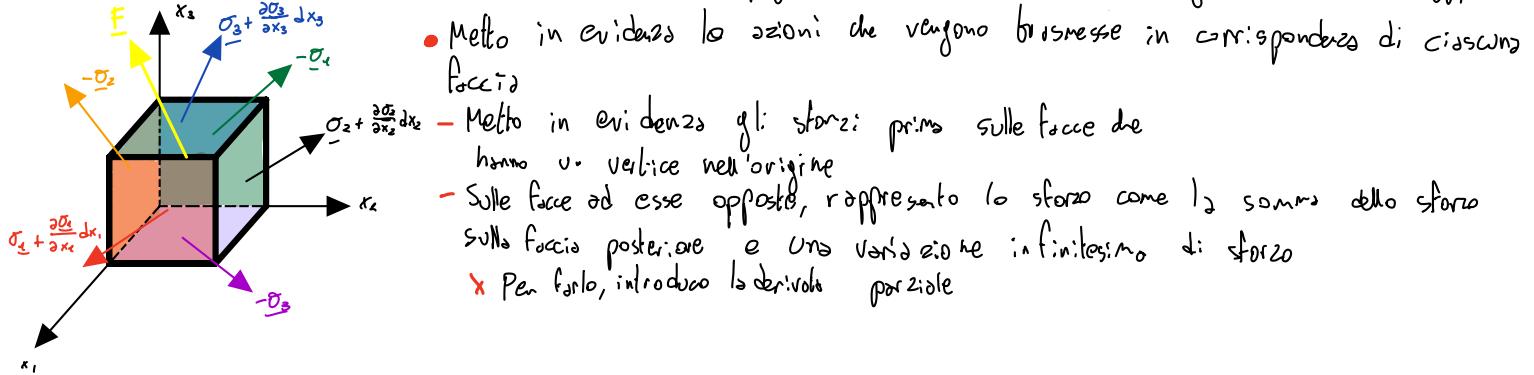


(Equilibrio in forma forte al contorno + cc)

Equazioni di Sforzo con condizioni al contorno

→ Consideriamo un volume cubico infinitesimo i cui spigoli sono: differenziali degli assi coordinati;



→ Impongo l'equilibrio alla traslazione

$$\left(\underline{\sigma}_1 + \frac{\partial \underline{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1\right) \Delta \Sigma_1 + \left(\underline{\sigma}_2 + \frac{\partial \underline{\sigma}_2}{\partial x_2} dx_2\right) \Delta \Sigma_2 + \left(\underline{\sigma}_3 + \frac{\partial \underline{\sigma}_3}{\partial x_3} dx_3\right) \Delta \Sigma_3 - \underline{F}_1 \Delta \Sigma_1 - \underline{F}_2 \Delta \Sigma_2 - \underline{F}_3 \Delta \Sigma_3 + \underline{F} \Delta V = 0$$

- Offendo $\frac{\partial \underline{\sigma}_1}{\partial x_1} dx_1 \Delta \Sigma_1 + \frac{\partial \underline{\sigma}_2}{\partial x_2} dx_2 \Delta \Sigma_2 + \frac{\partial \underline{\sigma}_3}{\partial x_3} dx_3 \Delta \Sigma_3 + \underline{F} \Delta V = 0$
- $- \frac{\partial \underline{\sigma}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \underline{\sigma}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \underline{\sigma}_3}{\partial x_3} + \underline{F} = 0$

• Scrivendo in forma forte

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \underline{\sigma}_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \underline{\sigma}_{31}}{\partial x_3} + \underline{F}_1 = 0 \\ \frac{\partial \underline{\sigma}_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \underline{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \underline{\sigma}_{32}}{\partial x_3} + \underline{F}_2 = 0 \\ \frac{\partial \underline{\sigma}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \underline{\sigma}_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \underline{\sigma}_{33}}{\partial x_3} + \underline{F}_3 = 0 \end{array} \right. \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in V \Rightarrow \underline{\sigma}_{ij} \delta_{ij} + \underline{F}_j = 0$$

→ Imponendo l'equilibrio al contorno ottengo che lo sforzo che affiora in superficie sia uguale alla forza di superficie imposta f

• Matematicamente, ciò equivale ad isolare un tetraedro all'interno di un punto P e ad applicare la relazione di Cauchy: $\underline{\sigma} \underline{n} = f$

• Dunque scrivo: $\underline{\sigma}_1 n_1 + \underline{\sigma}_2 n_2 + \underline{\sigma}_3 n_3 = f$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 = f_1 \\ \tau_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \tau_{32} n_3 = f_2 \\ \tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 = f_3 \end{array} \right. \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S$$

RIASSUMENDO

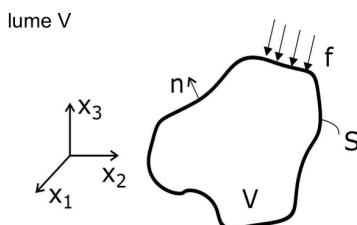
Per l'equilibrio in forma forte e al contorno:

→ Sul volume V :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0 \end{array} \right.$$

→ Sulla superficie S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 + f_1 = 0 \\ \tau_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \tau_{32} n_3 + f_2 = 0 \\ \tau_{13} n_1 + \tau_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 + f_3 = 0 \end{array} \right.$$



2

Continuo di Cauchy

→ Consideriamo un mezzo continuo tridimensionale di volume V e superficie S soggetto a forze agenti al suo interno e/o sulla superficie laterale

- Definisco ΔM = momento risultante su un elemento infinitesimo di volume o superficie
- Definisco ΔR = forza risultante su un elemento infinitesimo di volume o superficie

$$\text{Definisco } \underline{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta V} \quad \text{e} \quad \underline{f} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S}$$

$[\text{N/m}^3]$ FORZA DI VOLUME $[\text{N/m}^2]$ FORZA DI SUPERFICIE

- Inoltre: $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0$

→ Ora definiamo lo SFORZO all'interno di un mezzo continuo

- P: generico punto all'interno del corpo
- ΔS : sezione interna infinitesima
- \underline{n}_x : normale a ΔS
- $\underline{\Delta R}$: forza risultante
- $\underline{\Delta M}$: momento risultante

• Allora lo SFORZO c'è una sollecitazione da, dato una generica sezione di taglio, i due corpi risultanti dal taglio si scambiano nel punto P

• Si postula che: $\begin{cases} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S} = \underline{\sigma}_x = \text{sforzo nel punto P rispetto alla normale } \underline{n}_x \\ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0 \end{cases}$

- L'insieme di tutti i vettori $\underline{\sigma}_x$ al variare di \underline{n}_x individua lo stato di sforzo in P

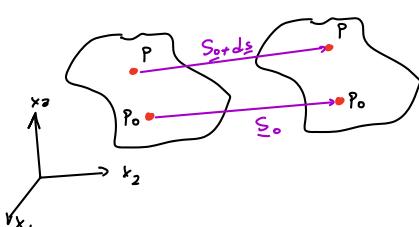
PROPRIETÀ: $\underline{\sigma}_{-x} = -\underline{\sigma}_x$

3

Deformazioni in generale

- Si consideri la seguente traslazione nell'ambito di piccoli spostamenti: in tal caso è possibile approssimare la traiettoria con lo spostamento e imporre l'equilibrio della condizione iniziale (0) senza commettere errori gravi.

- Consideriamo ora l'evoluzione cinematica di un generico corpo, al cui interno indichiamo P e P_0 punti:



$$\underline{S}_0 = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \underline{S}_0 + \underline{dS}$$

$$\underline{dS} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial S_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial S_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial S_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial S_3}{\partial x_3} dx_3 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow d\underline{S} = \underline{\Psi} d\underline{x}$$

- Chiamiamo $\underline{\Psi} = g_{ij}$ dieante di spostamento

- Divido $\underline{\Psi}$ in due componenti e introduco il tensore di deformazione: $\underline{\varepsilon} = \underline{\Psi} - \underline{\Theta}$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_{11} + S_{22} & S_{12} + S_{21} & S_{13} + S_{31} \\ S_{21} + S_{12} & S_{22} + S_{11} & S_{23} + S_{32} \\ S_{31} + S_{13} & S_{32} + S_{23} & S_{33} + S_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underline{\Psi} + \underline{\Psi}^T \right)$$

$$\underline{\Theta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S_{12} - S_{21} & S_{13} - S_{31} \\ S_{21} - S_{12} & 0 & S_{23} - S_{32} \\ S_{31} - S_{13} & S_{32} - S_{23} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underline{\Psi} - \underline{\Psi}^T \right)$$

- Tale matrice viene detta tensore di deformazione, ed è la parte simmetrica di $\underline{\Psi}$

- Tuttavia si può indicare $\gamma_{12} = \frac{1}{2}(S_{12} + S_{21})$

- Tuttavia, si scrive $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22})$

- Parte antisimmetrica

- Ricordiamo $\underline{S} = \underline{S}_0 + \underline{dS} = \underline{S}_0 + \underline{\Psi} d\underline{x} = \underline{S}_0 + (\underline{\varepsilon} + \underline{\Theta}) d\underline{x} = \underline{S}_0 + \underline{\varepsilon} d\underline{x} + \underline{\Theta} d\underline{x}$

- Dunque ho 3 componenti di moto cinematico

- \underline{S}_0 corrisponde a una traslazione pura

- $\underline{\Theta} d\underline{x}$ corrisponde a una rotazione pura

- $\underline{\varepsilon} d\underline{x}$ corrisponde a una deformazione

- Diagonalizzando $\underline{\varepsilon}$ trovando $\{e_1, e_2, e_3\}$ significa trovare il sistema di riferimento in cui le deformazioni hanno esclusivamente componenti normali alle giaciture $\{e_1, e_2, e_3\}$ considerate

- Come per gli spazi, ciò significa trovare le deformazioni principali

- Nell'effettuare la diagonalizzazione, si scrive il polinomio caratteristico di $\underline{\varepsilon} - c \underline{I}$:

$$\det(\underline{\varepsilon} - c \underline{I}) = 0 \Rightarrow c^3 - I_1 c^2 + I_2 c - I_3 = 0$$

$$- I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$- I_2 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \gamma_{12} \gamma_{21} - \gamma_{13} \gamma_{31} - \gamma_{23} \gamma_{32}$$

$$- I_3 = \det(\underline{\varepsilon})$$

- Tali quantità sono dette invarianti poiché non dipendono dal sistema di riferimento

- I_1 è invariante lineare e rappresenta la variazione di volume nell'intorno del punto P durante una deformazione

- A sua volta, $\underline{\varepsilon}$ può essere scomposto

$$\bullet \text{ Scrivo } \underline{\eta} = \underline{\varepsilon} - \underline{\Theta} \underline{I}$$

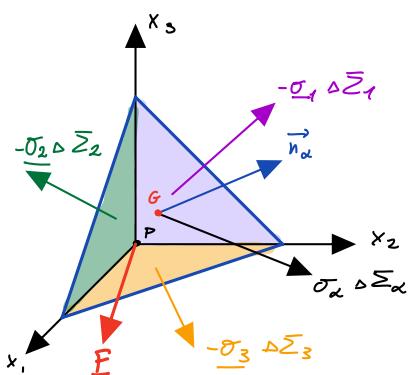
- Tale matrice ha invarianti lineare nullo, dunque rappresenta una deformazione a volume costante

4

Relazione di Cauchy (NB)

→ Consideriamo 4 superfici d: bagli, o, d: dimensioni infinitesimali

- 3 sono mutuamente ortogonali, la quarta ha orientamento generico \underline{n}_α
- $-\underline{\sigma}_i \Delta \Sigma_i$ = superficie della faccia i-esima
- Metto in evidenza gli sforzi su ogni superficie
- Si puo' dimostrare che la superficie della faccia d: normale $-\underline{x}_i$ e' uguale a: $\Delta \Sigma_i = \Delta \Sigma_\alpha \cdot \frac{\cos(\underline{n}_\alpha \wedge \underline{x}_i)}{\text{coseno d: rettore}} = -\Delta \Sigma_\alpha \underline{n}_{\alpha i}$
- $\underline{\sigma}_\alpha \Delta \Sigma_\alpha$ = componente i-esima del vettore \underline{n}_α



- Imposto l'equilibrio alla traslazione, in quanto ho supposto l'equilibrio

$$-\underline{\sigma}_\alpha \Delta \Sigma_\alpha + (-\underline{\sigma}_1 \Delta \Sigma_1) + (-\underline{\sigma}_2 \Delta \Sigma_2) + (-\underline{\sigma}_3 \Delta \Sigma_3) + \underline{F} \cancel{\Delta V} = 0$$

NOTA: Lo faccio con le forze, non con le forze per unita di superficie

- Faccio alcune considerazioni:

- Il tetraedro e' infinitesimo, dunque i lati del tetraedro sono grandezze infinitesimali
- ✗ Il lato e' un infinitesimo del 1° ordine, le superfici sono infinitesimali del 2° ordine, il volume del 3° ordine
- ✗ $\underline{F} \Delta V$ e' un infinitesimo di ordine superiore

$$\bullet \underline{\sigma}_\alpha \Delta \Sigma_\alpha - \underline{\sigma}_1 \Delta \Sigma_\alpha \underline{n}_{\alpha 1} - \underline{\sigma}_2 \Delta \Sigma_\alpha \underline{n}_{\alpha 2} - \underline{\sigma}_3 \Delta \Sigma_\alpha \underline{n}_{\alpha 3} = 0$$

$$- \text{Ottengo } \underline{\sigma}_\alpha = \underline{\sigma}_1 \underline{n}_{\alpha 1} + \underline{\sigma}_2 \underline{n}_{\alpha 2} + \underline{\sigma}_3 \underline{n}_{\alpha 3}$$

- Posso esprimere la in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \underline{n}_{\alpha 1} + \begin{bmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \underline{n}_{\alpha 2} + \begin{bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \underline{n}_{\alpha 3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha 1} \\ \sigma_{\alpha 2} \\ \sigma_{\alpha 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{n}_{\alpha 1} \\ \underline{n}_{\alpha 2} \\ \underline{n}_{\alpha 3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\sigma}_\alpha = \underline{\sigma} \underline{n}_\alpha \Leftrightarrow \sigma_{\alpha j} = \sigma_{ij} n_{\alpha i}$$

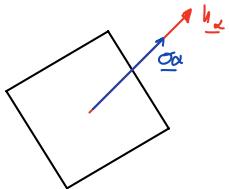
- $\underline{\sigma}$ e' dello tensori di sforzo

5

Sforzi Principali (cosa sono e come ricavarli)

→ Introduciamo le relazioni di Cauchy $\underline{\sigma}_{\alpha} = \underline{\sigma} \underline{n}_{\alpha}$

- Impongo il concetto di: DIREZIONE PRINCIPALE DI SFORZO: rispetto a tale direzione lo sforzo ha componente solo perpendicolare al piano



- Vale quindi: $\underline{\sigma}_{\alpha} = \underline{\sigma} \underline{n}_{\alpha}$

- Pongo a sistema $\begin{cases} \underline{\sigma}_{\alpha} = \underline{\sigma} \underline{n}_{\alpha} \\ \underline{\sigma}_{\alpha} = \sigma \underline{n}_{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \sigma \underline{n}_{\alpha} = \underline{\sigma} \underline{n}_{\alpha}$

- Ho ottenuto un'equazione agli autovalori.

$$\begin{aligned} - (\underline{\sigma} - \sigma \underline{\underline{I}}) \underline{n}_{\alpha} &= 0 & \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \sigma_{22}-\sigma & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \sigma_{33}-\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ - \det(\underline{\sigma} - \sigma \underline{\underline{I}}) &= 0 \Rightarrow \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 & = 0 \end{aligned}$$

- Poiché $\underline{\sigma}$ è simmetrica, il teorema dell'algebra lineare mi assicura l'esistenza di 3 soluzioni.

$$\begin{cases} n_1, \sigma_1 \\ n_2, \sigma_2 \\ n_3, \sigma_3 \end{cases} \quad - \text{Ho ottenuto sforzi e direzioni principali:}$$

- J_1, J_2 e J_3 sono definiti invarianti di sforzo

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \gamma_{12}\gamma_{21} - \gamma_{13}\gamma_{31} - \gamma_{23}\gamma_{32} \\ J_3 = \det(\underline{\sigma}) \end{cases}$$

6

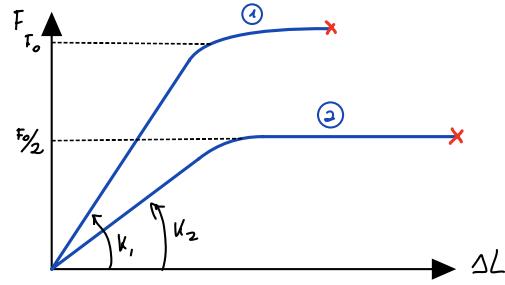
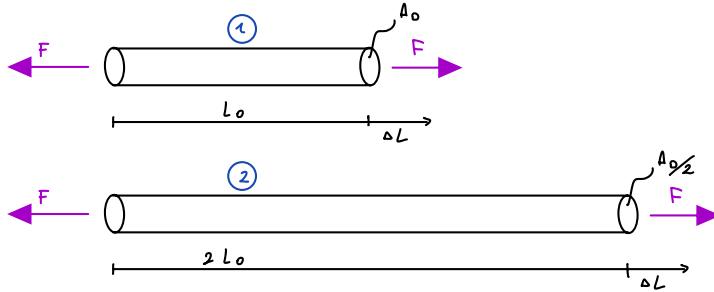
DISCUTERE LA COMPONENTE DÉVIATORICA DEL TENSORE DI DEFORMAZIONE

- Iniziamo il caso di una deformazione a volume costante: introduciamo nell'espressione di $\underline{\underline{\epsilon}}$ una componente deviatorica
- $\underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{3} \Theta \mathbf{I}_e \rightarrow \Theta$ componente deviatorica
 - Per tale matrice $\Theta = \frac{1}{3} \mathbf{I}_e$ e' invertibile piano
- $\underline{\underline{\eta}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{21} & \frac{1}{2} \gamma_{31} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} & \epsilon_{22} - \Theta & \frac{1}{2} \gamma_{32} \\ \frac{1}{2} \gamma_{13} & \frac{1}{2} \gamma_{23} & \epsilon_{33} - \Theta \end{bmatrix}$
- Tale matrice ha inverso lineare nullo

7

Legame costitutivo e Matrice rigidezza

- Il legame costitutivo di un materiale crea una relazione tra mondo statico, rappresentato dagli sforzi σ_{ij} , e il mondo cinematico, rappresentato dalle deformazioni ϵ_{ij} .
- Si tratta di un modello fenomenologico che vuole descrivere il comportamento del materiale sulla macroscopia.
- Non si tratta del risultato di un processo di interpolazione, ma piuttosto della formulazione di un modello basato su postulati fisico/meccanici che siano coerenti con i dati sperimentali.



- Dunque formuliamo una teoria fano monologica
 - Introduciamo il potenziale di deformazione, l'energia immagazzinata dal materiale durante una deformazione elastica
 - $\omega(\epsilon_{ij}) = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\epsilon'_{kj}) d\epsilon'_{ij}$
 - Naturalmente bisogna considerare i contributi di ogni giacitura e sforzo:
- $$\omega = \sum_i \sum_j \omega(\epsilon_{ij})$$

Dunque scriviamo $d\omega = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} = \frac{d\omega}{d\epsilon_{ij}}$

- Ipotizziamo quindi un legame lineare fra deformazione e sforzo: $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}$
- Dato lo simmetria dei tensori deformazione e sforzo otengo 2 proprietà di simmetria
 - $\left\{ \begin{array}{l} D_{ijk\ell} = D_{ik\ell j} \\ D_{ij\ell k} = D_{i\ell kj} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1111} \\ \sigma_{2222} \\ \sigma_{3333} \\ \sigma_{1221} \\ \sigma_{2332} \\ \sigma_{3113} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} D_{1111} & & & & & \\ & D_{2222} & & & & \\ & & D_{3333} & & & \\ & & & D_{1221} & & \\ & & & & D_{2332} & \\ & & & & & D_{3113} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{1111} \\ \epsilon_{2222} \\ \epsilon_{3333} \\ \epsilon_{1221} \\ \epsilon_{2332} \\ \epsilon_{3113} \end{array} \right\}$
 - Abbiamo per ora 36 costanti
- Possiamo impostare ω sia un differenziale esatto per il teorema di Stroharts: $D_{ijkl} = D_{klij}$
 - In tal modo ci riduciamo a 21 costanti
- Se poi consideriamo un materiale lineare elastico e isotropo, la simmetria introdotta riduce il numero di costanti a 2

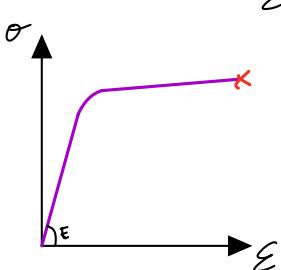
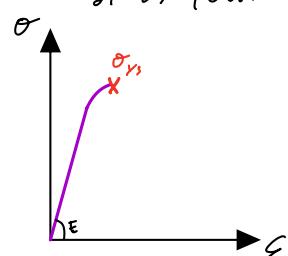
8

Legame costitutivo: DIAGRAMMA σ - ϵ E TIPI DI COMPORTAMENTO DEI MATERIALI

→ Scrivendo $\sigma = E\epsilon$ ci riferiamo esclusivamente al comportamento elastico e lineare dei materiali. Tale comportamento è limitato a un certo dominio di omogeneità, che può essere ad esempio $\sigma \leq \sigma_{ys}$

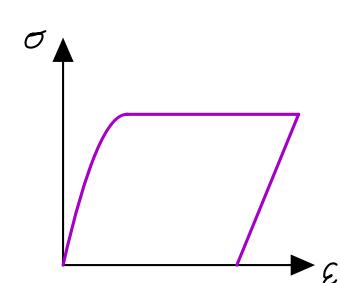
- Dunque possiamo caratterizzare i materiali in DUTTILI e FRAGILI in base a come si comportano al di fuori del regime elastico

MATERIALE FRAGILE: Rottura immediata all'esaurimento delle proprietà elastiche del materiale



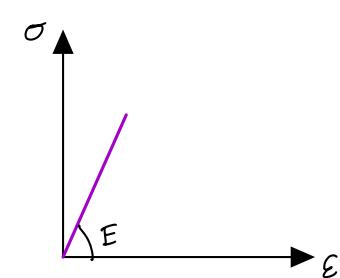
MATERIALE DUTTILE: Alcune risorse plastiche possono essere sfruttate al di fuori del regime elastico

→ Possiamo categorizzare il tipo di comportamento esibito dal materiale in deformazione



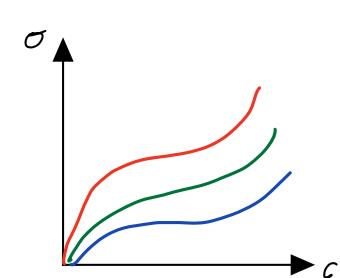
PERFETTA PLASTICITÀ: La deformazione non è totalmente reversibile, ma viene recuperata solo l'energia immagazzinata nella fase di deformazione plastica

- L'irreversibilità deriva da una modifica nella microstruttura del materiale
- ESEMPIO: Movimento delle dislocazioni nei metalli



ELASTICITÀ: Il legame $\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij})$ è reversibile

- Lo sforzo dipende solo dal valore corrente della deformazione



VISCOSITÀ: Sforzi e deformazioni variano nel tempo e condizioni esterne immutate

- CREEP: Aumento della deformazione a sforzo costante

- RILASSAMENTO: Diminuzione di sforzo a deformazione costante

g

Ricavare costante elastica E e spiegare il coefficiente di Poisson

→ Poniamo nel caso d' un materiale lineare elastico e isotropo.

- In tal caso l'energia dipende dalla deformazione solo attraverso i suoi invarianti:

$$- w(\varepsilon_{ij}) = W(I_1, I_2, I_3)$$

- Nel legame lineare, w è una forma quadratica quindi non può includere I_3

$$- Dunque: w = a I_1^2 + b I_2$$

$\times a$ e b sono detti: PARAMETRI COSTITUTIVI

→ Introduciamo un cambio di parametri:

$$- w = \frac{1}{2} (\lambda + 2G) I_1^2 - 2G I_2$$

- λ e G sono dette costanti di Lamé

→ Se $\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$ allora

$$- \sigma_{ij} = (\lambda + 2G) I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} - 2G \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$- I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$- I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32}$$

$$\times Ad esempio ottengo \sigma_{11} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \cdot 2$$

- Scrivendo in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$$

- Possiamo introdurre le costanti ingegneristiche

$$E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} \quad c \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

- Il legame diventa

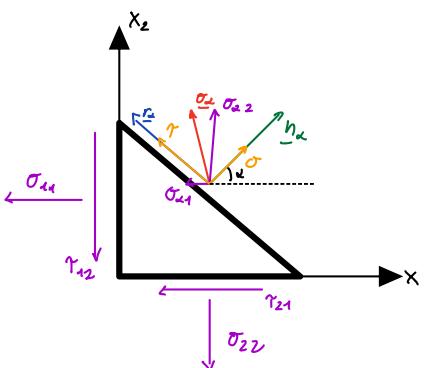
$$- \underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

$$- Inoltre: E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} \quad c \quad \nu = - \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = - \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}$$

10

Dimostrazione Cerchio di Mohr

→ Consideriamo un triangolo infinitesimo di materiali, equivalente del tetraedro nel piano



• Posso calcolare $\underline{\sigma}_\omega$ con la relazione di Cauchy

$$\underline{\sigma}_\omega = \underline{\sigma} \underline{n}_\omega = \begin{bmatrix} \sigma_{\omega 1} \\ \sigma_{\omega 2} \end{bmatrix}$$

- In questo modo ottengo le componenti rispetto al sistema di assi (x_1, x_2)

• Voglio esprimere $\underline{\sigma}_\omega$ rispetto al sistema di assi (r_ω, n_ω)
e ottenerlo quindi: $\underline{\sigma}_\omega = \begin{bmatrix} \tau \\ \sigma \end{bmatrix}$

• Calcolo le componenti

$$\begin{cases} \sigma = \underline{n}_\omega \cdot \underline{\sigma}_\omega = \underline{n}_\omega (\underline{\sigma} \underline{n}_\omega) \\ \tau = \underline{r}_\omega \cdot \underline{\sigma}_\omega = \underline{r}_\omega (\underline{\sigma} \underline{n}_\omega) \end{cases}$$

• Ricaviamo \underline{r}_ω e \underline{n}_ω

$$\underline{n}_\omega = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \underline{r}_\omega = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

• Quindi sostituisco

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

• Ricordo alcune identità trigonometriche

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

• Sostituisco

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{11} \cos^2 \alpha + \sigma_{22} \sin^2 \alpha + 2 \tau_{12} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\alpha + \tau_{12} \sin 2\alpha \\ \tau = -\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin 2\alpha + \tau_{12} \cos 2\alpha \end{cases}$$

• Per rimuovere la dipendenza da α , elevo al quadrato e sommo

$$[\sigma - \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})]^2 + \tau^2 = [\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})]^2 + \tau_{12}^2$$

• Definisco $C = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$

$$R = [\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22})]^2 + \tau_{12}^2$$

• Ho ottenuto l'equazione del cerchio: $(\sigma - C)^2 + \tau^2 = R^2$

$$C = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \tau_{12}^2}$$

• Equazione di una circonferenza nel piano $\sigma - \tau$, con centro nel punto $(\sigma = C, \tau = 0)$ e raggio R

11

Criterio di Mises

→ La grandezza indice del pericolo è rappresentata dall'invariante secondo deviatore d' sforzo Δ_2

- Quindi deve valere $\Delta_2 \leq k$

- L'espressione di Δ_2 viene ricavata dall'energia di distorsione

$$\Delta_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]$$

- Possiamo verificare che Δ_2 soddisfa le proprietà necessarie di una GIP

- È simmetrico rispetto a inversione di segno

- È invariante rispetto al sistema di riferimento poiché coinvolge solo gli sforzi principali

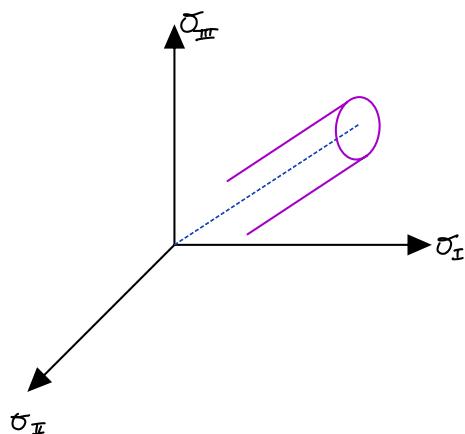
→ Per quanto riguarda k :

- Ponendo $\sigma_{III} = \sigma_{II} = 0$ e $\sigma_I = \sigma_0 \Rightarrow k = \frac{\sigma_0}{3}$

- Dunque otteniamo $\sqrt{3\Delta_2} \leq \sigma_0$ dove $3\Delta_2$ è detto sforzo di Mises

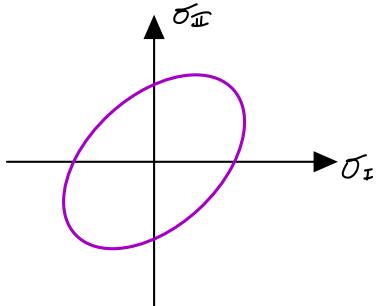
→ Possiamo visualizzare tale criterio nello spazio tridimensionale $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

- Come dominio di ammissibilità ho un cilindro che ha come asse l'asse isotropico, la bisettrice del primo ottante

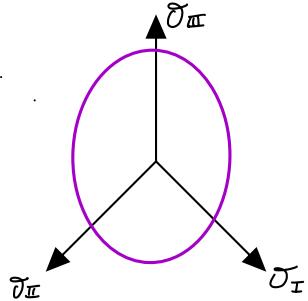


- Analizzando due casi specifici:

STATO DI SFORZO
PIANO: $\sigma_{II}=0$



PIANO DEVIATORICO



NOTA: Il criterio di Von Mises è più permisivo del criterio di Tresca

12

Invarianti: ricavare e spiegare il significato fisico

→ Sappiamo che, come per gli sforzi, esiste un sistema di riferimento per cui $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è diagonale

$$\bullet \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,y,z)} = \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^{(1,2,3)} \underline{\underline{N}}$$

$$\bullet \quad (\underline{\underline{\varepsilon}} - c \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{n}_\omega = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - c & \frac{1}{2}\gamma_{21} & \frac{1}{2}\gamma_{31} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} - c & \frac{1}{2}\gamma_{32} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} - c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{\omega 1} \\ n_{\omega 2} \\ n_{\omega 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

• Scrivo $\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - c \underline{\underline{I}}) \underline{n}_\omega = 0$, e siccome $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è simmetrica da teoremi dell'algebra lineare sappiamo che ho tre soluzioni:

$$- \det(\underline{\underline{\varepsilon}} - c \underline{\underline{I}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 - I_1 c^2 + I_2 c - I_3 = 0$$

$$\times I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

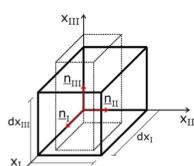
$$\times I_2 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} - \varepsilon_{13} \varepsilon_{31} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{32}$$

$$\times I_3 = \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$\begin{aligned} - \text{Ottengo} \quad & \begin{cases} \underline{n}_I, e_I \\ \underline{n}_{II}, e_{II} \\ \underline{n}_{III}, e_{III} \end{cases} \\ & \begin{array}{l} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{direzioni:} \quad \text{deformazioni:} \\ \text{principali:} \quad \text{principali:} \end{array} \end{aligned}$$

- I_1, I_2, I_3 sono detti invarianti di deformazione
- Il valore delle deformazioni e direzioni principali è indipendente dal sistema di riferimento iniziale
- $\times \underline{\underline{\varepsilon}}^{(x,y,z)}$ diagonale è la stessa indipendentemente da $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(1,2,3)}$ iniziale, cambia solo la matrice di diagonali: $\underline{\underline{N}}$
- Ciò significa che i coefficienti di $\det(\underline{\underline{\varepsilon}} - c \underline{\underline{I}}) = 0$ sono fissati, e invarianti rispetto al sistema di riferimento

→ Per discutere il significato fisico, introduciamo una variazione di volume



$$\begin{aligned} \bullet \quad & dV_N = dx_1 dx_2 dx_3 \\ \bullet \quad & dV_F = \left\{ dx_1 (1+e_I) \right\} \left\{ dx_2 (1+e_{II}) \right\} \left\{ dx_3 (1+e_{III}) \right\} = dV_N (1+e_I)(1+e_{II})(1+e_{III}) \\ & \quad \text{- Prodotto delle lunghezze finali dei tre spigoli:} \\ & \quad - \frac{dV_F}{dV_N} = (1+e_I)(1+e_{II})(1+e_{III}) = 1 + I_1 + I_2 + I_3 \xrightarrow{> 0} \\ & \quad \text{- Poiché } I_2 \text{ e } I_3 \text{ sono invarianti rispettivamente quadratico e cubico, sono infinitesimi di ordine inferiore} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \text{Ottengo: } \frac{dV_F - dV_N}{dV_N} = I_1$$

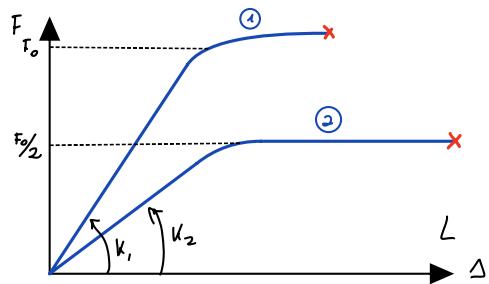
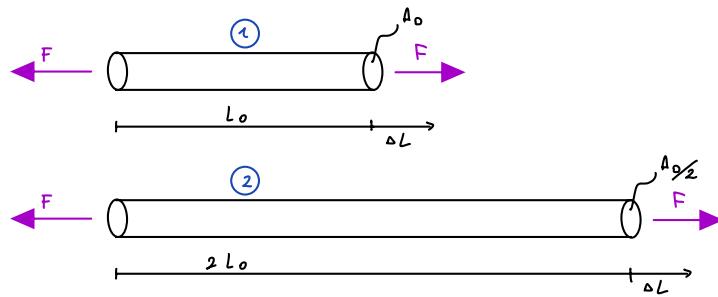
- Quindi l'invariante lineare I_1 rappresenta la variazione di volume nell'intorno del punto o

13

Legame costitutivo E significato delle GRANDEZZE INGEGNERISTI CHE

→ Il legame costitutivo crea un legame matematico fra mondo stabico (rappresentato dagli sforzi σ_{ij}) e mondo cinematico (deformazioni E_{ij})

- Si tratta di un modello fenomenologico, che coglie il comportamento del materiale in macro scala
- Non si tratta di una semplice interpolazione di dati sperimentali, ma del loro inserimento in un modello basato su certi postulati fisico/meccanici (teoria assiomatica) e dipendenti da un certo numero di parametri, il cui valore è desunto da opportune prove sperimentali.



→ Discutiamo ora il **COMPORTAMENTO DEL MATERIALE**, e in particolare la relazione tra **sforzo** e **deformazione**

$$\bullet \sigma = \frac{F}{A} \quad \bullet \epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \bullet \sigma = E \epsilon \rightarrow \begin{matrix} \text{modo elastico} \\ \text{sforzo} \uparrow \\ \text{deformazione} \uparrow \end{matrix}$$

→ Discutiamo il significato delle grandezze ingegneristiche

- σ : Lo sforzo è una misura della forza interna per unità di area che si sviluppa all'interno di un materiale a causa di un carico esterno
 - Lo sforzo rappresenta quanto un materiale resiste a una deformazione indotta da forze esterne.
 - Può essere normale o tangenziale
- ϵ : La deformazione è una misura del cambiamento relativo delle dimensioni di un corpo sotto posto a carico
 - La deformazione descrive quanto un materiale si allunga, si accorcia o si distorce rispetto alle sue dimensioni originali.
 - Può essere normale o tangenziale
- E : Il modulo di Young è una costante elastica che descrive la resistenza di un materiale allo deformazione elastica in una direzione
 - Indica quanto un materiale è rigido o flessibile
 - Se $E \uparrow \Rightarrow$ rigidi (acciaio), $E \downarrow \Rightarrow$ più elastici (gomma)

→ Bonding Properties

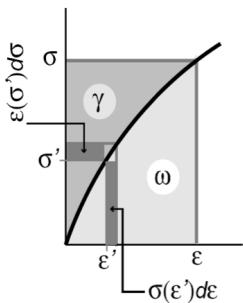
$\epsilon = \text{strain}$	$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$
$\sigma = \text{stress}$	$\sigma = \frac{F}{A_0}$
$E = \text{Elastic modulus}$ describes material	$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F \cdot l_0}{A_0 \cdot \Delta l}$
$E \uparrow$ r_0 smaller E	r larger E

• Engineering: $\epsilon = \text{deformation} \triangleq \frac{\Delta l}{l_0}$ [strain] (approx of ϵ) → valid if ϵ is small

Proportional to length l_0 \rightarrow True Strain = $\epsilon = \int_{l_0}^{l_f} \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l_f}{l_0}\right)$



- **W:** Il potenziale di deformazione rappresenta l'energia immagazzinata in un materiale per unità di volume quando viene deformato elasticamente
 - E' l'energia che può essere recuperata se il materiale ritorna alla sua configurazione originale



$$\bullet \omega(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_{\text{tot}}} \sigma_{ij} (\epsilon_{ik}) d\epsilon_{jk}$$

fusione di ϵ

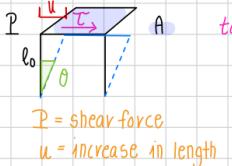
- **L:** Rappresenta la resistenza del materiale di cambiamenti di volume

- **G:** È il modulo di taglio, e rappresenta la resistenza del materiale alla deformazione tangenziale



$G = \text{modulo di taglio}$

Property 2: Shear strain & stress correlated with a proportion $G = \text{Shear Modulus} \Rightarrow \tau = G \gamma$



tangential force = shear stress

$$\tau = \frac{P}{A}$$

$$\tau = \frac{P}{A}$$

Strain that measures this tangential deformation = Shear Strain

$$\text{Shear Strain} = \gamma = \frac{u}{l} = \tan \theta$$

tells how to go from 1 shape to another

- **D:** Il coefficiente di Poisson misura la relazione tra la deformazione trasversale e quella longitudinale in un materiale sotto posta a sforzo assiale

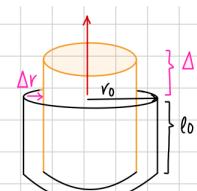
- Indica quanto un materiale si restringe lateralmente quando viene allungato longitudinalmente
- Assume valori tra 0.0 e 0.5.

Poisson Ratio (ν)

• How much r expands/contracts per unit of elongation

$$2 \text{ strains} \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{uniaxial in vertical direction} \Rightarrow \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \\ \cdot \text{another in the radial direction} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{\Delta r}{r_0} \end{array} \right\} \text{Property 3}$$

$$\nu = \frac{\Delta r / r_0}{\Delta l / l_0} \quad -1 \leq \nu \leq 0.5$$

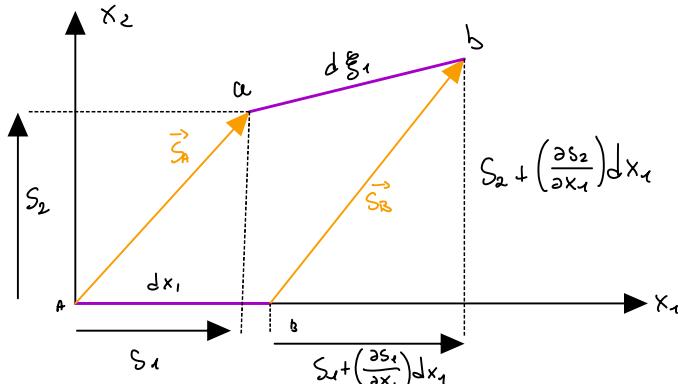


NOTA: Nel caso di un materiale elastico-lineare e isotropo, le costanti di lame' corrispondono alle tre grandezze e quindi definiscono il comportamento a partire dalle sole coefficienti

14

Significato delle componenti del tensore di deformazione (Slide 38 e 39)

→ Indagiamo il significato fisico delle componenti del tensore $\underline{\epsilon}$. Poniamoci nel piano $X_1 - X_2$ e analizziamo l'evoluzione cinematica di una fibra 1D con S_0 non nullo.



$$\underline{S}_B = \underline{S}_A + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1$$

• S_1 è lo spostamento orizzontale del punto A, S_2 è lo spostamento orizzontale del punto A

- Dunque lo spostamento del punto B è: $\underline{S}_B = \underline{S}_A + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 = \begin{cases} S_{B1} = S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 \\ S_{B2} = S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1 \end{cases}$

- Nota che lo spostamento totale è legato alla natura tensoriale doppia

→ Voglio calcolare la lunghezza finale della fibra:

• $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- $y_B = S_{B2} = S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1$ $- x_2 = S_1$

- $y_A = S_2$ $- x_B = dx_1 + S_{B1} = dx_1 + S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1$

• $d = \sqrt{(dx_1 + S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 - S_1)^2 + (S_2 - \frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1 - S_2)^2} = dx_1 \sqrt{(1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial S_2}{\partial x_1})^2} = dx_1 \sqrt{1 + 2 \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{(\partial S_2)}{\partial x_1}^2} \approx dx_1 \left(1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1}\right)$

→ Ho ottenuto $d = dx_1 \left(1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1}\right)$

• $\frac{d\underline{\epsilon} - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial S_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11}$

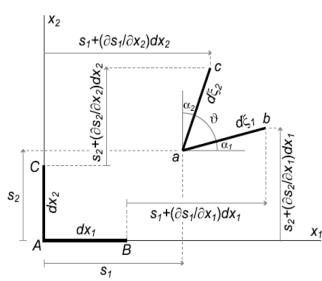
- Dunque tale elemento del tensore misura la variazione di lunghezza di una fibra unitaria originalmente disposta come x_1

• $\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1 - S_2}{S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 - S_1 + dx_1} = \frac{\frac{\partial S_2}{\partial x_1} dx_1}{\frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 + dx_1} = \frac{\frac{\partial S_2}{\partial x_1}}{(1 + \epsilon_{11})} \approx \frac{\partial S_2}{\partial x_1}$

• $\alpha_2 \approx \tan \alpha_2 \approx \frac{\partial S_1}{\partial x_2}$
 $\Rightarrow \alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \partial \epsilon$

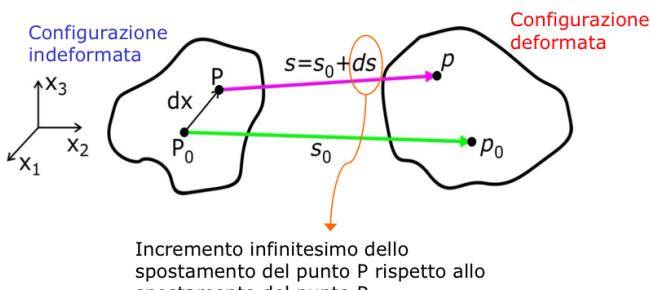
- Metà della variazione di angolo fra fibre originalmente ortogonali e disposte secondo gli assi delle coordinate

- Non necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2$ ma nel tensore $\underline{\epsilon}$ si ripartita in ϵ_{11} e ϵ_{22} la semisomma dei due angoli al fine di simmetrizzarla



**IS RICAVARE IL TENSORE DI DEFORMAZIONE. DISCUTERE LE SUE COMPONENTI.
SPIEGARE IL SIGNIFICATO DEI TERMINI SULLA DIAGONALE**

→ Consideriamo un corpo che evolve cinematicamente subendo traslazione, rotazione e deformazione



- Poniamo come vere l'ipotesi di piccoli spostamenti, ovvero consideriamo che spostamenti e deformazioni sono così piccoli da non influenzare il modo con cui l'equilibrio si instaura nella struttura
- Ovvero posso approssimare la traiettoria con lo spostamento
- Per le ipotesi di congruenza punti vicini restano vicini

$$\bullet \underline{ds} = \begin{bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} dx_1 & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} dx_2 & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} dx_1 & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} dx_2 & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} dx_1 & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} dx_2 & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial x_1} & \frac{\partial s_1}{\partial x_2} & \frac{\partial s_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial x_1} & \frac{\partial s_2}{\partial x_2} & \frac{\partial s_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial x_1} & \frac{\partial s_3}{\partial x_2} & \frac{\partial s_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$- \underline{ds} = \underline{\Psi} \underline{dx}$$

$$\rightarrow \underline{\Psi} = \underline{\xi} + \underline{\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\underline{\Psi} + \underline{\Psi}^\top \right) + \frac{1}{2} \left(\underline{\xi} - \underline{\Psi}^\top \right)$$

$$\bullet \underline{\xi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s_{11} + s_{22} & s_{12} + s_{21} & s_{13} + s_{31} \\ s_{12} + s_{21} & s_{22} + s_{32} & s_{23} + s_{32} \\ s_{13} + s_{31} & s_{23} + s_{32} & s_{33} + s_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{parte simmetrica} \rightarrow \text{tensore di deformazione}$$

$$\bullet \underline{\vartheta} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s_{12} - s_{21} & s_{13} - s_{31} \\ s_{21} - s_{12} & 0 & s_{23} - s_{32} \\ s_{31} - s_{13} & s_{32} - s_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{parte antisimmetrica}$$

$$\rightarrow \text{Riscrivo} \quad \underline{\xi} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{21} & \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

- $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ rappresentano le variazioni di lunghezza di uno fibro unitario originariamente disposto coni x_1, x_2, x_3

$$- \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2)$$

* Le componenti del tensore di deformazione d'angolo fra fibre originalmente disposte secondo gli assi delle coordinate

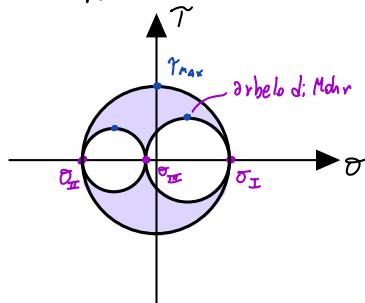
danno indicazione della sensibilità delle variazioni di lunghezza di uno fibro unitario originariamente disposto secondo gli assi delle coordinate

Criterio di Guest-Tresca

→ Considero come GIP $\gamma_{max} \leq \gamma_0$

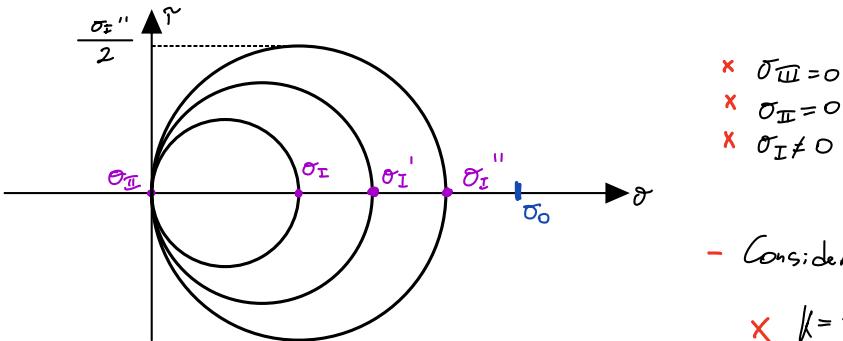
- Considero gli sforzi principali: $\gamma_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_I - \sigma_{II}|}{2}, \frac{|\sigma_{II} - \sigma_{III}|}{2}, \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2} \right\} \leq \kappa$

→ Possiamo visualizzare il criterio rappresentando il cerchio di Mohr



→ Per individuare κ , utilizziamo nuovamente il cerchio di Mohr

- Valore della radice quadrata indice del pericolo assume al raggiungimento del limite elastico in corrispondenza di una prova di trazione monossiale

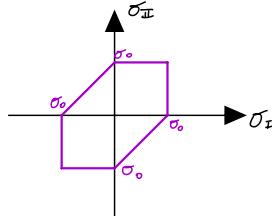


- Considerato $\sigma_I < \sigma_o$, si ha che $\gamma_{max} = \frac{\sigma_o}{2}$
- $\kappa = \frac{\sigma_o}{2}$

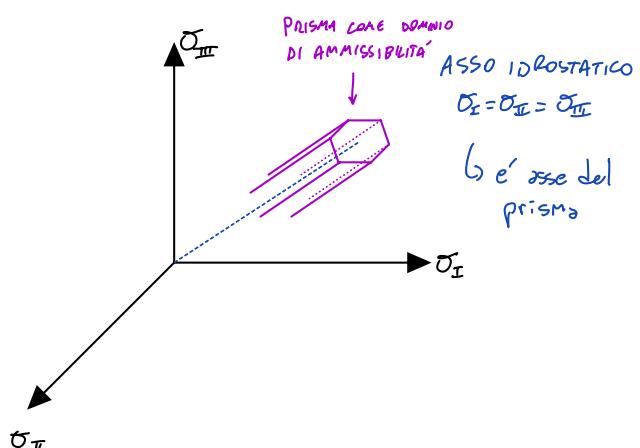
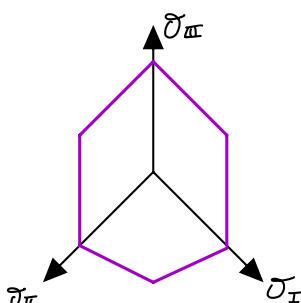
→ Dunque in una generica situazione di sforzo del materiale ottengo 3 diseguaglianze

- $|\sigma_I - \sigma_{II}| \leq \sigma_o$
 - $|\sigma_{II} - \sigma_{III}| \leq \sigma_o$
 - $|\sigma_I - \sigma_{III}| \leq \sigma_o$
- } criterio di ammissibilità

STATO DI SFORZO PIANO



PIANO DEVATORICO



NOTA: E' idealmente illimitato nella direzione dell'asse idrostatico

17

Esercizio sul cerchio di Mohr

Dimostrazione matrici D e C

→ Nell'ambito del legame costitutivo, formuliamo una teoria fenomenologica

- Definiamo il potenziale di deformazione come l'energia immagazzinata dal corpo per unità di volume

$$- \omega(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \sigma_{ij}(\epsilon_{ue}) d\epsilon_{ij}$$

- Naturalmente dovrò sommare i contributi per ogni direzione di rigidità e sforzo

$$- \omega_{tot} = \sum_i \sum_j \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij}(\epsilon_{ue}) d\epsilon_{ij}$$

- In forma differenziale otengo $d\omega = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{d\omega}{d\epsilon_{ij}}$

- Possiamo ipotizzare l'esistenza di un legame lineare fra sforzo e deformazione

$$- \sigma = E \epsilon \Rightarrow \sigma_{ij} = D_{ij} \epsilon_{ue}$$

X Ogni componente del tensore di sforzo è combinazione lineare di tutte le componenti del tensore deformazione

- Introduciamo le proprietà di simmetria dei tensori di sforzo e deformazione

$$\begin{cases} D_{ijk\ell} = D_{ik\ell j} \\ D_{ijk\ell} = D_{ij\ell k} \end{cases} \Rightarrow \text{oltre} \quad \text{costanti}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1131} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2231} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3331} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1231} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2331} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3112} & D_{3123} & D_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{pmatrix}$$

- Imponendo che $d\omega$ sia differenziabile esatto, per il teorema di Schwartz $\Rightarrow \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ è un differenziabile esatto

$$- Dunque otengo D_{ijk\ell} = D_{ue\ell j} \Rightarrow \underline{D} = \underline{D}^T$$

- Nel caso del legame elastico-lineare e isotropo, il numero di costanti si riduce a 2 a causa della simmetria del problema

- \underline{D} è della matrice di rigidezza e introducendo le costanti di lame' e sottrattando si ottiene

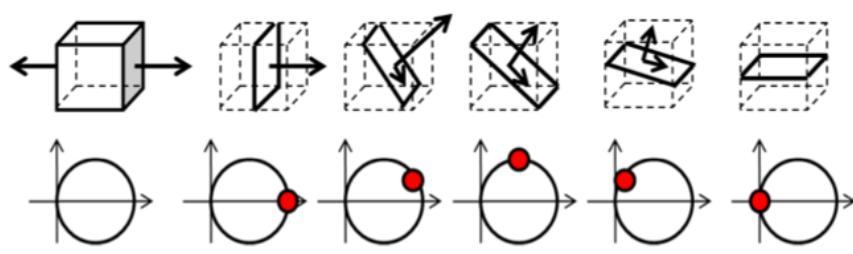
$$\underline{D} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2v)}{2} \end{bmatrix}$$

- L'inversa di \underline{D} è della \underline{C} = matrice di cedevolezza

$$\underline{C} = \underline{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -v & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+v) \end{bmatrix}$$

Quando si usa il cerchio di Mohr

- Il cerchio di Mohr fornisce le componenti normali e tangenziali corrispondenti ad uno stato di sforzo piano in un dato punto su una qualsiasi giacitura hs



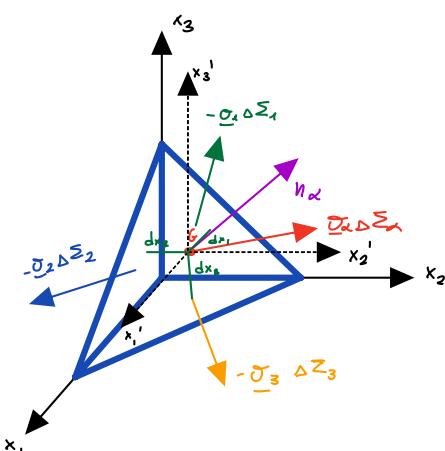
• Dalle informazioni sullo stato di sforzo di una generica giacitura nell'intorno di P disegniamo il cerchio ricavando $R = C$

- Poi, ricordando che $\delta = 2\alpha$, dove δ è l'angolo di rotazione reale (in senso antiorario) della giacitura relativa agli sforzi principali, e α è lo stesso angolo ma nel piano di Mohr, sono in grado di ottenere informazioni sullo stato di sforzo relativo alla generica giacitura δ

- Inoltre disegnando il cerchio ottengo immediatamente informazioni sugli sforzi principali, che sono i punti di intersezione con l'asse x
 - Infatti il centro del cerchio sta sempre sull'asse x, in quanto la sua equazione è $x(\sigma - c)^2 + r^2 = R^2$
↳ centro sull'asse x

DIMOSTRAZIONE SIMMETRIA DEL VERSORE DI SFORZO

- La simmetria del tensore di sforzo consente di uscire dall'equilibrio sotto rotazione di un tetraedro infinitesimo



- Si considerino 3 nuovi assi: (x'_1, x'_2, x'_3) che abbiano origine nel baricentro G della faccia $\Delta \bar{\Sigma}_2$, dove possiamo considerare applicati gli sforzi:
 - Le distanze tra i baricentri delle facce $\Delta \bar{\Sigma}_i$ e G_2 sono:
$$d_i := \frac{dx'_i}{3}$$
- Il volume del tetraedro è $dV = d\bar{\Sigma}_1 \frac{dx'_1}{3} = d\bar{\Sigma}_2 \frac{dx'_2}{3} = d\bar{\Sigma}_3 \frac{dx'_3}{3}$
- Calcolare il momento di una forza attorno ad un asse significa calcolare il momento di quella forza rispetto a un generico punto dell'asse, proiettato sull'asse in questione

- Quindi calcoliamo quali forze hanno momento non nullo rispetto a x'_1
 - $\underline{\sigma}_2$ è applicata ad un punto di $x'_1 \Rightarrow$ ha momento nullo rispetto a x'_1
 - $\underline{\sigma}_1$ è parallelo a $x'_1 \Rightarrow$ ha momento nullo
x infatti x'_1 passa per G_1
 - $\underline{\sigma}_2$ e $\underline{\sigma}_3$ hanno momento
- Ci diamo quindi componenti di $\underline{\sigma}_2$ e $\underline{\sigma}_3$ contribuiscono al momento
 - σ_{22} e σ_{33} sono paralleli al loro raggio, dunque hanno momento nullo
 - σ_{21} e σ_{31} hanno momento rispetto a G ma tale vettore è ortogonale rispetto a $x'_1 \Rightarrow$ momento rispetto all'asse nullo
 - σ_{23} e σ_{32} sono le uniche componenti ad avere momento
- Nell'equilibrio alla rotazione del tetraedro attorno all'asse x'_1 intervengono solo le forze $\underline{\sigma}_{23} d\bar{\Sigma}_2$ e $\underline{\sigma}_{32} d\bar{\Sigma}_3$
 - Volendo trascurare gli infinitesimi di ordine superiore al terzo ottengo
$$\sigma_{23} d\bar{\Sigma}_2 \frac{dx'_2}{3} = \sigma_{32} d\bar{\Sigma}_3 \frac{dx'_3}{3} \rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

DEVIATORI CHE E IDROSTATICI

$$\underline{\underline{\sigma}} = p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\xi}}$$

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{n}}$$

$$p = \frac{1}{3} (\text{tr}(\underline{\underline{\xi}}))$$

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{n}}$$

$$\underline{\underline{I}}_n = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{3} (\text{tr}(\underline{\underline{\xi}}))$$