Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Secondo Appello – 14 febbraio 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ______________________

Codice Persona: ______________________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

Parte A (10 punti)

1. Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 3y - z = 3 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

- [A] ammette infinite soluzioni
- [B] ammette due soluzioni
- [C] ammette un'unica soluzione
- [D] non ammette soluzioni

2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

- [A] non è invertibile per $k = 5$
- [B] non è invertibile per $k = \frac{10}{3}$
- [C] è invertibile per $k = 1$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
- [D] è invertibile per $k = 0$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Trovare la retta perpendicolare alle due rette

$$r_1 = (1,0,2) + \mathrm{Span}(0,1,0), \qquad r_2 = (2,1,0) + \mathrm{Span}(0,0,1)\,.$$

- [A] $(0,1,2) + \mathrm{Span}(1,0,0)$
- [B] $(0,2,1) + \mathrm{Span}(1,0,0)$
- [C] $(1,0,2) + \mathrm{Span}(1,0,0)$
- [D] $(2,1,0) + \mathrm{Span}(1,0,0)$

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio vettoriale?

A $\{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

B $\{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

C $\{(0, t^2) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

D $\{(t, 1) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ una matrice diagonalizzabile con $\chi_A(x) = -x(3+x)^2$. Allora

A $\dim\ker(A + 3I_3) = 2$

B A è invertible

C A è simmetrica

D Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2,2)$ una matrice simile a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

A $\mathrm{rk}(A) = 2$

B $\det(A) = 4$

C $\chi_A(x) = (1-x)^2$

D $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è suriettiva

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ i suoi autovalori distinti. Quali delle seguenti condizioni è impossibile?

A $r = 0$

B $\sum_{i=1}^r g_{\lambda_i} < \sum_{i=1}^r a_{\lambda_i}$

C $\sum_{i=1}^r g_{\lambda_i} > n$

D $\sum_{i=1}^r a_{\lambda_i} < n$

8. Sia V uno spazio euclideo e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}\| = 3, \|\mathbf{w}\| = 5$. Quali dei seguenti valori di $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ è possibile?

A $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 4$

B $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0$

C $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 1$

D $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 9$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice ortogonale. Allora

A $\det A = \pm 1$

B $\det A = 0$

C $\det A = \pm\sqrt{2}$

D $\det(A) = 1$

10. In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ il vettore delle coordinate del polinomio $p(t) = 2 + 3t + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1+t, 2t, t^2\}$ è

A $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2,3,3,2]
In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \,:\, p(1) = 2p(0)\} \quad \text{e} \quad W = \operatorname{Span}\{t-1, t^2\}\,.$$

1. Determinare una base di U e di W.
2. Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.
3. Si scriva (se possibile) il polinomio $p(t) = t$ come somma di un polinomio di U e di un polinomio di W. C'è un'unica soluzione? Perché?
4. Stabilire se la funzione $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ definita da

$$L(p(t)) = p(1) - 2p(0)$$

è un'applicazione lineare. In caso affermativo trovare basi dell'immagine e del nucleo.

Esercizio 2. [Punteggio: 1, 3, 2, 2, 2]
In $\mathbb{R}^2$, considerare l'operazione $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \,.$$

1. Dimostrare che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Dimostrare che è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare il complemento ortogonale di $H = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a questo prodotto scalare.
4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questo prodotto scalare.
5. Rispetto a questo prodotto scalare, determinare la proiezione ortogonale $\pi_H(\mathbf{v})$ del $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sul sottospazio H.