# Algebra Lineare – Appello di settembre – Parte B – Soluzioni

**Esercizio 1.** Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W = \{(x,y,z,w)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : x+y-5w = y-2w = 0\}.$$

1. Determinare le equazioni cartesiane di $U$ ed una base di $W$.
2. Determinare dimensioni e basi di $U+W$ e $U\cap W$.
3. Determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (3,-1,1,-2)^\intercal$ su $W$.

1. I coefficienti dei generatori di $U$ danno equazioni cartesiane di $U^\perp$ cioè $a_1 + a_2 = 2a_1 + a_2 + a_4 = 0$, e troviamo $U^\perp = \operatorname{Span}\big((0,0,1,0)^\intercal, (1,-1,0,-1)^\intercal\big)$. A loro volta, i coefficienti dei generatori di $U^\perp$ danno equazioni cartesiane di $U$, cioè $z = x-y-w = 0$. Risolvendo le equazioni cartesiane di $W$ troviamo $W = \operatorname{Span}\big((3,2,0,1)^\intercal, (0,0,1,0)^\intercal\big)$.

2. Notiamo che $(1,1,0,0)^\intercal + (2,1,0,1)^\intercal = (3,2,0,1)^\intercal \in U\cap W$, quindi $\dim(U\cap W) \geq 1$. D'altro canto $(1,1,0,0)^\intercal$ non soddisfa le equazioni cartesiane di $W$, quindi $U\cap W \subsetneq W$ e $\dim(U\cap W) < \dim W = 2$. Segue che $\dim(U\cap W) = 1$ e quindi $\{(3,2,0,1)^\intercal\}$ è una base di $U\cap W$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$ e quindi $\{(0,0,1,0)^\intercal, (3,2,0,1)^\intercal, (1,1,0,0)^\intercal\}$ è una base di $U+W$.

3. Abbiamo già una base ortogonale di $W$. Calcoliamo dunque la proiezione ortogonale

$$\begin{aligned}\pi_W(\mathbf{u}) &= \frac{(3,-1,1,-2)\cdot(3,2,0,1)}{\|(3,2,0,1)\|^2}(3,2,0,1) + \frac{(3,-1,1,-2)\cdot(0,0,1,0)}{\|(0,0,1,0)\|^2}(0,0,1,0)\\ &= \frac{5}{14}(3,2,0,1) + \frac{1}{1}(0,0,1,0) = \left(\frac{15}{14}, \frac{10}{14}, 1, \frac{5}{14}\right).\end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Un endomorfimso $L : V \to V$ è detto *idempotente* se $L\circ L = L$.

1. Sia $L$ un endomorfismo. Se $L$ non è invertibile, dimostrare che 0 è un autovalore di $L$.
2. Sia $L$ un endomorfismo idempotente. Se $L$ non è l'endomorfismo nullo, dimostrare che $\operatorname{Im}(L)$ è un autospazio di $L$.
3. Sia $L$ un endomorfismo idempotente. Se $L$ è invertibile, dimostrare che $L = \mathrm{id}_V$.
4. Sia $L$ un endomorfismo idempotente. Dimostrare che $L$ è diagonalizzabile.

1. Dato che $L$ è un endomorfismo, se $L$ non è invertibile, allora $\ker(L) \neq \{\mathbf{0}\}$, quindi 0 è un autovalore con autospazio $E_0 = \ker(L)$.
2. Sia $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in \operatorname{Im}(L)$. Allora $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ per qualche $\mathbf{v} \in V$, e dall'ipotesi segue che $L(\mathbf{w}) = L\circ L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, quindi $\mathbf{w}$ è autovettore associato all'autovalore 1, e $\operatorname{Im}(L) \subseteq E_1$. Viceversa, se $\mathbf{w} \in E_1$ allora $L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, quindi $\mathbf{w} \in \operatorname{Im}(L)$ e $E_1 \subseteq \operatorname{Im}(L)$.
3. Da $L\circ L = L$ segue $L^{-1}\circ L\circ L = L^{-1}\circ L$ e quindi $L = \mathrm{id}_V$
4. Se $L$ è l'endomorfismo nullo, allora è ovviamente diagonalizzabile. Se $L$ è invertibile, allora $L = \mathrm{id}_V$ dal punto 3, ed è diagonalizzabile. Se $L$ non è nullo o invertibile, allora ha autospazi $E_0 = \ker(L)$ e $E_1 = \operatorname{Im}(L)$ dai punti 1 e 2. Dal teorema di nullità+rango abbiamo $\dim\ker(L) + \dim\operatorname{Im}(L) = \dim V$, cioè $V = E_0 + E_1$, quindi esiste una base di $V$ composta da autovettori di $L$.