Algebra Lineare – Esempi di domande della Parte B – Soluzioni

Docente: Alessio Sammartano

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

a) Determinare base e dimensione di immagine e nucleo di L.

b) Determinare la matrice $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ che rappresenta L rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{(-2,0,1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal, (1,1,1)^\intercal\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C} = \{(1,1,1)^\intercal, (1,-1,0)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\}.$$

c) Determinare un sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\dim L(H) < \dim H$.

a) L'applicazione L è l'applicazione L_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{col}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

in quanto le colonne soddisfano $C_1 - 2C_2 + C_3 = \mathbf{0}$. Dato che C_1, C_2 sono linearmente indipendenti, concludiamo che $\{C_1, C_2\}$ è una base di $\mathrm{col}(A) = \mathrm{Im}(L)$. Dal Teorema di Nullità+Rango segue che $\dim \ker(L) = 1$. Dalla relazione $C_1 - 2C_2 + C_3 = \mathbf{0}$ segue che $A(1,-2,1)^\intercal = \mathbf{0}$, quindi una base di $\ker(L) = \ker(A)$ è $\{(1,-2,1)^\intercal\}$.

b) Calcoliamo le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ e le loro coordinate rispetto a $\mathcal{C}$:

$$L\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[L\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[L\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left[L\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

da cui segue che $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}-1&1&3\\2&1&3\\5&1&3\end{pmatrix}$.

c) Dal Teorema di Nullità+Rango segue che un sottospazio H soddisfa $\dim L(H)<\dim H$ se e solo se $H\cap\ker(L)\neq\{\mathbf{0}\}$, che in questo caso equivale a $\ker(L)\subseteq H$. Ad esempio si può prendere $H=\ker(L)$, oppure $H=\mathbb{R}^3$.

2. Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}.$$

a) Determinare se A e B sono simili.

b) Scrivere equazioni di diagonalizzazione per A e C.

c) Determinare se A e C sono simili, ed in tal caso trovare una matrice invertibile S tale che $A=S^{-1}CS$.

a) Abbiamo $\chi_A(t)=(1-t)(4-t)-(1)(-2)=t^2-5t+6=(3-t)(2-t)$ e $\chi_B(t)=(1-t)(4-t)$. Dato che $\chi_A(t)\neq\chi_B(t)$, segue che A e B non sono simili.

b) Troviamo $\chi_C(t)=(3-t)(2-t)$, quindi A e C hanno gli stessi autovalori 2, 3. Troviamo gli autovettori delle rispettive matrici: per la matrice A abbiamo

$$E_2(A)=\ker(A-2I_2)=\ker\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$E_3(A)=\ker(A-3I_2)=\ker\begin{pmatrix}-2&-2\\1&1\end{pmatrix}=\operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

e troviamo l'equazione di diagonalizzazione

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}2&1\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Analogamente, per la matrice C abbiamo

$$E_2(C) = \ker(C - 2I_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(C) = \ker(C - 3I_2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e troviamo l'equazione di diagonalizzazione

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A e C sono simili, in quanto sono simili alla stessa matrice. Infatti, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = S^{-1}CS$$

dove $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Considerare i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \qquad W = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare una base e la dimensione di U e di W.

(b) Determinare una base e la dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$.

1. U è lo spazio delle colonne della matrice A. Troviamo il rango

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2, R_4+R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo $\dim U = \dim \mathrm{col} A = 2$. Quindi, per ottenere una base di U, basta prendere due vettori linearmente indipendenti in U, ad esempio $\{(0, -1, 1, 1)^\intercal, (2, -2, 0, 2)^\intercal\}$.

Risolviamo il sistema lineare che definisce W

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\quad x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = \qquad -x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t + s = 0 \\ x_2 = \qquad t \\ x_3 = \qquad -s \\ x_4 = \qquad s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

quindi $\dim W = 2$, e una sua base è $\{(-1,1,0,0)^\intercal, (1,0,-1,1)^\intercal\}$.
2. L'unione delle basi di U e W è un insieme di generatori di $U+W$, cioè, $U+W$ è lo spazio delle colonne della matrice B. Applichiamo l'algoritmo di estrazione di una base:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2, R_4+R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\dim(U+W) = 3$, e che una base di $U+W$ è composta dalle prime 3 colonne di B: $\{(0,-1,1,1)^\intercal, (2,-2,0,2)^\intercal, (-1,1,0,0,)^\intercal\}$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$, quindi, per ottenere una base, basta trovare un vettore non nullo in $U \cap W$. Un esempio è

$$-(0,-1,1,1)^\intercal + (2,-2,0,2)^\intercal = (2,-1,-1,1)^\intercal = -(-1,1,0,0)^\intercal + (1,0,-1,1)^\intercal$$

4. Fissiamo la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dati due vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$, considerare l'operazione $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ definita da

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \mathbf{v}^\intercal M \mathbf{w} = 2v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 2v_2w_2$$

(a) Verificare che l'operazione $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.
(b) Verificare che il complemento ortogonale del sottospazio $H = \mathrm{Span}\big((1,0)^\intercal\big)$ rispetto a questo prodotto scalare è $H^\perp = \mathrm{Span}\big((1,-2)^\intercal\big)$.
(c) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questo prodotto scalare.
(d) Calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (1,1)^\intercal$ su H rispetto a questo prodotto scalare.

1. Verifichiamo le 3 proprietà di un prodotto scalare. Proprietà commutativa:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^\intercal M \mathbf{w} \overset{*}{=} (\mathbf{v}^\intercal M \mathbf{w})^\intercal = \mathbf{w}^\intercal M^\intercal \mathbf{v} \overset{**}{=} \mathbf{w}^\intercal M \mathbf{v} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$$

dove l'uguaglianza $*$ vale in quanto $\mathbf{v}^\intercal M\mathbf{w}$ è una matrice 1×1, e l'uguaglianza $**$ in quanto M è simmetrica. La proprietà bilineare segue dalle proprietà del prodotto matriciale:

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2,\mathbf{w}\rangle &= (\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2)^\intercal M\mathbf{w} = (\lambda_1\mathbf{v}_1^\intercal+\lambda_2\mathbf{v}_2^\intercal)M\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1^\intercal M\mathbf{w}+\lambda_2\mathbf{v}_2^\intercal M\mathbf{w}\\ &= \lambda_1\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{w}\rangle+\lambda_2\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{w}\rangle.\end{aligned}$$

Infine, per la proprietà definita positiva, basta osservare che la forma quadratica

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 2v_1^2+2v_1v_2+2v_2^2 = (v_1+v_2)^2+v_1^2+v_2^2$$

è definita positiva (è chiaro che $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\geq 0$, e $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=0$ solo se $v_1=v_2=0$, cioè $\mathbf{v}=\mathbf{0}$).

2. Dato che $\dim H^\perp = 2-\dim H = 1$, per verificare $H^\perp = \mathrm{Span}\big((1,-2)^\intercal\big)$ basta calcolare

$$\langle (1,0)^\intercal,(1,-2)^\intercal\rangle = 2(1)(1)+(1)(-2)+(0)(1)+2(0)(-2) = 2-2=0.$$

3. Dal punto precedente segue che $\{(1,0)^\intercal,(1,-2)^\intercal\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$, quindi basta normalizzare i due vettori:

$$\begin{aligned}\|(1,0)^\intercal\| &= \sqrt{\langle(1,0)^\intercal,(1,0)^\intercal\rangle} = \sqrt{(1+0)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\\ \|(1,-2)^\intercal\| &= \sqrt{\langle(1,-2)^\intercal,(1,-2)^\intercal\rangle} = \sqrt{(1-2)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6},\end{aligned}$$

segue che $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.

4. Detto $\mathbf{u}=(1,0)^\intercal$, calcoliamo

$$\pi_H(\mathbf{v}) = \frac{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \frac{2(1)(1)+(1)(1)+(0)(1)+2(0)(1)}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\0\end{pmatrix}.$$

5. Sia $k\in\mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'applicazione lineare $L_k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ avente matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A_k = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ k & 0 & k\\ 3 & k & -1\end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ l'applicazione L_k è suriettiva, per quali è iniettiva e per quali è invertibile.

(b) Determinare una base per il nucleo e una per l'immagine al variare di k.

(c) Trovare i valori di k per cui A_k è una matrice simmetrica, e per tali valori determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di L_k.

1. Abbiamo $\dim \mathrm{Im}(L_k) = \dim \mathrm{col}(A_k) = \mathrm{rk}(A_k)$, quindi L_k è suriettiva se e solo se $\mathrm{rk}(A_k) = 3$. Inoltre, trattandosi di un endomorfismo, dal teorema di nullità+rango segue che le condizioni iniettiva, suriettiva, invertivibile sono equivalenti. Calcoliamo $\mathrm{rk}(A_k)$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ k & 0 & k \\ 3 & k & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - kR_1, R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2k \\ 0 & k & -10 \end{pmatrix} = A'_k$$

segue che $\mathrm{rk}(A_k) = 3$ se $k \neq 0$, $\mathrm{rk}(A_k) = 2$ se $k = 0$. In conclusione, L_K è suriettiva/iniettiva/invertibile se e solo se $k \neq 0$.

2. Dal punto precedente deduciamo immediatamente che se $k \neq 0$ allora $\mathrm{Im}(L_k) = \mathbb{R}^3$ e $\ker(L_k) = \{\mathbf{0}\}$, quindi delle loro basi sono rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\emptyset$. Invece, per $k = 0$, dal punto precedente abbiamo $\dim \mathrm{Im}(L_0) = 2$, $\dim \ker(L_0) = 1$, e troviamo basi

$$\mathrm{Im}(L_0) = \mathrm{col}(A_0) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \ker(L_0) = \ker(A_0) = \ker(A'_0) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

3. La matrice A_k è simmetrica se e solo se $k = 0$. Dato che $\mathrm{rk}(A_0) = 2$, sappiamo già che $\lambda_1 = 0$ è un autovalore di A_0 con molteplicità 1, e autospazio $\ker(A_0)$ generato dall'autovettore $\mathbf{e}_2$. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\chi_{A_0}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 3 \\ 0 & -t & 0 \\ 3 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = -t \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ 3 & -1-t \end{pmatrix} = -t(t^2 - 10) = -t(\sqrt{10} - t)(-\sqrt{10} - t).$$

Calcoliamo gli autospazi

$$E_{\sqrt{10}} = \ker \begin{pmatrix} 1-\sqrt{10} & 0 & 3 \\ 0 & -\sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & -1-\sqrt{10} \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1-\sqrt{10} \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-\sqrt{10}} = \ker \begin{pmatrix} 1+\sqrt{10} & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & -1+\sqrt{10} \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1+\sqrt{10} \end{pmatrix} \right)$$

e concludiamo che $\{(0,1,0)^\intercal, (-3,0,1-\sqrt{10})^\intercal, (-3,0,1+\sqrt{10})^\intercal\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di L_0.

6. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2-x_3+2x_4 = 0\}.$$

(a) Scrivere la forma cartesiana di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$ e scrivere la sua forma parametrica.

(c) Calcolare una base di $U\cap W$ e una base di $U+W$.

1. Per trovare la forma cartesiana di U, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} a_1 \quad + a_3 \quad = 0 \\ a_1 + a_2 \quad = 0 \\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \quad + a_3 \quad = 0 \\ \quad a_2 - a_3 \quad = 0 \\ \quad - a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_3 = \ \ a_3 \\ a_4 = \ \ a_3 \end{cases}$$

trovando soluzioni $\operatorname{Span}\big((-1,1,1,1)^\intercal\big)$, da cui deduciamo la forma cartesiana

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : -x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}.$$

2. Dal punto precedente deduciamo immediatamente che $\{(-1,1,1,1)^\intercal\}$ è una base di $U^\perp$, e quindi la sua forma parametrica è

$$U^\perp = \operatorname{Span}\big((-1,1,1,1)^\intercal\big) = \{(-t,t,t,t)^\intercal : t \in \mathbb{R}\}.$$

3. Per trovare una base di $U\cap W$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ \ \ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ \qquad 2x_2 \qquad + 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \quad -\frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

trovando la base $\left\{\left(-\frac{1a}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1\right)^\intercal, (1,0,1,0)^\intercal\right\}$ di $U\cap W$. Deduciamo che $\dim(U\cap W) = 2$. Sappiamo già che $\dim U = \dim W = 3$, quindi $\dim(U+W) = 4$ per la formula di Grassmann, cioè $U+W = \mathbb{R}^4$ e una sua base è $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

7. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito da

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche scelte per il dominio e il codominio è

$$M_L^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare una base di $\ker(L)$ e una base di $\mathrm{Im}(L)$.

(c) Determinare una base di $\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)$ e una base di $\ker(L) + \mathrm{Im}(L)$.

1. La matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche è $A = M_L^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \big(L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3), L(\mathbf{e}_4)\big)$. I vettori $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_3)$ sono già dati, ricaviamo i rimanenti:

$$L(\mathbf{e}_4) = L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_1) = L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) - L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0} - \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2,$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{e}_2) = L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3) &= L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) - L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) - L(\mathbf{e}_3) \\ &= L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) - \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

ottenendo

$$A = \big(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{0}, -\mathbf{e}_2\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Osserviamo che $\ker L = \ker A$. E' evidente che $\mathrm{rk} A = \dim \mathrm{row} A = 2$. Dal teorema di nullità + rango otteniamo $\dim \ker A = 4 - \mathrm{rk} A = 2$. Dato che $L(\mathbf{e}_3) = L(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$ sono linearmente indipendenti, concludiamo che $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\}$ è una base di $\ker A = \ker L$.

Abbiamo $\mathrm{Im} L = \mathrm{col} A$ e $\dim \mathrm{col} A = \mathrm{rk} A = 2$. Dato che le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti, concludiamo che una base di $\mathrm{Im} L$ è $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$.

3. Vediamo subito che $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \in \mathrm{Span}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) \cap \mathrm{Span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)$, quindi $\dim(\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)) \geq 1$. Inoltre è chiaro che $\mathbf{e}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) = \ker(L)$, quindi $\ker(L) \neq \mathrm{Im}(L)$ e quindi $\dim(\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)) < 2$. Concludiamo che $\dim(\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L)) = 1$ e che $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$ è una base. Dalla teorema di Grassmann otteniamo che $\dim(\mathrm{Im}(L) + \ker(L)) = 2 + 2 - 1 = 3$. Dal fatto che $\mathbf{e}_2 \notin \ker(L)$ deduciamo che $\dim \mathrm{Span}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4) = 3$ e quindi $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4\}$ è una base di $\mathrm{Im}(L) + \ker(L)$.

8. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Stabilire se le due matrici sono simili.

(b) Stabilire se A o B sono ortogonalmente diagonalizzabili e, in tal caso, determinare una base ortonormale di autovettori.

1. La matrice A è triangolare superiore, per cui gli autovalori sono gli elementi sulla diagonanle: $a_2 = 2, a_{-2} = 1$. Calcoliamo il polinomio caratteristico di B

$$\chi_B(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 2 & 0 & -t \end{pmatrix} = (2-t)t^2 - 4(2-t) = (2-t)(t^2-4) = (2-t)^2(-2-t)$$

quindi anche B ha gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche. Consideriamo adesso le molteplicità geometriche:

$$g_2(A) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2 \qquad g_2(B) = \dim\ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

e ovviamente $g_{-2}(A) = g_{-2}(B) = 1$. Quindi le molteplicità geometriche coincidono per A e B, ed entrambe le matrici sono diagonalizzabili e simili alla stessa matrice diagonale: detta

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

esistono matrici invertibili S, T tali che $D = SAS^{-1} = TBT^{-1}$, quindi $A = (T^{-1}S)^{-1}BT^{-1}S$ e A, B sono simili.

2. Per il teorema spettrale, A non è ortogonalmente diagonalizzabile in quanto non simmetrica, e B è ortogonalmente diagonalizzabile in quanto simmetrica. Troviamo gli

autospazi di B

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\big((1,0,1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$$

$$E_{-2} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\big((1,0,-1)^\intercal\big)$$

e concludiamo che $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^\intercal\right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di B.