Algebra Lineare – Appello di giugno – Parte B – Soluzioni

Esercizio 1. Sia $V = \mathrm{Mat}(2,2)$ e sia $M \in V$ una matrice fissata. Considerare l'insieme

$$H = \{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid AM = MA\} \subseteq V$$

formato da tutte la matrici che commutano con M.

a) Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di V.

b) Trovare un endomorfismo $L : V \to V$ tale che $\ker(L) = H$.

c) Determinare una base di H nel caso in cui $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice nulla $O \in \mathrm{Mat}(2,2)$ soddisfa $AO = O = OA$, quindi $O \in H$.
Se $A_1, A_2 \in H$ allora

$$A_1M = MA_1, A_2M = MA_2 \Rightarrow A_1M + A_2M = MA_1 + MA_2 \Rightarrow (A_1 + A_2)M = M(A_1 + A_2)$$

quindi $A_1 + A_2 \in H$. Se $A \in H, c \in \mathbb{R}$ allora

$$AM = MA \Rightarrow cAM = cMA \Rightarrow (cA)M = M(cA)$$

quindi $cA \in H$. Concludiamo che H è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}(2,2)$.

b) L'esempio naturale è $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(A) = AM - MA$.
Verifichiamo che L è un'applicazione lineare: se $A_1, A_2 \in V, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$L(c_1A_1 + c_2A_2) = (c_1A_1 + c_2A_2)M - M(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1A_1M + c_2A_2M - c_1MA_1 - c_2MA_2$$

$$= c_1A_1M - c_1MA_1 + c_2A_2M - c_2MA_2 = c_1(A_1M - MA_1) + c_2(A_2M - MA_2) = c_1L(A_1) + c_2L(A_2)$$

E' ovvio che $\ker(L) = H$, per definzione di H.

c) Cerchiamo le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

sia uguale a

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \Rightarrow H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

da cui, essendo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ due vettori linearmente indipendenti, una base di H è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Considerare l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L_k\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(k) - p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

a) Determinare una base di $\mathrm{Im}(L_k)$ e di $\ker(L_k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

b) Determinare i valori di k per cui L_k è iniettiva.

c) Determinare la matrice rappresentativa di L_k rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{t-1, t+2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Abbiamo $\mathbb{R}[t]_{\leq 1} = \mathrm{Span}(1, t)$ quindi

$$\mathrm{Im}(L_k) = L_k(\mathbb{R}[t]_{\leq 1}) = L_k(\mathrm{Span}(1,t)) = \mathrm{Span}(L_k(1), L_k(t)) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Se $k \neq 0$, i vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathrm{Im}(L_k)$. Dal teorema di nullità+rango, $\dim\ker(L_k) = \dim \mathbb{R}[t]_{\leq 1} - \dim \mathrm{Im}(L_k) = 2-2 = 0$, quindi la base di $\ker(L_k)$ è l'insieme vuoto. In particolare, $\ker(L_k) = \{\mathbf{0}\}$, quindi L_k è iniettiva e una base di $\ker(L_k)$ è l'insieme vuoto. Se $k = 0$, i due vettori sono linearmente dipendenti, e una base di $\mathrm{Im}(L_0)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Il nucleo di L_0 è

$$\ker(L_0) = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \mid p(-1) = 0\} = \{a + bt \mid a - b = 0\} = \mathrm{Span}(1+t)$$

e una base di $\ker(L_0)$ è $\{1+t\}$. Essendo $\ker(L_0) \neq \{\mathbf{0}\}$, segue che L_0 non è iniettiva.
Calcoliamo le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$

$$L_k(t-1) = \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}, \quad L_k(t+2) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le scriviamo come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{C}$

$$\begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k+8 \\ -2k-6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-4 \\ -2k+3 \end{pmatrix}$, e infine

$$M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = ([t-1]_{\mathcal{C}}, [t+2]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} 3k+8 & 3k-4 \\ -2k-6 & -2k+3 \end{pmatrix}.$$