Algebra Lineare – Appello di febbraio – Parte B – Soluzioni

Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il nucleo $\ker(L)$ e la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(L)$.

b) Determinare la matrice $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ che rappresenta L rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{1+t, 1-t, t^2+t^3, t^2-t^3\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Determinare tre vettori $p_1(t), p_2(t), p_3(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ linearmente indipendenti e tali che le immagini $L\big(p_1(t)\big), L\big(p_2(t)\big), L\big(p_3(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

a) Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Abbiamo

$$p(t) \in \ker(L) \Leftrightarrow L\big(p(t)\big) = \mathbf{0} \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_3 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Concludiamo che $\ker(L) = \{-at + at^3 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(-t + t^3)$. Dal teorema di nullità + rango deduciamo che $\dim \mathrm{Im}(L) = \dim \mathbb{R}[t]_{\leq 3} - \dim \ker(L) = 4 - 1 = 3$.

b) Calcoliamo le immagini dei vettori della prima base e scriviamo i risultati come combinazione lineare dei vettori della seconda base

$$L(1+t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L(1-t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L(t^2+t^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L(t^2-t^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e concludiamo che $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) E' sufficiente scegliere 3 vettori p_1, p_2, p_3 linearmente indiependenti il cui span contenga il nucleo $\ker(L)$: infatti, dal teorema di nullità + rango seuge che

$$\dim \operatorname{Span}(L(p_1), L(p_2), L(p_3)) = \dim L(\operatorname{Span}(p_1, p_2, p_3)) =$$

$$\dim \operatorname{Span}(p_1, p_2, p_3) - \dim \ker(L) = 3 - 1 = 2$$

quindi $L(p_1), L(p_2), L(p_3)$ non sono linearmente indipendenti. Ad esempio, $1, t^2, -t + t^3$.

Esercizio 2. Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base ortonormale di H.

b) Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale $H^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$.

c) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_H(\mathbf{v})$ e $\pi_{H^\perp}(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = (3, 4, 5)^\intercal$ sui sottospazi H e $H^\perp$.

d) Determinare un'isometria lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T\big(\operatorname{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\big) = H$, dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Risolvendo l'equazione lineare $x_1 = -x_2 - x_3$, troviamo la base $\{(1, -1, 0)^\intercal, (1, 0, -1)^\intercal\}$. Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|} \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Dalla forma cartesiana di H segue immediatamente che $H^\perp = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, quindi una base ortonormale è data dal vettore $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Determiniamo prima la proiezione su $H^\perp$

$$\pi_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3 + 4 + 5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e deduciamo quella su H

$$\pi_H(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \pi_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Basta considerare l'applicazione lineare T_A associata a una matrice ortogonale A le cui prime due colonne siano una base di H. Utilizzando i punti a) e b), una tale matrice è $A = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, che è ortogonale dato che $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.