Algebra Lineare – Appello di luglio – Parte B – Soluzioni

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Trovare un valore di k per cui l'insieme delle soluzioni S del sistema ha dimensione 2.

b) Determinare una forma parametrica della retta $R \subseteq \mathbb{R}^4$ passante per i due punti $(2, 0, -1, -2)^\intercal$ e $(1, -1, 0, -1)^\intercal$.

c) Per il valore di k trovato nel punto (a), determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini R e S.

d) Determinare l'immagine della retta R mediante l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L\big((x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal\big) == (x_2 + x_3, x_3 - x_4)^\intercal$.

a) Dal Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha un insieme di soluzioni S di dimensione 2 (quindi non vuoto) se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|\mathbf{b}) = 4 - 2 = 2$. Riduciamo la matrice completa del sistema $(A|\mathbf{b})$ a scala:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & k & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & k & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che S ha dimensione 2 se e solo se $k = 2$.
b) La giacitura sarà generata da $(2, 0, -1, -2)^\intercal - (1, -1, 0, -1)^\intercal = (1, 1, -1, -1)^\intercal$, quindi $R = (2, 0, -1, -2)^\intercal + \text{Span}\big((1, 1, -1, -1)^\intercal\big)$, cioè $R = \{(2 + t, t, -1 - t, -2 - t)^\intercal : t \in \mathbb{R}\}$.
c) Calcoliamo $S \cap R$ sostituendo il generico punto di R nel sistema di S:

$$\begin{cases} 2(2 + t) + t + 3(-1 - t) + (-2 - t) = 7 \\ (2 + t) + (-1 - t) + (-2 - t) = 3 \end{cases} \to \begin{cases} -t = 7 \\ -t - 1 = 3 \end{cases}$$

il sistema non ha soluzioni, quindi $S \cap R = \emptyset$.
Siano H_R, H_S le giaciture di R, S. Dato che $\dim H_R = 1$, ci sono due possibilità: $H_R \cap H_S = \{\mathbf{0}\}$ o $H_R \subseteq H_S$. Per capire quale, basta sostituire il generatore di H_R nel sistema (omogeneo) di H_S

$$\begin{cases} 2(1) + 1 + 3(-1) + (-1) = 0 \\ 1 + (-1) + (-1) = 0 \end{cases}$$

il vettore non è una soluzione del sistema, quindi H_R non è sottospazio di H_S. Segue che R, S sono sghembi.
d) Applichiamo L ai punti di R

$$L(R) = \big\{L(2 + t, t, -1 - t, -2 - t)^\intercal : t \in \mathbb{R}\big\} = \big\{\big(t + (-1 - t), (-1 - t) - (-2 - t)\big)^\intercal\big\}$$

semplificando, l'immagne di R è il punto $\{(-1, 1)^\intercal\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Dato un endomorfismo $L : V \to V$, l'endomorfismo $L^3 : V \to V$ è definito come composizione $L^3(\mathbf{v}) = L(L(L(\mathbf{v})))$.

a) Sia L un endomorfismo tale che $L^3 = \mathrm{id}_V$. Dimostrare che L è un isomorfismo.

b) Sia L un endomorfismo tale che $L^3 = \mathrm{id}_V$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di L, dimostrare che $\lambda^3 = 1$.

c) Sia L un endomorfismo tale che $L^3 = \mathrm{id}_V$, e supponiamo che L sia diagonalizzabile. Dimostrare che $L = \mathrm{id}_V$.

d) Sia $L : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ l'endomorfismo $L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4)$. Dimostrare che L non è diagonalizzabile.

a) L è invertibile, e quindi un isomorfismo, in quanto $L \circ L^2 = L^2 \circ L = \mathrm{id}_V$ per ipotesi.
b) Sia $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ un autovettore di L associato a λ, allora $\lambda^3 = 1$ dato che

$$\mathbf{v} = \mathrm{id}_V(\mathbf{v}) = L^3(\mathbf{v}) = L^2(\lambda\mathbf{v}) = \lambda L^2(\mathbf{v}) = \lambda L(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2 L(\mathbf{v}) = \lambda^3\mathbf{v}.$$

c) Per ipotesi, esiste una base di V di autovettori di L. Da b) segue che l'unico autovalore di L è 1, quindi $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ per ogni vettore della base di autovettori, e quindi $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e $L = \mathrm{id}_V$.
d) Basta osservare che $L^3 = \mathrm{id}_V$, $L \neq \mathrm{id}_V$, e applicare c).