Domande a risposta multipla.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si considerino

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4k(k-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3k(k-2) \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori per cui il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni.

☐ $k = 0$
☐ $k = 0, 1$
☐ $k \neq 1$
☐ $k \neq 0, 1$

2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Determinare la dimensione del nucleo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\dim \ker A = 1$
☐ $\dim \ker A = 2$
☐ $\dim \ker A = 4$
☐ $\dim \ker A = 5$

4. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ dei vettori.

☐ Se $\dim V \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V
☐ Se $\dim V \geq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V
☐ Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim V \leq n$
☐ Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim V \geq n$

5. Quali delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?

☐ $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{v}^\intercal$
☐ $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(A) = ((2,-3)A)^\intercal$
☐ $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\intercal \mathbf{v}$
☐ $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(A) = A^\intercal A$

6. Sia $A = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ una matrice, dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono vettori colonna. Allora

☐ $\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) = \det(A)$
☐ $\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) = -\det(A)$
☐ $\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) = 2\det(A)$
☐ nessuna delle precedenti

7. Siano $V = \mathrm{Mat}(3, 3)$ e $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ allora

☐ esiste un isomorfismo $L : V \to W$
☐ non esiste un'applicazione lineare suriettiva $L : V \to W$
☐ esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$
☐ non esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$

8. Si consideri l'endomorfismo $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ definito da $L(p(t)) = p'(t)$

☐ L è diagonalizzabile
☐ gli autovalori sono $1, 2$
☐ L non è diagonalizzabile
☐ nessuna delle precedenti

9. Siano $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $L_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari tali che $\dim(\ker(L_1)) = 1$ e $\dim(\ker(L_2)) = 2$. Allora

☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 1$
☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 2$
☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 3$
☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_2 \circ L_1)) = 2$

10. Dato l'endomorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deifnito da $L((x, y)^\intercal) = (3x + 2y, x + 2y)^\intercal$, la sua matrice rappresentativa rispetto alla base $\{(1, 1)^\intercal, (2, 1)^\intercal\}$ è

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Domande a risposta aperta.

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e i sottospazi

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \qquad K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

(1) Trovare una forma cartesiana di H
(2) Determinare $\dim(H \cap K)$ e $\dim(H + K)$
(3) Determinare le matrici che rappresentano le proiezioni ortogonali π_K e $\pi_{K^\perp}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$
(4) Determinare autovalori e autovettori di $\pi_{K^\perp}$
(5) Trovare un endomorfismo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(L) = K^\perp$

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2.

(1) Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'endomorfismo $L_k : V \to V$ definito da
$$L_k\big(p(t)\big) = p(t) + (kt - 1)p'(t) + p''(t).$$
Determinare i valori di k per cui L_k è suriettivo.
(2) Determinare i valori di k per cui L_k è diagonalizzabile.
(3) Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che
$$p(1) = 3,\ p(2) = 5,\ p(3) = 7.$$
(4) Siano dati tre numeri reali b, c, d tutti distinti, e altri tre numeri reali β, γ, δ qualsiasi. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che
$$p(a) = \alpha,\ p(b) = \beta,\ p(c) = \gamma.$$

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si considerino

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4k(k-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3k(k-2) \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori per cui il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni.

- ☐ $k = 0$
- ☐ $k = 0, 1$
- ☑ $k \neq 1$
- ☐ $k \neq 0, 1$

Abbiamo

$$\operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0, 1 \\ 3 & \text{se } k \neq 0, 1 \end{cases} \qquad \operatorname{rk}(A, \mathbf{b}) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 3 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

la conclusione segue dal teorema di Rouché-Capelli

2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ☑ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinare la dimensione del nucleo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

- ☐ $\dim \ker A = 1$
- ☐ $\dim \ker A = 2$
- ☑ $\dim \ker A = 4$
- ☐ $\dim \ker A = 5$

Le due righe non sono proporzionali, quindi $\operatorname{rk} A = 2$, dal teorema di nullità + rango segue $\dim \ker A = 6 - 2 = 4$

4. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ dei vettori.
☐ Se $\dim V \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V
☐ Se $\dim V \geq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V
☐ Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim V \leq n$
☑ Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim V \geq n$

E' possibile completare $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ad una base di V.

5. Quali delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?
☐ $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{v}^\intercal$
☑ $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(A) = ((2,-3)A)^\intercal$
☐ $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\intercal\mathbf{v}$
☐ $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(A) = A^\intercal A$

$((2,-3)(c_1A_1 + c_2A_2)^\intercal = ((2,-3)c_1A_1 + (2,-3)c_2A_2)^\intercal = (c_1(2,-3)A_1 + c_2(2,-3)A_2)^\intercal$
$= c_1((2,-3)A_1)^\intercal + c_2((2,-3)A_2)^\intercal$

6. Sia $A = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ una matrice, dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono vettori colonna. Allora
☐ $\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) = \det(A)$
☑ $\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) = -\det(A)$
☐ $\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) = 2\det(A)$
☐ nessuna delle precedenti

$\det(C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) \overset{c_1 - c_3}{=} \det(C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2) \overset{c_2 - c_4}{=} \det(C_4, C_3, C_1, C_2)$
$\overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{=} -\det(C_1, C_3, C_4, C_2) \overset{c_2 \leftrightarrow c_4}{=} \det(C_1, C_2, C_4, C_3) \overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{=} -\det(C_1, C_2, C_4, C_3)$

7. Siano $V = \mathrm{Mat}(3,3)$ e $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ allora
☐ esiste un isomorfismo $L : V \to W$
☐ non esiste un'applicazione lineare suriettiva $L : V \to W$
☐ esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$
☑ non esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$

Segue dal teorema di nullità + rango dato che $\dim V > \dim W$.

8. Si consideri l'endomorfismo $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ definito da $L(p(t)) = p'(t)$
☐ L è diagonalizzabile
☐ gli autovalori sono $1, 2$
☑ L non è diagonalizzabile
☐ nessuna delle precedenti

Gli autovettori di L sono i polinomi $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ tali che $L(p(t)) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2$ è un multiplo di $p(t)$. Segue che $a_3 = a_2 = a_1 = 0$, quindi l'unico autospazio è $\mathrm{Span}(1)$ e $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ non ha una base di autovettori di L.

9. Siano $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $L_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari tali che $\dim(\ker(L_1)) = 1$ e $\dim(\ker(L_2)) = 2$. Allora
☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 1$
☑ $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 2$
☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 3$
☐ $\dim(\mathrm{Im}(L_2 \circ L_1)) = 2$

Dal teorema di nullità + rango segue che $\dim \mathrm{Im}(L_2) = 5 - 3 = 3$, quindi L_2 è suriettiva e $\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2) = L_1(L_2(\mathbb{R}^5)) = L_1(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Im}(L_1)$. Dal teorema di nullità + rango segue che $\dim \mathrm{Im}(L_1 \circ L_2) = \dim \mathrm{Im}(L_1) = 3 - 1 = 2$.

10. Dato l'endomorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deifnito da $L((x, y)^\intercal) = (3x + 2y, x + 2y)^\intercal$, la sua matrice rappresentativa rispetto alla base $\{(1, 1)^\intercal, (2, 1)^\intercal\}$ è

- ☑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$L(1, 1)^\intercal = (5, 3)^\intercal = 1(1, 1)^\intercal + 2(2, 1)^\intercal$, $L(2, 1)^\intercal = (8, 4)^\intercal = 0(1, 1)^\intercal + 4(2, 1)^\intercal$, quindi $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e i sottospazi

$$H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right), \qquad K = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_4 = 0\right\}$$

(1) Trovare una forma cartesiana di H
(2) Determinare $\dim(H \cap K)$ e $\dim(H + K)$
(3) Determinare le matrici che rappresentano le proiezioni ortogonali π_K e $\pi_{K^\perp}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$
(4) Determinare autovalori e autovettori di $\pi_{K^\perp}$
(5) Trovare un endomorfismo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(L) = K^\perp$

1) Troviamo i vettori $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$ tali che $\begin{cases} a_1(-1) + a_2(1) + a_3(-1) + a_4(2) = 0 \\ a_1(2) + a_2(-2) + a_3(2) + a_4(1) = 0 \\ a_1(1) + a_2(-1) + a_3(1) + a_4(-1) = 0 \end{cases}$, cioè

$$\ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \overset{\substack{R_2+2R_1\\R_3+R_1}}{=} \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \Rightarrow H = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2) $H \cap K = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{\substack{R_2+R_1\\R_3-R_1}}{=} \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, da cui $\dim(H\cap K) = 4 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1$. Dalla formula di Grassmann $\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K) = 2 + 3 - 1 = 4$.

3) Dalla forma cartesiana di K otteniamo subito $K^\perp = \mathrm{Span}(\mathbf{b})$ dove $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, quindi

$$\pi_{K^\perp}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b} = \frac{x_1 + x_2 + x_4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{K^\perp}(\mathbf{e}_1) = \pi_{K^\perp}(\mathbf{e}_2) = \pi_{K^\perp}(\mathbf{e}_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \pi_{K^\perp}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$

da cui $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}_{\pi_{K^\perp}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, e deduciamo $M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}_{\pi_K} = I_4 - M^{\mathcal{E},\mathcal{E}}_{\pi_{K^\perp}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

4) Abbiamo $\pi_{K^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in K$ $\pi_{K^\perp}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ e per ogni $\mathbf{w} \in K^\perp$, quindi $K \subseteq E_0$ e $K^\perp \subseteq E_1$. Dato che $K + K^\perp = \mathbb{R}^4$, segue che questi sono tutti gli autovettori di $\pi_{K^\perp}$. Esplicitamente, gli autivalori di $\pi_{K^\perp}$ sono 1 e 0, e gli autospazi sono $E_1 = K^\perp = \mathrm{Span}(1,1,0,1)^\intercal$ e, risolvendo l'equazione di K, $E_0 = K = \mathrm{Span}((1,0,0,-1)^\intercal, (0,1,0,-1)^\intercal, (0,0,1,0)^\intercal)$.

5) La proiezione ortogonale $\pi_K : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ soddisfa $\ker(\pi_K) = K^\perp$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado al più 2.

(1) Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'endomorfismo $L_k : V \to V$ definito da
$$L_k\big(p(t)\big) = p(t) + (kt-1)p'(t) + p''(t).$$
Determinare i valori di k per cui L_k è suriettivo.

(2) Determinare i valori di k per cui L_k è diagonalizzabile.

(3) Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che
$$p(1) = 3,\ p(2) = 5,\ p(3) = 7.$$

(4) Siano dati tre numeri reali b, c, d tutti distinti, e altri tre numeri reali β, γ, δ qualsiasi. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che
$$p(a) = \alpha,\ p(b) = \beta,\ p(c) = \gamma.$$

(1) Scriviamo la matrice rappresentativa di L_k rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$
$L_k(1) = 1,\ L_k(t) = t + (kt-1) = -1 + (1+k)t,\ L_k(t^2) = t^2 + 2t(kt-1) + 2 = 2 - 2t + (1+2k)t^2$
$$M_{L_k}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1+k & -2 \\ 0 & 0 & 1+2k \end{pmatrix}$$
L_k è suriettiva $\Leftrightarrow \mathrm{rk} M_{L_k}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = 3 \Leftrightarrow k \neq -1, -\frac{1}{2}$

(2) La matrice è $M_{L_k}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è triangolare, quindi i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale $1, 1+k, 1+2k$. Se $k \neq 0$, i tre autovalori sono distinti, quindi $g_\lambda = a_\lambda = 1$ per ogni λ, e $M_{L_k}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e L_k sono diagonalizzabili. Se $k = 0$, l'unico autovalore è 1 con $a_1 = 3$, mentre $g_1 = \dim\ker(M_{L_0}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - I_3) = 3 - \mathrm{rk}(M_{L_1}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} - I_3) = 1$, quindi $M_{L_0}^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e L_0 non sono diagonalizzabili.

(3) Dato un generico $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, imponiamo le tre condizoni:
$$\begin{cases} p(1) = 3 \\ p(2) = 5 \\ p(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 3 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 5 \\ a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$
calcolando il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema lineare
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \overset{R_3 - 2R_2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \neq 0$$
segue che esiste un'unica soluzione $p(t)$.

(4) Procediamo esattamente come in (3): Dato un generico $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, imponiamo
$$\begin{cases} p(b) = \beta \\ p(c) = \gamma \\ p(d) = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1(b) + a_2(b)^2 = \beta \\ a_0 + a_1(c) + a_2(c)^2 = \gamma \\ a_0 + a_1(d) + a_2(d)^2 = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$
calcolando il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema lineare
$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-b & c^2 - b^2 \\ 0 & d-b & d^2 - b^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-b & (c-b)(c+b) \\ 0 & d-b & (d-b)(d+b) \end{pmatrix}$$
$$\overset{R_3 - \frac{d-b}{c-b} R_2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-b & (c-b)(c+b) \\ 0 & 0 & (d-b)(d+b) - (d-b)(c+b) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-b & (c-b)(c+b) \\ 0 & 0 & (d-b)(d-c) \end{pmatrix}$$
$$= (c-b)(d-b)(d-c) \neq 0$$
dove abbiamo usato che $c - b, d - b, d - c \neq 0$ dato che c, b, d sono distinti.