Esame Algebra Lineare – Luglio 2024

Domande a risposta multipla.

1. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(A) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(B) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(C) $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \ker(A)$

(D) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \ker(A)$

2. Quale delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?

(A) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $f(A) = 5A$

(B) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definita da $f(A) = \chi_A(x)$

(C) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}$ definita da $f(A) = \det(A)$

(D) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $f(A) = A^{-1}$

3. Quale dei seguenti vettori completa l'insieme $\{1 + 2t + 3t^2, t + 2t^2 + 3t^3, 2 + 3t + t^3\}$ a una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$?

(A) $3 + 6t + 5t^2 + 4t^3$

(B) $3 + 5t + 3t^2 + t^3$

(C) $1 + 3t + 5t^2 + 3t^3$

(D) $1 + 4t + 3t^2 + 2t^3$

4. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

(A) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti, allora $m \leq n$

(B) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti, allora $n \leq m$

(C) Se $m \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti

(D) Se $n \leq m$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti

5. Determinare l'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \quad K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

(A) $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$
(B) $H \cap K = \operatorname{Span}\big((0, 6, 14, -6)^\intercal\big)$
(C) $H \cap K = \operatorname{Span}\big((-1, 1, 2, -1)^\intercal\big)$
(D) $H \cap K = H$

6. Sia V uno spazio vettoriale con due basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, e si consideri la matrice del cambio di base $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_{\mathrm{id}_V}$. Dato $\mathbf{v} \in V$, abbiamo
(A) $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$
(B) $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$
(C) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} A = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$
(D) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} A = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

7. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3-k \\ 1+k & 2 \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}MS$ è diagonale?
(A) per ogni $k \in \mathbb{R}$
(B) per nessun $k \in \mathbb{R}$
(C) $k = 1$
(D) $k = -1$

8. Siano $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ due applicazioni lineari.
(A) $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$
(B) $M \circ L$ non è iniettiva
(C) L è suriettiva
(D) $\dim \ker(M) = 0$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ una matrice simmetrica con un autospazio uguale a $\mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (1,2,3)^\intercal\big)$.

(A) A è invertibile

(B) A non è diagonalizzabile

(C) $(1,0,-1)^\intercal \in \mathrm{col}(A)$

(D) $(1,-2,1)^\intercal$ è un autovettore di A

10. Sia $H \subseteq \mathbb{R}^{10}$ un sottospazio vettoriale con $\dim H = 3$, e sia $L = \pi_H \circ \pi_H : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$.

(A) $\dim \mathrm{Im}(L) = 3$

(B) $\dim \ker(L) \leq 3$

(C) L è un isomorfismo

(D) $\mathrm{Im}(L) = H^\perp$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad W = \big\{ (x,y,z,w)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : x + y - 5w = y - 2w = 0 \big\}.$$

(1) Determinare le equazioni cartesiane di U ed una base di W.

(2) Determinare dimensioni e basi di $U + W$ e $U \cap W$.

(3) Determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (3,-1,1,-2)^\intercal$ su W.

Esercizio 2. Un endomorfimso $L : V \to V$ è detto *idempotente* se $L \circ L = L$.

(1) Sia L un endomorfismo. Se L non è invertibile, dimostrare che 0 è un autovalore di L.

(2) Sia L un endomorfismo idempotente. Se L non è l'endomorfismo nullo, dimostrare che $\mathrm{Im}(L)$ è un autospazio di L.

(3) Sia L un endomorfismo idempotente. Se L è invertibile, dimostrare che $L = \mathrm{id}_V$.

(4) Sia L un endomorfismo idempotente. Dimostrare che L è diagonalizzabile.

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(A) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(B) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(C) $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \ker(A)$ ✓

(D) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \ker(A)$

$A(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = A\mathbf{v} - A\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

2. Quale delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?

(A) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $f(A) = 5A$ ✓

(B) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definita da $f(A) = \chi_A(x)$

(C) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}$ definita da $f(A) = \det(A)$

(D) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $f(A) = A^{-1}$

$5(c_1A_1 + c_2A_2) = 5c_1(5A_1) + c_2(5A_2)$

3. Quale dei seguenti vettori completa l'insieme $\{1+2t+3t^2, t+2t^2+3t^3, 2+3t+t^3\}$ a una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$?

(A) $3 + 6t + 5t^2 + 4t^3$

(B) $3 + 5t + 3t^2 + t^3$

(C) $1 + 3t + 5t^2 + 3t^3$

(D) $1 + 4t + 3t^2 + 2t^3$ ✓

Utilizzando l'isomorfismo delle coordinate rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$, traduciamo in vettori riga, e troviamo una nuova base del sottospazio generato dai tre vettori dati riducendo una matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e si vede subito che $(1, 4, 3, 2)$ non appartiene al sottospazio generato dai tre vettori.

4. Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

(A) Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti, allora $m \leq n$ ✓

(B) Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti, allora $n \leq m$

(C) Se $m \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti

(D) Se $n \leq m$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti

Teorema riassuntivo sulla dimensione

5. Determinare l'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \quad K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

(A) $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$

(B) $H \cap K = \operatorname{Span}\big((0, 6, 14, -6)^\intercal\big)$

(C) $H \cap K = \operatorname{Span}\big((-1, 1, 2, -1)^\intercal\big)$

(D) $H \cap K = H$ ✓

I due generatori sono L.I. sia per H che K, quindi $\dim H = \dim K = 2$. Verificando

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

otteniamo $\dim(H + K) = 2$, da cui $\dim(H \cap K) = 2$ e quindi $H \cap K = H$.

6. Sia V uno spazio vettoriale con due basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, e si consideri la matrice del cambio di base $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_{\mathrm{id}_V}$. Dato $\mathbf{v} \in V$, abbiamo

(A) $A[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = [\mathbf{v}]_\mathcal{B}$

(B) $A[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = [\mathbf{v}]_\mathcal{C}$ ✓

(C) $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} A = [\mathbf{v}]_\mathcal{C}$

(D) $[\mathbf{v}]_\mathcal{C} A = [\mathbf{v}]_\mathcal{B}$

7. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3-k \\ 1+k & 2 \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}MS$ è diagonale?

(A) per ogni $k \in \mathbb{R}$

(B) per nessun $k \in \mathbb{R}$

(C) $k = 1$ ✓

(D) $k = -1$

Teorema spettrale

8. Siano $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ due applicazioni lineari.

(A) $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$

(B) $M \circ L$ non è iniettiva ✓

(C) L è suriettiva

(D) $\dim \ker(M) = 0$

L non può essere iniettiva, quindi $\{\mathbf{0}\} \subsetneq \ker(L) \subseteq \ker(M \circ L)$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ una matrice simmetrica con un autospazio uguale a $\mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (1,2,3)^\intercal\big)$.

(A) A è invertibile

(B) A non è diagonalizzabile

(C) $(1,0,-1)^\intercal \in \mathrm{col}(A)$

(D) $(1,-2,1)^\intercal$ è un autovettore di A ✓

Per il teorema spettrale, gli autospazi sono ortogonali

10. Sia $H \subseteq \mathbb{R}^{10}$ un sottospazio vettoriale con $\dim H = 3$, e sia $L = \pi_H \circ \pi_H : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$.

(A) $\dim \mathrm{Im}(L) = 3$ ✓

(B) $\dim \ker(L) \leq 3$

(C) L è un isomorfismo

(D) $\mathrm{Im}(L) = H^\perp$

Abbiamo $\pi_H \circ \pi_H$ e $\mathrm{Im}(\pi_H \circ \pi_H) = \mathrm{Im}(\pi_H) = H$.

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \qquad W = \{(x,y,z,w)^\intercal \in \mathbb{R}^4 : x+y-5w = y-2w = 0\}.$$

(1) Determinare le equazioni cartesiane di U ed una base di W.

(2) Determinare dimensioni e basi di $U+W$ e $U \cap W$.

(3) Determinare la proiezione ortogonale di $\mathbf{u} = (3,-1,1,-2)^\intercal$ su W.

1. I coefficienti dei generatori di U danno equazioni cartesiane di $U^\perp$ cioè $a_1 + a_2 = 2a_1 + a_2 + a_4 = 0$, e troviamo $U^\perp = \operatorname{Span}\big((0,0,1,0)^\intercal, (1,-1,0,-1)^\intercal\big)$. A loro volta, i coefficienti dei generatori di $U^\perp$ danno equazioni cartesiane di U, cioè $z = x-y-w = 0$. Risolvendo le equazioni cartesiane di W troviamo $W = \operatorname{Span}\big((3,2,0,1)^\intercal, (0,0,1,0)^\intercal\big)$.

2. Notiamo che $(1,1,0,0)^\intercal + (2,1,0,1)^\intercal = (3,2,0,1)^\intercal \in U \cap W$, quindi $\dim(U\cap W) \geq 1$. D'altro canto $(1,1,0,0)^\intercal$ non soddisfa le equazioni cartesiane di W, quindi $U \cap W \subsetneq W$ e $\dim(U \cap W) < \dim W = 2$. Segue che $\dim(U \cap W) = 1$ e quindi $\{(3,2,0,1)^\intercal\}$ è una base di $U \cap W$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U+W) = 2+2-1 = 3$ e quindi $\{(0,0,1,0)^\intercal, (3,2,0,1)^\intercal, (1,1,0,0)^\intercal\}$ è una base di $U+W$.

3. Abbiamo già una base ortogonale di W. Calcoliamo dunque la proiezione ortogonale

$$\begin{aligned}\pi_W(\mathbf{u}) &= \frac{(3,-1,1,-2)\cdot(3,2,0,1)}{\|(3,2,0,1)\|^2}(3,2,0,1) + \frac{(3,-1,1,-2)\cdot(0,0,1,0)}{\|(0,0,1,0)\|^2}(0,0,1,0)\\ &= \frac{5}{14}(3,2,0,1) + \frac{1}{1}(0,0,1,0) = \left(\frac{15}{14}, \frac{10}{14}, 1, \frac{5}{14}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 2. Un endomorfimso $L : V \to V$ è detto *idempotente* se $L \circ L = L$.

(1) Sia L un endomorfismo. Se L non è invertibile, dimostrare che 0 è un autovalore di L.

(2) Sia L un endomorfismo idempotente. Se L non è l'endomorfismo nullo, dimostrare che $\operatorname{Im}(L)$ è un autospazio di L.

(3) Sia L un endomorfismo idempotente. Se L è invertibile, dimostrare che $L = \mathrm{id}_V$.

(4) Sia L un endomorfismo idempotente. Dimostrare che L è diagonalizzabile.

1. Dato che L è un endomorfismo, se L non è invertibile, allora $\ker(L) \neq \{\mathbf{0}\}$, quindi 0 è un autovalore con autospazio $E_0 = \ker(L)$.

2. Sia $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in \mathrm{Im}(L)$. Allora $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ per qualche $\mathbf{v} \in V$, e dall'ipotesi segue che $L(\mathbf{w}) = L \circ L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, quindi $\mathbf{w}$ è autovettore associato all'autovalore 1, e $\mathrm{Im}(L) \subseteq E_1$. Viceversa, se $\mathbf{w} \in E_1$ allora $L(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, quindi $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(L)$ e $E_1 \subseteq \mathrm{Im}(L)$.

3. Da $L \circ L = L$ segue $L^{-1} \circ L \circ L = L^{-1} \circ L$ e quindi $L = \mathrm{id}_V$

4. Se L è l'endomorfismo nullo, allora è ovviamente diagonalizzabile. Se L è invertibile, allora $L = \mathrm{id}_V$ dal punto 3, ed è diagonalizzabile. Se L non è nullo o invertibile, allora ha autospazi $E_0 = \ker(L)$ e $E_1 = \mathrm{Im}(L)$ dai punti 1 e 2. Dal teorema di nullità+rango abbiamo $\dim \ker(L) + \dim \mathrm{Im}(L) = \dim V$, cioè $V = E_0 + E_1$, quindi esiste una base di V composta da autovettori di L.