Domande a risposta multipla.

1. Il sistema
$$\begin{cases} 3x - 3y - z = 3 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

☐ non ammette soluzioni
☐ ammette un'unica soluzione
☐ ammette due soluzioni
☐ ammette infinite soluzioni

2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

☐ è invertibile per $k = 1$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
☐ è invertibile per $k = 0$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
☐ non è invertibile per $k = \frac{10}{3}$
☐ non è invertibile per $k = 5$

3. Trovare la retta perpendicolare alle due rette
$$r_1 = (1,0,2)^\intercal + \mathrm{Span}((0,1,0)^\intercal), \qquad r_2 = (2,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}((0,0,1)^\intercal)$$

☐ $(0,2,1)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$
☐ $(1,0,2)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$
☐ $(2,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$
☐ $(0,1,2)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio vettoriale?
☐ $\{(0,t^2) \; : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
☐ $\{(t,1) \; : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
☐ $\{(t,-t) \; : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
☐ $\{(t,t^2) \; : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ una matrice diagonalizzabile con $\chi_A(x) = -x(3+x)^2$.
☐ A è invertible
☐ A è simmetrica
☐ $\dim\ker(A + 3I_3) = 2$
☐ Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2,2)$ una matrice simile a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
☐ $\mathrm{rk}(A) = 2$
☐ $\det(A) = 4$
☐ $\chi_A(x) = (1-x)^2$
☐ $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è suriettiva

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ i suoi autovalori distinti. Quali delle seguenti condizioni è impossibile?
- ☐ $r = 0$
- ☐ $\sum_{i=1}^{r} g_{\lambda_i} > n$
- ☐ $\sum_{i=1}^{r} a_{\lambda_i} < n$
- ☐ $\sum_{i=1}^{r} g_{\lambda_i} < \sum_{i=1}^{r} a_{\lambda_i}$

8. Sia V uno spazio euclideo e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}\| = 3, \|\mathbf{w}\| = 5$. Quali dei seguenti valori di $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ è possibile?
- ☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0$
- ☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 1$
- ☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 4$
- ☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 9$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice ortogonale.
- ☐ $\det A = 0$
- ☐ $\det(A) = 1$
- ☐ $\det A = \pm 1$
- ☐ $\det A = \pm\sqrt{2}$

10. In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ il vettore delle coordinate di $2 + 3t + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1 + t, 2t, t^2\}$ è
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Domande a risposta aperta.

Esercizio 1. In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \, : \, p(1) = 2p(0)\} \quad \text{e} \quad W = \mathrm{Span}\{t-1, t^2\}\,.$$

(1) Determinare una base di U e di W.
(2) Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.
(3) Si scriva (se possibile) il polinomio $p(t) = t$ come somma di un polinomio di U e di un polinomio di W. C'è un'unica soluzione? Perché?
(4) Stabilire se la funzione $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ definita da

$$L(p(t)) = p(1) - 2p(0)$$

è un'applicazione lineare. In caso affermativo trovare basi dell'immagine e del nucleo.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^2$, considerare l'operazione $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1\,.$

(1) Dimostrare che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(2) Dimostrare che è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$
(3) Determinare il complemento ortogonale di $H = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a questo prodotto scalare
(4) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questo prodotto scalare
(5) Rispetto a questo prodotto scalare, determinare la proiezione ortogonale $\pi_H(\mathbf{v})$ del $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sul sottospazio H.

SOLUZIONI

Domande a risposta multipla.

1. Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 3y - z = 3 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

☐ non ammette soluzioni
☑ ammette un'unica soluzione
☐ ammette due soluzioni
☐ ammette infinite soluzioni

Segue da $\det\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$

2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

☐ è invertibile per $k = 1$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
☐ è invertibile per $k = 0$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
☑ non è invertibile per $k = \frac{10}{3}$
☐ non è invertibile per $k = 5$

Segue da $\det\begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 3k$

3. Trovare la retta perpendicolare alle due rette

$$r_1 = (1,0,2)^\intercal + \mathrm{Span}((0,1,0)^\intercal), \qquad r_2 = (2,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}((0,0,1)^\intercal)$$

☐ $(0,2,1)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$
☐ $(1,0,2)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$
☐ $(2,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$
☑ $(0,1,2)^\intercal + \mathrm{Span}((1,0,0)^\intercal)$

La retta ha direzione $(1,0,0)^\intercal$ ortogonale alle direzioni $(0,1,0)^\intercal$ e $(0,0,1)^\intercal$ delle due rette, inoltre interseca le due rette nei punti $(1,1,2)^\intercal = (1,0,2)^\intercal + (0,1,0)^\intercal = (0,1,2)^\intercal + (1,0,0)^\intercal$ e $(2,1,2)^\intercal = (2,1,0)^\intercal + 2(0,0,1)^\intercal = (0,1,2)^\intercal + 2(1,0,0)^\intercal$

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio vettoriale?

☐ $\{(0,t^2) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
☐ $\{(t,1) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
☑ $\{(t,-t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
☐ $\{(t,t^2) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

E' uguale a $\mathrm{Span}(1,-1)$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ una matrice diagonalizzabile con $\chi_A(x) = -x(3+x)^2$.

☐ A è invertible
☐ A è simmetrica
☑ $\dim\ker(A + 3I_3) = 2$
☐ Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A

Essendo diagonalizzabile, abbiamo $\dim\ker(A + 3I_3) = \dim E_{-3} = g_{-3} = a_{-3} = 2.$

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2,2)$ una matrice simile a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ $\mathrm{rk}(A) = 2$
☐ $\det(A) = 4$
☐ $\chi_A(x) = (1-x)^2$
☑ $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è suriettiva

0 è un autovalore di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi di A, quindi $\dim\ker(A) > 0$ e $\dim \mathrm{Im}(T_A) < 2$

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ i suoi autovalori distinti. Quali delle seguenti condizioni è impossibile?

☐ $r = 0$
☑ $\sum_{i=1}^r g_{\lambda_i} > n$
☐ $\sum_{i=1}^r a_{\lambda_i} < n$
☐ $\sum_{i=1}^r g_{\lambda_i} < \sum_{i=1}^r a_{\lambda_i}$

$\sum_{i=1}^r g_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^r a_{\lambda_i} \leq n$

8. Sia V uno spazio euclideo e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\|\mathbf{w}\| = 5$. Quali dei seguenti valori di $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ è possibile?

☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0$
☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 1$
☑ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 4$
☐ $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 9$

Abbiamo $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|-\mathbf{w}\| = 3 + 5 = 8$ e $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|$, cioè $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \geq 5 - 3 = 2$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice ortogonale.

☐ $\det A = 0$
☐ $\det(A) = 1$
☑ $\det A = \pm 1$
☐ $\det A = \pm\sqrt{2}$

Da $A^\intercal A = I$ segue $\det(A)^2 = \det(A^\intercal)\det(A) = \det(A^\intercal A) = \det(I) = 1$

10. In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ il vettore delle coordinate di $2 + 3t + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1+t, 2t, t^2\}$ è

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

☑ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2(1+t) + 1/2(2t) + 1(t^2) = 2 + 3t + t^2$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \,:\, p(1) = 2p(0)\} \quad \text{e} \quad W = \operatorname{Span}\{t-1, t^2\}\,.$$

(1) Determinare una base di U e di W.
(2) Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.
(3) Si scriva (se possibile) il polinomio $p(t) = t$ come somma di un polinomio di U e di un polinomio di W. C'è un'unica soluzione? Perché?
(4) Stabilire se la funzione $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ definita da

$$L(p(t)) = p(1) - 2p(0)$$

è un'applicazione lineare. In caso affermativo trovare basi dell'immagine e del nucleo.

(1) Dato $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, risolviamo l'equazione di U

$p(1) = 2p(0) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 2a_0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 + a_2 \Leftrightarrow p(t) = (s_1 + s_2) + s_1 t + s_2 t^2$ con $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ da cui una base di U è $\{1 + t, 1 + t^2\}$. I generatori di W sono linearmente indipendenti in quanto $t - 1$ e t^2 non sono proporzionali, quindi una base di W è $\{t - 1, t^2\}$.

(2) Per trovare $U \cap W$, cerchiamo i $p(t) = a(t-1) + b(t^2) \in W$ che soddisfano l'equazione di U

$$p(1) = 2p(0) \Leftrightarrow b = -2a \Leftrightarrow p(t) = a(t-1) - 2a(t^2) = a(t - 1 - 2t^2) \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

quindi una base di $U \cap W$ è $\{-1 + t - 2t^2\}$. Da $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ segue che $U + W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, quindi una sua base è $\{1, t, t^2\}$

(3) Dato che $U + W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, ogni polinomio di $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ si scrive come somma di un polinomio in U e uno in W. Risolviamo $a(1 + t) + b(1 + t^2) + c(-1 + t) + d(t^2) = t$

$$(a+b-c)+(a+c)t+(b+d)t^2 = 0\cdot 1+1\cdot t+0\cdot t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + c = 1 \\ b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - a \\ b = c - a = 1 - 2a \\ d = -b = -1 + 2a \end{cases}$$

troviamo infinite soluzioni, ad esempio per $a = 0$ otteniamo

$$t = 0(1 + t) + (1 + t^2) + 1(-1 + t) - (t^2) = \underbrace{(1 + t^2)}_{\in U} + \underbrace{(-1 + t - t^2)}_{\in W}$$

Esistono infiniti modi diversi di scrivere t come somma di un polinomio di U e uno di W in quanto $U \cap W = \operatorname{Span}(-1 + t - 2t^2)$ è un insieme infinito, pertanto

$$t = \underbrace{(1 + t^2) + c(-1 + t - 2t^2)}_{\in U} + \underbrace{(-1 + t - t^2) - c(-1 + t - 2t^2)}_{\in W} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

(d) Abbiamo $L(c_1 p(t) + c_2 q(t)) = c_1 p(1) + c_2 q(1) - 2c_1 p(0) - 2c_2 q(0) = c_1(p(1) - 2p(0)) + c_2(q(1) - 2q(0)) = L(p(t)) + L(q(t))$ quindi L è un'applicazione lineare. Il nucleo è evidentemente $\ker(L) = U$, quindi abbiamo già trovato una base. Abbiamo $\dim \operatorname{Im}(L) = \dim \mathbb{R}[t]_{\leq 2} - \dim \ker(L) = 3 - 2 = 1 = \dim \mathbb{R}$, quindi $\dim \operatorname{Im}(L) = \mathbb{R}$ e una base è $\{1\}$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^2$, considerare l'operazione $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$.

(1) Dimostrare che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) Dimostrare che è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$

(3) Determinare il complemento ortogonale di $H = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a questo prodotto scalare

(4) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questo prodotto scalare

(5) Rispetto a questo prodotto scalare, determinare la proiezione ortogonale $\pi_H(\mathbf{v})$ del $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sul sottospazio H.

(1) Calcoliamo $\mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = x_1(2y_1 - y_2) + x_2(-y_1 + 2y_2) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

(2) Prop. simmetrica: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y} \overset{1\times 1}{=} (\mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y})^\intercal = \mathbf{y}^\intercal A^\intercal \mathbf{x} \overset{A \text{ simmetrica}}{=} \mathbf{y}^\intercal A \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
Bilineare: $\langle c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = (c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2)^\intercal A \mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1^\intercal A \mathbf{y} + c_2\mathbf{x}_2^\intercal A \mathbf{y} = c_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + c_2\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$
Definita positiva: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

(3) $\mathbf{x} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0$, quindi $H^\perp = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) Dal punto precedente segue che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$. Per ottenere una base ortonormale, normalizziamo: $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2$, $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 6$, troviamo la base ortonormale $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(5) $\pi_H(\mathbf{v}) = \dfrac{\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$