ESAME ALGEBRA LINEARE – GIUGNO 2025

Domande a risposta multipla.

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare le rette

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}.$$

☐ sono incidenti
☐ sono parallele
☐ sono sghembe
☐ sono coincidenti

2. L'insieme $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x+2y-z} = 1\}$

☐ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
☐ è chiuso rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto per uno scalare
☐ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, ma non rispetto alla somma
☐ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

3. Il sistema

$$\begin{cases} 4y + z = -3 \\ 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$$

☐ non ammette soluzioni
☐ ammette un'unica soluzione
☐ ammette due soluzioni
☐ ammette infinite soluzioni

4. Sia θ un numero reale. La matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

☐ è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
☐ è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
☐ è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
☐ non è invertibile

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ tale che $A = -A^{\intercal}$ allora

- ☐ $\det(A) = 0$
- ☐ $\det(A) = 1$
- ☐ $\det(A) = \sqrt{2}$
- ☐ nessuna delle precedenti

6. Considerare l'applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(x,y) = (x-y, y)$.

- ☐ non è un'applicazione lineare
- ☐ $\dim \mathrm{Im}(L) = 1$
- ☐ $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^2$
- ☐ nessuna delle precedenti

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ allora

- ☐ A e $A^{\intercal}$ non hanno gli stessi autovalori
- ☐ A e $A^{\intercal}$ hanno gli stessi autovalori
- ☐ $\det(A) = -\det(A^{\intercal})$
- ☐ $\mathrm{tr}(A) = -\mathrm{tr}(A^{\intercal})$

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice invertibile e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A. Allora

- ☐ $\lambda = 0$
- ☐ $-\lambda$ è un autovalore di A^{-1}
- ☐ λ^{-1} è un autovalore di A^{-1}
- ☐ $\sqrt{\lambda}$ è un autovalore di A^{-1}

9. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ☐ è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$
- ☐ è diagonalizzabile se $k = 1$
- ☐ è diagonalizzabile se $k = 3$
- ☐ è sempre diagonalizzabile

10. In $\mathbb{R}^3$ considerare il vettore $\mathbf{w} = (1, -1, 0)$. Allora il piano passante per l'origine e ortogonale a $\mathbf{w}$ è dato da

- ☐ $\operatorname{Span}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
- ☐ $\operatorname{Span}\{(1,2,0),(1,1,1)\}$
- ☐ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$
- ☐ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y\}$

Domande a risposta aperta.

Esercizio 1.

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{Mat}(2,2)$ e il vettore $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2)$.

(1) Trovare una base e la dimensione di $W = \operatorname{Span}(A, A^\intercal, A + A^\intercal) \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$

(2) Verificare che il seguente sottoinsieme è un sottospazio di $\mathrm{Mat}(2,2)$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $W \cap U$ e $W + U$.

Esercizio 2.

Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T_k(x,y,z) = (x + y, y, kz)\,.$$

(1) Determinare, al variare di k, $\mathrm{Im}(T_k)$ e $\mathrm{Ker}(T_k)$

(2) Determinare, al variare di k, autovalori e autovettori di T_k

(3) Determinare i valori di k per cui T_k è diagonalizzabile.

(4) Determinare i valori di k per cui T_k è ortogonalmente diagonalizzabile, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare le rette

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \;:\; t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

☐ sono incidenti
☐ sono parallele
☑ sono sghembe
☐ sono coincidenti

I vettori di direzione non sono proporzionali, quindi le rette non possono essere parallele o coincidenti. Calcoliamo l'intersezione

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} t - 1 - 2k = 0 \\ 3t + 1 + k = 0 \\ t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 3 + 1 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

da cui segue che le rette sono disgiunte e quindi sghembe.

2. L'insieme $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; e^{x+2y-z} = 1\}$

☑ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
☐ è chiuso rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto per uno scalare
☐ è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, ma non rispetto alla somma
☐ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

Basta notare che $e^{x+2y-z} = 1 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$

3. Il sistema

$$\begin{cases} 4y + z = -3 \\ 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$$

☐ non ammette soluzioni
☑ ammette un'unica soluzione
☐ ammette due soluzioni
☐ ammette infinite soluzioni

La matrice dei coefficienti è invertibile

$$\det\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = -2(-8-1)\neq 0$$

4. Sia θ un numero reale. La matrice $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

☐ è invertibile con inversa $\begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$

☑ è invertibile con inversa $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

☐ è invertibile con inversa $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

☐ non è invertibile

La matrice rappresenta la rotazione di angolo θ, quindi è invertibile e la sua inversa è data dalla rotazione di angolo $-\theta$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ tale che $A = -A^{\intercal}$ allora

☑ $\det(A) = 0$

☐ $\det(A) = 1$

☐ $\det(A) = \sqrt{2}$

☐ nessuna delle precedenti

Segue da $\det(A) = \det(-A^{\intercal}) = (-1)^3\det(A^{\intercal}) = -\det(A)$

6. Considerare l'applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(x,y) = (x-y, y)$.

☐ non è un'applicazione lineare

☐ $\dim \mathrm{Im}(L) = 1$

☑ $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^2$

☐ nessuna delle precedenti

Segue da $L(1,0) = (1,0), L(1,1) = (0,1)$

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ allora

- ☐ A e $A^\intercal$ non hanno gli stessi autovalori
- ☑ A e $A^\intercal$ hanno gli stessi autovalori
- ☐ $\det(A) = -\det(A^\intercal)$
- ☐ $\mathrm{tr}(A) = -\mathrm{tr}(A^\intercal)$

Segue da $\chi_{A^\intercal}(x) = \det(A^\intercal - xI) = \det(A^\intercal - xI^\intercal) = \det((A-xI)^\intercal) = \det(A-xI) = \chi_A(x)$

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice invertibile e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A. Allora

- ☐ $\lambda = 0$
- ☐ $-\lambda$ è un autovalore di A^{-1}
- ☑ λ^{-1} è un autovalore di A^{-1}
- ☐ $\sqrt{\lambda}$ è un autovalore di A^{-1}

Sia $\mathbf{v}$ un autovettore di A associato a λ: Allora

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v} \Rightarrow \lambda^{-1}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}$$

9. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ☐ è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$
- ☐ è diagonalizzabile se $k = 1$
- ☑ è diagonalizzabile se $k = 3$
- ☐ è sempre diagonalizzabile

La matrice ha 3 autovalori distinti, necessariamente con molteplicità geometrica 1.

10. In $\mathbb{R}^3$ considerare il vettore $\mathbf{w} = (1,-1,0)$. Allora il piano passante per l'origine e ortogonale a $\mathbf{w}$ è dato da

- ☐ $\mathrm{Span}\,\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
- ☐ $\mathrm{Span}\,\{(1,2,0),(1,1,1)\}$
- ☐ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$
- ☑ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y\}$

Abbiamo $(x,y,z) \cdot \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1.

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{Mat}(2,2)$ e il vettore $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2)$.

(1) Trovare una base e la dimensione di $W = \mathrm{Span}(A, A^\intercal, A + A^\intercal) \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$

(2) Verificare che il seguente sottoinsieme è un sottospazio di $\mathrm{Mat}(2,2)$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $W \cap U$ e $W + U$.

(1) Ovviamente $A + A^\intercal \in \mathrm{Span}(A, A^\intercal)$, mentre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $A^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali e quindi sono linearmente indipendenti. Segue che $\{A, A^\intercal\}$ è una base di W, e $\dim W = 2$

(2) Abbiamo $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$, in particolare, U è un sottospazio vettoriale. I due vettori non sono proporzionali, quindi formano una base e $\dim U = 2$.

(3) Abbiamo $A \in U \cap W$, quindi $\dim U \cap W \geq 1$, e chiaramente $A^\intercal \notin U$, quindi $U \cap W \neq U$. Segue che $\dim U \cap W = 1$, con base $\{A\}$. Dalla formula di Grassmann ricaviamo $\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3$, e quindi i generatori $\left\{ A, A^\intercal, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ formano una base.

Esercizio 2.

Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T_k(x, y, z) = (x + y, y, kz)\,.$$

(1) Determinare, al variare di k, $\mathrm{Im}(T_k)$ e $\mathrm{Ker}(T_k)$
(2) Determinare, al variare di k, autovalori e autovettori di T_k
(3) Determinare i valori di k per cui T_k è diagonalizzabile.
(4) Determinare i valori di k per cui T_k è ortogonalmente diagonalizzabile, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

(1) Abbiamo $\mathrm{Im}(T_k) = \mathrm{Span}(T_k(\mathbf{e}_1), T_k(\mathbf{e}_2), T_k(\mathbf{e}_3)) = \mathrm{Span}\big((1,0,0),(1,1,0),(0,0,k)\big)$. Quindi T_k è suriettiva se e solo se $k \neq 0$. Dal teorema di nullità+rango segue che $\ker(T_k) = \{\mathbf{0}\}$ se $k \neq 0$, e $\dim\ker(T_0) = 1$; dato che $\mathbf{e}_3 \in \ker(T_0)$, segue che $\ker(T_0) = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_3)$.
(2) E' chiaro che $\mathbf{e}_1$ è un autovettore associato all'autovalore 1, ed $\mathbf{e}_3$ è un autovettore associato all'autovalore k. Dalla matrice rappresentativa di T_k rispetto alle basi canoniche

$$A_k = \big([T_k(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, [T_k(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}}, [T_k(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{E}}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

calcoliamo il polinomio caratteristico $\chi_{T_k}(x) = (1-x)^2(k-x)$. Segue che $1, k$ sono gli unici autovalori, e la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ è

$$g_1 = \dim\ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 1 \\ 2 & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Segue, in particolare, che non esistono altri autovettori: se $k \neq 1$ allora $E_1 = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1)$, $E_k = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_3)$, altrimenti $E_1 = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$.
(3) Dal punto precedente segue che la somma delle molteplicità geometriche non è mai uguale a 3, quindi T_k non è mai diagonalizzabile.
(4) Segue dal punto precedente (mai).