Algebra Lineare – Appello di gennaio – Parte B – Soluzioni

Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right), \qquad K = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}\right\}.$$

a) Determinare una base di H e una base di K.

b) Determinare una forma cartesiana di H.

c) Determinare una base di $H \cap K$ e la dimensione di $H+K$

a) Il sottospazio H è lo spazio delle colonne della seguente matrice, che riduciamo a scala:

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\3&0&-1\\8&7&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&-3&-2\\1&2&1\\0&-6&-4\\0&-9&-6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&-3&-2\\1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

da cui segue che la matrice ha rango 2, e $\dim H = 2$. Pertanto, una sua base è un qualsiasi insieme di 2 vettori linearmente indipendenti di H, ad esempio, $\{(1,2,0,7)^\intercal, (0,1,-1,2)^\intercal\}$. Per trovare una base di K, risolviamo il sistema lineare omogeneo applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&1&-1\\0&-4&0&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&1&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

I due vettori sono linearmente indipendenti, e quindi una base di K.

b) Per trovare una forma cartesiana di H, risolviamo il sistema i cui coefficienti sono dati dai vettori di una base di H:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&7\\0&1&-1&2\end{pmatrix} \to \ker\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

segue che $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 + x_2 + x_3 = -3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$.

c) Una forma cartesiana di $H \cap K$ è ottenuta combinando le forme cartesiane di H, K

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ -2x_1+x_2+x_3=0 \\ -3x_1-2x_2+x_4=0 \end{cases}$$

Riduciamo la matrice dei coefficienti a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo che una base di $H \cap K$ é $\{(0, 1, -1, 2)^\intercal\}$. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, e $L : V \to V$ un endomorfismo tale che

$$L(\mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_3) = -2\mathbf{b}_3,$$

a) Determinare la matrice $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$.

b) Determinare autovalori e autospazi della matrice A.

c) Dedurre autovalori e autospazi dell'endomorfismo L (suggerimento: sfruttare il teorema di rappresentazione).

d) Calcolare $A^{2024}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} = (1, 0, 2)^\intercal$.

a) Abbiamo $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \big([L(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}, [L(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}, [L(\mathbf{b}_3)]_{\mathcal{B}}\big) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & -2 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)\det \begin{pmatrix} -1-x & 0 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)(-1-x)(-2-x)$$

e troviamo che gli autovalori di A sono $1, -1, -2$. Dato che $1 \le g_\lambda \le a_\lambda$ e $\sum a_\lambda \le 3$, concludiamo che $a_\lambda = g_\lambda = 1$ per ogni autovalore λ. Troviamo quindi gli autospazi, basterà trovare un autovettore per ciascun λ.

$$E_1 = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \ker(A + I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \ker(A + 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Il teorema di rappresentazione afferma che $[L(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, quindi, $L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Quindi, $\mathbf{v}$ è un autovettore di L associato a un autovalore λ se e solo se $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ è un autovettore di A associato all'autovalore λ. Concludiamo che gli autovalori di L sono $1, -1, -2$, e gli autospazi sono

$$E_1 = \operatorname{Span}(3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3), \quad E_{-1} = \operatorname{Span}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3), \quad E_{-2} = \operatorname{Span}(\mathbf{b}_3).$$

d) Scriviamo $(1, 0, 2)^\intercal$ come combinazione lineare degli autovettori e applichiamo A^{2024}

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A^{2024}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A^{2024}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2024}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)^{2024}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 + 2^{2024} \end{pmatrix}$$