Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

*Terzo Appello – 23 giugno 2025 – [Durata: 2 ore]*

**Cognome e Nome:** ______________________________

**Codice Persona:** ____________________

**NB:** i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

**Parte A (10 punti)**

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare le rette

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\},$$

[A] sono incidenti

[B] sono parallele

[C] sono coincidenti

[D] sono sghembe

2. L'insieme

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x+2y-z} = 1 \right\}$$

[A] non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

[B] è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

[C] è chiuso rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto per uno scalare

[D] è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, ma non rispetto alla somma

3. Il sistema

$$\begin{cases} 4y + z = -3 \\ 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$$

[A] ammette infinite soluzioni

[B] non ammette soluzioni

[C] ammette un'unica soluzione

[D] ammette due soluzioni

4. La matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

[A] non è invertibile

[B] è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

[C] è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

[D] è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ tale che $A = -A^T$. Allora

- [A] $\det(A) = 0$
- [B] $\det(A) = 1$
- [C] $\det(A) = \sqrt{2}$
- [D] nessuna delle precedenti

6. Considerare la seguente applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L(x,y) = (x-y, y)\,.$$

Allora

- [A] non è un'applicazione lineare
- [B] $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^2$
- [C] $\dim \mathrm{Im}(L) = 1$
- [D] nessuna delle precedenti

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ allora

- [A] $\det(A) = -\det(A^T)$
- [B] $\mathrm{tr}(A) = -\mathrm{tr}(A^T)$
- [C] $A$ e $A^T$ hanno gli stessi autovalori
- [D] $A$ e $A^T$ non hanno gli stessi autovalori

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice invertibile e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di $A$. Allora

- [A] $\lambda^{-1}$ è un autovalore di $A^{-1}$
- [B] $\sqrt{\lambda}$ è un autovalore di $A^{-1}$
- [C] $\lambda = 0$
- [D] $-\lambda$ è un autovalore di $A^{-1}$

9. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- [A] è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$
- [B] è diagonalizzabile se $k = 3$
- [C] è diagonalizzabile se $k = 1$
- [D] è sempre diagonalizzabile

10. In $\mathbb{R}^3$ considerare il vettore $\mathbf{w} = (1,-1,0)$. Allora il piano passante per l'origine e ortogonale a $\mathbf{w}$ è dato da

- [A] $\mathrm{Span}\,\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
- [B] $\mathrm{Span}\,\{(1,2,0),(1,1,1)\}$
- [C] $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y\}$
- [D] $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$

## Parte B (20 punti)

**Esercizio 1.** [Punteggio: 3,2,5]
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathrm{Mat}(2,2)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2)\,.$$

1. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $W \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$ generato da $A, A^T, A+A^T$.
2. Verificare che il sottoinsieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}(2,2)$.
3. Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $W \cap U$ e $W + U$.

**Esercizio 2.** [Punteggio: 3,3,2,2]
Si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T_k(x, y, z) = (x + y, y, kz)\,,$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare, al variare di $k$, $\mathrm{Im}(T_k)$ e $\mathrm{Ker}(T_k)$.
2. Determinare, al variare di $k$, autovalori e autospazi di $T_k$.
3. Determinare i valori di $k$ per cui $T_k$ è diagonalizzabile.
4. Determinare i valori di $k$ per cui $T_k$ è ortogonalmente diagonalizzabile, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.