

# Algebra Lineare

Appello di giugno – Parte B

10/06/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

## Istruzioni

- 1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
- 2) La durata della Parte B è 60 minuti.
- 3) La Parte B contiene 2 esercizi, con un punteggio totale di 13 punti. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte verranno valutate nella loro interezza; pertanto, è importante fornire una soluzione chiara e giustificare i passaggi.
- 4) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, cuffie, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

**Esercizio 1.** [Punteggio: 2, 2, 2]

Sia  $V = \text{Mat}(2, 2)$  e sia  $M \in V$  una matrice fissata. Considerare l'insieme

$$H = \{A \in \text{Mat}(2, 2) \mid AM = MA\} \subseteq V$$

formato da tutte la matrici che commutano con  $M$ .

- a) Dimostrare che  $H$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ .
- b) Trovare un endomorfismo  $L : V \rightarrow V$  tale che  $\ker(L) = H$ .
- c) Determinare una base di  $H$  nel caso in cui  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Esercizio 2.** [Punteggio: 3, 1, 3]

Sia  $k \in \mathbb{R}$  un parametro. Considerare l'applicazione lineare  $L_k : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$L_k(p(t)) = \begin{pmatrix} p(k) - p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

- a) Determinare una base di  $\text{Im}(L_k)$  e di  $\ker(L_k)$  al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ .
- b) Determinare i valori di  $k$  per cui  $L_k$  è iniettiva.
- c) Determinare la matrice rappresentativa di  $L_k$  rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{t - 1, t + 2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$