Esame Algebra Lineare – Luglio 2025

Domande a risposta multipla.

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il piano π di equazione $x - y + 2z = 3$ e la retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t, y = -t, z = -t$

☐ La retta r è contenuta nel piano π

☐ La retta r intereseca il piano π in due punti

☐ La retta r intereseca il piano π in un punto

☐ La retta r non intereseca il piano π

2. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ due soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 1$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 0$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale?

☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 = 0\}$

☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$

☐ $\{(a + b, b + c)^\intercal \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

☐ $\{(a, b^2)^\intercal \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

4. Considerare i sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$: $H_1 = \{p(x) \mid p(1) = 0\}$ e $H_2 = \{p(x) \mid p(2) = 0\}$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 0$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 3$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2, 2)$ tale che $A^2 = 0$

☐ $A = 0$

☐ $\mathrm{rk}(A) = 0$

☐ $\mathrm{rk}(A) = 1$

☐ $\dim \ker A \geq 1$

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$, e si considerino le applicazioni lineari $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $T_{A^\intercal} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

- ☐ se $n \geq m$, allora T_A è suriettiva
- ☐ se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è suriettiva
- ☐ se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è iniettiva
- ☐ se T_A è invertibile, allora $T_{A^\intercal} = (T_A)^{-1}$

7. Calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (5, 5, 5)^\intercal$ sul piano H di equazione $x - 2z = 0$

- ☐ $(-1, 0, 2)^\intercal$
- ☐ $(-1, 5, 2)^\intercal$
- ☐ $(6, 0, 3)^\intercal$
- ☐ $(6, 5, 3)^\intercal$

8. Un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ è

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

9. Sia T_A l'applicazione lineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro.

- ☐ T_A è sempre suriettiva
- ☐ T_A è sempre iniettiva
- ☐ T_A è iniettiva per un solo valore di λ
- ☐ T_A non è mai suriettiva

10. Sia V uno spazio euclideo e $H_1, H_2, H_3 \subseteq V$ sottospazi che $H_3 \subseteq H_1^\perp$ e $H_3 \subseteq H_2^\perp$.

- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3$
- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3^\perp$
- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim H_3$
- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim(H_1 + H_2)^\perp$

Domande a risposta aperta.

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$, si consideri la seguente retta

$$r_1 \; : \; \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

a) Trovare la retta r_2 parallela a r_1 e passante per $(2, 1, 4)$

b) Trovare il piano contenente r_1 e r_2

c) Trovare la retta perpendicolare a r_1 e passante per $(6, -1, 3)$

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y + 2z \\ z \end{pmatrix} .$$

a) Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se T è diagonalizzabile.

c) Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Stabilire se le matrici del punto a) e del punto c) sono simili. In caso affermativo trovare la matrice invertibile che realizza la similitudine.

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il piano π di equazione $x - y + 2z = 3$ e la retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t, y = -t, z = -t$

☐ La retta r è contenuta nel piano π

☐ La retta r intereseca il piano π in due punti

☐ La retta r intereseca il piano π in un punto

☑ La retta r non intereseca il piano π

Per calcolare $\pi \cap r$ sostituiamo le equazioni parametriche di r nell'equazione cartesiana di π

$$(1+t) - (-t) + 2(-t) = 3 \Rightarrow (1+t) - (-t) + 2(-t) = 3 \Rightarrow 1 = 3 \Rightarrow \pi \cap r = \emptyset$$

2. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ due soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

☑ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 1$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 0$

☐ $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$

Abbiamo $A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{b} + c_2\mathbf{b} = (c_1 + c_2)\mathbf{b}$. Dato che $\mathbf{b} \neq 0$, abbiamo $(c_1 + c_2)\mathbf{b} = \mathbf{b} \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 1$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale?

☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 = 0\}$

☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$

☑ $\{(a+b, b+c)^\intercal \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

☐ $\{(a, b^2)^\intercal \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\{(a+b, b+c)^\intercal \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\big((1,0)^\intercal, (1,1)^\intercal, (0,1)^\intercal\big)$

4. Considerare i sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$: $H_1 = \{p(x) \mid p(1) = 0\}$ e $H_2 = \{p(x) \mid p(2) = 0\}$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 0$

☑ $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$

☐ $\dim(H_1 \cap H_2) = 3$

Sia $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Abbiamo $p(x) \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow p(1) = p(2) = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 4a+2b+c = 0$. La matrice del sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, quindi l'insieme delle soluzioni $H_1 \cap H_2$ ha dimensione $3-2$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2,2)$ tale che $A^2 = 0$

- ☐ $A = 0$
- ☐ $\mathrm{rk}(A) = 0$
- ☐ $\mathrm{rk}(A) = 1$
- ☑ $\dim \ker A \geq 1$

Se per assurdo $\dim \ker A = 0$, allora A sarebbe invertibile, ottenendo la contraddizione $I = (A^{-1})^2(A^2) = (A^{-1})^2 0 = 0$

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$, e si considerino le applicazioni lineari $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $T_{A^\intercal} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

- ☐ se $n \geq m$, allora T_A è suriettiva
- ☐ se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è suriettiva
- ☑ se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è iniettiva
- ☐ se T_A è invertibile, allora $T_{A^\intercal} = (T_A)^{-1}$

Se $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è suriettiva, allora $\mathrm{rk} A^\intercal = \mathrm{rk} A = m$, allora $T_{A^\intercal} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva

7. Calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (5,5,5)^\intercal$ sul piano H di equazione $x - 2z = 0$

- ☐ $(-1,0,2)^\intercal$
- ☐ $(-1,5,2)^\intercal$
- ☐ $(6,0,3)^\intercal$
- ☑ $(6,5,3)^\intercal$

Abbiamo $H^\perp = \mathrm{Span}(1,0,-2)^\intercal$, quindi

$$\pi_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_H(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \pi_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ è

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☑ 3

$\det(A - 3I_3) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 0$

9. Sia T_A l'applicazione lineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro.

- ☑ T_A è sempre suriettiva
- ☐ T_A è sempre iniettiva
- ☐ T_A è iniettiva per un solo valore di λ
- ☐ T_A non è mai suriettiva

La prima e la terza colonna sono L.I., quindi generano $\mathbb{R}^2$

10. Sia V uno spazio euclideo e $H_1, H_2, H_3 \subseteq V$ sottospazi che $H_3 \subseteq H_1^\perp$ e $H_3 \subseteq H_2^\perp$.

- ☑ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3$
- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3^\perp$
- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim H_3$
- ☐ $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim(H_1 + H_2)^\perp$

Da $H_3 \subseteq H_1^\perp$ e $H_3 \subseteq H_2^\perp$ segue che $H_3 \subseteq (H_1 + H_2)^\perp$, quindi $\dim(H_1 + H_2) = \dim V - \dim(H_1 + H_2)^\perp \geq \dim V - \dim H_3$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$, si consideri la seguente retta

$$r_1 : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

a) Trovare la retta r_2 parallela a r_1 e passante per $(2, 1, 4)$

b) Trovare il piano contenente r_1 e r_2

c) Trovare la retta perpendicolare a r_1 e passante per $(6, -1, 3)$

a) Risolviamo il sistema operando sulle righe della matrice completa

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -8 & -4 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -2x_1 + 1 \\ 2x_2 = -x_3 + 3 = 2x_1 + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = -2t + 1 \end{cases} \Rightarrow r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Una delle direzioni della giacitura è quella delle due rette, $(1, 1, -2)^\intercal$, un'altra è data da $(2, 1, 4)^\intercal - (0, 1, 1)^\intercal = (2, 0, 3)^\intercal$, e il piano passa per $(0, 1, 1)^\intercal$, quindi il piano è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

(alternativamente, si può imporre il passaggio per 3 punti non allineati di $r_1 \cup r_2$)

c) La retta passante per il generico punto $(0, 1, 1)^\intercal + t(1, 1 - 2)^\intercal$ di r_1 e $(6, -1, 3)^\intercal$ ha direzione

$$(0, 1, 1)^\intercal + t(1, 1, -2)^\intercal - (6, -1, 3) = (t - 6, t + 2, -2t - 2)$$

imponiamo l'ortogonalità con la direzione di r_1

$$0 = (1, 1, -2) \cdot (t - 6, t + 2, -2t - 2) = t - 6 + t + 2 - 2(-2t - 2) = 6t \Rightarrow t = 0$$

quindi la retta cercata è $(6, -1, 3)^\intercal + \operatorname{Span}(-6, 2, -2)$

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se T è diagonalizzabile.

c) Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Stabilire se le matrici del punto a) e del punto c) sono simili. In caso affermativo trovare la matrice invertibile che realizza la similitudine.

a) $A = M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \big([T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, [T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}, [T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}}\big) = \big(T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) A è triangolare, quindi l'unico autovalore è 1 con $a_1 = 3$. Da $g_1 = \dim\ker(A - I) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < a_1$ deduciamo che A, e quindi T, non sono diagonalizzabili.

c) $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \big([T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\big)$. Calcoliamo

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Le due matrici rappresentano lo stesso endomorfismo, quindi sono simili. Esplicitamente, la similitudine è realizzata dalla formula del cambio di base $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}} M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, e la matrice invertibile è $M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \big([\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}}, [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}, [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{E}}\big) = \big(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.