Esame Algebra Lineare – Gennaio 2024

Domande a risposta multipla.

1. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 + kx_3 - x_4 & = 2 \\ x_3 - x_4 & = 2 \end{cases}$$

(A) $k = 1$
(B) $k \neq 1$
(C) per nessun $k \in \mathbb{R}$
(D) per ogni $k \in \mathbb{R}$

2. Date due soluzioni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(A) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
(B) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \ker(A)$
(C) $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$
(D) $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 \in \ker(A)$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi non è un sottospazio vettoriale?

(A) $\{(s+t, s-t, 2s+3t, 4t)^\intercal \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(B) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid \det(A) = 0\} \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$
(C) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$
(D) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = x_2 - x_4 = 0\}$

4. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare con $\ker(L) = \mathrm{Span}\big((1,1,0,0)^\intercal, (0,0,1,1)^\intercal\big)$.

(A) L è iniettiva
(B) L è suriettiva
(C) $(1,-1,1,-1)^\intercal \in \ker(L)$
(D) $\mathrm{Im}(L) \perp \ker(L)$

5. Sia $A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4) \in \mathrm{Mat}(4,4)$, dove $\mathbf{c}_i$ è l'i-esima colonna di A. Considerare la matrice $B = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) \in \mathrm{Mat}(4,4)$.

(A) $\det(B) = 3\det(A)$
(B) $\det(B) = 2\det(A)$
(C) $\det(B) = -6\det(A)$
(D) $\det(B) = \det(A)$

6. Quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Trovare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2, 0, -2)^\intercal$ e $\mathbf{w} = (1, 2, -2)^\intercal$.

(A) $\frac{\pi}{6}$
(B) $\frac{\pi}{4}$
(C) $\frac{\pi}{3}$
(D) $\frac{\pi}{2}$

8. Sia V uno spazio euclideo e $H \subseteq V$ un sottospazio.

(A) La proiezione ortogonale $\pi_H : V \to V$ è un isomorfismo
(B) il complemento ortogonale $H^\perp$ soddisfa $\dim H = \dim H^\perp$
(C) l'unione di una base di H e una base di $H^\perp$ è una base di V
(D) $\pi_H(H) = H^\perp$

9. Quale delle seguenti matrici è ortogonale?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Una matrice simmetrica $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ ha polinomio caratteristico $\chi_A(x) = (1-x)(2-x)^2$. Un autospazio di A è $\mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$. Qual è l'altro autospazio di A?

(A) $\mathrm{Span}\big((1,0,0)^\intercal, (0,0,1)^\intercal\big)$

(B) $\mathrm{Span}\big((0,1,0)^\intercal\big)$

(C) $\mathrm{Span}\big((0,0,0)^\intercal\big)$

(D) $\mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \qquad K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

a) Determinare una base di H e una base di K.

b) Determinare una forma cartesiana di H.

c) Determinare una base di $H \cap K$ e la dimensione di $H + K$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, e $L : V \to V$ un endomorfismo tale che

$$L(\mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_3) = -2\mathbf{b}_3,$$

a) Determinare la matrice $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$.

b) Determinare autovalori e autospazi della matrice A.

c) Dedurre autovalori e autospazi dell'endomorfismo L (suggerimento: sfruttare il teorema di rappresentazione).

d) Calcolare $A^{2024}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} = (1,0,2)^\intercal$.

SOLUZIONI

Domande a risposta multipla.

1. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 + kx_3 - x_4 & = 2 \\ x_3 - x_4 & = 2 \end{cases}$$

(A) $k = 1$
(B) $k \neq 1$
(C) per nessun $k \in \mathbb{R}$
(D) per ogni $k \in \mathbb{R}$ ✓

Riduciamo a scala la matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1) & -2(k-1) \end{pmatrix}$$

Per ogni k, otteniamo una matrice completa a scala senza pivot nella colonna dei termini noti. Segue che il sistema lineare ha sempre soluzioni.

2. Date due soluzioni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(A) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
(B) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \ker(A)$
(C) $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ ✓
(D) $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 \in \ker(A)$

Abbiamo $A(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2) = 2A\mathbf{v}_1 - 3A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{b} - 3\mathbf{b} = -\mathbf{b}$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi non è un sottospazio vettoriale?

(A) $\{(s+t, s-t, 2s+3t, 4t)^\intercal \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(B) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid \det(A) = 0\} \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$ ✓
(C) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$
(D) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = x_2 - x_4 = 0\}$

Basta considerare, ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare con $\ker(L) = \operatorname{Span}\big((1,1,0,0)^\intercal, (0,0,1,1)^\intercal\big)$.

(A) L è iniettiva

(B) L è suriettiva ✓

(C) $(1,-1,1,-1)^\intercal \in \ker(L)$

(D) $\operatorname{Im}(L) \perp \ker(L)$

Segue dal teorema di nullità + rango: $\dim \operatorname{Im}(L) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker(L) = 4 - 2 = 2$.

5. Sia $A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4) \in \operatorname{Mat}(4,4)$, dove $\mathbf{c}_i$ è l'i-esima colonna di A. Considerare la matrice $B = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) \in \operatorname{Mat}(4,4)$.

(A) $\det(B) = 3\det(A)$ ✓

(B) $\det(B) = 2\det(A)$

(C) $\det(B) = -6\det(A)$

(D) $\det(B) = \det(A)$

$\det(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) = -\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) = +3\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_4) = 3\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$.

6. Quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice ha due autovalori diversi $1, 2$, necessariamente con molteplicità geometrica uguale a 1. La conclusione segue dal secondo criterio di diagonalizzabilità.

7. Trovare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2,0,-2)^\intercal$ e $\mathbf{w} = (1,2,-2)^\intercal$.

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$ ✓

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

$\cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{2+0+4}{\sqrt{2^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi $\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\pi}{4}$.

8. Sia V uno spazio euclideo e $H \subseteq V$ un sottospazio.

(A) La proiezione ortogonale $\pi_H : V \to V$ è un isomorfismo

(B) il complemento ortogonale $H^\perp$ soddisfa $\dim H = \dim H^\perp$

(C) l'unione di una base di H e una base di $H^\perp$ è una base di V ✓

(D) $\pi_H(H) = H^\perp$

Segue dal fatto che $V = H + H^\perp$ e $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

9. Quale delle seguenti matrici è ortogonale?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Le due colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

10. Una matrice simmetrica $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ ha polinomio caratteristico $\chi_A(x) = (1-x)(2-x)^2$. Un autospazio di A è $\mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$. Qual è l'altro autospazio di A?

(A) $\mathrm{Span}\big((1,0,0)^\intercal, (0,0,1)^\intercal\big)$

(B) $\mathrm{Span}\big((0,1,0)^\intercal\big)$

(C) $\mathrm{Span}\big((0,0,0)^\intercal\big)$

(D) $\mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$ ✓

Dal teorema spettrale segue che autospazi diversi sono ortogonali. Dal polinomio caratteristico scopriamo che A ha due autospazi, E_1 e E_2. Segue che l'uno è il complemento ortogonale dell'altro, quindi la risposta è $\mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)^\perp = \mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$.

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right), \qquad K = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}.$$

a) Determinare una base di H e una base di K.

b) Determinare una forma cartesiana di H.

c) Determinare una base di $H \cap K$ e la dimensione di $H + K$

a) Il sottospazio H è lo spazio delle colonne della seguente matrice, che riduciamo a scala:

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\3&0&-1\\8&7&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&-3&-2\\1&2&1\\0&-6&-4\\0&-9&-6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&-3&-2\\1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

da cui segue che la matrice ha rango 2, e $\dim H = 2$. Pertanto, una sua base è un qualsiasi insieme di 2 vettori linearmente indipendenti di H, ad esempio, $\{(1,2,0,7)^\intercal, (0,1,-1,2)^\intercal\}$. Per trovare una base di K, risolviamo il sistema lineare omogeneo applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&1&-1\\0&-4&0&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&3&1&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

I due vettori sono linearmente indipendenti, e quindi una base di K.

b) Per trovare una forma cartesiana di H, risolviamo il sistema i cui coefficienti sono dati dai vettori di una base di H:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \to \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

segue che $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 + x_2 + x_3 = -3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$.

c) Una forma cartesiana di $H \cap K$ è ottenuta combinando le forme cartesiane di H, K

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Riduciamo la matrice dei coefficienti a scala

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 2\\ 0 & 7 & 3 & -2\\ 0 & 7 & 3 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & -4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

da cui troviamo che una base di $H \cap K$ é $\{(0, 1, -1, 2)^\intercal\}$. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, e $L : V \to V$ un endomorfismo tale che

$$L(\mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_3) = -2\mathbf{b}_3,$$

a) Determinare la matrice $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$.
b) Determinare autovalori e autospazi della matrice A.
c) Dedurre autovalori e autospazi dell'endomorfismo L (suggerimento: sfruttare il teorema di rappresentazione).
d) Calcolare $A^{2024}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} = (1, 0, 2)^\intercal$.

a) Abbiamo $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \big([L(\mathbf{b}_1)]_\mathcal{B}, [L(\mathbf{b}_2)]_\mathcal{B}, [L(\mathbf{b}_3)]_\mathcal{B}\big) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -1-x & -2 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)\det \begin{pmatrix} -1-x & 0 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)(-1-x)(-2-x)$$

e troviamo che gli autovalori di A sono $1, -1, -2$. Dato che $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$ e $\sum a_\lambda \leq 3$, concludiamo che $a_\lambda = g_\lambda = 1$ per ogni autovalore λ. Troviamo quindi gli autospazi, basterà trovare un autovettore per ciascun λ.

$$E_1 = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \ker(A + I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \ker(A + 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Il teorema di rappresentazione afferma che $[L(\mathbf{v})]_\mathcal{B} = A[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$, quindi, $L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \lambda[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$. Quindi, $\mathbf{v}$ è un autovettore di L associato a un autovalore λ se e solo se $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ è un autovettore di A associato all'autovalore λ. Concludiamo che gli autovalori di L sono

$1, -1, -2$, e gli autospazi sono

$$E_1 = \mathrm{Span}(3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3), \quad E_{-1} = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3), \quad E_{-2} = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_3).$$

d) Scriviamo $(1, 0, 2)^\intercal$ come combinazione lineare degli autovettori e applichiamo A^{2024}

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = A^{2024}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + A^{2024}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = (-1)^{2024}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-2)^{2024}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1+2^{2024}\end{pmatrix}$$