Algebra Lineare 2025/26 – Scheda Esercizi 1

1. Rette e piani

Esercizio 1.

(a) Trova una forma parametrica della retta $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 3x_1 + 4x_2 = 5 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Trova forme parametrica e cartesiana della retta di $\mathbb{R}^2$ passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) Trova una forma cartesiana della retta $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2.

(a) Trova una forma parametrica del piano $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) Trova due forme parametriche della retta $r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 3 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.

(a) Trova una forma parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Trova una forma parametrica della piano di $\mathbb{R}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

(a) Trova una forma cartesiana del piano $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;:\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) Trova una forma cartesiana della retta $r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;:\; t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2. Combinazioni lineari e sistemi lineari

Esercizio 5. Determinare l'insieme delle soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi lineari. Scrivere il risultato nella forma

$$S = \left\{ \mathbf{w} + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p \ : \ t_i \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

dove $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ sono dei vettori colonna espliciti.

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = \ \ 5 \\ -x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = \ \ 2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_3 = 9 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 6. È possibile esprimere il vettore $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$?

$$(1) \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$