Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Primo Appello – 29 gennaio 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ______________________________

Codice Persona: ____________________

NB: i fogli protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

Parte A (10 punti)

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si considerino

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4k(k-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3k(k-2) \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di k per cui il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni.

[A] $k \neq 0, 1$

[B] $k \neq 1$ ✓

[C] $k = 0$

[D] $k = 0, 1$

2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[A] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

[B] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[C] $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[D] $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Determinare la dimensione del nucleo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

[A] $\dim(\ker A) = 1$

[B] $\dim(\ker A) = 2$

[C] $\dim(\ker A) = 4$ ✓

[D] $\dim(\ker A) = 5$

4. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ dei vettori.

[A] Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim(V) \geq n$ ✓

[B] Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim(V) \leq n$

[C] Se $\dim(V) \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V

[D] Se $\dim(V) \geq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V

5. Quali delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?

A $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{v}^\intercal$

B $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\intercal\mathbf{v}$

C $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(A) = A^\intercal A$

D $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(A) = ((2,-3)A)^\intercal$ ✓

6. Sia $A = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ una matrice quadrata, dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono vettori colonna. Sia

$$B = (C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2)\,,$$

allora

A $\det(B) = -\det(A)$ ✓

B $\det(B) = \det(A)$

C $\det(B) = 2\det(A)$

D nessuna delle precedenti

7. Siano $V = \mathrm{Mat}(3,3)$ e $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ allora

A esiste un isomorfismo $L : V \to W$

B esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$

C non esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$ ✓

D non esiste un'applicazione lineare suriettiva $L : V \to W$

8. Si consideri l'endomorfismo $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ definito da $L(p(t)) = p'(t)$. Allora

A gli autovalori di L sono $1, 2$

B L è diagonalizzabile

C L non è diagonalizzabile ✓

D nessuna delle precedenti

9. Siano $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $L_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari tali che $\dim(\ker(L_1)) = 1$ e $\dim(\ker(L_2)) = 2$. Allora

A $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 1$

B $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 2$ ✓

C $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 3$

D $\dim(\mathrm{Im}(L_2 \circ L_1)) = 2$

10. La matrice rappresentativa dell'endomorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deifnito da

$$L(x,y) = (3x + 2y, x + 2y)\ ,$$

rispetto alla base $\{(1,1),(2,1)\}$ è

A $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ✓

C $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 2, 2, 2, 2]
Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e i sottospazi

$$H = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\}.$$

1. Trovare una forma parametrica di H.
2. Determinare $\dim(H \cap K)$ e $\dim(H + K)$.
3. Determinare le matrici che rappresentano le proiezioni ortogonali π_K e $\pi_{K^\perp}$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare autovalori e autovettori di $\pi_{K^\perp}$.
5. Trovare un endomorfismo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(L) = K^\perp$.

1. Osservo che $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi $H = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Cerco $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ t.c.

$$\begin{cases} (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -a_1 + a_2 - a_3 + 2a_4 = 0 \\ (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a_2 - a_3 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\underline{a} = (t, t, 0, 0) + (-s, 0, s, 0) = t(1,1,0,0) + s(-1,0,1,0)$ e

$$H = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 + x_2 = -x_1 + x_3 = 0 \}.$$

2. $H \cap K$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow H \cap K = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$\dim(H \cap K) = 1$

Osservo che $\dim(K) = 3$ quindi dalle formule di Grassmann

$$\dim(H + K) = \dim(K) + \dim(H) - \dim(H \cap K) = 3 + 2 - 1 = 4$$

3. Calcolo $K^\perp$: dalla forma cartesiana abbiamo che

$$K^\perp = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{(base o.n.)}$$

Calcolo:

$$\pi_{K^\perp}(\underline{e}_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$\pi_{K^\perp}(\underline{e}_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\pi_{K^\perp}(\underline{e}_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad M^{\mathcal{E}\mathcal{E}}_{\pi_{K^\perp}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\pi_{K^\perp}(\underline{e}_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Siccome $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} = \pi_{K^\perp} + \pi_K$ ho

$$M^{\mathcal{E}\mathcal{E}}_{\pi_K} = I_4 - M^{\mathcal{E}\mathcal{E}}_{\pi_{K^\perp}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&2&0&-1\\0&0&1&0\\-1&-1&0&2\end{pmatrix}.$$

4. Siccome $\pi_{K^\perp}(\underline{v}) = \underline{0} = 0\underline{v}$ se $\underline{v} \in K^\perp$

$\pi_{K^\perp}(\underline{v}) = \underline{v} = 1\underline{v}$ se $\underline{v} \in (K^\perp)^\perp = K$

e $K + K^\perp = V$ gli autovalori sono 0 e 1 e gli autospazi sono

$$E_0 = K^\perp \quad \text{e} \quad E_1 = K.$$

5. $L = \pi_K : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è t.c. $\mathrm{Ker}(\pi_K) = K^\perp$.

Esercizio 2. [Punteggio: 2, 3, 2, 3]
Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'endomorfismo $L_k : V \to V$ definito da

$$L\big(p(t)\big) = p(t) + (kt-1)p'(t) + p''(t).$$

Determinare i valori di k per cui L_k è suriettivo.

2. Determinare i valori di k per cui L_k è diagonalizzabile.

3. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che

$$p(1) = 3,\ p(2) = 5,\ p(3) = 7.$$

4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ distinti, e siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che

$$p(a) = \alpha,\ p(b) = \beta,\ p(c) = \gamma.$$

1. Sia $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ la base canonica di V, calcolo:

$L(1) = 1$

$L(t) = t + kt - 1 = (k+1)t - 1$

$L(t^2) = t^2 + 2(kt-1)t + 2 = (1+2k)t^2 - 2t + 2$

$$\Rightarrow M_{L_k}^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1+2k \end{pmatrix} = A_k$$

L_k suriettivo $\Leftrightarrow rk(A_k) = 3 \Leftrightarrow k+1 \neq 0$ e $1+2k \neq 0$

$\Leftrightarrow k \neq -1, -\frac{1}{2}$.

2. L_k diagonalizzabile $\Leftrightarrow A_k$ è diagonalizzabile.

Autovalori di A_k: $\chi_{A_k}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ 0 & k+1-t & -2 \\ 0 & 0 & 1+2k-t \end{pmatrix} = (1-t)(k+1-t)(1+2k-t) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1, k+1, 1+2k$.

Se $k \neq 0 \Rightarrow$ 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile

se $k = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, $a_1 = 3$

$g_1 = \dim \operatorname{Ker}(A_0 - I_3) = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ no diagonalizzabile

3. Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ t.c.

$$\begin{cases} p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 3 \\ p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 5 \\ p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 7. \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Lo calcolo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

4. Il sistema è:

$$\begin{cases} p(a) = a_0 + a a_1 + a^2 a_2 = \alpha \\ p(b) = a_0 + b a_1 + b^2 a_2 = \beta \\ p(c) = a_0 + c a_1 + c^2 a_2 = \gamma \end{cases}$$

Il sistema ha un'unica soluzione se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Lo calcolo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & a \\ 1 & b \\ 1 & c \end{matrix} = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - b^2c - ac^2$$
$$= a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) \neq 0$$

siccome $a \neq b \neq c$.