Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Quarto Appello – 23 luglio 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ________________________________

Codice Persona: ______________________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

Parte A (10 punti)

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il piano π e la retta r dati da

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - y + 2z = 3 \right\} \quad \text{e} \quad r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \, : \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- [A] La retta r è contenuta nel piano π
- [B] La retta r intereseca il piano π in due punti
- [C] La retta r intereseca il piano π in un punto
- [D] La retta r non intereseca il piano π ✓

2. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ due soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Allora

- [A] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- [B] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 1$ ✓
- [C] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 0$
- [D] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale?

- [A] $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x_1x_2 = 0\}$
- [B] $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x_1^2 - x_2^2 = 0\}$
- [C] $\{(a+b, b+c) \, : \, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ ✓
- [D] $\{(a, b^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

4. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$:

$$H_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \, : \, p(1) = 0\} \quad \text{e} \quad H_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \, : \, p(2) = 0\}.$$

Allora

- [A] $\dim(H_1 \cap H_2) = 0$
- [B] $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$ ✓
- [C] $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$
- [D] $\dim(H_1 \cap H_2) = 3$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2, 2)$ tale che $A^2 = 0$. Allora

- [A] $A = 0$
- [B] $\mathrm{rk}(A) = 0$
- [C] $\mathrm{rk}(A) = 1$
- [D] $\dim(\ker A) \geq 1$ ✓

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$, e si considerino le applicazioni lineari $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $T_{A^\intercal} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

- [A] se $n \geq m$, allora T_A è suriettiva
- [B] se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è suriettiva
- [C] se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è iniettiva ✓
- [D] se T_A è invertibile, allora $T_{A^\intercal} = (T_A)^{-1}$

7. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (5, 5, 5)^\intercal$ sul piano di equazione $x - 2z = 0$ è

- [A] $(-1, 0, 2)^\intercal$
- [B] $(-1, 5, 2)^\intercal$
- [C] $(6, 0, 3)^\intercal$
- [D] $(6, 5, 3)^\intercal$ ✓

8. Un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ è

- [A] 0
- [B] 1
- [C] 2
- [D] 3 ✓

9. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro, allora

- [A] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A è sempre suriettiva ✓
- [B] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A è sempre iniettiva
- [C] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A è iniettiva per un solo valore di λ
- [D] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A non è mai suriettiva

10. Sia V uno spazio euclideo e $H_1, H_2, H_3 \subseteq V$ sottospazi tali che $H_3 \subseteq H_1^\perp$ e $H_3 \subseteq H_2^\perp$.

- [A] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3$ ✓
- [B] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3^\perp$
- [C] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim H_3$
- [D] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim(H_1 + H_2)^\perp$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2,3,4]
In $\mathbb{R}^3$, si consideri la seguente retta

$$r_1 : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

1. Trovare la retta r_2 parallela a r_1 e passante per $(2, 1, 4)$.
2. Trovare il piano contenente r_1 e r_2.
3. Trovare la retta perpendicolare a r_1 e passante per $(6, -1, 3)$.

1. Cerco una forma parametrica di r_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & -1 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -8 & -4 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

cioè

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -2 \\ x_3 = 3 - 2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 - 1 \\ x_3 = 3 - 2x_2 \end{cases}$$

Quindi,

$$r_1 = (-1, 0, 3) + \text{Span}\,(1, 1, -2)$$

La giacitura di r_2 sarà la stessa di r_1 e quindi

$$r_2 = (2, 1, 4) + \text{Span}\,(1, 1, -2)$$

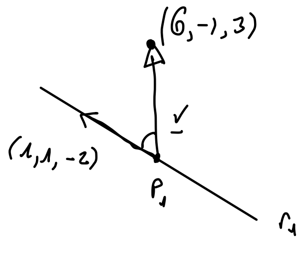
2. Il piano π è determinato da un punto P_0 e da due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.
Scelgo:

$$P_0 = (2, 1, 4), \quad \underline{v}_1 = (1, 1, -2) \quad e \quad \underline{v}_2 = (-1, 0, 3) - (2, 1, 4) = (-3, -1, -1).$$

Quindi

$$\pi = (2, 1, 4) + \text{Span}\{(1, 1, -2), (-3, -1, -1)\}.$$

3. Considero un punto generico di r_1: $P_1 = (-1+t, t, 3-2t)$. Calcolo



$$\underline{v} = (6, -1, 3) - (t-1, t, 3-2t) = (7-t, -1-t, 2t),$$

questo vettore è il vettore direzione di una retta passante per $(6,-1,3)$ e che interseca r_1. Impongo l'ortogonalità:

$$(7-t,\ -1-t,\ 2t) \perp (1,1,-2)$$

cioè

$$7-t-1-t-4t=0 \iff t=1$$

e quindi

$$\underline{v} = (6,-2,2)$$

e

$$r : (6,-1,3) + \mathrm{Span}(6,-2,2).$$

Esercizio 2. [Punteggio: 2,2,3,4]
Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
2. Stabilire se T è diagonalizzabile.
3. Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
4. Stabilire se le matrici del punto 1. e del punto 3. sono simili. In caso affermativo trovare la matrice invertibile che realizza la similitudine.

1. Calcolo:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. T è diagonalizzabile $\iff$ $M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ è diagonalizzabile.

Autovalori:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 1 \quad a_1 = 3.$$

$$g_1 = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{non è diagonalizzabile}$$

3. Calcolo:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Sono simili perché sono matrici rappresentative dello stesso endomorfismo rispetto a basi diverse. Inoltre,

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = S^{-1} M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} S, \quad \text{dove} \quad S = M_{id_{\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}.$$

Dalla definizione di matrice del cambio di base abbiamo:

$$S = \left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}}, \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$