

Algebra Lineare

Appello di giugno – Parte A

10/06/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

Istruzioni

- 1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
- 2) La durata del test è 40 minuti.
- 3) Indicare le risposte selezionate nella tabella a pagina 2 di questo fascicolo. Eventuali risposte segnate nelle pagine successive non saranno considerate.
- 4) Potete usare le pagine di questo fascicolo per calcoli o annotazioni.
- 5) Il test contiene 10 domande con 4 possibili risposte. Ogni domanda ha esattamente una risposta corretta. Una risposta esatta vale 1 punto; una risposta errata o non data vale 0 punti.
- 6) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

Risposte

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1. Siano $A, B \in \text{Mat}(n, n)$ due matrici quadrate.

- (A) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- (B) $\det(AB) = \det(BA)$
- (C) $\det(3A) = 3 \det(A)$
- (D) $\det(A^3) = 3 \det(A)$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2x + y \\ kx + y \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (2, 0, 4)^\top$ appartiene all'immagine $\text{Im}(L_k)$?

- (A) $k = 2$
- (B) $k \neq 2$
- (C) $k = -2$
- (D) $k \neq -2$

3. Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e l'insieme di vettori $\mathcal{S} = \{(1, 2, 0)^\top, (1, 1, -1)^\top, (0, 1, 1)^\top\}$.

- (A) \mathcal{S} è una base di H
- (B) \mathcal{S} è un insieme di generatori di H ma non una base
- (C) \mathcal{S} è un insieme di vettori linearmente indipendenti ma non genera H
- (D) nessuna delle altre risposte

4. Trovare il più piccolo sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^4$ che contiene entrambi i sottospazi

$$H_1 = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5)) \quad \text{e} \quad H_2 = \text{Span}((0, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 7))$$

- (A) $H_1 = \text{Span}((1, 1, 1, 1))$
- (B) $H = \text{Span}((1, 4, 7, 10), (3, 6, 9, 12))$
- (C) $H = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (0, 2, 4, 6))$
- (D) $H = \mathbb{R}^4$

5. Quale delle seguenti matrici è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. I piani $\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\}$ e $\beta = (1, 1, 1)^\top + \text{Span}((1, 2, 1)^\top, (3, 0, -1)^\top)$

- (A) sono coincidenti
- (B) sono paralleli
- (C) sono incidenti
- (D) sono sghembi

7. Quale delle seguenti matrici M soddisfa $M^\top M = I_3$?

(A) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(C) $M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Sia $A \in \text{Mat}(n, n)$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico $\chi_A(x)$, e sia $k \in \mathbb{R}$ un numero reale.

- (A) Se $\chi_A(k) = 0$ allora $\dim \ker(A) > 0$
- (B) Se $\chi_A(k) \neq 0$ allora $\ker(A - kI_n) = \{\mathbf{0}\}$
- (C) Se $\chi_A(0) = 0$ allora A è invertibile
- (D) $\chi_A(k) = \dim \ker(A - kI_n)$

9. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2, -2, 2, -2)$ e $\mathbf{w} = (3, 3, -3, 3)$ in \mathbb{R}^4 .

- (A) $\frac{2\pi}{3}$
- (B) $\frac{3\pi}{4}$
- (C) $\frac{3\pi}{2}$
- (D) $\frac{4\pi}{3}$

10. Quale delle seguenti applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è uguale a una proiezione ortogonale $\pi_H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, per un opportuno sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^3$?

- (A) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$
- (B) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$
- (C) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z \\ z \end{pmatrix}$
- (D) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}$