Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Terzo Appello – 23 giugno 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ______________________________

Codice Persona: ____________________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e <u>non vanno consegnati</u>.

Parte A (10 punti)

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare le rette

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; k \in \mathbb{R} \right\},$$

[A] sono incidenti

[B] sono parallele

[C] sono coincidenti

[D] sono sghembe ✓

2. L'insieme

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; e^{x+2y-z} = 1 \right\}$$

[A] non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

[B] è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ✓

[C] è chiuso rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto per uno scalare

[D] è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare, ma non rispetto alla somma

3. Il sistema

$$\begin{cases} 4y + z = -3 \\ 2x + 2y = 2 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$$

[A] ammette infinite soluzioni

[B] non ammette soluzioni

[C] ammette un'unica soluzione ✓

[D] ammette due soluzioni

4. La matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in \mathbb{R}$$

[A] non è invertibile

[B] è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ✓

[C] è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

[D] è invertibile con inversa $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ tale che $A = -A^T$. Allora

   - $\boxed{\text{A}}$ $\det(A) = 0$ ✓
   - $\boxed{\text{B}}$ $\det(A) = 1$
   - $\boxed{\text{C}}$ $\det(A) = \sqrt{2}$
   - $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

6. Considerare la seguente applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$L(x,y) = (x-y, y)\,.$$

   Allora

   - $\boxed{\text{A}}$ non è un'applicazione lineare
   - $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^2$ ✓
   - $\boxed{\text{C}}$ $\dim \mathrm{Im}(L) = 1$
   - $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ allora

   - $\boxed{\text{A}}$ $\det(A) = -\det(A^T)$
   - $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{tr}(A) = -\mathrm{tr}(A^T)$
   - $\boxed{\text{C}}$ A e A^T hanno gli stessi autovalori ✓
   - $\boxed{\text{D}}$ A e A^T non hanno gli stessi autovalori

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice invertibile e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di A. Allora

   - $\boxed{\text{A}}$ λ^{-1} è un autovalore di A^{-1} ✓
   - $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{\lambda}$ è un autovalore di A^{-1}
   - $\boxed{\text{C}}$ $\lambda = 0$
   - $\boxed{\text{D}}$ $-\lambda$ è un autovalore di A^{-1}

9. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   - $\boxed{\text{A}}$ è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$
   - $\boxed{\text{B}}$ è diagonalizzabile se $k = 3$ ✓
   - $\boxed{\text{C}}$ è diagonalizzabile se $k = 1$
   - $\boxed{\text{D}}$ è sempre diagonalizzabile

10. In $\mathbb{R}^3$ considerare il vettore $\mathbf{w} = (1,-1,0)$. Allora il piano passante per l'origine e ortogonale a $\mathbf{w}$ è dato da

   - $\boxed{\text{A}}$ $\mathrm{Span}\,\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
   - $\boxed{\text{B}}$ $\mathrm{Span}\,\{(1,2,0),(1,1,1)\}$
   - $\boxed{\text{C}}$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y\}$ ✓
   - $\boxed{\text{D}}$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 3,2,5]
Si consideri lo spazio vettoriale Mat(2, 2) e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2,2)\,.$$

1. Trovare una base e la dimensione del sottospazio $W \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$ generato da $A, A^T, A+A^T$.
2. Verificare che il sottoinsieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di Mat(2, 2).

3. Determinare una base e la dimensione dei sottospazi $W \cap U$ e $W + U$.

1. Abbiamo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $A+A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ovviamente $A+A^T$ è comb. lineare di A e A^T, verifico se A e A^T sono L.I.:

$$\alpha A + \beta A^T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 2\alpha+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Quindi $\dim(W) = 2$ e $\mathcal{B}_W = \{A, A^T\}$.

2. i) $a = b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ ✓

ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 2b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & 2(b+b') \end{pmatrix} \in U$ ✓

iii) $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & 2\lambda b \end{pmatrix} \in U$ ✓

3. Osservo che $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi

$$U + W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Sono L.I.:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Di conseguenza

$$\mathcal{B}_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \dim U+W = 3.$$

Dalla formula di Grassmann ho:

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim U+W = 2+2-3 = 1$$

e

$$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 2. [Punteggio: 3,3,2,2]
Si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T_k(x, y, z) = (x + y, y, kz)\,,$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare, al variare di k, $\mathrm{Im}(T_k)$ e $\mathrm{Ker}(T_k)$.
2. Determinare, al variare di k, autovalori e autospazi di T_k.
3. Determinare i valori di k per cui T_k è diagonalizzabile.
4. Determinare i valori di k per cui T_k è ortogonalmente diagonalizzabile, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathrm{Ker}(T_k)$: $\begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ kz=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ kz=0 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Ker}(T_k) = \begin{cases} \{(0,0,1)\} & k=0 \\ \{\underline{0}\} & k\neq 0. \end{cases}$

$\mathrm{Im}(T_k)$: da nullità + rango: $\dim \mathrm{Im}(T_k) + \dim \mathrm{Ker}(T_k) = 3$ cioè

$$\dim \mathrm{Im}(T_k) = \begin{cases} 2 & k=0 \\ 3 & k\neq 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\mathrm{Im}(T_k) = \mathrm{Span}\{T_k(\underline{e_1}), T_k(\underline{e_2}), T_k(\underline{e_3})\}$$
$$= \mathrm{Span}\{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,k)\} = \begin{cases} \{(1,0,0),(1,1,0)\} & \text{se } k=0 \\ \mathbb{R}^3 & \text{se } k\neq 0 \end{cases}$$

2. Osservo che la matrice rappresentativa di T_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\chi_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(k-\lambda) = 0 \iff \lambda = 1, \ \lambda = k$

Autospazi: • se $k=1 \Rightarrow \lambda = 1$ $\quad a_1 = 3$ e

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A_1 - I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

• Se $k \neq 1 \Rightarrow \lambda = 1$, $a_1 = 2$ e $\lambda = k$, $a_k = 1$

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A_k - I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \underbrace{(k-1)}_{\neq 0} z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_k = \mathrm{Ker}(A_k - kI) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-k)x + y = 0 \\ (1-k)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Gli autovalori e autospazi di T_k coincidono con quelli di A_k dal teorema di rappresentazione.

3. Sappiamo che T_k diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ A_k è diagonalizzabile. Dal punto 2. abbiamo

• $k = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ $a_1 = 3$ e $g_1 = 2 \Rightarrow$ NO DIAGONALIZZABILE

• $k \neq 1 \Rightarrow \lambda = 1$ $a_1 = 2$ e $g_1 = 1$
  $\lambda = k$ $a_k = 1 = g_k$ $\Rightarrow$ NO DIAGONALIZZABILE

Quindi T_k non è mai diagonalizzabile.

4. Dal teorema spettrale T_k è ort. diag $\Leftrightarrow$ A_k è simmetrica. Ma A_k non è mai simmetrica quindi T_k non è mai ort. diagonalizzabile