Algebra Lineare 2025/26 – Scheda Esercizi 3

1. Sottospazi vettoriali

Esercizio 1. Per ciascun sottoinsieme di uno spazio vettoriale, stabilire se esso è un sottospazio vettoriale. In caso affermativo, trovare un insieme di generatori del sottospazio.

(1) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(2) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(3) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 \geq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(4) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(5) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(6) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(7) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(8) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(9) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b^2 \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(10) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(11) $\{A = (a_{ij} \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\} \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$ (matrici *diagonali*)

(12) $\{A = (a_{ij} \in \mathrm{Mat}(3,3) \mid a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\} \subseteq \mathrm{Mat}(3,3)$ (matrici *triangolari superiori*)

(13) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid A^\intercal = A\} \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$ (matrici *simmetriche*)

(14) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p(t) \text{ ha grado uguale a } 2\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(15) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(16) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p(2) = 1\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(17) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p'(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(18) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p'(1) = -1\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(19) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p'(1) = p(2)\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(20) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p'(t) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

Nota: la derivata di un polinomio $p(t) = \sum_{n=0}^{d} a_n t^n$ è il polinomio $p'(t) = \sum_{n=1}^{d} n a_n t^{n-1}$.

2. Indipendenza lineare

Esercizio 2. Per ciascun insieme di vettori in $\mathbb{R}^n$, determinare se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

$$a)\quad \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} \qquad b)\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad d)\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

3. Matrici inverse

Esercizio 3. Determinare se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, trovare la matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\1 & 3\end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\\lambda & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$