

# Algebra Lineare

Appello di settembre – Parte B

02/09/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

## Istruzioni

- 1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
- 2) La durata della Parte B è 60 minuti.
- 3) La Parte B contiene 2 esercizi, con un punteggio totale di 13 punti. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte verranno valutate nella loro interezza; pertanto, è importante fornire una soluzione chiara e giustificare i passaggi.
- 4) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, cuffie, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

**Esercizio 1.** [Punteggio: 3, 2, 2]

Considerare i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$U = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad W = \{(x, y, z, w)^\top \in \mathbb{R}^4 : x + y - 5w = y - 2w = 0\}.$$

1. Determinare le equazioni cartesiane di  $U$  ed una base di  $W$ .
2. Determinare dimensioni e basi di  $U + W$  e  $U \cap W$ .
3. Determinare la proiezione ortogonale di  $\mathbf{u} = (3, -1, 1, -2)^\top$  su  $W$ .

**Esercizio 2.** [Punteggio: 1, 2, 1, 2]

Un endomorfismo  $L : V \rightarrow V$  è detto *idempotente* se  $L \circ L = L$ .

1. Sia  $L$  un endomorfismo. Se  $L$  non è invertibile, dimostrare che 0 è un autovalore di  $L$ .
2. Sia  $L$  un endomorfismo idempotente. Se  $L$  non è l'endomorfismo nullo, dimostrare che  $\text{Im}(L)$  è un autospazio di  $L$ .
3. Sia  $L$  un endomorfismo idempotente. Se  $L$  è invertibile, dimostrare che  $L = \text{id}_V$ .
4. Sia  $L$  un endomorfismo idempotente. Dimostrare che  $L$  è diagonalizzabile.

