Algebra Lineare – Appello di luglio – Parte A – Soluzioni

1. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(A) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(B) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(C) $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \ker(A)$ ✓

(D) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \ker(A)$

$A(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = A\mathbf{v} - A\mathbf{w} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

2. Quale delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?

(A) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $f(A) = 5A$ ✓

(B) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ definita da $f(A) = \chi_A(x)$

(C) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}$ definita da $f(A) = \det(A)$

(D) $f : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $f(A) = A^{-1}$

$5(c_1A_1 + c_2A_2) = 5c_1(5A_1) + c_2(5A_2)$

3. Quale dei seguenti vettori completa l'insieme $\{1 + 2t + 3t^2, t + 2t^2 + 3t^3, 2 + 3t + t^3\}$ a una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$?

(A) $3 + 6t + 5t^2 + 4t^3$

(B) $3 + 5t + 3t^2 + t^3$

(C) $1 + 3t + 5t^2 + 3t^3$

(D) $1 + 4t + 3t^2 + 2t^3$ ✓

Utilizzando l'isomorfismo delle coordinate rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$, traduciamo in vettori riga, e troviamo una nuova base del sottospazio generato dai tre vettori dati riducendo una matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e si vede subito che $(1, 4, 3, 2)$ non appartiene al sottospazio generato dai tre vettori.

4. Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

(A) Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti, allora $m \leq n$ ✓

(B) Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti, allora $n \leq m$

(C) Se $m \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti

(D) Se $n \leq m$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti

Teorema riassuntivo sulla dimensione

5. Determinare l'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \quad K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}\right).$$

(A) $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$

(B) $H \cap K = \operatorname{Span}\big((0, 6, 14, -6)^\intercal\big)$

(C) $H \cap K = \operatorname{Span}\big((-1, 1, 2, -1)^\intercal\big)$

(D) $H \cap K = H$ ✓

I due generatori sono L.I. sia per H che K, quindi $\dim H = \dim K = 2$. Verificando

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

otteniamo $\dim(H + K) = 2$, da cui $\dim(H \cap K) = 2$ e quindi $H \cap K = H$.

6. Sia V uno spazio vettoriale con due basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, e si consideri la matrice del cambio di base $A = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_{\mathrm{id}_V}$. Dato $\mathbf{v} \in V$, abbiamo

(A) $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

(B) $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ ✓

(C) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}A = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$

(D) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}A = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

7. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3-k \\ 1+k & 2 \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}MS$ è diagonale?

(A) per ogni $k \in \mathbb{R}$

(B) per nessun $k \in \mathbb{R}$

(C) $k = 1$ ✓

(D) $k = -1$

Teorema spettrale

8. Siano $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ due applicazioni lineari.

(A) $M \circ L = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$

(B) $M \circ L$ non è iniettiva ✓

(C) L è suriettiva

(D) $\dim \ker(M) = 0$

L non può essere iniettiva, quindi $\{\mathbf{0}\} \subsetneq \ker(L) \subseteq \ker(M \circ L)$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ una matrice simmetrica con un autospazio uguale a $\mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (1,2,3)^\intercal\big)$.

(A) A è invertibile

(B) A non è diagonalizzabile

(C) $(1,0,-1)^\intercal \in \mathrm{col}(A)$

(D) $(1,-2,1)^\intercal$ è un autovettore di A ✓

Per il teorema spettrale, gli autospazi sono ortogonali

10. Sia $H \subseteq \mathbb{R}^{10}$ un sottospazio vettoriale con $\dim H = 3$, e sia $L = \pi_H \circ \pi_H : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$.

(A) $\dim \mathrm{Im}(L) = 3$ ✓

(B) $\dim \ker(L) \leq 3$

(C) L è un isomorfismo

(D) $\mathrm{Im}(L) = H^\perp$

Abbiamo $\pi_H \circ \pi_H$ e $\mathrm{Im}(\pi_H \circ \pi_H) = \mathrm{Im}(\pi_H) = H$.