Esame Algebra Lineare – Settembre 2025

Domande a risposta multipla.

1. Il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

☐ non ammette soluzioni
☐ ammette un'unica soluzione
☐ ammette due soluzioni
☐ ammette infinite soluzioni

2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sia $A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \in \mathrm{Mat}(3,3)$, dove $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ sono vettori colonna, e si consideri la matrice $B = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_2)$.

☐ $\det(B) = -\det(A)$
☐ $\det(B) = \det(A)$
☐ $\det(B) = 2\det(A)$
☐ nessuna delle precedenti

4. In $\mathbb{R}^2$ considerare l'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$.

- ☐ W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$
- ☐ W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ con $\dim(W) = 2$

5. Trovare una forma cartesiana del sottospazio $H = \mathrm{Span}\,\{(0,1,1),(1,1,1),(1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- ☐ $x - y = z = 0$
- ☐ $y = z$
- ☐ $x = y = z$
- ☐ nessuna delle precedenti

6. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita, e $L : V \to W$ un'applicazione lineare

- ☐ Se $\dim V = \dim W$ e L è iniettiva, allora è anche suriettiva
- ☐ Se $\dim V > \dim W$ e L è suriettiva, allora è anche iniettiva
- ☐ Se $\dim V < \dim W$, allora L è iniettiva
- ☐ Se $\ker L \neq \{\mathbf{0}\}$, allora $\dim V > \dim W$

7. Considerare l'endomorfismo $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definito da $L(A) = A^{\intercal}$.

- ☐ L ha un unico autovalore
- ☐ gli autovalori di L sono 1 e -1
- ☐ gli autovalori di L sono 0 e 1
- ☐ L non è diagonalizzabile

8. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ☐ è sempre diagonalizzabile
- ☐ è diagonalizzabile se $k = 1$
- ☐ non è diagonalizzabile se $k = 2$
- ☐ è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$

9. Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (10, 4), \mathbf{v}_2 = (-6, 15)$ in $\mathbb{R}^2$. Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una isometria lineare, allora l'insieme $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2)\}$

☐ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$
☐ è una base ortogonale ma non ortonormale di $\mathbb{R}^2$
☐ è una base non ortogonale di $\mathbb{R}^2$
☐ non è una base di $\mathbb{R}^2$

10. Trovare la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0, 1, 0)^\intercal$ e parallela ai piani

$$\pi_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_3 = 1\} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 = 2\}$$

☐ $(0, 1, 0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1, 0, 1)^\intercal\big)$
☐ $(1, 2, 0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1, 1, 0)^\intercal\big)$
☐ $(0, 2, 1)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1, -1, -1)^\intercal\big)$
☐ $(2, -1, -2)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1, -1, -1)^\intercal\big)$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(1) Determinare una base e la dimensione di U e W.

(2) Determinare una forma parametrica e cartesiana di $U + W$.

(3) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

(4) Rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$, determinare $U^\perp$ e $W^\perp$.

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale $V = \operatorname{Mat}(2,2)$ e l'operazione

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\intercal B) \qquad \text{dove } A, B \in V.$$

(1) Dimostrare che $\langle A, B \rangle$ è un prodotto scalare in V.

(2) Determinare, rispetto a questo prodotto scalare, il complemento ortogonale di

$$H = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) Determinare una base ortonormale di V rispetto a questo prodotto scalare.

(4) Rispetto a questo prodotto scalare, determinare la proiezione ortogonale del vettore $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in V$ sul sottospazio H.

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. Il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

- ☐ non ammette soluzioni
- ☑ ammette un'unica soluzione
- ☐ ammette due soluzioni
- ☐ ammette infinite soluzioni

Applichiamo le mosse di Gauss e il Teorema di Rouché-Capelli alla matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☑ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sia $A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) \in \mathrm{Mat}(3,3)$, dove $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ sono vettori colonna, e si consideri la matrice $B = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_2)$.

☑ $\det(B) = -\det(A)$

☐ $\det(B) = \det(A)$

☐ $\det(B) = 2\det(A)$

☐ nessuna delle precedenti

Le operazioni sulle colonne cambiano il determinante come segue:

$$\det(B) = \det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_2) = \det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_2) = -\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = -\det(A)$$

4. In $\mathbb{R}^2$ considerare l'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$.

- ☐ W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$
- ☐ W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☑ W è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ con $\dim(W) = 2$

E' l'autospazio della matrice data associato all'autovalore 1, cioè, $\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Trovare una forma cartesiana del sottospazio $H = \mathrm{Span}\,\{(0,1,1),(1,1,1),(1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

- ☐ $x - y = z = 0$
- ☑ $y = z$
- ☐ $x = y = z$
- ☐ nessuna delle precedenti

Tutti i generatori soddisfano $y = z$, quindi $H \subseteq \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; per l'uguaglianza, basta notare che $H = \mathrm{Span}\,\{(0,1,1),(1,0,0)\}$ ha dimensione $2 = 3 - 1$

6. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita, e $L : V \to W$ un'applicazione lineare

- ☑ Se $\dim V = \dim W$ e L è iniettiva, allora è anche suriettiva
- ☐ Se $\dim V > \dim W$ e L è suriettiva, allora è anche iniettiva
- ☐ Se $\dim V < \dim W$, allora L è iniettiva
- ☐ Se $\ker L \neq \{\mathbf{0}\}$, allora $\dim V > \dim W$

Dal teorema di nullità+rango: $\dim \mathrm{Im}(L) = \dim V - \dim \ker(L) = \dim V = \dim W$.

7. Considerare l'endomorfismo $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definito da $L(A) = A^{\intercal}$.

- ☐ L ha un unico autovalore
- ☑ gli autovalori di L sono 1 e -1
- ☐ gli autovalori di L sono 0 e 1
- ☐ L non è diagonalizzabile

La matrice rappresentativa rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}(2,2)$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è diagonalizzabile con autovettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ associati all'autovalore 1, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ associato all'autovalore -1.

8. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ☐ è sempre diagonalizzabile
- ☐ è diagonalizzabile se $k = 1$
- ☐ non è diagonalizzabile se $k = 2$
- ☑ è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$

La matrice è sempre triangolare, pertanto gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale. Se $k \neq 1, 3$ allora questi sono tutti diversi, e la matrice è sempre diagonalizzabile. Se $k = 1$ o $k = 3$, l'autovalore ripetuto ha $a_\lambda = 2 \neq g_\lambda = 1$ in entrambi i casi.

9. Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (10, 4), \mathbf{v}_2 = (-6, 15)$ in $\mathbb{R}^2$. Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una isometria lineare, allora l'insieme $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2)\}$

- ☐ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$
- ☑ è una base ortogonale ma non ortonormale di $\mathbb{R}^2$
- ☐ è una base non ortogonale di $\mathbb{R}^2$
- ☐ non è una base di $\mathbb{R}^2$

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono ortogonali ma hanno norma diversa da 1. Queste proprietà sono preservate da un'isometria lineare.

10. Trovare la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,1,0)^\intercal$ e parallela ai piani

$$\pi_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_3 = 1\} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 = 2\}$$

☐ $(0,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$
☐ $(1,2,0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,1,0)^\intercal\big)$
☐ $(0,2,1)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,-1,-1)^\intercal\big)$
☑ $(2,-1,-2)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,-1,-1)^\intercal\big)$

Le giaciture dei piani sono $H_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_3 = 0\} = \mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$ e $H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 = 0\} = \mathrm{Span}\big((1,-1,0)^\intercal, (0,0,1)^\intercal\big)$. La giacitura di r è contenuta in entrambe, quindi in $H_1 \cap H_2 = \mathrm{Span}\big((1,-1,-1)^\intercal\big)$. Inoltre, abbiamo $(0,1,0)^\intercal = (2,-1,-2)^\intercal - 2(1,-1,-1)^\intercal$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad W = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

(1) Determinare una base e la dimensione di U e W.
(2) Determinare una forma parametrica e cartesiana di $U + W$.
(3) Determinare la dimensione di $U \cap W$.
(4) Rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$, determinare $U^\perp$ e $W^\perp$.

Esercizio 2. Considerare lo spazio vettoriale $V = \text{Mat}(2,2)$ e l'operazione

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}\,(A^\intercal B) \qquad \text{dove } A, B \in V.$$

(1) Dimostrare che $\langle A, B\rangle$ è un prodotto scalare in V.
(2) Determinare, rispetto a questo prodotto scalare, il complemento ortogonale di

$$H = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

(3) Determinare una base ortonormale di V rispetto a questo prodotto scalare.
(4) Rispetto a questo prodotto scalare, determinare la proiezione ortogonale del vettore $C = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} \in V$ sul sottospazio H.

(1) Verifichiamo le 3 proprietà di prodotto scalare, usando le proprietà della trasposta e della traccia:
Simmetrica: $\langle A, B\rangle = \text{tr}\,(A^\intercal B) = \text{tr}\,((A^\intercal B)^\intercal) = \text{tr}\,(B^\intercal A^{\intercal\intercal}) = \text{tr}\,(B^\intercal A) = \langle B, A\rangle$
Bilineare: $\langle c_1A_1+c_2A_2, B\rangle = \text{tr}\,((c_1A_1 + c_2A_2)^\intercal B) = \text{tr}\,((c_1A_1^\intercal + c_2A_2^\intercal)B) = \text{tr}\,(c_1A_1^\intercal B + c_2A_2^\intercal B) = c_1\text{tr}(A_1^\intercal B) + c_2\text{tr}\,(A_2^\intercal B) = c_1\langle A, B\rangle + c_2\langle A, B\rangle$
Definita positiva: $\langle A, A\rangle = \text{tr}\,(A^\intercal A) = \sum_{i=1}^n (A^\intercal A)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A^\intercal)_{i,j}(A)_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A)_{j,j}A)_{j,i} = \sum_{i,j} A_{j,i}^2$, quindi $\langle A, A\rangle \geq 0 \,\forall\, A$ e $\langle A, A\rangle > 0$ se $A \neq 0$

(2) Data $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in V$, imponiamo $A \in H^\perp$

$$A \perp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle A, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} \\ a_{1,2} & a_{1,2} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_{1,1} + a_{1,2} = 0$$

$$A \perp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \langle A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & a_{2,1} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_{2,2} = 0$$

Segue che $H^\perp = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(3) Osserviamo che entrambe le basi trovate per $H, H^\perp$ sono ortogonali:

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Dato che sono anche ortogonali tra loro, per ottenere una base ortonormale di V, basta normalizzare i vettori: dato che $A\|^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{i,j} (A_{i,j})^2$ come visto sopra, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In alternativa, si verifica immediatamente che la base canonica di $\mathrm{Mat}(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ortonormale rispetto a questo prodotto scalare. (4) Abbiamo già osservato che $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una base ortogonale di H, quindi

$$\begin{aligned}
\pi_H(C) &= \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right)}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$