Esame Algebra Lineare – Settembre 2024

Domande a risposta multipla.

1. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici tali che

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4), \qquad B = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3),$$

dove $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$ sono vettori colonna. Se $\det(A) = 1$, allora

(A) $\det(B) = -1$

(B) $\det(B) = 0$

(C) $\det(B) = 1$

(D) $\det(B) = 6$

2. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici simili. Allora

(A) A e B hanno gli stessi autovalori

(B) A e B hanno gli stessi autovettori

(C) A e B hanno lo stesso nucleo

(D) A e B hanno lo stesso spazio delle colonne

3. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici tali che $A^\intercal B = 0$. Allora

(A) $\mathrm{row}(A) \subseteq (\mathrm{row}(B))^\perp$

(B) $\mathrm{row}(A) \subseteq (\mathrm{col}(B))^\perp$

(C) $\mathrm{col}(A) \subseteq (\mathrm{col}(B))^\perp$

(D) $\mathrm{col}(A) \subseteq (\mathrm{row}(B))^\perp$

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathrm{Mat}(4,4)$ è un sottospazio vettoriale?

(A) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A^\intercal A = I_4\}$

(B) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A + A^\intercal = I_4\}$

(C) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A + A^\intercal = 0\}$

(D) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A^\intercal A = 0\}$

5. Siano $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due sottospazi vettoriali diversi di dimensione 1. L'insieme $H_1 \cup H_2$

(A) è un sottospazio vettoriale

(B) non contiene $\mathbf{0}$

(C) non è chiuso rispetto alla somma

(D) non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare

6. In $\mathbb{R}^3$, trovare la retta perpendicolare al piano di equazione $2x + y - 4z = 3$ passante per il punto $(3, 1, 1)$

(A) $(3, 1, 1) + \mathrm{Span}(1, -2, 0)$
(B) $(2, 2, 2) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$
(C) $2x + y - 4z - 3 = x - y - z - 1 = 0$
(D) $x - 2y - 1 = 2x + z - 7 = 0$

7. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+k \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

(A) $k = 0$
(B) $k \neq 0$
(C) $k = -2$
(D) $k \neq -2$

8. Sia V uno spazio euclideo, e $H, K \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

(A) $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$
(B) $(H + K)^\perp = H^\perp + K^\perp$
(C) $(H \cap K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$
(D) $H \cap K = H^\perp + K^\perp$

9. Quanti polinomi $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ soddisfano $p(2) = 4$ e $p(1) = 3$?

(A) nessuno
(B) uno
(C) due
(D) infiniti

10. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(A) per ogni $k \in \mathbb{R}$
(B) per nessun $k \in \mathbb{R}$
(C) $k = 1$
(D) $k \neq 1$

Domande a risposta aperta.

Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right), \qquad K = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases}x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\end{cases}\right\}.$$

a) Determinare una base di H e una base di K.

b) Determinare una forma cartesiana di H.

c) Determinare una base di $H \cap K$ e la dimensione di $H + K$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, e $L : V \to V$ un endomorfismo tale che

$$L(\mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_3) = -2\mathbf{b}_3,$$

a) Determinare la matrice $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$.

b) Determinare autovalori e autospazi della matrice A.

c) Dedurre autovalori e autospazi dell'endomorfismo L (suggerimento: sfruttare il teorema di rappresentazione).

d) Calcolare $A^{2024}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} = (1, 0, 2)^\intercal$.

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici tali che

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4), \qquad B = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3),$$

dove $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$ sono vettori colonna. Se $\det(A) = 1$, allora

(A) $\det(B) = -1$

(B) $\det(B) = 0$ ✓

(C) $\det(B) = 1$

(D) $\det(B) = 6$

$\mathrm{col}(B) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, quindi $\mathrm{rk}(B) \leq 3$

2. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici simili. Allora

(A) A e B hanno gli stessi autovalori ✓

(B) A e B hanno gli stessi autovettori

(C) A e B hanno lo stesso nucleo

(D) A e B hanno lo stesso spazio delle colonne

Hanno lo stesso polinomio caratteristico

3. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici tali che $A^\intercal B = 0$. Allora

(A) $\mathrm{row}(A) \subseteq (\mathrm{row}(B))^\perp$

(B) $\mathrm{row}(A) \subseteq (\mathrm{col}(B))^\perp$

(C) $\mathrm{col}(A) \subseteq (\mathrm{col}(B))^\perp$ ✓

(D) $\mathrm{col}(A) \subseteq (\mathrm{row}(B))^\perp$

Ogni riga di $A^\intercal$, cioè ogni colonna di A, è ortogonale a ogni colonna di B

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathrm{Mat}(4,4)$ è un sottospazio vettoriale?

(A) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A^\intercal A = I_4\}$

(B) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A + A^\intercal = I_4\}$

(C) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A + A^\intercal = 0\}$ ✓

(D) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A^\intercal A = 0\}$

Segue da $(c_1A_1 + c_2A_2) + (c_1A_1 + c_2A_2)^\intercal = c_1(A_1 + A_1)^\intercal + c_2(A_2 + A_2)^\intercal$

5. Siano $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due sottospazi vettoriali diversi di dimensione 1. L'insieme $H_1 \cup H_2$

(A) è un sottospazio vettoriale

(B) non contiene $\mathbf{0}$

(C) non è chiuso rispetto alla somma ✓

(D) non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare

Ad esempio $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1) \cup \mathrm{Span}(\mathbf{e}_2)$

6. In $\mathbb{R}^3$, trovare la retta perpendicolare al piano di equazione $2x + y - 4z = 3$ passante per il punto $(3, 1, 1)$

(A) $(3, 1, 1) + \mathrm{Span}(1, -2, 0)$

(B) $(2, 2, 2) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$

(C) $2x + y - 4z - 3 = x - y - z - 1 = 0$

(D) $x - 2y - 1 = 2x + z - 7 = 0$ ✓

Il punto $(3, 1, 1)$ soddisfa il sistema lineare. La giacitura è $\ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((2, 1, -4)^\intercal)$ che è il complemento ortogonale della giacitura $\ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ del piano

7. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+k \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

(A) $k = 0$

(B) $k \neq 0$

(C) $k = -2$

(D) $k \neq -2$ ✓

Se $k \neq -2$ la matrice ha 2 autovalori diversi e quindi è diagonalizzabile. Se $k = -2$ l'autovalore 1 ha $a_1 = 2, g_1 = 1$ e quindi non è diagonalizzabile.

8. Sia V uno spazio euclideo, e $H, K \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

(A) $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$ ✓

(B) $(H + K)^\perp = H^\perp + K^\perp$

(C) $(H \cap K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$

(D) $H \cap K = H^\perp + K^\perp$

$\mathbf{v} \in (H + K)^\perp \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u} \in H, \mathbf{w} \in K \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{u} \in H, \mathbf{w} \in K \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp, \mathbf{v} \in K^\perp$

9. Quanti polinomi $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ soddisfano $p(2) = 4$ e $p(1) = 3$?

(A) nessuno

(B) uno

(C) due

(D) infiniti ✓

Il sistema lineare $a_0 + (2)a_1 + (2)^2 a_2 = 4, a_0 + (1)a_1 + (1)^2 a_3 = 3$ ha infinite soluzioni.

10. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

(A) per ogni $k \in \mathbb{R}$

(B) per nessun $k \in \mathbb{R}$

(C) $k = 1$

(D) $k \neq 1$ ✓

Se $k = 1$, L non può esistere in quanto

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \neq L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$, i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, e l'applicazione lineare cercata è l'isomorfismo delle coordinate $Q_{\mathcal{B}}$

Domande a risposta aperta.

Esercizio 1. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right), \qquad K = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}\right\}.$$

a) Determinare una base di H e una base di K.

b) Determinare una forma cartesiana di H.

c) Determinare una base di $H \cap K$ e la dimensione di $H + K$

a) Il sottospazio H è lo spazio delle colonne della seguente matrice, che riduciamo a scala:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\3 & 0 & -1\\8 & 7 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\1 & 2 & 1\\0 & -6 & -4\\0 & -9 & -6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -3 & -2\\1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -3 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

da cui segue che la matrice ha rango 2, e $\dim H = 2$. Pertanto, una sua base è un qualsiasi insieme di 2 vettori linearmente indipendenti di H, ad esempio, $\{(1,2,0,7)^\intercal, (0,1,-1,2)^\intercal\}$. Per trovare una base di K, risolviamo il sistema lineare omogeneo applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan alla matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\0 & -4 & 0 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 \end{cases} \quad \Rightarrow K = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

I due vettori sono linearmente indipendenti, e quindi una base di K.

b) Per trovare una forma cartesiana di H, risolviamo il sistema i cui coefficienti sono dati dai vettori di una base di H:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \to \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4\end{cases} \Rightarrow \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

segue che $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid -2x_1 + x_2 + x_3 = -3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$.

c) Una forma cartesiana di $H \cap K$ è ottenuta combinando le forme cartesiane di H, K

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Riduciamo la matrice dei coefficienti a scala

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 2\\ 0 & 7 & 3 & -2\\ 0 & 7 & 3 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & -4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -12 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

da cui troviamo che una base di $H \cap K$ é $\{(0, 1, -1, 2)^{\intercal}\}$. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, e $L : V \to V$ un endomorfismo tale che

$$L(\mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \qquad L(\mathbf{b}_3) = -2\mathbf{b}_3,$$

a) Determinare la matrice $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{B}$.
b) Determinare autovalori e autospazi della matrice A.
c) Dedurre autovalori e autospazi dell'endomorfismo L (suggerimento: sfruttare il teorema di rappresentazione).
d) Calcolare $A^{2024}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} = (1, 0, 2)^\intercal$.

a) Abbiamo $A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \big([L(\mathbf{b}_1)]_\mathcal{B}, [L(\mathbf{b}_2)]_\mathcal{B}, [L(\mathbf{b}_3)]_\mathcal{B}\big) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} -1-x & -2 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 2 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)\det\begin{pmatrix} -1-x & 0 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)(-1-x)(-2-x)$$

e troviamo che gli autovalori di A sono $1, -1, -2$. Dato che $1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$ e $\sum a_\lambda \leq 3$, concludiamo che $a_\lambda = g_\lambda = 1$ per ogni autovalore λ. Troviamo quindi gli autospazi, basterà trovare un autovettore per ciascun λ.

$$E_1 = \ker(A - I_3) = \ker\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \ker(A + I_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \ker(A + 2I_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Il teorema di rappresentazione afferma che $[L(\mathbf{v})]_\mathcal{B} = A[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$, quindi, $L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \lambda[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$. Quindi, $\mathbf{v}$ è un autovettore di L associato a un autovalore λ se e solo se $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ è un autovettore di A associato all'autovalore λ. Concludiamo che gli autovalori di L sono

$1, -1, -2$, e gli autospazi sono

$$E_1 = \mathrm{Span}(3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3), \quad E_{-1} = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3), \quad E_{-2} = \mathrm{Span}(\mathbf{b}_3).$$

d) Scriviamo $(1, 0, 2)^\intercal$ come combinazione lineare degli autovettori e applichiamo A^{2024}

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = A^{2024}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + A^{2024}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = (-1)^{2024}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (-2)^{2024}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1+2^{2024}\end{pmatrix}$$