Algebra Lineare – Appello di giugno – Parte A – Soluzioni

1. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n)$ due matrici quadrate.

(A) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(B) $\det(AB) = \det(BA)$ ✓

(C) $\det(3A) = 3\det(A)$

(D) $\det(A^3) = 3\det(A)$

Dal teorema di Binet abbiamo $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2x+y \\ kx+y \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (2,0,4)^\intercal$ appartiene all'immagine $\mathrm{Im}(L_k)$?

(A) $k = 2$ ✓

(B) $k \neq 2$

(C) $k = -2$

(D) $k \neq -2$

Abbiamo $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}(L_k)$ se e solo se esiste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tale che $L_k(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$, se e solo se $A_k\mathbf{x} = \mathbf{v}$ ammette soluzioni, dove $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ rappresenta L_k rispetto alle basi canoniche. Dato che $\mathrm{rk}(A_k) = 2$ per ogni k (le prime due righe sono L.I.), dal teorem di Rouche-Capelli questo è equivalente a $\mathrm{rk}(A_k|\mathbf{v}) = 2$, o ancora a $\det(A_k|\mathbf{v}) = 0$.

$$\det(A_k|\mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix} = -4 - 2k + 8 = 4 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

3. Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e l'insieme di vettori $\mathcal{S} = \{(1,2,0)^\intercal, (1,1,-1)^\intercal, (0,1,1)^\intercal\}$.

(A) $\mathcal{S}$ è una base di H

(B) $\mathcal{S}$ è un insieme di generatori di H ma non una base

(C) $\mathcal{S}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti ma non genera H

(D) nessuna delle altre risposte ✓

Si vede subito che $(1,1,-1)^\intercal \notin H$, quindi $\mathcal{S}$ non genera H. Inoltre i vettori sono L.D.:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} = 1+1-2 = 0.$$

4. Trovare il più piccolo sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^4$ che contiene entrambi i sottospazi

$$H_1 = \mathrm{Span}\big((1,2,3,4),(2,3,4,5)\big) \quad \text{e} \quad H_2 = \mathrm{Span}\big((0,2,4,6),(1,3,5,7)\big)$$

(A) $H_1 = \mathrm{Span}\big((1,1,1,1)\big)$
(B) $H = \mathrm{Span}\big((1,4,7,10),(3,6,9,12)\big)$
(C) $H = \mathrm{Span}\big((1,2,3,4),(2,3,4,5),(0,2,4,6)\big)$ ✓
(D) $H = \mathbb{R}^4$

Il sottospazio cercato è la somma $H_1+H_2 = \mathrm{Span}\big((1,2,3,4),(2,3,4,5),(0,2,4,6),(1,3,5,7)\big)$. Il quarto generatore è ridondante, in quanto

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5. Quale delle seguenti matrici è simile alla matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

(A) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ ✓

(D) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

La matrice è simmetrica quindi diagonalizzabile. Gli autovalori sono le radici di

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x)\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (2-x)((1-x)^2 - 1^2) = (2-x)(1-x-1)(1-x+1) = x(2-x)^2$$

e quindi sono $0, 2, 2$. Gli stessi calcoli mostrano che lo stesso è vero per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pertanto, le matrici sono simili, in quanto entrambe sono simili a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. I piani $\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\}$ e $\beta = (1,1,1)^\intercal + \operatorname{Span}\big((1,2,1)^\intercal, (3,0,-1)^\intercal\big)$

(A) sono coincidenti

(B) sono paralleli ✓

(C) sono incidenti

(D) sono sghembi

I piani non sono coincidenti in quanto $(1,1,1)^\intercal \notin \alpha$. La giacitura di α è il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. Dato che $(1,2,1)^\intercal, (3,0,-1)^\intercal \in H$ e sono L.I. concludiamo che α e β hanno la stessa giacitura, e quindi sono paralleli.

7. Quale delle seguenti matrici M soddisfa $M^\intercal M = I_3$?

(A) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(C) $M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Una matrice M soddisfa $M^\intercal M = I_3$ se e solo se è ortogonale, cioè le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. La matrice in (D) è evidentemente ortogonale.

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico $\chi_A(x)$, e sia $k \in \mathbb{R}$ un numero reale.

(A) Se $\chi_A(k) = 0$ allora $\dim\ker(A) > 0$

(B) Se $\chi_A(k) \neq 0$ allora $\ker(A - kI_n) = \{\mathbf{0}\}$ ✓

(C) Se $\chi_A(0) = 0$ allora A è invertibile

(D) $\chi_A(k) = \dim\ker(A - kI_n)$

Se $\chi_A(k) \neq 0$ allora k non è un autovalore di A, quindi non esistono autovettori di A associati a 0, cioè il sottospazio $\ker(A - kI_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene solo $\mathbf{0}$.

9. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2,-2,2,-2)$ e $\mathbf{w} = (3,3,-3,3)$ in $\mathbb{R}^4$.

(A) $\frac{2\pi}{3}$ ✓

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) $\frac{4\pi}{3}$

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{(2)(3)+(-2)(3)+(2)(-3)+(-2)(3)}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(2)^2+(-2)^2}\sqrt{(3)^2+(3)^2+(-3)^2+(3)^2}}$$
$$= \frac{-12}{\sqrt{16}\sqrt{36}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{2\pi}{3}.$$

10. Quale delle seguenti applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è uguale a una proiezione ortogonale $\pi_H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, per un opportuno sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^3$?

(A) $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ✓

(B) $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

(C) $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$

(D) $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$

E' la proiezione ortogonale sul sottospazio $H = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, come si vede immediatamente utilizzando la base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ di H.