Algebra Lineare – Appello di febbraio – Parte A – Soluzioni

1. Siano $A, B, C \in \mathrm{Mat}(2,2)$ matrici invertibili. Quale delle seguenti matrici è uguale a $(ABC)^{-1}(C^{-1}BA^{-1})^{-1}$?

(A) I_2

(B) B^{-2}

(C) $C^{-1}B^{-2}C$ ✓

(D) $A^{-1}B^{-1}C^{-1}CB^{-1}A$

$(ABC)^{-1})(C^{-1}BA^{-1})^{-1} = (C^{-1}B^{-1}A^{-1})((A^{-1})^{-1}B^{-1}(C^{-1})^{-1}) = C^{-1}B^{-1}A^{-1}AB^{-1}C = C^{-1}B^{-2}C$

2. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare, con $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(A) Se il sistema ammette un'unica soluzione allora $m = n$

(B) Se $m > n$ allora il sistema non ammette soluzioni

(C) Se $m < n$ allora il sistema non può ammettere un'unica soluzione ✓

(D) Se $m = n$ allora $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$

Segue dal teorema di Rouché-Capelli

3. Quale dei seguenti vettori appartiene a $\mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big)$?

(A) $(2,1,4)$

(B) $(2,1,-4)$

(C) $(1,1,-1)$

(D) $(1,1,1)$ ✓

Riducendo la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

scopriamo che $\dim \mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big) = \dim \mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4),(1,1,1)\big) = 2$, quindi $\mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big) = \mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4),(1,1,1)\big)$.

4. Sia V uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$.

(A) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di V, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti ✓

(B) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ generano V, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ generano V

(C) Se $\dim V = 4$, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di V

(D) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti

Un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è ancora linearmente indipendente.

5. Le rette $r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = x_1 - x_2 = 1\}$ e $s = (0,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$

(A) sono coincidenti

(B) sono perpendicolari

(C) sono parallele

(D) sono sghembe ✓

Nessun punto di $s = \{(t,1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ soddisfa $x_1 - x_3 = 1$, quindi $r \cap s = \emptyset$. Risolvendo il sistema, troviamo $r = (1,0,0) + \mathrm{Span}\big((1,1,1)^\intercal\big)$, quindi le due rette hanno direzioni diverse.

6. Dati due sottospazi $H, K \subseteq \mathbb{R}^9$ con $\dim H = \dim K = 5$

(A) $H \cap K \neq \{\mathbf{0}\}$ ✓

(B) $H + K \neq \mathbb{R}^9$

(C) $H \cup K$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^9$

(D) $\dim(H + K) \geq 6$

Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H + K) \geq \dim H + \dim K - \dim \mathbb{R}^9 = 5 + 5 - 9 = 1$.

7. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la seguente applicazione lineare è suriettiva.

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + kx_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) $k = -2$

(B) $k \neq -2$ ✓

(C) per ogni $k \in \mathbb{R}$

(D) per nessun $k \in \mathbb{R}$

L è l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, e L è suriettiva se e solo se $\mathrm{col}(A) = \mathbb{R}^2$, equivalentemente, $\mathrm{rk}(A) = 2$. Riducendo a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 4 + 2k & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\mathrm{rk}(A) = 2$ se e solo se $k \neq -2$.

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$, e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ dei vettori non nulli tali che

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2, \quad A\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3.$$

(A) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \in \ker(A)$

(B) A è simile a una matrice diagonale ✓

(C) A è simmetrica

(D) $\ker(A)$ è un autospazio di A

La matrice A ha tre autovalori distinti, pertanto, è diagonalizzabile per il secondo criterio di diagonalizzabilità.

9. Una matrice $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ ha polinomio caratteristico $\chi_A(x) = -x(1-x)^2$.

(A) A è diagonalizzabile

(B) A non è diagonalizzabile

(C) A è invertibile

(D) A non è invertibile ✓

Vediamo che 0 è un autovalore di A, quindi, $\ker(A) \neq \{\mathbf{0}\}$ è un autospazio di A.

10. Sia V uno spazio euclideo, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(A) $\langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$

(B) $\langle 3\mathbf{v}, 3\mathbf{w}\rangle = 3\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$

(C) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$

(D) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2)$ ✓

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2 = \frac{1}{2}(\langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$$