Algebra Lineare – Appello di settembre – Parte A – Soluzioni

1. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici tali che

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4), \qquad B = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3),$$

dove $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^4$ sono vettori colonna. Se $\det(A) = 1$, allora

(A) $\det(B) = -1$

(B) $\det(B) = 0$ ✓

(C) $\det(B) = 1$

(D) $\det(B) = 6$

$\mathrm{col}(B) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, quindi $\mathrm{rk}(B) \leq 3$

2. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici simili. Allora

(A) A e B hanno gli stessi autovalori ✓

(B) A e B hanno gli stessi autovettori

(C) A e B hanno lo stesso nucleo

(D) A e B hanno lo stesso spazio delle colonne

Hanno lo stesso polinomio caratteristico

3. Siano $A, B \in \mathrm{Mat}(4,4)$ due matrici tali che $A^\intercal B = 0$. Allora

(A) $\mathrm{row}(A) \subseteq (\mathrm{row}(B))^\perp$

(B) $\mathrm{row}(A) \subseteq (\mathrm{col}(B))^\perp$

(C) $\mathrm{col}(A) \subseteq (\mathrm{col}(B))^\perp$ ✓

(D) $\mathrm{col}(A) \subseteq (\mathrm{row}(B))^\perp$

Ogni riga di $A^\intercal$, cioè ogni colonna di A, è ortogonale a ogni colonna di B

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathrm{Mat}(4,4)$ è un sottospazio vettoriale?

(A) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A^\intercal A = I_4\}$

(B) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A + A^\intercal = I_4\}$

(C) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A + A^\intercal = 0\}$ ✓

(D) $\{A \in \mathrm{Mat}(4,4) \mid A^\intercal A = 0\}$

Segue da $(c_1A_1 + c_2A_2) + (c_1A_1 + c_2A_2)^\intercal = c_1(A_1 + A_1)^\intercal + c_2(A_2 + A_2)^\intercal$

5. Siano $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ due sottospazi vettoriali diversi di dimensione 1. L'insieme $H_1 \cup H_2$

(A) è un sottospazio vettoriale

(B) non contiene $\mathbf{0}$

(C) non è chiuso rispetto alla somma ✓

(D) non è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare

Ad esempio $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1) \cup \mathrm{Span}(\mathbf{e}_2)$

6. In $\mathbb{R}^3$, trovare la retta perpendicolare al piano di equazione $2x + y - 4z = 3$ passante per il punto $(3, 1, 1)$

(A) $(3, 1, 1) + \mathrm{Span}(1, -2, 0)$

(B) $(2, 2, 2) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$

(C) $2x + y - 4z - 3 = x - y - z - 1 = 0$

(D) $x - 2y - 1 = 2x + z - 7 = 0$ ✓

Il punto $(3, 1, 1)$ soddisfa il sistema lineare. La giacitura è $\ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}((2, 1, -4)^\intercal)$ che è il complemento ortogonale della giacitura $\ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ del piano

7. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3+k \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

(A) $k = 0$

(B) $k \neq 0$

(C) $k = -2$

(D) $k \neq -2$ ✓

Se $k \neq -2$ la matrice ha 2 autovalori diversi e quindi è diagonalizzabile. Se $k = -2$ l'autovalore 1 ha $a_1 = 2, g_1 = 1$ e quindi non è diagonalizzabile.

8. Sia V uno spazio euclideo, e $H, K \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

(A) $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$ ✓

(B) $(H + K)^\perp = H^\perp + K^\perp$

(C) $(H \cap K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$

(D) $H \cap K = H^\perp + K^\perp$

$\mathbf{v} \in (H + K)^\perp \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u} \in H, \mathbf{w} \in K \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{u} \in H, \mathbf{w} \in K \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp, \mathbf{v} \in K^\perp$

9. Quanti polinomi $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ soddisfano $p(2) = 4$ e $p(1) = 3$?

(A) nessuno

(B) uno

(C) due

(D) infiniti ✓

Il sistema lineare $a_0 + (2)a_1 + (2)^2 a_2 = 4, a_0 + (1)a_1 + (1)^2 a_3 = 3$ ha infinite soluzioni.

10. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

(A) per ogni $k \in \mathbb{R}$

(B) per nessun $k \in \mathbb{R}$

(C) $k = 1$

(D) $k \neq 1$ ✓

Se $k = 1$, L non può esistere in quanto

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \neq L\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Se $k \neq 1$, i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$ formano una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, e l'applicazione lineare cercata è l'isomorfismo delle coordinate $Q_{\mathcal{B}}$