Algebra Lineare

Appello di febbraio – Parte B

05/02/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

Istruzioni

1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
2) La durata della Parte B è 60 minuti.
3) La Parte B contiene 2 esercizi, con un punteggio totale di 13 punti. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte verranno valutate nella loro interezza; pertanto, è importante fornire una soluzione chiara e giustificare i passaggi.
4) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, cuffie, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 2, 2]

Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il nucleo $\ker(L)$ e la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(L)$.

b) Determinare la matrice $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ che rappresenta L rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left\{1+t, 1-t, t^2+t^3, t^2-t^3\right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Determinare tre vettori $p_1(t), p_2(t), p_3(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ linearmente indipendenti e tali che le immagini $L\big(p_1(t)\big), L\big(p_2(t)\big), L\big(p_3(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio 2. [Punteggio: 2, 1, 2, 2]

Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base ortonormale di H.

b) Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale $H^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$.

c) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_H(\mathbf{v})$ e $\pi_{H^\perp}(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = (3, 4, 5)^\intercal$ sui sottospazi H e $H^\perp$.

d) Determinare un'isometria lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T\big(\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\big) = H$, dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.