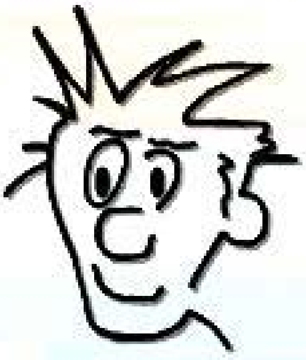
Paolo Dulio   Walter Pacco



ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA ANALITICA

TEORIA ED ESERCIZI CON SVOLGIMENTO

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

Paolo Dulio   Walter Pacco

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA ANALITICA

TEORIA ED ESERCIZI CON SVOLGIMENTO

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

ISBN 978-88-7488-838-2

Prima edizione: Febbraio 2015
Ristampa: Febbraio 2017

Responsabile produzione: Alessandro Parenti
Redazione: Giancarla Panigali, Carlotta Lenzi e Laura Tondelli

SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO

40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

Indice

Parte I

ALGEBRA LINEARE

Capitolo 1

DAGLI INSIEMI ALLE MATRICI

In questo capitolo vogliamo imparare a lavorare con le matrici, uno strumento molto generale, utilizzato anche in altri Corsi, che fornisce la base teorica per affrontare diverse questioni di Algebra Lineare e di Geometria Analitica. Prima di tutto consideriamo però alcune nozioni che possono rivelarsi utili nel seguito, riguardanti gli insiemi e le principali strutture che in essi si possono costruire.

1.1 NOZIONI PRELIMINARI

Nella Scuola Media si è visto che esistono diversi tipi di numero, spesso rappresentati geometricamente come punti di una retta. Inizialmente viene considerato l'insieme $\mathbb{N} = \{1, 2..\}$ dei *numeri interi*, poi l'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ dei *numeri interi relativi*. Successivamente si esamina l'insieme $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$, detto insieme dei *numeri razionali*, fino ad arrivare ai *numeri reali* $\mathbb{R}$. Solo in questo momento è possibile associare un numero ad *ogni* punto, e, al contrario, *trovare posto* per tutti i numeri. Tecnicamente si parla di *corrispondenza biunivoca* tra i numeri reali e i punti di una retta. Estendendo ulteriormente si può poi costruire l'insieme $\mathbb{C}$ dei *numeri complessi*, del tipo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ ed $i = \sqrt{-1}$ unità immaginaria. Per ognuna delle classi di numeri considerate, si parla di *insiemi numerici*. Più in generale, il termine insieme indica una collezione, un raggruppamento di oggetti di qualsiasi natura, dotati di un criterio in base al quale è possibile stabilire senza equivoci se un oggetto appartiene o meno ad un dato raggruppamento. Considerando solo alcuni degli elementi di un dato insieme A, si ottiene poi un *sottoinsieme* di A. Tra gli insiemi annoveriamo anche l'*insieme vuoto* $\emptyset$, cioè l'insieme privo di elementi. Le seguenti sono alcune delle principali operazioni tra insiemi.

- **Intersezione**. L'*intersezione tra due insiemi* A e B è l'insieme C formato dagli elementi che appartengono sia ad A che a B. Questa operazione si indica con il simbolo $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$. Se $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, gli insiemi A e B vengono detti *insiemi disgiunti*.

- **Unione**. L'*unione di due insiemi* A e B è l'insieme C degli elementi che appartengono ad A o a B o a entrambi. Questo insieme si indica con il simbolo $\mathsf{C} = \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$.

- **Differenza**. Si chiama *differenza di due insiemi* A e B l'insieme C degli elementi di A che non appartengono a B. In simboli la differenza si indica con $\mathsf{C} = A \setminus \mathsf{B}$. Si parla di *differenza simmetrica* per indicare l'insieme $\mathsf{A} \triangle \mathsf{B} = (\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}) \cup (\mathsf{B} \setminus \mathsf{A})$.

- **Prodotto cartesiano**. Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama *coppia ordinata* un insieme di due elementi (a, b) nel quale il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B. Si chiama *prodotto cartesiano* di A e B, e si indica con il simbolo $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, l'insieme delle coppie ordinate (a, b), con $a \in \mathsf{A}$ e $b \in \mathsf{B}$.

- **Insieme delle parti**. Se lavoriamo in un insieme X fissato, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X si dice *insieme delle parti* di X e si indica con $\mathcal{P}(\mathsf{X})$. Se $\mathsf{A} \in \mathcal{P}(\mathsf{X})$, l'insieme differenza $\mathsf{X} \setminus \mathsf{A}$ viene anche detto *insieme complementare* di A in X, e si indica con $\mathcal{C}(\mathsf{A})$.

Osservazioni ed esempi.

1. Si verifica facilmente che $\mathcal{C}(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = \mathcal{C}(\mathsf{A}) \cap \mathcal{C}(\mathsf{B})$ e $\mathcal{C}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = \mathcal{C}(\mathsf{A}) \cup \mathcal{C}(\mathsf{B})$. Tali formule sono note come *leggi di De Morgan*

2. Si verifica facilmente anche che valgono le proprietà distributive $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap (\mathsf{A} \cup \mathsf{C})$, e $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$. □

1.1.1 Relazioni tra insiemi

Consideriamo le seguenti frasi: (a) *Il triangolo* A *ha la stessa area del trapezio* B. (b) *Maria è madre di Lucia.* (c) 25 *è divisibile per* 5. (d) $\mathsf{A}, B, \mathsf{C}, \mathsf{D}$ *sono i vertici di un quadrato.* (e) *Il colore verde è più bello del rosso.* Soltanto nei casi (a), (b), (c) abbiamo relazioni in senso matematico. Solamente in questi casi infatti il *predicato* (verbo) fornisce una indicazione chiara, non è soggetto all'interpretazione del lettore ed il legame che si stabilisce tra gli *argomenti* (nomi) è limitato solamente a due di essi. In (d) il predicato si riferisce invece a quattro argomenti, mentre il caso (e) esprime una valutazione soggettiva. Definiamo una *relazione tra insiemi* nella maniera seguente.

Definizione 1.1. *Si dice che tra due insiemi* A *e* B *è presente una relazione, se è definita una proprietà oggettiva* $\mathcal{R}$ *che permette di associare a certi elementi di* A *particolari elementi di* B. *In questo caso scriviamo* $\mathsf{A}\mathcal{R}\mathsf{B}$ *(*A *è in relazione con* B*). In caso contrario scriviamo* $\mathsf{A}\overline{\mathcal{R}}\mathsf{B}$ *(*A *non è in relazione con* B*).*

Chiamiamo *dominio di una relazione* $\mathcal{R}$, definita tra gli insiemi A e B, il sottoinsieme di A costituito da tutti gli elementi ai quali è associato un elemento di B, cioè $\mathrm{dom}\mathcal{R} = \{x \in \mathsf{A} | x\mathcal{R}y, y \in \mathsf{B}\}$. Il *codominio di una relazione* è il sottoinsieme degli elementi di B che sono associati a qualche elemento di A, cioè $\mathrm{codom}\mathcal{R} = \{y \in \mathsf{B} | x\mathcal{R}y, x \in \mathsf{A}\}$.

Osservazioni ed esempi.

1. Una relazione $\mathcal{R}$ tra gli elementi di due insiemi A e B, essendo un insieme di coppie ordinate (x, y) il cui primo elemento $x \in \mathsf{A}$ e il cui secondo elemento $y \in \mathsf{B}$, è anche un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, ovvero $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

2. Una relazione può essere definita su un unico insieme A. In questo caso la relazione coinvolge coppie di $\mathsf{A} \times \mathsf{A}$. Si parla pertanto di *relazione in un insieme*.

3. Data una relazione $\mathcal{R}$ tra due insiemi A e B, non è detto che a tutti gli elementi di A sia associato un elemento di B, così come non è detto che tutti gli elementi di B vengano coinvolti dalla relazione. Pertanto, in generale, il dominio ed il codominio sono sottoinsiemi propri di A e B rispettivamente.

4. Sia $\mathsf{A} = \{12, 24, 37, 40\}$ e $\mathsf{B} = \{2, 3, 4, 5, 7\}$. Consideriamo la relazione $\mathcal{R}$: *x è multiplo di y*, con $x \in \mathsf{A}$ ed $y \in \mathsf{B}$. In questo caso abbiamo $\mathrm{dom}\mathcal{R} = \{12, 24, 40\}$ e $\mathrm{codom}\mathcal{R} = \{2, 3, 4, 5\}$. □

1.1.2 Applicazioni o funzioni

Tra le relazioni rivestono particolare importanza le *funzioni* o *applicazioni*. Una funzione f da A in B è una relazione tra gli elementi di A e quelli di B che associa ad alcuni elementi di A uno ed un solo elemento di B. In simboli abbiamo $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$.

L'insieme X degli elementi di A ai quali si applica la funzione è il *dominio della funzione* f. L'insieme Y degli elementi di B raggiunti dalla funzione è il *codominio della funzione*.

Se consideriamo un insieme $\mathsf{E} \subseteq \mathsf{A}$, indichiamo sinteticamente con $f(\mathsf{E})$ l'insieme dei punti di B ottenuti applicando f ai punti di E. Se $\mathsf{F} \subseteq \mathsf{B}$, indichiamo con $f^{-1}(\mathsf{F})$ l'insieme dei punti di A la cui immagine appartiene ad F. In particolare risulta $\mathsf{Y} = f(\mathsf{X})$. Se ogni coppia di elementi distinti di A ha immagini distinte in B, parliamo di *funzione iniettiva*. In tale caso, per ogni $y \in \mathrm{codom}f$, $f^{-1}(y)$ è ridotta ad un solo punto di $\mathrm{dom}f$. Pertanto la relazione $f^{-1} : \mathrm{codom}f \to \mathrm{dom}f$ tale che $f^{-1}(y) = x$ se $f(x) = y$ è una funzione, detta *funzione inversa* di f. Se per ogni elemento $y \in \mathsf{B}$ esiste almeno un elemento $x \in \mathsf{A}$ tale che $f(x) = y$ si ha una *funzione suriettiva*. L'elemento x tale che $f(x) = y$ si dice *controimmagine* di y. Se una funzione è contemporaneamente iniettiva e suriettiva, essa viene definita *funzione biunivoca*.

Osservazioni ed esempi.

1. Si considerino gli insiemi $\mathsf{A} = \{2, 3, 5\}$ e $\mathsf{B} = \{4, 7, 9, 25\}$ e la relazione $\mathcal{R}$ tra A e B descritta da *x è divisore di y*. Questa relazione è una funzione, poiché ogni $x \in \mathsf{A}$ viene associato ad un solo $y \in \mathsf{B}$. In particolare il dominio è tutto l'insieme A, mentre il codominio è il sottoinsieme di B dato da $Y = \{4, 9, 25\}$. La funzione è iniettiva, poichè ad ogni coppia di elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di Y. Essa non è invece suriettiva, dato che il numero $7 \in \mathsf{B}$ non ha alcuna controimmagine in A.

2. Si considerino gli insiemi $\mathsf{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\mathsf{B} = \{1, 9, 16\}$ e la relazione $\mathcal{R}$ tra A e B descritta da *$x\mathcal{R}y$ se $y = x^2$*, $x \in \mathsf{A}$, $y \in \mathsf{B}$. Essa è una funzione, il cui dominio è $\mathsf{X} = \{-1, 1, 3, 4\}$, mentre il codominio è tutto l'insieme B. La funzione è quindi suriettiva, ma non è iniettiva, poichè il numero $1 \in Y$ ha le due controimmagini $x = -1$ ed $x = 1$.

3. Siano A = { Roma, Parigi, Vienna} e B = { Italia, Francia, Austria}. Consideriamo la relazione $\mathcal{R}$: *x è capitale di y*. Questa relazione è una funzione biunivoca.

4. Siano $f : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ e $g : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ due funzioni tali che $\mathrm{dom} g \subseteq \mathrm{codom} f$. Allora la funzione $h : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$ tale che $h(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in \mathrm{dom} f$ si dice *funzione composta* delle funzioni g ed f. Essa si indica con il simbolo $h = g \circ f$. □

1.1.3 Relazioni in un insieme

Spesso si considerano relazioni del tipo $\mathsf{A}\mathcal{R}\mathsf{A}$, nelle quali cioè il dominio ed il codominio appartengono allo stesso insieme A. Le principali proprietà che vengono studiate in riferimento a queste sono le seguenti.

Proprietà riflessiva. Diciamo che $\mathcal{R}$ è una *relazione riflessiva* se ogni elemento $x \in \mathsf{A}$ è in relazione con se stesso, cioè, se per ogni $x \in \mathsf{A}$, accade che $x\mathcal{R}x$ (in simboli $\forall x \in \mathsf{A} \Rightarrow x\mathcal{R}x$).
Proprietà antiriflessiva. Si parla di *relazione antiriflessiva* se nessun elemento di A è in relazione con se stesso, cioè $x\overline{\mathcal{R}}x$ per ogni $x \in \mathsf{A}$ (in simboli $\forall x \in \mathsf{A} \Rightarrow x\overline{\mathcal{R}}x$).
Proprietà simmetrica. Abbiamo una *relazione simmetrica* $\mathcal{R}$ se ogni volta che $x \in \mathsf{A}$ è in relazione con $y \in \mathsf{A}$, accade anche che y è in relazione con x, cioè se per ogni $x, y \in \mathsf{A}$ tali che $x\mathcal{R}y$ risulta anche $y\mathcal{R}x$ (in simboli $\forall x, y \in \mathsf{A}, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$). In altre parole la relazione $\mathcal{R}$ è simmetrica se non ha importanza l'ordine degli argomenti che vengono coinvolti.
Proprietà antisimmetrica. Diciamo che $\mathcal{R}$ è una *relazione antisimmetrica* se ogni ogni volta che $x \in \mathsf{A}$ è in relazione con $y \in \mathsf{A}$ accade che y è in relazione con x soltanto se $x = y$, cioè se $x\mathcal{R}y$ allora $y\mathcal{R}x$ se e solo se $x = y$ (in simboli $\forall x, y \in \mathsf{A}, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$, dove $\wedge$ indica il connettivo logico *e*). In altre parole $\mathcal{R}$ è antisimmetrica se ha importanza l'ordine degli argomenti coinvolti.
Proprietà transitiva. Abbiamo una *relazione transitiva* $\mathcal{R}$ se dal fatto che x è in relazione con y, ed y è in relazione con z segue che x è in relazione con z, cioè, se $x\mathcal{R}y$ ed $y\mathcal{R}z$ allora anche $x\mathcal{R}z$ (in simboli $\forall x, y, z \in \mathsf{A}, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$).

Relazioni di equivalenza

Una relazione $\mathcal{R}$, definita su un insieme A, si dice *relazione di equivalenza* se gode, contemporaneamente, delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Gli elementi della coppia (x, y) in relazione tra loro sono detti in questo caso *elementi equivalenti*.
Quando in un insieme A viene introdotta una relazione di equivalenza gli elementi di A possono essere ripartiti in classi, dette *classi di equivalenza*, in ognuna delle quali gli elementi sono tutti equivalenti tra loro. Qualsiasi elemento di una classe di equivalenza può essere utilizzato per individuare la classe stessa, ed in tale caso viene chiamato *rappresentante della classe*. L'insieme delle classi di equivalenza prende il nome di *insieme quoziente*. Esso può essere ottenuto considerando l'insieme dei rappresentanti delle classi di equivalenza.

Relazioni d'ordine

Una relazione $\mathcal{R}$ per la quale valgono contemporaneamente le proprietà transitiva ed antiriflessiva, si dice *relazione d'ordine stretto*. Se invece $\mathcal{R}$ gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva, si parla di *relazione d'ordine largo*, o, più semplicemente, di *relazione d'ordine*. Un insieme A, dotato di una relazione d'ordine $\mathcal{R}$ viene detto *insieme ordinato*. Due elementi x, y di un insieme ordinato da una relazione $\mathcal{R}$ si dicono *elementi confrontabili* se si verifica $x\mathcal{R}y$ oppure $y\mathcal{R}x$. Una relazione d'ordine si dice di *ordine totale* quando tutti gli elementi dell'insieme in cui è definita sono confrontabili tra loro. In caso contrario si parla di *relazione d'ordine parziale*.

Classi di resti

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi fissiamo un numero positivo n, e consideriamo la relazione data da

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x - y = kn, \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \tag{1.1.1}$$

Tale relazione, detta *relazione modulo* n lega due interi relativi se e solo se la loro differenza è un multiplo di n.

Teorema 1.2. *La relazione modulo n è una relazione di equivalenza.*

-*Dimostrazione.* La relazione è riflessiva. Infatti $x\mathcal{R}x$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Basta prendere $k = 0$ $(x - x = 0 \cdot n)$.

È simmetrica. Infatti, se $x\mathcal{R}y$, allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x - y = kn$. Ma allora $y - x = -kn$, e quindi $y\mathcal{R}x$.

È transitiva. Se $x\mathcal{R}y$ ed $y\mathcal{R}z$ esistono $k, h \in \mathbb{Z}$ tali che $x - y = kn$ ed $y - z = hn$, e quindi $x - z = x - y + y - z = kn + hn = (k + h)n$. Pertanto risulta $x\mathcal{R}z$. ∎

Poiché la relazione modulo n è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$, possiamo considerare l'insieme quoziente. Esso si indica con $\mathbb{Z}_n$ e si dice insieme delle *classi di resti modulo* n. Se $x \in \mathbb{Z}$, la classe $[x]$ contiene, oltre ad x, tutti gli interi relativi che differiscono da x per un multiplo di n, cioè $[x] = \{x + kn,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Il motivo per cui si parla di *classe di resti* è chiarito dal seguente teorema.

Teorema 1.3. *Siano $x, y \in \mathbb{Z}$, e sia $\mathcal{R}$ la relazione modulo n. Allora $x\mathcal{R}y$ se e solo se dividendo x ed y per n si ottiene lo stesso resto.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che sia $x\mathcal{R}y$. Allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x - y = kn$. Siano q_1 ed r_1 il quoziente ed il resto della divisione di x per n, cioè $x = q_1 \cdot n + r_1$, con $0 \le r_1 < n$. Analogamente, siano q_2 ed r_2 il quoziente ed il resto della divisione di y per n, cioè $y = q_2 \cdot n + r_2$, con $0 \le r_2 < n$. Abbiamo allora $q_1 \cdot n + r_1 = q_2 \cdot n + r_2 + kn \Rightarrow (q_2 + k - q_1)n = r_1 - r_2$. Poiché $0 \le r_1 < n$ e $0 \le r_2 < n$ risulta $-n < r_1 - r_2 < n$, e quindi deve essere $q_2 + k - q_1 = 0$, cioè $r_1 = r_2$.

Supponiamo ora che la divisione di x e di y per n fornisca lo stesso resto. Abbiamo quindi $x = q_1 \cdot n + r$ ed $y = q_2 \cdot n + r$, per cui $x - y = (q_1 - q_2)n$, e quindi $x\mathcal{R}y$. ∎

Osservazioni ed esempi.

1. Possiamo costruire esempi di relazioni in un insieme, che sono dotate di una o più tra le proprietà elencate. Vediamone alcune.

   In $\mathsf{A} = \{$uomini della Terra$\}$ la relazione $\mathcal{R}$: *x è padre di y* non è riflessiva: nessuno infatti è padre di se stesso.

   In $\mathsf{A} = \{$uomini della Terra$\}$ la relazione $\mathcal{R}$: *x è cugino di y* è simmetrica, non è né riflessiva né transitiva (se a è cugino di b per parte di padre e b è cugino di c per parte di madre, a e c non sono, in generale, cugini tra loro).

In $A = \mathbb{N}$ la relazione $\mathcal{R}$: *x è multiplo di y* non è simmetrica. Tale relazione è invece antisimmetrica. Infatti, affermare che x è multiplo di y significa dire che x contiene y un certo numero di volte, cioè $x = hy$ per qualche $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 1$. Quindi y non può essere più grande di x. Di conseguenza, se anche y è multiplo di x deve essere necessariamente $h = 1$, cioè $x = y$. Nello stesso insieme degli interi, la relazione *essere maggiore di* non è antisimmetrica.

Nell'insieme delle persone viventi la relazione $\mathcal{R}$: *x è piu alto di y* è antiriflessiva, poiché nessuna persona può essere più alta di se stessa. Invece la relazione $\mathcal{R}$: *x è orgoglioso di y* non è antiriflessiva, poiché esistono persone che sono orgogliose di se stesse. Si noti che questa relazione non è neppure riflessiva, in quanto esistono persone che non sono orgogliose di se stesse.

2. Sia A l'insieme dei giocatori di calcio del campionato italiano. Consideriamo in A la relazione $\mathcal{R}$: *x è compagno di squadra di y*. Essa è di equivalenza in A. Le classi di equivalenza sono le singole squadre italiane. Ogni giocatore di una data squadra può essere preso come rappresentante. Infatti il nome di un giocatore permette di identificare immediatamente la squadra di appartenenza.

   Se con A indichiamo invece l'insieme di tutte le squadre del mondo, la relazione $\mathcal{R}$: *x è compagno di squadra di y* non è più transitiva. Sia infatti y un giocatore straniero del campionato italiano, che appartenga anche alla nazionale del proprio Paese. Sia x un compagno di y nella squadra italiana, e z un compagno di y nella nazionale del proprio Paese. Allora x e z non sono in generale compagni di squadra.

3. Sia A l'insieme delle rette del piano, ed $\mathcal{R}$: *x è parallela ad y*, con $x, y \in A$. Anche in questo caso si ha una relazione di equivalenza. Le classi di equivalenza sono i fasci di rette parallele. L'insieme quoziente può essere rappresentato considerando una retta per ogni fascio, e quindi corrisponde all'insieme delle direzioni del piano. Ad ogni direzione possiamo associare la retta passante per l'origine ed avente quella direzione. Pertanto, l'insieme quoziente può anche essere rappresentato dal fascio di rette passanti per l'origine. Consideriamo poi la circonferenza centrata nell'origine ed avente raggio uguale ad 1. Ogni retta passante per l'origine interseca questa circonferenza in una coppia di punti diametralmente opposti. Rappresentiamo allora l'insieme quoziente con le coppie di punti diametralmente opposti di una circonferenza.

4. Nell'insieme dei punti di una retta orientata, consideriamo la relazione $\mathcal{R}$: *x precede y*. Essa è antiriflessiva e transitiva, per cui è una relazione d'ordine stretto.

5. Sia $A = \mathbb{N}$ ed $\mathcal{R}$: *x non è maggiore di y*. In questo caso si verificano le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva, e quindi $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine largo. □

1.1.4 Richiami sul Massimo Comune Divisore

Dati due numeri interi $a, b \in \mathbb{N}$, indichiamo con (a, b) il loro massimo comune divisore. La scrittura $d|a$ indica che il numero d è un divisore di a. Quindi $(a, b)|a$ ed $(a, b)|b$, e per ogni k tale che $k|a$ e $k|b$, risulta $k \leq (a, b)$. A partire da due numeri interi assegnati, a e b, si pone il problema di determinare (a, b) in maniera algoritmica. Vediamo innanzitutto una semplice proprietà di divisibilità.

Teorema 1.4. *Siano $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, e sia $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x|a$ ed $x|b$. Allora $x|(a - b)$.*

-Dimostrazione. Per ipotesi esistono $k, h \in \mathbb{Z}$ tali che $a = kx$ e $b = hx$. Pertanto $a - b = (k - h)x$, il che dimostra che x è un divisore di $a - b$. ■

Abbiamo poi il seguente teorema.

Teorema 1.5. *Siano $a, b \in \mathbb{N}$ con $a > b$. Allora $(a, b) = (a - b, b)$.*

-Dimostrazione. Il massimo comune divisore tra a e b, essendo un divisore di a e di b, divide anche $a - b$. Quindi $(a, b)|(a - b, b)$, per cui $(a, b) \leq (a - b, b)$.

Sia ora $p = (a - b, b)$. Poiché $p|(a - b)$ esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che $pq = a - b$, cioè $a = pq + b$. Ma $p|b$, quindi esiste $s \in \mathbb{Z}$ tale che $ps = b$. Allora abbiamo $a = pq + b = pq + ps = p(q + s)$, e quindi $p|a$. Pertanto p è un divisore sia di a che di b, e quindi $p|(a, b)$, cioè $p \leq (a, b)$.

Le due disuguaglianze ottenute forniscono $(a, b) = (a - b, b)$. ■

Vediamo ora una proprietà importante del massimo comune divisore.

Teorema 1.6. *Siano $a, b \in \mathbb{N}$ con $a > b$. Se $a = bq + r$, allora $(a, b) = (b, r)$.*

-Dimostrazione. Se $r = 0$ allora $a = bq$ e quindi $(a, b) = (b, r) = b$.

Se $r \neq 0$, sia d un divisore sia di a che di b. Allora, essendo $r = a - bq$, risulta che $d|r$. Quindi $(a, b)|(b, r)$.

Supponiamo ora che d sia un divisore sia di b che di r. Allora, essendo $a = bq + r$, risulta che $d|a$. Quindi $(b, r)|(a, b)$. Di conseguenza abbiamo $(a, b) = (b, r)$. ■

Algoritmo di Euclide

Iterando il risultato ottenuto nel Teorema 1.6 si perviene al cosiddetto *algoritmo di Euclide* per il calcolo del massimo comune divisore di due interi a e b con $a > b$, in base al quale (a, b) coincide con l'ultimo resto non nullo della divisione iterata di a per b. Più precisamente, si procede come segue.

Primo passo	$a = b \cdot q_1 + r_1$	$\rightarrow$	Secondo passo	$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$
Terzo passo	$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$	$\rightarrow$	Quarto passo	$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$
...			...	
Penultimo passo	$r_{N-2} = r_{N-1} q_N + \boxed{r_N}$	$\rightarrow$	Ultimo passo	$r_{N-1} = r_N q_{N+1}$
			Risultato	$\boxed{r_N} = (a, b)$.

Osservazioni ed esempi.

1. Iterando il risultato descritto nel Teorema 1.5 si ha $(a, b) = (d, 0)$ per un certo d, il che fornisce un algoritmo alternativo a quello di Euclide per il calcolo del massimo comune divisore. Tuttavia, l'algoritmo di Euclide è preferibile, in quanto fornisce il risultato molto più rapidamente.

2. Confrontiamo su un esempio i due algoritmi considerati per il calcolo del massimo comune divisore. Assumiamo $a = 120$ e $b = 18$. Con il Teorema 1.5 abbiamo

$$
\begin{array}{rll}
 & (120,18) & = \\
= & (120-18=102,18) & = \\
= & (102-18=84,18) & = \\
= & (84-18=66,18) & = \\
= & (66-18=48,18) & = \\
= & (48-18=30,18) & = \\
= & (30-18=12,18) & = \\
= & (18,12) & = \\
= & (18-12=6,12) & = \\
= & (12,6) & = \\
= & (12-6=6,0) & \qquad \Rightarrow \quad (120,18)=\boxed{6}\,.
\end{array}
$$

Sfruttando invece l'algoritmo di Euclide si ottiene

$$
\begin{array}{l}
120 = 18\cdot 6+12 \\
18 = 12\cdot 1+\boxed{6} \\
12 = 6\cdot 2+0 \quad \Rightarrow \quad (120,18)=\boxed{6}\,.
\end{array}
$$

Come si nota, l'algoritmo di Euclide è molto più rapido. □

1.1.5 Cenni sulle equazioni modulari

La più semplice equazione lineare si ottiene uguagliando a zero un polinomio di primo grado in una sola incognita. Essa è pertanto una equazione del tipo $ax=b$. Dalla Scuola Media sappiamo come si risolve quando $a,b\in\mathbb{R}$. Ma come si procede quando a,b appartengono ad una classe di resti? In questo caso l'equazione si presenta nella forma $[a]\cdot[x]=[b]$, con $[a],[b]\in\mathbb{Z}_n$ per un certo n. Si parla allora di *equazione modulare*. Per semplicità scriviamo l'equazione modulare $[a]\cdot[x]=[b]$ in $\mathbb{Z}_n$ nella forma $ax=b \pmod n$, o, ancora più sinteticamente, nella maniera consueta $ax=b$ se è chiaro l'insieme $\mathbb{Z}_n$ in cui si lavora. Per capire come risolvere una equazione modulare è importante il seguente risultato, noto come *Identità di Bezout*

Teorema 1.7. *Siano $a,b\in\mathbb{N}$, a,b non entrambi nulli, e sia $d=(a,b)$. Allora esistono $x,y\in\mathbb{Z}$ tali che $ax+by=d$.*

-Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $A=\{ax+by,\ x,y\in\mathbb{Z}\}$, e sia $A_+=\{ax+by\in A,\ ax+by>0\}$. Osserviamo che $A_+\neq\emptyset$, poiché almeno uno dei numeri a e b appartiene ad A_+. Quindi A_+ ammette un elemento minimo m. Poiché $m\in A_+$ esistono $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ tali che $m=a\alpha+b\beta$. Sia t un qualsiasi elemento di A. Allora esistono $\gamma_t,\delta_t\in\mathbb{Z}$ tali che $t=a\gamma_t+b\delta_t$. Dividendo t per m si ha

$$
\begin{array}{lll}
t=m\cdot q_t+r & \text{con} & 0\le r<m \\
 & \text{cioè} & a\gamma_t+b\delta_t=(a\alpha+b\beta)q_t+r \\
 & \text{e quindi} & a(\gamma_t-\alpha q_t)+b(\delta_t-\beta q_t)=r \;\Rightarrow\; r\in A.
\end{array}
$$

Ma $r\geq 0$, e quindi, se fosse $r\neq 0$ sarebbe $r\in A_+$, il che è assurdo, essendo $r<m$. Di conseguenza deve essere $r=0$, il che significa che ogni elemento di A è multiplo di m. In particolare, a,b sono multipli di m, e quindi $m|d$.

Sia poi k un divisore sia di a che di b. Allora k divide $a\alpha + b\beta$, cioè $k|m$. Pertanto, ogni divisore sia di a che di b deve dividere m. In particolare $d|m$, per cui $m = d$. ■

Dall'identità di Bezout si ha facilmente un criterio risolutivo per le equazioni modulari.

Teorema 1.8. *Una equazione $ax = b$ ammette soluzione in $\mathbb{Z}_n$ se e solo se il massimo comune divisore d, tra a ed n, divide b.*

-*Dimostrazione.* Chiedersi se esistono soluzioni di $ax = b$ in $\mathbb{Z}_n$ equivale a chiedersi se esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $ax + kn = b$. Riferendoci alla dimostrazione del Teorema 1.7 questo significa che $b \in A$, e quindi che b è un multiplo di d. ■

Dal Teorema 1.8 deduciamo che, quando la condizione $d = (a, n)|b$ è soddisfatta, l'equazione modulare $ax = b$ ammette infinite soluzioni in $\mathbb{Z}$, ed esattamente d soluzioni distinte, non congrue modulo n. Per trovarle si procede come segue.

- **Passo (a)** Si calcola $d = (a, n)$. Per fare questo si può usare l'algoritmo di Euclide, utile anche per i passi successivi.
- **Passo (b)** Usando l'algoritmo di Euclide in senso inverso, cioè risalendo a partire da r_N, si determinano due numeri h, k tali che $r_N = d = ha + kn$.
- **Passo (c)** Si determina p tale che $b = pd$.
- **Passo (d)** Una soluzione è $x_0 = ph$. Infatti abbiamo $ax_0 = aph = p(d - kn) = pd - pkn = b - pkn = b \pmod n$. Le altre soluzioni si ottengono aggiungendo ad x_0 dei multipli interi di n/d. Pertanto abbiamo infinite soluzioni, dipendenti da un parametro $s \in \mathbb{Z}$, date da

  $$x = ph + \frac{ns}{(a, n)} \qquad \forall s \in \mathbb{Z}.$$

  Di queste infinite soluzioni ne esistono esattamente d indipendenti, ottenute dando al parametro s i valori $0, n/d, 2n/d, \ldots, (d-1)n/d$, rispettivamente.

Osserviamo anche che la ricerca di soluzioni di una equazione modulare in una indeterminata equivale alla ricerca di soluzioni di una *equazione diofantea* in due indeterminate[1].

Teorema 1.9. *L' equazione $ax + by = c$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ha soluzioni se, e solo se, $(a, b)|c$. Se ciò avviene si hanno infinite soluzioni, dipendenti da un parametro $s \in \mathbb{Z}$.*

-*Dimostrazione.* Consideriamo l'equazione modulare $ax = c (\mathrm{mod}\, b)$. Essa ha soluzioni se e solo se esiste $y \in Z$ tale che $ax + yb = c$, e ciò avviene se e solo se $(a, b)|c$. Se poi calcoliamo $(a, b) = ah + bk$ (con l'algoritmo di Euclide) e consideriamo $c = p \cdot (a, b)$, la generica soluzione dell'equazione diofantea $ax + by = c$ risulta

$$\begin{array}{l} x = ph + \frac{bs}{(a,b)} \\ y = pk - \frac{as}{(a,b)} \end{array} \qquad \forall s \in \mathbb{Z}.$$

■

[1] Le equazioni lineari a coefficienti interi per le quali si cercano soluzioni intere vengono dette equazioni lineari diofantee, in onore del matematico greco Diofanto di Alessandria, vissuto nel terzo secolo d.C., che per primo si occupò di questo argomento.

Osservazioni ed esempi.

1. Generalizzando il Teorema 1.9 abbiamo che una equazione del tipo $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$, con $a_1,a_2,...,a_n,b\in\mathbb{Z}$ ($a_1,a_2,...,a_n$ non tutti nulli), ammette soluzione se e solo se $(a_1,a_2,...,a_n)|b$. In questo caso si hanno infinite soluzioni dipendenti da $n-1$ parametri.

2. Risolviamo in $\mathbb{Z}_{210}$, l' equazione $[12][x]=[30]$. Il massimo comune divisore d, tra 12 e 210, è uguale a 6, e divide 30. Quindi, l'equazione ammette esattamente $d=6$ soluzioni distinte, non congrue modulo 210. Calcoliamo la prima ($x_0=p\cdot h$), determinando innanzitutto h mediante l'algoritmo di Euclide. Poiché risulta $210=12\cdot17+6$, abbiamo subito $6=210+12\cdot(-17)$, cioè $h=-17$. Inoltre $30=6\cdot5$, per cui $p=5$, e quindi la prima soluzione risulta $x_0=5\cdot(-17)=-85=125$ (modulo 210). Le altre soluzioni sono

$$x_1=-85+\frac{210}{6}=-50\ \rightarrow\ x_2=160\ (\text{modulo } 210)$$

$$x_2=-85+2\frac{210}{6}=-15\ \rightarrow\ x_2=195\ (\text{modulo } 210)$$

$$x_3=-85+3\frac{210}{6}=20,\quad x_4=-85+4\frac{210}{6}=55,$$

$$x_5=-85+5\frac{210}{6}=90$$

□

1.1.6 Operazioni negli insiemi

Dato un insieme A, un'*operazione binaria* interna su A è una funzione $*:\mathsf{A}\times\mathsf{A}\longrightarrow\mathsf{A}$ che associa *ad ogni coppia* (a_1,a_2) di elementi di A la loro composizione, a_1*a_2, ancora appartenente ad A. Quest'ultimo fatto si riassume dicendo che $*$ è un'*operazione interna*, oppure che l'insieme A è chiuso rispetto a tale operazione. L'operazione binaria $*$ si dice associativa se, per ogni $a,b,c\in\mathsf{A}$, risulta $a*(b*c)=(a*b)*c$. Questa proprietà è essenziale per poter parlare di elevamento a potenza o di multiplo. Più in generale, a partire da $n+1$ insiemi $\mathsf{A}_1,\ldots,\mathsf{A}_n,\mathsf{A}_{n+1}$, parliamo di *operazione n-aria* per una funzione $*$ tale che $*:\mathsf{A}_1\times\mathsf{A}_2\times\cdots\times\mathsf{A}_n\longrightarrow\mathsf{A}_{n+1}$. Se gli insiemi A_i ($i=1,\ldots,n+1$) coincidono, l'operazione è detta interna, altrimenti esterna.

Osservazioni ed esempi.

1. In genere si utilizzano due tipi di simbologia per indicare un'operazione binaria interna su A. La *notazione additiva* sfrutta il simbolo $+$. Con questa notazione la somma di un elemento a con se stesso m volte definisce il concetto di multiplo, cioè $a+a+\cdots+a$ (m volte)$=ma$. La *notazione moltiplicativa* sfrutta il simbolo $\cdot$, e permette di definire il concetto di potenza, cioè $a\cdot a\cdot\cdots\cdot a(m$ volte$)=a^m$. Le

precedenti uguaglianze non sarebbero vere nel caso in cui le operazioni non fossero associative. Sarebbe infatti necessario dire in quale ordine vengono effettuate le somme (o i prodotti).

2. La funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni reale positivo a la sua radice quadrata $\sqrt{a}$è un'operazione unaria su $\mathbb{R}^+$.

3. La funzione $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni coppia (a, n) la potenza n-esima a^n del numero reale a, è un'operazione binaria esterna.

4. Sia X un insieme. Sull'insieme delle parti di X, $\mathcal{P}(\mathsf{X})$, le usuali operazioni di unione ed intersezione sono operazioni binarie interne. □

1.1.7 Strutture algebriche

Si chiama *struttura algebrica* (di base) la coppia $(\mathsf{A}, *)$, dove A è un insieme ed $*$ una operazione interna ad A. Più in generale, possiamo dotare A di tante operazioni interne $*_1, \ldots, *_m$, ottenendo strutture algebriche più complesse.

Se $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$, allora $(\mathsf{B}, *)$ si dice *sottostruttura* di $(\mathsf{A}, *)$ se è a sua volta una struttura algebrica rispetto ad $*$. In tal caso si scrive anche $B \leq A$

Se $(\mathsf{A}, *)$ è una struttura algebrica, un suo elemento u tale che $u * a = a * u = a$ per ogni $a \in \mathsf{A}$ è chiamato *elemento neutro* per l'operazione $*$.

Se in una struttura algebrica $(\mathsf{A}, *)$ esiste un elemento neutro u e $a \in \mathsf{A}$, si chiama *inverso* di a un elemento $a' \in \mathsf{A}$ tale che $a * a' = a' * a = u$. La nozione di inverso ha senso solo in presenza di un elemento neutro. In notazione additiva l'inverso di a si indica col simbolo $-a$. In notazione moltiplicativa si indica con a^{-1}.

Semigruppi. Un insieme A, dotato di un'operazione binaria interna $*$ associativa, viene chiamato *semigruppo*. Se in $(\mathsf{A}, *)$ è definito un elemento neutro u, il semigruppo viene chiamato *monoide*.

Gruppi. Un monoide $(\mathsf{A}, \oplus)$ in cui ogni elemento ammette inverso si chiama *gruppo*.

Quindi un gruppo è un insieme A, dotato di un'operazione binaria interna $\oplus$, tale che:

(i) $\oplus$ è associativa;

(ii) esiste un elemento neutro u rispetto all'operazione $\oplus$;

(iii) per ogni elemento $a \in \mathsf{A}$ esiste un inverso a'.

Se $(\mathsf{A}, \oplus)$ è un gruppo, si dimostra che l'elemento neutro è unico, così come è unico l'inverso g^{-1} di ogni elemento $g \in \mathsf{A}$.

Nel caso l'operazione $\oplus$ sia commutativa, cioè valga l'uguaglianza $a \oplus b = b \oplus a$ per ogni coppia di elementi $a, b \in \mathsf{A}$, il gruppo viene detto *gruppo abeliano* o commutativo.

Anelli. Sia ora $(\boldsymbol{A}, +)$ un gruppo abeliano, con l'operazione scritta in forma additiva. Se in $\boldsymbol{A}$ è definibile un'altra operazione binaria interna, chiamata prodotto, rispetto alla quale $\boldsymbol{A}$ è un semigruppo, e per la quale valgono le proprietà distributive destra e sinistra del prodotto rispetto alla somma, $\boldsymbol{A}$ viene chiamato *anello*. Indicheremo un anello col simbolo $\mathbb{A}$. Ricordiamo che le proprietà distributive appena citate sono espresse dalle due seguenti uguaglianze, che devono essere valide per ogni terna a, b, c di elementi di $\mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Riassumendo, un anello è una terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, dove $\mathbb{A}$ è un insieme, mentre $+$ e $\cdot$ sono due operazioni binarie interne per cui valgono i seguenti tre assiomi:

(*i*) $(\mathbb{A}, +)$ è un gruppo abeliano;

(*ii*) $(\mathbb{A}, \cdot)$ è un semigruppo;

(*iii*) valgono le (1.1.2).

Se esiste un elemento neutro rispetto al prodotto, esso viene indicato con $\mathbf{1}$ (notazione moltiplicativa) per distinguerlo da 0, elemento neutro rispetto alla somma (notazione additiva). Si parla in questo caso di *anello unitario*. Se il prodotto è commutativo (la somma lo è certamente perchè $(\mathbb{A}, +)$ è abeliano per definizione), si parla di *anello commutativo*.

Campi. Come nel caso dei gruppi, che si ottengono estendendo le proprietà di struttura algebrica dei semigruppi, anche per gli anelli sorge naturale il problema di determinare se e quando sia possibile ampliare la struttura. Sappiamo che un anello è un insieme con due operazioni rispetto ad una delle quali (la somma) è un gruppo e rispetto all'altra (il prodotto) un semigruppo. Un anello $\mathbb{A}$ che ha una struttura di gruppo abeliano rispetto al prodotto sull'insieme $\mathbb{A} \setminus \{0\}$, viene chiamato *campo*. I suoi elementi vengono anche detti *scalari*.

Osservazioni ed esempi.

1. L'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ di un insieme $\mathbb{X}$ è un monoide rispetto all'operazione di unione insiemistica. L'elemento neutro è l'insieme vuoto.

2. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri interi, con l'usuale somma, è un semigruppo. Se introduciamo anche il numero $\mathbf{0}$, $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ diventa un monoide.

3. Gli insiemi $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ sono tutti gruppi additivi. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono gruppi anche rispetto al prodotto. L'insieme $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi, rispetto all'usuale operazione di prodotto, è un gruppo. L'insieme $\mathbb{Q}$, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto, è un campo. Lo stesso vale per $\mathbb{R}$ e per $\mathbb{C}$. La struttura $(\mathbb{Z}, +)$ è anche sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$, che è a sua volta sottogruppo di $(\mathbb{R}, +)$. La struttura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un sottocampo di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Inoltre $\mathbb{R}$ è sottocampo di $\mathbb{C}$.

4. Se $\mathbb{K}$ è un campo, il simbolo $\mathbb{K}[t]$ indica l'insieme di tutti i polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{K}$. Quindi, un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ avrà la forma

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n,$$

con gli $a_i \in \mathbb{K}$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$. Una radice del polinomio $p(t)$ è uno scalare di $\mathbb{K}$, indichiamolo con λ, tale che $p(\lambda) = 0$. Un campo $\mathbb{K}$ si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ ammette una radice in $\mathbb{K}$. I campi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ non sono algebricamente chiusi. Per esempio il polinomio $p(t) = t^2 + 1$ non ha radici in $\mathbb{R}$. Il campo costruito su $\mathbb{C}$ è invece algebricamente chiuso. □

1.1.8 Strutture su classi di resti

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ possiamo costruire la classe di resti $\mathbb{Z}_n$ (cfr. pagina 15), ed introdurre, in maniera naturale, le operazioni di somma e prodotto di classi

$$[a] + [b] = [a + b]$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

Si verifica facilmente che $(\mathbb{Z}_n, +)$ è un gruppo abeliano per qualsiasi intero n. Circa l'operazione $\cdot$, è ancora vero che essa é ben data, associativa ed esiste l'elemento neutro (rappresentato dalla classe $[1]$), ma per l'inverso si ha qualche problema. Consideriamo infatti, per esempio, la struttura $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$, e prendiamo le due classi di resti $[2], [3] \in \mathbb{Z}_6$. Osserviamo che $[2] \cdot [3] = [6] = [0]$, cioè, il prodotto delle due classi $[2]$ e $[3]$, entrambe diverse dalla classe nulla, fornisce come risultato proprio la classe $[0]$. Diciamo che le classi $[2]$ e $[3]$ sono *divisori dello zero* in $\mathbb{Z}_6$. La presenza di divisori dello zero in una data classe di resti $\mathbb{Z}_n$ impedisce che $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ sia un campo. Infatti, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 1.10. *Se $[a]$ è divisore dello zero in $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, allora $[a]$ non ammette inverso.*

-*D*imostrazione. Supponiamo che $[a]$ ammetta inverso. Esiste quindi $[\overline{a}] \neq [0]$, tale che $[a] \cdot [\overline{a}] = [\overline{a}] \cdot [a] = [1]$. Poiché $[a]$ è divisore dello zero esiste una classe $[b] \neq [0]$ tale che $[a] \cdot [b] = [0]$. Abbiamo allora

$$[\overline{a}] \cdot [a] \cdot [b] = [1] \cdot [b] \Rightarrow [\overline{a}] \cdot ([a] \cdot [b]) = [b] \Rightarrow [\overline{a}] \cdot [0] = [b] \Rightarrow [0] = [b],$$

il che è assurdo. ■

Consideriamo ora la struttura cha si ottiene introducendo in $\mathbb{Z}_n$ entrambe le operazioni $+$ e $\cdot$ di somma e prodotto di classi. Abbiamo in tal caso il seguente teorema fondamentale.

Teorema 1.11. *La terna $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ è un campo se e solo se p è un numero primo.*

-*D*imostrazione. Supponiamo innanzitutto che p non sia un numero primo. Allora esistono sempre almeno due interi $a, b \notin \{1, p\}$ tali che $p = a \cdot b$, e quindi $[a]$ e $[b]$ sono divisori dello zero in $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$. Pertanto, per il Teorema 1.10, $[a]$ e $[b]$ non ammettono inverso rispetto al prodotto, e quindi $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ non è un campo.

Supponiamo ora che p sia un numero primo, e sia $[a]$ una qualsiasi classe non nulla di $\mathbb{Z}_p$. Essendo $[a] \neq [0]$, risulta $a \neq p$, e quindi il massimo comune divisore tra a e p è 1. Pertanto, l'equazione $ax = 1 \pmod p$ ammette sempre soluzione (una sola). Quindi, la classe $[a]$ ammette inverso in $\mathbb{Z}_p$. Di conseguenza il prodotto di classi è una legge di composizione interna a $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$, associativa, commutativa e dotata di elemento neutro, ed inoltre ogni elemento di $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$ ammette inverso. Ciò implica che $(\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano. Poiché anche $(\mathbb{Z}_p, +)$ è un gruppo abeliano, $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ è un campo. ■

Osservazioni ed esempi.

1. I campi del tipo $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ con p primo rappresentano importanti esempi di *campi finiti*, dotati cioè di un numero finito di elementi.

2. Se p è un numero primo, allora $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ è un campo, e quindi ogni elemento di $\mathbb{Z}_p$ ammette inverso. Se invece p non è un numero primo possono esistere in $\mathbb{Z}_p$ sia elementi invertibili che elementi non invertibili, e quindi assume significato il problema di vedere se una data classe di resti ammette inverso. Per esempio, stabiliamo se esiste l'inverso di [13] in $\mathbb{Z}_{210}$. La richiesta si traduce nell'equazione $[13][x] = [1](\text{mod}210)$. Poiché $(13, 210) = 1$ esiste una sola soluzione, corrispondente alla classe inversa di [13] in $\mathbb{Z}_{210}$. Applicando l'algoritmo di Euclide si ottiene

$$
\begin{aligned}
&210 = 13 \cdot 16 + 2\\
&13 = 6 \cdot 2 + 1\\
&\text{e risalendo abbiamo}\\
&1 = 13 - 6 \cdot 2 = 13 - 6 \cdot (210 - 13 \cdot 16) = 13 \cdot 97 - 6 \cdot 210,
\end{aligned}
$$

e quindi la classe [97] è la soluzione cercata. □

1.2 MATRICI SU UN CAMPO

Un insieme di elementi, ordinati in una tabella rettangolare per righe e colonne, viene chiamato *matrice*:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}.
$$

Spesso gli elementi a_{ij}, con $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, vengono scelti in un campo $\mathbb{K}$. Essi sono detti *elementi della matrice* (o anche *termini della matrice*), e si scrive anche $A = [a_{ij}]$. La posizione occupata dall'elemento a_{ij} nella matrice A è indicata dalla coppia i e j. Il primo indice si riferisce alla riga e il secondo alla colonna cui appartiene l'elemento. La sua posizione nella tabella si ottiene pertanto come intersezione dell'i-esima riga con la j-esima colonna. Per convenzione le righe si numerano dall'alto in basso e le colonne da sinistra a destra. Si indicano con 0 ed 1 gli elementi neutri di $(\mathbb{K}, +)$ e $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$, rispettivamente. Una matrice avente m righe ed n colonne viene detta anche (m, n)-matrice o matrice di tipo (dimensione, ordine) (m, n). L'insieme di tutte le matrici di tipo (m, n) i cui termini appartengono al campo $\mathbb{K}$ è indicato con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Se il numero n di righe coincide con quello delle colonne, si parla di *matrice quadrata* di ordine n. L'insieme di queste matrici viene denotato con il simbolo $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. In quest'ottica, le matrici in cui il numero delle righe è diverso da quello delle colonne sono dette rettangolari.

Le matrici di $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ e $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ sono, rispettivamente, del tipo:

$$
[a_{11}, \ldots, a_{1n}] \qquad \begin{bmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1} \end{bmatrix},
$$

e sono anche chiamate *vettori riga* e *vettori colonna*. Una matrice di tipo (m, n) si può pensare come l'accostamento di m vettori riga oppure di n vettori colonna.

Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ parliamo di *diagonale principale* in riferimento agli elementi della forma a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, e di *diagonale secondaria* per gli elementi $a_{i,n+1-i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Esse sono rappresentate, rispettivamente, dagli elementi di A indicati da un asterisco nella figura sottostante

$$A = \begin{bmatrix} * & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & * & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & * \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & * \\ a_{22} & \cdots & * & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, gli elementi della diagonale principale sono detti *elementi principali*; sono quindi quelli della forma a_{ii}, $\quad i = 1, \dots, n$. La somma degli elementi principali viene detta *traccia* della matrice, ed indicata col simbolo $\mathrm{Tr}A$, ovvero $\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Una *sottomatrice* di A è una matrice costruita con elementi appartenenti ad A. Questi però non posso essere scelti ed ordinati a caso. Va rispettato il precedente ordinamento in righe e colonne della matrice originaria. Per formalizzare questo fatto si procede come segue. Siano I e J due sottoinsiemi degli insiemi di indici di riga e di colonna di A, ovvero $\mathsf{I} \subseteq \{1, \dots, m\}$ e $\mathsf{J} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Allora una sottomatrice di A si ottiene ordinando in una nuova matrice gli elementi di A che hanno come coppie di indici le coppie di $\mathsf{I} \times \mathsf{J}$, ovvero che stanno sulle righe di A il cui indice varia in I e sulle colonne il cui indice varia in J.

Osservazioni ed esempi.

1. Nella seguente matrice:
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & \pi & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2.1}$$
l'elemento a_{23} è $\sqrt{2}$, l'elemento a_{21} è -1 e l'elemento a_{34} è 1.

2. La matrice (1.2.1) appartiene a $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, ad $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$, ma non ad $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{Q})$, in quanto $a_{23} \notin \mathbb{Q}$.

3. La matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
ha come elementi principali $a_{11} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = -1$ e $a_{44} = 0$, e quindi $\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 2 + 0 + (-1) + 0 = 1$.

4. Data la matrice:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 6 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

posto $\mathsf{I} = \{2,4,5\} \subseteq \{1,2,\ldots,5\}$ e $\mathsf{J} = \{2,4,6\} \subseteq \{1,2,\ldots,7\}$, la sottomatrice H individuata da $\mathsf{I} \times \mathsf{J}$ è indicata dai quadrati:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{-3} & 3 & \boxed{5} & 1 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{0} & 1 & \boxed{3} & 1 & \boxed{0} & -2 \\ 5 & \boxed{2} & -1 & \boxed{6} & 7 & \boxed{0} & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

1.2.1 Particolari insiemi di matrici

Descriveremo ora alcuni insiemi particolari di matrici e ne discuteremo le proprietà.
•**Matrice nulla.** Col simbolo $O_{m,n}$ si indica la *matrice nulla* di ordine m, n, ovvero la matrice $[a_{ij}]$ di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che $a_{ij} = 0 \ \forall i = 1,\ldots,m, \ j = 1,\ldots,n$.
•**Matrice identica.** La *matrice identica* o *identità* $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, è $I_n = [\delta_{ij}]$, dove δ_{ij} viene chiamato *Simbolo di Krönecher* ed è così definito:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Abbiamo cioè elementi tutti nulli, ad eccezione degli elementi principali, uguali a 1.
•**Matrici triangolari** Indichiamo con $\mathcal{T}_n^{\uparrow}$ e $\mathcal{T}_n^{\downarrow}$, rispettivamente, gli insiemi delle *matrici triangolari* superiori ed *inferiori* d'ordine n. Questi sono sottoinsiemi di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, per ogni $n > 1$. Il nome deriva dal fatto che la sola parte consistente della matrice è data dal triangolo al di sopra (superiore) o al di sotto (inferiore) della diagonale principale. La descrizione formale è la seguente. Per una matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{T}_n^{\uparrow}$ si ha:

$$i > j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0 \text{ cioè sotto alla diagonale si hanno zeri.} \tag{1.2.2}$$

Per una matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{T}_n^{\downarrow}$, si ha

$$i < j \ \Rightarrow \ a_{ij} = 0 \text{ cioè sopra alla diagonale si hanno zeri.} \tag{1.2.3}$$

•**Matrici diagonali** Le matrici che sono contemporaneamente triangolari superiori ed inferiori si dicono *diagonali*. L'insieme di queste matrici viene indicato con $\mathcal{D}_n$, e si ha $\mathcal{T}_n^{\uparrow} \cap \mathcal{T}_n^{\downarrow} = \mathcal{D}_n$. Quindi una matrice diagonale è una matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che $a_{ij} = 0, \quad i \neq j$. Una matrice diagonale è completamente descritta dai suoi elementi principali a_{ii}, per cui, spesso, essa viene indicata con $A = \mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$. Le *matrici scalari* sono matrici diagonali con tutti gli elementi principali coincidenti.
•**Matrici binarie** Si dice *matrice binaria* una matrice i cui termini siano scelti in $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Non si danno condizioni sull'ordine della matrice, che può essere sia quadrata che rettangolare.
•**Matrici simmetriche ed emisimmetriche** Una matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è detta *matrice simmetrica* se

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,n. \tag{1.2.4}$$

Si noti che la condizione (1.2.4) è sempre vera per gli elementi principali, che ovviamente coincidono con se stessi.

Si parla invece di *matrice antisimmetrica* (o *emisimmetrica*) se vale la condizione

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.2.5}$$

In particolare, se $i = j$ abbiamo $a_{ii} = -a_{ii}$. Per esempio, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ciò implica $a_{ii} = 0$, cioè le matrici antisimmetriche reali hanno gli elementi principali tutti nulli.

Osservazioni ed esempi.

1. Per le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   si ha $A \in \mathcal{T}_2^{\uparrow}$ e $B \in \mathcal{T}_3^{\downarrow}$.

2. Gli elementi principali di una matrice triangolare possono essere o non essere nulli.

3. Consideriamo le matrici A e B date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

   La matrice A è simmetrica mentre B è emisimmetrica.

4. Se $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$, la condizione $a_{ii} = -a_{ii}$ non implica necessariamente $a_{ii} = 0$. Per esempio questo avviene se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. In tali casi una matrice emisimmetrica può avere elementi principali non nulli.

5. Ovviamente si può parlare di matrici binarie anche su campi $\mathbb{K}$ diversi da $\mathbb{Z}_2$. Basta che gli elementi di queste matrici siano scelti solo tra gli elementi neutri di $(\mathbb{K}, +)$ e $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$, rispettivamente.

6. Due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ appartenenti ad $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sono uguali se per ogni $i \in \{1, .., m\}$ e per ogni $j \in \{1, .., n\}$ risulta $a_{ij} = b_{ij}$.

□

1.2.2 Operazioni fra matrici

In $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ possiamo costruire vari tipi di operazioni. Qui ne consideriamo quattro.

Somma di matrici

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono due matrici di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la loro somma è una matrice $C = [c_{ij}]$, sempre di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, dove $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. La somma viene quindi fatta elemento per elemento. È ovvio che gli ordini delle due matrici A, B devono essere gli stessi. In caso contrario, qualche elemento di una delle due non avrebbe il corrispondente da sommare nell'altra matrice. Siccome l'operazione di *somma di matrici* si riconduce alla somma di elementi del campo base, tutte le proprietà della somma in $\mathbb{K}$ vengono ereditate dalla somma in $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Prodotto per uno scalare

Se $A = [a_{ij}]$ è una matrice di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, e $x \in \mathbb{K}$ è uno scalare qualsiasi, allora $xA = [xa_{ij}]$, ovvero si moltiplicano tutti gli elementi di A per lo scalare x. Il *prodotto per scalari* $x \cdot a_{ij}$ ha significato poiché sia x che gli elementi di A appartengono allo stesso campo $\mathbb{K}$. È facile mostrare che esiste una sorta di associatività mista del prodotto per scalari.

Teorema 1.12. *Per ogni* $a, b \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *risulta*

$$(ab)A = a(bA). \tag{1.2.6}$$

-*Dimostrazione.* Posto $A = [a_{ij}]$, basta far vedere che il generico elemento di $(ab)A = [r_{ij}]$ coincide con quello di $a(bA) = [s_{ij}]$. Per definizione di prodotto per scalari, si ha

$$r_{ij} = (ab)a_{ij}, \tag{1.2.7}$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ma il prodotto in (1.2.7) è fatto in $\mathbb{K}$, quindi è associativo. Allora

$$r_{ij} = (ab)a_{ij} = a\,(ba_{ij})\,, \quad \forall i, j. \tag{1.2.8}$$

Siccome ba_{ij} rappresenta il generico elemento della matrice bA, l'ultimo termine della (1.2.8) coincide con s_{ij}, ovvero $(ab)A = a(bA)$. ■

Combinazioni lineari di matrici

Le due precedenti operazioni di *somma di matrici* e *prodotto per uno scalare* possono essere combinate tra loro. Questo porta al concetto di *combinazione lineare di matrici*, rappresentata da una scrittura del tipo

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_kA_k, \tag{1.2.9}$$

dove $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sono k matrici assegnate (tutte dello stesso tipo) ed $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sono k scalari appartenenti al campo $\mathbb{K}$. In particolare, le k matrici assegnate possono essere tutte vettori riga, oppure tutte vettori colonna. Parliamo in questi casi di *combinazione lineare di righe* e *combinazione lineare di colonne* rispettivamente.

Prodotto di matrici

Per convenzione, il *prodotto di matrici* viene fatto righe per colonne. Per prima cosa è necessario che il numero di colonne della prima matrice corrisponda al numero di righe della seconda. Questo fatto si esprime dicendo che la prima matrice è *conformabile* alla seconda. Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{jk}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $AB = C = [c_{ik}]$ ha tante righe quante ne ha la matrice A, e tante colonne quante ne ha la B. Appartiene quindi all'insieme $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. Il termine c_{ik} è ottenuto come somma dei prodotti degli elementi dell'i-esima riga di A con gli elementi della k-esima colonna di B. L'i-esima riga di A è:

$$[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]\,.$$

La k-esima colonna di B è:

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}.$$

I prodotti cui si riferisce la definizione sono $a_{i1}b_{1k}, a_{i2}b_{2k}, \ldots, a_{in}b_{nk}$. La somma dei prodotti è quindi:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Si noti che, se le due matrici non fossero conformabili, non sarebbe possibile costruire tutti i prodotti precedenti.

Si può dimostrare che, con questa definizione, il prodotto di matrici è associativo. Invece non è commutativo. In primo luogo non è nemmeno detto che sia possibile eseguirlo. Infatti se A è conformabile con B, non segue necessariamente che B lo sia con A. Questo accade solo se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Comunque, anche in questo caso, essendo $AB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ e $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non avrebbe senso chiedersi se $AB = BA$, a meno che $m = n$. Tuttavia, in generale, il prodotto non è commutativo neppure in un insieme di matrici quadrate (cfr. Esempio 2 a pagina 31).

Teorema 1.13. *Verifichiamo che, se A è una matrice conformabile a B, per ogni $a \in \mathbb{K}$ si ha*

$$a(AB) = (aA)B = A(aB), \tag{1.2.10}$$

-*Dimostrazione.* Posto $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{jk}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, abbiamo: $aA = [aa_{ij}]$, $aB = [ab_{jk}]$ e $AB = [c_{ik}]$, con $c_{ik} = \sum_{x=1}^{n} a_{ix}b_{xk}$. Verifichiamo che il generico termine delle seguenti tre matrici coincide:

1. $a(AB) = [r_{ik}]$.
2. $(aA)B = [r'_{ik}]$.
3. $A(aB) = [r''_{ik}]$.

Infatti:

1. $r_{ik} = a\left(\sum_{x=1}^{n} a_{ix}b_{xk}\right)$;
2. $r'_{ik} = \sum_{x=1}^{n}(aa_{ix})b_{xk} = \sum_{x=1}^{n} a(a_{ix}b_{xk}) = a\left(\sum_{x=1}^{n} a_{ix}b_{xk}\right)$;
3. $r''_{ik} = \sum_{x=1}^{n} a_{ix}(ab_{xk}) = \sum_{x=1}^{n} a(a_{ix}b_{xk}) = a\left(\sum_{x=1}^{n} a_{ix}b_{xk}\right)$.

■

Teorema 1.14. *Il prodotto di matrici è distributivo rispetto alla somma.*

-*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che, date tre matrici A, B, C, risulta

$$A(B + C) = AB + AC, \tag{1.2.11}$$

$$(B + C)A = BA + CA, \tag{1.2.12}$$

supponendo soddisfatte tutte le proprietà di conformabilità. Verifichiamo solo la (1.2.11), in quanto il ragionamento per la (1.2.12) è del tutto analogo. Poniamo $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{jk}]$ e $C = [c_{jk}]$, con $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathrm{K})$ e $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathrm{K})$. Il generico elemento di $B+C$ è $b_{jk}+c_{jk}$. Quindi il generico elemento di $A(B+C)$ è

$$r_{ik} = \sum_{x=1}^{n} a_{ix}(b_{xk} + c_{xk}) = \sum_{x=1}^{n}(a_{ix}b_{xk} + a_{ix}c_{xk}) = \sum_{x=1}^{n} a_{ix}b_{xk} + \sum_{x=1}^{n} a_{ix}c_{xk} = s'_{ik} + s''_{ik}.$$

Per come è definito il prodotto di matrici, s'_{ik} è il generico termine di AB e s''_{ik} quello di AC. Posto $AB + AC = [r'_{ik}]$, abbiamo $r'_{ik} = s'_{ik} + s''_{ik} = r_{ik}$. Quindi la (1.2.11) è vera. ■

Trasposizione

L'operazione di *trasposizione* agisce su una singola matrice, scambiando le righe con le colonne. Ossia, se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathrm{K})$, la sua *trasposta* è $A^t = [b_{ji}] \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathrm{K})$, con $b_{ji} = a_{ij}$, cioè la prima riga di A diventa la prima colonna di A^t, la seconda riga di A diventa la seconda colonna di A^t e così via. È un'operazione di tipo involutorio, cioè $\left(A^t\right)^t = A$. È immediato osservare che $(A+B)^t = A^t + B^t$ e che, per ogni scalare a, risulta $(aA)^t = aA^t$. Un po' più delicata è invece la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 1.15. *La trasposta di un prodotto di matrici è il prodotto delle matrici trasposte prese in ordine inverso, cioè*

$$(AB)^t = B^t A^t \tag{1.2.13}$$

-*Dimostrazione.* Poniamo $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e indichiamo con a'_{ij} e b'_{ij} gli elementi di A^t e B^t, rispettivamente. Se $(AB)^t = [r_{ij}]$, abbiamo che r_{ij} corrisponde all'elemento di posto j, i in AB, ovvero

$$r_{ij} = \sum_{x=1}^{n} a_{jx}b_{xi}.$$

Invece, posto $B^t A^t = [s_{ij}]$, ricordando che $a'_{ij} = a_{ji}$ e $b'_{ij} = b_{ji}$, si ha

$$s_{ij} = \sum_{x=1}^{n} b'_{ix}a'_{xj} = \sum_{x=1}^{n} b_{xi}a_{jx} = \sum_{x=1}^{n} a_{jx}b_{xi}.$$

Quindi $r_{ij} = s_{ij}$ e la (1.2.13) è verificata. ■

Il precedente ragionamento si può generalizzare al prodotto di un numero qualsiasi, finito, di matrici, cioè $(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n)^t = A_n^t A_{n-1}^t \cdots A_2^t A_1^t$.

Osservazioni ed esempi.

1. Vediamo un esempio per ognuna delle operazioni introdotte.

   - Esempio di somma.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

• Esempio di prodotto per scalari.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 12 & -6 \\ 3 & 9 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

• Esempio di prodotto tra due matrici conformabili. Moltiplichiamo le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Applicando la definizione di *prodotto righe per colonne* abbiamo

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 4, \\ c_{12} &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -2 + 3 = 1, \\ c_{13} &= 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 0 - 2 = -2, \\ c_{21} &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0 - 2 = -2, \\ c_{22} &= 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 0 - 3 = -3 \\ c_{23} &= 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 0 + 2 = 2, \end{aligned} \qquad \text{da cui} \quad C = AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

• Esempio di trasposizione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Mostriamo con un esempio che il prodotto tra matrici non è commutativo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Anche se il prodotto di matrici in generale non è commutativo, esistono esempi di insiemi di matrici in cui vale la commutatività. Per esempio questo avviene nell'insieme $\mathcal{D}_n$ delle matrici diagonali d'ordine n. Infatti, moltiplicare due matrici in $\mathcal{D}_n$ equivale a moltiplicare elemento per elemento gli elementi principali delle due matrici, e quindi la commutatività del prodotto in $\mathcal{D}_n$ si eredita dalla commutatività del prodotto di scalari nel campo $\mathbb{K}$. Infatti:

$$AB = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) = \operatorname{diag}(b_1 a_1, \ldots, b_n a_n) = BA.$$

4. Si può verificare facilmente che la matrice identica I_n è l'elemento neutro rispetto al prodotto in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ossia che $AI_n = I_n A = A$ per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice sia simmetrica è che sia $A = A^t$. Invece A è antisimmetrica se $A = -A^t$ □

1.2.3 Determinante di una matrice quadrata

A partire da una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, è possibile calcolare un numero reale, detto *determinante* di A, ed indicato con $\det A$, il cui ruolo è di importanza fondamentale in molti dei settori in cui interviene l'uso delle matrici. Per capire come si calcola ci servono due definizioni.

Definizione 1.16. *Fissato un elemento a_{ij} di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il minore complementare (di a_{ij}) è il determinante della sottomatrice quadrata ottenuta da A eliminando l'i-esima riga e la j-esima colonna. Esso si indica col simbolo A_{ij}.*

Definizione 1.17. *Fissato un elemento a_{ij} di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il complemento algebrico di a_{ij} è il minore complementare preceduto dal segno $(-1)^{i+j}$. È quindi il minore complementare senza alcun cambiamento, se la somma degli indici dell'elemento a_{ij} è un numero pari, altrimenti è il minore complementare cambiato di segno se la somma degli indici è un numero dispari.*

Il procedimento che consente di calcolare il determinante è di tipo iterativo, e si basa sul seguente risultato, noto come *Teorema di Laplace*.

Teorema 1.18. *Fissata una linea (riga o colonna) di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, è invariante la somma dei prodotti degli elementi di questa linea per i rispettivi complementi algebrici.* ■

Questo numero invariante è proprio quello che si definisce *determinante* di A. Se invece $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con $n = 1$, allora il determinante di A coincide con il suo unico elemento. Le matrici aventi determinante nullo si dicono *matrici singolari*.

Uso del Teorema di Laplace

Rinunciamo a dimostrare il Teorema 1.18, ma vediamo come si utilizza. Prendiamo in considerazione una qualsiasi riga, diciamo la riga di indice i e calcoliamo il numero seguente

$$\sum_{j=1}^{n}(-)^{i+j}a_{ij}A_{ij} = (-)^{i+1}a_{i1}A_{i1} + (-)^{i+2}a_{i2}A_{i2} + \cdots + (-)^{i+n}a_{in}A_{in}.$$

Il Teorema 1.18 afferma allora che questo numero è lo stesso che si ottiene prendendo in considerazione una qualsiasi colonna, diciamo la colonna j-esima, e calcolando

$$\sum_{i=1}^{n}(-)^{i+j}a_{ij}A_{ij} = (-)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + \cdots + (-)^{n+j}a_{nj}A_{nj}.$$

Quindi, per calcolare il determinante di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si procede come segue. Per $n = 1$ si hanno matrici dotate di un solo elemento, ed esso è esattamente il determinante della matrice. Se $n > 1$, si sceglie innanzitutto una riga o una colonna di riferimento, rispetto alla quale effettuare lo sviluppo secondo Laplace. Per esempio, se scegliamo la prima riga, abbiamo

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-)^{i+j}a_{1j}A_{1j} = (-)^{1+1}a_{11}A_{11} + (-)^{1+2}a_{12}A_{12} + \cdots + (-)^{1+n}a_{1n}A_{1n}.$$

Per ogni $j = 1, \dots, n$, il minore complementare dell'elemento a_{1j}, ossia A_{1j} è a sua volta un determinante: il determinante della matrice di $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ ottenuta da A eliminando la riga e la colonna che contengono l'elemento a_{1j} stesso. Quindi il calcolo del determinante di una matrice di ordine n si scarica sul calcolo di n determinanti di ordine $n-1$. Sempre per il Teorema di Laplace, ciascuno di questi si ottiene calcolando $n-1$ determinanti di ordine $n-2$. Iterando questo ragionamento, si arriva alla fine al calcolo di determinanti di ordine 2, per i quali si ha

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \det[d] - b \det[c] = ad - bc.$$

Per esempio, per una matrice di ordine $n = 3$, si ha:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} &= a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix} = \\ &= a(ei - hf) - b(di - fg) + c(dh - eg) = \\ &= aei - ahf - bdi + bfg + cdh - ceg. \end{aligned}$$

Proprietà del determinante

Il determinante di una matrice quadrata A, di ordine n, possiede diverse importanti proprietà, spesso esprimibili interpretando A come accostamento di n vettori colonna $C_1, C_2, \dots, C_n$, oppure di n vettori riga $R_1, R_2, \dots, R_n$. Si parla allora, semplicemente, di proprietà delle *linee* di A, denotate $L_1, L_2, \dots, L_n$. Elenchiamo di seguito le principali.

1. Scambiando due linee di una matrice il determinante non cambia in valore assoluto, ma solo in segno, ovvero, se $i < j$:

$$\det[L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n] = -\det[L_1, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_n]. \tag{1.2.14}$$

   Per esempio, si verifica facilmente che, se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{allora} \quad \det A = 3 = -\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sommando ad una linea una combinazione lineare delle rimanenti (cfr. formula (1.2.9)) il determinante non cambia:

$$\det[L_1, \dots, L_{i-1}, L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_j L_j, L_{i+1}, \dots, L_n] = \det[L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_n]. \tag{1.2.15}$$

Per esempio

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4+(a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 3) \\ 1 & 2 & 3 & 4+(a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 3) \\ 1 & 2 & 3 & 4+(a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 3) \\ 1 & 2 & 3 & 4+(a\cdot 1+b\cdot 2+c\cdot 3) \end{bmatrix},$$

per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3. Se una linea è combinazione lineare di altre linee (cfr. formula (1.2.9)), allora il determinante è nullo. Casi particolari sono forniti da matrici con una linea nulla, o con due linee proporzionali. Per esempio

$$\det\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 & 3 \\ 1 & \boxed{0} & 1 & 2 \\ 2 & \boxed{0} & 0 & -1 \\ 3 & \boxed{0} & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{3} \end{bmatrix} = 0.$$

4. $\det A = \det A^t$. Per esempio, si verifica facilmente che

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -3 = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Per ogni $a \in \mathbb{K}$ risulta $\det[L_1, \ldots, aL_i, \ldots, L_n] = a\det[L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n]$. Come conseguenza abbiamo pertanto che $\det(aA) = a^n \det A$. Per esempio

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \det\left(2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2^3\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osservazioni ed esempi.

1. Quando si dice che una data proprietà dei determinanti è valida per le linee di una matrice, si intende che le linee devono essere tutte dello stesso tipo, cioè tutte righe o tutte colonne. Per esempio, se sommiamo ad una riga una combinazione lineare di colonne, in generale la (1.2.15) non è più vera.

2. Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

con lo sviluppo di Laplace.

Il Teorema 1.18 ci dice che lo sviluppo può essere fatto rispetto ad una qualsiasi linea (riga o colonna) della matrice. Prendiamo in considerazione, ad esempio, la seconda riga. Dobbiamo considerare i complementi algebrici degli elementi di A appartenenti alla seconda riga. Questi ultimi sono $a_{21} = -1$, $a_{22} = 3$ e $a_{23} = 1$. I rispettivi complementi algebrici sono i minori complementari presi con un opportuno segno, ovvero sono:

$$\begin{aligned}
(-1)^{2+1}A_{21} &= -A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(0 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2)) = -8 \\
(-1)^{2+2}A_{22} &= A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = 1 \\
(-1)^{2+3}A_{23} &= -A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 2 \cdot 0) = -4.
\end{aligned}$$

La somma dei loro prodotti con i rispettivi elementi della linea selezionata è il determinante cercato:

$$\begin{aligned}
\det A = \sum_{i=1}^{3} (-)^{2+i} a_{2i} A_{2i} &= -a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} - a_{23}A_{23} = \\
&= (-1) \cdot (-8) + 3 \cdot 1 + 1(-4) = 7.
\end{aligned}$$

3. Il teorema di Laplace afferma l'indipendenza della scelta della linea di una matrice nello sviluppo del suo determinante. Proviamo ad applicarlo per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

sia rispetto alla prima riga che alla terza colonna. Abbiamo, nel primo caso:

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 + 0(-3) = 8 - 6 = 2.$$

Sviluppando rispetto alla terza colonna:

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot 1 + 0 = 2.$$

Dal precedente esempio risulta evidente con quale criterio effettuare la scelta della linea di una matrice rispetto alla quale sviluppare il determinante. Quanti più zeri contiene la linea tanto più ne risulta semplificato il calcolo. Ovviamente una linea tutta nulla determina l'annullarsi del determinante.

4. Calcoliamo il determinante della seguente matrice triangolare superiore, rispetto all'ultima riga:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

Abbiamo

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & e \end{vmatrix} + f \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = f \cdot (ad - 0 \cdot b) = adf.$$

Osserviamo che $\det A = adf$ è il prodotto degli elementi principali. Questo è un fatto del tutto generale, che si riassume dicendo che il determinante di matrici triangolari è il prodotto degli elementi principali, ossia

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

per ogni $A \in \mathcal{T}^{\uparrow}$ o $A \in \mathcal{T}^{\downarrow}$. Ovviamente quanto sopra vale, a maggior ragione, per matrici diagonali.

5. **Regola di Sarrus.** Quanto segue è utile nel caso di matrici del terzo ordine, ossia di $\mathcal{M}_3(\mathrm{K})$ ed è conosciuta come *regola di Sarrus*. È una regola meccanica per il calcolo del determinante. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Si costruisce una tabella di numeri riscrivendo la matrice A ed affiancando alla terza colonna le prime due (in ordine):

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Si sommano i prodotti i cui fattori si trovano sulle seguenti diagonali

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & & * & & * & & * \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ * & & * & & * & & * & & * \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ * & & * & & * & & * & & * \end{array}$$

ovvero i prodotti $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ e $a_{13}a_{21}a_{32}$, e si sottraggono quelli i cui fattori si trovano sulle seguenti diagonali

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & & * & & * & & * \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ * & & * & & * & & * & & * \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\ * & & * & & * & & * & & * \end{array}$$

ossia $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$ e $a_{12}a_{21}a_{33}$. Il risultato è il determinante di A.

6. **Teorema di Binet.** La seguente proprietà del prodotto di matrici è nota come *Teorema di Binet*.

Teorema 1.19. *Il determinante del prodotto di matrici quadrate dello stesso ordine è il prodotto dei determinanti dei singoli fattori, ossia* $\det(A_1 A_2 \cdots A_n) = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_n$. ■

In particolare, il determinante è una funzione:

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

che conserva il prodotto.

Non vale invece una proprietà analoga nei confronti della somma. Cioè non è vero che il determinante della somma di due matrici quadrate è la somma dei determinanti. Per esempio, considerate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ abbiamo } \quad A + B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

da cui si vede che

$$\det(A + B) = 0 \neq \det A + \det B = 1 - 2 = -1.$$

□

1.2.4 Caratteristica o rango di una matrice

Consideriamo una matrice A dotata di m righe ed n colonne. La *caratteristica o rango* di una matrice è un numero intero, indicato con $\mathrm{rk}(A)$ (o semplicemente rk, o r, se non ci sono pericoli di fraintendimenti), compreso tra 0 ed il minimo tra m ed n. Per definire questo numero ci serve la seguente definizione.

Definizione 1.20. *Sia A una matrice di m righe ed n colonne. Un minore di ordine j di A, $1 \leq j \leq \min\{m, n\}$ è il determinante di una sottomatrice quadrata*[2] *di ordine j di A.*

Si noti nel caso $m = n = j + 1$ si ritrova la Definizione 1.16 di minore complementare. Parliamo poi di *orlato* di un minore di ordine j il minore di ordine $j + 1$ associato ad una sottomatrice che contiene quella precedente.

Definizione 1.21. *La caratteristica, o rango, di una matrice A è il massimo ordine di un minore non nullo estraibile da A.*

Osservazioni ed esempi.

1. Nella seguente matrice un minore P, di ordine 2 è, per esempio, il determinante della sottomatrice (o anche la sottomatrice stessa) formata dagli elementi riquadrati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & -1 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & \boxed{0} & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[2] Spesso si usa la parola *minore* anche in riferimento alla stessa sottomatrice.

Possiamo poi costruire un minore orlato di P, di ordine 3, considerando, per esempio, l'orlatura di P determinata dalla quarta riga e dalla terza colonna

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{3} & 5 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{2} & 1 \end{bmatrix}, \text{ cioè è:} \quad P' = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Una matrice quadrata A non singolare, di ordine n, ha rango n.

3. Se una matrice A ha almeno un elemento diverso da 0, allora $\text{rk} \geq 1$.

4. Sia A una matrice che ammette, per esempio, una sottomatrice H di ordine 4 non singolare. Allora esiste un minore di A, di ordine 4, non nullo, e quindi $\text{rk}(A) \geq 4$. Se *tutte* le sottomatrici quadrate di ordine superiore a 4 sono singolari, possiamo affermare che $\text{rk}(A) = 4$. $\square$

Calcolo del rango di una matrice

Sorge naturale chiedersi se per calcolare il rango di una matrice si debba per forza controllare il determinante di *tutte* le sue sottomatrici. Naturalmente, in base alla definizione, bisognerebbe proprio procedere in questa maniera, il che però risulta essere piuttosto laborioso. Il calcolo viene invece notevolmente semplificato dall'uso del seguente risultato, che ci limitiamo ad enunciare, noto come *Teorema di Krönecher*.

Teorema 1.22. *Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e P_h un suo minore non nullo di ordine h. Se ogni minore di ordine $h+1$ ottenuto orlando P_h è nullo, allora h è il massimo ordine di un minore non nullo ricavabile dalla matrice A.*

In base al teorema di Krönecher, per calcolare la caratteristica di una matrice basta procedere per orlati successivi, a partire da un qualsiasi elemento non nullo.

Osservazioni ed esempi.

1. Se la matrice assegnata è quadrata conviene innanzitutto calcolare il suo determinante, poiché, se questo è non nullo, il rango coincide con l'ordine della matrice.

2. Calcoliamo il rango di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è quadrata, quindi fra i vari minori vi è anche il determinate di A. Siccome A è una matrice triangolare superiore, il determinante è il prodotto degli elementi principali, ovvero $\det A = -5 \neq 0$. Quindi il massimo ordine di un minore non nullo coincide con l'ordine della matrice stessa e $\text{rk}(A) = 3$. Non ci sono altri controlli da fare.

3. Determiniamo il rango di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

La prima e la seconda colonna sono proporzionali, quindi $\det A = 0$ e $\mathrm{rk}(A) \lneqq 3$. Inoltre $\mathrm{rk}(A) \geq 1$ perché A ha almeno un elemento $\neq 0$. Se troviamo un minore non nullo di ordine 2 possiamo affermare che $\mathrm{rk}(A) = 2$. È quello che succede, in quanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

4. Nella seguente matrice il minore individuato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna vale 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pertanto $\mathrm{rk}(A) \geq 2$. Possiamo poi orlare tale minore in tre modi: usando la prima, la quarta o la quinta colonna, e ottenendo, rispettivamente

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$. □

1.2.5 Matrice inversa

La matrice identica I_n può essere considerata come l'elemento neutro rispetto al prodotto in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sorge allora naturale chiedersi se è possibile definire, sempre rispetto al prodotto di matrici, l'elemento inverso di $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ossia una matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Una tale matrice esiste se e solo se A è non singolare. Per ottenerla si costruisce innanzitutto la *matrice aggiunta* di A. Essa è la trasposta della matrice dei complementi algebrici di A, e viene indicata col simbolo A^*, cioè

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^* = \begin{bmatrix} (-)^{1+1}A_{11} & \cdots & (-)^{1+n}A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-)^{n+1}A_{n1} & \cdots & (-)^{n+n}A_{nn} \end{bmatrix}^t.$$

Si dimostra che $AA^* = \det A \cdot I_n$, per cui la matrice cercata è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \tag{1.2.16}$$

Circa la matrice inversa vale in particolare il seguente risultato

Teorema 1.23. *Il determinante dell'inversa di A è il reciproco del determinante di A.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sia una matrice invertibile, ossia tale che $\det A \neq 0$. La sua inversa A^{-1} è tale che $AA^{-1} = I_n$. Ricordando che $\det I_n = 1$, come conseguenza del Teorema di Binet (cfr. Teorema 1.19) si ha $1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$, da cui $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Esiste una classe di matrici, l'insieme $\mathcal{D}_n$ delle matrici diagonali, per la quale il calcolo dell'inversa è molto più semplice. Dalla definizione di prodotto si deduce infatti che la moltiplicazione di due matrici diagonali si ottiene facendo il prodotto dei corrispettivi elementi principali, ossia se $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ e $B = \mathrm{diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn})$, allora

$$AB = \mathrm{diag}(a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$$

   (cfr. pag. 31). È facile verificare che $A^{-1} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, \ldots, a_{nn}^{-1})$. Per esempio, l'inversa di $\mathrm{diag}(1, 3, -5)$ è $\mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$.

2. **Matrici e strutture algebriche.** Dalle considerazioni svolte deduciamo facilmente che $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo. E siccome la somma è commutativa è un gruppo abeliano.

   Le cose si complicano nel caso del prodotto. Per mantenere la chiusura dell'insieme di matrici rispetto all'operazione, ossia per essere certi che moltiplicando due matrici dello stesso insieme, si ottenga come risultato ancora una matrice dell'insieme di partenza, siamo costretti a restringere la nostra attenzione alle matrici quadrate. Ciò è diretta conseguenza della definizione di prodotto e della nozione di conformabilità.

   Grazie all'associatività del prodotto possiamo allora affermare che $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è, come minimo, un semigruppo. Però in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ abbiamo definito la matrice identica I_n che funge da identità per il prodotto, quindi $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un monoide. Purtroppo la natura di una matrice invertibile ci costringe a fermarci qui. Se vogliamo arricchire l'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ in quanto struttura algebrica rispetto al prodotto siamo costretti a prendere in considerazione non tutto $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ma suoi sottoinsiemi.

   Certamente $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo abeliano (l'abbiamo appena visto). Inoltre il prodotto è distributivo rispetto alla somma, e non solo nel caso di matrici quadrate. Basta garantire la conformabilità degli operandi. Possiamo allora sicuramente affermare che $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ è un anello, anzi un anello unitario.

   Torniamo all'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con l'operazione di prodotto. Abbiamo visto che è un monoide unitario. Per poter parlare di gruppo dobbiamo garantire l'esistenza di un elemento inverso per ogni matrice quadrata. Però abbiamo visto che non tutte le matrici quadrate ammettono inverso. Devono essere non singolari. Questo ci porta a restringere l'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ad un suo sottoinsieme. Il simbolo $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$ indica il *gruppo lineare* di ordine n sul campo $\mathbb{K}$. Questo insieme è formato da tutte le matrici quadrate invertibili di ordine n ad elementi nel campo $\mathbb{K}$, ovvero:

$$\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}.$$

Per verificare che $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$ è un gruppo rispetto al prodotto non possiamo usare le osservazioni fatte riguardo a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ovvero che è un monoide unitario, in quanto dobbiamo ragionare su un suo sottoinsieme. Intanto $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$ è chiuso rispetto al prodotto. Infatti, se $A, B \in \boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$, e quindi, per il Teorema di Binet, $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, cioè $AB \in \boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$. Inoltre il prodotto è associativo. L'elemento neutro è la matrice identica I_n (che appartiene a $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$ in quanto $\det I_n = 1 \neq 0$), essendo $AI_n = I_nA = A$, per ogni $A \in \boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$. Ogni elemento di $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$ ha inverso, proprio per come è definito il gruppo lineare. Sono quindi soddisfatti tutti gli assiomi di gruppo. Si noti che $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{K})$ non è abeliano, in quanto il prodotto di matrici non è commutativo. $\square$

Capitolo 2

SISTEMI LINEARI

Ci vogliamo ora occupare dello studio e della risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Il loro interesse è dovuto al fatto che, a differenza di sistemi di equazioni generiche, esistono in questo caso precise tecniche per affrontarli. È bene comprendere fin dall'inizio che la fase risolutiva è comunque subordinata all'esistenza di soluzioni, e quindi che bisogna innanzitutto cercare metodi che consentano di capire in partenza se un dato sistema ammetta soluzioni o sia impossibile.

2.1 DEFINIZIONE E NOTAZIONI

Un *sistema di equazioni* in n incognite è una famiglia di m equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

di cui si ricercano soluzioni comuni. Una *soluzione* del sistema (2.1.1) è una n-pla $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ tale che $f_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = 0$, per ogni $i = 1, \ldots, m$. Si noti che non si pone alcuna condizione sulle funzioni f_i delle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tutti i seguenti sono sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ x - y + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy + y^2 + 1 = 0 \\ z = 1 \\ xz^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y = 0 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Se in (2.1.1) tutte le funzioni $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ sono polinomi di primo grado, allora si ha un *sistema di m equazioni lineari in n incognite.* In questo caso, isolando al secondo membro di ogni equazione l'eventuale termine noto, il sistema assume il seguente aspetto

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

dove i coefficienti a_{ij} e b_i appartengono ad uno stesso campo $\mathbb{K}$, per ogni $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$[1]. Se i termini noti b_i sono tutti nulli, allora si parla di *sistemi omogenei*. L'esistenza di soluzioni e il loro numero sono regolati dal Teorema di Rouché-Capelli (cfr. Teorema 2.2) e, per quanto riguarda il numero di soluzioni, il campo base ha la sua importanza. Se il campo $\mathbb{K}$ cui appartengono i coefficienti dei polinomi che compongono il sistema è infinito (ad esempio $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$) il sistema può comportarsi solo in tre modi:

(*i*) non ha soluzioni;

(*ii*) ha un'unica soluzione;

(*iii*) ha infinite soluzioni.

Non esistono casi intermedi. Non è possibile che un sistema lineare abbia, ad esempio, dodici soluzioni.

Osservazioni ed esempi.

1. Per verificare che una data n-pla $(s_1, s_2, ..., s_n)$ è soluzione di un sistema lineare (2.1.2), basta verificare che sostituendo $x_i = s_i$ i primi membri diventano uguali a b_i, per ogni $i \in \{1, ..., m\}$.

2. Ovviamente un sistema omogeneo ammette sempre almeno la soluzione $(0, 0, \ldots, 0)$, detta *soluzione banale*. Eventuali altre soluzioni non banali, ovvero aventi almeno una componente non nulla, sono chiamate *autosoluzioni*.

3. Il seguente è un esempio di sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$$
La terna $(7, 6, 5)$ è una sua autosoluzione.

4. La terna $(2, -3, 1)$ è un'autosoluzione del sistema
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$
Anzi, tutte le terne del tipo $(2a, -3a, a)$, con $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, sono autosoluzioni del precedente sistema. □

2.1.1 Matrici associate ai sistemi lineari

Dato il sistema lineare (2.1.2), consideriamo le seguenti matrici:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

[1] Nelle applicazioni si assume spesso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ma molti risultati teorici valgono in generale.

La matrice A viene chiamata *matrice dei coefficienti* del sistema, la X *vettore colonna delle incognite* e B *vettore colonna dei termini noti*. Per come è stato definito il prodotto di matrici, è facile vedere che

Teorema 2.1. *Il sistema* (2.1.2) *è equivalente all' equazione matriciale*

$$AX = B. \tag{2.1.3}$$

*-D*imostrazione. Le matrici A e X sono conformabili, essendo $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Inoltre la matrice al primo membro della (2.1.3) è dello stesso tipo di quello della matrice al secondo membro: $m, 1$. Sviluppando i conti otteniamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{2.1.4}$$

Ma due matrici coincidono se e solo se coincidono i loro rispettivi elementi. Quindi la (2.1.4) equivale al sistema (2.1.2). Di conseguenza, ad ogni sistema lineare è possibile associare la coppia di matrici (A, B). Viceversa, ad ogni coppia di matrici (A, B), con $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, si può associare il sistema $AX = B$. ■

Esiste allora un legame naturale fra sistemi lineari e coppie di matrici siffatte. Questa corrispondenza dipende però da due scelte che, in genere, vengono date per scontate: l'ordinamento delle incognite e quello delle equazioni. È ovvio che se si scambiano due equazioni in un sistema, le matrici dei coefficienti avranno due righe scambiate. Lo stesso vale per le colonne, se si scambiano le posizioni di due incognite in ciascuna delle equazioni del sistema.

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 1 \\ 2x + z - 4t = 0 \\ y - 3z + t = 5. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Si noti che, in mancanza di una variabile, si considera come coefficiente 0. Tutti gli ordinamenti considerati sono quelli naturali o suggeriti dalla forma del sistema e dalla prassi. Nel senso che, per le equazioni, abbiamo usato l'ordinamento suggerito dalla scrittura del sistema, mentre per l'ordinamento delle variabili abbiamo usato x, y, z, t.

2. Costruiamo il sistema associato alla coppia di matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siccome ci sono 5 incognite ($A \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{R})$), per comodità le numereremo con un indice, usando l'ordinamento naturale suggerito da quest'ultimo. Allora il sistema diventa $AX = B$, con

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

3. In genere, se le incognite sono indicate con più lettere, ad esempio $a, b, \ldots, x, y, z$, l'ordine è quello alfabetico. Se sono indicate tramite un'unica lettera con indice, ad esempio, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'ordine è indotto dall'ordinamento naturale degli indici.

4. Determiniamo le matrici associate al sistema lineare di due equazioni nelle tre incognite $\square$, $\triangle$ e ∇:

$$\begin{cases} 2\square - 3\triangle + \nabla = 1 \\ \triangle - 5\square + 3\nabla = 2. \end{cases}$$

Dobbiamo stabilire un ordinamento sulle incognite (in questo caso l'ordine alfabetico non ci aiuta!). Per esempio: $\square, \triangle, \nabla$. Allora, riordinando le equazioni, abbiamo:

$$\begin{cases} 2\square - 3\triangle + \nabla = 1 \\ -5\square + \triangle + 3\nabla = 2, \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti e i vettori delle incognite e dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \square \\ \triangle \\ \nabla \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

2.2 STUDIO DI UN SISTEMA LINEARE

Lo studio di un sistema lineare avviene attraverso due fasi distinte. Per prima cosa si cerca di capire se il sistema ammette soluzioni. In caso di risposta negativa lo studio è concluso. Se invece la risposta è affermativa si passa alla determinazione esplicita di tutte le soluzioni possibili. Consideriamo separatamente queste due fasi.

2.2.1 Risolubilità di un sistema lineare

Lo studio della risolubilità di un sistema lineare si basa sul seguente fondamentale Teorema, conosciuto come *Teorema di Rouché-Capelli*.

Teorema 2.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema $AX = B$, con $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sia risolubile è che il rango della matrice dei coefficienti A coincida con quello della matrice completa A', ottenuta accostando alle colonne di A la colonna dei termini noti B.*

-*D*imostrazione. Pensiamo la matrice dei coefficienti A come l'accostamento di n vettori colonna $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{K}^m$, cioè $A = [C_1|C_2|...|C_n]$. Il sistema si può quindi esprimere nella forma $x_1C_1 + x_2C_2 + ...x_nC_n = B$. Dire che il sistema ammette soluzioni equivale a dire che esistono coefficienti $x_1, x_2, ..., x_n$ per i quali il vettore colonna B è combinazione lineare delle colonne di A (cfr. formula (1.2.9)). Quindi, ogni minore di A' ottenuto orlando con B un minore estratto da A deve essere necessariamente nullo (cfr. Osservazione 3 a pagina 34). Ma allora il massimo ordine di un minore non nullo estratto da A' coincide con il massimo ordine di un minore non nullo estratto da A, cioè la caratteristica di A' è uguale alla caratteristica di A. ■

La matrice $A' = [A|B]$ viene anche chiamata *matrice aumentata*.

2.2.2 Determinazione delle soluzioni

Dopo essersi assicurati dell'esistenza di soluzioni, si ha poi il problema di determinarle effettivamente. Esistono a questo proposito molte maniere diverse di procedere, che in generale sfruttano operazioni attraverso le quali il sistema dato viene trasformato in un altro sistema, equivalente al precedente ma più semplice. Ognuno di questi metodi può rivelarsi più o meno utile a seconda dei casi. Ne esaminiamo due in particolare, il primo applicabile a tutti i sistemi, il secondo specifico per i sistemi lineari.

Risoluzione di un sistema lineare col metodo di sostituzione

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Supponiamo che il coefficiente dell'incognita x_1 nell'equazione f_1 sia $\neq 0$. Per la linearità dell'equazione è sempre possibile mettere in evidenza la variabile x_1, ottenendo così una scrittura del tipo $x_1 = g(x_2, \dots, x_n)$. Sostituendo il valore così trovato per x_1 nelle $m-1$ rimanenti equazioni, abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = g(x_2, \dots, x_n) \\ f_2(g, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(g, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1 = g(x_2, \dots, x_n) \\ f_2'(x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m'(x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Procedendo in questo modo è quindi possibile passare dal sistema iniziale ad un sistema ad esso equivalente (cioè avente tutte e sole le soluzioni del sistema iniziale), in cui il numero di variabili in alcune equazioni è diminuito. Se $n = m$, iterando il procedimento si arriva all'ultima equazione, nella quale compare una sola incognita. Si calcola allora il valore di quella incognita, e si risale poi fino alla prima equazione esplicitando di volta in volta i valori delle incognite calcolate. Se $n < m$ il valore dell'ultima incognita (e risalendo quello di tutte le altre) può essere calcolato dopo sole n iterazioni, e quindi le $m - n$ equazioni rimanenti risultano essere superflue (cioè non fanno altro che esprimere in forma diversa le stesse relazioni descritte dalle prime n equazioni) Se $n > m$, nell'ultima equazione restano $n - m + 1$ incognite, e quindi si può solo determinarne una in funzione delle altre $n - m$. Risalendo, anche le precedenti incognite vengono calcolate in funzione di queste $n - m$ *incognite parametriche*. Abbiamo in questo caso infinite soluzioni.

La regola di Cramer

La dimostrazione del Teorema 2.2 mette in evidenza che lo studio di un sistema lineare si ribalta sullo studio delle combinazioni lineari delle colonne della matrice A dei coefficienti, e quindi la caratteristica di A deve esprimere qualche proprietà importante di queste combinazioni lineari. Rinviamo al Teorema 3.12 del Capitolo 3 per la comprensione di questo fatto. Per ora ci limitiamo a dire che quando A ed A' hanno la stessa caratteristica, la risoluzione esplicita del sistema può avvenire sfruttando il teorema seguente, noto come *Regola di Cramer*.

Teorema 2.3. *Sia $AX = B$ un sistema lineare, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta un'unica soluzione è che* $\det A \neq 0$. *In questo caso le soluzioni sono:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2.2}$$

dove A_i è la matrice ottenuta dalla A sostituendo, di volta in volta, alla colonna i-esima la colonna dei termini noti B.

-*Dimostrazione.* Se A è una matrice quadrata non singolare, possiamo moltiplicare per A^{-1}, a sinistra, entrambi i membri di $AX = B$, ed abbiamo $A^{-1}AX = A^{-1}B$, da cui si ricava che il sistema ammette l'unica soluzione $X = A^{-1}B$. Questo significa che la componente i-ma di X, cioè l'incognita x_i, è uguale al prodotto tra la riga i di A^{-1} e la colonna B. Per come si è costruita la matrice inversa (cfr. formula (1.2.16)), abbiamo allora

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ & & \ldots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix},$$

essendo A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} in A. Il prodotto tra la riga i di A^{-1} e la colonna B fornisce quindi

$$x_i = \frac{1}{\det A} \left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n \right). \tag{2.2.3}$$

Consideriamo ora la matrice A_i ottenuta da A sostituendo alla colonna i la colonna B dei termini noti, cioè rimpiazzando a_{ji} con b_i

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i-1} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i-1} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni-1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

I complementi algebrici dei b_i in A_i coincidono ovviamente con i complementi algebrici A_{ji} degli a_{ji} in A. Pertanto, sviluppando il determinante di A_i secondo il Teorema di Laplace applicato alla colonna i, otteniamo $\det A_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}$, e quindi, dalla (2.2.3) ricaviamo la (2.2.2). ■

Uso della regola di Cramer

La Regola di Cramer non solo assicura la risolubilità di un sistema quadrato (ossia quando il numero delle equazioni coincide con quello delle incognite) la cui matrice dei coefficienti sia non singolare, ma fornisce anche la scrittura esplicita della soluzione. Possiamo comunque sfruttarla in tutti i casi di risolubilità, cioè anche per sistemi quadrati in cui $\det A = 0$ o per sistemi non quadrati. A questo scopo si procede come segue. Sia M la sottomatrice di A corrispondente al minore non nullo di ordine massimo che fornisce la caratteristica r. Cambiando eventualmente l'ordine di scrittura delle equazioni e dei loro singoli addendi, possiamo sempre far sì che le righe e le colonne di M siano le prime r righe e le prime r colonne di A.

$$\underset{(m,n)}{A} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(r,r)}{M} & \\ \hline & \end{array}\right]$$

Eliminiamo poi dal sistema le $m-r$ equazioni i cui coefficienti non appartengono ad M, e trasportiamo al secondo membro le $n-r$ incognite i cui coefficienti non appartengono ad M. Otteniamo così un sistema quadrato del tipo $MX' = B'$, cioè un sistema di r equazioni nelle r *incognite essenziali* $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$M \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{bmatrix}. \tag{2.2.4}$$

Le $n-r$ incognite che vengono spostate al secondo membro devono essere interpretate come parametri arbitrari. Riassumiamo ciò dicendo che *il sistema ammette* ∞^{n-r} *soluzioni*. Se $r = n$ la soluzione è unica ed abbiamo un *sistema determinato*.

Osservazioni ed esempi.

1. Discutiamo la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 2x - z = -1 \\ 4x - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Le matrici A, B ed A' sono, rispettivamente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Studiamo il rango di A' partendo da minori appartenenti alla sottomatrice di A' determinata da A. Il minore ottenuto dalle prime due righe e colonne, è uguale a 2, quindi A (e anche A') ha almeno rango 2. Rimanendo in A, ovvero soffermandosi solo sulle prime quattro colonne, il minore considerato si può orlare in due soli modi:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi, per il Teorema 1.22, $\mathrm{rk}A = 2$. Possiamo però orlare il minore in un terzo modo, usando l'ultima colonna della matrice aumentata (quella dei termini noti e che non è presente nella matrice dei coefficienti):

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A' = 3 \neq 2 = \mathrm{rk}A$. Per il Teorema 2.2, il sistema è privo di soluzioni.

2. Discutiamo la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4t = 1 \\ x - 3y + 2z + t = 5. \end{cases}$$

Le matrici A, B ed A' sono, rispettivamente

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Considerando le prime due colonne, determiniamo un minore del secondo ordine non nullo. Quindi A, ma anche A', ha rango massimo, ossia $r = \mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$. Il Teorema 2.2 dice che il sistema ha $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, ovvero che nelle soluzioni, quaterne ordinate di numeri, compariranno due parametri indipendenti.

3. Supponendo di avere già verificato la risolubilità, determiniamo le soluzioni del seguente sistema con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo il valore della variabile x dalla prima equazione e sostituiamolo nella seconda:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \\ \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right) + y - 4 = 0, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}y - \frac{9}{2} = 0. \end{cases}$$

Ora ricaviamo y dalla seconda equazione, sostituendo il suo valore nella prima:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\frac{9}{5} - \frac{1}{2} \\ \\ y = \frac{9}{5} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ \\ y = \frac{9}{5}, \end{cases}$$

che fornisce la soluzione del sistema iniziale.

4. Supponendo di avere già verificato la risolubilità, determiniamo le soluzioni del seguente sistema con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo la x dalla prima equazione:

$$\begin{cases} x = y - z + 1 \\ 2(y - z + 1) + 2y - 6 = 0, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = y - z + 1 \\ 4y - 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Ricavando z dalla seconda equazione si ottiene:

$$\begin{cases} x = y - (2y - z) + 1 \\ z = 2y - 2, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = -y + 3 \\ z = 2y - 2. \end{cases}$$

In questo caso non è stato possibile determinare un valore preciso per ogni variabile e questa è una situazione tipica nei sistemi dove il numero di equazioni è minore di quello delle incognite. Abbiamo ottenuto infinite soluzioni formate da terne di numeri, tutte quelle di tipo (x, y, z), con $x = -y + 3$ e $z = 2y - 2$, ovvero che si scrivono nella forma $(-y + 3, y, 2y - 2)$. In maniera equivalente possiamo scrivere le soluzioni dando ad y il nome di un parametro. Posto ad esempio $y = a$, abbiamo $(-a + 3, a, 2a - 2)$. Se, per esempio, poniamo $a = 0$ e $a = 1$, otteniamo le terne $(3, 0, -2)$ e $(2, 1, 0)$, rispettivamente, entrambe soluzioni del sistema.

5. Si noti che il metodo di sostituzione potrebbe essere applicato senza verificare preventivamente la risolubilità del sistema. Nel caso in cui il sistema sia impossibile, si deve ottenere qualche contraddizione. Studiamo per esempio il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ 4x + 2y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Ricavando la y dalla prima equazione e sostituendo, otteniamo:

$$\begin{cases} y = -2x + z - 1 \\ -3 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione non ha soluzioni, esprime una condizione falsa. Quindi il sistema precedente è impossibile.

6. Prima di procedere con un qualsiasi metodo di risoluzione, è comunque consigliabile lo studio preventivo della effettiva risolubilità, in quanto, nel caso di sistemi impossibili, non è sempre agevole pervenire esplicitamente alle contraddizioni racchiuse nelle equazioni considerate.

7. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y = 3. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Le matrici dei coefficienti e dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\det A = 3 \neq 0$, A è non singolare, quindi esiste ed è unica la soluzione di (2.2.5). Applicando la Regola di Cramer abbiamo

$$x = x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{3}, \qquad y = x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3},$$

In questo caso le incognite non sono indicate con un indice, ma si segue l'ordinamento alfabetico. Quindi in A_1 la colonna sostituita è quella dei coefficienti della variabile x, in A_2 quella dei coefficienti della variabile y.

8. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y - t = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y - 2t = 2 \end{cases}$$

Si verifica che le matrici A e A' hanno lo stesso rango $r = 2$, e quindi il sistema è risolubile. Per risolverlo possiamo applicare la regola di Cramer, ma prima dobbiamo ridurlo come descritto nell'equazione (2.2.4) ad un sistema quadrato $MX' = B'$ equivalente a quello di partenza. Un minore non nullo di A, di ordine 2 è ad esempio quello corrispondente alla sottomatrice M indicata dagli elementi incasellati

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} & -1 \\ 1 & \boxed{2} & \boxed{2} & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Questo minore individua la parte consistente del sistema:

$$\begin{cases} x + \boxed{y} + \boxed{0z} - t = 1 \\ x + \boxed{2y} + \boxed{2z} = 1 \\ 2x + 2y - 2t = 2 \end{cases}$$

Eliminando la terza equazione, i cui coefficienti non appartengono ad M, e portando al secondo membro le incognite i cui coefficienti a loro volta non stanno nel minore, abbiamo il nuovo sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = 1 - x + t \\ 2y + 2z = 1 - x, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 1 - x + t \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - t, \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x = a \\ y = 1 - a + b \\ z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a - b \\ t = b. \end{cases}$$

□

2.2.3 Caratterizzazione delle soluzioni di un sistema lineare

Consideriamo un sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$, nel quale cioè la colonna dei termini noti sia identicamente nulla. In tal caso esiste sempre almeno una soluzione, quella banale, in cui tutte le incognite assumono valore nullo (cfr. Osservazione 2 a pagina 44). Siccome il sistema è risolubile, per il Teorema di Rouché-Capelli devono esistere ∞^{n-r} soluzioni, essendo r la caratteristica di A. Di conseguenza abbiamo la sola soluzione banale nel caso in cui sia $n = r$. Questo può accadere se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cioè se il numero di equazioni è uguale a quello delle incognite, oppure se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ con $m > n$, cioè se il numero di equazioni è maggiore di quello delle incognite. Infatti il rango di $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è sempre minore o uguale a $\min(m, n)$. Riassumendo, il sistema omogeneo ha solo la soluzione banale se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ con $m \geq n$ e $\mathrm{rk}A = n$. In tutti gli altri casi il sistema omogeneo ammette sempre autosoluzioni. Consideriamo ora un sistema lineare $AX = B$. Il sistema $AX = \mathbf{0}$ si chiama *sistema omogeneo associato* al sistema considerato. Sussiste il seguente importante risultato:

Teorema 2.4. *Sia $\overline{X}$ una soluzione particolare del sistema* a*: $AX = B$. Allora tutte e sole le soluzioni del sistema* a*, sono del tipo $X+\overline{X}$, dove $X \in \boldsymbol{Sol}(\mathsf{b})$, spazio delle soluzioni del sistema omogeneo* b : $AX = \mathbf{0}$*, associato ad* a.

-*D*imostrazione. Sia $X \in \boldsymbol{Sol}(\mathsf{b})$ e $\overline{X}$ una soluzione particolare del sistema a. Abbiamo:

$$A\overline{X} = B, \tag{2.2.6}$$

$$AX = \mathbf{0}. \tag{2.2.7}$$

Allora $A(X+\overline{X}) = B$. Infatti, da (2.2.6) e (2.2.7), si ha $A(X+\overline{X}) = AX+A\overline{X} = B+\mathbf{0} = B$. Quindi $X + \overline{X}$ è soluzione del sistema a.

Viceversa, sia Y una generica soluzione di a, e $\overline{X}$ una sua soluzione particolare, ovvero:

$$A\overline{X} = B, \tag{2.2.8}$$

$$AY = B. \tag{2.2.9}$$

Sottraendo membro a membro la (2.2.8) e la (2.2.9) otteniamo:

$$A(Y - \overline{X}) = \mathbf{0}.$$

Ciò significa che $Y - \overline{X} \in \boldsymbol{Sol}(\mathsf{b})$, ovvero esiste $X \in \boldsymbol{Sol}(\mathsf{b})$ tale che $X = Y - \overline{X}$, da cui $Y = X + \overline{X}$.Quindi tutte e sole le soluzioni di a si scrivono nella forma $X + \overline{X}$ con $X \in \boldsymbol{Sol}(\mathsf{b})$. □

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo il sistema non omogeneo

$$\mathsf{a}\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4z = 2. \end{cases} \quad \text{ed il suo sistema omogeneo associato } \mathsf{b}\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + 4z = 0. \end{cases}$$

Esso ammette ∞^1 soluzioni, del tipo $\boldsymbol{Sol}(\mathsf{a}) = \{[1-2z, 2, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$. Una soluzione particolare è, per esempio, la terna $\overline{X} = [1, 2, 0]^t$. La generica soluzione del sistema omogeneo associato risulta invece $\boldsymbol{Sol}(\mathsf{b}) = \{[-2z, 0, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$. Notiamo quindi che la generica soluzione del sistema non omogeneo iniziale si ottiene sommando alla soluzione particolare $\overline{X}$ la generica soluzione di $\boldsymbol{Sol}(\mathsf{b})$.

2. In riferimento all'Esempio 8 a pagina 52, la generica soluzione risulta $\left[a, 1-a+b, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b, b\right] = \left[a, -a+b, \frac{1}{2}a-b, b\right] + \left[0, 1, -\frac{1}{2}, 0\right] = \boldsymbol{Sol}(\mathsf{a}) + \overline{X}$, essendo $\overline{X}$ una soluzione particolare del sistema non omogeneo considerato. $\square$

Capitolo 3

SPAZI VETTORIALI

In questo capitolo vogliamo studiare la struttura di spazio vettoriale, cercando di mettere in evidenza la grande generalità di questo concetto. Esso permette di unificare molte nozioni, alcune delle quali già note dalla scuola superiore, altre precedentemente incontrate (o da sviluppare in seguito) nei programmi di Algebra Lineare e di Geometria Analitica, altre ancora caratteristiche di diversi corsi universitari.

3.1 ESEMPI E STRUTTURA

Vogliamo innanzitutto prendere in considerazione alcuni esempi preliminari, che ci permettano di prendere gradatamente contatto con la struttura di spazio vettoriale.

3.1.1 Lo spazio dei polinomi.

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi in un'indeterminata t a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. L'insieme $\mathbb{R}[t]$ è cioè formato da tutte le somme del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n,$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{R}$. Possiamo introdurre un'operazione in $\mathbb{R}[t]$, che chiamiamo *somma di polinomi* ed indichiamo con il solito simbolo $+$, in modo che la coppia $(\mathbb{R}[t], +)$ sia un gruppo abeliano. Definiamo questa operazione come segue. Se $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ e $q(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^{m-i}$ sono due polinomi, con $n > m$, possiamo rendere $q(t)$ dello stesso grado di $p(t)$ aggiungendo le $n - m$ potenze di t mancanti con i coefficienti nulli, ovvero

$$q(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^{m-i} = \sum_{i=m+1}^{n} 0t^i + \sum_{i=0}^{m} b_i t^{m-i} = \sum_{i=0}^{n} c_i t^{n-i}, \tag{3.1.1}$$

essendo $c_i = b_i$ per $i = 0, ..., m$ e $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$.

Due polinomi si possono sommare, sommando i coefficienti delle rispettive potenze di t, ossia:

$$p(t) + q(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} b_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) t^{n-i}.$$

L'insieme $\mathbb{R}[t]$ è ovviamente chiuso rispetto alla somma, in quanto la somma di due polinomi è sempre un polinomio.

La somma di polinomi è un'operazione associativa, proprietà che si eredita dall'analoga proprietà della somma di scalari nel campo $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(p(t)+q(t))+r(t) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} b_i t^{n-i}\right) + \sum_{i=0}^{n} c_i t^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} c_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\left((a_i+b_i)+c_i\right)t^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(a_i+(b_i+c_i)\right)t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}(b_i+c_i)t^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} c_i t^{n-i}\right) = p(t)+(q(t)+r(t)).\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Anche la commutatività viene ereditata dalla commutatività della somma in $\mathbb{R}$.
Esiste poi l'elemento neutro, dato dal polinomio nullo $\mathbf{0}(t) = \sum_{i=0}^{n} 0t^{n-i}$. Inoltre, ogni polinomio $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ ammette l'inverso $-p(t) = \sum_{i=0}^{n}(-a_i)t^{n-i}$. Riassumendo abbiamo la seguente proprietà

$(\mathbf{SV}_1)$. La coppia $(\mathbb{R}[t],+)$ è un gruppo abeliano.

Possiamo ora considerare una seconda operazione, detta *prodotto per scalari*, così definita. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} \in \mathbb{K}[t]$, poniamo:

$$xp(t) = x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{n}(xa_i)t^{n-i}.$$

Siano $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ e $q(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^{n-i}$ due polinomi, che possiamo sempre supporre dello stesso grado, ragionando in modo simile a quanto fatto per definire la somma in (3.1.1). Allora:

$(\mathbf{SV}_2)$. Per ogni $x \in \mathbb{K}$ abbiamo $x(p(t)+q(t)) = xp(t)+xq(t)$. Infatti:

$$\begin{aligned}x(p(t)+q(t)) &= x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} b_i t^{n-i}\right) = x\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)t^{n-i}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} x(a_i+b_i)t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(xa_i+xb_i)t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} xa_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} xb_i t^{n-i} = \\ &= x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) + x\left(\sum_{i=0}^{n} b_i t^{n-i}\right) = xp(t)+xq(t).\end{aligned}$$

$(\mathbf{SV}_3)$. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $(x+y)p(t) = xp(t) + yp(t)$. Infatti:

$$
\begin{aligned}
(x+y)p(t) = (x+y)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) &= \sum_{i=0}^{n}(x+y)a_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(xa_i + ya_i)t^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} xa_i t^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} ya_i t^{n-i} = x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) + y\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) = \\
&= xp(t) + yp(t).
\end{aligned}
$$

$(\mathbf{SV}_4)$. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ abbiamo $(xy)p(t) = x(y(p(t)))$. Infatti:

$$
\begin{aligned}
(xy)p(t) = (xy)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) &= \sum_{i=0}^{n}(xy)a_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} x(ya_i)t^{n-i} = \\
&= x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}\right) = x\left(yp(t)\right).
\end{aligned}
$$

$(\mathbf{SV}_5)$. $\mathbf{1} \cdot p(t) = 1\sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(\mathbf{1} \cdot a_i)t^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} = p(t).$

Riassumendo, abbiamo visto che a partire dall'insieme dei polinomi $\mathbb{R}[t]$, è possibile definire una *operazione interna* di somma, ed una *operazione esterna* di prodotto per scalari, rispetto alle quali $\mathbb{R}[t]$ verifica le proprietà $(\mathbf{SV_1}), \ldots, (\mathbf{SV}_5)$. L'insieme $\mathbb{R}[t]$ prende allora il nome di *spazio dei polinomi* sul campo $\mathbb{R}$.

3.1.2 Lo spazio delle matrici

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici dotate di m righe e di n colonne, ad elementi reali (per $m = n$ si ha l'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n). Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due elementi di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, e sia $a \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale. Come abbiamo fatto per l'insieme dei polinomi, possiamo definire anche in $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ un'operazione di *somma di matrici* e di *prodotto per scalari* nella maniera seguente.

$$
\begin{array}{rccc}
+: & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\
 & (A, B) & \mapsto & A + B = [a_{ij} + b_{ij}],
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\cdot: & \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\
 & (a, A) & \mapsto & a \cdot A = [a \cdot a_{ij}].
\end{array}
$$

Queste operazioni soddisfano le stesse proprietà $(\mathbf{SV_1}), \ldots, (\mathbf{SV}_5)$ viste nel Paragrafo 3.1.1. Infatti, si verifica facilmente che la coppia $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ è un gruppo abeliano, per cui la proprietà $(\mathbf{SV_1})$ è presente. Inoltre abbiamo

$(\mathbf{SV}_2)$. Per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e per ogni $x \in \mathbb{K}$, l'uguaglianza:

$$x \cdot (A+B) = x \cdot A + x \cdot B$$

è vera. Infatti

$$x \cdot (A+B) = x \cdot [a_{ij} + b_{ij}] = [xa_{ij} + xb_{ij}] = [xa_{ij}] + [xb_{ij}] = x \cdot [a_{ij}] + x \cdot [b_{ij}] = x \cdot A + x \cdot B.$$

$(\mathbf{SV}_3)$. Per ogni $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, è vera l'uguaglianza $(x+y) \cdot A = x \cdot A + y \cdot A$. Infatti:

$$\begin{aligned}(x+y) \cdot A = (x+y) \cdot [a_{ij}] &= [(x+y)a_{ij}] = \\ &= [xa_{ij} + ya_{ij}] = [xa_{ij}] + [ya_{ij}] = \\ &= x \cdot [a_{ij}] + y \cdot [a_{ij}] = x \cdot A + y \cdot A.\end{aligned}$$

$(\mathbf{SV}_4)$. Per ogni $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, l'uguaglianza $(ab) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$ è ovvia.

$(\mathbf{SV}_5)$. Per ogni matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ abbiamo $1 \cdot A = \mathbf{1} \cdot [a_{ij}] = [1a_{ij}] = [a_{ij}] = A$.

Riassumendo, a partire dall'insieme delle matrici $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è possibile definire una *operazione interna* di somma, ed una *operazione esterna* di prodotto per scalari, rispetto alle quali $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ verifica le proprietà $(\mathbf{SV_1}), \ldots, (\mathbf{SV}_5)$. L'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ prende allora il nome di *spazio delle matrici* di tipo (m, n) sul campo $\mathbb{R}$.

3.1.3 Lo spazio delle funzioni.

Sia $\mathbb{K}$ un campo e X un insieme generico. Consideriamo l'insieme $\mathbb{K}^{\mathsf{X}}$ di tutte le funzioni da X a valori in $\mathbb{K}$. Un elemento $f \in \mathbb{K}^{\mathsf{X}}$ è una funzione $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$, su cui non si fa alcuna ipotesi particolare. Anche in questo insieme possiamo definire una somma e un prodotto per scalari.

Per quanto riguarda la somma, se $f, g \in \mathbb{K}^{\mathsf{X}}$, poniamo

$$\begin{aligned} f+g :\ \mathsf{X} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto f(x)+g(x). \end{aligned}$$

Quindi si usa la somma di $\mathbb{K}$ per definire un'analoga operazione in $\mathbb{K}^{\mathsf{X}}$. È un'operazione associativa e commutativa, perché così è in $\mathbb{K}$. L'elemento neutro è la funzione nulla

$$\begin{aligned} \mathbf{0} :\ \mathsf{X} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

e l'inversa di f è $-f$, dove

$$\begin{aligned} -f :\ \mathsf{X} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto -f(x). \end{aligned}$$

La coppia $(\mathbb{K}^{\mathsf{X}}, +)$ è allora un gruppo abeliano, e vale la proprietà $(\mathbf{SV_1})$. La scelta più ovvia, per quanto riguarda il prodotto per scalari, è quella di assumere come campo base lo stesso campo $\mathbb{K}$. Allora, per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $f \in \mathbb{K}^{\mathsf{X}}$, definiamo

$$\begin{array}{rccc} af: & \mathsf{X} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & af(x). \end{array}$$

Le cinque proprietà $(\mathbf{SV_1}), \ldots, (\mathbf{SV_5})$ sono banalmente verificati grazie alle analoghe proprietà del prodotto di scalari in $\mathbb{K}$. Si parla allora di *spazio delle funzioni* $\mathbb{K}^{\mathsf{X}}$.

3.1.4 Gli assiomi di spazio vettoriale

Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti ci spingono a generalizzare i concetti introdotti. Viene cioè spontaneo tentare di estendere le operazioni di *somma interna* e *prodotto per scalari* in maniera da introdurre una struttura di spazio vettoriale a partire da un generico insieme $\mathbf{V}$. A tale proposito ragioniamo come segue.

Sia $\mathbf{V}$ un insieme non vuoto e sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi. Siano $+$ e $\cdot$ le operazioni interne a $\mathbb{K}$. Consideriamo la quaterna $(\mathbf{V}, \mathbb{K}, \oplus, \times)$, dove $\oplus$ e $\times$ sono due operazioni binarie del tipo:

$$\begin{array}{rl} \oplus: & \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}, \\ \times: & \mathbb{K} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}. \end{array}$$

Diciamo che $(\mathbf{V}, \mathbb{K}, \oplus, \times)$ è uno *spazio vettoriale* se valgono i seguenti assiomi:

$(\mathbf{SV_1})$ $(\mathbf{V}, \oplus)$ è un gruppo abeliano;
$(\mathbf{SV_2})$ $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$: $a \times (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = a \times \mathbf{v} \oplus a \times \mathbf{w}$;
$(\mathbf{SV_3})$ $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $(a + b) \times \mathbf{v} = a \times \mathbf{v} \oplus b \times \mathbf{v}$;
$(\mathbf{SV_4})$ $\forall a, b \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $(a \cdot b) \times \mathbf{v} = a \times (b \times \mathbf{v})$;
$(\mathbf{SV_5})$ $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $1 \times \mathbf{v} = \mathbf{v}$, essendo 1 l'elemento neutro di $\mathbb{K}$ rispetto al prodotto.

Gli elementi di $\mathbf{V}$ si dicono *vettori*, quelli di $\mathbb{K}$ *scalari*. L'operazione $\oplus$ è detta *somma vettoriale* o *di vettori*, mentre l'operazione $\times$ è detta *prodotto per uno scalare*. Si osservi che $(\mathbf{SV_1})$ sottintende gli assiomi di gruppo abeliano e determina quella che viene chiamata struttura additiva di $\mathbf{V}$.

I rimanenti quattro assiomi $(\mathbf{SV_2})$-$(\mathbf{SV_5})$ riguardano invece l'azione del campo $\mathbb{K}$ sull'insieme $\mathbf{V}$.

<u>Nota.</u> Per limitare il numero dei simboli, conveniamo di indicare, nel seguito, l'operazione esterna $\times$ con $\cdot$, e di scrivere semplicemente ab per descrivere la composizione $a \cdot b$ in $\mathbb{K}$. Usiamo inoltre lo stesso simbolo $+$ per rappresentare sia l'operazione di somma in $\mathbb{K}$, sia la somma di vettori in $\mathbf{V}$, essendo comunque chiaro dal contesto il loro significato. I precedenti assiomi si enunciano allora nella maniera seguente:

($\mathbf{SV}_1$) $(\mathbf{V}, +)$ è un gruppo abeliano;
($\mathbf{SV}_2$) $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$: $a(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$;
($\mathbf{SV}_3$) $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;
($\mathbf{SV}_4$) $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$;
($\mathbf{SV}_5$) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

3.1.5 Lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{K}^n$

Consideriamo ora un importante esempio di spazio vettoriale, cioè l'insieme $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ (n volte), con le usuali operazioni di somma di vettori e prodotto per scalari. Esso viene detto *spazio vettoriale canonico*, in quanto fornisce una sorta di modello per tutti gli spazi vettoriali finiti (si veda anche il Paragrafo 3.3.2, il Teorema 3.9 e le considerazioni successive). I suoi elementi sono le colonne formate da n-ple di scalari appartenenti a $\mathbb{K}$[1]. Ricordiamo che, in $\mathbb{K}^n$, la somma di vettori è fatta per componenti:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix},$$

e così pure il prodotto per scalari:

$$x \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{bmatrix}.$$

Per dimostrare che $\mathbb{K}^n$ è uno spazio vettoriale, occorre verificare la validità degli assiomi $(\mathbf{SV}_1), \ldots, (\mathbf{SV}_5)$.
L'insieme $(\mathbb{K}^n, +)$ è un gruppo abeliano, essendo la somma associativa (lo è in $\mathbb{K}$), commutativa, con elemento neutro il vettore $\mathbf{0} = [0, \ldots, 0]^t$, e come elemento inverso di $\mathbf{v} = [a_1, \ldots, a_n]^t$ il vettore $-\mathbf{v} = [-a_1, \ldots, -a_n]^t$. È quindi soddisfatto l'assioma $(\mathbf{SV}_1)$.
Anche i rimanenti quattro assiomi si verificano facilmente.

$(\mathbf{SV}_2)$. Per ogni $x \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$:

$$x(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = x\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(a_1 + b_1) \\ \vdots \\ x(a_n + b_n) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} xa_1 + xb_1 \\ \vdots \\ xa_n + xb_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} xb_1 \\ \vdots \\ xb_n \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = x\mathbf{u} + x\mathbf{v}.$$

[1]Talvolta, per risparmiare spazio, gli elementi di $\mathbb{K}^n$ vengono scritti come trasposti di vettori riga. In questi casi si usa separare con una virgola le singole componenti.

$(\mathbf{SV}_3)$. Per ogni $x \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$:

$$(x+y)\mathbf{u} = (x+y)\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+y)a_1 \\ \vdots \\ (x+y)a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa_1 + ya_1 \\ \vdots \\ xa_n + ya_n \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ya_1 \\ \vdots \\ ya_n \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = x\mathbf{u} + y\mathbf{u}$$

$(\mathbf{SV}_4)$. Per ogni $x \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$:

$$(xy)\mathbf{u} = (xy)\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (xy)a_1 \\ \vdots \\ (xy)a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(ya_1) \\ \vdots \\ x(ya_n) \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ya_1 \\ \vdots \\ ya_n \end{bmatrix} = x(y\mathbf{u}).$$

$(\mathbf{SV}_5)$. Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$:

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_1 \\ \vdots \\ 1a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{u}.$$

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo i seguenti assiomi di spazio vettoriale:

   $(\mathbf{SV}_3)$ $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$;

   $(\mathbf{SV}_4)$ $(a \cdot b)\mathbf{u} = a \cdot (b\mathbf{u})$.

   In $(\mathbf{SV}_3)$ e $(\mathbf{SV}_4)$, rispettivamente, il segno $+$ e il segno $\cdot$ del primo e secondo membro non designano la medesima operazione. Consideriamo infatti $(\mathbf{SV}_3)$. Al primo membro, $a+b$ indica una somma di scalari, eseguita nel campo base $\mathbb{K}$. Al secondo membro, la somma $a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ è una somma di vettori eseguita secondo la definizione di somma vettoriale introdotta per lo spazio $\mathbf{V}$. Anche se la simbologia è la stessa, il segno $+$ non indica la stessa operazione. Questo fatto può essere visualizzato meglio riscrivendo le operazioni come funzioni. Nel primo caso abbiamo $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$; nel secondo $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. L'unico caso in cui le due operazioni sono sostanzialmente la stessa operazione è quando $\mathbf{V} = \mathbb{K}$, ovvero il caso di uno spazio canonico.

   Un discorso analogo si può fare per $(\mathbf{SV}_4)$. Al primo membro l'operazione è quella di prodotto di due scalari, eseguita in $\mathbb{K}$ $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Al secondo membro, $a \cdot (b\mathbf{u})$ indica il prodotto di uno scalare per un vettore $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$.

2. Oltre a quelli considerati nei paragrafi precedenti, esistono molti altri esempi di spazi vettoriali. Basta partire da un insieme V e da un campo $\mathbb{K}$, e cercare di definire

operazioni rispetto alle quali V venga a godere delle proprietà descritte. Alcuni di questi esempi sono in effetti già familiari. Per esempio, è facile vedere che l'insieme $\mathbb{R}$ si può dotare di una struttura di spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$.

La coppia $(\mathbb{R}, +)$, con $+$ usuale somma di numeri reali, è ovviamente un gruppo abeliano, in quanto $\mathbb{R}$ è un campo. È quindi soddisfatto l'assioma $(\mathbf{SV_1})$.

Consideriamo come prodotto per scalari il prodotto di numeri reali definito in $\mathbb{R}$, restringendolo, per quanto riguarda la prima componente, ai soli elementi di $\mathbb{Q}$. È quindi una funzione del tipo:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Q} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (q, x) & \longmapsto & q \cdot x. \end{array}$$

Gli assiomi $(\mathbf{SV_2}), \ldots, (\mathbf{SV_5})$ discendono direttamente dalle proprietà associative del prodotto in $\mathbb{R}$ e dell'elemento neutro rispetto al prodotto, dato dal numero $\mathbf{1}$. Quindi $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

3. Ogni campo $\mathbb{K}$ è spazio vettoriale su se stesso. Questo è un caso molto particolare di costruzione di spazio vettoriale. La somma di vettori e il prodotto per scalari sono quelli già definiti in $\mathbb{K}$ stesso, ossia

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (a, b) & \longmapsto & a + b, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (a, b) & \longmapsto & a \cdot b. \end{array}$$

La validità degli assiomi è allora ereditata direttamente dalle proprietà della somma e del prodotto in un campo.

Un discorso analogo può essere fatto per determinare una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con un sottocampo $\mathbb{F} \leq \mathbb{K}$, con l'accorgimento di definire il prodotto per scalari come restrizione ad $\mathbb{F}$ del prodotto esistente in $\mathbb{K}$, ossia:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{F} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (a, b) & \longmapsto & a \cdot b. \end{array}$$

Quindi, ad esempio, $\mathbb{C}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ma può essere visto come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{Q}$.

4. Gli spazi vettoriali introdotti nei paragrafi 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 si possono generalizzare, sostituendo $\mathbb{R}$ con un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Tutte le considerazioni svolte restano valide, pur di rimpiazzare le operazioni di somma e prodotto tra numeri reali con le due operazioni rispetto alle quali l'insieme $\mathbb{K}$ è un campo.

5. In modo alternativo, si può verificare che $\mathbb{K}^n$ è uno spazio vettoriale osservando che l'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale e che $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. □

3.2 SOTTOSPAZI

Consideriamo uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ sul campo $\mathbb{K}$, e sia $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ un suo sottoinsieme non vuoto. Diciamo allora che $\mathbf{W}$ è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbf{V}$, e scriviamo $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, se, restringendosi a $\mathbf{W}$, si verificano ancora gli assiomi di spazio vettoriale $(\mathbf{SV_1}), \ldots, (\mathbf{SV_5})$. Ciò significa che applicando a vettori di $\mathbf{W}$ le stesse operazioni di somma di vettori e prodotto per scalari definite per $\mathbf{V}$, si ottengono vettori appartenenti ancora a $\mathbf{W}$.

Per verificare che un dato sottoinsieme $\mathbf{W}$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ è un sottospazio, è necessario procedere alla verifica degli assiomi internamente a $\mathbf{W}$. Invece, per verificare che $\mathbf{W}$ non è un sottospazio basta mostrare che almeno uno degli assiomi non si verifica in $\mathbf{W}$. Per esempio, l'insieme delle matrici quadrate binarie sul campo $\mathbb{R}$, cioè

$$\mathbf{W} = \{A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ a_{ij} = 0 \vee a_{ij} = 1\},$$

non è un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Per l'assioma $(\mathbf{SV_1})$, infatti, $\mathbf{W}$ dovrebbe essere chiuso rispetto alla somma. Ma in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la somma di due matrici binarie non è detto che sia ancora una matrice binaria. Quindi $\mathbf{W}$ non è chiuso rispetto alla restrizione della somma definita in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e pertanto non può essere un gruppo abeliano né, tanto meno, uno spazio vettoriale, sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Osservazioni ed esempi.

1. Ogni spazio vettoriale $\mathbf{V}$ ammette sempre due sottospazi detti *impropri* o *banali*: il *sottospazio nullo* $\{\mathbf{0}\}$, ovvero l'insieme formato dal solo elemento nullo rispetto alla somma e $\mathbf{V}$ stesso.

2. Si noti che $\{\mathbf{0}\}$ è l'unico spazio vettoriale che coincide con i suoi sottospazi impropri. Si faccia inoltre attenzione a non confondere il sottospazio nullo $\{\mathbf{0}\}$ con l'insieme $\emptyset$, che invece non è un sottospazio vettoriale.

3. Nello studio dei sottospazi è cruciale la presenza del vettore nullo $\mathbf{0}$. Infatti se $\mathbf{V}$ è uno spazio vettoriale, certamente $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$. Al contrario la presenza del vettore nullo è solo una condizione necessaria per essere sottospazio, non sufficiente. Ovvero, se $\mathbf{0} \in \mathbf{W}$, non possiamo dire nulla sulla sua struttura di sottospazio.

4. Verifichiamo se $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. La risposta è negativa. Infatti non è neppure un sottoinsieme, poiché i vettori di $\mathbb{R}^2$ hanno 2 componenti, mentre quelli di $\mathbb{R}^3$ ne hanno una in più.

   Generalizzando la questione, non è mai vero che $\mathbb{K}^n \leq \mathbb{K}^m$ se $n < m$.

5. Possiamo mettere $\mathbb{R}^2$ in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme $\mathbf{W}_2$ di $\mathbb{R}^3$ dato dalle terne di numeri reali aventi la terza componente nulla, cioè

$$\mathbf{W}_2 = \{[x, y, 0]^t |\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbf{W}_2$ possiamo allora considerare le stesse operazioni di somma di vettori e prodotto per scalari definite in $\mathbb{R}^3$, ottenendo così uno spazio vettoriale. L'insieme $\mathbf{W}_2$ è quindi un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

6. L'insieme X di tutti i polinomi di grado n non è un sottospazio di $\mathbb{K}[t]$. Infatti, per essere un sottospazio, deve essere linearmente chiuso. In particolare, ciò significa che deve essere chiuso rispetto alla somma. Questo non è vero. Infatti, sia

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$$

un polinomio di grado n. In X esiste anche il polinomio

$$q(t) = -a_0 t^n + b_1 t^{n-1} + \cdots + b_{n-1} t + b_n,$$

con i $b_j \in \mathbb{K}$ arbitrari. Per come è definita la somma di polinomi in $\mathbb{K}[t]$ abbiamo:

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= (a_0 - a_0)t^n + (a_1 + b_1)t^{n-1} + \cdots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + b_1)t^{n-1} + \cdots + (a_n + b_n). \end{aligned}$$

Quest'ultimo è un polinomio di grado $n-1$, che non può appartenere ad X. Quindi X non è chiuso rispetto alla somma, cioè non è un gruppo abeliano e l'assioma $(\mathbf{SV_1})$ non è soddisfatto. Allora X non è un sottospazio.

□

3.2.1 Combinazioni lineari e sottospazi

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di $\mathbf{V}$, con $n \geq 1$. Allora la somma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n,$$

dove $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, è chiamata *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_i$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. È ovviamente un vettore dello spazio $\mathbf{V}$. Le combinazioni lineari sono essenziali per caratterizzare un sottospazio. Sia $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, sul campo $\mathbb{K}$. Abbiamo visto, nel paragrafo precedente, che questo significa che $\mathbf{W}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{V}$ che soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale rispetto alla restrizione di somma di vettori e prodotto per scalari ereditate da $\mathbf{V}$. Questo equivale a dire, come dimostreremo fra poco, che $\mathbf{W}$ contiene tutte le combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{K}$ di suoi vettori. Ciò significa che, per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $a\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ e che, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Questo fatto si riassume dicendo che $\mathbf{W}$ è *linearmente chiuso*. Vale il seguente teorema:

Teorema 3.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme* $\mathbf{W}$ *di uno spazio vettoriale* $\mathbf{V}$ *sia sottospazio è che, per ogni* $a, b \in \mathbb{K}$ *e per ogni* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$, *si abbia*

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in \mathbf{W}. \tag{3.2.1}$$

-*Dimostrazione.* Se $\mathbf{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$, in esso sono ben definite le stesse operazioni di somma di vettori e prodotto per scalari che rendono $\mathbf{V}$ spazio vettoriale. Questo significa che $\mathbf{W}$ contiene ogni multiplo di un suo vettore e ogni somma di due suoi vettori. Ciò equivale alla condizione (3.2.1). Quindi la condizione espressa dal teorema è necessaria.

Viceversa, se vale la (3.2.1), che si può anche spezzare nelle due condizioni

(*i*) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$: $a\mathbf{w} \in \mathbf{W}$,

(*ii*) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$: $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbf{W}$,

allora in $\mathbf{W}$ risultano ben definite le stesse operazioni di somma tra vettori e di prodotto per scalari che rendono $\mathbf{V}$ spazio vettoriale. La validità degli assiomi di spazio vettoriale è pertanto ereditata dalla validità degli stessi assiomi nell'insieme più ampio $\mathbf{V}$. Quindi la condizione è anche sufficiente. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Abbiamo già detto (cfr. Esempio 3 a pag. 63) che la presenza del vettore nullo $\mathbf{0}$ è condizione necessaria per essere sottospazio. Possiamo rileggere questo fatto come conseguenza del Teorema 3.1. Infatti, dalla (3.2.1), ponendo $a = 1$, $b = -1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, abbiamo $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \in \mathbf{W}$. La condizione tuttavia non è sufficiente. Per esempio l'insieme $\mathbf{W} = \{[a, b, c]^t \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0\}$è sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e contiene il vettore nullo $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^t$, ma non è un sottospazio. Non è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Infatti, se $x \in \mathbb{R}$ con $x < 0$, allora $x[a, b, c]^t = [xa, xb, xc]^t$, con $xa < 0$, se $a \neq 0$. Quindi $[xa, xb, xc]^t \notin \mathbf{W}$.

2. Verifichiamo, usando la condizione che caratterizza i sottospazi, che l'insieme delle matrici simmetriche d'ordine n è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Ricordiamo che l'operazione di trasposizione soddisfa le seguenti proprietà:

$$(A + B)^t = A^t + B^t, \tag{3.2.2}$$

$$(aA)^t = aA^t \quad \forall a \in \mathbb{K}. \tag{3.2.3}$$

   Una matrice simmetrica è caratterizzata dal fatto di coincidere con la sua trasposta, ossia A è simmetrica se e solo se $A = A^t$. Allora, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ simmetriche e per ogni $a, b \in \mathbb{K}$, verifichiamo che $aA + bB$ è ancora una matrice simmetrica. Dalle (3.2.2) e (3.2.3), abbiamo $(aA+bB)^t = (aA)^t+(bB)^t = aA^t+bB^t = aA+bB$. In base al Teorema 3.1 questo è sufficiente a garantire che l'insieme delle matrici simmetriche d'ordine n è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

3.2.2 Chiusura lineare

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$ un suo sottoinsieme. L'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari finite di elementi di X a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ si indica con $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ ed è chiamata *chiusura lineare* di X.

Teorema 3.2. *L'insieme $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ è un sottospazio vettoriale di* $\mathbf{V}$.

-*D*imostrazione. Consideriamo due qualsiasi vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathsf{X})$. Allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono combinazioni di vettori di X, per definizione di chiusura lineare. Per ogni $a, b \in \mathbb{K}$, $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ è a sua volta una combinazione di vettori di X, in quanto combinazione di combinazioni lineari, e quindi appartiene a $\mathcal{L}(\mathsf{X})$. Questa è condizione sufficiente affinché $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ sia sottospazio di $\mathbf{V}$ (cfr. Teorema 3.1). ∎

Teorema 3.3. *La chiusura lineare di* X *è il più piccolo sottospazio di* $\mathbf{V}$ *contenente l'insieme* X.

-*D*imostrazione. Sia $\mathbf{W}$ un qualsiasi sottospazio di $\mathbf{V}$ tale che $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}$. Allora $\mathbf{W}$ contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi vettori, cioè è linearmente chiuso. In particolare contiene l'insieme di tutte le combinazioni dei vettori che appartengono a X. Ma questo insieme è proprio $\mathcal{L}(\mathsf{X})$. Pertanto $\mathcal{L}(\mathsf{X}) \leq \mathbf{W}$. ∎

Osservazioni ed esempi.

1. Dal Teorema 3.3 ricaviamo che per ogni $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, $\mathcal{L}(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$.

2. Sia $\mathsf{X} \subseteq Y$. Analizziamo le relazioni che intercorrono tra $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ e $\mathcal{L}(\mathsf{Y})$. Siccome $\mathcal{L}(\mathsf{Y})$ contiene tutte le combinazioni lineari di vettori di Y e $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y}$, certamente fra queste vi sono le combinazioni lineari di vettori di X, e questo significa che

$$\mathcal{L}(\mathsf{X}) \leq \mathcal{L}(\mathsf{Y}). \tag{3.2.4}$$

Può darsi che esista un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathsf{Y})$ tale che $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}(\mathsf{X})$. Questo succede certamente se in Y esiste qualche vettore che non si può ottenere come combinazione lineare di vettori di X. In caso contrario $\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \mathcal{L}(\mathsf{Y})$. Per esempio, se

$$\begin{aligned} &\mathsf{X} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \\ &\mathsf{Y} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, x\mathbf{v}_1\}, \quad x \neq 0 \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

allora

$$\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \mathcal{L}(\mathsf{Y}). \tag{3.2.5}$$

Infatti $\mathsf{X} \subsetneqq \mathsf{Y}$, ma ogni combinazione lineare di vettori di Y è, in sostanza, una combinazione lineare di vettori di X:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c(x\mathbf{v}_1) = (a+cx)\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2,$$

da cui la (3.2.5).

3. Non è stata fatta alcuna ipotesi particolare sull'insieme $X \subseteq \mathbf{V}$. A priori potrebbe essere vuoto. Per convenzione, si pone $\mathcal{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$. □

3.3 GENERATORI

Strettamente legato al concetto di combinazione lineare è quello di *generatore*. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Un suo sottoinsieme $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$ si dice *insieme generatore* di $\mathbf{V}$, e si scrive $\mathbf{V} = \langle X \rangle$, se ogni vettore di $\mathbf{V}$ può essere scritto come combinazione lineare di vettori di X, ossia per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ esistono $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathsf{X}$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{w}_i \tag{3.3.1}$$

Teorema 3.4. *Se* X *è un insieme generatore di* $\mathbf{V}$ *lo è anche un insieme* X' *formato da multipli non nulli dei vettori di* X.

-Dimostrazione. Siano $\mathsf{X} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ed $\mathsf{X}' = \{a_1\mathbf{v}_1, \dots, a_n\mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$, con $a_i \neq 0 \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. Per ipotesi $\mathbf{V} = \langle \mathsf{X} \rangle$, quindi ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ è combinazione lineare degli elementi di X:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i.$$

Il vettore $\mathbf{v}$ è anche combinazione lineare dei vettori di X', ovvero

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i' \mathbf{w}_i. \tag{3.3.2}$$

Basta infatti porre $b_i' = b_i a_i^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. Sostituendo in (3.3.2), abbiamo

$$\sum_{i=1}^{n} b_i' \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i^{-1} a_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v}.$$

Anche l'insieme X' genera $\mathbf{V}$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Notiamo che non si è fatta alcuna ipotesi sull'unicità della rappresentazione (3.3.1), né sulla cardinalità dell'insieme X, che a priori potrebbe essere infinito. In quest'ultimo caso si dovrebbe ricordare che le combinazioni lineari devono essere finite. Ovviamente, se $|\mathsf{X}| = m$, l'indice n citato nella definizione sarà minore o uguale ad m.

2. **Matrici generatrici.** Determiniamo un insieme generatore per lo spazio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Consideriamo la matrice E_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ seguente: $E_{ij} = [e_{rs}]$ con

$$\begin{cases} e_{rs} = 1 & \text{se } (r,s) = (i,j) \\ e_{rs} = 0 & \text{se } (r,s) \neq (i,j). \end{cases}$$

   Con questa regola, E_{ij} è una matrice formata da elementi tutti nulli, ad accezione di quello di posto i, j, che vale 1. Sommare un multiplo di E_{ij}, ad esempio aE_{ij}, ad una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, permette di sommare lo scalare a all'elemento di A di posto i, j. Per lo stesso motivo, la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ si può scrivere come combinazione lineare delle E_{ij} per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Basta prendere come coefficienti della combinazione gli elementi della matrice A con gli stessi indici, ossia:

$$A = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} a_{ij} E_{ij}.$$

Per esempio abbiamo:

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= 2E_{11} + 3E_{12} - 4E_{21} + 5E_{22}.$$

Questo procedimento può essere esteso ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Quindi l'insieme $\{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ è un insieme generatore di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

3. <u>**Polinomi generatori.**</u> Costruiamo un insieme generatore di $\mathbb{K}[t]$. Consideriamo un generico polinomio di $\mathbb{K}[t]$:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i} = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n, \tag{3.3.3}$$

con $a_i \in \mathbb{K}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Se consideriamo le potenze di t:

$$1 = t^0, t^1, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$$

come particolari polinomi di $\mathbb{K}[t]$, lo sviluppo nella (3.3.3) è una combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{K}$ dei sopracitati polinomi. Questo discorso vale in generale, cioè ogni polinomio di $\mathbb{K}[t]$ si può scrivere come combinazione di opportune potenze di t, viste come polinomi di $\mathbb{K}[t]$. Allora, per definizione di insieme generatore, l'insieme infinito $\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^{n-1}, t^n, \ldots\}$ genera $\mathbb{K}[t]$.

4. <u>**Spazio delle righe e spazio delle colonne.**</u> Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora le righe di A sono m vettori di $\mathbb{K}^n$ e le colonne sono n vettori di $\mathbb{K}^m$. Indichiamoli, rispettivamente, con $R_1, \ldots, R_m$ e $C_1, \ldots, C_n$. Si chiama *spazio riga* (o *spazio delle righe*) della matrice A lo spazio vettoriale $\mathbf{R} = \langle R_1, \ldots, R_m \rangle$. Lo *spazio colonna* (o *spazio delle colonne*) di A è invece $\mathbf{C} = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$. Ovviamente $\mathbf{R} \leq \mathbb{R}^n$, mentre $\mathbf{C} \leq \mathbb{R}^m$. Se la matrice non è quadrata, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ sono sottospazi di spazi differenti. □

3.3.1 Dipendenza ed indipendenza lineare

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Diciamo che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ sono *vettori linearmente dipendenti* (su $\mathbb{K}$) se e solo se è possibile scegliere scalari $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, non tutti nulli, tali che $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. In caso contrario si parla di *vettori linearmente indipendenti*. Quindi, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'uguaglianza $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, può essere ottenuta solo scegliendo $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Consideriamo ora un insieme finito $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$, e supponiamo che sia $\mathsf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$. Diciamo che X è un *insieme indipendente* (su $\mathbb{K}$) se i vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ sono linearmente indipendenti (su $\mathbb{K}$). In caso contrario X è detto *insieme dipendente*. Per convenzione, l'insieme vuoto è considerato indipendente.

Questa definizione si può generalizzare ad insiemi infiniti. Se $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$ e $|\mathsf{X}| = \infty$, si dice che X è indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente. Per esempio, ogni insieme $\{1, t, t^2, \dots, t^n\} \subseteq \mathbb{R}[t]$ è indipendente, per ogni intero $n \in \mathbb{N}$. Quindi $\mathsf{X} = \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ è tale che $|\mathsf{X}| = \infty$ ed è indipendente.

Possiamo ora fornire una caratterizzazione di un insieme $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$, finito, linearmente dipendente. Se $|\mathsf{X}| = 1$ allora X è dipendente se e solo se il suo unico elemento è il vettore nullo (cfr. Osservazione 4 a pagina 72). Se $|\mathsf{X}| \geq 2$ vale la seguente proprietà.

Teorema 3.5. *Se $|\mathsf{X}| \geq 2$, condizione necessaria e sufficiente affinché X sia linearmente dipendente è che uno dei suoi elementi sia combinazione lineare dei rimanenti.*

-*Dimostrazione.* La condizione è sufficiente. Se $\mathbf{u} \in \mathsf{X} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i, \tag{3.3.4}$$

l'insieme X è dipendente. Possiamo supporre $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, altrimenti X sarebbe automaticamente dipendente in quanto contenente il vettore nullo. Allora, in (3.3.4), almeno un $a_i \neq 0$. Consideriamo la combinazione lineare

$$1 \cdot \mathbf{u} - a_1\mathbf{v}_1 - a_2\mathbf{v}_2 - \cdots - a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i. \tag{3.3.5}$$

Tenendo conto della (3.3.4), abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

e quindi la (3.3.5) è una combinazione lineare nulla dei vettori di X a coefficienti non tutti nulli. L'insieme X è dipendente.

La condizione è necessaria. Sia $\mathsf{X} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ dipendente. Allora l'uguaglianza

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{3.3.6}$$

è vera con almeno uno degli $a_i \neq 0$. Supponiamo che sia $a_1 \neq 0$. La (3.3.6) diventa:

$$a_1\mathbf{v}_1 = -a_2\mathbf{v}_2 - \cdots - a_n\mathbf{v}_n, \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1 = -a_2 a_1^{-1}\mathbf{v}_2 - \cdots - a_n a_1^{-1}\mathbf{v}_n,$$

cioè $\mathbf{v}_1$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. ∎

Nel caso di insiemi finiti, le nozioni di dipendenza e di indipendenza lineare si trasferiscono sui sottoinsiemi. Questo fatto è precisato nel seguente teorema.

Teorema 3.6. *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale. Allora, ogni insieme finito contenente un insieme dipendente di* $\mathbf{V}$ *è dipendente e ogni sottoinsieme di un insieme finito indipendente di* $\mathbf{V}$ *è a sua volta indipendente.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che X ed Y siano insiemi finiti, e sia X un insieme dipendente di $\mathbf{V}$ tale che $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y}$. Posto $\mathsf{X} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, per ipotesi esiste una combinazione lineare dei vettori di X con coefficienti non tutti nulli tale che valga l'uguaglianza

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \tag{3.3.7}$$

con $a_i \in \mathbb{K}$ e $i = 1, \ldots, r$. Poiché X è un sottoinsieme di Y, possiamo scrivere:

$$\mathsf{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\},$$

con $s \geq 1$. L'uguaglianza seguente:

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_s = \mathbf{0} \tag{3.3.8}$$

è sempre valida, indipendentemente da come sono fatti i $\mathbf{w}_i$, come conseguenza della (3.3.7). Ma la (3.3.8) rappresenta una combinazione lineare di elementi di Y che si annulla senza avere tutti i coefficienti 0. Quindi Y è dipendente.

Supponiamo ora che Y sia un insieme indipendente dello spazio $\mathbf{V}$ e sia $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y}$. Supponiamo, per assurdo, che X non sia indipendente. Posto

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} \\ \mathsf{Y} &= \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_s\}, \end{aligned}$$

se X è dipendente, deve esistere una combinazione lineare dei vettori di X tale che

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \quad a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

con almeno uno degli a_i non nullo. Allora la seguente:

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_r\mathbf{v}_r + 0\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_s = \mathbf{0}, \quad a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

è una combinazione lineare dei vettori di Y con gli stessi requisiti. Ciò implicherebbe Y dipendente, contro le ipotesi fatte. ■

Mettiamo ora in evidenza un risultato che consente di collegare i concetti di generatore e di indipendenza lineare.

Teorema 3.7. *Sia* $\mathsf{X} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *un insieme generatore di uno spazio vettoriale* $\mathbf{V}$ *sul campo* $\mathbb{K}$, *e sia* $\mathsf{Y} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ *un insieme di vettori linearmente indipendenti di* $\mathbf{V}$. *Allora risulta* $m \leq n$

-*Dimostrazione.* Poiché X è un insieme generatore di $\mathbf{V}$, ogni vettore dello spazio vettoriale può essere ottenuto mediante combinazione lineare dei vettori di X. In particolare abbiamo $\mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{v}_n$, con $a_{11}, \ldots, a_{1n} \in \mathbb{K}$ non tutti nulli (poiché $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$). A meno di rinumerare i generatori possiamo sempre supporre che sia $a_{11} \neq 0$, e quindi che esista $a_{11}^{-1} \in \mathbb{K}$. Pertanto abbiamo

$$\mathbf{v}_1 = a_{11}^{-1}\mathbf{w}_1 - a_{11}^{-1}a_{12}\mathbf{v}_2 - \ldots - a_{11}^{-1}a_{1n}\mathbf{v}_n,$$

il che implica che il vettore $\mathbf{v}_1$ è generato dall'insieme $X_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Poichè $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ risulta anche $\mathbf{V} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Abbiamo così cambiato il sistema di generatori iniziale, rimpiazzando $\mathbf{v}_1$ con $\mathbf{w}_1$.

Ripetiamo ora il ragionamento, sostituendo $\mathbf{w}_1$ con $\mathbf{w}_2$ e X con X_1. Otteniamo quindi

$$\mathbf{w}_2 = b_{11}\mathbf{w}_1 + b_{12}\mathbf{v}_2 + b_{13}\mathbf{v}_3 + \ldots + b_{1n}\mathbf{v}_n,$$

con $b_{12}, \ldots, b_{1n} \in \mathbb{K}$ non tutti nulli (poiché $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono indipendenti). A meno di rinumerare i generatori possiamo sempre supporre che sia $b_{12} \neq 0$, e quindi che esista $b_{12}^{-1} \in \mathbb{K}$. Pertanto abbiamo

$$\mathbf{v}_2 = -b_{12}^{-1}b_{11}\mathbf{w}_1 + b_{12}^{-1}\mathbf{w}_2 - b_{12}^{-1}b_{13}\mathbf{v}_3 - \ldots - b_{12}^{-1}b_{1n}\mathbf{v}_n,$$

il che implica che il vettore $\mathbf{v}_2$ è generato dall'insieme $X_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Poichè $\mathbf{V} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ risulta $\mathbf{V} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Il sistema di generatori iniziale è stato quindi ulteriormente aggiornato. Complessivamente abbiamo rimpiazzato $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ con $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$.

Ripetendo il procedimento, dopo n rimpiazzamenti si ottiene $\mathbf{V} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Se fosse $n < m$, i vettori di $\mathbf{Y}$ non verrebbero esauriti dopo gli n rimpiazzamenti, cioè esisterebbe il vettore $\mathbf{w}_{n+1}$, non ancora utilizzato. Ma esso, in quanto vettore di $\mathbf{V}$, potrebbe allora essere ottenuto come combinazione lineare dei generatori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$, il che, per il Teorema 3.5 è assurdo. Pertanto risulta $m \leq n$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Quando diciamo che $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ intendiamo che gli a_i coincidono tutti con l'elemento neutro 0 di $\mathbb{K}$ rispetto all'operazione di somma di scalari. Invece, nell'uguaglianza $a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, lo $\mathbf{0}$ indica l'elemento neutro del gruppo abeliano $(\mathbf{V}, +)$.

2. Dalla definizione di indipendenza lineare si risale facilmente a quella di dipendenza. Infatti i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono dipendenti se esiste una combinazione lineare del tipo

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad a, b \in \mathbb{K}, \tag{3.3.9}$$

con i coefficienti non tutti nulli. Possiamo supporre che sia $b \neq 0$. Allora, dalla (3.3.9) otteniamo $b\mathbf{v} = -a\mathbf{u}$, e quindi

$$\mathbf{v} = -ab^{-1}\mathbf{u}. \tag{3.3.10}$$

Posto $-ab^{-1} = \lambda$, la (3.3.10) diventa $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$. In sostanza $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti se uno dei due è multiplo dell'altro.

3. Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Sono linearmente dipendenti. Infatti la combinazione lineare

$$2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

è a coefficienti non tutti nulli. Invece $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti. Infatti, per ottenere $\mathbf{0}$ da una loro somma è necessario annullare la seconda componente di $\mathbf{v}$. Ma questo si può ottenere solamente moltiplicando $\mathbf{v}$ per 0. Analogamente l'annullamento della prima componente di $a\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$ si ottiene solo se $a = 0$. Ovvero è soddisfatta la definizione di indipendenza lineare.

4. Sia $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$ un insieme finito tale che $\mathbf{0} \in \mathsf{X}$. Allora X è dipendente. Siccome X è un insieme finito, possiamo porre $\mathsf{X} = \{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. La combinazione lineare $a\mathbf{0} + 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ si annulla con coefficienti non tutti nulli. Basta porre $a \neq 0$. Quindi i vettori di X sono linearmente dipendenti. In particolare, assumendo X ridotto al solo vettore nullo, si ricava che $\mathbf{0}$ è dipendente. Anzi, esso è l'unico sottoinsieme di cardinalità 1 dello spazio $\mathbf{V}$ che sia linearmente dipendente.

5. Il Teorema 3.7 mette in evidenza che un insieme di generatori non è necessariamente un insieme indipendente. In particolare possiamo sempre aggiungere ad un insieme di generatori altri vettori, ottenendo ancora un insieme generatore. Più precisamente, se $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, e $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è dipendente e genera $\mathbf{V}$. Infatti, se $\mathbf{w} \in \mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, il vettore $\mathbf{w}$ si può scrivere come combinazione lineare dei $\mathbf{v}_i$, ovvero $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, $\quad a_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$. Quindi l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ è dipendente in quanto uno dei suoi vettori è combinazione lineare dei rimanenti. Comunque $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ rimane un insieme generatore, perché ogni vettore di $\mathbf{V}$ può essere sempre scritto come combinazione dei vettori di questo insieme. Infatti, siccome $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ ($\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ genera $\mathbf{V}$), possiamo sempre scrivere $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n + 0\mathbf{w}$. □

3.3.2 Basi di uno spazio vettoriale

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$ un suo insieme di vettori. L'insieme X si dice *base* di $\mathbf{V}$ se si verificano le seguenti due proprietà

1) X è un insieme generatore di $\mathbf{V}$, cioè $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathsf{X})$.

2) X è un insieme linearmente indipendente.

La precedente definizione include anche il caso di basi con infiniti vettori. Salvo casi particolari, ci occupiamo nei dettagli solo degli spazi vettoriali dotati di basi finite. Nel seguito le basi si indicheranno con simboli del tipo $\mathcal{B}$. Il seguente teorema (che enunciamo senza dimostrazione) garantisce che il concetto di base è ben definito.

Teorema 3.8. *Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale qualsiasi sul campo $\mathbb{K}$. Allora esiste sempre una base di $\mathbf{V}$.* ■

È un teorema generale, che include sia il caso di spazi con basi aventi un numero finito di elementi, sia il caso di basi infinite. Il Teorema seguente caratterizza le basi.

Teorema 3.9. *Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale qualsiasi sul campo $\mathbb{K}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sia una base di $\mathbf{V}$ è che ogni vettore di $\mathbf{V}$ si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che ogni vettore di $\mathbf{V}$ si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori di $\mathbf{V}$. Inoltre $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente. Infatti, in caso contrario, per il Teorema 3.5, almeno un vettore $\mathbf{v}_i$ di $\mathcal{B}$ potrebbe essere ottenuto come combinazione lineare dei rimanenti $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, ..., \mathbf{v}_n$, cioè si avrebbe

$$\mathbf{v}_i = \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n,$$

con $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Ma allora il vettore nullo ammetterebbe le seguenti due scritture distinte

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i,\\ \mathbf{0} &= 0\mathbf{v}_1 + ... + 0\mathbf{v}_{i-1} + 0\mathbf{v}_i + 0\mathbf{v}_{i+1} + ... + 0\mathbf{v}_n,\end{aligned}$$

il che è assurdo.

Supponiamo ora che l'insieme $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ sia una base di $\mathbf{V}$, e sia $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbf{V}$. Supponiamo che esistano due n-ple $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$, con $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \neq (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tali che

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n,\\ \mathbf{v} &= \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + ... + \beta_n\mathbf{v}_n.\end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere $\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{v}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n$. Poiché $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \neq (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ almeno uno dei coefficienti di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ è non nullo. Questo implica che tali vettori sono dipendenti. Ma ciò è assurdo, in quanto essi costituiscono una base. ■

Dal Teorema 3.4 sappiamo anche che in un dato spazio vettoriale $\mathbf{V}$ la base non è univocamente determinata. Infatti, se $\mathrm{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ è un insieme generatore, lo è anche $\mathrm{X}' = \{a_1\mathbf{x}_1, \ldots, a_n\mathbf{x}_n\}$, con $a_i \in \mathbb{K}$, $a_i \neq 0$ e $i = 1, \ldots, n$. Lo stesso discorso vale per l'indipendenza lineare. Quindi, se X è una base, ogni altro insieme ottenuto da X prendendo multipli non nulli dei vettori di X, è ancora una base. Se $\mathbb{K}$ è dotato di infiniti elementi, allora possiamo costruire infinite basi.

Coordinate di un vettore

Il Teorema 3.9 è di importanza fondamentale, in quanto garantisce che, una volta fissata una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, è possibile associare ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, in maniera unica, una n-pla di coefficienti del campo $\mathbb{K}$. Essi sono i coefficienti che esprimono $\mathbf{v}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$, e prendono il nome di *coordinate del vettore* $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioè

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i.$$

In questo senso (fissata la base $\mathcal{B}$) il vettore $\mathbf{v}$ può essere identificato con la n-pla $(a_1, \ldots, a_n)$ delle sue coordinate, il che equivale ad *identificare* $\mathbf{V}$ con lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{K}$. Il concetto preciso di *identificazione* potrà essere descritto solo quando verrà considerata la nozione di applicazione lineare tra spazi vettoriali.

Osservazioni ed esempi.

1. Nel definire una base conta anche l'ordinamento dei vettori. Ordinamenti diversi degli stessi vettori forniscono basei diverse.

2. Consideriamo lo spazio $\mathbb{K}^n$ e i vettori $\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^t$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, \dots, 0]^t$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = [0, 0, \dots, 1]^t$, aventi tutte le componenti nulle ad eccezione di una, che vale 1. L'insieme $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è indipendente. Infatti l'unico modo per annullare tutte le componenti della somma $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n$ è scegliere gli a_i tutti nulli. Inoltre $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{K}^n$. Infatti, se $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$, esistono n scalari $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^t$ e abbiamo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + u_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^n$, detta anche *base canonica*.

3. **Basi di matrici.** Consideriamo lo spazio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. In esempi precedenti (cfr. pagina 67) abbiamo introdotto le matrici E_{ij} ($i = 1, \dots, m$

   $j = 1, \dots, n$), ed abbiamo visto come l'insieme di queste matrici generi $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. È facile vedere che questo insieme è indipendente. Infatti, nella combinazione lineare

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij}E_{ij},$$

   ogni coefficiente a_{ij} diventa il termine di posto i, j della matrice risultato. Quindi quest'ultima è $O_{m,n}$ se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Allora $\{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ è una base di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Supponendo di fissare un ordine di scorrimento degli elementi di una matrice di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ad esempio da sinistra a destra e dall'alto in basso, è possibile rivedere i vettori della base appena descritta come i vettori della base canonica di uno spazio $\mathbb{K}^p$, con p opportuno. Per esempio, in $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, alla matrice

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   possiamo associare, sempre secondo l'ordinamento prima fissato, il vettore di $\mathbb{R}^6$ dato da $\mathbf{e}_4 = [0, 0, 0, 1, 0, 0]^t$. Ovviamente, cambiando l'ordinamento si ottengono vettori differenti.

4. **Basi di polinomi.** Determiniamo una base di $\mathbb{K}[t]$.

   Sappiamo che $\mathsf{X} = \{1, t, t^1, \dots, t^n, \dots\}$ è un insieme generatore di $\mathbb{K}[t]$. Verifichiamo che è anche linearmente indipendente. Basta dimostrare che ogni combinazione lineare finita di vettori di X (l'insieme X è infinito) si annulla solo quando tutti i coefficienti sono 0. Sia $\mathsf{Y} \subseteq \mathsf{X}$, con $|\mathsf{Y}| < \infty$. Allora esiste un massimo intero $m \in \mathbb{N}$ tale che $t^m \in \mathsf{Y}$. Consideriamo la combinazione di elementi di Y

$$a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m = 0. \tag{3.3.11}$$

L'uguaglianza (3.3.11) è vera se e solo se il polinomio al primo membro è il polinomio nullo, per il principio di identità dei polinomi. Questo accade se e solo se $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$. Quindi Y è indipendente, e questo discorso è valido per ogni sottoinsieme finito di X. Cioè X stesso è indipendente e quindi è una base di $\mathbb{K}[t]$. Anche in questo caso possiamo associare ad ogni elemento di X un vettore della base canonica di un $\mathbb{K}^n$. Per semplificare le notazioni possiamo limitarci ad analizzare lo spazio $\mathbb{K}_n[t]$ dei polinomi di grado massimo n, invece di $\mathbb{K}[t]$. Nel primo caso infatti abbiamo una base simile a quella del caso generale, ma finita: $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Considerando come ordinamento le potenze decrescenti di t, al vettore $p(t) = t^5$, ad esempio in $\mathbb{K}_7[t]$, ossia al polinomio $p(t) = 0t^7 + 0t^6 + 1t^5 + 0t^4 + 0t^3 + 0t^2 + 0t + 0 \cdot 1$ possiamo associare il vettore di $\mathbb{K}^8$ dato da $\mathbf{e}_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]^t$.

□

3.3.3 Dimensione di uno spazio vettoriale

Il seguente teorema è fondamentale per poter introdurre la nozione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Teorema 3.10. *Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la medesima cardinalità.*

-*Dimostrazione.* Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ due basi distinte di uno stesso spazio vettoriale $\mathbf{V}$, e supponiamo che esse siano costituite, rispettivamente, da n ed m vettori. Poiché $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbf{V}$, essa è, in particolare un insieme generatore di $\mathbf{V}$. Poiché $\mathcal{B}_2$ è una base, essa è un insieme indipendente. Per il Teorema 3.7 abbiamo quindi $m \leq n$. Ma, scambiando i ruoli di $\mathcal{B}_1$ e di $\mathcal{B}_2$, possiamo ora interpretare $\mathcal{B}_2$ come insieme generatore e $\mathcal{B}_1$ come insieme indipendente, ed il Teorema 3.7 fornisce $n \leq m$. Abbiamo pertanto $n = m$. ■

Il Teorema 3.10 permette di introdurre la nozione fondamentale di *dimensione di uno spazio vettoriale* finitamente generato $\mathbf{V}$. Presa una sua qualsiasi base $\mathcal{B}$, se $|\mathcal{B}| = n$ si dice che n è la dimensione di $\mathbf{V}$, e si scrive $\dim \mathbf{V} = n$. Questa definizione è coerente, nel senso che non dipende dalla scelta di una particolare base. Infatti tutte le basi di uno spazio vettoriale (che possono anche essere infinite) hanno la stessa cardinalità. Dal Teorema 3.10 ricaviamo anche che la dimensione di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ rappresenta il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che si possono estrarre da $\mathbf{V}$. Il seguente risultato è noto come *Teorema della base incompleta.*

Teorema 3.11. *Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale qualsiasi sul campo $\mathbb{K}$, avente dimensione n, e siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori indipendenti. Allora è sempre possibile determinare $n-k$ vettori indipendenti che, uniti a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ formano una base di $\mathbf{V}$.*

-*Dimostrazione.* Essendo $v_1, \ldots, v_k$ vettori indipendenti, risulta $k \leq n$. Se $k = n$ allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, essendo $\dim \mathbf{V} = n$, ed il teorema è dimostrato. Se invece

$k < n$, sia $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ una qualsiasi base di $\mathbf{V}$, e sia $\mathsf{X} = \{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_n\}$. Esso, ovviamente, è un insieme generatore di $\mathbf{V}$. A partire da w_1, eliminiamo progressivamente i vettori di $\mathcal{B}$ che sono dipendenti da quelli che lo precedono in X. Ad ogni elimninazione l'insieme restante è ancora un insieme generatore di $\mathbf{V}$, quindi, alla fine del procedimento, si ha un insieme X^* che è un insieme generatore ed è formato da vettori indipendenti. Quindi X^* è una base di $\mathbf{V}$, contiene $v_1, ..., v_k$, e, per il Teorema 3.10, ha n elementi. La base è quindi stata ottenuta unendo a $\{v_1, ..., v_k\}$ altri $n-k$ vettori indipendenti. ■

Dimensione e caratteristica

Consideriamo una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, e sia r la sua caratteristica. Siano $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$, rispettivamente, gli spazi delle righe e delle colonne di A. Abbiamo visto che $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ sono sottospazi appartenenti a spazi canonici diversi (cfr. Osservazione 4 a pag. 68), per cui si potrebbe ipotizzare l'assenza di particolari legami tra le loro dimensioni. Al contrario, si può invece dimostrare che i due spazi hanno la stessa dimensione, ed inoltre, che questa coincide con la caratteristica della matrice A. Abbiamo innanzitutto il seguente risultato.

Teorema 3.12. *Data una matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, *di caratteristica* r, *risulta* $\dim \mathbf{C} = r$.

-*D*imostrazione. Consideriamo il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^t$. Indichiamo con $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_n$ i vettori corrispondenti alle colonne di A. Il sistema omogeneo può allora essere scritto nella maniera seguente

$$x_1\mathbf{c}_1 + ... + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{0}.$$

Pertanto, una n-pla non nulla $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^t$ è soluzione se e solo se è costituita dai coefficienti che permettono di uguagliare a zero una combinazione lineare non banale di colonne di A. Questo equivale a dire che ogni soluzione fondamentale del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ corrisponde ad una relazione di dipendenza lineare tra le colonne di A. Per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette ∞^{n-r} soluzioni, cioè infinite soluzioni dipendenti da $n-r$ parametri, e quindi $n-r$ soluzioni fondamentali. Pertanto esistono esattamente $n-r$ relazioni di dipendenza lineare tra le colonne di A, e, di conseguenza $\dim \mathbf{C} = n - (n-r) = r$. ■

Sfruttando il Teorema 3.12 otteniamo il seguente risultato, che fornisce un legame dimensionale tra gli spazi delle righe e delle colonne di una data matrice.

Teorema 3.13. *Data una matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, *risulta* $\dim \mathbf{R} = \dim \mathbf{C}$.

-*D*imostrazione. Sia r la caratteristica di A. Indichiamo con $\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m$ i vettori corrispondenti alle righe della matrice, e supponiamo che sia $\dim \mathbf{R} = h$. Se $h = 0$ allora tutte le righe di A sono nulle, quindi anche tutte le colonne sono nulle e pertanto $r = 0$. Dal Teorema 3.12 ricaviamo che $\dim \mathbf{C} = 0$, e quindi, in questo caso, risulta immediatamente $\dim \mathbf{R} = \dim \mathbf{C}$.

Supponiamo allora che sia $h > 0$. Riordiniamo le righe di A in maniera che quelle linearmente indipendenti siano le prime h (ciò ovviamente non altera $\dim \mathbf{R}$). Per $h+1 \leq i \leq m$, la riga i-ma di A è quindi combinazione lineare delle prime h righe, cioè, esistono $\alpha_1, ..., \alpha_h \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{r}_i = \alpha_1\mathbf{r}_1 + ... + \alpha_h\mathbf{r}_h$. Ogni elemento della riga $\mathbf{r}_i$ si ottiene quindi come combinazione lineare degli elementi che occupano la sua stessa posizione sulle righe

$\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_h$. Indicando con a_{ik} l'elemento di $\mathbf{r}_i$ appartenente alla colonna k di A, si ottengono allora le seguenti n uguaglianze

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \alpha_1 a_{11} + ... + \alpha_h a_{h1} \\ a_{i2} &= \alpha_1 a_{12} + ... + \alpha_h a_{h2} \\ &\qquad\qquad\qquad ... \\ &\qquad\qquad\qquad ... \\ a_{in} &= \alpha_1 a_{1n} + ... + \alpha_h a_{hn}. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Sia ora A' la matrice di tipo (h, n) formata dalle prime h righe di A, e siano $\mathbf{c}'_1, ..., \mathbf{c}'_n$ le sue colonne. Consideriamo il sistema omogeneo $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esso ammette ∞^{n-s} soluzioni, essendo $s \leq h$ la caratteristica della matrice A'. Se $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^t$ è una soluzione di questo sistema abbiamo

$$x_1 \mathbf{c}'_1 + ... + x_n \mathbf{c}'_n = \mathbf{0},$$

cioè, essendo le righe di A' le prime h righe di A

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{h1} \end{bmatrix} + ... + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{hn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3.13}$$

Calcoliamo ora la somma $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$, per $h + 1 \leq i \leq m$. Sostituendo le relazioni (3.3.12) ed utilizzando le (3.3.13) si ricava che

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n &= (\alpha_1 a_{11} + ... + \alpha_h a_{h1})x_1 + ... + (\alpha_1 a_{1n} + ... + \alpha_h a_{hn})x_n = \\ &= \alpha_1(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n) + ... + \alpha_h(a_{h1}x_1 + ... + a_{hn}x_n) = 0 + ... + 0 = 0, \end{aligned}$$

per ogni i, $h + 1 \leq i \leq m$. Quindi abbiamo

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{h+11} \\ a_{h+21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + ... + x_n \begin{bmatrix} a_{h+1n} \\ a_{h+2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3.14}$$

Le uguaglianze (3.3.13) e (3.3.14) mettono in evidenza che la n-pla $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^t$ è anche soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Al contrario, è chiaro che ogni soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è anche soluzione del sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Quindi, i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ed $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sono equivalenti, e, poiché il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette ∞^{n-r} soluzioni, deve essere $r = s \leq h$. Per il Teorema 3.12 abbiamo $r = \dim \mathbf{C}$, e quindi $\dim \mathbf{C} \leq h = \dim \mathbf{R}$.

Consideriamo ora la matrice A^t, e ripetiamo il ragionamento precedente scambiando le colonne con le righe. Otteniamo pertanto che $\dim \mathbf{R} \leq \dim \mathbf{C}$. Le due disuguaglianze ottenute forniscono quindi $\dim \mathbf{R} = \dim \mathbf{C}$. ■

I due teoremi precedenti possono essere riassunti nel seguente importante risultato.

Teorema 3.14. *Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, di caratteristica r, risulta*

$$\dim \mathbf{R} = \dim \mathbf{C} = r.$$

-Dimostrazione. Dal Teorema 3.12 abbiamo $\dim \mathbf{C} = r$, mentre, per il Teorema 3.13, risulta $\dim \mathbf{R} = \dim \mathbf{C}$, il che implica $\dim \mathbf{R} = \dim \mathbf{C} = r$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Sappiamo che $\mathsf{X} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ genera lo spazio vettoriale $\mathbb{K}_n[t]$. Inoltre, X è anche indipendente, cioè è una base. Consideriamo infatti la seguente uguaglianza di polinomi:

   $$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n = \mathbf{0}, \text{ con } a_i \in \mathbb{K},\ i = 0, \ldots, n.$$

   Per il principio di identità dei polinomi, due polinomi coincidono se e solo se hanno coincidenti tutti i coefficienti delle rispettive potenze di t. Quindi l'uguaglianza col polinomio nullo $\mathbf{0}$ significa che $a_i = 0\ \forall i = 0, \ldots, n$, cioè X è indipendente. Allora $\dim \mathbb{K}_n[t] = |\mathsf{X}| = n + 1$.

2. Proviamo a determinare la dimensione dello spazio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Abbiamo visto che l'insieme $\mathsf{X} = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ delle matrici elementari è un insieme generatore di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ indipendente, ovvero è una base.

   Siccome $|\mathsf{X}| = mn$, otteniamo $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$. Per esempio, la dimensione di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ è uguale a 6.

3. Il campo $\mathbb{C}$ è spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. L'insieme $\mathcal{B} = \{1, i\}$ è una base di $\mathbb{C}$, che quindi ha dimensione 2 su $\mathbb{R}$. Intanto $\mathcal{B}$ è un insieme generatore. Infatti, se $z \in \mathbb{C}$, allora $z = a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i \quad a, b \in \mathbb{R}$, quindi $\mathbb{C} = \langle \mathcal{B} \rangle$. Inoltre $\mathcal{B}$ è un insieme indipendente. Infatti la combinazione lineare $z = a + ib$ è nulla, cioè $a + ib = 0$ se e solo se $a = b = 0$. Quindi $\mathcal{B}$ è una base.

4. Consideriamo il polinomio $p(t) = 3t^5 - 2t^3 + t^2 - 1$, e la base $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$. Ordinando secondo le potenze decrescenti di t, associamo a $p(t)$ il vettore di $\mathbb{K}^6$ dato da $\mathbf{v}_p = [3, 0, -2, 1, 0, -1]^t$.

5. Un insieme indipendente è costituito da vettori linearmente indipendenti. Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è indicato dalla sua dimensione, ovvero dal numero di vettori che compongono una sua base. Se $\dim \mathbf{V} = n$, la cardinalità di un suo insieme indipendente oscilla tra 0 ed n (l'insieme vuoto ha cardinalità 0 ed è considerato indipendente), cioè: $0 \leq |\mathsf{X}| \leq n$. Quindi ogni insieme $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$ con $|\mathsf{X}| > n$ è dipendente.

6. L'insieme delle matrici simmetriche di ordine 2 è uno spazio vettoriale (cfr. Esempio 2 a pagina 65). Studiamo la sua dimensione. Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è simmetrica se e solo se $A = A^t$, ovvero se $A = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Nel nostro caso, quindi, le matrici simmetriche sono tutte e sole le matrici del tipo:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Dipendono cioè da tre parametri. La dimensione dello spazio è quindi 3. □

3.4 OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI

Lavorando con sottospazi diversi di uno stesso spazio vettoriale, si presenta il problema di stabilire operazioni che conservino la struttura. Vediamone alcune.

3.4.1 Intersezione di sottospazi

L'intersezione insiemistica di due o più sottospazi vettoriali è uno spazio vettoriale. Ciò è una conseguenza del fatto che l'intersezione di sottostrutture algebriche è ancora una sottostruttura dello stesso tipo. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale e siano $\mathbf{W_1}, \ldots, \mathbf{W}_n$ suoi sottospazi. Studiamo l'insieme

$$\mathbf{H} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{W}_i.$$

Dimostriamo che $\mathbf{H}$ è sottospazio usando il Teorema 3.1. Dobbiamo verificare che, per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$, si ha $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in \mathbf{H}$. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$ significa che $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ma i $\mathbf{W}_i$ sono sottospazi, quindi $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in \mathbf{W}_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, cioè

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{W}_i = \mathbf{H}.$$

3.4.2 Unione di sottospazi

Un'analoga proprietà non vale, invece, per l'unione insiemistica di due sottospazi. Infatti, se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi di $\mathbf{V}$, $\mathbf{U} \cup \mathbf{W}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{V}$. Affinché sia anche un sottospazio devono essere soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.1. Nulla ci garantisce che queste siano vere. Per esempio, supponiamo che $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{U} \cup \mathbf{W}$ e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ appartengono entrambi a $\mathbf{U}$. Essendo quest'ultimo un sottospazio, anche $a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ appartiene a $\mathbf{U}$, e quindi all'unione $\mathbf{U} \cup \mathbf{W}$. Ma se $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ non è detto che $a\mathbf{u} + b\mathbf{w} \in \mathbf{U} \cup \mathbf{W}$. Per esempio, consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{[0, a, b]^t \in \mathbb{R}^3\} \\ \mathbf{W} &= \{[x, y, 0]^t \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Allora, se $b \neq 0$ e $x \neq 0$, abbiamo che $\mathbf{u} = [0, a, b]^t \in \mathbf{U}$, $\mathbf{w} = [x, y, 0]^t \in \mathbf{W}$, ma $\mathbf{u} + \mathbf{w} = [x, a + y, b]^t \notin \mathbf{U}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w} \notin \mathbf{W}$, quindi $\mathbf{u} + \mathbf{w} \notin \mathbf{U} \cup \mathbf{W}$. In casi particolari la proprietà può essere vera. Per esempio, se $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora $\mathbf{U} \cup \mathbf{W} = \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$.

3.4.3 Somma di sottospazi

Consideriamo ora la somma fra sottospazi. Se $\mathbf{U}, \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$, per definizione,

$$\mathbf{U} + \mathbf{W} = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} | \ \mathbf{u} \in \mathbf{U},\ \mathbf{w} \in \mathbf{W}\},$$

cioè la *somma di sottospazi*, è l'insieme di tutte le somme di vettori che appartengono ai due addendi.

Anche $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$. Infatti, siano $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ e $a, b \in \mathbb{K}$. Allora $a\mathbf{u}+b\mathbf{w} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. Infatti, per definizione di somma di sottospazi, esistono $\mathbf{u}', \mathbf{u}'' \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{w}', \mathbf{w}'' \in \mathbf{W}$ tali che $\mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{w}'$ e $\mathbf{w}=\mathbf{u}''+\mathbf{w}''$. Allora

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{w}=a(\mathbf{u}'+\mathbf{w}')+b(\mathbf{u}''+\mathbf{w}'')=(a\mathbf{u}'+b\mathbf{u}'')+(a\mathbf{w}'+b\mathbf{w}'')=\overline{\mathbf{u}}+\overline{\mathbf{w}} \in \mathbf{U}+\mathbf{W},$$

che è condizione sufficiente affinché un sottoinsieme sia sottospazio (cfr. Teorema 3.1).

Il concetto di somma di sottospazi è connesso con quello di chiusura lineare. Infatti, la somma di sottospazi coincide con la chiusura lineare della loro unione.

Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi dello spazio $\mathbf{V}$, la loro somma $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ viene chiamata *somma diretta*, e indicata con $\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, se e solo se $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}=\{\mathbf{0}\}$.
I sottospazi $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono chiamati *sommandi diretti*.

La caratterizzazione delle somme dirette è determinata dal seguente Teorema:

Teorema 3.15. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* $\mathbf{V}=\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ *è che ogni vettore di* $\mathbf{V}$ *si scriva in modo unico come somma di un vettore di* $\mathbf{U}$ *e uno di* $\mathbf{W}$*, ossia, per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *esistono e sono unici due vettori* $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ *e* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ *tali che* $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$. ■

Ciò permette di estendere la nozione di somma diretta al caso di più di due sottospazi. Diciamo cioè che $\mathbf{V}$ è somma diretta di $h \geq 2$ suoi sottospazi $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_h$ se ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si esprime in maniera unica come $\mathbf{v}=\mathbf{w}_1+\ldots+\mathbf{w}_h$, con $\mathbf{w}_i \in \mathbf{W}_i$, $i=1, \ldots, h$.

Osservazioni ed esempi.

1. Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sottospazi di $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, allora abbiamo anche che $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$. Infatti $\mathbf{W}$ è uno spazio vettoriale essendo sottospazio di $\mathbf{V}$, e $\mathbf{U}$ è un suo sottoinsieme che è spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di somma e prodotto per scalari.

2. Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi di $\mathbf{V}$, sappiamo che $\mathbf{U}, \mathbf{W} \leq \mathbf{U}+\mathbf{W}$ e $\mathbf{U}, \mathbf{W} \geq \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Supponiamo che sia $\mathbf{U} \leq \mathbf{W}$. Allora risulta
$$\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathbf{W} \tag{3.4.1}$$
$$\mathbf{U} \cap \mathbf{W}=\mathbf{U}. \tag{3.4.2}$$
Entrambe le uguaglianze precedenti sono conseguenza del fatto che, in quanto insiemi, $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$. Allora, essendo $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathcal{L}(\mathbf{U} \cup \mathbf{W})$, abbiamo $\mathbf{U} \cup \mathbf{W}=\mathbf{W}\ \mathcal{L}(\mathbf{W})=\mathbf{W}$, ovvero la (3.4.1). La proprietà (3.4.2) è una proprietà ben nota dell'intersezione.

3. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbf{V}$, e sia $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{W} \leq \mathbf{V}$. Esaminiamo la relazione che intercorre tra $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ e $\mathbf{W}$. In genere, $\mathcal{L}(\mathsf{X}) \leq \mathbf{W}$. Per definizione, $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari, a coefficienti in $\mathbb{K}$, di vettori di X. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono n vettori di X e $a_1, \ldots, a_n$ sono scalari: $a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n \in \mathbf{W}$, in quanto $\mathbf{v}_i \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{W}$ è linearmente chiuso (è un sottospazio). Allora $\mathbf{W}$ contiene tutte le combinazioni lineari di vettori di X, cioè $\mathcal{L}(\mathsf{X}) \leq \mathbf{W}$. Può capitare, ovviamente, che $\mathcal{L}(\mathsf{X})=\mathbf{W}$. Ad esempio, quando X genera $\mathbf{W}$. In genere, però, $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ rappresenta il più piccolo sottospazio di $\mathbf{W}$ contenente l'insieme X, quindi è un sottospazio proprio di $\mathbf{W}$.

4. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale e $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{V}$. Verifichiamo che
$$\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \bigcap \{\mathbf{W} | \; \mathbf{W} \leq \mathbf{V}, \, \mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}\}.$$
Per definizione, $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori di X a coefficienti in $\mathbb{K}$. Siccome un sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}$ è linearmente chiuso, se $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}$ tutte le combinazioni lineari di vettori di X appartengono a $\mathbf{W}$, cioè $\mathcal{L}(\mathsf{X}) \subseteq \mathbf{W}$, anzi è $\mathcal{L}(\mathsf{X}) \leq \mathbf{W}$. Infatti se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathsf{X})$, allora $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ sono entrambi combinazioni di vettori di X, e quindi anche $a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ (per ogni $a, b \in \mathbb{K}$), che di conseguenza appartiene a $\mathcal{L}(\mathsf{X})$. Ma questa è una condizione sufficiente per essere sottospazio. Allora
$$\mathcal{L}(\mathsf{X}) \subseteq \bigcap \{\mathbf{W} | \; \mathbf{W} \leq \mathbf{V}, \, \mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}\}. \tag{3.4.3}$$
Non può esistere un vettore $\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}(\mathsf{X})$ e $\mathbf{v} \in \bigcap \{\mathbf{W} | \; \mathbf{W} \leq \mathbf{V}, \, \mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}\}$. Infatti anche $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ è un sottospazio contenente X, quindi partecipa a formare l'intersezione al secondo membro della (3.4.3). Perciò $\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \bigcap \{\mathbf{W} | \; \mathbf{W} \leq \mathbf{V}, \, \mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}\}$.

   Ricordiamo che l'intersezione di sottospazi è ancora un sottospazio. Abbiamo appena visto che $\mathcal{L}(\mathsf{X}) \leq \mathbf{W}$ se $\mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}$. Quindi $\mathcal{L}(\mathsf{X}) = \bigcap \{\mathbf{W} | \; \mathbf{W} \leq \mathbf{V}, \, \mathsf{X} \subseteq \mathbf{W}\}$, ovvero $\mathcal{L}(\mathsf{X})$ si ottiene come intersezione di tutti i sottospazi di $\mathbf{V}$ contenenti l'insieme X.

5. Consideriamo, in $\mathbb{R}^3$, i vettori $\mathbf{u} = [1, 0, 0]^t$ e $\mathbf{v} = [0, 1, 0]^t$. Essi generano due sottospazi $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$, $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle$ rappresentati, rispettivamente, dall'asse x e y. Quindi $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$. La loro somma è diretta e $\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ è il piano coordinato xy.

6. Si noti che la somma diretta non è un nuovo tipo di operazione introdotta in $\mathbf{V}$. È sempre la solita somma di sottospazi, e diventa diretta in presenza di proprietà che riguardano esclusivamente gli addendi. Ovvero la proprietà di essere disgiunti come sottospazi: $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$. □

3.4.4 La Formula di Grassmann

Nello studio della dimensione di sottospazi è fondamentale l'uso della *Formula di Grassmann*. Questa permette di confrontare le dimensioni di due sottospazi con quella della loro somma ed intersezione.

Teorema 3.16. *Siano* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{W}$ *due sottospazi di uno stesso spazio vettoriale* $\mathbf{V}$. *Vale allora la seguente formula*

$$\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}). \tag{3.4.4}$$

-Dimostrazione. Siano $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = k$, e $\{v_1, ..., v_k\}$ una base di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Per il Teorema 3.11 esiste una base di $\mathbf{U}$ del tipo $\{v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_r\}$, essendo $r = \dim \mathbf{U} - k$. Analogamente, esiste una base di $\mathbf{W}$ del tipo $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_s\}$, essendo $s = \dim \mathbf{W} - k$. Sia v un qualsiasi vettore di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$. Allora esistono $u \in \mathbf{U}$ e $w \in \mathbf{W}$ tali che $v = u + w$. Poichè u è combinazione lineare dei vettori $v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_r$, e w è combinazione lineare dei vettori $v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_s$, allora v è combinazione lineare dei vettori

$v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$. L'insieme $X = \{v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s\}$ è pertanto un insieme generatore di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$. Dimostriamo che tali vettori sono anche indipendenti. Considerando una loro combinazione lineare nulla

$$a_1 v_1 + ... + a_k v_k + b_1 u_1 + ... + b_r u_r + c_1 w_1 + ... + c_s w_s = 0, \tag{3.4.5}$$

si ha

$$b_1 u_1 + ... + b_r u_r = -a_1 v_1 - ... - a_k v_k - c_1 w_1 - ... - c_s w_s. \tag{3.4.6}$$

Quindi la combinazione lineare al primo membro deve fornire lo stesso vettore prodotto dalla combinazione lineare al secondo membro. Ma al primo membro abbiamo un vettore di $\mathbf{U}$, mentre al secondo membro un vettore di $\mathbf{W}$. Quindi ognuna delle due combinazioni lineari deve fornire un vettore di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, per cui deve essere esprimibile mediante una combinazione lineare di $\{v_1, ..., v_k\}$. In particolare, considerando il primo membro, si ha

$$b_1 u_1 + ... + b_r u_r = d_1 v_1 + ... + d_k v_k,$$

e quindi

$$b_1 u_1 + ... + b_r u_r - d_1 v_1 - ... - d_k v_k = 0.$$

Ma, essendo $\{v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_r\}$ una base di $\mathbf{U}$, tale uguaglianza implica che $b_1 = ... = b_r = d_1 = ... = d_k = 0$. Dalla (3.4.6) abbiamo allora

$$-a_1 v_1 - ... - a_k v_k - c_1 w_1 - ... - c_s w_s = 0,$$

il che, essendo $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_s\}$ una base di $\mathbf{W}$, implica che $a_1 = ... = a_k = c_1 = ... = c_s = 0$. Quindi, tutti coefficienti della (3.4.5) sono nulli, per cui i vettori di X sono anche indipendenti, e, di conseguenza, rappresentano una base di $\mathbf{U} + \mathbf{W}$. Pertanto si ha $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = k + r + s$, e quindi

$$\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = (r + k) + (s + k) = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + k = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$$

■

La Formula di Grassmann (3.4.4) è particolarmente utile per decidere se una data somma di sottospazi è diretta o meno. Possiamo infatti riscrivere la (3.4.4) come segue:

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}). \tag{3.4.7}$$

Alla luce della (3.4.7), una somma di sottospazi è diretta se e solo se la dimensione dello spazio somma è uguale alla somma delle dimensioni degli spazi addendi.

Osservazioni ed esempi.

1. Discutiamo $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, sapendo che $\dim \mathbf{U} = 4$, $\dim \mathbf{W} = 5$ e che $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^7$. Sappiamo che $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$, anzi $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} \leq \mathbf{U}$ e $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} \leq \mathbf{W}$. Quindi la dimensione di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ non può superare la minima delle dimensioni di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, cioè $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \leq \min\{\dim \mathbf{U}, \dim \mathbf{W}\}$. Pertanto, $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \leq 4$. Il

valore minimo che può assumere $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$ lo ricaviamo esaminando la Formula di Grassmann. Da

$$\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) &= \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \\ &= 4 + 5 - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 9 - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}). \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Ora, $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^7$, quindi la sua dimensione deve essere ≤ 7. La (3.4.8) ha senso solo per $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 2$. Concludendo, i possibili valori di $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$ sono 2, 3 e 4.

2. Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ due sottospazi distinti di dimensione 4 di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ avente dimensione 6. Discutiamo $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$ e $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W})$. Anche in questo l'analisi si basa sulla Formula di Grassmann:

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}. \tag{3.4.9}$$

Siccome $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono distinti, $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) < 4$. Infatti il valore 4 può essere raggiunto solo se $\mathbf{U} = \mathbf{W}$. La somma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ è un sottospazio (proprio o improprio) di $\mathbf{V}$, quindi $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \leq 6$. Mettendo assieme questi due risultati, dalla (3.4.9) abbiamo

$$6 \geq \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 8 - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}),$$

ovvero $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \geq 2$. Concludendo, o $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 2$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = 6$, oppure $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 3$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = 5$. □

Capitolo 4

APPLICAZIONI LINEARI

Lo studio degli spazi vettoriali si amplia in maniera naturale quando vengono considerate le *applicazioni lineari*. Esse sono particolari funzioni, definite tra due spazi vettoriali, la cui importanza è quella di conservare le operazioni presenti in queste strutture.

4.1 DEFINIZIONI E PRIME PROPRIETÀ

Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali qualsiasi, definiti sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una funzione $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ è un'*applicazione lineare* se e solo se f verifica le seguenti proprietà.

(i) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

(ii) Per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$: $f(a\mathbf{u}) = af(\mathbf{u})$.

Pertanto una applicazione lineare conserva le operazioni di somma di vettori e di prodotto tra uno scalare ed un vettore.

Teorema 4.1. *Le condizioni (i) e (ii) che definiscono una applicazione lineare sono equivalenti all'unica condizione*

(i') *Per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$: $f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$.*

-*Dimostrazione.* Se valgono (i) e (ii), si ha

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \overset{(1)}{=} f(a\mathbf{u}) + f(b\mathbf{v}) \overset{(2)}{=} af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}).$$

L'uguaglianza $(^1)$ deriva dalla proprietà (i) e l'uguaglianza $(^2)$ dalla (ii). Viceversa, se vale la (i'), automaticamente è vera pure la (i), ponendo $a = b = 1$ e la (ii), ponendo $b = 0$. ■

Un'applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ viene anche chiamata *omomorfismo* di spazi vettoriali, di *dominio* $\mathbf{V}$ e *codominio* $\mathbf{W}$. L'insieme di tali omomorfismi è indicato con $\boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Osservazioni ed esempi.

1. Il campo $\mathbb{K}$ che viene utilizzato nella costruzione di uno spazio vettoriale viene anche detto *campo base* dello spazio.

2. La proprietà (ii) giustifica il fatto che gli spazi $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ debbano necessariamente essere definiti sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Altrimenti l'operazione di prodotto per uno scalare al secondo membro della (ii) non sarebbe nemmeno definita.

3. Prescindendo dalla struttura di spazio vettoriale, possiamo considerare una applicazione lineare semplicemente come funzione tra due insiemi. Allora possiamo trasferire ad una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, senza alterarle, alcune definizioni valide per generiche funzioni tra insiemi. Per esempio, f è una *applicazione lineare iniettiva* se $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}')$ implica $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Invece f è una *applicazione lineare suriettiva* se per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ esiste $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Si ha una *applicazione lineare biunivoca* quando è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

4. Se $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una applicazione lineare biunivoca, l'*applicazione inversa* $f^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ è ancora una applicazione lineare. Infatti, se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{W}$, posto $\mathbf{v}_1 = f^{-1}(\mathbf{w}_1)$ e $\mathbf{v}_2 = f^{-1}(\mathbf{w}_2)$ abbiamo

$$\begin{aligned} f^{-1}(a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2) &= f^{-1}(af(\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{v}_2)) = f^{-1}(f(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2)) \\ &= a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = af^{-1}(\mathbf{w}_1) + bf^{-1}(\mathbf{w}_2), \end{aligned}$$

   per ogni $a, b \in \mathbb{K}$, e quindi f^{-1} è lineare.

   Le applicazioni lineari contemporaneamente iniettive e suriettive si chiamano *isomorfismi*, e il loro insieme viene indicato da $\boldsymbol{Iso}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Nel caso in cui dominio e codominio coincidano, gli omomorfismi prendono il nome di *endomorfismi* e gli isomorfismi quello di *automorfismi*. I loro insiemi sono individuati, rispettivamente, dai simboli $\boldsymbol{End}(\mathbf{V})$ e $\boldsymbol{Aut}(\mathbf{V})$.

5. Studiamo la linearità dell'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & [x, y]^t & \longmapsto & [x - y, x + y]^t. \end{array}$$

   Dobbiamo verificare se f conserva la somma di vettori e il prodotto tra un vettore ed uno scalare del campo base $\mathbb{R}$. Consideriamo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, con $\mathbf{u} = [a, b]^t$ e $\mathbf{v} = [a', b']^t$ e $h, k \in \mathbb{R}$. Per il Teorema 4.1 basta verificare che

$$f(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}).$$

   Poiché $h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = h[a, b]^t + k[a', b']^t = [ha + ka', hb + kb']^t$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) &= f([ha + ka', hb + kb']^t) \overset{\text{def}}{=} \\ &= [(ha + ka') - (hb + kb'), (ha + ka') + (hb + kb')]^t = \\ &= [h(a - b) + k(a' - b'), h(a + b) + k(a' + b')]^t = \\ &= [h(a - b), h(a + b)]^t + [k(a' - b'), k(a' + b')]^t = \\ &= h[a - b, a + b]^t + k[a' - b', a' + b']^t = hf([a, b]^t) + kf([a', b']^t) = \\ &= hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

   Quindi f è lineare.

6. **Forme lineari.** Sia $\mathbf{W}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una *forma lineare* su $\mathbf{W}$ è un'applicazione lineare $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{W}, \mathbb{K})$, dove il campo $\mathbb{K}$ è visto come spazio vettoriale su se stesso. Per esempio, è facile verificare che l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & x+y \end{array}$$

è lineare. Infatti, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\mathbf{v} = [x, y]^t$ e $\mathbf{v}' = [x', y']^t$ in $\mathbb{R}^2$ si ha:

$$\begin{aligned} f(a\mathbf{v} + b\mathbf{v}') &= f\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \\ &= f\left(\begin{bmatrix} ax + bx' \\ ay + by' \end{bmatrix}\right) = \\ &= ax + bx' + ay + by' = a(x+y) + b(x'+y') = \\ &= af\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + bf\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \\ &= af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Quindi f è una forma lineare.

7. Consideriamo l'applicazione $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, che associa ad ogni matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il proprio determinante[1]. In questo caso, pur essendo ancora vero che il codominio è il campo base dello spazio vettoriale al dominio, non si ha una forma lineare, in quanto il determinante, in generale, non conserva il prodotto di un vettore per uno scalare. Infatti, se $a \in \mathbb{K}$, con $a^n \neq a$, ed $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, risulta

$$\det(aA) = a^n \det A \neq a \det A.$$

8. Consideriamo ora un importante esempio di applicazione lineare. Sia A una matrice ad elementi reali avente m righe ed n colonne. Allora la corrispondenza $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è una applicazione lineare. Infatti, per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$, e per ogni scelta degli scalari $a, b \in \mathbb{R}$, sfruttando le proprietà delle matrici abbiamo

$$f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = A(a\mathbf{x}) + A(b\mathbf{y}) = aA\mathbf{x} + bA\mathbf{y} = af(\mathbf{x}) + bf(\mathbf{y}),$$

e quindi, per il Teorema 4.1, f è una applicazione lineare. □

[1] Indichiamo con $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici quadrate, di ordine n, i cui elementi appartengono al campo $\mathbb{K}$.

4.1.1 Nucleo ed immagine

Consideriamo l'applicazione $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Il *nucleo* di f, indicato con $\ker f$, è l'insieme dei vettori di $\mathbf{V}$ che hanno come immagine il vettore nullo di $\mathbf{W}$, cioè

$$\ker f = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} | \; f(\mathbf{v}) = \mathbf{0_W}\}.$$

L'*immagine* di f, indicata con $\mathrm{Im} f$ è l'insieme dei vettori di $\mathbf{W}$ che vengono ottenuti applicando f ai vettori di $\mathbf{V}$, cioè

$$\mathrm{Im} f = \{\mathbf{w} \in \mathbf{W} | \; \exists \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \; f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

Un modo più compatto per definire i due insiemi è il seguente. Il nucleo è l'insieme $f^{-1}(\mathbf{0_W})$, mentre l'immagine è $f(\mathbf{V})$.

Ovviamente $\ker f \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbf{W}$. Il teorema seguente mette in evidenza che nucleo ed immagine non sono semplici sottoinsiemi, ma hanno una loro propria struttura di spazio vettoriale[2].

Teorema 4.2. *Sia* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *una applicazione lineare. Allora* $\ker f \leq \mathbf{V}$, *ed* $\mathrm{Im} f \leq \mathbf{W}$.

-Dimostrazione. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker f$. Ciò significa che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Per ogni a, b appartenenti al campo base $\mathbb{K}$, abbiamo:

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \overset{(1)}{=} af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}) = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Quindi $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in \ker f$, che è un sottospazio. L'uguaglianza $(^1)$ è conseguenza della linearità di f.

Allo stesso modo ragioniamo per l'immagine. Se $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathrm{Im} f$, esistono almeno due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tali che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ e $f(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$. Ora, per ogni $a, b \in \mathbb{K}$:

$$a\mathbf{w} + b\mathbf{w}' = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{v}') \overset{(2)}{=} f(a\mathbf{v} + b\mathbf{v}').$$

Ma $a\mathbf{v} + b\mathbf{v}' \in \mathbf{V}$, quindi $a\mathbf{w} + b\mathbf{w}' \in \mathrm{Im} f$, che è sottospazio di $\mathbf{W}$. Anche in questo caso l'uguaglianza $(^2)$ è conseguenza della linearità della f. ■

L'iniettività di un'applicazione è caratterizzata dal seguente risultato.

Teorema 4.3. *Sia* $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. *Condizione necessaria e sufficiente affinché* f *sia iniettiva è che* $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

-Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che f sia iniettiva. Ogni vettore di $\mathbf{W}$ ammette al più un'unica controimmagine. Se $\mathbf{v} \in \ker f$, allora $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Ma anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, cioè $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{0})$. Per l'unicità della controimmagine, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

La condizione è sufficiente. Supponiamo $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ tali che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$. Abbiamo:

$$\mathbf{0} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}') = f(\mathbf{v} - \mathbf{v}').$$

[2] Utilizziamo il simbolo $\subseteq$ per indicare l'inclusione insiemistica, mentre la scrittura $X \leq \mathbf{V}$ indica che X è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

Ciò significa che $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \ker f$. Ma $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, quindi $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Questo significa che, se esiste una controimmagine di un vettore di $\mathbf{W}$, questa è unica, ovvero che f è iniettiva. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Possiamo visualizzare qualitativamente l'azione di una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ con il seguente grafico

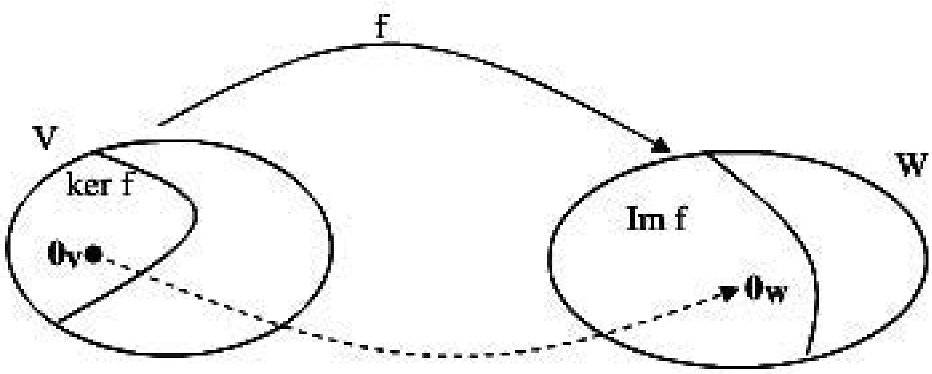


Figura 4.1: rappresentazione qualitativa dell'azione di una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$.

2. **Applicazioni lineari singolari.** Un'applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ si dice *singolare* se il suo nucleo non è il sottospazio banale di $\mathbf{V}$, cioè se $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$. In questo caso esiste almeno un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbf{V}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Sappiamo che $\ker f = \mathbf{0}$ è una condizione necessaria e sufficiente affinché f sia iniettiva. Quindi un'applicazione singolare non può essere un isomorfismo, non essendo iniettiva.

3. **Conservazione dell'indipendenza lineare.** L'indipendenza lineare viene conservata dall'iniettività. Sia infatti $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una applicazione lineare iniettiva, e siano $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ linearmente indipendenti. Allora anche $f(\mathbf{v_1}), ..., f(\mathbf{v}_k)$ sono linearmente indipendenti. Infatti, se $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ sono tali che $a_1 f(\mathbf{v_1}) + ... + a_k f(\mathbf{v}_k) = 0$, allora $f(a_1\mathbf{v_1} + ... + a_k\mathbf{v}_k) = 0$, e quindi $a_1\mathbf{v_1} + ... + a_k\mathbf{v}_k \in \ker f$. Per il Teorema 4.3 $a_1\mathbf{v_1} + ... + a_k\mathbf{v}_k = 0$, per cui, essendo $\mathbf{v_1}, .., \mathbf{v}_k$ indipendenti, risulta $a_1 = ... = a_k = 0$.

4. Si noti che la dipendenza lineare viene conservata da una qualsiasi applicazione lineare. Infatti, se $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ è una generica applicazione lineare e $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ sono linearmente indipendenti, allora esistono $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $a_1\mathbf{v_1} + ... + a_k\mathbf{v}_k = 0_\mathbf{V}$.

   Ma $0_\mathbf{W} = f(0_\mathbf{V}) = f(a_1\mathbf{v_1} + ... + a_k\mathbf{v}_k) = a_1 f(\mathbf{v_1}) + ... + a_k f(\mathbf{v}_k)$, e quindi $f(\mathbf{v_1}), ..., f(\mathbf{v}_k)$ sono linearmente dipendenti. □

4.1.2 Composizione di applicazioni lineari

Consideriamo due applicazioni lineari f e g. Se $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, cioè se il codominio di f coincide con il dominio di g, possiamo allora considerare la composizione $g \circ f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{W})$ delle due applicazioni lineari.

Teorema 4.4. *La composizione di applicazioni lineari è ancora una applicazione lineare.*

-*Dimostrazione.* Se $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, per ogni $a, b, x, y \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}$ si ha:

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{u}') = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{u}'), \tag{4.1.1}$$

$$g(x\mathbf{v} + y\mathbf{v}') = xg(\mathbf{v}) + yg(\mathbf{v}'). \tag{4.1.2}$$

Allora, per ogni $h, k \in \mathbb{K}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(h\mathbf{u} + k\mathbf{u}') = g\left(f(h\mathbf{u} + k\mathbf{u}')\right) &\overset{(1)}{=} g\left(hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{u}')\right) \overset{(2)}{=} \\ &= hg(f(\mathbf{u})) + kg(f(\mathbf{u}')) = h \cdot (g \circ f)(\mathbf{u}) + k \cdot (g \circ f)(\mathbf{u}'),\end{aligned}$$

dove le uguaglianze $(^1)$ e $(^2)$ sono vere, rispettivamente, per la (4.1.1) e la (4.1.2). Quindi, dalla definizione di linearità, la composizione $g \circ f$ è lineare, cioè $g \circ f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{W})$. ■

Teorema 4.5. *Siano $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che esistano $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ tali che $g \circ f(\mathbf{u}) = g \circ f(\mathbf{u}')$, cioè $g(f(\mathbf{w})) = g(f(\mathbf{w}'))$. Ma g è iniettiva, quindi le controimmagini sono uniche. Ciò significa che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}')$. Poiché anche f è iniettiva, risulta $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. Pertanto $g \circ f$ è iniettiva. ■

Teorema 4.6. *Siano $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Se f e g sono suriettive, allora $g \circ f$ è suriettiva*

-*Dimostrazione.* Sia $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Siccome g è suriettiva, esiste (almeno) un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tale che $g(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ma anche f è suriettiva, quindi esiste un $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ tale che $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Di conseguenza è vera la seguente uguaglianza:

$$g \circ f(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) = g(\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Ogni vettore di $\mathbf{W}$ ammette almeno una controimmagine tramite l'applicazione $g \circ f$, nello spazio $\mathbf{U}$, per cui $g \circ f$ è suriettiva. ■

Teorema 4.7. *Siano $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che f non sia iniettiva. Esistono allora due vettori distinti $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$, tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}')$. Di conseguenza:

$$(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) = g(f(\mathbf{u}')) = (g \circ f)(\mathbf{u}').$$

Ma ciò è impossibile per l'iniettività di $g \circ f$. Pertanto deve essere $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ ed f deve essere iniettiva. ■

Teorema 4.8. *Siano $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva.*

-*Dimostrazione.* Una funzione è suriettiva se ogni elemento del codominio ammette almeno una controimmagine. Se $g \circ f$ è suriettiva, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ esiste almeno un $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ tale che $(g \circ f)(\mathbf{u}) = g(f(\mathbf{u})) = \mathbf{w}$. Se poniamo $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, abbiamo $g(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{u})) = \mathbf{w}$, ovvero ogni vettore di $\mathbf{W}$ ha almeno una controimmagine, tramite g, in $\mathbf{V}$. Quindi g è suriettiva. ■

Osservazioni ed esempi.

1. La composizione di applicazioni lineari è generalizzabile ad un numero finito qualsiasi di applicazioni, con le dovute considerazioni sui domini e codomini. Queste non sono ovviamente necessarie nel momento in cui si parla di endomorfismi, per i quali domini e codomini coincidono.

2. Siano $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ e $g \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Se $g \circ f$ è iniettiva il Teorema 4.7 garantisce che f è iniettiva, ma non fornisce alcuna informazione sulla iniettività di g. Analogamente, se $g \circ f$ è suriettiva, il Teorema 4.8 garantisce che g è suriettiva, ma non fornisce alcuna informazione sulla suriettività di f. □

4.1.3 Teorema fondamentale delle applicazioni lineari

Un importante risultato nell'analisi di un'applicazione lineare è descritto nel teorema seguente, noto come *Teorema fondamentale delle applicazioni lineari*.

Teorema 4.9. *Se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ sono spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di $\mathbf{V}$, fissati n vettori di $\mathbf{W}$, ad esempio $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w}_n$, esiste un'unica applicazione lineare $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ tale che*

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.1.3}$$

-*Dimostrazione.* Consideriamo un generico vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$. Esso si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$, cioè esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \dots + a_n\mathbf{v}_n$. Consideriamo allora la funzione $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ definita come segue

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) = f(a_1\mathbf{v_1} + \dots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v_1}) + \dots + a_n f(\mathbf{v}_n) = \\ = a_1\mathbf{w_1} + \dots + a_n\mathbf{w}_n \in \mathbf{W}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Essa, ovviamente, verifica le condizioni (4.1.3). Inoltre, tale funzione è una applicazione lineare. Infatti, se $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{V}$, con $\mathbf{x_1} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i$, $\mathbf{x_2} = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{v}_i$, e $h, k \in \mathbb{K}$, allora:

$$
\begin{aligned}
f(h\mathbf{x}_1 + k\mathbf{x}_2) &= f\left(h\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i\right) + k\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i\right)\right) = \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} ha_i\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n} kb_i\mathbf{v}_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(ha_i + kb_i)\mathbf{v}_i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ha_i + kb_i)f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}(ha_i + kb_i)\mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{n} ha_i\mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^{n} kb_i\mathbf{w}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} ha_i f(\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} kb_i f(\mathbf{v}_i) = h\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f(\mathbf{v}_i)\right) + k\left(\sum_{i=1}^{n} b_i f(\mathbf{v}_i)\right) = \\
&= hf\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{v}_i\right) + kf\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{v}_i\right) = hf(\mathbf{x}_1) + kf(\mathbf{x}_2).
\end{aligned}
$$

Pertanto è possibile costruire una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ a partire dall'immagine di una base fissata di $\mathbf{V}$. Tale applicazione è unica. Supponiamo infatti che esista una seconda applicazione lineare $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ che verifica le condizioni (4.1.3), cioè tale che $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Allora, preso un vettore $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, per la linearità di g si ha

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{v}) = g(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 g(\mathbf{v}_1) + \ldots + a_n g(\mathbf{v}_n) = \\
= a_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + a_n f(\mathbf{v}_n) = f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = f(\mathbf{v}),
\end{aligned}
$$

e quindi $f = g$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Si noti che nel Teorema 4.9 non si impone alcuna condizione sui vettori $\mathbf{w}_i$. Essi potrebbero essere sia dipendenti che indipendenti, ed in questo caso non è comunque detto che l'insieme $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ sia una base. In effetti non ci sono nemmeno condizioni sulla dimensione dello spazio codominio $\mathbf{W}$. I due spazi $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ potrebbero essere molto diversi tra loro, così come, invece, potrebbero addirittura coincidere.

2. Il significato del Teorema 4.9 consiste nel fatto che, per definire una particolare applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, basta fissare le immagini dei vettori di una base qualsiasi. Ovviamente, una volta fatto ciò, f va poi estesa per linearità a tutto il dominio $\mathbf{V}$. Estendere linearmente f a tutto lo spazio $\mathbf{V}$ significa ricostruire l'azione di f su un qualsiasi vettore di $\mathbf{V}$ tramite le (4.1.3). Questo avviene mediante la formula (4.1.4). □

4.1.4 Spazi isomorfi

Nello studio degli spazi vettoriali sono stati introdotti i fondamentali concetti di *base* e *dimensione*. In particolare, fissata una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, è possibile associare ad ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, in maniera unica, una n-pla di coefficienti del campo $\mathbb{K}$ su cui è costruito $\mathbf{V}$. Con le applicazioni lineari vediamo che è possibile *mettere in comunicazione* spazi di natura anche molto diversa tra loro. Ci chiediamo allora se la proprietà di avere la stessa dimensione può in qualche maniera essere *letta* da una applicazione lineare. La risposta a questa domanda è fornita dal seguente importante teorema.

Teorema 4.10. *Due spazi vettoriali* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$*, di dimensione finita, sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.*

-Dimostrazione. La condizione è necessaria. Poniamo infatti $\dim \mathbf{V} = m$ e $\dim \mathbf{W} = n$, e supponiamo che esista un isomorfismo $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Allora f è in particolare iniettivo. Per l'Osservazione 3 a pagina 89, la dimensione dell'immagine coincide con quella del dominio, cioè $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim f(\mathbf{V}) = m$. Ma $\mathrm{Im} f \leq \mathbf{W}$, quindi

$$m \leq n. \tag{4.1.5}$$

Lo stesso discorso si può fare per f^{-1}, che è ancora un isomorfismo (cfr. Osservazione 4 a pagina 86), ottenendo

$$m \geq n. \tag{4.1.6}$$

Da (4.1.5) e (4.1.6) segue che $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ hanno la stessa dimensione.

Il viceversa è leggermente più complesso. Se $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$, i due spazi hanno basi aventi lo stesso numero di vettori. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di $\mathbf{V}$ e $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ una base di $\mathbf{W}$. Possiamo costruire un'applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ sfruttando il Teorema 4.9. Definiamo innanzitutto f sulla base $\mathcal{B}$ ponendo $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, n$. Estendiamo poi l'azione di f a tutto lo spazio $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$, abbiamo allora

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{w}_i.$$

Verifichiamo ora che l'applicazione f è un isomorfismo. Per vedere se è iniettiva studiamo la struttura di $\ker f$. Se $\mathbf{v} \in \ker f$, allora $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Siccome $\mathcal{B}$ è una base, esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$, e quindi

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}.$$

La precedente uguaglianza è vera se e solo se $a_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, perché i vettori $\mathbf{w}_i$ sono indipendenti. Ma ciò significa che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, quindi che $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Di conseguenza l'applicazione lineare f è iniettiva. Controlliamo ora la suriettività. Se $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, con $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{w}_i$, il vettore $\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i$ di $\mathbf{V}$ è una sua controimmagine. Infatti:

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{w}_i = \mathbf{w}.$$

Concludendo, $\mathbf{f}$ è un'applicazione lineare iniettiva e suriettiva, quindi un isomorfismo. ■

L'importanza del Teorema 4.10 è data dal fatto che, a meno di isomorfismi, quando lavoriamo su uno spazio vettoriale qualsiasi, di dimensione n assegnata, possiamo sempre riferirci ad uno di essi.

Isomorfismo canonico

Il Teorema 4.10 mette in evidenza che tra due spazi vettoriali aventi la stessa dimensione esiste sempre un isomorfismo. Naturalmente è possibile che ne esista più di uno. Tra i vari isomorfismi che possiamo trovare ne abbiamo uno, detto *isomorfismo canonico* che riveste particolare importanza. Nel teorema seguente descriviamo esplicitamente questo isomorfismo.

Teorema 4.11. *Sia $\mathcal{B}_{\mathbf{V}} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$ sul campo $\mathbb{K}$. Sia $c_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbb{K}^n$ la corrispondenza definita da*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i \longmapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Allora $c_{\mathbf{V}}$ è un isomorfismo.

-Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ due generici vettori, le cui componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$ fissata, siano date da

$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} \longmapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Per ogni scelta degli scalari $a, b \in \mathbb{K}$, abbiamo

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a(x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n) + b(y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n) = (ax_1 + by_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (ax_n + by_n)\mathbf{v}_n.$$

Applicando $c_{\mathbf{V}}$ risulta quindi

$$c_{\mathbf{V}}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = ac_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) + bc_{\mathbf{V}}(\mathbf{y}),$$

per cui $c_{\mathbf{V}}$ è una applicazione lineare. Se $c_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})$ è la n-pla identicamente nulla, allora $\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_{\mathbf{V}}$, per cui $\ker c_{\mathbf{V}} = \mathbf{0}_{\mathbf{V}}$ e quindi $c_{\mathbf{V}}$ è iniettiva.
Consideriamo ora una qualsiasi n-pla in $\mathbb{K}^n$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Il vettore $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ appartiene ovviamente a $\mathbf{V}$, e risulta $c_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = \mathbf{a}$. Pertanto l'applicazione lineare considerata è anche suriettiva, e quindi è un isomorfismo. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Il Teorema 4.10 ci dice che, a meno di isomorfismi, esiste un solo spazio vettoriale di una data dimesione n, su un dato campo $\mathbb{K}$. Il Teorema 4.11 ci dice che questo spazio è identificabile canonicamente con lo spazio $\mathbb{K}^n$ formato da tutte le n-ple di elementi di $\mathbb{K}$.

2. Possiamo costruire spazi vettoriali aventi la stessa dimensione, ma non isomorfi, solo assumendo campi base distinti. Infatti, in questo caso, non è neppure possibile definire tra essi alcuna applicazione lineare (cfr. Osservazione 2 a pagina 86).

3. Direttamente dalla definizione, si deduce che l'immagine di un vettore $\mathbf{v}_i \in \mathcal{B}_{\mathbf{V}}$, tramite $c_{\mathbf{V}}$, coincide con la n-pla avente tutte le componenti uguali a 0, salvo la componente i-ma uguale a 1. Di conseguenza, $c_{\mathbf{V}}$ trasforma la base $\mathcal{B}$ nella base canonica di $\mathbb{K}^n$.

4. In riferimento alla precedente osservazione precisiamo che i valori $0, 1$ sono da intendersi come gli elementi neutri delle due operazioni, $+$ e $\cdot$, che rendono l'insieme $\mathbb{K}$ un campo. In particolare, 0 è l'elemento neutro del gruppo abeliano $(\mathbb{K}, +)$, mentre 1 è l'elemento neutro del gruppo abeliano $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$. □

4.2 MATRICI ASSOCIATE

Nell'Osservazione 8 a pagina 87 abbiamo visto che è possibile definire una applicazione lineare a partire da una matrice. Vogliamo ora invertire questa considerazione, mettendo in evidenza come sia possibile associare matrici di tipo (m, n) ad una data applicazione lineare definita tra due spazi vettoriali $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ (su uno stesso campo $\mathbb{K}$), di dimensioni n ed m rispettivamente. L'idea ha origine dal Teorema 4.9, che garantisce la costruzione di una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, nel momento in cui ne risulti definita l'azione su una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di $\mathbf{V}$. Poiché i vettori $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ appartengono a $\mathbf{W}$, è possibile associare ad ognuno di essi una m-pla di coordinate rispetto ad una base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ definita in $\mathbf{W}$. Queste coordinate possono essere ordinate in vettori colonne di $\mathbb{K}^m$:

$$f(\mathbf{v}_1) \longmapsto \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, f(\mathbf{v}_n) \longmapsto \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Le n distinte m-ple così ottenute possono essere pensate come le colonne di una matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ di tipo (m, n). Essa è la matrice che si associa in modo univoco (fissate le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ in $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$) all'applicazione f. Riassumiamo questo fatto nella seguente definizione.

Definizione 4.12. *Le matrici rappresentative di una data applicazione lineare $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ hanno come colonne i coefficienti che consentono di esprimere le immagini dei vettori di una base di $\mathbf{V}$ come combinazione lineare dei vettori di una base di $\mathbf{W}$.*

Ogni tale matrice fornisce un modo per calcolare l'*azione* dell'applicazione f su tutti i vettori del dominio $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, detta X la colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, le componenti del vettore $f(\mathbf{x})$, rispetto alla base $\mathcal{B}'$, sono fornite dal prodotto $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)X$. Nel caso in cui f sia un endomorfismo di $\mathbf{V}$, e $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, possiamo indicare la matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ semplicemente con $A_{\mathcal{B}}(f)$. Facciamo comunque notare che, quando si considera un endomorfismo, non è detto che si debba necessariamente assumere la stessa base nel dominio e nel codominio.

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo l'applicazione lineare di $\boldsymbol{End}(\mathbb{R}^3)$ definita da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \\ c_1x + c_2y + c_3z \end{pmatrix},$$

e fissiamo come base di riferimento la base canonica $\mathcal{C}$, sia nel dominio che nel codominio. Indichiamo semplicemente con A la matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (quando non si vuole enfatizzare la dipendenza dalle basi è speso utilizzata questa notazione semplificata). L'endomorfismo $f \in \boldsymbol{End}(\mathbb{R}^3)$ manda vettori di $\mathbb{R}^3$ in vettori di $\mathbb{R}^3$ secondo la regola:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \\ c_1x + c_2y + c_3z \end{bmatrix} = Y,$$

e la sua azione si manifesta su un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ mediante il prodotto a sinistra della matrice A, cioè

$$AX = Y.$$

Quindi, le colonne di A corrispondono ai coefficienti di x, y, z, rispettivamente, cioè

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

2. Consideriamo l'applicazione lineare

$$d : \mathbb{R}_3[t] \longrightarrow \mathbb{R}_3[t],$$

dove $\mathbb{R}_3[t]$ è lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3 e d è l'operatore di derivazione[3]. Se $p(t) = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$, abbiamo cioè

$$d(p(t)) = 3a_0t^2 + 2a_1t + a_2.$$

[3] Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$ viene anche indicato con $Pol_n(\mathbb{R})[x]$, o, più semplicemente, con $Pol_n(x)$

Assumiamo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ come base, sia nel dominio che nel codominio. Vogliamo allora determinare la matrice $A_{\mathcal{B}}(d)$ associata alla derivazione. Occorre individuare l'immagine, tramite d, dei vettori della base $\mathcal{B}$, e scrivere tali immagini come combinazione lineare dei vettori della stessa base. Abbiamo allora

$$\begin{cases} d(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3 \\ d(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3 \\ d(t^2) = 2t = 0 \cdot 1 + 2t + 0t^2 + 0t^3 \\ d(t^3) = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0t + 3t^2 + 0t^3 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Allora la matrice associata a d è la trasposta della matrice dei coefficienti del sistema (4.2.1), ossia:

$$A_{\mathcal{B}}(d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

4.2.1 Il Teorema dimensionale

La matrice associata ad un'applicazione lineare fornisce importanti informazioni sulle proprietà dell'applicazione stessa. Queste sono riassunte nel seguente risultato, noto come *Teorema Dimensionale*. Esso esprime una relazione tra le dimensioni del nucleo e dell'immagine di ogni applicazione lineare.

Teorema 4.13. *Siano* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$ *spazi di dimensione finita, con* $f \in \boldsymbol{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ *e* $\dim \mathbf{V} = n$. *Vale allora la seguente uguaglianza:*

$$n = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f). \tag{4.2.2}$$

-Dimostrazione. Fissiamo in $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente. Preso un generico vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, sia X la colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioè

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Posto $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = A$, rappresentiamo A come accostamento di n vettori colonna, ossia

$$A = [C_1 | \dots | C_n],$$

con $C_i \in \mathbb{K}^{\dim \mathbf{W}}$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Sia $[f(\mathbf{x})]$ l'elemento di $\mathbb{K}^{\dim \mathbf{W}}$ le cui componenti sono i coefficienti che esprimono $f(\mathbf{x})$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}'$.

Allora $[f(\mathbf{x})]$ si ottiene moltiplicando X a sinistra per la matrice A, ossia

$$\begin{aligned}[f(\mathbf{x})] = AX &= [C_1|\dots|C_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1C_1 + \cdots + x_nC_n.\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

La precedente è una combinazione lineare delle colonne della matrice A, aventi come coefficienti gli scalari $x_i \in \mathbb{K}$. Ma, al variare di $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, la (4.2.3) rappresenta pure tutti i possibili vettori di $\mathrm{Im} f$. Quindi le colonne di A sono un insieme generatore di $\mathrm{Im} f$. Sappiamo poi che il rango r di A è il massimo numero di colonne (e di righe) di A linearmente indipendenti[4]. Quindi r rappresenta pure la dimensione dello spazio immagine, cioè $\dim(\mathrm{Im} f) = r$. Inoltre, il nucleo di f è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, $\dim(\ker f) = n - r = n - \dim \mathrm{Im} f$, da cui si ricava la tesi. ■

L'equazione (4.2.2) è detta *Equazione Dimensionale*. Sfruttando l'equazione dimensionale ricaviamo che tra spazi aventi la stessa dimensione i concetti di iniettività e suriettività coincidono.

Teorema 4.14. *Siano* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$ *due spazi vettoriali tali che* $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$. *Allora una applicazione lineare* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *è iniettiva se e solo se è suriettiva.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo f iniettiva. Allora $\ker f = \mathbf{0}$, per cui $\dim(\ker f) = 0$, e dalla (4.2.2) ricaviamo $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbf{V}$. Ma $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W}$, per cui f è suriettiva.

Supponiamo ora che f sia suriettiva. Allora $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbf{W}$, ed essendo $\dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V}$ risulta $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbf{V}$. Dalla (4.2.2) ricaviamo quindi $\dim(\ker f) = 0$, e dal Teorema 4.3 abbiamo che f è iniettiva. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Si noti che nel Teorema 4.13 non viene fatta alcuna ipotesi sulla dimensione dello spazio $\mathbf{W}$, così come sulle basi di dominio e codominio.

2. Consideriamo il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, 0). \end{array}$$

   Esso viene anche chiamato *proiezione canonica* (sul piano xy). L'immagine di f è $\mathrm{Im} f = \{(x, y, 0)|\ x, y \in \mathbb{R}\}$, cioè il piano xy, che ha dimensione 2. Il nucleo è formato da tutti i vettori dell'asse z, cioè $\ker f = \{(0, 0, z)|\ z \in \mathbb{R}\}$, e ha dimensione 1. L'equazione dimensionale è soddisfatta, essendo $3 = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$.

[4] Il rango, o caratteristica, di una matrice A viene spesso indicato con il simbolo $\mathrm{rk} A$.

3. Studiamo l'equazione dimensionale in riferimento alla seguente applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:
$$f(x, y) = (2x - y, x + y, y).$$
Fissiamo come basi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ le rispettive basi canoniche, ed indichiamo semplicemente con A_f la matrice associata ad f rispetto a queste basi. Essa appartiene a $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, ed è tale che
$$A_f \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y \\ y \end{bmatrix},$$
ovvero
$$A_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
È facile verificare che $\text{rk}A_f = 2$. Questo significa che $\dim \text{Im} f = 2$. Non solo. Le colonne di A_f sono un sistema di generatori di $\text{Im} f$, ed essendo in questo caso indipendenti, ne sono anche una base. Applichiamo l'equazione dimensionale:
$$n = \dim \ker f + \dim \text{Im} f.$$
Sappiamo che $n = 2$ e $\dim \text{Im} f = \text{rk}A_f = 2$. Allora $\dim \ker f = 0$. Quindi, in particolare, f è un'applicazione iniettiva.

4. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice
$$A_f = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$
Il rango di A_f è la dimensione di $\text{Im} f$. La matrice A_f è singolare, ma il minore del secondo ordine individuato dalle ultime due righe e colonne è $\neq 0$. Quindi $\text{rk}A_f = 2$. Le colonne di A_f sono un sistema di generatori per $\text{Im} f$, ma quelle che contribuiscono a formare il minore ne costituiscono pure una base, in quanto formano un sottoinsieme indipendente massimale di un insieme generatore.

Dall'Equazione dimensionale ricaviamo poi che il nucleo ha dimensione 1. Per determinare esplicitamente $\ker f$, bisogna risolvere il sistema omogeneo $A_f X = \mathbf{0}$, cioè
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Svolgendo i calcoli ricaviamo $y = 2x$, $z = 0$. Pertanto risulta
$$\ker f = \{[x, 2x, 0]^t \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}\},$$
ed una sua base è rappresentata, per esempio, dal singolo vettore

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Consideriamo un endomorfismo singolare $f \in \boldsymbol{End}(\mathbf{V})$ (cfr. Osservazione 2 a pag. 89). Poiché f è singolare, esiste un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Sia $A_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice associata ad f, rispetto alla base $\mathcal{B}$. Indichiamo con X la colonna delle componenti del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla stessa base $\mathcal{B}$, abbiamo

$$A_{\mathcal{B}}X = \mathbf{0}.$$

Ma la precedente rappresenta un sistema lineare omogeneo quadrato d'ordine n, che ammette l'autosoluzione $\mathbf{x}$. Quindi il rango della matrice dei coefficienti è minore dell'ordine della matrice, cioè $\det A = 0$. Di conseguenza la matrice A è singolare, il che giustifica il nome di queste applicazioni lineari. □

4.2.2 Matrici associate alla composizione di applicazioni lineari

Quando si considera la composizione di due o più applicazioni lineari si ha il problema di determinare la matrice rappresentativa della risultante a partire dalle matrici associate alle singole componenti. In questo paragrafo vogliamo occuparci di questo argomento, dimostrando innanzitutto un risultato che giustifica la definizione di prodotto righe per colonne tra due matrici conformabili.

Teorema 4.15. *Si considerino due applicazioni lineari $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ e $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ basi fissate arbitrariamente in $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ rispettivamente. Allora risulta*

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(g \circ f) = A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g) A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f). \tag{4.2.4}$$

-Dimostrazione. Consideriamo un generico vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Indichiamo con X la colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e con X' la colonna delle componenti di $f(\mathbf{x})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Possiamo allora scrivere

$$g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) \longmapsto A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} X' = A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X.$$

Ma, utilizzando la matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ associata a $g \circ f$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}''$ abbiamo anche

$$g \circ f(\mathbf{x}) \longmapsto A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} X,$$

e, confrontando le due scritture ottenute, si ricava la (4.2.4). ■

Teorema 4.16. *Sia $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfismo, e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora f è un isomorfismo se e solo se* $\det A_{\mathcal{B}}(f) \neq 0$.

-Dimostrazione. Dal Teorema 4.14 sappiamo che f è un isomorfismo se e solo se f è suriettiva, cioè se e solo se $\mathrm{Im} f = \mathbf{V}$. Questo avviene se e solo se le colonne di $A_{\mathcal{B}}(f)$ sono tutte indipendenti, cioè se e solo se $\det A_{\mathcal{B}}(f) \neq 0$. ■

Sfruttando i precedenti teoremi possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.17. *Sia $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un isomorfismo, e sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbf{V}$. Allora si ha*

$$A_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A_{\mathcal{B}}(f)^{-1}. \tag{4.2.5}$$

-*Dimostrazione.* Sappiamo che la matrice $A_{\mathcal{B}}(f)$ è unica, e, per il Teorema 4.16 essa è invertibile. Inoltre, essendo $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$, e $A_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = I_n$, per il Teorema 4.15, abbiamo

$$I_n = A_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = A_{\mathcal{B}}(f)A_{\mathcal{B}}(f^{-1}),$$

da cui si ricava la (4.2.5). ■

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo due spazi vettoriali $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, con basi fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente. Siano poi $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una applicazione lineare, $\mathbf{x}$ un vettore di $\mathbf{V}$, ed X la colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto a $\mathcal{B}$. Spesso, per snellire la trattazione, anziché dire che le componenti del vettore $f(\mathbf{x})$, rispetto alla base $\mathcal{B}'$, sono fornite dal prodotto $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)X$, si scrive semplicemente

$$f(\mathbf{x}) = A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)\mathbf{x}. \tag{4.2.6}$$

2. Dal Teorema 4.15 si ricava immediatamente che, se consideriamo due endomorfismi $f, g \in \boldsymbol{End}(\mathbf{V})$, cui sono associate, rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}$, le matrici $A_{\mathcal{B}}(f)$ e $A_{\mathcal{B}}(g)$ rispettivamente, allora $A_{\mathcal{B}}(g \circ f) = A_{\mathcal{B}}(g) \cdot A_{\mathcal{B}}(f)$. □

4.2.3 Rappresentazione canonica indotta

Sfruttando il Teorema 4.11 possiamo sviluppare lo studio delle applicazioni lineari lavorando semplicemente su quelle definite tra spazi canonici. Vediamo esplicitamente come avviene questo trasferimento.

Siano $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ due spazi vettoriali, di dimensioni n ed m rispettivamente, definiti sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Mediante gli isomorfismi canonici $c_{\mathbf{V}}$ e $c_{\mathbf{W}}$ possiamo rappresentare $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ in $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ rispettivamente. Sia poi $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una generica applicazione lineare. L'azione di f è allora equivalente a quella dell'applicazione lineare $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ottenuta dalla composizione tra c_V^{-1}, f e c_W, come illustrato nei diagrammi seguenti:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_V"'] & \mathbf{W} \arrow[d, "c_W"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \arrow[d, "c_W"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "c_V^{-1}"] \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

In particolare, procedendo in questa maniera, veniamo a rappresentare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}$ come base canonica $\mathcal{C}$ dello spazio $\mathbb{K}^n$, e la base $\mathcal{B}'$ di $\mathbf{W}$ come base canonica $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{K}^m$ (cfr. Osservazione 3 a pagina 95). Dalla Definizione 4.12, si deduce che $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(c_{\mathbf{V}})$ è la matrice identica I_n di ordine n, mentre $A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(c_{\mathbf{W}})$ è la matrice identica I_m di ordine m. Quindi, la matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ viene a coincidere con la matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(F)$, come illustrato nel diagramma seguente, che traduce quelli precedenti in termini di matrici associate:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)} & \mathbf{W} \\ I_n \uparrow & & \downarrow I_m \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(F)} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Osservazioni ed esempi.

1. La rappresentazione canonica indotta mette anche in evidenza che le proprietà di una applicazione lineare sono indipendenti dalle basi che si fissano nel dominio e nel codominio. Infatti, pur di rimpiazzare f con F, si può sempre pensare di lavorare con le basi canoniche.

2. Riprendiamo l'Esempio 2 riportato a pagina 96. La matrice $A_{\mathcal{B}}(d)$ che si è determinata coincide con quella che rappresenta, rispetto alla base canonica, l'applicazione D indotta dalla derivazione d sullo spazio canonico $\mathbb{R}^4$ isomorfo ad $\mathbb{R}_3[t]$. Possiamo quindi studiare l'azione della derivazione d lavorando direttamente sullo spazio canonico. Ad esempio, consideriamo il polinomio $q(t) = 2t^3 - 5t + 1$, appartenente ad $\mathbb{R}_3[t]$, le cui componenti rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ sono:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Allora l'azione di d su $q(t)$ equivale all'azione di D sulla quaterna delle sue coordinate, descritta dal prodotto:

$$A_{\mathcal{C}}(D) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il risultato rappresenta, in $\mathbb{R}^4$, il vettore delle componenti dell'immagine di $q(t)$. Questo significa che la derivata di $q(t)$ è il polinomio che ha come coefficienti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, le componenti del vettore ottenuto. Quindi risulta

$$d(q(t)) = -5 \cdot 1 + 0t + 6t^2 + 0t^3 = -5 + 6t^2,$$

il che conferma la nota regola di derivazione. □

4.2.4 Cambi di base

Vogliamo ora esaminare una particolare classe di endomorfismi, detti *cambi di base*. Essi si ottengono quando si considera l'applicazione lineare identica id $\in$ $\boldsymbol{End}(\mathbf{V})$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, assumendo però due basi diverse, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, sul dominio e sul codominio. La matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ è detta *matrice del cambio di base*, e permette di trasformare la n-pla delle componenti di un generico vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, nella n-pla delle componenti dello stesso vettore $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, calcolate però rispetto alla base $\mathcal{B}'$. È importante notare che le colonne di $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ sono le componenti dei vettori della *base di partenza* $\mathcal{B}$ calcolate rispetto alla *base di arrivo* $\mathcal{B}'$. Il seguente teorema illustra come costruire esplicitamente questa matrice.

Teorema 4.18. *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale di dimensione* n *sul campo* $\mathbb{K}$, *e siano* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *due basi di* $\mathbf{V}$. *Allora la matrice di cambio base è data da*

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = [\mathcal{B}']^{-1}[\mathcal{B}], \tag{4.2.7}$$

essendo $[\mathcal{B}]$ *e* $[\mathcal{B}']$ *le matrici aventi come colonne, rispettivamente, le* n*-ple formate dalle componenti dei vettori delle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *rispetto ad una opportuna base* $\mathcal{C}$ *fissata in* $\mathbf{V}$.

-*Dimostrazione.* Dalla Definizione 4.12 abbiamo immediatamente $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = [\mathcal{B}]$ ed $A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = [\mathcal{B}']$. Pertanto, l'azione del cambio base può essere descritta con il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})} & \mathbf{V} \\ [\mathcal{B}] \downarrow & & \downarrow [\mathcal{B}'] \\ \mathbf{V} & \xrightarrow{A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})} & \mathbf{V} \end{array}$$

Per i teoremi 4.15 e 4.17 abbiamo $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = [\mathcal{B}']^{-1} A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})[\mathcal{B}]$. La matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ ha come colonne i coefficienti che esprimono le immagini dei vettori di $\mathcal{C}$ (tramite l'identità) come combinazioni lineari degli stessi vettori. Pertanto $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ è la matrice identica, e quindi si ricava la (4.2.7). ■

Osservazioni ed esempi.

1. Spesso, negli esercizi, i vettori di una data base $\mathcal{B}$ vengono assegnati fornendo esplicitamente le loro componenti. Questo significa che, nello spazio vettoriale in cui si sta lavorando, è stata precedentemente fissata una base $\mathcal{C}$, e le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ sono i coefficienti che consentono di esprimere ognuno di essi come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{C}$. Nel caso in cui si stia lavorando in uno spazio canonico (situazione a cui ci si può sempre ricondurre grazie al Teorema 4.11) e vengano assegnate le componenti dei vettori di una base $\mathcal{B}$ senza fare riferimento ad alcuna altra base, si sottointende che la base di riferimento $\mathcal{C}$ è la base canonica.

2. Supponiamo di assegnare, nello spazio $\mathbb{R}^2$, le due basi date da

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   In questa maniera abbiamo tacitamente fornito le componenti dei vettori di $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ rispetto alla base canonica (cfr. Osservazione 1), che in $\mathbb{R}^2$ è data da

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Consideriamo ancora le due basi dell'Esempio precedente, e scriviamo la matrice di cambio base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. La matrice

$$[\mathcal{B}_1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è quella del cambio di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{C}$. Analogamente,

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{C}$. Abbiamo poi

$$[\mathcal{B}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dal Teorema 4.18 ricaviamo pertanto che la matrice cercata è:

$$[\mathcal{B}_2]^{-1}[\mathcal{B}_1] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Consideriamo una applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, e supponiamo che vengano esplicitamente assegnate le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ negli spazi canonici $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ rispettivamente. Volendo costruire la matrice $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ applicando direttamente la Definizione 4.12 dovremmo calcolare, per ogni vettore di $\mathcal{B}$, la sua immagine tramite f e poi trovare i coefficienti che esprimono tale immagine come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}'$. Possiamo tuttavia procedere in maniera diversa, componendo l'applicazione lineare con i cambi base da $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ alle basi canoniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ rispettivamente. Si ottiene in questa maniera il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)} & \mathbb{K}^m \\ [\mathcal{B}] \downarrow & & \downarrow [\mathcal{B}'] \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f)} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Pertanto, sfruttando anche i teoremi 4.4 e 4.17, ricaviamo che la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, è data da

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = [\mathcal{B}']^{-1} A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f)[\mathcal{B}]. \tag{4.2.8}$$

5. Si faccia attenzione a non confondere il diagramma riportato nella precedente osservazione con quello descritto nel Paragrafo 4.2.3, nel quale le frecce verticali corrispondono a *matrici identiche*. Queste rappresentano infatti le matrici associate agli isomorfismi canonici, mentre invece, nel diagramma precedente, le frecce verticali corrispondono alle matrici di cambio base associate alle *applicazioni lineari identiche* degli spazi canonici considerati.

6. Poiché le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ possono variare arbitrariamente in $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, la formula (4.2.8) fornisce un legame tra le varie matrici $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ e la matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f)$. Se invece è nota in partenza l'azione di una applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ su determinate basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, e si vuole risalire alla sua azione sulle basi canoniche, basta invertire l'equazione (4.2.8), e si ottiene

$$A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f) = [\mathcal{B}']A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)[\mathcal{B}]^{-1}. \tag{4.2.9}$$

□

4.3 SIMILITUDINE E DIAGONALIZZABILITÀ

Consideriamo un'applicazione lineare $f \in \boldsymbol{End}(\mathbf{V})$. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{V}$, abbiamo visto che è possibile associare in modo univoco ad f una matrice $A_{\mathcal{B}}(f)$, mediante la quale è completamente descritto il comportamento dell'endomorfismo. Ovviamente se si cambia base cambia anche la matrice associata: se al posto di $\mathcal{B}$ consideriamo una base $\mathcal{C}$, la matrice $A_{\mathcal{C}}(f)$ sarà diversa dalla $A_{\mathcal{B}}(f)$. Entrambe però rappresentano lo stesso endomorfismo. Deve quindi esistere una relazione di qualche tipo che lega le due matrici. Questa relazione si chiama *similitudine*. Nel paragrafo seguente diamo la definizione e le prime proprietà.

4.3.1 Il concetto di similitudine

La *similitudine* è un concetto che riguarda esclusivamente le matrici quadrate. Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si dice che A è *simile* a B, e si scrive $A \sim B$ se esiste una matrice P invertibile, detta *matrice di passaggio*, tale che $P^{-1}AP = B$.

Teorema 4.19. *In $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la similitudine è una relazione di equivalenza.*

-Dimostrazione. Verifichiamo la validità delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

(*i*) **Proprietà riflessiva.** Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è simile a se stessa. Basta prendere P uguale ad I_n (matrice identica di ordine n), e si ottiene

$$I_n^{-1}AI_n = A.$$

(*ii*) **Proprietà simmetrica.** Se A è simile a B allora B è simile ad A. Infatti, se $A \sim B$, esiste $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, invertibile, tale che $P^{-1}AP = B$. Moltiplicando entrambi i membri di questa uguaglianza a sinistra per P e a destra per P^{-1} otteniamo

$$P(P^{-1}AP)P^{-1} = PBP^{-1},$$

da cui

$$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1}). \tag{4.3.1}$$

La (4.3.1) dice che B è simile ad A, mediante la matrice di passaggio P^{-1}.

(*iii*) **Proprietà transitiva.** Se A è simile a B e B è simile a C, allora A è simile a C. Infatti, se $A \sim B$, esiste una matrice P invertibile tale che

$$P^{-1}AP = B. \tag{4.3.2}$$

Analogamente, se $B \sim C$, esiste una matrice invertibile Q tale che

$$Q^{-1}BQ = C. \tag{4.3.3}$$

Sostituendo la (4.3.2) nella (4.3.3) si ottiene:

$$Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = C,$$

da cui:

$$(Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = C,$$

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = C. \tag{4.3.4}$$

La relazione (4.3.4) esprime il fatto che $A \sim C$, tramite la matrice di passaggio PQ. ■

Una prima proprietà posseduta da due matrici simili è descritta nel teorema seguente.

Teorema 4.20. *Matrici simili hanno lo stesso determinante.*

-*Dimostrazione.* Se $A \sim B$, dalla definizione di similitudine abbiamo $P^{-1}AP = B$ per qualche matrice P invertibile. Utilizzando il Teorema di Binet ricaviamo allora

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P = (\det P)^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det A.$$

■

Osservazioni ed esempi.

1. Facciamo notare una particolarità nella definizione di similitudine di matrici. Dicendo che *A è simile a B se esiste* ... si dà una sorta di direzionalità alla definizione, che rende anche sensato il controllo della proprietà simmetrica dell'equivalenza. È diverso dire *A e B sono simili se esiste* .... Qui non viene stabilito a priori, nella scrittura $P^{-1}AP = B$, qual'è la posizione di A e quale quella di B. In questo caso la proprietà simmetrica sarebbe implicita.

2. Il Teorema 4.20 fornisce una condizione solo necessaria per la similitudine. Se due matrici sono simili allora hanno lo stesso determinante, ma non è vero il viceversa. Esistono altre condizioni necessarie che caratterizzano la similitudine. L'analisi di queste condizioni, e lo studio della similitudine stessa, richiedono l'introduzione di concetti legati alla diagonalizzabilità che saranno sviluppati nel prossimo paragrafo.

□

4.3.2 Definizioni di diagonalizzabilitá e prime proprietà

Nel Paragrafo 4.1.4 abbiamo visto che, a meno di trasferire le considerazioni sulla applicazione lineare indotta, è sempre possibile pensare di lavorare sugli spazi canonici. Non è pertanto restrittivo sostituire lo studio degli endomorfismi di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, di dimensione n, sul campo $\mathbb{K}$, con lo studio degli endomorfismi di $\mathbb{K}^n$. In particolare, ci concentriamo sullo studio delle applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Facciamo comunque notare che tutti i risultati possono essere estesi (con le ovvie modifiche dovute al cambio di campo) ad endomorfismi di $\mathbb{K}^n$.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Se consideriamo due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$, e definiamo le componenti dei loro vettori rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$, sappiamo (cfr. Osservazione 6 a pagina 105) che si ha

$$A_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f) = [\mathcal{B}_2]^{-1} A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) [\mathcal{B}_1],$$

formula valida anche per spazi diversi in partenza ed in arrivo.
Se fissiamo in $\mathbb{R}^n$ una base $\mathcal{B}$ e prendiamo $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, abbiamo

$$A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = [\mathcal{B}]^{-1} A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) [\mathcal{B}].$$

Questo significa che le matrici $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ sono simili tra loro. Pertanto, le matrici che rappresentano f rispetto a basi diverse sono tutte simili ad $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, e quindi sono anche tutte simili tra loro. Al contrario, due matrici A, B di ordine n, simili tra loro, rappresentano uno stesso endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto a due diverse basi. Infatti, per la similitudine tra A e B, esiste una matrice P di ordine n, invertibile, tale che $P^{-1}AP = B$. A meno di un cambio di base possiamo sempre pensare che A sia la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica, cioè $A = A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$. Di conseguenza $B = P^{-1} A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) P = A_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f)$, essendo $\mathcal{P}$ la base di $\mathbb{R}^n$ formata dai vettori le cui componenti, rispetto alla base canonica, sono le colonne della matrice P.

Riassumendo, due matrici sono simili se e solo se rappresentano uno stesso endomorfismo rispetto a due basi diverse.

Se esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, allora f si dice *endomorfismo diagonalizzabile* o anche *endomorfismo semplice*. Se A è la matrice che rappresenta un endomorfismo diagonalizzabile f rispetto ad una qualsiasi base di $\mathbb{R}^n$, diciamo che A è una *matrice diagonalizzabile*. Ogni tale matrice è pertanto simile ad una matrice diagonale, cioè esiste una matrice invertibile P tale che:

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Sia ora $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si chiama *polinomio caratteristico* di M il polinomio

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

La matrice $M - \lambda I_n$ si chiama *matrice caratteristica* associata ad M.
L'equazione $\chi_M(\lambda) = 0$ è detta *equazione caratteristica* associata ad M.

L'insieme delle radici complesse del polinomio caratteristico, è chiamato *spettro* di M, e indicato con

$$\boldsymbol{Spec} M = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

4.3.3 Alcune proprietà del polinomio caratteristico

Nel Teorema 4.20 abbiamo visto una prima semplice proprietà necessaria per la similitudine. Il seguente teorema ne mette in evidenza una seconda.

Teorema 4.21. *Due matrici simili A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

-*D*imostrazione. Sia $B \sim A$, e P una matrice invertibile tale che $P^{-1}BP = A$. Utilizzando il Teorema di Binet ricaviamo allora

$$\begin{aligned}
\chi_B(t) &= \det(B - tI_n) = \det(P^{-1}AP - tI_n) = \\
&= \det\left[P^{-1}AP - t\left(P^{-1}P\right)\right] = \det\left[P^{-1}(A - tI_n)P\right] = \\
&= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - tI_n) \cdot \det P = \det(A - tI_n) \cdot \det(P^{-1}) \cdot \det P = \\
&= \det(A - tI_n) \cdot (\det P)^{-1} \cdot \det P = \det(A - tI_n) = \chi_A(t).
\end{aligned}$$

■

In base al teorema precedente possiamo definire il concetto di *polinomio caratteristico di una applicazione lineare* f. Esso è il polinomio caratteristico di una sua qualsiasi matrice associata. Analogamente si possono trasferire su f le nozioni di equazione caratteristica e Spettro, identificandole con quelle di una sua qualsiasi matrice associata.

Teorema 4.22. *Se $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora $\chi_M(\lambda) = \chi_{M^t}(\lambda)$.*

-*D*imostrazione. Il risultato si ottiene facilmente attraverso i seguenti passaggi

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda I_n) &&= \det(M - \lambda I_n)^t &&= \det\left(M^t - (\lambda I_n)^t\right) = \\
&= \det\left(M^t - \lambda I_n^t\right) &&= \det\left(M^t - \lambda I_n\right) &&= \chi_{M^t}(\lambda).
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.23. *Sia $\boldsymbol{Spec} M = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Allora risulta*

$$\det M = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{4.3.5}$$

-*D*imostrazione. Sappiamo che il polinomio caratteristico di M ammette n radici, quindi si può scomporre nel prodotto di n fattori lineari, non necessariamente distinti:

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Sostituendo, nella precedente equazione, al posto di λ il valore 0 si ottiene:

$$\chi_M(0) = \det(M) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

■

Teorema 4.24. *Sia* **Spec**$M = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. *Allora risulta*

$$\mathrm{Tr}M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{4.3.6}$$

-*D*imostrazione. Consideriamo la matrice caratteristica $M - \lambda I$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ applicando il teorema di Laplace sulla prima riga

$$\chi_M(\lambda) = (a_{11} - \lambda)A_{11} + g_1(\lambda)$$

dove A_{11} è il complemento algebrico di $a_{11} - \lambda$, e $g_1(\lambda)$ è un polinomio di grado inferiore ad $n - 1$. Lavorando analogamente sul minore complementare di $a_{11} - \lambda$ abbiamo

$$A_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = (a_{22} - \lambda)A_{22} + f_1(\lambda)$$

dove A_{22} è il complemento algebrico di $a_{22} - \lambda$, ed $f_1(\lambda)$ è un polinomio di grado inferiore ad $n - 2$. Quindi otteniamo

$$\chi_M(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)A_{22} + g_2(\lambda)$$

dove $g_2(\lambda) = (a_{11} - \lambda)f_1(\lambda) + g_1(\lambda)$ è ancora un polinomio di grado inferiore ad $n - 1$. Ripetendo il ragionamento arriviamo a scrivere

$$\chi_M(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) + g_n(\lambda)$$

con $g_n(\lambda)$ polinomio di grado inferiore ad $n - 1$.
Sviluppando le parentesi abbiamo

$$\chi_M(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \lambda^{n-1} + p(\lambda)$$

essendo $p(\lambda)$ un polinomio di grado inferiore ad $n - 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, abbiamo anche

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{n-1} + q(\lambda)$$

con $q(\lambda)$ polinomio di grado inferiore ad $n - 1$. Per il principio di identità dei polinomi le due scritture di $\chi_M(\lambda)$ sono equivalenti se e solo se i coefficienti delle potenze di uguale esponente sono uguali. In particolare devono quindi essere uguali i coefficienti di λ^{n-1} e quindi

$$(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,$$

da cui si ricava la tesi, essendo $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{Tr}M$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Si noti che, pur essendo M una matrice ad elementi reali, lo spettro di M comprende tutte le radici complesse (quindi, eventualmente, anche quelle non reali) dell'equazione caratteristica. Inoltre alcune radici possono essere multiple, ed in tal caso vanno inserite nello spettro con la dovuta molteplicità.

2. Il Teorema 4.21 non è invertibile, cioè, non è detto che due matrici aventi lo stesso polinomio caratteristico siano simili tra loro.

3. Determiniamo $\chi_M(\lambda)$ e $\boldsymbol{Spec}M$ per la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sappiamo che $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$. Quindi

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

$$\chi_M(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Spec}M = \{0, 1, 2\}$$

4. Per il Teorema 4.23, lo spettro di una matrice singolare contiene sempre l'elemento nullo.

5. Consideriamo la seguente matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo del polinomio caratteristico fornisce $\chi_M(\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$, e quindi l'equazione caratteristica ammette le radici complesse $1+i$ ed $1-i$, entrambe contate due volte. Abbiamo quindi $\boldsymbol{Spec}M = \{1+i, 1+i, 1-i, 1-i\}$ (cfr. Osservazione **1**).

6. Il Teorema 4.24 mette in evidenza che la somma delle radici del polinomio caratteristico di una matrice è sempre uguale alla traccia della matrice. Questo non implica che i singoli elementi dello spettro coincidano con gli elementi della diagonale principale della matrice considerata. L'Esempio 5 illustra bene questa situazione. □

4.4 AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

Un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice *autovalore* di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ non nullo tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Il vettore $\mathbf{v}$ si chiama *autovettore* e λ è l'autovalore ad esso associato. L'insieme di tutti gli autovettori associati a λ, assieme al vettore nullo, si indica con $E_\lambda(f)$ e viene chiamato *autospazio* di f associato all'autovalore λ. Il concetto di autovettore si rivela fondamentale per il problema della diagonalizzazione. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 4.25. *Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di autovettori.*

-*D*imostrazione. Supponiamo innanzitutto che f sia diagonalizzabile. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, e siano $\lambda_1, ..., \lambda_n$ gli elementi sulla diagonale di $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$, cioè

$$A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Poiché le colonne di $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sono i coefficienti che consentono di scrivere le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ in funzione della stessa base $\mathcal{B}$, abbiamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \lambda_2\mathbf{v}_2 \\ &\dots \\ f(\mathbf{v}_n) &= \lambda_n\mathbf{v}_n, \end{aligned}$$

il che implica che $\mathcal{B}$ è una base di autovettori.

Supponiamo ora che esista una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ in cui ogni elemento è un autovettore di f. Allora esistono $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $f(\mathbf{v}_i) = \lambda_i\mathbf{v}_i$ per ogni $i \in \{1, ..., n\}$, e quindi

$$A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pertanto f è diagonalizzabile. ■

Ricaviamo in particolare che la matrice rappresentativa di un endomorfismo diagonalizzabile rispetto ad una base di autovettori è una matrice diagonale, avente come elementi principali gli autovalori.

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo una matrice generica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Questa si può sempre vedere come la matrice associata ad un endomorfismo $f \in \boldsymbol{End}(\mathbb{R}^n)$ rispetto ad una base fissata. Allora autovalori ed autovettori di A sono gli autovalori e gli autovettori di f.
2. È importante notare che, quando si parla di autovettori, si fa riferimento a vettori distinti dal vettore nullo. □

4.4.1 Calcolo degli autovalori

Dalla definizione di autovalore non appare immediatamente evidente il metodo con cui si possono effettivamente calcolare questi numeri. Esso viene fornito nel teorema seguente.

Teorema 4.26. *Gli autovalori di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si calcolano come radici reali del polinomio caratteristico della matrice stessa:*

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_n).$$

-Dimostrazione. Se λ è un autovalore di A, esiste un vettore non nullo (un autovettore) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Portando tutto al primo membro nella precedente uguaglianza, abbiamo $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ovvero

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{4.4.1}$$

La (4.4.1) si può rivedere come un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite. La matrice dei coefficienti è $A - \lambda I_n$, ovvero la matrice caratteristica di A. Lo scalare λ è un autovalore se e solo se esiste un (auto)vettore non nullo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, soluzione di (4.4.1), cioè se e solo se il sistema ammette autosoluzioni. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema del tipo (4.4.1) abbia autosoluzioni è che la matrice dei coefficienti abbia rango inferiore al numero delle incognite. Questo, nel caso considerato, avviene se e solo se $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Quindi lo scalare λ è autovalore di A se e solo se è soluzione dell'equazione

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_n) = 0,$$

che è l'equazione caratteristica di A. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Le eventuali radici non reali dell'equazione caratteristica vengono anche dette *autovalori complessi* dell'endomorfismo (o della matrice associata). Lo spettro è quindi formato dagli autovalori propriamente detti e dagli autovalori complessi. [5]

[5] Nel seguito, frasi del tipo *la matrice (o l'endomorfismo) ha autovalori tutti reali* stanno a significare che il polinomio caratteristico associato alla matrice ammette radici tutte reali, cioè che lo spettro coincide con l'insieme degli autovalori.

2. Siano A e B due matrici simili. Allora

$$\boldsymbol{Spec}A = \boldsymbol{Spec}B, \tag{4.4.2}$$

e quindi, essendo gli autovalori di una matrice ottenibili come radici reali del suo polinomio caratteristico, due matrici simili hanno anche gli stessi autovalori.

Dai teoremi 4.23 e 4.24 ricaviamo pertanto che matrici simili hanno stesso determinante (questa proprietà è già stata ottenuta per altra via nell'Osservazione (4.20) a pagina 106) e medesima traccia, ossia:

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}B, \quad \det A = \det B. \tag{4.4.3}$$

È bene insistere sul fatto che le condizioni (4.4.2) e (4.4.3) sono condizioni solo necessarie, non sufficienti, per la similitudine, così come già osservato per il Teorema 4.21 (cfr. Osservazione 2 a pag. 110). Cioè, se A è simile a B, allora le (4.4.2) e (4.4.3) sono vere. Se sono vere nulla si può dire sulla similitudine di A e B.

3. <u>**Autovalori di una matrice diagonale.**</u> Consideriamo una matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$. In questo caso, essendo $A - tI_n = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) - \mathrm{diag}(t, \dots, t) = \mathrm{diag}(a_1 - t, \dots, a_n - t)$, e ricordando che il determinante di una matrice diagonale è il prodotto degli elementi principali, abbiamo $\chi_A(t) = (a_1 - t)(a_2 - t)\cdots(a_n - t)$. Le radici del polinomio caratteristico sono allora proprio gli elementi principali di A. Quanto detto vale anche per le matrici triangolari, arrivando alle stesse conclusioni: gli autovalori di una matrice triangolare sono i suoi elementi principali.

4. Determiniamo una matrice avente il polinomio $p(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$ come polinomio caratteristico. Notiamo, innanzitutto, che $p(t)$ è scomponibile nel prodotto di fattori lineari:
$$p(t) = (t-3)(t+1)(t-1).$$
Quindi ha tre radici reali distinte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$. Possiamo allora considerare una qualsiasi matrice triangolare avente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ come elementi principali, cioè
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ma avremmo anche potuto scegliere una matrice triangolare inferiore con gli stessi elementi principali, o ancora più semplicemente la matrice $\mathrm{diag}(1, -1, 3)$. In ognuno di questi casi le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidono con gli autovalori della matrice.

5. Determiniamo tutti gli autovalori della matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sapendo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\det(A - 5I_2) = 0, \quad \det(A + I_2) = 0. \tag{4.4.4}$$

Non sappiamo come è fatta A, ma le due uguaglianze precedenti ci permettono di individuare comunque i suoi autovalori. Questi sono le soluzioni reali dell'equazione caratteristica, ovvero sono gli scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfano l'uguaglianza

$$\det(A - tI_2) = 0.$$

Ponendo nella precedente $t = 5$ e $t = -1$ otteniamo proprio le (4.4.4), quindi 5 e -1 sono due autovalori. Però il polinomio caratteristico di A ha grado due, perché $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e non può avere più di due radici. Allora $5, -1$ sono tutti gli autovalori di A ed in particolare quindi $\boldsymbol{Spec}A = \{5, -1\}$.

6. Riprendiamo in esame l'Esempio 3 a pagina 110. Poiché l'equazione caratteristica ammette radici tutte reali, lo spettro coincide in questo caso con l'insieme degli autovalori della matrice. Invece l'Esempio 5 di pagina 110 illustra una situazione in cui la matrice non ammette autovalori. □

4.4.2 Autospazi di un endomorfismo

Sia f un endomorfismo dello spazio $\mathbb{R}^n$, e sia $\lambda \in \boldsymbol{Spec}f$ un suo autovalore. L'insieme di tutti gli autovettori associati a λ, assieme al vettore nullo, si indica con $E_\lambda(f)$ (o semplicemente E_λ se non ci sono pericoli di fraintendimenti) e viene chiamato *autospazio* di f associato all'autovalore λ, ossia:

$$E_\lambda(f) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}.$$

A livello di matrici associate, la definizione di autospazio si traduce come segue. Se A è una matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e λ un suo autovalore, chiamiamo autospazio relativo a λ l'insieme:

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\},$$

dove $\mathbf{v}$ indica sia il vettore, a destra dell'uguaglianza, sia la n -pla delle sue componenti, a sinistra.

Il nome *autospazio* è giustificato dal seguente risultato.

Teorema 4.27. *Sia λ un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e sia $E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$. Allora E_λ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

-*D*imostrazione. Possiamo dimostrare il teorema in due maniere distinte.

• **Primo metodo.** Per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_\lambda$, e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, dalla linearità di f abbiamo

$$f(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w}) = a\lambda\mathbf{v} + b\lambda\mathbf{w} = \lambda(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}).$$

Quindi $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \in E_\lambda$, per cui tale sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è chiuso rispetto alle combinazioni lineari di suoi elementi. Di conseguenza E_λ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

• **Secondo metodo.** Sia $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'endomorfismo identico, tale cioè che $i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Allora E_λ è l'insieme delle soluzioni del sistema $(A_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, essendo $\mathcal{B}$ una qualsiasi base di $\mathbf{V}$. Quindi E_λ è il nucleo dell'endomorfismo $f - \lambda i$, per cui è un sottospazio di $\mathbf{V}$. ■

Il Teorema 4.27 mette in evidenza che l'insieme di tutti gli autovettori associati ad uno stesso autovalore è in realtà uno spazio vettoriale. Ci si può chiedere a questo punto se c'è invece qualche proprietà posseduta da autovettori associati ad autovalori distinti. A questo proposito abbiamo il seguente teorema.

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

al quale corrisponde l'autospazio $E_0 = \{z\mathbf{v}_0,\ z \in \mathbb{R}\}$.

Per $\lambda = 1$ bisogna determinare il nucleo di $f - i$, e quindi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y = -x \ \ z = 2x.$$

Pertanto, all'autovalore $\lambda = 1$ resta associato il solo autovettore

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

al quale corrisponde l'autospazio $E_1 = \{x\mathbf{v}_1,\ x \in \mathbb{R}\}$.

Per $\lambda = 2$ calcoliamo invece il nucleo di $f - 2i$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = 0 \ \ y = -2z.$$

Pertanto, all'autovalore $\lambda = 2$ resta associato il solo autovettore

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

al quale corrisponde l'autospazio $E_2 = \{z\mathbf{v}_2,\ z \in \mathbb{R}\}$. □

4.4.3 Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica

La *molteplicità algebrica* $m_a(\lambda)$ di un autovalore λ indica quante volte l'autovalore è soluzione dell'equazione caratteristica $\chi(\lambda) = 0$. La *molteplicità geometrica* $m_g(\lambda)$ di λ è la dimensione dell'autospazio E_λ associato all'autovalore. Nella dimostrazione del Teorema 4.27 (secondo metodo) abbiamo visto che i vettori di E_λ sono tutti e soli i vettori del nucleo dell'applicazione f di matrice $M - \lambda I_n$ (vedi anche l'Esempio 2 a pagina 115). La dimensione del nucleo si può calcolare usando l'equazione dimensionale $\dim(\ker f) = n - \dim(\mathrm{Im} f)$. Ma la dimensione di $\mathrm{Im} f$ è il rango della matrice associata ad f, quindi $\dim(\ker f) = n - \mathrm{rk}(M - \lambda I_n)$. Concludendo, la molteplicità geometrica dell'autovalore λ è data da

$$\mathrm{m}_g(\lambda) = n - \mathrm{rk}(M - \lambda I_n). \tag{4.4.8}$$

La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica sono legate dalla relazione descritta nel seguente teorema.

Teorema 4.29. *Sia λ_0 un autovalore di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Allora vale la disuguaglianza $m_a(\lambda_0) \geq m_g(\lambda_0)$.*

-*Dimostrazione.* Se $m_a(\lambda_0) = n$ è immediato. Supponiamo che sia $m_a(\lambda_0) < n$, e consideriamo una base $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k\}$ dell'autospazio E_{λ_0} associato a λ_0. Possiamo sempre estendere $\mathcal{B}_0$ ad una base $\mathcal{B}$ di tutto lo spazio aggiungendo $n-k$ vettori indipendenti. Abbiamo allora $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-k}\}$. La matrice $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ può essere rappresentata nella maniera seguente

$$A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A \\ 0 & \cdots & \lambda_0 & \\ \hline & \mathbf{0} & & B \end{array}\right],$$

dove il blocco in alto a sinistra è una matrice diagonale di tipo (k, k). Calcolando il polinomio caratteristico otteniamo

$$P(\lambda) = \det(A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_{(n,n)}) = (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot \det(B - \lambda I_{(n-k,n-k)}) = (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot q(\lambda),$$

essendo $I_{(n,n)}$ la matrice identica di ordine n, $I_{(n-k,n-k)}$ la matrice identica di ordine $n-k$, e $q(\lambda)$ un polinomio di grado $n-k$. Pertanto, l'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$ ammette la soluzione $\lambda = \lambda_0$ contata almeno k volte (esattamente k se $q(\lambda_0) \neq 0$), cioè

$$m_a(\lambda_0) \geq k = \dim E_{\lambda_0} = m_g(\lambda_0).$$

∎

Nel caso in cui risulti $\mathrm{m}_a(\lambda_0) = \mathrm{m}_g(\lambda_0)$, allora λ_0 si dice *autovalore regolare*. Il concetto di regolarità è molto importante per la diagonalizzazione. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 4.30. *Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se f ha spettro reale e, per ogni autovalore, la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo innanzitutto che f sia diagonalizzabile. Allora esiste una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ di autovettori. Sia λ_0 un qualsiasi autovalore. Abbiamo allora $m_g(\lambda_0) = n - \mathrm{rk}\left(A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda_0 I\right)$. Poiché $\mathcal{B}$ è una base di autovettori, la matrice $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, e sulla diagonale compaiono tutti e soli gli autovalori, con le rispettive molteplicità. Quindi gli autovalori sono reali e λ_0 compare sulla diagonale esattamente $m_a(\lambda_0)$ volte. Ogni colonna di $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ in cui compare λ_0 corrisponde ad un autovettore di E_{λ_0}, e tali autovettori sono tra loro indipendenti. Quindi la dimensione di E_{λ_0} (che è il massimo numero di vettori indipendenti estraibili da E_{λ_0}) deve essere almeno uguale a $m_a(\lambda_0)$, cioè $\dim(E_{\lambda_0}) \geq m_a(\lambda_0)$. Ma $\dim(E_{\lambda_0}) = m_g(\lambda_0)$, e quindi $m_g(\lambda_0) \geq m_a(\lambda_0)$. Dal Teorema 4.29 ricaviamo allora $m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0)$. Per la genericità con cui è stato scelto λ_0 segue la tesi.

Supponiamo ora che lo spettro sia reale e che, per ogni autovalore, la molteplicità algebrica sia uguale alla molteplicità geometrica. Indichiamo con $\lambda_1, ..., \lambda_h$ gli autovalori distinti di f, a con $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_h}$ i corrispondenti autospazi. Abbiamo allora

$$\sum_{i=1}^{h} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{h} m_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{h} m_a(\lambda_i).$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra abbiamo $\sum_{i=1}^{h} m_a(\lambda_i) = \text{grado} P(\lambda) = n$, e quindi la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale ad n. Quindi, unendo le basi di tutti gli autospazi si ottiene un insieme di n vettori linearmente indipendenti, cioè una base di $\mathbb{R}^n$. Esiste pertanto una base di autovettori, per cui f è diagonalizzabile. ■

Osservazioni ed esempi.

1. <u>**Una condizione di regolarità per gli autovalori.**</u> Se un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ammette n autovalori distinti, allora questi sono automaticamente regolari. Infatti, per il Teorema 4.28, abbiamo n autospazi distinti, la cui dimensione deve essere necessariamente uguale ad 1. Di conseguenza, la molteplicità algebrica di ogni autovalore coincide con la sua molteplicità geometrica.

2. Sia r una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^2$, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria assiale rispetto alla retta r. Allora f è diagonalizzabile. Infatti, se $\mathbf{r}$ è un qualsiasi vettore appartenente alla retta r, risulta $f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, mentre, se $\mathbf{r}^\perp$ è un qualsiasi vettore appartenente alla retta $\mathbf{r}^\perp$, perpendicolare nell'origine ad r, allora $f(\mathbf{r}^\perp) = -\mathbf{r}^\perp$.

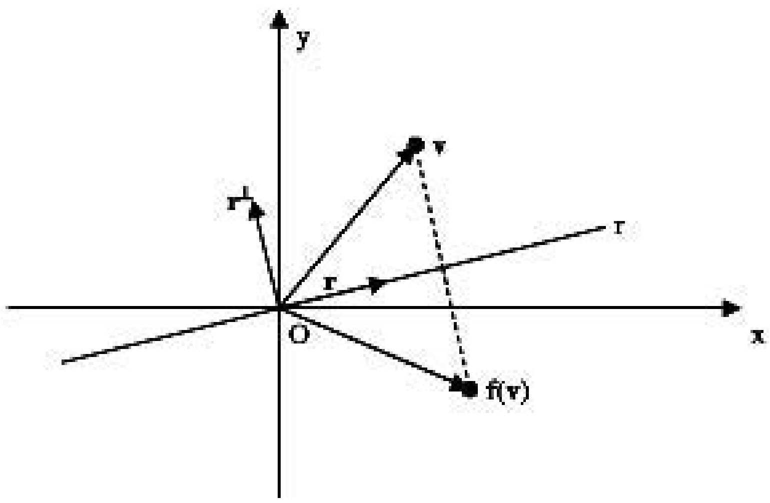


Figura 4.2: autospazi di una simmetria assiale.

Pertanto f ammette spettro reale, con autovalori distinti distinti $\lambda = \pm 1$, e quindi è diagonalizzabile. In particolare, la retta vettoriale r è l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$, mentre la retta vettoriale $r^\perp$ è l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.

3. Possiamo riassumere i principali risultati ottenuti in questo paragrafo nel seguente teorema.

Teorema 4.31. *Consideriamo un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di spettro* **Spec** $f = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$*, e sia A la matrice associata ad f rispetto ad una base qualsiasi. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(*i*) *L'endomorfismo f determina una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori.*

(*ii*) *La matrice A è diagonalizzabile.*

(*iii*) *Gli autovalori λ_i di f sono tutti regolari.*

(*iv*) *Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è somma diretta dei suoi autospazi, ovvero:*

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f).$$

L'equivalenza delle condizioni (*i*) e (*ii*) corrisponde al Teorema 4.25. L'equivalenza delle condizioni (*ii*) e (*iii*) corrisponde invece al Teorema 4.30. La condizione (*iv*) equivale a dire che l'unione delle basi di tutti gli autospazi fornisce un insieme di n vettori, i quali, per il Teorema 4.28, sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base di $\mathbb{R}^n$. Ciò equivale a dire che f è diagonalizzabile, cioè la condizione (*i*).

4. Dalla condizione (*iv*) del Teorema 4.31 (o direttamente dal Teorema 4.28), abbiamo in particolare che l'intersezione di autospazi distinti si riduce al solo vettore nullo.

5. Calcoliamo autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e studiamo la sua diagonalizzabilità .

Determiniamo innanzitutto il polinomio caratteristico e, da questo, gli autovalori.

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_3) = \begin{vmatrix} -t & 6 & 0 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = t(t-3)(t+2).$$

Pertanto, $\boldsymbol{Spec} A = \{0, 3, -2\}$. Gli autovalori sono distinti, quindi regolari (cfr. Osservazione 1 a pagina 118), per cui A è diagonalizzabile. Calcoliamo gli autovettori. Per $\lambda = 0$ abbiamo

$$A\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$$

ovvero

$$\begin{cases} 6y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

La soluzione è

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

per ogni $a \neq 0$. Procedendo analogamente, in corrispondenza di $\lambda = -2$ e $\lambda = 3$ troviamo

$$b \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $b, c \in \mathbb{R}$ diversi da zero. Ogni matrice P, avente come colonne i vettori ottenuti assumendo $a, b, c \neq 0$ nelle precedenti soluzioni, può essere considerata la matrice di passaggio che permette di diagonalizzare la matrice A. Si ha cioè

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, -2, 3).$$

Si può ottenere una matrice di passaggio P anche cambiando l'ordine in cui gli autovettori compaiono come colonne di P. Questo si ribalta sull'analogo cambio dell'ordine con cui gli autovalori compaiono sulla diagonale di $P^{-1}AP$.

6. Determiniamo lo spettro dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f([x, y, z]^t) = [x + y, x + z, y + z]^t.$$

Abbiamo visto che gli autovalori di un endomorfismo f non sono altro che quelli della sua matrice rappresentativa A_f. Dobbiamo solo determinare A_f e ricavarne il polinomio caratteristico. Siccome

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

otteniamo

$$\chi_A(t) = \chi_f(t) = \det(A - tI_3) = (1 - t)(t - 2)(t + 1).$$

Quindi $\boldsymbol{Spec}f = \{2, 1, -1\}$. Notiamo che f è certamente diagonalizzabile, perché ha autovalori distinti, quindi regolari. □

4.5 LO STUDIO DELLA SIMILITUDINE

Vediamo come applicare i risultati sulla diagonalizzabilità allo studio della similitudine. Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vogliamo cioè stabilire se esse sono simili. Conviene verificare innanzitutto che sussistono le condizioni necessarie alla similitudine. Sappiamo infatti che matrici simili hanno lo stesso determinante, la stessa traccia, lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso spettro. Possiamo quindi calcolare gli autovalori di A e B. Se $\boldsymbol{Spec}A \neq \boldsymbol{Spec}B$ le due matrici non possono essere simili. In questo caso abbiamo terminato l'analisi. Se invece $\boldsymbol{Spec}A = \boldsymbol{Spec}B$ le due matrici potrebbero essere simili (ma non è automaticamente vero che lo siano, trattandosi solo di una condizione solo necessaria). Occorre, a questo punto, esaminare la diagonalizzabilità delle matrici interessate. Si possono verificare tre casi.

(i). Entrambe le matrici sono diagonalizzabili. Allora sono simili fra loro. Infatti, se A e B sono diagonalizzabili, sono entrambi simili a matrici diagonali:

$$A \sim \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

$$B \sim \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n).$$

Ma gli elementi principali delle due matrici diagonali coincidono con i loro autovalori, e matrici simili hanno gli stessi autovalori. Allora, a meno dell'ordinamento, $a_i = b_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ciò significa che

$$A \sim \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \sim B$$

e, per la proprietà transitiva della similitudine $A \sim B$.

(ii). Una delle due matrici, ad esempio A, è diagonalizzabile, l'altra no. Le due matrici non sono simili. Se lo fossero avremmo

$$A \sim B$$

e anche

$$A \sim \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n).$$

Sempre per la transitività della relazione di similitudine:

$$B \sim \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n).$$

Ma ciò significa che anche B è diagonalizzabile, contro le ipotesi. Di conseguenza $A \not\sim B$.

(iii). Entrambe le matrici non sono diagonalizzabili. In questo caso è necessario tentare di costruire direttamente, facendo i conti, una matrice P, invertibile, tale che

$$P^{-1}AP = B.$$

Se una tale matrice esiste allora A e B sono matrici simili tra loro.

Osservazioni ed esempi.

1. Due matrici diagonali aventi lo stesso spettro risultano anche simili, poichè coincidono a meno dell'ordinamento degli elementi della diagonale principale.

2. Stabiliamo se le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

sono simili tra loro.

Notiamo intanto che A è diagonale e B triangolare, per cui gli autovalori corrispondono per entrambe ai loro elementi principali e i due spettri coincidono. La matrice

A è già diagonale, quindi ovviamente diagonalizzabile. Dobbiamo esaminare la matrice B. L'autovalore $\lambda = 1$ è semplice, quindi regolare. Occorre studiare $\lambda = 2$, che ha molteplicità algebrica 2 (è un autovalore doppio). La molteplicità geometrica è $m_g(2) = n - \mathbf{rk}(B - 2I_3)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} n - \mathrm{rk}(B - 2I_3) &= 3 - \mathrm{rk} \begin{bmatrix} 1-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \\ &= 3 - \mathrm{rk} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= 3 - 2 = 1. \end{aligned}$$

Quindi $m_a(2) = 2 \neq m_g(2) = 1$. Le due molteplicità sono diverse, l'autovalore $\lambda = 2$ per B non è regolare e quindi B non può essere diagonalizzabile. Ma allora A e B non sono simili tra loro. In particolare A e B non possono rappresentare lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse. $\square$

Parte II

GEOMETRIA ANALITICA

Capitolo 5

SPAZI EUCLIDEI

La Geometria Analitica, o *metodo delle coordinate*, venne fondata da Cartesio e da Fermat nel XVII secolo, e costituisce una tappa fondamentale per l'evoluzione del pensiero matematico. Per mezzo della Geometria Analitica si può tradurre un problema geometrico in un problema algebrico equivalente. Ciò avviene attraverso la costruzione di un opportuno "vocabolario" che, a partire dalla descrizione algebrica degli enti fondamentali punto, retta, piano, passa poi alla traduzione di intere proposizioni. In questa maniera si perviene alla formulazione ed alla risoluzione di problemi geometrici in termini puramente algebrici.

5.1 PUNTI E VETTORI GEOMETRICI

Un problema frequente della Geometria Analitica è la ricerca delle equazioni dei *luoghi geometrici*, cioè dell'insieme di tutti e soli i punti che godono di proprietà geometriche assegnate. Per determinare queste equazioni è particolarmente vantaggioso sfruttare la struttura di spazio vettoriale canonico che abbiamo imparato a costruire sull'insieme $\mathbb{R}^n$, con l'aggiunta di una nuova operazione, detta *prodotto scalare*. Si parla in tal caso di *spazio euclideo*. Cominciamo lo studio degli spazi euclidei facendo alcune considerazioni preliminari sulla corrispondenza tra punti e vettori geometrici.

Sia quindi $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ (n volte), cioè l'insieme delle n-ple di numeri reali. Ogni n-pla $A = (x_1, ..., x_n)$ si dice *punto* di $\mathbb{R}^n$, e l'elemento x_k $(1 \leq k \leq n)$ di A si dice *coordinata k-esima* del punto. In questo insieme possiamo introdurre una struttura di spazio vettoriale reale, definendo una operazione interna $+$, rispetto alla quale l'insieme $\mathbb{R}^n$ diventa un gruppo abeliano, ed una operazione esterna $\cdot$ tra un qualsiasi numero reale λ ed una qualsiasi n-pla di numeri reali. Precisamente abbiamo

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \tag{5.1.1}$$

$$\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n). \tag{5.1.2}$$

Di solito l'operazione $\cdot$ viene sottointesa e si scrive semplicemente $\lambda(x_1, ..., x_n)$ invece di $\lambda \cdot (x_1, ..., x_n)$. È facile vedere che $(\mathbb{R}^n, +)$ è effettivamente un gruppo abeliano, e che l'operazione esterna verifica gli assiomi di spazio vettoriale.

Con questa struttura l'insieme $\mathbb{R}^n$ prende il nome di *spazio vettoriale canonico*. Ad ogni punto $A = (x_1, ..., x_n)$ corrisponde il *vettore* $\mathbf{a}$ che, rispetto alla base canonica $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$[1], ha per componenti i numeri $x_1, ..., x_n$. Possiamo cioè scrivere

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n. \tag{5.1.3}$$

In questa maniera le componenti del vettore $\mathbf{a}$ forniscono la rappresentazione analitica di un punto A in un sistema di riferimento cartesianocoordinate di A si indicano abitualmente con (x) (o semplicemente x), (x, y) ed (x, y, z) rispettivamente (Fig. 5.1), e vengono dette *ascissa*, *ordinata* e *quota* del punto considerato[2].

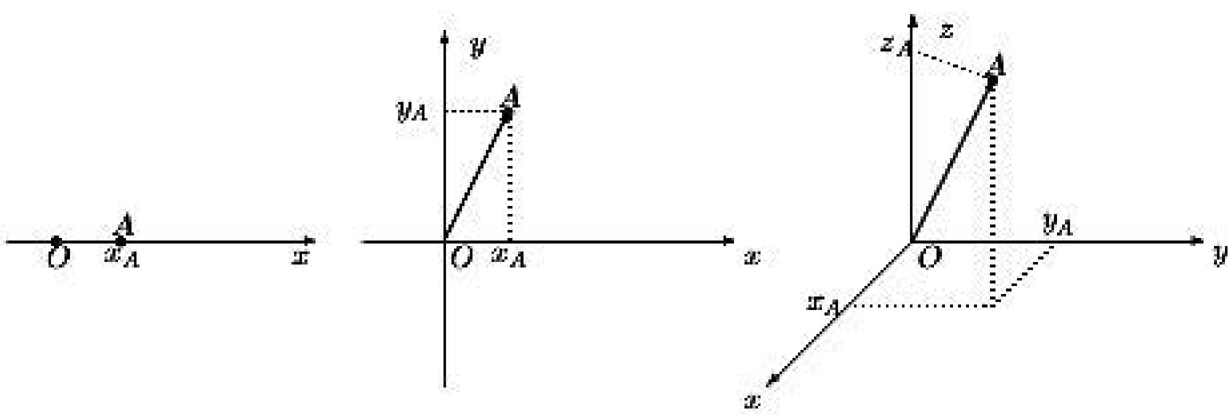


Figura 5.1: corrispondenza tra punti e vettori geometrici in $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

5.1.1 Rappresentazione analitica dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Nello studio della geometria analitica vengono presi in considerazione sottoinsiemi di punti di $\mathbb{R}^n$ con lo scopo di descrivere le loro proprietà geometriche attraverso relazioni algebriche. Alcuni di questi sottoinsiemi di punti possiedono poi una loro struttura intrinseca di spazio vettoriale. Sono cioè sottospazi di $\mathbb{R}^n$. A questo proposito richiamiamo il Teorema 5.1, il quale ci consente di distinguere un sottospazio da un semplice sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e, contemporaneamente, fornisce un metodo per la rappresentazione analitica di tali sottospazi.

Teorema 5.1. *Sia* $\mathbf{W}$ *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$. *Allora* $\mathbf{W}$ *è un sottospazio proprio di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione* k $(1 \le k \le n-1)$ *se e solo se può essere rappresentato come l'insieme delle soluzioni di un opportuno sistema lineare omogeneo di* $n-k$ *equazioni in* n *incognite.*

-Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che $\mathbf{W}$ sia un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ una base di $\mathbf{W}$. Sia $\mathbf{u} = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$ un generico vettore di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo la matrice A, di tipo $(n, k+1)$ avente come colonne i vettori

[1] Per $n = 1, 2, 3$ si preferisce definire la base canonica con $\{\mathbf{i}\}$, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ ed $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ rispettivamente.

[2] Il vettore geometrico $\mathbf{a}$, determinato da un punto A, può anche essere indicato con $\overrightarrow{OA}$

$\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_k, \mathbf{u}$. Allora $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ se e solo se la caratteristica di A è k. Possiamo sempre supporre che il minore M formato dalle prime k righe abbia determinante non nullo. Ogni orlato di M in A si ottiene utilizzando $\mathbf{u}$ ed una delle $n-k$ restanti righe. In A ci sono quindi $n-k$ possibili orlati di M, ed ognuno di essi deve avere determinante nullo, altrimenti la caratteristica di A sarebbe $k+1$. Si ottiene pertanto un sistema omogeneo di $n-k$ equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$. La condizione $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ equivale pertanto a dire che le coordinate $x_1, x_2, ..., x_n$ di $\mathbf{u}$ devono risolvere questo sistema omogeneo, cioè $\mathbf{W}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo ottenuto.

Supponiamo ora che $\mathbf{W}$ sia l'insieme delle n-ple che risolvono un sistema lineare omogeneo di $n-k$ equazioni in n incognite. Possiamo sempre rappresentare il sistema nella forma $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dove la matrice A dei coefficienti ha caratteristica $n-k$. Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ due n-ple soluzioni di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$A(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2) = A(a\mathbf{x}_1) + A(b\mathbf{x}_2) = aA\mathbf{x}_1 + bA\mathbf{x}_2 = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

e quindi anche $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ è una n-pla soluzione. L'insieme $\mathbf{W}$ è pertanto chiuso rispetto ad ogni possibile combinazione lineare di suoi elementi, per cui è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. La generica soluzione del sistema dipende da k parametri (le incognite secondarie), cioè si ottiene mediante la combinazione lineare di k soluzioni fondamentali, tra loro indipendenti. Le soluzioni fondamentali formano quindi una base di $\mathbf{W}$, che ha pertanto dimensione uguale a k. ∎

Osservazioni ed esempi.

1. Se non si devono eseguire operazioni di prodotto tra matrici e vettori, possiamo identificare punti e vettori anche dal punto di vista notazionale, rappresentando i vettori come vettori riga, e separando con una virgola le singole componenti. Per esempio, i vettori delle basi canoniche di $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono dati da $\mathbf{i} = [1]$, $\mathbf{i} = [1, 0], \mathbf{j} = [0, 1]$ ed $\mathbf{i} = [1, 0, 0], \mathbf{j} = [0, 1, 0], \mathbf{k} = [0, 0, 1]$ rispettivamente. Invece, nel prodotto tra una matrice M ed un vettore $\mathbf{a}$ si pone il vettore sulla destra della matrice, cioè si scrive $M\mathbf{a}$, il che presuppone la rappresentazione di $\mathbf{a}$ come vettore colonna.

2. Sia $\mathbf{x} = [1, 3, 4, 5]$ un vettore di $\mathbb{R}^4$. Le sue coordinate rispetto alla base canonica sono $(1, 3, 4, 5)$, essendo $\mathbf{x} = [1, 3, 4, 5] = 1[1, 0, 0, 0] + 3[0, 1, 0, 0] + 4[0, 0, 1, 0] + 5[0, 0, 0, 1]$.

3. **Vettori geometrici e segmenti orientati**. Dati due punti $A, B \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $\overrightarrow{AB}$ il segmento di estremi A, B, orientato da A a B. Nell'insieme dei segmenti orientati di $\mathbb{R}^n$ possiamo considerare la relazione $\mathcal{R}$ tale che $(\overrightarrow{AB})\mathcal{R}(\overrightarrow{CD})$ se e solo se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza. Si vede facilmente che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Un vettore geometrico può quindi essere considerato come il rappresentante (quello applicato all'origine) di una classe di equivalenza di segmenti orientati.

4. **Regola del parallelogramma**. Consideriamo i due punti di $\mathbb{R}^2$ $A = (4, 8)$ e $B = (14, 4)$ (Fig. 5.2). Associamo ai punti i vettori $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$. La loro somma fornisce il vettore determinato dal punto $C = (18, 12)$. Possiamo allora notare che la formula (5.1.1) corrisponde, per $n = 2$, alla *regola del parallelogramma*.

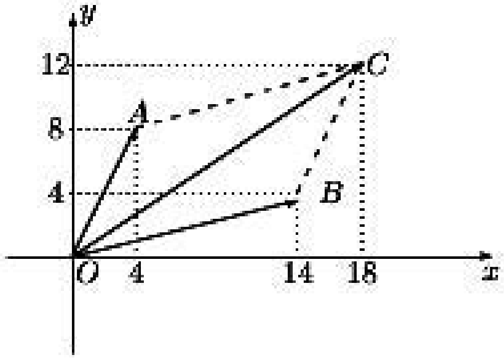


Figura 5.2: Regola del parallelogramma.

5. Dato un vettore geometrico $\mathbf{x}$, il vettore $\lambda\mathbf{x}$ descrive, al variare di λ in $\mathbb{R}$, la retta avente direzione $\mathbf{x}$. Per $n > 1$ questa si può quindi interpretare come un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione 1. La formula (5.1.2) sottolinea che le coordinate di un generico punto di questa retta sono multiple, secondo λ, delle coordinate di $\mathbf{x}$. Per esempio, se $\lambda = -1$, si ha la n-pla $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$, opposta di $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

6. Ognuna delle soluzioni fondamentali di un sistema omogeneo, richiamate nella dimostrazione del Teorema 5.1, si ricava assegnando valore 1 ad uno dei parametri e 0 a tutti gli altri.

7. Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 4t = 0 \\ x + y + 2z - 3t = 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo, quindi il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

Abbiamo quindi un sistema di due equazioni essenziali in quattro incognite, per cui, in base al Teorema 5.1, a tale sistema lineare è associato un sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2. Per ottenere $\mathbf{W}$ bisogna risolvere il sistema. Isoliamo innanzitutto i parametri (incognite secondarie)

$$\begin{cases} x - y = -3z + 4t \\ x + y = -2z + 3t. \end{cases} \quad \text{da cui si ottiene} \quad \begin{cases} x = -\frac{5z-7t}{2} \\ y = \frac{z-t}{2}. \end{cases}$$

Osserviamo che la generica soluzione può essere scritta nella maniera seguente

$$\begin{bmatrix} -\frac{5z-7t}{2} \\ \frac{z-t}{2} \\ z \\ t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ciò mostra come ottenere la generica soluzione mediante combinazione lineare delle soluzioni fondamentali. Esse vengono ricavate assegnando alla coppia di parametri (z,t) i valori $(1,0)$ e $(0,1)$ rispettivamente. Lo spazio $\mathbf{W}$ delle soluzioni può pertanto essere indicato nella maniera seguente

$$\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

8. Consideriamo il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ dato da

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

e sia $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v} \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^2$, di dimensione $k = 1$, generato da $\mathbf{v}$. Il Teorema 5.1 assicura che $\mathbf{W}$ può essere descritto come l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Poiché $\dim \mathbf{W} = k = 1$, in questo caso il sistema associato al sottospazio $\mathbf{W}$ si riduce ad una sola equazione. Questa si ottiene prendendo il generico vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ed imponendo che la caratteristica della matrice A avente come colonne $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sia uguale ad 1. In questo caso la matrice A è quadrata e si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}.$$

Quindi la caratteristica di A è 1 se e solo se $\det(A) = 0$, cioè se e solo se $y - 2x = 0$. Questa rappresenta l'equazione del sottospazio $\mathbf{W}$ generato dal vettore $\mathbf{v}$.

9. Oltre ai sottospazi propri, classificati dal Teorema 5.1, dobbiamo aggiungere i sottospazi impropri di $\mathbb{R}^n$, rappresentati da $\{\mathbf{0}\}$ ed $\mathbb{R}^n$ rispettivamente.

10. **Rette nel piano** Consideriamo una generica retta di $\mathbb{R}^2$. Se questa passa per l'origine essa è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1, e quindi ha una equazione del tipo $ax + by = 0$ (cfr. Esempio 8 a pagina 129 con $-\beta = a$ ed $\alpha = b$). Se $a \neq 0$ possiamo anche scrivere $y = -\frac{b}{a}x$, e, posto $-\frac{b}{a} = m$, abbiamo $y = mx$. Il numero m viene detto *coefficiente angolare* della retta. L'equazione $y = mx$ esprime la relazione algebrica tra le coordinate dei punti $P(x,y)$ appartenenti alla retta passante per l'origine.

   Consideriamo poi una retta r che non passa per l'origine, ed indichiamo con $Q(0,q)$ il punto in cui essa interseca l'asse y. Sia $P(x,y)$ il generico punto di r , e $P'(x'y')$ il punto che si ottiene intersecando la retta per P parallela all'asse y con la retta parallela ad r e passante per l'origine (Fig. 5.3).

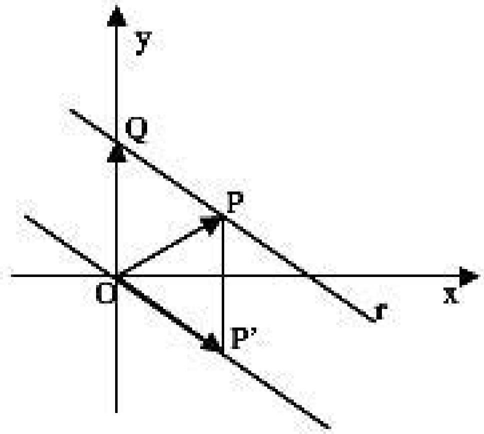


Figura 5.3: rette nel piano.

Applicando la regola del parallelogramma abbiamo

$$[x, y] = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ} = [x', y'] + [0, q] = [x', y' + q],$$

cioè $x = x'$ ed $y = y' + q$. Poiché P' appartiene ad una retta passante per l'origine, deve essere $y' = mx'$, essendo m il coefficiente angolare della retta. Dalle precedenti relazioni otteniamo quindi

$$y = y' + q = mx' + q = mx + q \;\Rightarrow\; y = mx + q, \tag{5.1.4}$$

il che fornisce l'equazione della retta r non passante per l'origine.

11. Il numero q che compare nell'equazione (5.1.4) si dice *ordinata all'origine* della retta.

12. L'equazione (5.1.4) non consente di rappresentare analiticamente le rette parallele all'asse y, le cui equazioni sono del tipo $x = k$. Per rappresentare una qualsiasi retta del piano possiamo utilizzare l'equazione $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ ed a, b non contemporaneamente nulli. □

5.2 DISTANZE ED ANGOLI

Il metodo fondamentale della Geometria Analitica consiste nell'associare ad una figura geometrica una o più relazioni algebriche. Queste rappresentano le condizioni analitiche che devono essere soddisfatte dai punti dello spazio n-dimensionale in cui si lavora, affinché essi appartengano alla figura considerata.

È importante osservare che:

1. Lo stesso ente geometrico, pensato in spazi di dimensione diversa, viene rappresentato da relazioni algebriche diverse.

2. La stessa relazione algebrica, pensata in spazi aventi dimensione diversa, rappresenta enti geometrici diversi.

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo un punto P. Se pensiamo P come ente geometrico di una retta, esso viene rappresentato analiticamente da un solo numero reale. Lo stesso punto P, è invece descritto da $n > 1$ numeri reali in uno spazio di dimensione $n > 1$.

2. La relazione $x > 0$ indica una semiretta, oppure un semipiano, secondo che si lavori sulla retta o nel piano (Fig. 5.4).

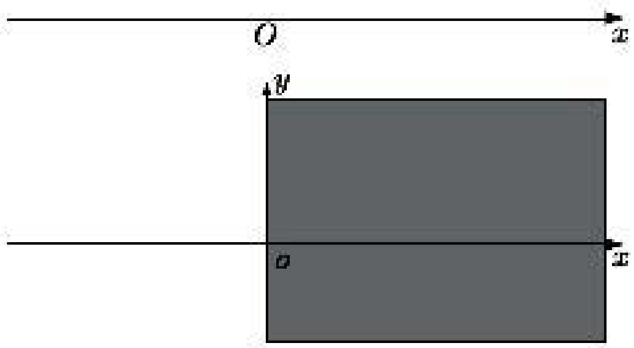


Figura 5.4: la disuguaglianza $x > 0$ sulla retta e nel piano.

3. Nel piano, le relazioni

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0, \end{cases}$$

indicano, rispettivamente, il primo, secondo, terzo e quarto quadrante, in cui il piano viene diviso dagli assi cartesiani.

4. Può succedere che una relazione algebrica tra x ed y corrisponda all'insieme vuoto. Per esempio, in $\mathbb{R}^2$, la relazione $x^2 + y^2 = -1$.

5. Grazie al Teorema 5.1 possiamo avere una conferma del fatto che una stessa equazione (o insieme di equazioni), in spazi diversi, definisce enti geometrici diversi. Per esempio, la relazione algebrica $x = 0$ rappresenta il punto origine in una Geometria Analitica rettilinea (cioè in $\mathbb{R}$). Se invece consideriamo una Geometria Analitica piana (cioè $\mathbb{R}^2$), la stessa relazione $x = 0$ indica l'insieme dei punti (x, y) per i quali la prima coordinata è nulla, cioè una retta (l'asse y). Nello spazio $\mathbb{R}^3$ abbiamo invece un piano (il piano yz), e, più in generale, un *iperpiano* in uno spazio di dimensione qualsiasi. Pertanto, bisogna sempre specificare lo spazio in cui si vuole lavorare prima di tradurre algebricamente un qualsiasi ente geometrico.

6. Consideriamo un punto P. Se pensiamo P come ente geometrico di una retta, esso viene rappresentato analiticamente da un solo numero reale. Lo stesso punto P, è invece descritto da $n > 1$ numeri reali in uno spazio di dimensione $n > 1$. □

Le nozioni principali che consentono di sviluppare la Geometria Analitica sono legate al calcolo della distanza tra due punti e dell'angolo tra due vettori qualsiasi. Vogliamo quindi prendere in considerazione questi concetti. Inizialmente possiamo tralasciare la struttura di spazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$, per fissare maggiormente l'attenzione sugli aspetti analitici del problema. Le nozioni introdotte permettono successivamente la costruzione di importanti operazioni tra vettori geometrici.

5.2.1 Distanza tra due punti

Consideriamo innanzitutto una retta. Come abbiamo accennato nel Paragrafo 5.1, essa viene identificata con lo spazio unidimensionale $\mathbf{R}$, e definita asse x, attraverso il seguente procedimento.

i. Si fissa arbitrariamente una orientazione sulla retta.

ii. Si associa il numero 0 ad un punto O, scelto arbitrariamente sulla retta. Il punto O viene detto *origine*.

iii. Si associa il numero 1 ad un punto U, scelto arbitrariamente sulla retta. La distanza $\overline{OU}$ viene assunta come *unità di misura* sulla retta.

Siano A e B due punti dell'asse x. Allora ad A e B sono associati due numeri reali x_A ed x_B che esprimono, in valore assoluto, la distanza che i due punti hanno dall'origine rispetto all'unità di misura fissata. La lunghezza del segmento AB, indicata anche con $\overline{AB}$, è uguale a $|x_A - x_B|$, e tale numero viene assunto come distanza tra A e B (Fig. 5.5).

Figura 5.5: distanza tra due punti in $\mathbb{R}$: $\overline{AB} = \mathrm{d}(A, B) = |x_A - x_B|$.

Se invece si considera un sistema di riferimento cartesiano nel piano, i punti A e B vengono descritti da una coppia ordinata di numeri reali, cioè $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Se proiettiamo il segmento AB sugli assi x ed y, otteniamo due segmenti $A'B'$ ed $A''B''$, le cui lunghezze sono $|x_A - x_B|$ ed $|y_A - y_B|$ rispettivamente. Mandando da A la parallela ad uno degli assi cartesiani, e da B la parallela all'altro asse, si ottiene un triangolo rettangolo, i cui cateti hanno lunghezze uguali ai segmenti $A'B'$ ed $A''B''$ (Fig. 5.6).

Per il teorema di Pitagora, la distanza tra A e B è data da

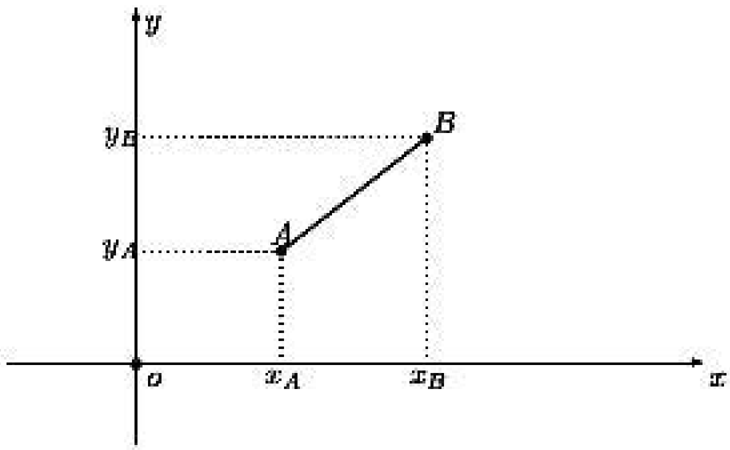


Figura 5.6: distanza tra due punti in $\mathbb{R}^2$.

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \tag{5.2.1}$$

Per estendere questa formula ad $\mathbb{R}^3$ consideriamo ora due punti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, ed il parallelepipedo con i lati paralleli agli assi cartesiani avente il segmento AB come diagonale (Fig. 5.7).

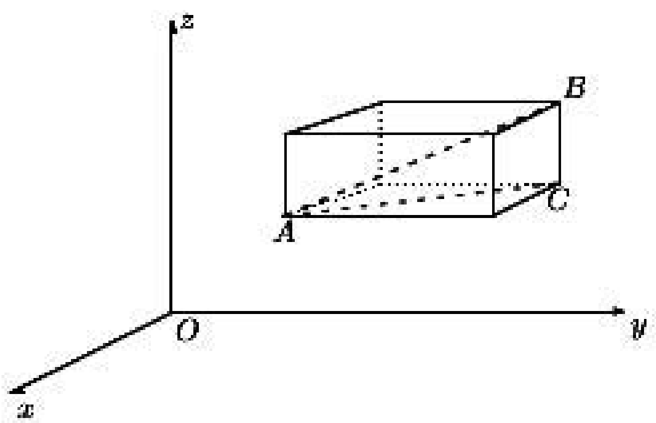


Figura 5.7: distanza tra due punti nello spazio $\mathbb{R}^3$.

Osserviamo che il punto C ha le coordinate x, y uguali a quelle di B (cambia solo la quota). Usando la formula (5.2.1), troviamo allora che il numero $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ esprime la lunghezza della diagonale AC della base del parallelepipedo. Abbiamo quindi

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}\right)^2 + (z_A - z_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}. \quad (5.2.2)$$

La precedente formula deriva ancora dal teorema di Pitagora, applicato questa volta al triangolo rettangolo avente un cateto coincidente con la diagonale di base, ed AB come ipotenusa.

Osservazioni ed esempi.

1. Introdotto in $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, consideriamo il cubo avente le tre coppie di facce opposte sui piani $x = 0, x = 1$, $y = 0, y = 1$ e $z = 0, z = 1$ rispettivamente (Fig. 5.8). Determiniamo la lunghezza del lato e della diagonale

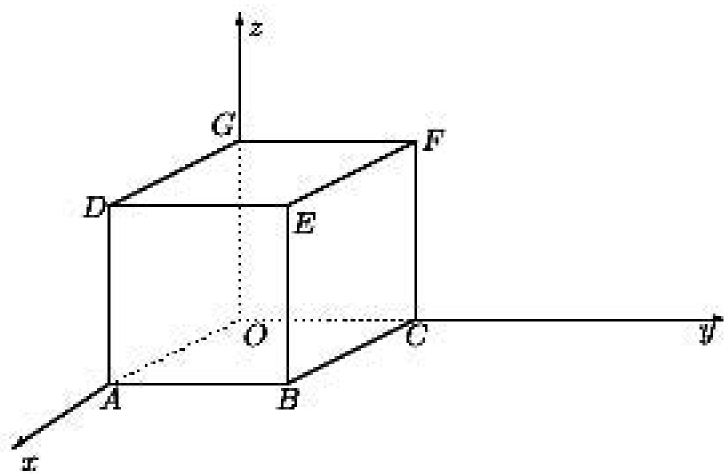


Figura 5.8: il cubo unitario.

Il vertice A appartiene ai piani $x = 1$, $y = 0$ e $z = 0$, per cui ha coordinate $A(1, 0, 0)$. Il vertice F appartiene ai piani $x = 0$, $y = 1$ e $z = 1$, per cui si ha $F(0, 1, 1)$. Di conseguenza, la lunghezza del lato del cubo è $\overline{OA} = 1$, mentre la lunghezza della diagonale AF si calcola con la formula (5.2.2), cioè $\overline{AF} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3}$.

2. <u>**Punto medio.**</u> Siano A e B due punti di $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, ed M il *punto medio* del segmento AB. Se $n = 1$, i punti vengono rappresentati mediante una sola coordinata ascissa, x_A ed x_B rispettivamente. Supponiamo che sia $x_A < x_B$. Se vogliamo determinare la coordinata ascissa del punto medio M del segmento AB, dobbiamo avere $\overline{AM} = \overline{MB}$, per cui

$$x_M - x_A = x_B - x_M \;\Rightarrow\; x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Se $n = 2$, la relazione $\overline{AM} = \overline{MB}$, per il teorema di Talete, si mantiene sulle proiezioni di AM e di MB sugli assi cartesiani, per cui abbiamo $x_M - x_A = x_B - x_M$ ed $y_M - y_A = y_B - y_M$, da cui

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right). \tag{5.2.3}$$

Con lo stesso ragionamento, ricaviamo che per $n = 3$ il punto medio M di un segmento AB ha coordinate

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

La formula si può facilmente estendere ad $\mathbb{R}^n$ per un intero n qualsiasi.

3. **Asse di un segmento.** Introdotto in $\mathbb{R}^2$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, si dice *asse di un segmento* AB il luogo dei punti equidistanti dagli estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ del segmento. I punti $P(x, y)$ che formano l'asse di AB sono tali che $\overline{AP} = \overline{PB}$, cioé $\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$. Togliendo la radice e svolgendo i calcoli abbiamo

$$2x(x_A - x_B) + 2y(y_A - y_B) + x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2 = 0. \tag{5.2.4}$$

Posto $2(x_A - x_B) = a$, $2(y_A - y_B) = b$ ed $x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 + y_A^2 = c$ l'asse assume una equazione del tipo $ax + by + c = 0$, e quindi è una retta. Questa retta passa per il punto medio M del segmento AB, come si verifica facilmente sostituendo nella (5.2.4) ad x e y le coordinate di M.

Sia poi P un punto dell'asse diverso da M. I triangoli APM e MPB sono congruenti poiché hanno i lati ordinatamente uguali (Fig. 5.9)

Pertanto, gli angoli $A\hat{M}P$ e $P\hat{M}B$ sono uguali, ed essendo supplementari sono retti. Di conseguenza, l'asse di un segmento è perpendicolare al segmento nel suo punto medio.

4. **Piano assiale di un segmento.** Possiamo ripetere il ragionamento svolto nell'Osservazione 3 lavorando con un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico introdotto in $\mathbb{R}^3$. In questo caso il luogo dei punti equidistanti da $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, assume la seguente equazione

$$\begin{aligned} 2x(x_A - x_B) + 2y(y_A - y_B) + 2z(z_A - z_B) + x_B^2 &+ \\ + y_B^2 + z_B^2 - x_A^2 - y_A^2 - z_A^2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

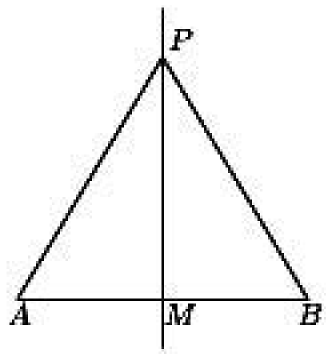


Figura 5.9: i triangoli sono uguali, avendo $\overline{AP} = \overline{PB}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$ e PM in comune.

Posto $2(x_A - x_B) = a$, $2(y_A - y_B) = b$, $2(z_A - z_B) = c$ ed $x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - x_A^2 - y_A^2 - z_A^2 = d$ l'equazione diventa $ax + by + cz + d = 0$. In questo caso il luogo di punti trovato è un piano (cfr. Paragrafo 6.2), e si definisce *piano assiale* del segmento considerato.

5. **Equazione di una circonferenza.** Una *circonferenza* è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto centro della circonferenza. Per scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$, di centro $C(a, b)$ e raggio R, possiamo usare la formula (5.2.1).

   Introdotto nel piano della circonferenza un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, e detto $P(x, y)$ il generico punto della circonferenza, la condizione geometrica che la descrive si traduce in $\mathrm{d}(P, C) = R$. Pertanto, applicando la formula (5.2.1), ed elevando al quadrato abbiamo

$$\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \tag{5.2.6}$$

   che fornisce l'equazione richiesta. Sviluppando le parentesi, l'equazione della circonferenza assume una forma del tipo

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{5.2.7}$$

   essendo $\alpha = -2a, \beta = -2b$ e $\gamma = a^2 + b^2 - R^2$. Al contrario, se $\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma \geq 0$, ogni equazione del tipo (5.2.7) esprime l'equazione di una circonferenza di centro $C(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ e raggio $R = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma}$.

6. **Equazione di una sfera.** Analogamente all'Esempio 5 possiamo scrivere ora l'equazione della *sfera* $\mathcal{S}$, di centro $C(a, b, c)$ e raggio R. Questa è il luogo dei punti

dello spazio che distano R da C, tali cioè che $\mathrm{d}(P,C) = R$. Introdotto in $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, e detto $P(x,y,z)$ il generico punto della sfera, la condizione geometrica che la descrive può essere tradotta analiticamente mediante la formula (5.2.2). Elevando poi al quadrato abbiamo

$$S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{5.2.8}$$

che fornisce l'equazione richiesta. □

5.2.2 Norma e prodotto scalare

Le formule per calcolare la distanza tra due punti $A, B \in \mathbf{R}^n$, $n = 1,2,3$, possono essere riassunte dalla sola formula (5.2.2). In particolare, se consideriamo l'origine O del sistema di riferimento, ed un qualsiasi punto P, la distanza $\overline{OP}$ prende il nome di *norma* del vettore $\overrightarrow{OP}$, e si indica con $\|\overrightarrow{OP}\|$. Abbiamo pertanto

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \overline{OP} = \mathrm{d}(O,P) = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}. \tag{5.2.9}$$

La definizione si può estendere a vettori $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $n > 3$, per i quali la norma risulta quindi

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{5.2.10}$$

In generale $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, e $\|\mathbf{x}\| = 0$ se e solo se $\mathbf{x}$ è il vettore nullo. Inoltre $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$ per ogni numero reale λ.

Se consideriamo la formula (5.2.9) e sfruttiamo la regola del parallelogramma, notiamo poi che la distanza tra due punti $A, B \in \mathbb{R}^3$ può essere interpretata come la norma del vettore differenza $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (Fig.5.10).

In analogia, siamo spinti a definire la *distanza euclidea* tra due punti $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ di $\mathbb{R}^n$ nella maniera seguente

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{5.2.11}$$

Si verifica facilmente che questa definizione fornisce una "buona" estensione del concetto di distanza, nel senso che ne possiede le tre proprietà tipiche, cioè

$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ e $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (proprietà di non negatività).
$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ (proprietà di simmetria).
$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{z})$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare).

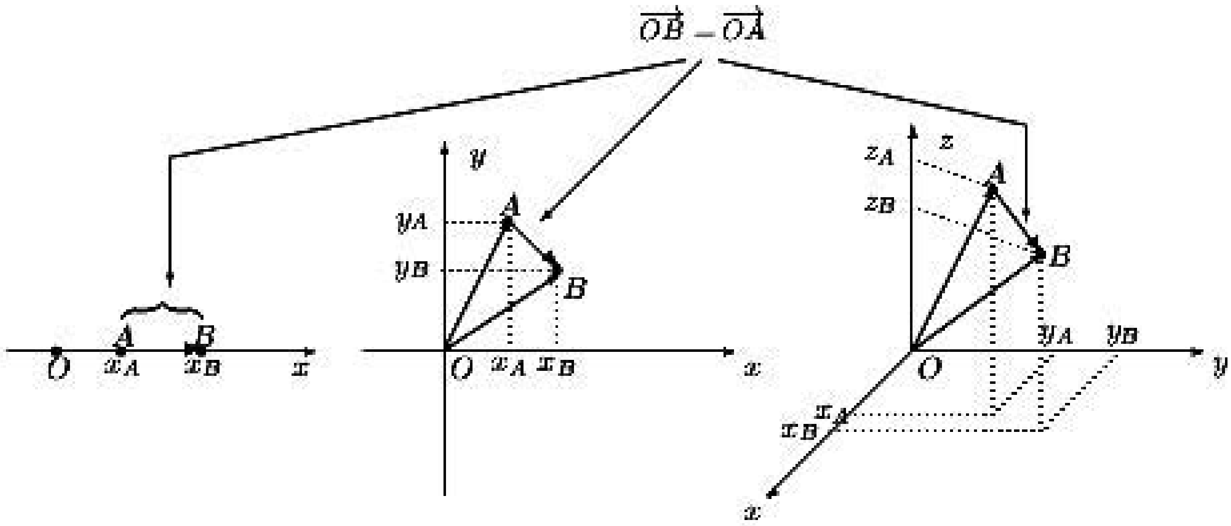


Figura 5.10: distanza tra due punti.

Prodotto Scalare

Consideriamo, in $\mathbb{R}^3$, due vettori geometrici $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e sia α l'angolo tra essi compreso. Il *prodotto scalare*, tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è il numero

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos\alpha. \tag{5.2.12}$$

Proprietà del prodotto scalare

Il prodotto scalare gode di alcune importanti proprietà.

• **Distributività del prodotto scalare.** Dati tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, abbiamo sempre

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle,$$

cioè il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma di vettori geometrici.

•**Rappresentazione tramite le componenti.** Rappresentando i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto alla base canonica $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si può scrivere $\mathbf{v} = x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}$, e $\mathbf{w} = x_w\mathbf{i} + y_w\mathbf{j} + z_w\mathbf{k}$. Sfruttando la distributività del prodotto scalare otteniamo

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle (x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}), (x_w\mathbf{i} + y_w\mathbf{j} + z_w\mathbf{k}) \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= x_v x_w \langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle + x_v y_w \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle + x_v z_w \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle + \\ &+ y_v x_w \langle \mathbf{j}, \mathbf{i} \rangle + y_v y_w \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle + y_v z_w \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle + \\ &+ z_v x_w \langle \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle + z_v y_w \langle \mathbf{k}, \mathbf{j} \rangle + z_v z_w \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle. \end{aligned}$$

Per definizione, il prodotto scalare di un versore con se stesso è uguale ad 1, mentre il prodotto scalare tra due vettori ortogonali è nullo. Di conseguenza abbiamo

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x_v x_w + y_v y_w + z_v z_w, \tag{5.2.13}$$

essendo x_v, y_v, z_v ed x_w, y_w, z_w le componenti dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispettivamente. La formula (5.2.13) esprime in forma analitica il prodotto scalare dei vettori considerati.

• **Estensione ad $\mathbb{R}^n$.** La nozione di prodotto scalare si può estendere ad $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$, definendo il prodotto tra due n-ple distinte $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ ed $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ mediante la formula seguente, che generalizza la (5.2.13)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{5.2.14}$$

Questa estensione del prodotto scalare conserva la proprietà distributivo rispetto alla somma, cioè, dati $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, risulta $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$.

Osservazioni ed esempi.

1. Oltre a quella euclidea, si potrebbero considerare anche altri tipi di distanza. Si ha una distanza ogni volta che si considera una funzione $\mathrm{d} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dotata delle tre proprietà descritte.

2. Per $n = 1, 2, 3$ la norma di $\overrightarrow{OP}$ viene anche detta *modulo del vettore* $\overrightarrow{OP}$.

3. La norma di un vettore estende ad $\mathbb{R}^n$ il concetto di lunghezza. Se la norma è uguale ad 1 il vettore prende ancora il nome di *versore*.

4. Si noti che l'operazione descritta dalla formula (5.2.14) coincide con il prodotto righe per colonne tra il vettore $\mathbf{x}$ ed il vettore trasposto di $\mathbf{y}$, cioè $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}\mathbf{y}^t$.

5. **Vettori ortogonali**. Se il prodotto scalare di due vettori di $\mathbb{R}^n$ è nullo, i due vettori si dicono *ortogonali*. Per esempio, consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i due vettori $\mathbf{x} = [1, 2, -3]$ ed $\mathbf{y} = [3, 6, 5]$. Il loro prodotto scalare è

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 3 + 12 - 15 = 0.$$

I due vettori sono quindi ortogonali.

6. Se due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ appartengono al piano xy, allora $z_v = z_w = 0$, e la formula (5.2.13) diventa $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x_v x_w + y_v y_w$. In particolare, se $x_v x_w \neq 0$, abbiamo

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = x_v x_w + y_v y_w = x_v x_w (1 + m_v m_w), \tag{5.2.15}$$

essendo $m_v = \frac{y_v}{x_v}$ ed $m_w = \frac{y_w}{x_w}$ i coefficienti angolari delle rette descritte dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ considerati.

Si noti che la condizione di ortogonalità tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ implica uno dei seguenti casi

- $x_v = 0\,(x_w = 0)$. In tal caso $y_w = 0\,(y_v = 0)$, ed i due vettori appartengono agli assi cartesiani.
- $x_v x_w \neq 0$. Dalla formula (5.2.15) abbiamo $1 + m_v m_w = 0$ (si veda anche l' Osservazione (2) a pagina 172).

7. Un insieme di vettori si dice *sistema ortonormale* se ogni coppia di vettori dell'insieme è ortogonale, ed ogni vettore ha norma unitaria.

8. Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, allora $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ si dicono *sottospazi ortogonali*. □

5.2.3 Disuguaglianze notevoli

Consideriamo due vettori geometrici $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Esiste una proprietà importante che lega prodotto scalare e norma.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \tag{5.2.16}$$

-*Dimostrazione.* Per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ la disuguaglianza è ovviamente verificata. Supponiamo quindi che siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Preso un qualsiasi numero reale α, abbiamo

$$0 \leq \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \alpha^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle =$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \alpha^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Pertanto, il trinomio $\|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \alpha^2 \|\mathbf{y}\|^2$ è non negativo per ogni α reale.
Come è noto, dato un trinomio di secondo grado in una indeterminata reale α, del tipo $A\alpha^2 + B\alpha + C$, se $A\alpha^2 + B\alpha + C \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, allora deve essere $\Delta \leq 0$, essendo $\Delta = B^2 - 4AC$ il discriminante associato. Applicando questa proprietà al trinomio in questione abbiamo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \leq 0$, e quindi $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$. ■

Come è noto, in ogni triangolo la lunghezza di un lato non è mai superiore alla somma delle lunghezze degli altri due. Possiamo esprimere questa proprietà in termini vettoriali.

Disuguaglianza triangolare.

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \tag{5.2.17}$$

essendo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ i vettori associati a due lati qualsiasi del triangolo (Fig. 5.11).

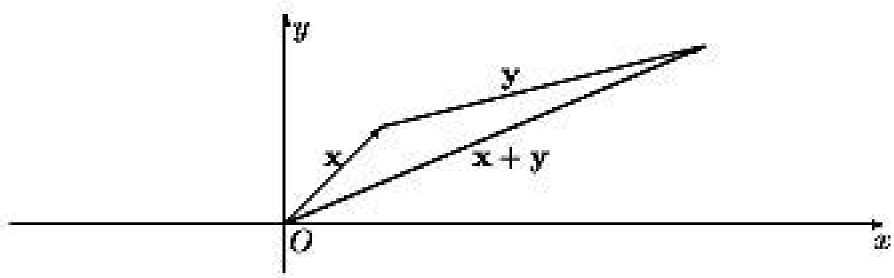


Figura 5.11: disuguaglianza triangolare.

-Dimostrazione. Il risultato si può ottenere sfruttando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle = \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| + \\
&+ \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

■

Osservazioni ed esempi.

1. Supponiamo che $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ siano due vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente dipendenti. Abbiamo allora $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \mathbf{0}$ per certi numeri reali λ, μ non entrambi nulli. Se almeno uno dei due vettori è nullo, allora nella formula (5.2.16) vale l'uguaglianza. Se $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ sono entrambi non nulli, allora sia λ che μ sono non nulli, e possiamo scrivere $\mathbf{x} = -\frac{\mu}{\lambda}\mathbf{y}$. Sostituendo nella formula (5.2.16) notiamo che anche in questo caso si ha l'uguaglianza. Al contrario, se nella (5.2.16) vale l'uguaglianza, i due vettori devono essere linearmente dipendenti.

2. Supponiamo che $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ siano due vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali tra loro. Allora $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, e quindi

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Questo estende ad $\mathbb{R}^n$ il *Teorema di Pitagora* □

5.2.4 Angolo tra due vettori

Nel Paragrafo 5.2.2 abbiamo esteso ad $\mathbf{R}^n$, $n > 3$, la nozione di distanza precedentemente introdotta. Possiamo procedere ad una analoga estensione in relazione al concetto di angolo tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ricaviamo infatti che

$$\frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq 1, \quad \text{e quindi} \quad -1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Pertanto, il rapporto tra $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ può essere identificato con il coseno di un angolo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, cioè

$$\cos\theta := \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}. \tag{5.2.18}$$

Questo consente di avere in $\mathbf{R}^n$, per ogni n, una nozione di *angolo tra due vettori*, e quindi tra le due rette descritte da tali vettori.

Osservazioni ed esempi.

1. Nell'Osservazione 5 a pagina 139 abbiamo definito la nozione di ortogonalità tra due vettori di $\mathbb{R}^n$. Questa equivale a dire che l'angolo definito dalla formula (5.2.18) è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

2. Consideriamo i vettori di $\mathbf{R}^5$ dati da $\mathbf{x} = [0, 0, 2, 2, 0]$ ed $\mathbf{y} = [\sqrt{2}, 1, 1, 2, 1]$. Abbiamo allora $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 6$, $\|\mathbf{x}\| = 2\sqrt{2}$ e $\|\mathbf{y}\| = 3$, da cui

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e quindi $\theta = \frac{\pi}{4}$.

□

5.2.5 Proiezione di un vettore su un sottospazio

Sia $\mathbf{W}^k$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ avente dimensione k. Indichiamo con $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ una sua base, e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un vettore tale che $\mathbf{v} \notin \mathbf{W}^k$.
Vogliamo determinare le proiezioni del vettore $\mathbf{v}$ sullo spazio vettoriale $\mathbf{W}^k$ e sullo spazio ad esso ortogonale, isomorfo ad $\mathbb{R}^{n-k}$. Se $\hat{\mathbf{v}}$ è la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{W}^k$, allora $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ è ortogonale a $\mathbf{W}^k$, per la regola del parallelogramma.

Consideriamo la matrice $A = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_k]$ le cui colonne sono formate dai vettori della base di $\mathbf{W}^k$. Essa è una matrice di tipo (n, k). Poiché $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ è ortogonale a $\mathbf{W}^k$, abbiamo

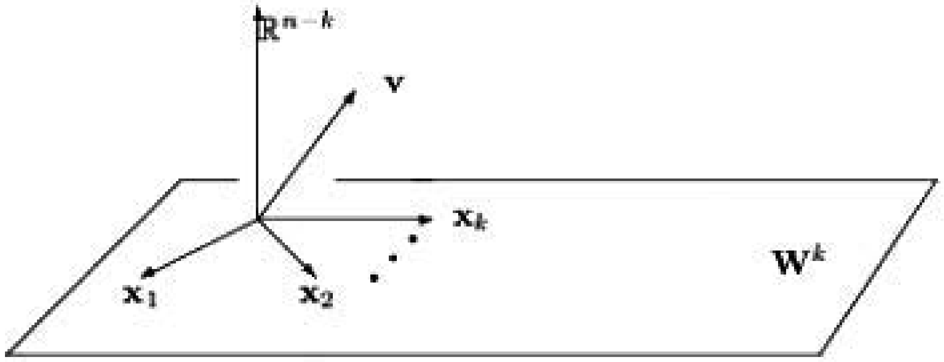


Figura 5.12: base del sottospazio $\mathbf{W}^k$ di $\mathbb{R}^n$.

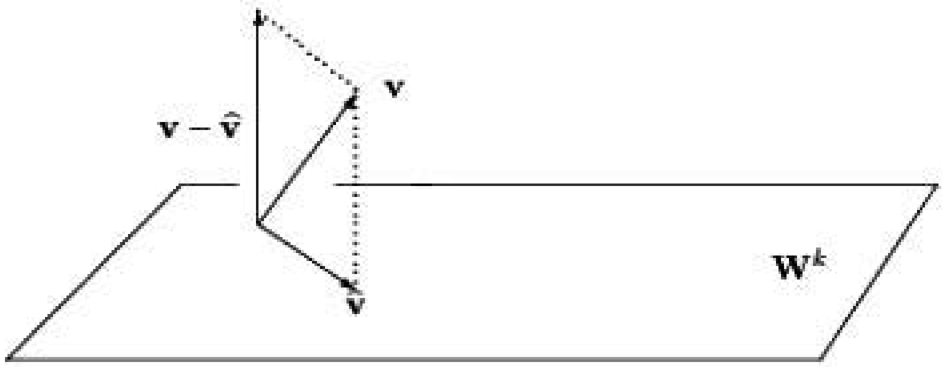


Figura 5.13: proiezione di un vettore su un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

$$A^t_{(k,n)}(\mathbf{v}-\widehat{\mathbf{v}})_{(n,1)} = \mathbf{0}_{(k,1)}$$

e quindi $A^t\mathbf{v} = A^t\widehat{\mathbf{v}}$. Poiché $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}^k$, esistono $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ tali che $\widehat{\mathbf{v}} = c_1\mathbf{x}_1 + ... + c_k\mathbf{x}_k = A\mathbf{c}$, essendo $\mathbf{c} = [c_1, ..., c_k]^t$. Quindi abbiamo $A^t\mathbf{v} = A^tA\mathbf{c}$, da cui si ricava $\mathbf{c} = (A^tA)^{-1}A^t\mathbf{v} = R\mathbf{v}$. La matrice $R = (A^tA)^{-1}A^t$ si dice *matrice pseudoinversa di Moore-Penrose* di A. Dalla precedente uguaglianza otteniamo

$$\widehat{\mathbf{v}} = A\mathbf{c} = A(A^tA)^{-1}A^t\mathbf{v} = AR\mathbf{v}, \tag{5.2.19}$$

Quindi $P_A = AR$ è la matrice che, applicata a $\mathbf{v}$, fornisce la sua proiezione su $\mathbf{W}^k$, cioè la *matrice di proiezione* sul sottospazio $\mathbf{W}^k$ generato dalle colonne di A.
Per determinare la matrice $P_A^\perp$, cioè la matrice di proiezione sul sottospazio ortogonale a $\mathbf{W}^k$, basta osservare che deve essere $P_A^\perp\mathbf{v} = \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}$, per cui

$$P_A^\perp\mathbf{v} = \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - AR\mathbf{v} = (I - AR)\mathbf{v}, \tag{5.2.20}$$

essendo I la matrice identica.

Osservazioni ed esempi.

1. La matrice R esiste sicuramente. Questo deriva dal fatto che A ha rango massimo, essendo le sue colonne formate da vettori di una base, e quindi la matrice A^tA è non singolare (cfr. Esercizio 9.5.4).

2. Consideriamo il caso particolare in cui il sottospazio $\mathbf{W}$ sia una retta.

   In questo caso la matrice A di partenza ha una sola colonna, corrispondente alle componenti di un qualsiasi vettore che descrive la retta $\mathbf{W}$.

   Per esempio, consideriamo in $\mathbb{R}^4$ la retta corrispondente al primo asse cartesiano.

   Ovviamente la proiezione di $\mathbf{v}$ su questa retta fornisce il vettore che si ottiene moltiplicando il primo versore della base canonica di $\mathbb{R}^4$ per la prima componente di $\mathbf{v}$. Ritroviamo questo risultato usando il metodo generale.

   La matrice A risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Abbiamo quindi

$$A^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]$$

   Quindi $(A^tA)^{-1} = [1]$, da cui $R = A^t$, e quindi $P_A = AR = A \cdot A^t$.

$$P_A = AR = A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_A\mathbf{v} = P_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. **Lunghezza di una proiezione.** Abbiamo visto come costruire la proiezione di un vettore su un sottospazio. Il procedimento può essere applicato in particolare al caso in cui il sottospazio sia unidimensionale, cioè una retta passante per l'origine. Spesso tuttavia non interessa conoscere esattamente la proiezione, ma solamente la sua lunghezza. Dati due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, possiamo considerare la *lunghezza della proiezione* $proj_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ di $\mathbf{a}$ sulla retta contenente $\mathbf{b}$. Essa è data da

$$||proj_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})|| = \|\mathbf{a}\cos\theta\| = \|\mathbf{a}\||\cos\theta| = \|\mathbf{a}\|\frac{|\langle\mathbf{a},\hat{\mathbf{b}}\rangle|}{\|\mathbf{a}\|} = |\langle\mathbf{a},\hat{\mathbf{b}}\rangle|, \tag{5.2.21}$$

essendo θ l'angolo tra i due vettori dati, e $\hat{\mathbf{b}}$ il versore associato al vettore $\mathbf{b}$. □

5.3 ENDOMORFISMI SIMMETRICI

Riferendoci all'Osservazione 2 di pagina 118, vogliamo ora studiare più dettagliatamente il problema della diagonalizzazione di una simmetria assiale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, andando innanzitutto a vedere come sono fatte la matrici $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ associate a tali endomorfismi. Consideriamo il vettore $\mathbf{v} = [\alpha, \beta]^t$, e sia $f(\mathbf{v}) = [\alpha', \beta']^t$. Se poniamo

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

abbiamo allora

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}.$$

Possiamo determinare α' e β' in funzione di α e β osservando innanzitutto, che $\mathbf{v} - f(\mathbf{v})$ deve essere parallelo ad $\mathbf{r}^{\perp}$.

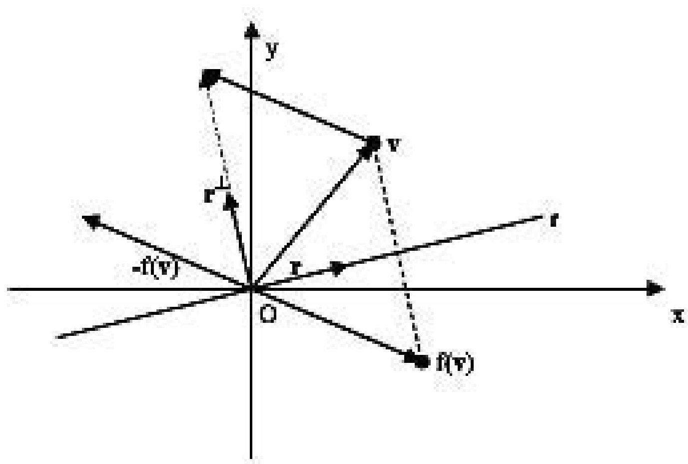


Figura 5.14: rappresentazione qualitativa dell'azione di una simmetria assiale in $\mathbb{R}^2$.

Pertanto si ha

$$\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = -\frac{1}{m}.$$

Inoltre il punto medio del segmento che congiunge gli estremi di $\mathbf{v}$ e di $f(\mathbf{v})$ appartiene ad r, il che si traduce analiticamente sostituendo, nell'equazione di r, $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ al posto di x e $\frac{\beta + \beta'}{2}$ al posto di y. Abbiamo pertanto

$$\frac{\beta + \beta'}{2} = m\frac{\alpha + \alpha'}{2}.$$

Otteniamo quindi il sistema di due equazioni, nelle due incognite α' e β', dato da

$$\begin{cases} \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = -\dfrac{1}{m} \\[2ex] \dfrac{\beta + \beta'}{2} = m\dfrac{\alpha + \alpha'}{2}. \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{1-m^2}{1+m^2}\alpha + \frac{2m}{1+m^2}\beta \\[2ex] \beta' = \frac{2m}{1+m^2}\alpha - \frac{1-m^2}{1+m^2}\beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\[2ex] \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix}. \tag{5.3.1}$$

In particolare ricaviamo che la simmetria rispetto ad una qualsiasi retta passante per l'origine è rappresentata da una matrice simmetrica $(2, 2)$, cioè una matrice A tale che $A^t = A$. Come conseguenza si pone in maniera naturale il seguente problema. Sia A una generica matrice simmetrica di ordine 2, che non sia del tipo (5.3.1). Allora A non rappresenta alcuna simmetria assiale rispetto a rette passanti per l'origine. Possiamo però ancora dire che l'endomorfismo associato a questa matrice è diagonalizzabile?
La risposta è affermativa, come precisato nel seguente teorema.

Teorema 5.2. *Ogni matrice simmetrica A di tipo $(2, 2)$ ha autovalori tutti reali, ed è sempre diagonalizzabile.*

-*Dimostrazione.* Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico associato ad una generica matrice simmetrica A di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_A(\lambda) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica $\chi_A(\lambda) = 0$ otteniamo le seguenti soluzioni

$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}. \tag{5.3.2}$$

Osserviamo che, per ogni scelta di a, b, c, abbiamo $\Delta \geq 0$, e quindi le radici di $\chi_A(\lambda) = 0$ sono reali. Se $a \neq c$, o $b \neq 0$, gli autovalori sono distinti e quindi A (o l'endomorfismo da essa rappresentato) è diagonalizzabile. Se $a = c$ e $b = 0$ abbiamo l'autovalore doppio $\lambda = c$. Ma in questo caso risulta

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A - cI = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, la molteplicità geometrica di $\lambda = c$, risulta $n - \mathrm{rk}(A - cI) = 2 - 0 = 2$, e coincide con la molteplicità algebrica. Quindi anche in questo caso A è diagonalizzabile. □

Osservazioni ed esempi.

1. Supponiamo che una retta r formi l'angolo γ con l'asse x. Allora $m = \tan\gamma$, da cui si ha

$$\begin{cases} \frac{2m}{1+m^2} = \sin 2\gamma \\ \frac{1-m^2}{1+m^2} = \cos 2\gamma. \end{cases}$$

   Quindi possiamo anche scrivere la (5.3.1) nella maniera seguente

$$\begin{cases} \alpha' = (\cos 2\gamma)\alpha + (\sin 2\gamma)\beta \\ \beta' = (\sin 2\gamma)\alpha - (\cos 2\gamma)\beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{bmatrix}. \qquad (5.3.3)$$

2. Il caso $a = c$ e $b = 0$, descritto nella dimostrazione del Teorema 5.2 rappresenta una situazione degenere, nella quale ogni vettore è un autovettore.

3. Determiniamo l'equazione della simmetria piana rispetto alla retta $r : y = -2x$. In questo caso $m = -2$, e quindi

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

   Le equazioni della simmetria cercata sono allora date da

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y. \end{cases}$$

4. Un endomorfismo che, rispetto alla base canonica, viene rappresentato da una matrice simmetrica prende il nome di *endomorfismo simmetrico*. Come abbiamo visto, le simmetrie assiali del piano $\mathbb{R}^2$ sono esempi di endomorfismi simmetrici. ■

5.3.1 Il Teorema Spettrale nel piano

Abbiamo visto che gli autovalori associati alla simmetria rispetto ad una retta r passante per l'origine sono sempre $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. Inoltre, i rispettivi autospazi sono rappresentati da r e da $r^\perp$. Possiamo allora chiederci cosa possiamo dire relativamente agli autospazi associati ad un generico endomorfismo simmetrico (cfr. Osservazione 4 precedente). Per studiare il problema è utile sfruttare la nozione di prodotto scalare precedentemente introdotta.
In particolare, il seguente teorema, noto come *Teorema Spettrale*, mette in evidenza l'importanza della nozione di ortogonalità tra due sottospazi.

Teorema 5.3. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorfismo simmetrico. Allora tutti gli autovalori di f sono reali, f è diagonalizzabile, e scompone $\mathbb{R}^2$ come somma diretta di autospazi ortogonali*

$$\mathbb{R}^2 = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}.$$

-*Dimostrazione.* Poiché f è un endomorfismo simmetrico, esso è rappresentato da una matrice reale simmetrica A, di tipo $(2, 2)$. Sia essa data da

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Per il Teorema 5.2, f ha spettro reale ed è diagonalizzabile. Per il Teorema 4.31, f scompone $\mathbb{R}^2$ come somma diretta di autospazi. Resta da dimostrare che gli autospazi sono tra loro ortogonali. Se $b = 0$ la matrice A è già diagonale, e gli autospazi sono generati dai vettori $[1, 0]^t$ e $[0, 1]^t$, tra loro ortogonali. Se $b \neq 0$, siano λ_1, λ_2 gli autovalori di A (cfr. Formula (5.3.2)). Per λ_1 abbiamo

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_1 & b \\ b & c - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ (a - \lambda_1)x + by = 0\ \Rightarrow\ y = \tfrac{\lambda_1 - a}{b} x$$

Quindi, l'autospazio associato a λ_1 è dato da

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - a}{b} \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

ed una sua base, per esempio, è data da

$$\mathcal{B}_{\lambda_1} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{bmatrix} \right\}.$$

Procedendo in maniera analoga troviamo che l'autospazio associato a λ_2 ammette una base data da

$$\mathcal{B}_{\lambda_2} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{bmatrix} \right\}.$$

Indichiamo con $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ i vettori che formano, rispettivamente, la base $\mathcal{B}_{\lambda_1}$ e $\mathcal{B}_{\lambda_2}$. Abbiamo allora

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = b^2 + (\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a) = a^2 + b^2 + \lambda_1\lambda_2 - a(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Dai teoremi 4.23 ed 4.24 otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a + c \\ \lambda_1\lambda_2 &= ac - b^2, \end{aligned}$$

e quindi $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = a^2 + b^2 + ac - b^2 - a(a + c) = 0$. Pertanto $\mathbf{v}_1$ è ortogonale a $\mathbf{v}_2$. ■

Il Teorema 5.3 mette in evidenza che, come già visto per le simmetrie rispetto a rette passanti per l'origine, anche gli endomorfismi rappresentati da una generica matrice simmetrica $(2, 2)$ ammettono autospazi ortogonali. L'interpretazione geometrica di questi endomorfismi è pertanto identica a quella delle simmetrie assiali.

Matrici ortogonali e matrici simmetriche

Dal Teorema 5.3 si deduce in particolare che ogni matrice simmetrica A, di tipo $(2, 2)$, può essere diagonalizzata mediante una matrice di passaggio P le cui due colonne sono ortogonali tra loro. Tra le varie scelte di P possiamo selezionare quella avente per colonne vettori di lunghezza unitaria, cioè *versori*. Per fare questo basta dividere ogni colonna per la lunghezza del vettore corrispondente. Si ottiene così una matrice di passaggio M, le cui colonne, oltre ad essere ortogonali tra loro, hanno anche lunghezza unitaria. Una tale matrice si dice *ortogonale*. Possiamo allora esprimere il Teorema 5.3 dicendo che una matrice simmetrica A di tipo $(2, 2)$ è sempre diagonalizzabile con una matrice di passaggio ortogonale, cioè che A è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale.

Sia ora A una matrice simmetrica di tipo $(2, 2)$ data da

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Siano $\mathbf{v} = [v_1, v_2]^t$ e $\mathbf{w} = [w_1, w_2]^t$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. Abbiamo allora

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1 + bv_2 \\ bv_1 + cv_2 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw_1 + bw_2 \\ bw_1 + cw_2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (av_1 + bv_2)w_1 + (bv_1 + cv_2)w_2 = \\ &= v_1(aw_1 + bw_2) + v_2(bw_1 + cw_2) = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Sfruttando la formula (5.3.4) possiamo dimostrare che gli autovettori di una matrice simmetrica A di tipo $(2, 2)$ sono ortogonali tra loro, in maniera diversa da quella considerata nella dimostrazione del Teorema 5.3. Siano infatti λ_1, λ_2 gli autovalori distinti di A, e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i due autovettori ad essi rispettivamente associati. Abbiamo allora

$$\lambda_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_2\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle.$$

Pertanto $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, ed essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ricaviamo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.

5.3.2 Classificazione delle matrici ortogonali di ordine 2

Cerchiamo di classificare le matrici ortogonali di ordine 2 partendo dal fatto che le loro due colonne devono essere ortogonali tra loro e di norma unitaria (cfr. Osservazione 5.3.1 a pagina 149). Indichiamo con $\mathbf{v}_1 = [x_1, y_1]^t$ il versore le cui componenti costituiscono la prima colonna, e con $\mathbf{v}_2 = [x_2, y_2]^t$ quello le cui componenti costituiscono la seconda colonna. Se $\mathbf{v}_1$ forma un angolo φ (percorso in senso antiorario) con l'asse x, deve essere

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{v}_1\| \cos\varphi = \cos\varphi, \\ y_1 &= \|\mathbf{v}_1\| \sin\varphi = \sin\varphi. \end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{v}_2$ è ortogonale a $\mathbf{v}_1$, l'angolo formato da $\mathbf{v}_2$ con l'asse x è uguale a $\frac{\pi}{2} + \varphi$, oppure $\frac{3}{2}\pi + \varphi$. Risulta pertanto

$$\begin{aligned} x_2 &= \|\mathbf{v}_2\| \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi, \\ y_2 &= \|\mathbf{v}_2\| \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi, \end{aligned}$$

nel primo caso, e

$$\begin{aligned} x_2 &= \|\mathbf{v}_2\| \cos\left(\tfrac{3}{2}\pi + \varphi\right) = \sin\varphi, \\ y_2 &= \|\mathbf{v}_2\| \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi + \varphi\right) = -\cos\varphi, \end{aligned}$$

nel secondo caso. Le corrispondenti matrici risultano

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \tag{5.3.5}$$

$$M_{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}, \tag{5.3.6}$$

con φ variabile in $[0, 2\pi]$. Esse hanno determinante uguale ad 1 e -1 rispettivamente. Ciò fornisce una classificazione completa delle matrici ortogonali del secondo ordine.

Una delle principali proprietà delle matrici ortogonali è data dal fatto che $M^{-1} = M^t$, come si può facilmente verificare direttamente. In particolare, se A è una matrice simmetrica, il fatto che essa sia ortogonalmente simile ad una matrice diagonale D si esprime attraverso la formula $M^t A M = D$, molto utile negli esercizi.

Significato geometrico

Consideriamo una matrice ortogonale di tipo (5.3.5), il cui determinante è uguale ad 1, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata da $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = M_1$ rispetto alla base canonica. Abbiamo allora

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\left\| f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right\| = \sqrt{\left\langle f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)^t, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right\rangle} =$$
$$= \sqrt{(x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|.$$

L'applicazione lineare f conserva pertanto le lunghezze dei vettori. Essa rappresenta una rotazione (in senso antiorario) intorno all'origine.

Consideriamo ora una matrice di tipo (5.3.6), avente determinante uguale a -1, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare avente $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = M_{-1}$ come matrice associata rispetto alla base canonica. Confrontando con la matrice (5.3.3) deduciamo che f rappresenta la simmetria assiale rispetto alla retta che passa per l'origine e che forma un angolo uguale a $\frac{\varphi}{2}$ con l'asse x.

Osservazioni ed esempi.

1. Le matrici ortogonali con determinante uguale ad 1 vengono anche dette *matrici ortogonali speciali* . Il prodotto di due tali matrici è ancora una matrice ortogonale speciale, ma possiamo ottenere una matrice ortogonale speciale anche moltiplicando due matrici di tipo (5.3.6). Geometricamente questo corrisponde a costruire una rotazione mediante prodotto di simmetrie assiali rispetto a due rette secanti.

2. Determiniamo la matrice corrispondente al cambio di base descritto da una rotazione oraria di $\frac{\pi}{2}$ nello spazio vettoriale canonico $\mathbb{R}^2$.

   Se applichiamo la rotazione oraria di $\frac{\pi}{2}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, otteniamo la base formata da $[0,-1]^t$ ed $[1,0]^t$

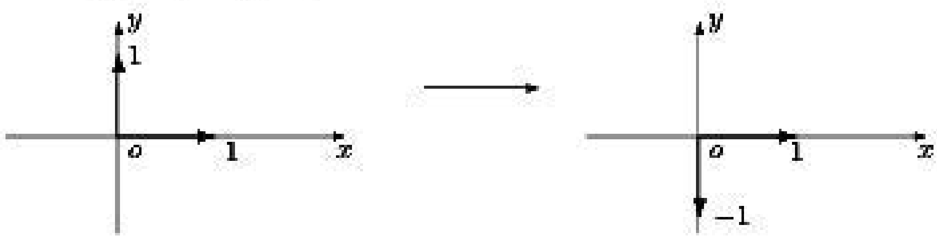


Figura 5.15: rotazione oraria della base canonica.

   Assumiamo quindi

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

   Dalla formula (4.2.7) si ricava che la matrice richiesta risulta

$$[\mathcal{B}_2]^{-1}[\mathcal{B}_1] = [\mathcal{B}_2]^{-1}I = [\mathcal{B}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questa coincide con la matrice (5.3.5) per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, che, come si è visto, esprime una rotazione antioraria intorno all'origine. Ciò mette in evidenza che una rotazione in senso orario di una base, secondo un certo angolo φ, si traduce nella rotazione in senso antiorario, dello stesso angolo φ, sui singoli vettori del piano.

Per esempio, se applichiamo la matrice di cambio base precedentemente ottenuta al vettore $\mathbf{v} = [-2, 4]^t$, abbiamo (Fig. 5.16)

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

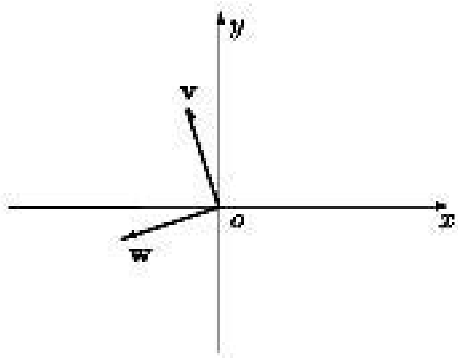


Figura 5.16: rotazione antioraria di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$.

Il vettore $\mathbf{w}$ viene in effetti ottenuto applicando al vettore $\mathbf{v}$ attraverso una rotazione di angolo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in senso antiorario. □

5.3.3 Endomorfismi simmetrici in dimensione superiore

Con il Teorema **5.3** abbiamo una completa descrizione del comportamento di un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dal punto di vista della diagonalizzazione. Ci possiamo ora chiedere che cosa succede se saliamo con la dimensione, cioè se consideriamo endomorfismi simmetrici $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Essi sono rappresentati, rispetto alla base canonica, o, più in generale, rispetto ad una *base ortonormale* (cfr. pag. 153), da matrici simmetriche di ordine n. Senza entrare nei dettagli della trattazione, possiamo dire che tutti i risultati ottenuti per $n = 2$ si estendono in generale. Vediamo brevemente le questioni principali.

Generalizzazione delle matrici ortogonali.

Nell'insieme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n, diciamo che una matrice M è una *matrice ortogonale*, se vale una delle seguenti proprietà:

- $MM^t = I_n$,
- $M^tM = I_n$.

In particolare, l'inversa di una matrice ortogonale coincide con la sua trasposta.

Generalizzando la classificazione ottenuta per $n = 2$ si può dimostrare che una matrice di tipo (n, n) è ortogonale se e solo se le righe e le colonne formano un sistema di vettori ortonormale, cioè sono a due a due ortogonali ed hanno norma unitaria. Le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descritte da matrici ortogonali vengono dette *trasformazioni ortogonali*. In tal caso, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, possiamo scrivere $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$, e quindi abbiamo

$$\|f(\mathbf{x})\| = (M\mathbf{x})^t \cdot M\mathbf{x} = \mathbf{x}^t M^t \cdot M\mathbf{x} = \mathbf{x}^t I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|.$$

Pertanto, le applicazioni lineari aventi matrice associata ortogonale conservano sempre la norma. Di conseguenza possiamo dare a queste applicazioni lineari significati geometrici analoghi a quelli visti per $n = 2$, anche se le proprietà coinvolte sono più delicate da trattare.

Osservazioni ed esempi.

1. Per avere una matrice ortogonale non è necessario richiedere contemporaneamente che le righe e le colonne formino un sistema ortonormale. Una condizione segue dall'altra.

2. Per il Teorema di Binet abbiamo

$$\det(MM^t) = \det M \det M^t = (\det M)^2 = 1. \Rightarrow \det M = \pm 1.$$

   Quindi, le matrici ortogonali si dividono in due insiemi, quelle di determinante $+1$ e quelle di determinante -1. Questi insiemi vengono indicati, rispettivamente, con $\boldsymbol{O}_n^+(\mathbb{R})$ e $\boldsymbol{O}_n^-(\mathbb{R})$, mentre la loro unione, ovvero l'insieme di tutte le matrici ortogonali di un dato ordine, è $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$.

3. Si noti che matrici con determinante ± 1 non è detto che siano ortogonali.

4. Le matrici appartenenti ad $\boldsymbol{O}_n^+(\mathbb{R})$ vengono dette *matrici ortogonali speciali*, come nel caso $n = 2$. □

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Sia $B = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$. Sostituendo eventualmente $\mathbf{v}_i$ con $\mathbf{v}'_i = \dfrac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$ per ogni $i = 1, ..., n$ è sempre possibile pensare che la base sia formata da versori. Non è detto però che questi formino un sistema ortonormale. Infatti, presi due qualsiasi vettori $v_i, v_j \in B$, il loro prodotto scalare è in generale diverso da zero. Tuttavia, esiste un procedimento canonico che, a partire dai vettori di B, consente di costruire una *base ortonormale*, costituita cioè da vettori di norma unitaria e ortogonali a due a due. Essi sono i vettori $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ ottenuti nella maniera seguente

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \\
\mathbf{w}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1\|}, \\
\mathbf{w}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3 - [\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle \mathbf{w}_2]}{\|\mathbf{v}_3 - [\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2\rangle \mathbf{w}_2]\|}, \\
&\dots \\
\mathbf{w}_n &= \frac{\mathbf{v}_n - [\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2\rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{n-1}\rangle \mathbf{w}_{n-1}]}{\|\mathbf{v}_n - [\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2\rangle \mathbf{w}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{n-1}\rangle \mathbf{w}_{n-1}]\|}.
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

È immediato osservare che questi vettori sono tutti versori. Il fatto che siano a due a due ortogonali deriva invece dalla distributività del prodotto scalare rispetto alla somma.

Osservazioni ed esempi.

1. Il procedimento descritto dalle formule (5.3.7) prende il nome di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*.

2. Verifichiamo, a titolo di esempio, che i vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ costruiti con le (5.3.7) sono tra loro ortogonali. Abbiamo infatti

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1\|} \right\rangle =$$
$$= \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1\|} - \frac{\left\langle \mathbf{v}_2, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\right\rangle \left\langle \mathbf{v}_1, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\right\rangle}{\|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1\rangle \mathbf{w}_1\|}.$$

Osserviamo che

$$\left\langle \mathbf{v}_2, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\right\rangle \left\langle \mathbf{v}_1, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_2, \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\right\rangle \|\mathbf{v}_1\| = \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|} \|\mathbf{v}_1\| = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\rangle,$$

e quindi $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle = 0$. In maniera analoga si verifica che $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j\rangle = 0$ per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$.

3. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ formata dai seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali, essendo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$, mentre invece abbiamo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\rangle = 2$ e $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\rangle = 4$. Quindi $\mathcal{B}$ non è una base ortonormale. Procediamo allora con il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt per costruire una base ortonormale. Abbiamo allora

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1\|} = \frac{\mathbf{v}_2 - 0}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_3 - [\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2]}{\|\mathbf{v}_3 - [\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2]\|} = \frac{\mathbf{v}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{2}{7}\mathbf{v}_2}{\|\|\mathbf{v}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{2}{7}\mathbf{v}_2\|\|} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

L'insieme $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ è una base ortonormale.

4. Si noti che, per ogni $i \in \{1, ..., n\}$ i vettori $\mathbf{w}_i$ dipendono linearmente dai vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i$. Possiamo cioè scrivere

$$\mathbf{w}_i = \alpha_{i1}\mathbf{v}_1 + \alpha_{i2}\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_{ii}\mathbf{v}_i,$$

dove gli α_{ij}, $i, j \in \{1, ..., n\}$, sono i numeri reali descritti dai coefficienti dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ nelle (5.3.7).

5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo, e sia E_λ l'autospazio associato ad un autovalore λ. Se $\dim E_\lambda = h$, allora esiste una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_h\}$ di E_λ formata da h autovettori di f. Tale base in generale non è ortonormale, ma, mediante il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, si ottiene una nuova base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_h\}$ di E_λ, nella quale i vettori sono a due a due ortogonali, e ovviamente restano autovettori di f. □

Il Teorema Spettrale generalizzato.

Vogliamo ora prendere in considerazione l'estensione ad $\mathbb{R}^n$, con $n > 2$, del Teorema Spettrale nel piano. Innanzitutto, generalizzando la definizione introdotta nell'Osservazione 4 a pag. 147, diciamo che un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è *simmetrico*, se, rispetto ad una base ortonormale, è rappresentato da una matrice simmetrica.

Sia quindi $A = A^t$ una matrice simmetrica reale, di ordine n. Generalizzando il Teorema 5.2 si può dimostrare che A possiede autovalori tutti reali (non necessariamente distinti), per ognuno dei quali la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica. Pertanto A è diagonalizzabile. È inoltre possibile estendere la formula ottenuta nel Paragrafo 5.3.1 a pagina 149, cioè, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, vale la seguente proprietà

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle. \tag{5.3.8}$$

Il seguente teorema mette in evidenza che la condizione (5.3.8) è equivalente alla definizione di endomorfismo simmetrico che abbiamo introdotto.

Teorema 5.4. *Un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è simmetrico se e solo se $\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w})\rangle$, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo innanzitutto che $\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w})\rangle$, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Per ogni $j = 1, ..., n$ abbiamo

$$f(\mathbf{v}_j) = A\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + ... + a_{nj}\mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{v}_k.$$

Poiché $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, abbiamo $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k\rangle = 0$ se $i \neq k$, e $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k\rangle = 1$ se $i = k$. Pertanto, sfruttando anche la linearità del prodotto scalare, risulta

$$\langle \mathbf{v}_i, f(\mathbf{v}_j)\rangle = \left\langle \mathbf{v}_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\mathbf{v}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k\rangle = a_{ij}.$$

Inoltre abbiamo

$$\langle f(\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j\rangle = a_{ji}.$$

Pertanto, essendo $\langle \mathbf{v}_i, f(\mathbf{v}_j)\rangle = \langle \mathbf{v}_i, f(\mathbf{v}_j)\rangle$ risulta $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$. Di conseguenza, la matrice A è simmetrica, e quindi f è un endomorfismo simmetrico.
Se invece assumiamo come ipotesi che f sia un endomorfismo simmetrico, allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ tale che $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice simmetrica. Sappiamo quindi che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j \in \{1, ..., n\}$. Ripetendo al contrario i passaggi precedenti abbiamo $a_{ji} = \langle f(\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_j\rangle$ ed $a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, f(\mathbf{v}_j)\rangle$, per cui $f(\langle \mathbf{v}_i), \mathbf{v}_j\rangle = \langle \mathbf{v}_i, f(\mathbf{v}_j)\rangle$, per ogni $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \in \mathcal{B}$. Quindi la condizione su f è verificata per una qualsiasi coppia di vettori della base, e di conseguenza, per linearità $\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w})\rangle$, per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. ∎

Possiamo ora dimostrare che gli autospazi di una generica matrice simmetrica sono sottospazi a due a due ortogonali (cfr. Osservazione 8 a pag. 140).

Teorema 5.5. *Gli autospazi associati ad autovalori distinti di una matrice reale simmetrica A sono ortogonali tra loro.*

-*Dimostrazione.* Consideriamo gli autospazi E_{λ_i} ed E_{λ_j} associati a due autovalori λ_i e λ_j, tra loro distinti. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ due qualsiasi autovettori tali che $\mathbf{v} \in E_{\lambda_i}$ e $\mathbf{w} \in E_{\lambda_j}$. Abbiamo allora

$$\lambda_i\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \lambda_i\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.$$

Per la (5.3.8) abbiamo $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle$, e quindi possiamo scrivere

$$\lambda_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda_j \mathbf{w}\rangle = \lambda_j \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.$$

Pertanto risulta $(\lambda_i - \lambda_j)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$, ed essendo $\lambda_i \neq \lambda_j$, ricaviamo che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$. Ciò implica che ogni vettore di un autospazio è ortogonale a tutti i vettori di ogni altro autospazio, cioè che gli autospazi sono a due a due ortogonali. ■

Possiamo riassumere queste considerazioni nel teorema seguente, che generalizza il Teorema 5.3 al caso di un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.6. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo simmetrico. Allora f ha spettro reale, è diagonalizzabile e scompone $\mathbb{R}^n$ come somma diretta di autospazi a due a due ortogonali*

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}.$$

Esiste inoltre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ interamente costituita da autovettori.

-Dimostrazione. Poiché f è un endomorfismo simmetrico, esso è rappresentato da una matrice reale simmetrica A, di tipo (n, n), i cui autovalori sono tutti reali. Quindi f ha spettro reale ed è diagonalizzabile. Per il Teorema 4.31, f scompone $\mathbb{R}^n$ come somma diretta di autospazi

$$\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k},$$

ed inoltre, considerando l'unione delle basi di ogni autospazio, si ha una base di autovettori. Poiché gli autospazi sono a due a due ortogonali (cfr. Teorema 5.5), applicando il procedimento descritto nel Paragrafo 5.3.3 possiamo trasformare la base di ogni autospazio E_{λ_i} in una base ortonormale, che, per l'Osservazione 5 a pagina 155, resta una base di autovettori. Pertanto, dopo questo procedimento, si ottiene una base ortonormale di autovettori. ■

Osservazioni ed esempi.

1. La matrice di passaggio che diagonalizza un endomorfismo simmetrico è una matrice ortogonale. Infatti ha come colonne gli autovettori, che, per il Teorema 5.6, rappresentano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

2. **Diagonalizzazione di simmetrie rispetto a piani.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}.$$

In questo caso l'endomorfismo rappresenta geometricamente la simmetria rispetto al piano xy.

È facile vedere che ogni vettore $\mathbf{w}$ appartenente al piano xy viene mutato in se stesso, cioè $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, e quindi f ammette l'autovalore $\lambda = 1$. Questo autovalore deve

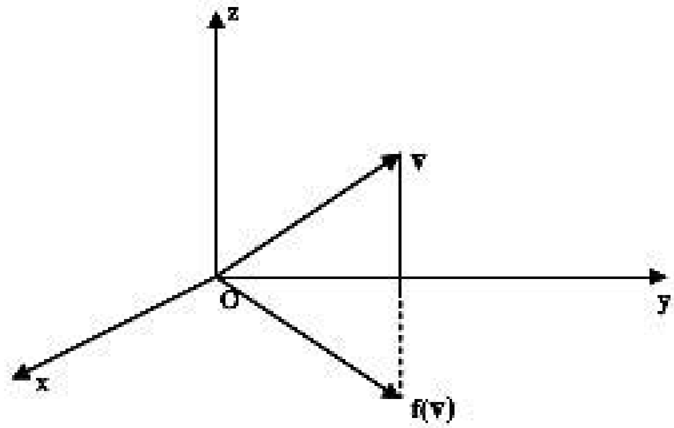


Figura 5.17: simmetria rispetto al piano xy.

avere molteplicità algebrica almeno 2, in quanto l'autospazio associato è il piano xy, e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$, cioè la dimensione di E_1, è uguale a 2. Osserviamo poi che ogni vettore $\mathbf{r}$ appartenente all'asse z viene trasformato nel vettore opposto, cioè $f(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}$, e quindi f ammette anche l'autovalore $\lambda = -1$. Poiché la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori deve essere uguale alla dimensione dell'intero spazio, se ne deduce che la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è proprio uguale a 2, mentre quella dell'autovalore $\lambda = -1$ è uguale a 1. Di conseguenza, per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con la molteplicità geometrica, e quindi f è effettivamente diagonalizzabile.

3. **Costruzione della matrice ortogonale di passaggio.** Data una matrice simmetrica A esiste sempre una matrice ortogonale M tale che $M^t AM = D$, essendo D la matrice diagonale avente per elementi principali gli autovalori. Si potrebbe pensare che per costruire M sia sufficiente normalizzare i singoli autovettori di A. Tuttavia, se consideriamo la dimostrazione del Teorema 5.6, ci rendiamo conto che in questa maniera si ottiene solamente la matrice P avente come colonne le basi dei singoli autospazi, prima che a queste venga applicato il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Pertanto, in generale, la matrice P non è ortogonale, in quanto non è detto che le singole basi degli autospazi siano già basi ortonormali. Per ottenere M bisogna quindi applicare le formule (5.3.7) all'insieme degli autovettori associati ad ogni singolo autovalore.

   Può comunque capitare che la matrice P coincida già con la matrice M (si veda l'Esempio 4 successivo). Questo avviene sicuramente se tutti gli autovalori sono semplici. In tal caso infatti ad ogni autovalore corrisponde un autospazio di dimensione 1, e quindi il Teorema 5.5 garantisce che la matrice M viene ottenuta semplicemente normalizzando gli autovettori.

4. Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo $\det[A - \lambda I] = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$, abbiamo un autovalore semplice $\lambda = -1$ ed un autovalore doppio $\lambda = 1$. Per $\lambda = 1$ risulta

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to a = c \ \forall b.$$

Pertanto, all'autovalore $\lambda = 1$ restano associati i due autovettori indipendenti dati da

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ai quali corrisponde l'autospazio $E_1 = \{a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Per $\lambda = -1$ risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to a = -c \ b = 0.$$

Pertanto, all'autovalore $\lambda = -1$ resta associato il solo autovettore

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

al quale corrisponde l'autospazio $E_3 = \{a\mathbf{v}_3 | a \in \mathbb{R}\}$.

Si noti che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono già a due a due ortogonali. Pertanto, la base ortonormale di autovettori si ottiene semplicemente normalizzando $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, e quindi è data da

$$\widehat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \widehat{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Otteniamo allora

$$M^t A M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Determiniamo una base ortonormale di autovettori per l'endomorfismo simmetrico $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato dalla seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo $\det[A - \lambda I] = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$, abbiamo un autovalore semplice $\lambda = 2$ ed un autovalore doppio $\lambda = -1$. Per $\lambda = 2$ risulta

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to a = b = c.$$

Pertanto, all'autovalore $\lambda = 2$ resta associato il solo autovettore

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

al quale corrisponde l'autospazio $E_1 = \{a\mathbf{v}_1 | a \in \mathbb{R}\}$.

Per $\lambda = -1$ risulta invece

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to a = -b = -c.$$

Pertanto, all'autovalore $\lambda = -1$ restano associati i due autovettori indipendenti dati da

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ai quali corrisponde l'autospazio $E_2 = \{a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Si noti che $\mathbf{v}_1$ è ortogonale sia a $\mathbf{v}_2$ che a $\mathbf{v}_3$, ma i vettori $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non sono ortogonali tra loro. Pertanto in questo caso, per ottenere la matrice ortogonale M che diagonalizza A, dobbiamo prima ortonormalizzare la base $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di E_2. Applicando le formule (5.3.7) otteniamo

$$\mathbf{v}_2 \longrightarrow \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 \longrightarrow \frac{\mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}.$$

Aggiungendo a questi due versori quello ottenuto normalizzando $\mathbf{v}_1$ ricaviamo la base ortonormale cercata.

6. Le considerazioni svolte possono essere estese anche ad endomorfismi f definiti su spazi non canonici, nel caso in cui l'endomorfismo canonico indotto F sia simmetrico.

   Per esempio, sia $\mathbf{V} = Pol_3(x)$ lo spazio dei polinomi in x di grado $n \leq 3$ a coefficienti reali, e sia $f : Pol_3(x) \to Pol_3(x)$ l'applicazione lineare data da:

   $$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^3 + cx^2 + bx + d.$$

   Stabiliamo se f é diagonalizzabile.

   Sia $c_{\mathbf{V}} : Pol_3(x) \to \mathbb{R}^4$ l'isomorfismo canonico dato da

   $$c_{\mathbf{V}}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

   Sia $F = c_{\mathbf{V}} f c_{\mathbf{V}}^{-1}$ l'applicazione canonica indotta da f sullo spazio canonico $\mathbb{R}^4$. La matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica é

   $$A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   La matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ é simmetrica.Ció implica che F, e quindi anche f, é diagonalizzabile. □

5.4 ALTRI PRODOTTI TRA VETTORI GEOMETRICI

L'uso dei vettori geometrici si rivela di grande utilità per descrivere analiticamente molte proprietà geometriche riguardanti punti, rette e piani nello spazio $\mathbb{R}^3$. Per questo, accanto al prodotto scalare già studiato in $\mathbb{R}^n$, è importante considerare, in $\mathbb{R}^3$, altre due nozioni di prodotto tra vettori geometrici.

5.4.1 Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra due vettori geometrici $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ è un vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ tale che

- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ ha direzione ortogonale al piano generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
- Il verso è quello di un osservatore che vede la sovrapposizione di $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, secondo l'angolo inferiore tra essi compreso, in senso antiorario.

- Il modulo è il prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo tra essi compreso, cioè

$$\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \sin \alpha, \tag{5.4.1}$$

essendo α l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà.

(a) È anticommutativo, cioè $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$. Questo si ricava dalla regola del verso.

(b) Non è associativo, cioè

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}.$$

(c) É distributivo rispetto alla somma, cioè

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}).$$

(d) Si annulla quando i due vettori sono paralleli tra loro, come si ricava dalla (5.4.1) ponendo $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rappresentazione analitica

Vogliamo ora esprimere analiticamente il prodotto vettoriale tra due vettori geometrici $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in uno spazio di coordinate x, y, z. Rappresentando i due vettori rispetto alla base canonica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, possiamo scrivere $\mathbf{v} = x_\mathbf{v}\mathbf{i} + y_\mathbf{v}\mathbf{j} + z_\mathbf{v}\mathbf{k}$, e $\mathbf{w} = x_\mathbf{w}\mathbf{i} + y_\mathbf{w}\mathbf{j} + z_\mathbf{w}\mathbf{k}$. Sfruttando la proprietà (c) risulta

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (x_\mathbf{v}\mathbf{i} + y_\mathbf{v}\mathbf{j} + z_\mathbf{v}\mathbf{k}) \wedge (x_\mathbf{w}\mathbf{i} + y_\mathbf{w}\mathbf{j} + z_\mathbf{w}\mathbf{k}) =$$

$$\begin{aligned} &= x_\mathbf{v} x_\mathbf{w} \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + x_\mathbf{v} y_\mathbf{w} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + x_\mathbf{v} z_\mathbf{w} \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + \\ &+ y_\mathbf{v} x_\mathbf{w} \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + y_\mathbf{v} y_\mathbf{w} \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} + y_\mathbf{v} z_\mathbf{w} \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + \\ &+ z_\mathbf{v} x_\mathbf{w} \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + z_\mathbf{v} y_\mathbf{w} \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} + z_\mathbf{v} z_\mathbf{w} \mathbf{k} \wedge \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Per le proprietà (a) e (d) del prodotto vettoriale abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} &= x_{\mathbf{v}}y_{\mathbf{w}}\mathbf{k} - x_{\mathbf{v}}z_{\mathbf{w}}\mathbf{j} - y_{\mathbf{v}}x_{\mathbf{w}}\mathbf{k} + y_{\mathbf{v}}z_{\mathbf{w}}\mathbf{i} + z_{\mathbf{v}}x_{\mathbf{w}}\mathbf{j} - z_{\mathbf{v}}y_{\mathbf{w}}\mathbf{i} = \\ &= \left[y_{\mathbf{v}}z_{\mathbf{w}} - z_{\mathbf{v}}y_{\mathbf{w}}, z_{\mathbf{v}}x_{\mathbf{w}} - x_{\mathbf{v}}z_{\mathbf{w}}, x_{\mathbf{v}}y_{\mathbf{w}} - y_{\mathbf{v}}x_{\mathbf{w}}\right].\end{aligned}$$

Questo risultato si può esprimere mediante il seguente determinante formale

$$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_{\mathbf{v}} & y_{\mathbf{v}} & z_{\mathbf{v}}\\ x_{\mathbf{w}} & y_{\mathbf{w}} & z_{\mathbf{w}}\end{bmatrix}, \tag{5.4.2}$$

essendo $x_{\mathbf{v}}, y_{\mathbf{v}}, z_{\mathbf{v}}$ ed $x_{\mathbf{w}}, y_{\mathbf{w}}, z_{\mathbf{w}}$ le componenti dei vettori considerati.

Osservazioni ed esempi.

1. Dalla formula (5.4.1) possiamo dedurre che il modulo del prodotto vettoriale è uguale all'area del parallelogrammo che ha un vertice nell'origine ed i due lati uscenti da esso uguali ai vettori considerati.

2. Determinare l'area del parallelogramma che viene formato dai due vettori $\mathbf{v} = [3, 4, -2]$ e $\mathbf{w} = [1, 0, 1]$.

   Poichè l'area del parallelogrammo formato da due vettori é uguale al modulo del loro prodotto vettoriale, abbiamo

   $$\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} = \det\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = [4, -5, -4].$$

   Pertanto l'area del parallelogrammo risulta uguale a $\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\| = \sqrt{57}$. □

5.4.2 Prodotto Misto

Dati tre vettori geometrici $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, il loro *prodotto misto* è il numero $\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\rangle$. Osserviamo che, per ottenere il prodotto misto di tre vettori bisogna calcolare prima di tutto il prodotto vettoriale $\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$, e poi considerare il prodotto scalare tra il vettore risultante ed il vettore $\mathbf{a}$. Quindi, il prodotto misto di tre vettori è uno scalare. Dalle equazioni (5.2.13) e (5.4.2), segue che

$$\langle\mathbf{a}, \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\rangle = \det\begin{bmatrix}x_{\mathbf{a}} & y_{\mathbf{a}} & z_{\mathbf{a}}\\ x_{\mathbf{b}} & y_{\mathbf{b}} & z_{\mathbf{b}}\\ x_{\mathbf{c}} & y_{\mathbf{c}} & z_{\mathbf{c}}\end{bmatrix}. \tag{5.4.3}$$

essendo $x_{\mathbf{a}}, y_{\mathbf{a}}, z_{\mathbf{a}}, x_{\mathbf{b}}, y_{\mathbf{b}}, z_{\mathbf{b}}$ ed $x_{\mathbf{c}}, y_{\mathbf{c}}, z_{\mathbf{c}}$ le componenti dei vettori considerati.

Osservazioni ed esempi.

1. Il prodotto misto è nullo se e solo se una riga della matrice è combinazione lineare delle altre due, cioè se e solo se un vettore è combinazione lineare degli altri due, e quindi se e solo se i tre vettori sono complanari.

2. Dati tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, dall'equazione (5.2.21) ricaviamo che la lunghezza della proiezione di $\mathbf{a}$ sulla retta contenente $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ è data da
$$proj_{\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = \left| \left\langle \mathbf{a}, \frac{\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|} \right\rangle \right|.$$

3. Il significato geometrico del prodotto misto può essere ricavato osservando innanzitutto che il modulo di $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ indica l'area del parallelogramma descritto da $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Il volume V del parallelepipedo obliquo descritto dai tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, è il prodotto tra l'area della base e la lunghezza dell'altezza ad essa relativa, cioè
$$V = \|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\| proj_{\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = \|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\| \left| \left\langle \mathbf{a}, \frac{\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|} \right\rangle \right| = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle|.$$
Quindi, il valore assoluto del prodotto misto di tre vettori è uguale al volume del parallelepipedo obliquo da essi descritto.

4. Talvolta, se non ci sono fraintendimenti possibili, il modulo di un vettore si può anche indicare con lo stesso simbolo $|\cdot|$ utilizzato per il valore assoluto di un numero reale. Questo per rammentare che il modulo di un vettore deve essere un numero reale non negativo. $\square$

Capitolo 6

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

Vogliamo ora fissare l'attenzione sullo ricerca delle proprietà algebriche che permettono di caratterizzare lo studio di piani e rette dello spazio $\mathbb{R}^3$ dal punto di vista analitico.

6.1 RETTE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

Una retta è determinata da due punti A e B. Se $\mathbf{v} = [a, b, c]$ è un vettore geometrico parallelo al segmento AB, la retta passante per A e B è il luogo dei punti $P(x, y, z)$ tali che $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\mathbf{v}$ (Fig. 6.1).

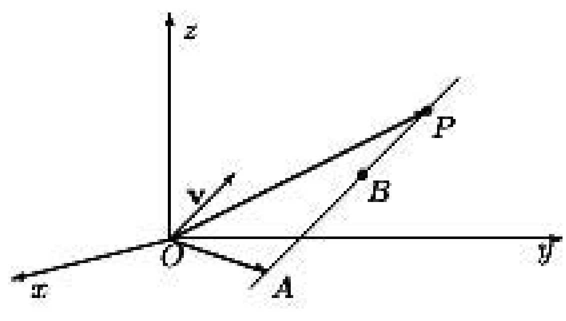


Figura 6.1: retta nello spazio

Di conseguenza, essendo $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ ed $\overrightarrow{OA} = [x_A, y_A, z_A]$, abbiamo

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$.

Le (6.1.1) forniscono le cosiddette *equazioni parametriche* di una retta nello spazio. Esplicitando λ in ognuna di esse, possiamo anche scrivere

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}, \tag{6.1.2}$$

che danno le *equazioni normali* della retta.

6.1.1 Rette sghembe

Due rette si dicono sghembe se non sono complanari. Ciò è equivalente a dire che due *rette sghembe* non hanno punti in comune e non sono parallele.
Per costruire due rette sghembe possiamo considerare un piano qualsiasi π, e fissare una retta $r \in \pi$. Prendiamo poi un punto $P \in \pi$, tale che $P \notin r$, e consideriamo una retta s passante per P ma non appartenente al piano π (Fig. 6.2). Le due rette r e s non hanno punti in comune e non sono complanari, quindi sono sghembe.

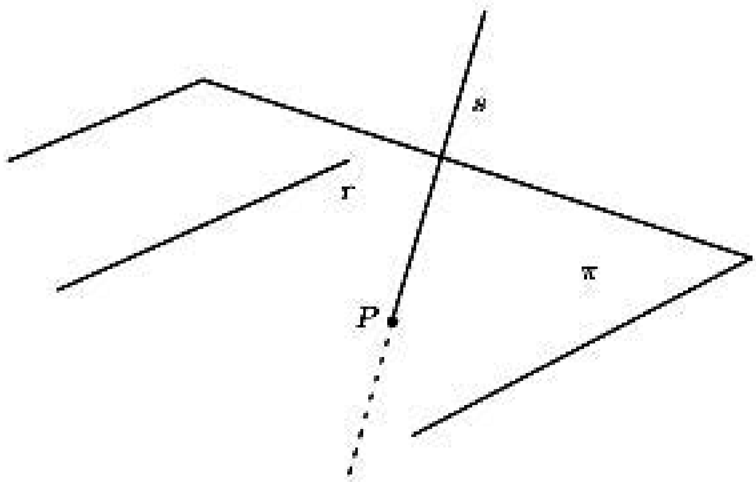


Figura 6.2: rette sghembe.

Si può anche parlare di angolo tra due rette sghembe r e s. Questo viene valutato considerando le rette r' e s' ad esse parallele e passanti per uno stesso punto fissato nello spazio.

Osservazioni ed esempi.

1. **Parametri direttori di una retta.** Ad ogni retta è associata una ed una sola direzione. I *parametri direttori di una retta* sono le componenti di un qualsiasi vettore geometrico avente la stessa direzione della retta. I *coseni direttori* sono particolari parametri direttori. Essi si ottengono considerando i due versori aventi la stessa direzione della retta, e rappresentano i coseni degli angoli che la retta forma

con gli assi cartesiani. Pertanto, data una qualsiasi terna a, b, c di parametri direttori, i coseni direttori si ottengono dividendo $\mathbf{v} = [a, b, c]$ per $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2. Determiniamo le equazioni della retta passante per il punto $A(1, -1, 3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = [-1, 2, -4]$.

   Scriviamo innanzitutto le equazioni parametriche. Sfruttando le formule (6.1.1) abbiamo

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Da qui, ricavando λ da ognuna delle tre equazioni, possiamo dedurre le equazioni normali della stessa retta, date da

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}.$$

   Queste possono anche essere ricavate direttamente applicando le formule (6.1.2) con $a = -1, b = 2, c = -4$.

   Notiamo anche che tali a, b, c non sono coseni direttori, poiche $a^2 + b^2 + c^2 = 21 \neq 1$. Possiamo ottenere i coseni direttori della retta considerata moltiplicando $\mathbf{v}$ per $\frac{1}{\sqrt{21}}$.

3. Le equazioni (6.1.2) hanno senso solo se $a, b, c \neq 0$. Possiamo tuttavia convenire di scrivere le equazioni normali anche nel caso in cui alcuni parametri direttori siano nulli, intendendo che l'indeterminata che si trova al numeratore sia costante.

4. Consideriamo la retta avente equazioni

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

   Il generico vettore geometrico avente la stessa direzione della retta è $\mathbf{v} = [a, 2a, 0]$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il suo modulo è $|\mathbf{v}| = |a|\sqrt{5}$. I coseni direttori sono quindi $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\cos\gamma = 0$, con scelta arbitraria dei segni.

5. In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico dello spazio, consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2. \end{cases}$$

   Poiché nelle equazioni date non compare l'indeterminata z, il sistema esprime il luogo dei punti $P(3, -2, z)$, con z variabile arbitrariamente. Si ha pertanto una retta parallela all'asse z.

6. Ovviamente non è possibile che due rette sghembe formino un angolo multiplo di 180°, altrimenti esse avrebbero la stessa direzione, e quindi sarebbero parallele, il che è assurdo. $\square$

6.2 PIANI NELLO SPAZIO

Sia π un piano e $P(x, y, z)$ un suo qualsiasi punto. Rappresentare analiticamente π significa trovare una relazione algebrica tra le coordinate x, y, z. Sia n la retta normale calata da $O(0,0,0)$ su π e sia $H = n \cap \pi$.
Osserviamo che la proiezione del vettore $\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ su n, coincide, per ogni P, con il vettore $\overrightarrow{OH}$ (Fig. 6.3).

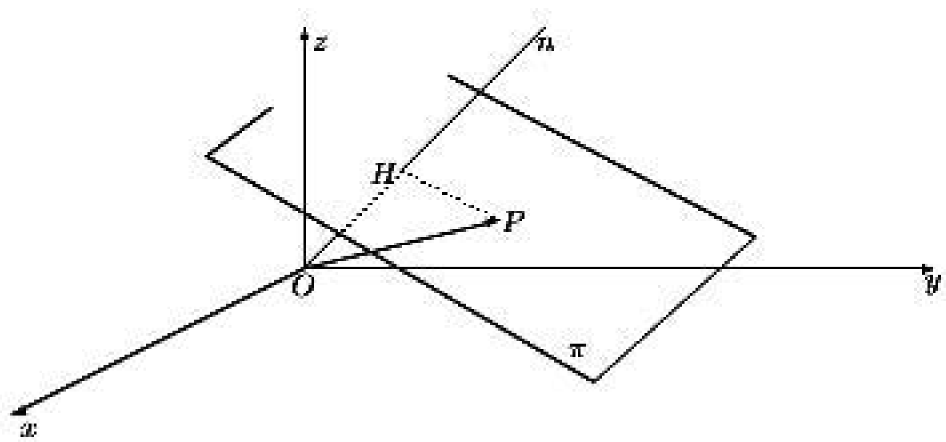


Figura 6.3: piano nello spazio.

Il suo modulo deve pertanto essere uguale a $|\langle \overrightarrow{OP}, \widehat{OH} \rangle|$ (cfr. pagina 145). Se $H = [a, b, c]$, applicando la formula (5.2.13) si ricava

$$|\langle \overrightarrow{OP}, \widehat{OH} \rangle| = \left| \left\langle [x, y, z], \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}[a, b, c] \right\rangle \right| = \left| \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|.$$

Pertanto risulta

$$\left| \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| = |\overrightarrow{OH}|.$$

Poiché $|\overrightarrow{OH}| = \overline{OH}$, otteniamo

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{6.2.1}$$

avendo posto $d = \mp \overline{OH}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Note le coordinate di P, la scelta del segno per d è univocamente determinata, e la (6.2.1) fornisce allora l'equazione cartesiana del piano. I coefficienti a, b, c vengono anche detti *parametri direttori del piano*.

Osservazioni ed esempi.

1. I parametri direttori di un piano π coincidono con le coordinate del punto H in cui esso viene intersecato dalla retta passante per l'origine ed ortogonale a π. Pertanto i parametri direttori di π coincidono con i parametri direttori delle rette ad esso ortogonali.

2. Si noti che, data l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ di un piano nello spazio, $|d|$ è uguale a $\overline{OH}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Da qui possiamo ricavare la distanza dell'origine dal piano, data da

$$\overline{OH} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

3. **Piano passante per tre punti A, B, C non allineati.**

   Per determinare l'equazione del piano passante per tre punti assegnati A, B, C (non allineati), bisogna imporre che l'equazione $ax+by+cz+d=0$ del generico piano sia soddisfatta dalle coordinate dei tre punti. Si perviene così ad un sistema omogeneo, nelle quattro incognite a, b, c, d. Bisogna imporre che questo sistema abbia soluzioni non banali (la quaterna $a=b=c=d=0$ non corrisponde ad alcun piano). Questo avviene se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{6.2.2}$$

   Sottraendo dalle prime tre righe l'ultima, si vede che questa equazione è equivalente alla seguente

$$\det \begin{bmatrix} x-x_C & y-y_C & z-z_C & 0 \\ x_A-x_C & y_A-y_C & z_A-z_C & 0 \\ x_B-x_C & y_B-y_C & z_B-z_C & 0 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

   e quindi a

$$\det \begin{bmatrix} x-x_C & y-y_C & z-z_C \\ x_A-x_C & y_A-y_C & z_A-z_C \\ x_B-x_C & y_B-y_C & z_B-z_C \end{bmatrix} = 0. \tag{6.2.3}$$

4. Poiché due piani non paralleli si intersecano sempre in una ed una sola retta, possiamo rappresentare analiticamente una retta nello spazio mediante il sistema tra le equazioni di due qualsiasi piani che la contengono.

   Per esempio, scriviamo come intersezione di due piani la retta r, passante per il punto $A(1,-1,3)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = [-1, 2, -4]$.

   Le equazioni normali di r risultano

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}.$$

   Queste equivalgono a

$$r \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}, \end{cases}$$

   e quindi a

$$r \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 4x - z - 1 = 0, \end{cases}$$

   che rappresentano la retta come intersezione di due piani. □

6.3 CONDIZIONI DI PERPENDICOLARITÀ E PARALLELISMO

Cerchiamo ora le condizioni analitiche che consentono di esprimere la perpendicolarità ed il parallelismo tra rette e piani.

6.3.1 Parallelismo tra due rette

Due rette sono parallele se hanno la stessa direzione. Poiché la direzione è determinata dai parametri direttori, definiti a meno di una costante di proporzionalità, due rette sono parallele se hanno parametri direttori proporzionali. Detti a, b, c i parametri direttori di una delle due rette, ed a', b', c' quelli dell'altra, si deve cioè avere

$$\begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \\ c' = kc, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

essendo k una qualsiasi costante non nulla.

6.3.2 Perpendicolarità tra una retta ed un piano

L'equazione di un generico piano π è del tipo $ax + by + cz + d = 0$, dove a, b, c sono le coordinate del punto di intersezione tra il piano e la retta ad esso perpendicolare uscente dall'origine.
Quindi ka, kb, kc possono essere considerati, per ogni $k \neq 0$, come i parametri direttori di una qualsiasi perpendicolare a π.
Di conseguenza, una retta è perpendicolare ad un piano se ha i parametri direttori proporzionali ai parametri direttori del piano.

La condizione analitica è pertanto identica alla (6.3.1) con l'opportuna interpretazione dei parametri.

6.3.3 Condizione di parallelismo tra due piani

Due piani sono paralleli se sono perpendicolari alla stessa direzione. Quindi, i loro parametri direttori devono essere proporzionali a quelli delle rette aventi tale direzione. Di conseguenza due piani sono paralleli se hanno i parametri direttori proporzionali. Pertanto, detti a, b, c i parametri direttori di uno dei due piani, ed a', b', c' quelli dell'altro, la condizione analitica che ne esprime il parallelismo è identica alla (6.3.1) con l'opportuna interpretazione dei parametri.

6.3.4 Condizione di perpendicolarità tra due rette

L'angolo θ tra due rette r ed s è valutabile mediante la formula (5.2.18), che riscriviamo nella maniera seguente

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS} \rangle}{\|\overrightarrow{OR}\| \|\overrightarrow{OS}\|}, \tag{6.3.2}$$

dove $\overrightarrow{OR}$ ed $\overrightarrow{OS}$ sono vettori paralleli ad r ed s rispettivamente.
Le rette sono perpendicolari se e solo se $\cos\theta = 0$, vale a dire $\langle \overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS} \rangle = 0$, e cioè

$$x_R x_S + y_R y_S + z_R z_S = 0. \tag{6.3.3}$$

6.3.5 Condizione di perpendicolarità tra due piani

Due piani α e β sono perpendicolari tra loro se, presa una retta a perpendicolare ad α ed una retta b perpendicolare a β, risulta a perpendicolare a b.
Poiché i parametri direttori di a e b coincidono, a meno di una costante non nulla, con i parametri direttori di α e β rispettivamente (cfr. Osservazione 1 a pagina 169), la condizione di perpendicolarità tra piani è

$$aa' + bb' + cc' = 0, \tag{6.3.4}$$

dove a, b, c sono i parametri direttori di α, ed a', b', c' quelli di β.

6.3.6 Condizione di parallelismo tra una retta ed un piano

Se una retta r è parallela ad un piano π, allora r è perpendicolare ad ogni retta ortogonale a π. Se $\overrightarrow{OR}$ è un vettore geometrico avente la direzione di r, ed a, b, c sono i parametri direttori di una retta $p \perp \pi$ (e quindi anche di π), la condizione di parallelismo tra r e π è quindi

$$ax_R + by_R + cz_R = 0. \tag{6.3.5}$$

Osservazioni ed esempi.

1. Si osservi che la condizione di parallelismo tra due rette, la condizione di parallelismo tra due piani e la condizione di perpendicolarità tra una retta ed un piano hanno tutte la stessa formulazione, determinata dalla proporzionalità dei parametri direttori. Analogamente, la condizione di perpendicolarità tra due rette, la condizione di perpendicolarità tra due piani e la condizione di parallelismo tra una retta ed un piano, si basano tutte sull'annullamento di un prodotto scalare.

2. Consideriamo due rette r, s appartenenti al piano xy, cioè al piano di equazione $z = 0$. Allora nella (6.3.3) abbiamo $z_R = z_S = 0$, e la condizione diventa

$$x_R x_S + y_R y_S = 0. \tag{6.3.6}$$

Distinguiamo i seguenti due casi

(a) Se $x_R = 0$, $\overrightarrow{OR}$ appartiene all'asse y. Quindi $\overrightarrow{OS}$ appartiene all'asse x per cui $y_S = 0$. In tale caso le rette considerate coincidono con gli assi cartesiani.

(b) Se $x_R \neq 0$, allora possiamo supporre che sia anche $x_S \neq 0$, altrimenti otterremmo la stessa situazione precedente, pur di scambiare $\overrightarrow{OR}$ con $\overrightarrow{OS}$.

Di conseguenza, se le rette non sono gli assi cartesiani, abbiamo $x_R x_S \neq 0$. Possiamo allora dividere entrambi i membri della (6.3.6) per $x_R x_S$, ed otteniamo

$$1 + \frac{y_R y_S}{x_R x_S} = 0 \Rightarrow m_R m_S = -1, \tag{6.3.7}$$

dove m_R ed m_S sono i coefficienti angolari delle due rette. Ritroviamo così la condizione di perpendicolarità tra due rette di $\mathbb{R}^2$.

3. Date due rette sghembe r ed s, ci possiamo chiedere se esistono rette che sono perpendicolari, contemporaneamente ad r ed s.

   Per risolvere questo problema consideriamo due vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ associati alle rette r ed s rispettivamente. Allora il prodotto vettoriale $\mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$ ha direzione perpendicolare sia ad $\mathbf{r}$ che ad $\mathbf{s}$. Quindi, tutte le rette aventi la stessa direzione di $\mathbf{p}$ risultano perpendicolari sia ad r che ad s.

4. Vediamo ora se esistono rette perpendicolari e secanti due date rette sghembe.

   Siano $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ vettori associati, rispettivamente, alle due rette sghembe r ed s, e sia $\mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$. Le rette perpendicolari ad r ed s devono avere la stessa direzione di $\mathbf{p}$. Sia p una tale retta. Affinché si intersechino, p ed r devono essere complanari, per cui p deve appartenere al piano π_1, contenente r e parallelo a $\mathbf{p}$. Analogamente, dovendo esistere l'intersezione tra p ed s, la retta p deve appartenere al piano π_2, contenente s e parallelo a $\mathbf{p}$. Di conseguenza, la retta

$$p \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2, \end{cases} \tag{6.3.8}$$

   è la sola retta del tipo richiesto. □

6.4 DISTANZE NOTEVOLI

Abbiamo già studiato la distanza tra due punti. Cerchiamo ora le formule analitiche che consentono di calcolare alcuni altri tipi di distanze.

6.4.1 Distanza punto-piano

Sia π un piano, e P un punto non appartenente a π (se $P \in \pi$ allora la distanza è nulla). Consideriamo la retta r, passante per P e perpendicolare a π. Sia H il punto di intersezione tra r e π (Fig. 6.4).

La distanza $\overline{PH}$ tra i punti P ed H corrisponde alla *distanza di P da π* .
Analiticamente si ottiene la seguente formula

$$\mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|ax_p + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{6.4.1}$$

dove (x_P, y_P, z_P) sono le coordinate di P, ed $ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione di π.

Si noti che il denominatore nella formula (6.4.1), esprime il modulo di un vettore $[a, b, c]$ ortogonale a π. In particolare, se a, b, c sono coseni direttori, e P è l'origine, risulta $\mathrm{d}(O, \pi) = |d|$.

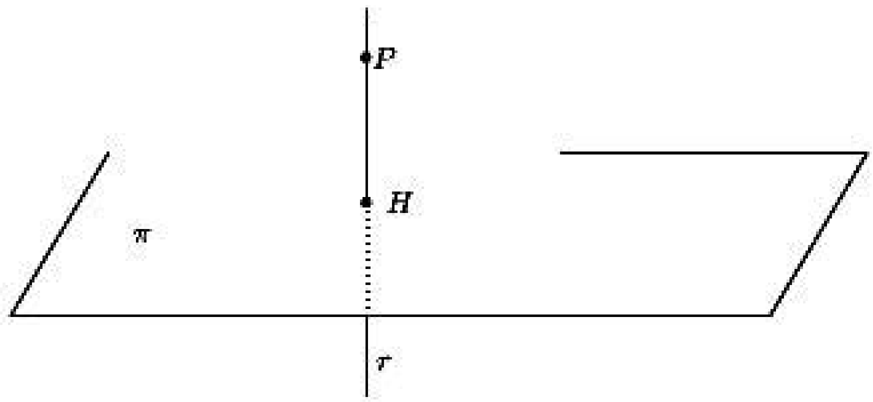


Figura 6.4: distanza tra punto e piano.

Quindi, il termine noto d esprime, a meno del segno, la distanza dell'origine dal piano π, quando i coefficienti di x, y, z sono i coseni direttori della normale al piano (cfr. Osservazione 2 a pag. 169).

6.4.2 Distanza punto-retta

Sia r una retta e P un punto non appartenente ad r (se $P \in r$ allora la distanza è nulla). Consideriamo il piano π, passante per P e perpendicolare alla retta r. Sia H il punto di intersezione tra r e π (Fig. 6.5).

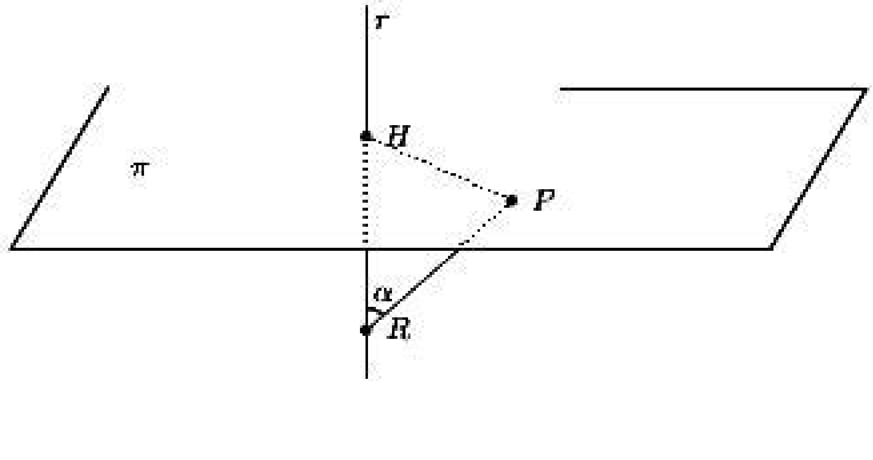


Figura 6.5: distanza tra punto e retta nello spazio.

La distanza $\overline{PH}$ tra i punti P ed H corrisponde alla *distanza di P da r*. Indichiamo con α l'angolo tra la retta r e la retta PH, ed osserviamo che si ha

$$\mathrm{d}(P, r) = \overline{PR} \sin\alpha = \overline{PR} \frac{\|\overrightarrow{PR} \wedge \mathbf{r}\|}{\|\overrightarrow{PR}\| \|\mathbf{r}\|} = \frac{\|\overrightarrow{PR} \wedge \mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|}, \tag{6.4.2}$$

dove R è un punto fissato arbitrariamente sulla retta r, $\mathbf{r}$ è un vettore geometrico associato ad r (avente cioè la stessa direzione di r), e $\wedge$ indica il prodotto vettoriale.

6.4.3 Distanza tra rette sghembe

La *distanza tra due rette sghembe* r ed s, è la minima distanza $\mathrm{d}(A, B)$ tra due punti $A \in r$ e $B \in s$.
Consideriamo il piano π, contenente r e parallelo ad s. Sia Q un punto scelto arbitrariamente sulla retta s (Fig. 6.6).

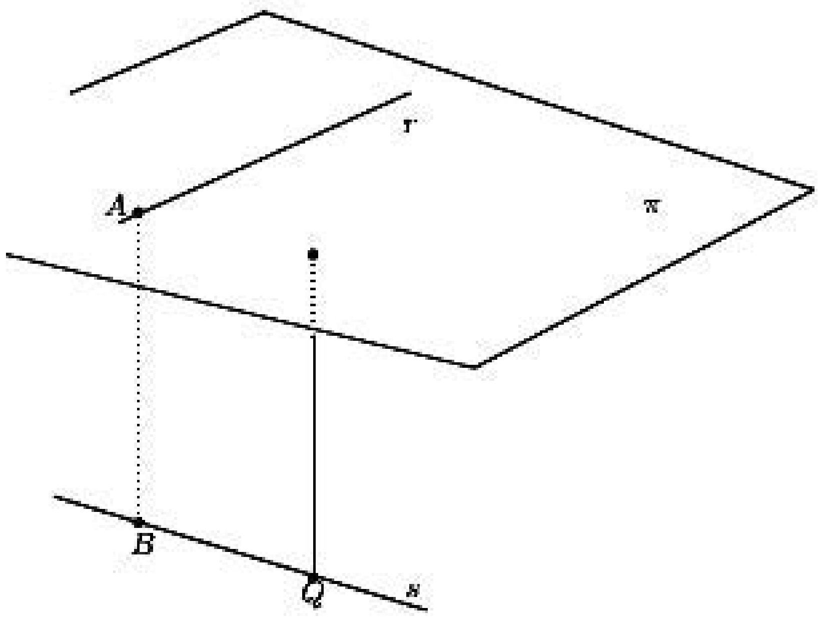


Figura 6.6: distanza tra due rette sghembe.

La distanza $\mathrm{d}(Q, \pi)$ tra il punto Q ed il piano π corrisponde alla distanza $\mathrm{d}(A, B)$ tra le rette sghembe r ed s.
Supponiamo ora che $\mathbf{r} = [a, b, c]$ ed $\mathbf{s} = [a', b', c']$ siano due vettori associati, rispettivamente, ad r ed s, ed indichiamo con x_p, y_P, z_P le coordinate di un punto $P \in r$. Il piano π contiene P, ed inoltre è parallelo ad s (per costruzione) e ad r (poiché la contiene).
Traducendo analiticamente tali proprietà, troviamo che π ha equazione:

$$\pi : \det \begin{bmatrix} x - x_P & y - y_P & z - z_P \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 0. \tag{6.4.3}$$

I parametri direttori di π sono quindi

$$\alpha = bc' - b'c, \ \ \beta = a'c - ac', \ \ \gamma = ab' - a'b.$$

Se x_Q, y_Q, z_Q sono le coordinate di $Q \in s$, allora, applicando la formula (6.4.1) per la distanza punto-piano, si ha

$$\mathrm{d}(Q, \pi) = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \tag{6.4.4}$$

il che esprime analiticamente la distanza tra le rette sghembe considerate.

Osservazioni ed esempi.

1. Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti dello spazio la cui distanza dall'asse y è reciproca della distanza dei punti stessi dal piano $\pi : x + y - z = 0$.

   Sia $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio. La distanza di P dall'asse y è $\sqrt{x^2 + z^2}$. La distanza di P dal piano π risulta

   $$\frac{|x + y - z|}{\sqrt{3}}.$$

   Il luogo richiesto ha pertanto equazione $\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{\sqrt{3}}{|x+y-z|}$, da cui, elevando al quadrato, otteniamo $(x^2 + z^2)(x + y - z)^2 - 3 = 0$.

2. Scrivere l'equazione cartesiana del *cilindro circolare retto* (cfr. Osservazione 3 a pagina 185) avente per asse la retta

   $$r \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0, \end{cases}$$

   e raggio $R = 1$.

   Il cilindro richiesto può essere ottenuto come luogo dei punti $P(x, y, z)$ aventi distanza 1 dalla retta r. Le equazioni parametriche di r sono date da

   $$r \begin{cases} x = 0 \\ y = q \\ z = -q, \end{cases}$$

   per cui la direzione di r è quella del vettore $\mathbf{r} = [0, 1, -1]$. Scegliamo su r il punto comodo $O(0, 0, 0)$.

Applicando la formula per la distanza di un punto da un retta abbiamo $\frac{\|\overrightarrow{OP}\wedge \mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|} = 1$.

Il vettore $\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{r}$ è dato da

$$\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{r} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [-y - z, x, x].$$

Quindi, $\|\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{r}\| = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz + 2x^2}$, ed essendo $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{2}$, otteniamo $y^2 + z^2 + 2yz + 2x^2 - 2 = 0$ per il luogo richiesto.

3. **Distanza punto-retta nel piano xy.** Consideriamo un piano cartesiano Oxy. Siano x_P, y_P le coordinate di P, e sia $ax+by+c = 0$ l'equazione di una retta r. Se $a = 0$, allora la retta è parallela all'asse x, e la distanza di P da r è semplicemente il valore assoluto di y_P. Supponiamo che sia $a \neq 0$. Allora possiamo prendere $\mathbf{r} = [b, -a]$ ed $R(-\frac{c}{a}, 0)$, e la formula (6.4.2) diventa:

$$\mathrm{d}(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PR} \wedge \mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_P - \frac{-c}{a} & y_P & 0 \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Abbiamo così la formula per la distanza punto-retta nel piano. In particolare, se a e b sono coseni direttori, e P è l'origine, si ricava $\mathrm{d}(P, r) = |c|$.

4. **Condizione di non complanarità.** Siano r ed s due rette sghembe.

   Se scegliamo arbitrariamente un punto $P \in r$ ed un punto $Q \in s$, allora deve risultare:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \neq 0. \tag{6.4.5}$$

   Infatti, se fosse $\Delta = 0$, il punto Q apparterrebbe al piano π, contenente r e parallelo ad s, descritto dall'equazione (6.4.3), il che è assurdo. Quindi, il calcolo di un determinante Δ del tipo indicato nella formula (6.4.5) può essere utilizzato come condizione di non complanarità tra rette.

   Se risulta $\Delta = 0$, allora le due rette non sono sghembe, e quindi sono complanari.

5. Siano r ed s le rette di equazioni

$$r : x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1},$$

$$s\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2+t,\quad t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Determinare la posizione reciproca di r ed s.

Scriviamo anche la retta r in forma parametrica (usando un parametro q diverso da t)

$$r\begin{cases}x=1+q\\y=-1+2q\\z=3-q,\quad q\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Primo metodo. La direzione di r è fornita dal vettore $\mathbf{r}=[1,2,-1]$, quella di s dal vettore $\mathbf{s}=[1,-1,1]$.

Poichè le componenti dei vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{s}$ non sono proporzionali, le due rette non sono parallele.

Se fossero secanti, nel punto $P=r\cap s$ le due forme parametriche dovrebbero coincidere, cioè

$$\begin{cases}1+q=t\\-1+2q=1-t\\3-q=2+t.\end{cases}$$

Le tre equazioni sono però incompatibili, poiché la soluzione $t=\frac{4}{3}$, $q=\frac{1}{3}$ che si ricava dalle prime due non verifica la terza.

Di conseguenza, r ed s sono sghembe.

Secondo metodo. Consideriamo due punti $P\in r$ e $Q\in s$, per esempio $P(1,-1,3)$ e $Q(0,1,2)$.

La formula (6.4.5) fornisce in tale caso $\Delta=-2\neq 0$, per cui le rette sono sghembe. □

6.5 APPROFONDIMENTI

6.5.1 Famiglie di elementi lineari

Abbiamo visto che rette e piani si rappresentano analiticamente attraverso equazioni lineari. Parlando di *famiglie di elementi lineari* intendiamo considerare particolari insiemi di rette e piani. Si usa la notazione ∞^n per indicare che stiamo considerando una famiglia di enti geometrici costituita da infiniti elementi, funzioni di n parametri reali indipendenti e variabili arbitrariamente. In particolare, elementi diversi di una stessa famiglia vengono individuati da n-ple non proporzionali di parametri.

Fasci di rette in un piano.

Un *fascio proprio di rette* è l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per un dato punto. Il punto comune a tutte le rette si dice *centro del fascio*. Supponiamo di lavorare in $\mathbb{R}^2$ con coordinate cartesiane x, y, e consideriamo il fascio di rette avente centro nell'origine del piano xy. Allora l'equazione $y - mx = 0$ rappresenta, al variare di m in $\mathbb{R}$, una qualsiasi retta passante per l'origine, diversa dall'asse y. Possiamo catturare anche l'asse y scrivendo il fascio di rette nella forma

$$\lambda x + \mu y = 0, \tag{6.5.1}$$

con λ e μ variabili in $\mathbb{R}$.
Per $\mu \neq 0$ si ottiene $m = -\frac{\lambda}{\mu}$. L'asse y si ricava invece per $\mu = 0$. Il valore assoluto di m rappresenta il rapporto di similitudine tra i cateti dei triangoli rettangoli formati mandando da un generico punto della retta la parallela ad uno degli assi cartesiani. Sia φ l'angolo che la retta forma con l'asse x. Più φ si avvicina al valore $\frac{\pi}{2}$, più il rapporto di similitudine aumenta (Fig. 6.7).

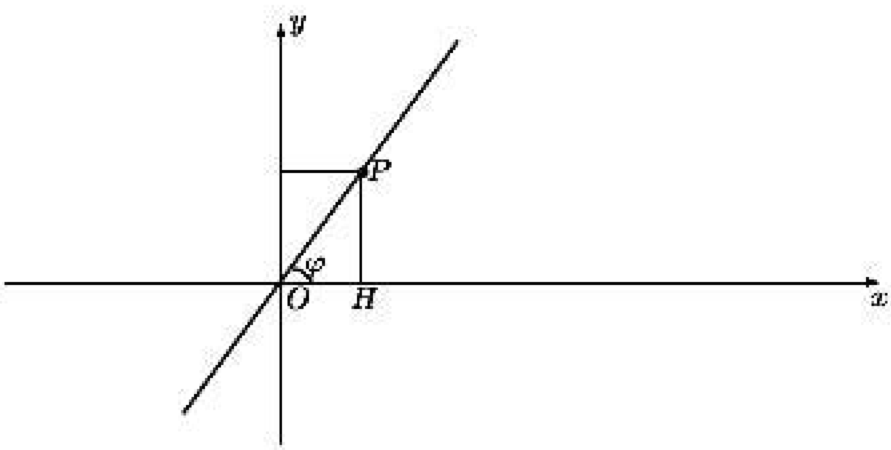


Figura 6.7: $m = \tan\varphi = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{OH}}$

Pertanto, possiamo convenzionalmente ritenere che l'equazione $y - mx = 0$ rappresenti anche l'asse delle y, corrispondente ad un coefficiente angolare infinito. Il fascio di rette è pertanto una famiglia di ∞^1 elementi lineari.

Fasci impropri. Un *fascio di rette improprio* è l'insieme delle rette di un piano parallele ad una data retta di quel piano. Esso è rappresentato analiticamente da una equazione del tipo $y = mx + \lambda$, con m fissato e λ variabile in $\mathbb{R}$. Pertanto, anche il fascio di rette improprio è una famiglia di ∞^1 elementi lineari.

Fasci di piani.

Due punti distinti determinano una ed una sola retta r. Se consideriamo un qualsiasi piano contenente due punti assegnati nello spazio $\mathbf{R}^3$, allora la retta che li congiunge appartiene interamente a quel piano. Quindi, tutti i piani contenenti r contengono anche i due punti assegnati.

Inoltre, se un dato piano non contiene r, allora non contiene neanche i due punti considerati. Quindi, esistono infiniti piani che passano per due punti distinti assegnati, e sono tutti e soli i piani che contengono la retta che li congiunge. Questo insieme di piani si dice *fascio di piani*, e la retta ad essi comune viene detta *sostegno del fascio* (Fig. 6.8).

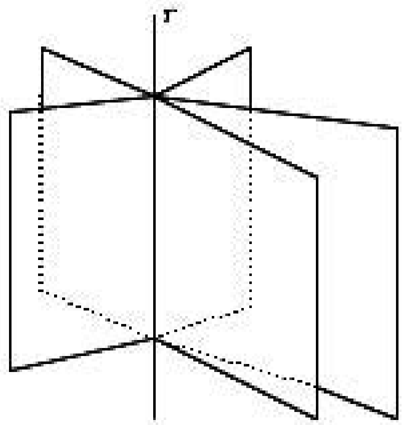


Figura 6.8: fascio di piani di sostegno r.

Vediamo ora come si rappresenta analiticamente un fascio di piani. Sia r la retta sostegno del fascio, e sia P un punto fissato arbitrariamente su r. Consideriamo il piano π, perpendicolare ad r in P. Sia poi s una qualsiasi retta di π passante per P (Fig. 6.9) .

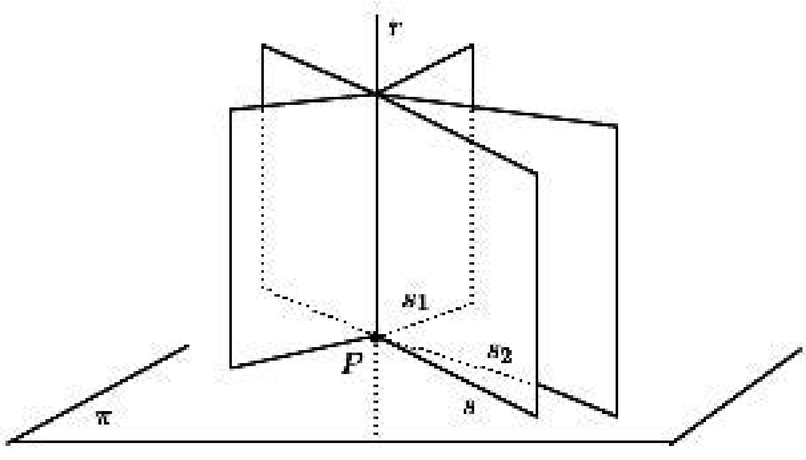


Figura 6.9: corrispondenza tra fascio di piani e fascio di rette.

Il piano determinato dalle rette r ed s appartiene al fascio di piani considerato. Al contrario, ogni piano di tale fascio, interseca π in una retta passante per P. Quindi, l'insieme

dei piani del fascio è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle rette di π passanti per P, e pertanto è una famiglia di ∞^1 elementi lineari.
Poiché tale insieme di rette costituisce un fascio proprio di rette sul piano π, la sua rappresentazione analitica si ottiene mediante la combinazione lineare di due qualsiasi rette s_1 ed s_2 di π passanti per P.
Il fascio di piani di sostegno r può allora essere rappresentato analiticamente per mezzo della combinazione lineare dei piani determinati dalle coppie di rette r, s_1 ed r, s_2 rispettivamente.

Stella di rette.

Sia P un dato punto dello spazio $\mathbf{R}^3$. Consideriamo l'insieme di tutte le rette passanti per P. Un tale insieme di rette si dice *stella di rette*, ed il punto ad esse comune si dice *centro della stella di rette*.

La rappresentazione analitica di una stella di rette di centro P si ottiene utilizzando le equazioni normali della generica retta per P

$$\frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}. \tag{6.5.2}$$

Al variare di a, b, c in $\mathbf{R}$ (a, b, c non tutti nulli) fornisce l'equazione della stella di rette di centro P.
Ogni retta della stella è pertanto descritta dai tre parametri a, b, c. Ogni terna $a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c$, con $\lambda \neq 0$, descrive la stessa retta della stella. Pertanto, i parametri essenziali nell'equazione (6.5.2) sono due. Questo significa che per avere due rette diverse della stessa stella basta scegliere due dei loro tre parametri direttori in maniera non proporzionale, per esempio a, a' e b, b' tali che $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$. Pertanto, una stella di rette è una famiglia di ∞^2 elementi lineari.

Stella di piani.

L'insieme dei piani passanti per uno stesso punto P dello spazio si dice *stella di piani*, ed il punto P *centro della stella di piani*.

Per rappresentare analiticamente una stella di piani basta imporre che il generico piano $ax + by + cz + d = 0$ passi per il centro P della stella, cioè che sia $ax_P + by_P + cz_P + d = 0$. Il sistema tra le due equazioni fornisce allora l'equazione $a(x - x_P) + b(y - y_P) + c(z - z_P) = 0$. Essa è l'equazione della stella di piani avente centro nel punto P assegnato.

Osservazioni ed esempi.

1. Scriviamo l'equazione del fascio di piani aventi per sostegno la retta r passante per i punti $A(1, 2, 3)$ e $B(-1, 0, 2)$. Determiniamo poi l'equazione del piano del fascio che contiene il punto $C(-2, 3, 5)$.

   Scriviamo innanzitutto l'equazione della retta r.

La sua direzione è quella di un vettore parallelo al segmento AB, per esempio $[x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] = [-2, -2, -1]$. Usando la forma parametrica abbiamo

$$r \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Sostituendo $t = 3 - z$ nelle prime due equazioni possiamo scrivere r come intersezione di due piani

$$r \begin{cases} x - 2z + 5 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$$

L'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}$ avente per sostegno r si ottiene facendo la combinazione lineare tra due qualsiasi di questi piani. Pertanto, essa è data da

$$\mathcal{F} : x - 2z + 5 + \lambda(y - 2z + 4) = 0,$$

essendo λ un qualsiasi numero reale, ed utilizzando la convenzione che il piano $y - 2z + 4$ sia associato al valore $\lambda = \infty$ (si veda a pag. 179 lo stesso problema a proposito dei fasci di rette nel piano).

L'unico piano del fascio $\mathcal{F}$ contenente il punto C corrisponde al valore di λ che si ottiene sostituendo le coordinate di C nell'equazione del fascio. Ricaviamo $-2 - 10 + 5 + \lambda(3 - 10 + 4) = 0$, cioè $\lambda = -\frac{7}{3}$. Di conseguenza, il piano del fascio che passa per il punto C ha equazione $x - 2z + 5 - \frac{7}{3}(y - 2z + 4) = 0$, cioè $3x - 7y + 8z - 13 = 0$.

2. Consideriamo una sfera S di centro P. Ogni retta che passa per P taglia sulla sfera una ed una sola coppia di punti antipodali (cioè diametralmente opposti) Q_1, Q_2. Al contrario, per ogni coppia di punti diametralmente opposti Q_1, Q_2 di S, la retta congiungente i punti Q_1 e Q_2 passa per P. Pertanto, la stella di rette di centro P è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle coppie di punti antipodali di una sfera.

   Poiché ad ogni retta è associata una ed una sola direzione, possiamo identificare l'insieme delle direzioni dello spazio con l'insieme delle coppie di punti antipodali di una sfera, così come, nel piano, identifichiamo l'insieme delle direzioni con le coppie di punti antipodali di una circonferenza.

3. Se consideriamo due qualsiasi rette r ed s di una stella di rette, queste sono sempre complanari, passando tutte per il centro della stella. Tuttavia, al variare della coppia di rette, può variare anche il piano che le contiene. Sia infatti π il piano che contiene due rette r ed s di una stella di centro P, e sia Q un punto dello spazio non appartenente al piano π. Allora la retta p che congiunge P con Q appartiene alla stella di centro P, ma non al piano π. Se prendiamo una qualsiasi altra retta q della stella, p e q sono complanari, ma il piano che le contiene è diverso da π.

   Ovviamente può succedere che due diverse coppie di rette, appartenenti alla stessa stella, siano anche complanari. Per esempio, se consideriamo nel piano π di r ed

s, una qualsiasi retta f passante per P, le coppie (r, s), (r, f) ed (s, f) sono tutte complanari.

4. Fissato un punto P, sia f una retta della stella di centro P. Allora, esiste ed è unico il piano σ perpendicolare ad f in P. Al contrario, sia σ un generico piano passante per P. Allora, esiste ed è unica la retta f, perpendicolare a σ in P. La relazione di ortogonalità in P realizza pertanto una corrispondenza biunivoca tra la stella di piani di centro P, e l'insieme delle rette della stella di centro P. $\square$

6.5.2 Superfici rigate

Con il termine *superficie rigata* si intende una superficie che può essere descritta come luogo di rette, soddisfacenti particolari condizioni geometriche. Le rette che descrivono una superficie rigata vengono dette *rette generatrici* di tali superfici. Gli esempi più frequenti di superfici rigate sono costituiti dai *coni generalizzati* e dai *cilindri generalizzati*. Per descriverle, premettiamo alcune considerazioni sulle curve.

Nozione di curva.

Una curva nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{R}^3$ è il luogo dei punti $P(t)$ le cui coordinate $x(t), y(t), z(t)$, sono funzioni di un parametro t variabile in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Questo concetto può essere descritto fisicamente pensando che t sia il tempo, e $P(t)$ la posizione occupata dal punto P all'istante t. Di conseguenza, la curva corrisponde alla traiettoria descritta dal punto variabile.

Può succedere che una curva sia interamente contenuta in un piano. In questo caso si parla di *curva piana*. Si dice invece *curva gobba*, oppure *curva sghemba*, una curva che non è contenuta in alcun piano.

Data una curva γ, di parametrizzazione $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, per stabilire se essa è piana o sghemba possiamo considerare tre punti della curva che non siano allineati (se esistono, altrimenti γ è ovviamente piana essendo una retta), calcolare il piano che li contiene, e sostituire $x(t), y(t), z(t)$ ad x, y, z. Se si ottiene una identità la curva appartiene a quel piano, altrimenti è sghemba. Un secondo metodo è quello di considerare il generico piano, di equazione $ax + by + cz + d = 0$. Se la curva è piana, l'equazione

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0,$$

deve essere identicamente verificata rispetto a t per valori a, b, c, d non tutti nulli. Altrimenti, se l'identità in t si ottiene solo per $a = b = c = d = 0$, la curva è sghemba.

Coni generalizzati.

Si ottiene un *cono generalizzato* considerando il luogo delle rette che passano per un dato punto V e per il generico punto di una data curva γ. Il punto V viene detto *vertice* , e la curva γ *direttrice* del cono generalizzato.

Sia $V(a, b, c)$ il vertice e γ la direttrice. Parametrizzando γ essa viene rappresentata da equazioni del tipo

$$\gamma \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), \end{cases}$$

essendo $f(t), g(t), h(t)$ funzioni di un parametro reale t. Ciò significa che il generico punto di γ è $P(t) = [f(t), g(t), h(t)]$. Il cono richiesto è allora il luogo delle rette PV al variare di t. I parametri direttori di una tale retta sono $f(t) - a, g(t) - b, h(t) - c$, per cui il cono ha le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a + q[f(t) - a] \\ y = b + q[g(t) - b] \\ z = c + q[h(t) - c]. \end{cases}$$

Al variare dei parametri q e t viene descritta la superficie rigata. Volendo ottenere l'equazione cartesiana, bisogna ricavare t e q utilizzando due delle equazioni e sostituirli poi nella terza.

Un metodo alternativo per la costruzione di un cono generalizzato è quello di scrivere la generica retta passante per il vertice, e poi imporre su questa le condizioni che determinano la direttrice.

Cilindri generalizzati.

Un *cilindro generalizzato* si ottiene considerando il luogo delle rette che passano per il generico punto di una data curva γ e sono parallele ad un dato vettore $\mathbf{v}$.

Sia $\mathbf{v} = [a, b, c]$ un vettore parallelo alle generatrici, e γ la direttrice. Sia $P(t) = [f(t), g(t), h(t)]$ il generico punto di γ. Il cilindro generalizzato ha allora equazioni date da

$$\begin{cases} x = f(t) + qa \\ y = g(t) + qb \\ z = h(t) + qc. \end{cases}$$

Al variare dei parametri q e t viene descritta la superficie rigata. Come si è detto per il cono generalizzato, volendo ottenere l'equazione cartesiana, bisogna ricavare t e q utilizzando due delle equazioni e sostituirli poi nella terza.

Osservazioni ed esempi.

1. Si consideri la curva γ rappresentata dalla parametrizzazione $P(t) = [t^2, t-2, t^2 - t]$, cioè data da

$$\gamma \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - 2 \\ z = t^2 - t \quad (t \in \mathbf{R}). \end{cases}$$

Per stabilire se la curva γ è piana o sghemba consideriamo un generico piano $ax + by + cz + d = 0$, e sostituiamo le coordinate di un generico punto $P(t)$ di γ. Abbiamo allora

$$at^2 + b(t-2) + c(t^2 - t) + d = 0 \;\Rightarrow\; (a+c)t^2 + (b-c)t - 2b + d = 0.$$

Per il principio di identità dei polinomi deve essere

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -2b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -c,\ b = c,\ d = 2c.$$

Poché esiste una soluzione non banale, la curva è piana. In particolare, preso per esempio $c = -1$, si ricava che la curva appartiene al piano $x - y - z - 2 = 0$.

2. Consideriamo la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t, \end{cases} \tag{6.5.3}$$

con $t \in I = \mathbf{R}$. Per $t = 0, 2\pi, 4\pi$ abbiamo i punti $A(1,0,0)$, $B(1,0,2\pi)$ e $C(1,0,4\pi)$. Il piano che li contiene ha equazione $y = 0$, che non coincide identicamente con $y(t)$. Quindi la curva è sghemba.

3. In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $Oxyz$ di $\mathbb{R}^3$, consideriamo una equazione del tipo $f(x,y) = 0$. Ci chiediamo quale sia il suo significato geometrico.

   Osserviamo innanzitutto che, se in una data equazione non compare una certa indeterminata, allora significa che tale indeterminata non è soggetta a vincoli analitici, e può quindi assumere un qualsiasi valore reale.

   Nel nostro caso non compare l'indeterminata z, il che significa che stiamo considerando il luogo dei punti $P(x,y,z)$ dello spazio aventi una quota qualsiasi, mentre le ascisse e le ordinate sono soggette al vincolo $f(x,y) = 0$. Se ragioniamo nel piano xy, oppure in un qualsiasi piano perpendicolare all'asse z, l'equazione $f(x,y) = 0$ rappresenta una curva γ. Quindi la stessa equazione, pensata nello spazio, rappresenta il luogo delle rette che intersecano la curva γ e sono parallele all'asse z. Abbiamo pertanto un cilindro generalizzato, la cui direttrice è la curva γ di equazione $f(x,y) = 0$.

Per esempio, l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$, che nel piano xy descrive la circonferenza avente centro nell'origine e raggio uno, nello spazio rappresenta il cilindro circolare retto avente tale circonferenza come curva direttrice.

4. Consideriamo il cilindro generalizzato avente per direttrice la curva del piano xy di equazione $x(y - x^2) = 0$ e generatrici parallele all'asse z. Otteniamo un cilindro generalizzato di equazione $x(y - x^2) = 0$. Esso è costituito dall'unione del cilindro di equazione $y = x^2$ e del piano yz. Tale cilindro generalizzato contiene quindi, oltre alle generatrici, anche tutte le rette del piano yz non parallele all'asse z.

   Pertanto, in generale, le rette generatrici di un cono o di un cilindro generalizzati non esauriscono necessariamente le rette appartenenti a tali superfici.

5. **Proiezione di una retta su un piano.** Determinare la retta proiezione della retta $r : x - 1 = y - 2 = 2(z - 1)$ dal punto $P(-1, -2, 1)$ sul piano $\pi : x - y + z = 0$.

   La retta richiesta può essere ottenuta intersecando π con il cono generalizzato avente vertice in P e direttrice data dalla retta r. Tale cono coincide con il piano contenente la retta r ed il punto P. Esprimiamo allora r come intersezione di due piani

$$r \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

   Il fascio di piani di sostegno r ha equazione $x - y + 1 + \lambda(x - 2z + 1) = 0$, da cui, sostituendo le coordinate di P, ricaviamo $\lambda = -\frac{1}{2}$. Pertanto, il piano contenente r e P ha equazione $x - 2y + 2z + 1 = 0$, e la proiezione di r su π è data da

$$\begin{cases} x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

6. Non bisogna confondere la proiezione di una retta r da un punto P su un piano π con la *proiezione ortogonale* di r su π. Questa si ottiene intersecando il piano con l'insieme delle rette passanti per r ed ortogonali a π, cioè è l'intersezione tra un piano ed un cilindro generalizzato.

   Nel caso in cui il piano π su cui si proietta passi per l'origine, e quindi sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, la proiezione ortogonale si può anche ottenere sfruttando le matrici di proiezione (cfr. Paragrafo 5.2.5). A tale scopo si devono considerare due punti $A, B \in r$, e proiettare su π i due vettori $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$ ad essi associati, determinando così due punti $A', B' \in \pi$. La retta passante per A', B' è la proiezione ortogonale, sul piano π, della retta r considerata. □

Capitolo 7

LE CONICHE

7.1 DESCRIZIONE DELLE CONICHE

Lo studio delle coniche sembra iniziare con i lavori del matematico greco Menecmo (375-325 a.C), discepolo di Platone e di Eudosso e maestro di Alessandro Magno. La sistemazione razionale della trattazione delle coniche avvenne però circa 150 anni dopo, grazie ad Apollonio di Perga (circa 262-190 a.C.), conosciuto come il *Grande Geometra*. A lui si deve l'opera *Le Coniche*, composta da otto libri, dei quali solo tre sono giunti fino a noi nella versione originale. Di altri quattro ci sono pervenute le traduzioni dall'arabo, mentre uno è andato perduto. I risultati ottenuti da Apollonio per via sintetica vennero ritrovati, circa 1800 anni più tardi, in termini analitici, dopo che Cartesio e Fermat ebbero introdotto i nuovi metodi algebrici basati sulle coordinate cartesiane.

Vogliamo ora dare una breve descrizione delle coniche, sia dal punto di vista sintetico, inizialmente considerato nell'antica Grecia, sia da quello analitico, più moderno.

7.1.1 Descrizione geometrica delle coniche

Consideriamo il *cono di luce* che ha come vertice il filamento della lampadina di una torcia, e come asse la retta che passa per quest'ultimo e per il centro della lente. Dirigendo il raggio luminoso verso una parete, si ottengono forme diverse, a seconda dell'inclinazione dell'asse (Fig. 7.1.1).

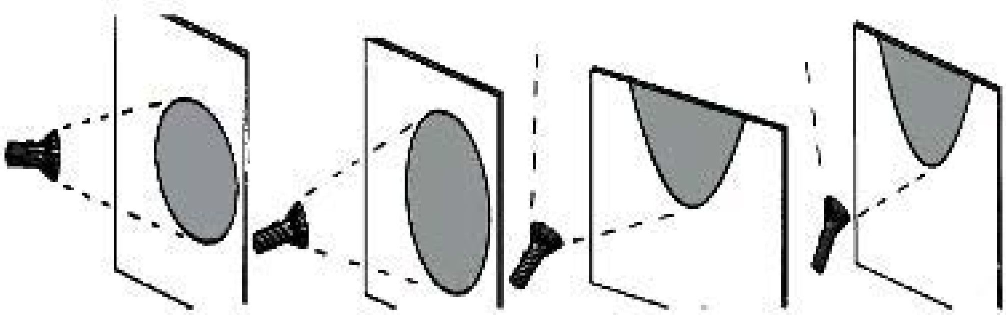


Figura 7.1: il muro viene illuminato prima perpendicolarmente. Poi si aumenta progressivamente l'inclinazione del fascio di luce, finché il raggio più esterno prima diventa parallelo al muro, poi si allontana indefinitamente da questo.

Per la maniera con cui sono state prodotte, le forme che si proiettano sulla parete prendono il nome di *sezioni coniche*, o più semplicemente *coniche*. Geometricamente si possono ottenere intersecando la superficie $\mathcal{C}$ di un cono circolare retto (a due falde) con un piano[1].

Sia V il vertice, s l'asse di rotazione ed α l'angolo di semiapertura del cono, cioè l'angolo formato dalle generatrici (rette uscenti da V che formano il cono) con l'asse di rotazione (Fig. 7.2).

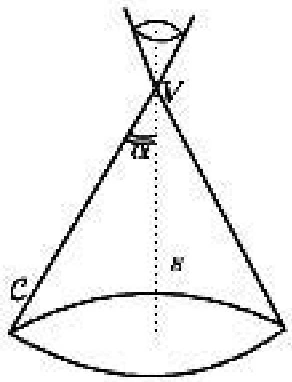


Figura 7.2: sezioni coniche.

Consideriamo un piano π passante per V, e sia θ l'angolo tra s e π. Abbiamo allora i seguenti casi

(*i*). $\theta > \alpha$. In tal caso $\pi \cap \mathcal{C} = V$ (Fig. 7.3 (a)).
(*ii*). $\theta = \alpha$. In tal caso $\pi \cap \mathcal{C}$ è una generatrice t del cono (Fig. 7.3 (b)).
(*iii*). $\theta < \alpha$. In tal caso $\pi \cap \mathcal{C}$ è una coppia t_1, t_2 di generatrici (Fig. 7.3 (c)).

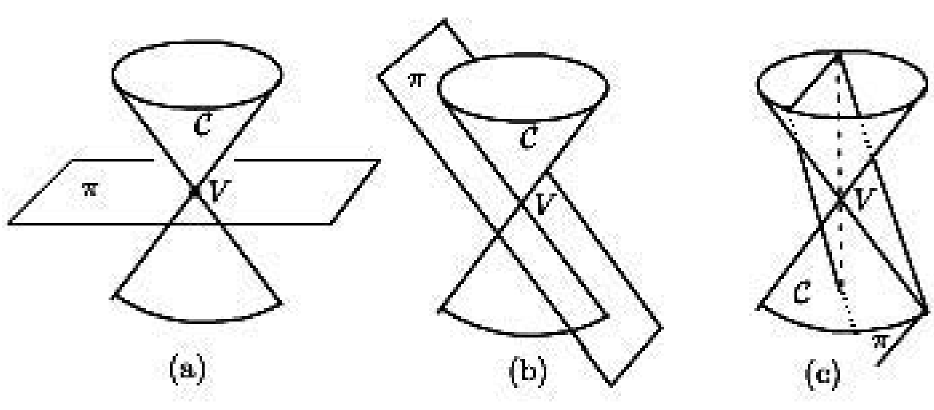


Figura 7.3: coniche degeneri. (a) Un punto. (b) Una retta reale. (c) Due rette reali distinte.

[1]Qui non interessano le proprietà specifiche del cono, per alcune delle quali rinviamo al Capitolo 8, ma diamo per scontata la conoscenza di questa figura geometrica.

I tre casi descritti determinano le *coniche degeneri*, costituite rispettivamente da un punto, una retta reale oppure una coppia di rette reali distinte.

Consideriamo ora un piano π_1 non passante per il vertice V del cono. L'intersezione tra π_1 e $\mathcal{C}$ viene detta *conica non degenere*. Detto π il piano parallelo a π_1 e passante per V, abbiamo la seguente classificazione

(i). Se $\pi \cap \mathcal{C} = V$, la conica non degenere $\pi_1 \cap \mathcal{C}$ viene detta *ellisse* (Fig. 7.4 (a)). In particolare, se $\pi_1 \perp s$, si ha una *circonferenza*.

(ii). Se $\pi \cap \mathcal{C}$ è una generatrice del cono, allora la conica non degenere $\pi_1 \cap \mathcal{C}$ viene detta *parabola* (Fig. 7.4 (b)).

(iii). Se $\pi \cap \mathcal{C}$ è una coppia t_1, t_2 di generatrici del cono, allora la conica non degenere $\pi_1 \cap \mathcal{C}$ viene detta *iperbole* (Fig. 7.4 (c)). Le intersezioni tra π_1 ed i piani tangenti al cono lungo le generatrici t_1, t_2, si dicono *asintoti* dell'iperbole. Se gli asintoti sono ortogonali tra loro la conica si dice *iperbole equilatera*.

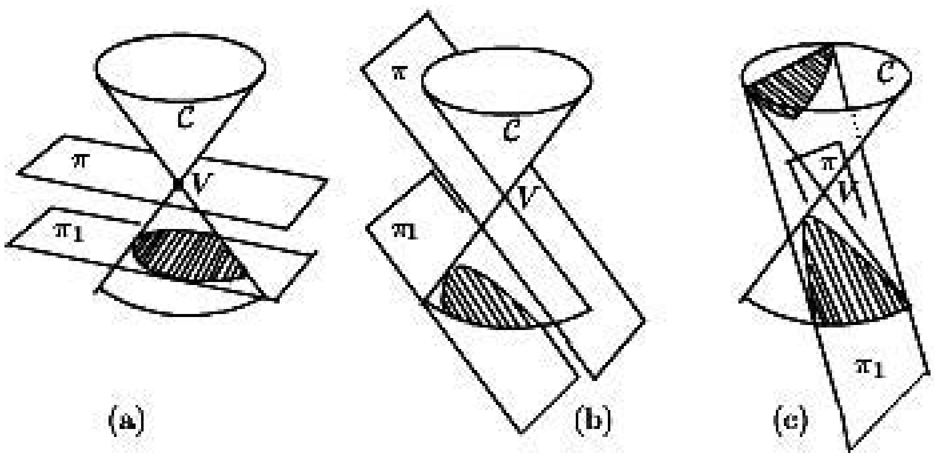


Figura 7.4: sezioni coniche non degeneri. (a) Ellisse. (b) Parabola. (c) Iperbole.

Osservazioni ed esempi.

1. I punti di una ellisse hanno tutti distanza finita da V, mentre, per parabola ed iperbole, questa può diventare arbitrariamente grande. Inoltre, ellisse e parabola appartengono completamente ad una sola delle due falde di $\mathcal{C}$, mentre l'iperbole è formata da due rami distinti, ognuno appartenente ad una delle due falde della superficie conica.

2. Le coniche degeneri possono essere complessivamente classificate come coppie di rette, reali distinte (Figura 7.3 (c)), reali coincidenti (Figura 7.3 (b)) o complesse coniugate (Figura 7.3 (a)). È inoltre possibile annoverare tra le coniche degeneri

anche il caso di due rette parallele distinte, che si può considerare come un caso limite della situazione descritta nella Figura 7.3 (c) (si veda anche l'Osservazione 3 a pagina 199).

3. **Asse principale.** La proiezione ortogonale dell'asse di rotazione del cono sul piano che contiene una conica non degenere, è asse di simmetria ortogonale della conica, e si dice *asse principale*.

4. **Vertici principali.** I punti che l'asse principale ha in comune con la conica si dicono *vertici principali*. Essi sono due per ellisse ed iperbole, mentre è unico per la parabola.

5. **Centro di una conica.** Nel caso di ellisse ed iperbole il punto medio tra i vertici principali si dice *centro della conica*. □

7.1.2 Descrizione analitica delle coniche

Per ottenere una descrizione analitica delle coniche è innanzitutto necessario riuscire a descriverle come luoghi di punti. Il problema sussiste per le coniche non degeneri, poichè la rappresentazione analitica delle coniche degeneri si riduce a quella di punti e rette.

Coniche come luoghi di punti

Le coniche, precedentemente introdotte come sezioni piane di un cono, ammettono le seguenti definizioni in termini di luoghi di punti.

(*i*) Il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi è una ellisse. I punti fissi si dicono *fuochi dell'ellisse*.

(*ii*) Il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi è una iperbole. I punti fissi si dicono *fuochi dell'iperbole*.

(*iii*) Il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso e da una retta fissa è una parabola. Il punto fisso si dice *fuoco della parabola*, mentre la retta fissa viene detta *direttrice*.

Le nozioni di *fuoco* e *direttrice* possono anche essere date in riferimento al cono che viene sezionato per avere la conica in questione. Si vedano in proposito i paragrafi 7.5.3 e 7.5.4.

È anche possibile dare una caratterizzazione più compatta delle coniche come luoghi di punti. Una conica non degenere può infatti essere considerata come il luogo dei punti del piano per i quali è costante il rapporto tra le distanze da un punto e da una retta fissati. Tale rapporto si dice *eccentricità*, ed è maggiore, minore oppure uguale ad 1, a seconda che la conica sia una iperbole, una ellisse oppure una parabola. In particolare, per le circonferenze l'eccentricità è nulla. Il punto fissato rappresenta un fuoco della conica, mentre la retta fissata è la direttrice corrispondente (cfr. Esempio 2 a pagina 193).

Equazioni canoniche delle coniche non degeneri

Partiamo dalle definizioni che caratterizzano le coniche non degeneri come luoghi di punti, e vediamo come si può procedere per determinare una loro rappresentazione analitica. A questo proposito è opportuno scegliere innanzitutto un sistema di riferimento comodo.

(i) Per tradurre analiticamente la proprietà geometrica che descrive l'ellisse possiamo scegliere l'asse x coincidente con l'asse principale, e l'origine coincidente con il centro dell'ellisse. I fuochi assumeranno quindi coordinate del tipo $F_1(-c, 0)$ ed $F_2(c, 0)$, per un certo c reale (**Fig. 7.5**).

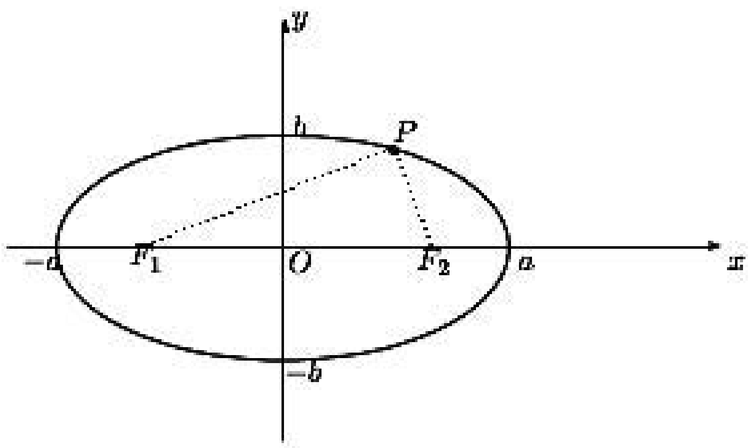


Figura 7.5: ellisse in forma canonica con i fuochi sull'asse x.

Indicando con $2a$, $(a > 0)$, la somma delle distanze dei punti $P(x, y)$ dell'ellisse dai due fuochi, abbiamo

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Elevando al quadrato due volte, e ponendo $a^2 - c^2 = b^2$, otteniamo l'equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{7.1.1}$$

In particolare, se l'ellisse è una circonferenza, il raggio è $a = b$, per cui l'equazione canonica diventa $x^2 + y^2 = a^2$.

(ii) Ragionando alla stessa maniera per una iperbole, (con l'unica variante che ora $2a$ indica la differenza tra le distanze dei punti $P(x, y)$ dell'iperbole dai due fuochi), otteniamo l'equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{7.1.2}$$

dove $c^2 - a^2 = b^2$ (**Fig. 7.6**).

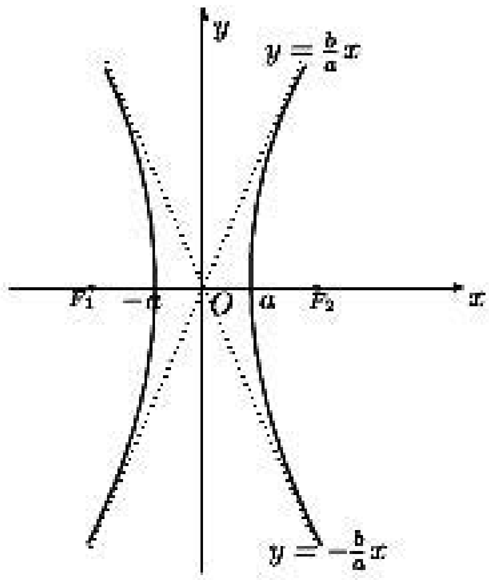


Figura 7.6: iperbole in forma canonica con i fuochi sull'asse x ed $a, b > 0$.

Se invece scegliamo l'asse y come asse principale, otteniamo

$$-b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{7.1.3}$$

Le rette di equazione $y = \pm\frac{b}{a}x$ sono gli asintoti dell'iperbole. La distanza tra i punti dell'iperbole e gli asintoti tende a zero per x tendente all'infinito, cioè si ha un avvicinamento indefinito della curva a tali rette.
In particolare, se l'iperbole è equilatera, allora $a = b$, e gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti, cioè con le rette di equazione $y = \pm x$.

(*iii*) Per rappresentare analiticamente una parabola scegliamo l'asse x coincidente con la retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice. Fissiamo poi l'origine nel punto medio del segmento di perpendicolare calato dal fuoco F sulla direttrice. Detta p la distanza tra fuoco e direttrice, abbiamo $F(\frac{p}{2}, 0)$, mentre la direttrice ha equazione $x = -\frac{p}{2}$ (Fig. 7.7).
Di conseguenza, otteniamo

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left| x + \frac{p}{2} \right|.$$

Elevando al quadrato e semplificando, ricaviamo l'equazione

$$y^2 = 2px. \tag{7.1.4}$$

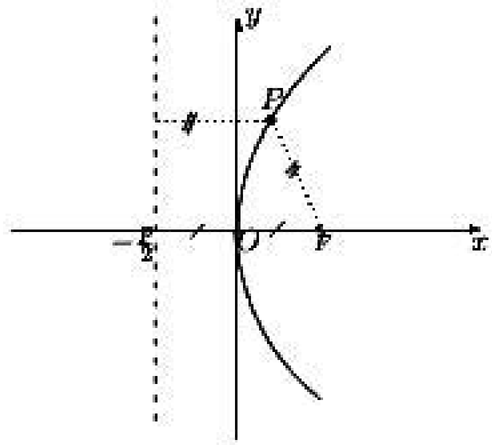


Figura 7.7: parabola in forma canonica con il fuoco sull'asse x.

Le equazioni (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3) e (7.1.4), costituiscono le cosiddette *forme canoniche delle coniche*.

Osservazioni ed esempi.

1. Data una ellisse, oppure una iperbole, in forma canonica e con i fuochi sull'asse x, le direttrici sono le rette di equazioni $x = \pm\frac{a^2}{c}$. Per la parabola (7.1.4) abbiamo la sola direttrice $x = -\frac{p}{2}$, che si può ottenere dall'equazione $x = -\frac{a^2}{c}$ prendendo $a = c = \frac{p}{2}$. Il valore dell'eccentricità (cfr. Esempio 7.5.5 a pag. 208) è $e = \frac{c}{a}$. Si ricava quindi che $0 \le e < 1$ per le ellissi, $e = 1$ per le parabole, $e > 1$ per le iperboli. In particolare $e = 0$ per le circonferenze.

2. **Forma unificata delle equazioni delle coniche.** Scriviamo l'equazione del luogo dei punti del piano per i quali il rapporto tra le distanze dal punto $F(c, 0)$ e dalla retta $\alpha : x = \frac{a^2}{c}$ è uguale ad $e = \frac{c}{a}$ (eccentricità della conica). Il luogo è formato dai punti P tali che $\overline{PF} = e \cdot \mathrm{d}(P, \alpha)$.

   Analiticamente otteniamo

   $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \cdot \left| x - \frac{a^2}{c} \right|.$$

   Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando otteniamo l'equazione

   $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

   Se $c < a$, cioè se $0 \le e < 1$, posto $a^2 - c^2 = b^2$ si ha $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, cioè una ellisse di eccentricità e. Se $c = a$, cioè se $e = 1$, abbiamo una parabola, essendo $\overline{PF} = \mathrm{d}(P, \alpha)$. Se $c > a$, cioè se $e > 1$, posto $a^2 - c^2 = -b^2$ si ha $-b^2x^2 + a^2y^2 + a^2b^2 = 0$, cioè una iperbole di eccentricità e.

3. L'equazione (7.1.1) può essere scritta nella forma equivalente $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Se invece consideriamo l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ abbiamo un luogo di punti a coordinate complesse, detto *ellisse immaginaria*.

4. Anche le equazioni canoniche (7.1.2) ed (7.1.3) delle iperboli vengono talvolta scritte nelle forme equivalenti $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ed $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, rispettivamente. □

7.2 CONICHE IN FORMA NON CANONICA

Vogliamo ora prendere in considerazione una conica in posizione qualsiasi rispetto ad un dato sistema di riferimento. Cominciamo a vedere come cambia l'equazione di una conica sotto l'azione di un movimento rigido piano, cioè una trasformazione che non altera la distanza tra due qualsiasi punti del piano.

7.2.1 Trasformazioni geometriche sulle coniche

Il più generico movimento rigido piano è rappresentato da una rototraslazione, cioè

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{cases} \tag{7.2.1}$$

dove x, y rappresentano le coordinate di un generico punto P prima della trasformazione, mentre x', y' forniscono le coordinate del punto P' ottenuto rototraslando P. Con φ si indica l'angolo di rotazione (in senso orario), e $\mathbf{v} = [a, b]$ è il vettore che descrive la traslazione (Fig. 7.8).

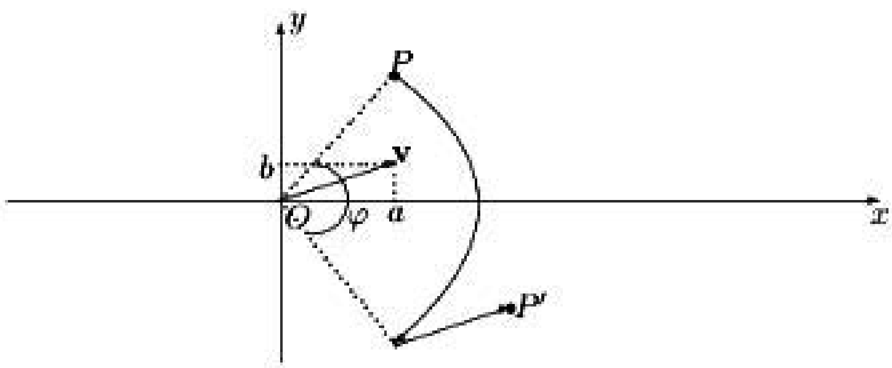


Figura 7.8: rototraslazione piana.

La trasformazione inversa della rototraslazione rappresentata dalle equazioni (7.2.1) è descritta nella maniera seguente

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi - a\cos\varphi + b\sin\varphi \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi - a\sin\varphi - b\cos\varphi. \end{cases} \tag{7.2.2}$$

Il teorema seguente consente una completa classificazione delle coniche sotto l'azione di una generica rototraslazione.

Teorema 7.1. *Sia γ un luogo di punti del piano euclideo $\mathbf{R}^2$. Allora γ è una conica se e solo se la sua equazione è del tipo*

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{7.2.3}$$

con $A, B, C \in \mathbf{R}$ non tutti nulli.

-Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che γ sia una conica degenere. Siano $ax + by + c = 0$ ed $a'x + b'y + c' = 0$ le equazioni delle due rette in cui γ è spezzata (cfr. Osservazione 2 a pagina 189). Allora l'equazione della conica risulta data da

$$f(x,y) = (ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0,$$

e quindi è del tipo (7.2.3) con $A = aa'$, $B = ab' + ba'$, $C = bb'$, $D = ac' + ca'$, $E = bc' + cb'$, $F = cc'$.
Se invece γ è una conica non degenere, cioè una ellisse, una iperbole oppure una parabola, possiamo sempre pensare di averla ridotta a forma canonica. Confrontando con le equazioni (7.1.1), (7.1.2), (7.1.3) e (7.1.4) si vede che in ogni caso si ottiene una equazione del tipo (7.2.3).

Consideriamo ora una equazione di secondo grado in x, y del tipo (7.2.3). È sempre possibile eliminare B mediante la rotazione di angolo φ tale che $\cot\varphi = \frac{A-C}{B}$. L'equazione (7.2.3) diventa

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0, \tag{7.2.4}$$

con A', C' non entrambi nulli. Abbiamo quindi i seguenti casi.

1. $A' \neq 0, C' \neq 0$.

   In tal caso, se consideriamo la traslazione

$$\begin{cases} x' = X - \frac{D'}{2A'} \\ y' = Y - \frac{E'}{2C'}, \end{cases} \tag{7.2.5}$$

   otteniamo una equazione del tipo $A_1X^2 + B_1Y^2 + C_1 = 0$, che rappresenta, a seconda dei valori A_1, B_1, C_1 una ellisse, una iperbole, una conica degenere in due rette reali distinte oppure una conica degenere in due rette immaginarie coniugate. Di conseguenza, anche l'equazione (7.2.3) rappresenta uno di questi casi.

2. $A' = 0, C' \neq 0$.

   In tal caso, l'equazione (7.2.4) diventa $C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$, e rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse x', oppure una conica degenere in due rette parallele (eventualmente coincidenti). Gli stessi casi sono pertanto rappresentati dall'equazione (7.2.3).

3. $A' \neq 0, C' = 0$.

   In tal caso, l'equazione (7.2.4) diventa $A'x'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$, e rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y', oppure una conica degenere in due rette parallele (eventualmente coincidenti). Gli stessi casi sono pertanto rappresentati dall'equazione (7.2.3). ■

Possiamo riassumere il precedente risultato dicendo che una conica in posizione generica nel piano xy è rappresentata da un polinomio di secondo grado in x, y uguagliato a zero.

7.2.2 Invarianti di una conica

Consideriamo l'equazione di una generica conica nella seguente forma

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{7.2.6}$$

Se poniamo $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1, 2, 3)$, gli *invarianti di una conica* sono i numeri seguenti:

- **Invariante cubico.** È il determinante della matrice simmetrica $A = [a_{ij}]$ associata alla conica, cioè

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{7.2.7}$$

- **Invariante quadratico.** È il determinante della matrice Q associata alla parte quadratica dell'equazione della conica, cioè

$$I_2 = \det Q = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{7.2.8}$$

- **Invariante lineare.** È la traccia di Q, cioè

$$I_1 = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} \tag{7.2.9}$$

Il motivo per cui questi numeri si chiamano invarianti è dato dal fatto che essi non vengono alterati da una rototraslazione qualsiasi. Applicando cioè la trasformazione (7.2.2) all'equazione (7.2.6), i valori di I_1, I_2, I_3 non cambiano. Supponiamo poi di moltiplicare tutti i coefficienti dell'equazione $f(x, y) = 0$, rappresentativa di una data conica, per uno stesso fattore $k \neq 0$. La conica non cambia, mentre gli invarianti si trasformano secondo le seguenti leggi

- $I_1' = kI_1$.
- $I_2' = k^2 I_2$.
- $I_3' = k^3 I_3$.

Essi vengono cioè alterati, rispettivamente, per un fattore lineare, quadratico e cubico, da cui derivano le definizioni date a questi numeri.

7.2.3 Classificazione metrica delle coniche

L'uso degli invarianti si rivela di particolare utilità per riconoscere il tipo di conica, nota la sua equazione generale. Possiamo infatti calcolare gli invarianti, e sfruttare la proprietà che essi non si alterano se si realizza una qualsiasi rototraslazione.
Abbiamo innanzitutto $I_3 = 0$ nel caso in cui la conica sia degenere. Tale condizione ci dice pertanto che il polinomio di secondo grado che rappresenta la conica si può scomporre in due fattori di primo grado. Eseguendo tale scomposizione stabiliamo se la conica è spezzata in due rette reali distinte, reali coincidenti oppure immaginarie coniugate.
Se invece $I_3 \neq 0$, la conica considerata è non degenere, e possiamo specificarne il tipo attraverso il segno dell'invariante quadratico. Ragionando sulle forme canoniche, notiamo che si ha una ellisse se $I_2 > 0$, una parabola se $I_2 = 0$, una iperbole se $I_2 < 0$. Possiamo poi ottenere ulteriori informazioni nella maniera seguente.

- Se la conica è una ellisse, calcoliamo il prodotto $I_1 I_3$. Se $I_1 I_3 < 0$, l'ellisse è reale. Se invece $I_1 I_3 > 0$, allora l'ellisse è immaginaria (cfr. Osservazione 3 a pagina 194). Se poi manca il termine in xy, ed i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali, allora si ha una circonferenza (reale o immaginaria).
- Se la conica è una iperbole, ed $I_1 = 0$, allora si ha una iperbole equilatera.

Viene così ottenuta una completa classificazione metrica delle coniche, cioè una classificazione a meno di movimenti rigidi nel piano euclideo. Questa mette in evidenza l'esistenza delle seguenti famiglie di coniche.

1. Ellissi reali se $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$, $I_1 I_3 < 0$ (in particolare circonferenze reali se $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$).
2. Ellissi immaginarie se $I_3 \neq 0$, $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$ (in particolare circonferenze immaginarie se $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$).
3. Parabole se $I_3 \neq 0$, $I_2 = 0$.
4. Iperboli se $I_3 \neq 0$, $I_2 < 0$ (in particolare iperboli equilatere se $I_1 = 0$).
5. Coniche spezzate in due rette secanti, reali distinte ($I_3 = 0$, $I_2 < 0$).
6. Coniche spezzate in due rette parallele ($I_3 = 0$, $I_2 = 0$).
7. Coniche spezzate in due rette secanti, immaginarie coniugate ($I_3 = 0$, $I_2 > 0$).

Abbiamo quindi sette famiglie fondamentali di coniche, di cui tre reali non degeneri, una immaginaria non degenere e tre degeneri.

Osservazioni ed esempi.

1. Se nell'equazione (7.2.4) risulta $A' > 0$, $C' > 0$, $D' = E' = F = 0$, allora la conica si riduce ad un punto, cioè due rette immaginarie coniugate.

2. **Similitudini piane.** La classificazione delle coniche, descritta nel Paragrafo 7.2.3, è valida anche quando nel piano euclideo si considerano trasformazioni più generali delle rototraslazioni, e precisamente, le similitudini. Le equazioni di una generica similitudine piana risultano

$$\begin{cases} x' = kx\cos\theta + ky\sin\theta + a \\ y' = -kx\sin\theta + ky\cos\theta + b, \end{cases} \tag{7.2.10}$$

essendo k il rapporto di similitudine, θ l'angolo di rotazione oraria, a e b le componenti traslatorie lungo gli assi cartesiani. Esplicitando le equazioni (7.2.10) rispetto ad x ed y, si ottengono le equazioni della trasformazione inversa

$$\begin{cases} x = Kx'\cos\theta - Ky'\sin\theta + A \\ y = Kx'\sin\theta + Ky'\cos\theta + B, \end{cases} \tag{7.2.11}$$

essendo $K = \frac{1}{k}$, $A = \frac{-a\cos\theta + b\sin\theta}{k}$, $B = \frac{-a\sin\theta - b\cos\theta}{k}$.

Applicando le formule (7.2.11) all'equazione $f(x, y) = 0$ di una conica si può poi verificare (con calcoli molto pesanti) che i nuovi valori I_1', I_2', I_3' degli invarianti sono legati ai vecchi dalle relazioni $I_1' = K^2 I_1$, $I_2' = K^4 I_2$ ed $I_3' = K^4 I_3$. Pertanto $I_3' = 0$

se e solo se $I_3 = 0$, e quindi le coniche degeneri sono sempre caratterizzate dall'annullarsi dell'invariante cubico. Inoltre, la classificazione delle coniche non degeneri è legata al segno dell'invariante quadratico, che resta immutato dal fattore K^4. Di conseguenza, anche ellissi, iperboli e parabole possono essere classificate a meno di similitudini. È inoltre ancora possibile il riconoscimento di ellissi reali, ellissi immaginarie, circonferenze ed iperboli equilatere nella stessa maniera precedentemente descritta. Ovviamente, nonostante le famiglie di coniche considerate si mantengano anche sotto l'azione di similitudini, queste possono alterare le proprietà metriche. Per esempio, una circonferenza viene sempre mutata in una circonferenza, ma può cambiare il raggio.

3. Se consideriamo il prodotto di due trinomi del tipo $ax + by + c$ ed $ax + by + d$, con $c \neq d$, si ottiene un polinomio di secondo grado $f(x, y)$. In base al Teorema 7.1, anche l'equazione $f(x, y) = 0$ rappresenta una conica. Questa risulta spezzata nella coppia di rette parallele distinte di equazioni $ax + by + c = 0$ ed $ax + by + d = 0$. Come abbiamo visto nel Paragrafo 7.1, le coniche degeneri si ottengono sezionando un cono circolare retto con un piano passante per il vertice, e quindi sono spezzate in due rette che devono sempre intersecarsi in questo punto. Possiamo tuttavia descrivere geometricamente anche il caso di due rette parallele distinte, immaginando di sezionare coni il cui vertice si sposta progressivamente lungo l'asse. Quando tende all'infinito si ottiene come caso limite un cilindro, le cui sezioni con un piano parallelo alle generatrici sono appunto costituite da due rette parallele distinte.

4. Si può dare una interpretazione geometrica anche al caso di una conica degenere in due rette parallele immaginarie. A tale scopo bisogna considerare particolari sezioni di un cono immaginario, avente il vertice reale ma all'infinito. Si tratta cioè di sezionare un cilindro immaginario (cfr. Capitolo 8).

5. La condizione A, B, C non tutti nulli presente nell'enunciato del Teorema 7.1 è necessaria per avere un polinomio di secondo grado. In caso contrario si ottiene una singola retta. Si potrebbe comunque includere anche questa situazione come caso limite di conica degenere, spezzata nella retta di equazione $Dx + Ey + F = 0$ ed un luogo di punti all'infinito, detto *retta impropria*. La questione trova giustificazione nella Geometria Proiettiva. Si veda in proposito anche il Paragrafo 8.1.2. □

7.3 RIDUZIONE A FORMA CANONICA

Consideriamo una conica non degenere, scritta inizialmente nella forma generale (7.2.3), e cerchiamo di determinare un nuovo sistema di riferimento, rispetto al quale la conica considerata sia rappresentata dalla sua equazione canonica. La costruzione di un tale sistema di riferimento avviene rototraslando quello iniziale, in maniera che uno dei nuovi assi cartesiani coincida con l'asse principale della conica, e la nuova origine con il centro della conica, o con il vertice se si tratta di una parabola. Innanzitutto si considera una rotazione, il cui effetto geometrico consiste nel disporre l'asse principale della conica parallelamente ad uno degli assi cartesiani. Se partiamo dall'equazione generale (7.2.3) e consideriamo la formula (7.2.4), possiamo osservare che l'effetto prodotto dalla rotazione si traduce analiticamente nell' annullamento del coefficiente B del termine in xy. Riferendoci all'equazione (7.2.6) scompare il coefficiente a_{12}, il che equivale a diagonalizzare la matrice simmetrica Q associata alla parte quadratica dell'equazione della conica. Detta M la matrice ortogonale speciale che diagonalizza Q si ha pertanto

$$M^t Q M = M^t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

essendo λ_1, λ_2 gli autovalori di Q. Otteniamo quindi un'equazione del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a'_{13}x + a'_{23}y + a'_{33} = 0$.

A questo punto, come si è visto nel Paragrafo 7.2.1, possono presentarsi due casi.

• Se la conica è un'ellisse, oppure un'iperbole, gli autovalori λ_1 e λ_2 sono entrambi non nulli. La traslazione consente allora di spostare il centro nell'origine. Analiticamente, i coefficienti dei termini di secondo grado non cambiano, mentre si annullano i coefficienti dei termini in x ed y. L'equazione diventa pertanto $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 = 0$, con $\lambda_3 \neq 0$.

• Se la conica è una parabola abbiamo $I_2 = 0$, e quindi uno degli autovalori, diciamo λ_1, è nullo. La traslazione permette di spostare il vertice nell'origine, e quindi, poiché il vertice appartiene alla parabola, il termine noto si annulla. Contemporaneamente si annulla anche il coefficiente di uno dei termini in x ed y, diciamo di quello in y. Otteniamo pertanto l'equazione $\lambda_2 y^2 + \lambda_3 x = 0$, con $\lambda_3 \neq 0$.

In entrambi i casi il termine λ_3 può essere calcolato mediante gli invarianti, e risulta

- $\lambda_3 = \frac{I_3}{I_2}$, per ellissi ed iperboli.
- $\lambda_3 = \pm 2\lambda_2 \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}$, per la parabola.

Si ottiene così l'equazione canonica di una qualsiasi conica non degenere.

Osservazioni ed esempi.

1. Dalle proprietà delle matrici diagonalizzabili sappiamo che le colonne di M sono formate dagli autovettori normalizzati di Q. Quindi, diagonalizzare Q è equivalente a trasformare la base di autovettori nella base canonica di $\mathbf{R}^2$.

   Quando applichiamo la rotazione ad una ellisse od una iperbole, gli assi di simmetria assumono le direzioni degli assi cartesiani, cioè della base canonica. Quindi, le direzioni degli assi di simmetria di una ellisse o di una iperbole coincidono con le direzioni degli autovettori di Q.

   Se invece la conica è una parabola, l'autospazio associato all'autovalore nullo è parallelo all'asse della parabola, mentre l'altro autospazio ha la stessa direzione della retta tangente nel vertice.

2. **Determinazione analitica del centro.** Per determinare il centro di un'ellisse o di un'iperbole possiamo applicare alla conica la rotazione descritta dalla matrice M che diagonalizza la parte quadratica Q, cioè si considera la trasformazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Il centro $C(x_C, y_C)$ viene allora trasformato in un punto $C'(x_{C'}, y_{C'})$. Applichiamo poi la traslazione che porta $C'(x_{C'}, y_{C'})$ nell'origine

$$\begin{cases} x'' = x' - x_{C'} \\ y'' = y' - y_{C'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' + x_{C'} \\ y' = y'' + y_{C'}. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della conica (dopo la rotazione) si ottiene una nuova equazione in x'', y'', che deve coincidere con la forma canonica. Pertanto bisogna imporre che i coefficienti dei termini di primo grado x'' ed y'' siano nulli, il che fornisce $x_{C'}$ ed $y_{C'}$. Il centro $C(x_C, y_C)$ della conica si ottiene sostituendo queste coordinate nella relazione tra le coordinate x, y ed x', y' determinata dalla matrice M della rotazione iniziale.

Un metodo alternativo sfrutta il fatto che il centro C è l'unica soluzione del sistema

$$Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix},$$

essendo Q la matrice associata alla parte quadratica della conica.

3. **Determinazione analitica dell'asse di una parabola.** Sappiamo che l'asse di una parabola è una retta del tipo $y = mx + q$, dove m è il coefficiente angolare dell'autospazio associato all'autovalore nullo. Per determinare q si può selezionare arbitrariamente una particolare retta ortogonale all'asse, e considerare i due punti P_1, P_2 in cui essa interseca la parabola. Il punto medio M del segmento P_1P_2 appartiene all'asse. Questo è vero anche se i punti P_1, P_2 sono immaginari coniugati (cioè se la retta scelta non ha intersezioni reali con la parabola), in quanto il loro punto medio ha comunque coordinate reali. Pertanto possiamo ricavare q imponendo che le coordinate di M verifichino l'equazione della retta. Si verifica che l' asse di una parabola di equazione $(Ax + By)^2 + Cx + Dy + E = 0$ è la retta di equazione $2Ax(A^2 + B^2) + 2By(A^2 + B^2) + AC + BD = 0$.

4. **Determinazione analitica del vertice di una parabola.** Per determinare il vertice di una parabola possiamo considerare la sua intersezione con la generica retta $y = mx + q$ ortogonale all'asse (nella quale il coefficiente angolare m è uguale a quello dell'autospazio associato all'autovalore non nullo), e selezionare poi il valore di q che rende nullo il discriminante Δ dell'equazione risolvente il sistema. In corrispondenza di tale q si ha la retta tangente, ed il corrispondente punto di contatto è il vertice della parabola. Oppure si può determinare innanzitutto l'asse della parabola con il metodo descritto nell'Osservazione 3, e ricavare il vertice attraverso l'intersezione tra l'asse e la parabola. □

7.4 FASCI DI CONICHE

Un *fascio di coniche* è l'insieme delle ∞^1 coniche che soddisfano quattro condizioni lineari indipendenti. Poiché l'equazione di una singola conica dipende da 5 parametri essenziali, si ottiene un fascio di coniche mediante la combinazione lineare tra due qualsiasi coniche, di equazioni $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$, dette *coniche generatrici* del fascio. Un fascio di coniche si scrive quindi nella forma seguente

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{7.4.1}$$

Assegnando a λ un qualsiasi valore reale si ottiene una qualsiasi conica del fascio, con l'eccezione della conica generatrice avente equazione $g(x,y)=0$. Per convenzione si associa a questa conica il valore $\lambda=\infty$ del parametro.

Teorema 7.2. *Un fascio di coniche è individuato da due sue qualsiasi coniche.*

-*D*imostrazione. Scrivendo l'equazione del fascio di coniche nella forma

$$F(x,y,\lambda): f(x,y)+\lambda g(x,y)=0,$$

le sue generatrici hanno equazioni $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$ rispettivamente. Se $f'(x,y)=0$ e $g'(x,y)=0$ descrivono analiticamente due coniche di $F(x,y,\lambda)=0$, devono esistere due valori λ_1,λ_2 del parametro λ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$, tali che

$$f'(x,y)=f(x,y)+\lambda_1 g(x,y) \ \text{ e } \ g'(x,y)=f(x,y)+\lambda_2 g(x,y).$$

Mettendo a sistema ricaviamo

$$f(x,y)=\frac{\lambda_1 g'(x,y)-\lambda_2 f'(x,y)}{\lambda_1-\lambda_2} \ \text{ e } \ g(x,y)=\frac{f'(x,y)-g'(x,y)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Quindi, lo stesso fascio $F(x,y,\lambda)=0$ può essere scritto nella forma seguente

$$F(x,y,\lambda)=\frac{\lambda_1 g'(x,y)-\lambda_2 f'(x,y)}{\lambda_1-\lambda_2}+\lambda\frac{f'(x,y)-g'(x,y)}{\lambda_1-\lambda_2}=0,$$

e quindi

$$F(x,y,\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}f'(x,y)+\frac{\lambda_1-\lambda}{\lambda_1-\lambda_2}g'(x,y)=0.$$

Pertanto $F(x,y,\lambda)$ si esprime come combinazione lineare delle coniche di equazioni $f'(x,y)=0$ e $g'(x,y)=0$, che rappresentano in tal caso le generatrici, cioè, dato un fascio di coniche, le generatrici possono essere due sue qualsiasi coniche. ■

I fasci di coniche possono essere classificati in funzione del numero di *punti base*, i punti in cui le coniche generatrici si intersecano.

Studiare un fascio di coniche significa stabilire per quali valori del parametro λ si hanno ellissi, iperboli, parabole o coniche degeneri.

Teorema 7.3. *In ogni fascio di coniche esistono*

- *Tre coniche degeneri.*
- *Due parabole.*
- *Infinite ellissi immaginarie.*
- *Infinite ellissi reali, tra le quali, al più una circonferenza.*
- *Infinite iperboli, tra le quali, al più una iperbole equilatera.*

-Dimostrazione. Sia $F(x, y, \lambda) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) l'equazione di un generico fascio di coniche. Gli invarianti dipendono dal parametro λ, ed in generale I_1 dipende linearmente da λ, I_2 dipende da λ^2, mentre I_3 dipende da λ^3.
Le coniche degeneri si ottengono in corrispondenza dei valori di λ per i quali $I_3 = 0$, il che fornisce una equazione di terzo grado in λ. Quindi, in un fascio di coniche esistono al più tre coniche degeneri.
Quando $I_3 \neq 0$, consideriamo il segno di I_2. Poiché I_2 è un polinomio di secondo grado in λ, troviamo, in generale, due valori λ_1, λ_2 in corrispondenza dei quali $I_2 = 0$. Per tali valori di λ le coniche sono parabole. Internamente ed esternamente all'intervallo determinato da λ_1 e λ_2 risulta $I_2 \neq 0$, per cui abbiamo ellissi dove $I_2 > 0$ ed iperboli dove $I_2 < 0$. Tra le ellissi, possiamo averne infinite immaginarie, corrispondenti agli intervalli in cui $I_1 I_3 > 0$, ed infinite reali, corrispondenti ai valori di λ per i quali $I_1 I_3 < 0$. Tra le ellissi reali, una al più è una circonferenza.
Tra le iperboli, una al più è equilatera, e corrisponde all'eventuale valore di λ per il quale $I_1 = 0$. ■

7.4.1 Esempio di studio di un fascio di coniche

Illustriamo ora, con un esempio, come si procede per lo studio di un generico fascio di coniche. Consideriamo il fascio di equazione

$$F(x, y, \lambda) : x^2 + (1 + \lambda)xy - \lambda y^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 2)y = 0,$$

essendo λ un parametro reale.

<u>**Coniche generatrici.**</u> Per il Teorema 7.2, un fascio di coniche può essere descritto mediante la combinazione lineare di due sue qualsiasi coniche, ottenute in corrispondenza di due valori assegnati arbitrariamente al parametro. In particolare possiamo scrivere l'equazione del fascio separando i termini che contengono il parametro da quelli che non lo contengono

$$x^2 + xy - 2x - 2y + \lambda(xy - y^2 + x - y) = 0.$$

In questa maniera abbiamo scritto il fascio come combinazione lineare delle coniche corrispondenti ai valori $\lambda = 0$ e $\lambda = \infty$

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow x^2 + xy - 2x - 2y = 0 \\ \lambda = \infty &\Rightarrow xy - y^2 + x - y = 0. \end{aligned}$$

<u>**Classificazione metrica delle coniche del fascio.**</u> Calcolando gli invarianti otteniamo

$$I_1 = 1 - \lambda, \quad I_2 = -\frac{\lambda^2 + 6\lambda + 1}{4}, \quad I_3 = \frac{\lambda}{2}(-3\lambda + 2).$$

Le coniche degeneri si ottengono in corrispondenza dei valori che annullano l'invariante cubico, quindi per $\lambda = 0$ e $\lambda = \frac{2}{3}$. Bisogna poi aggiungere anche il valore $\lambda = \infty$, poiché esso fornisce la conica $xy - y^2 + x - y = 0$, degenere nelle due rette $x - y = 0$ ed $y + 1 = 0$.

Esistono quindi tre coniche degeneri, corrispondenti ai valori $\lambda = 0, \lambda = \frac{2}{3}, \lambda = \infty$ (cfr. Figura 7.9).

L'invariante quadratico $I_2 = -\dfrac{\lambda^2 + 6\lambda + 1}{4}$ si annulla per $\lambda = -3 \pm 2\sqrt{2}$, ed otteniamo in corrispondenza le due parabole del fascio. Per $\lambda < -3 - 2\sqrt{2}$ e $\lambda > -3 + 2\sqrt{2}$ abbiamo iperboli, mentre per $-3 - 2\sqrt{2} < \lambda < -3 + 2\sqrt{2}$ si ottengono ellissi. L'invariante lineare si annulla per $\lambda = 1$, ed in corrispondenza di questo valore si ha una iperbole equilatera. Inoltre si ha $I_1 I_3 = (1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}(-3\lambda + 2)\right)$, e tale prodotto è negativo per $\lambda < 0$ e $\dfrac{2}{3} < \lambda < 1$. Poiché i valori del parametro che forniscono ellissi sono sempre negativi, le ellissi del fascio sono tutte reali.

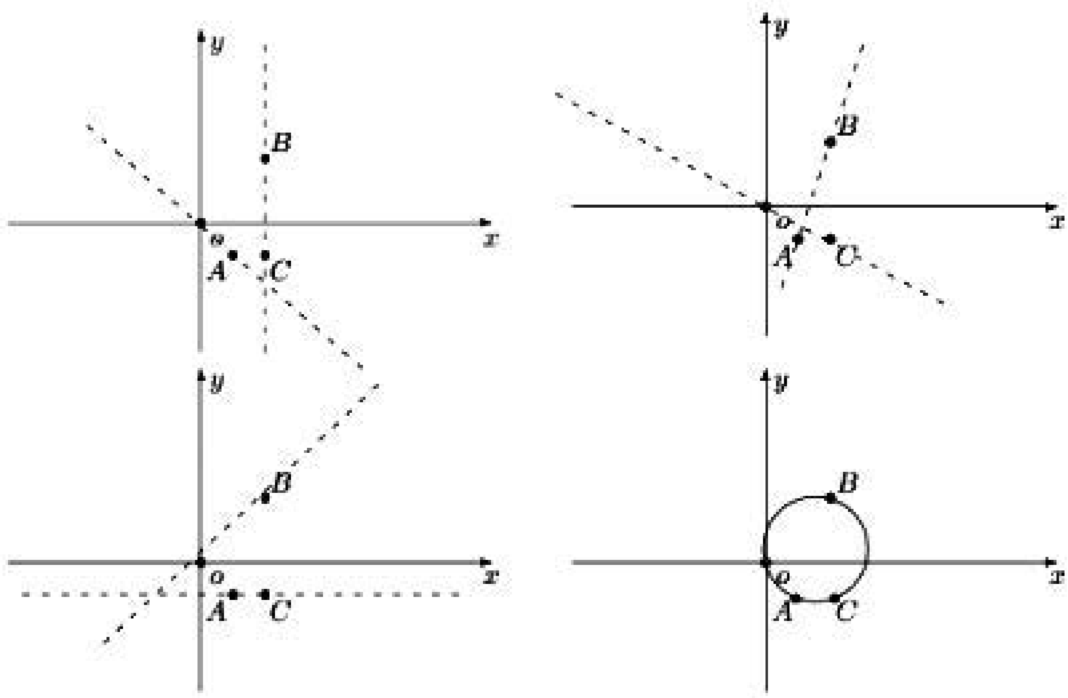


Figura 7.9: le tre coniche degeneri (di cui due generatrici), la circonferenza ed i punti base del fascio di coniche di equazione $F(x, y, \lambda) : x^2 + (1+\lambda)xy - \lambda y^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 2)y = 0$.

Eventuale circonferenza. Un fascio ammette una circonferenza se esiste un valore del parametro che rende uguali i coefficienti di x^2 ed y^2 e, contemporaneamente, annulla il coefficiente di xy. Nel fascio considerato ciò avviene effettivamente, per il valore $\lambda = -1$. L'equazione della circonferenza del fascio risulta quindi $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ (cfr. Figura 7.9).

Punti base. I punti base del fascio sono i punti appartenenti a tutte le coniche del fascio. Essi si ottengono intersecando tra loro due qualsiasi coniche del fascio. Conviene intersecare, se possibile, due coniche degeneri. Nel caso considerato possiamo intersecare le generatrici, e si ha

$$\begin{cases} x^2+xy-2x-2y=0 \\ xy-y^2+x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-2)=0 \\ (x-y)(y+1)=0. \end{cases}$$

Abbiamo quindi quattro punti base, dati da $O(0,0)$, $A(1,-1)$, $B(2,2)$ e $C(2,-1)$ (cfr. Figura 7.9). Per questi punti passano tutte le coniche del fascio considerato.

Osservazioni ed esempi.

1. Possiamo rappresentare analiticamente un fascio di coniche anche mediante due parametri reali (non entrambi essenziali) α e β, attraverso l'equazione $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)=0$, con α e β non contemporaneamente nulli. In generale è più comodo lavorare con un solo parametro essenziale, anche se l'uso di due parametri mette immediatamente in evidenza che le coniche di equazione $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$ fanno entrambe parte del fascio. Esse corrispondono infatti alle coppie (α,β) uguali ad $(1,0)$ e $(0,1)$ rispettivamente.
   Possiamo comunque ricavare questa proprietà anche utilizzando un solo parametro. Infatti, se $\alpha\neq 0$, le coniche descritte dalla combinazione lineare $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)=0$ corrispondono alle coniche rappresentate nella forma $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$, pur di porre $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$. Se facciamo variare con continuità il parametro α, allora, per $\alpha\to 0$, abbiamo $\lambda\to\infty$. Di conseguenza, possiamo dire che, nella rappresentazione analitica $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$, la conica di equazione $g(x,y)=0$ si ottiene come conica limite per $\lambda\to\infty$.

2. Nell'esempio descritto nel Paragrafo 7.4.1 le due coniche generatrici sono anche coniche degeneri (cfr. Figura 7.9). Questo, ovviamente, non è sempre vero, in quanto, in base al Teorema 7.2, per uno stesso fascio possiamo selezionare infinite coppie di coniche generatrici.

3. Spesso, l'equazione di un fascio di coniche non viene assegnata nella forma $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$, ma in maniera che le coniche generatrici non siano immediatamente messe in evidenza. Quando ciò avviene, nell'analisi dei valori del parametro λ non bisogna dimenticare di studiare il caso in cui $\lambda\to\infty$, indicando il tipo di conica che si ottiene in tale situazione limite.

4. Consideriamo l'insieme di coniche di equazione $x^2+2xy+4x+\lambda^2(y^2-3x+1)=0$, $(\lambda\in\mathbb{R})$. Esso è formato da ∞^1 coniche, poiché dipende da un solo parametro reale essenziale. Tuttavia, non è un fascio di coniche, poiché il parametro non è lineare.

5. Nel Teorema 7.3 abbiamo visto che, in generale, in un fascio di coniche, esistono infinite ellissi (tra cui, al più, una circonferenza), infinite iperboli (una equilatera),

due parabole e tre coniche degeneri. Possono però esistere particolari fasci in cui tutte le coniche sono dello stesso tipo. Per esempio, possiamo avere fasci di coniche formati solo da parabole, nel caso in cui l'invariante quadratico I_2 sia identicamente nullo. Questi fasci vengono anche detti *fasci di parabole*. Tale situazione può essere ottenuta considerando la combinazione lineare tra due parabole γ_1 e γ_2 aventi lo stesso asse di simmetria. Infatti, due tali parabole devono avere la stessa parte quadratica, cioè hanno equazioni del tipo $\gamma_1 : (Ax + By)^2 + Cx + Dy + E = 0$ e $\gamma_2 : (Ax + By)^2 + C'x + D'y + E' = 0$. Quindi la loro combinazione lineare genera il fascio di equazione

$$F(x, y, \lambda) : \gamma_1 + \lambda\gamma_2 = (Ax + By)^2(1 + \lambda) + (C + \lambda C')x + (D + \lambda D')y + (E + \lambda E') = 0.$$

Esso è formato da sole parabole, poiché I_2 è sempre nullo.

6. **<u>Fasci di circonferenze.</u>** Un tipo di fascio in cui tutte le coniche hanno la stessa natura si ottiene mediante la combinazione lineare di due circonferenze $\gamma_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $\gamma_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Infatti, in questo caso, il fascio ha equazione

$$F(x, y, \lambda) : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

e, raccogliendo i termini simili, risulta

$$F(x, y, \lambda) : (1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 + (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + c_1 + \lambda c_2 = 0.$$

Per $\lambda \neq -1$ possiamo dividere tutto per $1 + \lambda$, ottenendo ancora l'equazione di una circonferenza. Per $\lambda = -1$ la conica degenera invece nella retta (cfr. Osservazione 5 a pagina 199) di equazione

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0, \tag{7.4.2}$$

detta *asse radicale* del fascio. Pertanto, tutte le coniche non degeneri sono circonferenze, e per questo motivo si parla di *fascio di circonferenze*. Inoltre, si verificano facilmente le seguenti proprietà

- Il centro della generica circonferenza del fascio ha coordinate

$$C\left(-\frac{a_1 + \lambda a_2}{2(1 + \lambda)}, -\frac{b_1 + \lambda b_2}{2(1 + \lambda)}\right), \tag{7.4.3}$$

  mentre il generico raggio risulta

$$R = \sqrt{\frac{(a_1 + \lambda a_2)^2 + (b_1 + \lambda b_2)^2}{4(1 + \lambda)^2} - \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda}}. \tag{7.4.4}$$

- Detto C il generico centro, e considerando la (7.4.3), si puó eliminare λ nel sistema

$$\begin{cases} x = x_C \\ y = y_C, \end{cases}$$

ottenendo una equazione lineare in x, y, cioè una retta. Ciò significa che i centri di tutte le circonferenze del fascio sono allineati. La retta che li contiene si dice *retta dei centri* ed è ortogonale all'asse radicale.

- Se γ_1 e γ_2 si intersecano in due punti A e B, abbiamo un fascio con due punti base, e la retta AB coincide con la (7.4.2).

- Se γ_1 e γ_2 sono tangenti in un punto A, esso è l'unico punto base, e l'asse radicale coincide con la retta tangente in A a tutte le circonferenze del fascio. □

7.5 APPROFONDIMENTI

Facciamo di seguito alcune considerazioni sintetiche riguardanti le proprietà di simmetria delle coniche, già discusse precedentemente per via analitica.

7.5.1 Asse principale

L'asse principale di una conica è asse di simmetria ortogonale della conica. Infatti possiamo osservare che la superficie conica $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto al piano π_2, contenente l'asse di rotazione e la sua proiezione ortogonale sul piano sezione π_1. Quindi, $\mathcal{C} \cap \pi_1$, cioè la conica, è simmetrica rispetto a $\pi_2 \cap \pi_1$.

7.5.2 Centro di una conica

Il centro di una conica è centro di simmetria della conica. Infatti, la retta passante per il centro ed ortogonale all'asse principale è un ulteriore asse di simmetria. Di conseguenza, il centro è centro di simmetria. Se poi la conica è una circonferenza, il piano π_1 è ortogonale all'asse σ del cono, per cui π_2 è indeterminato, potendo variare nel fascio di piani di sostegno σ. Quindi, ogni retta passante per il centro è asse di simmetria della circonferenza.

7.5.3 Fuochi di una conica

Vogliamo descrivere il significato geometrico di *fuoco di una conica* da un punto di vista elementare. Diciamo che una sfera è inscritta in un cono circolare retto se ogni generatrice del cono è tangente alla sfera. Il centro di una tale sfera appartiene quindi all'asse di rotazione del cono.

Consideriamo poi una ellisse, ottenuta sezionando la superficie $\mathcal{C}$ di un cono circolare retto di asse s, con un piano π non passante per il vertice. Per ogni punto $C \in s$, esiste una sfera $S(C)$, di centro C, inscritta nel cono. In particolare, imponendo che la distanza di C da π sia uguale alla distanza di C dalle generatrici del cono, si determinano due posizioni,

C_1, C_2 di C, per le quali le sfere inscritte $\mathcal{S}(C_1)$ e $\mathcal{S}(C_2)$ sono anche tangenti al piano π (**Fig.** 7.10).

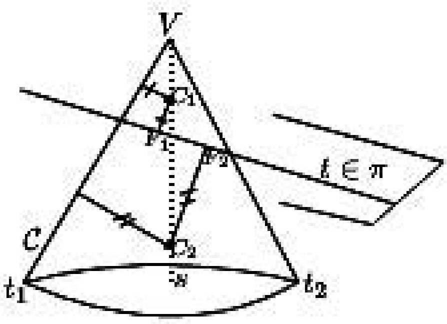


Figura 7.10: fuochi di una conica.

Sia π_1 il piano contenente s e la sua proiezione ortogonale su π, e sia $t = \pi \cap \pi_1$. Il piano π_1 taglia su $\mathcal{C}$ due generatrici, t_1 e t_2, che formano, insieme alla retta t, un triangolo T. Allora, i punti C_1 e C_2 possono essere ottenuti, rispettivamente, come centri delle circonferenze inscritta ed exinscritta a T.
I punti F_1 ed F_2 in cui $\mathcal{S}(C_1)$ ed $\mathcal{S}(C_2)$ sono tangenti a π sono i fuochi dell'ellisse.
Se la conica considerata è una iperbole si ottengono alla stessa maniera due fuochi, mentre, nel caso della parabola, il fuoco è unico.
Anche nel caso in cui la conica sia una circonferenza il fuoco è unico, e coincide con il centro.
Possiamo quindi dire che un fuoco di una conica è il punto di tangenza tra una sfera $\mathcal{S}$ inscritta in un cono circolare retto $\mathcal{C}$ ed il piano π che taglia su $\mathcal{C}$ la conica stessa. In particolare, i fuochi di una conica appartengono all'asse principale.

7.5.4 Direttrice di una conica

Anche la nozione di direttrice può essere descritta geometricamente per via sintetica.
Sia $\Gamma = \mathcal{C} \cap \pi$ una conica ottenuta intersecando il cono $\mathcal{C}$ con il piano π. I punti di contatto tra $\mathcal{C}$ e la sfera tangente in F a π in esso inscritta, descrivono una circonferenza χ. La *direttrice* relativa ad un fuoco F di γ è la retta che si ottiene intersecando π con il piano contenente la circonferenza χ.

7.5.5 Studio sintetico dell'eccentricità.

Vogliamo qui descrivere un metodo sintetico per giungere alla nozione di eccentricità di una conica, già studiata in termini algebrici nell'Osservazione 2 a pagina 193. Lavoriamo in particolare con ellissi, in quanto i risultati si estendono poi alle altre coniche non degeneri con considerazioni analoghe.

Sia quindi Γ_1 una ellisse ottenuta sezionando un cono $\mathcal{C}$ con un piano π_1. Se consideriamo un piano $\pi_2 \parallel \pi_1$, allora la conica $\Gamma_2 = \pi_2 \cap \mathcal{C}$ è ancora una ellisse.

Siano t_1 e t_2 gli assi principali di Γ_1 e Γ_2, e siano F_1, F_2 i fuochi di Γ_1 e Γ_2 rispettivamente, situati dalla stessa parte di t_1 e t_2 rispetto all'asse di rotazione σ di $\mathcal{C}$. Siano poi C_1 e C_2 i centri delle sfere $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ inscritte in $\mathcal{C}$ e tangenti a π_1 e π_2 in F_1 ed F_2 (Fig. 7.11)

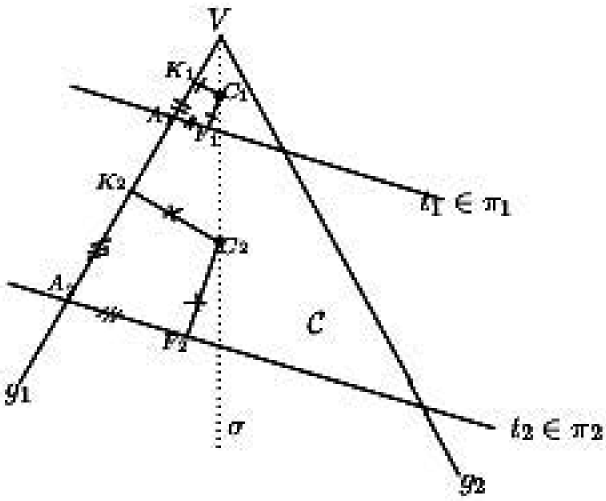


Figura 7.11: sezioni ellittiche parallele.

Siano g_1, g_2 le generatrici del cono $\mathcal{C}$ appartenenti al piano π contenente σ, t_1, t_2. Siano $A_1 = t_1 \cap g_1$ e K_1 il punto di tangenza tra g_1 e la sfera $\mathcal{S}_1$. Allora $\overline{A_1F_1} = \overline{A_1K_1}$.
Analogamente, detti $A_2 = t_2 \cap g_2$ e K_2 il punto di tangenza tra g_2 e la sfera $\mathcal{S}_2$, abbiamo $\overline{A_2F_2} = \overline{A_2K_2}$ (Fig. 7.11).
I triangoli $F_1A_1K_1$ ed $F_2A_2K_2$ sono quindi isosceli con lo stesso angolo al vertice, per cui risultano simili tra loro. Di conseguenza, abbiamo $\overline{A_1F_1} : \overline{A_2F_2} = \overline{F_1K_1} : \overline{F_2K_2}$.

Analogamente, deduciamo la similitudine dei triangoli $F_1C_1K_1$ ed $F_2C_2K_2$, e quindi $\overline{C_1F_1} : \overline{C_2F_2} = \overline{F_1K_1} : \overline{F_2K_2}$.
Le precedenti relazioni implicano che $\overline{A_1F_1} : \overline{A_2F_2} = \overline{C_1F_1} : \overline{C_2F_2}$.
Osserviamo poi che, detti H_1, H_2 i centri di Γ_1, Γ_2, anche i triangoli rettangoli $C_1F_1H_1$ e $C_2F_2H_2$ risultano simili, per cui abbiamo anche $\overline{C_1F_1} : \overline{C_2F_2} = \overline{H_1F_1} : \overline{H_2F_2}$.
Pertanto ricaviamo che $\overline{A_1F_1} : \overline{A_2F_2} = \overline{H_1F_1} : \overline{H_2F_2}$, da cui $\overline{H_1A_1} : \overline{H_1F_1} = \overline{H_2A_2} : \overline{H_2F_2}$.
Possiamo quindi dire che per sezioni ellittiche parallele il rapporto tra le distanze del centro da un fuoco e dal vertice principale corrispondente si mantiene costante. Questo rapporto si dice *eccentricità*. Lo stesso risultato può essere ottenuto anche per sezioni iperboliche parallele. Nel caso di sezioni paraboliche parallele il risultato è ancora vero, ma l'eccentricità è sempre uguale ad 1. Per le circonferenze invece il valore dell'eccentricità è sempre nullo.

Osservazioni ed esempi.

1. Le coniche degeneri possono sempre essere pensate come una coppia di rette, complesse coniugate, reali coincidenti o reali distinte, secondo che siano degeneri in un punto, una retta o due rette.

2. Attenzione a non ritenere l'iperbole l'unione di due parabole. Infatti, una parabola non possiede asintoti. □

Capitolo 8

LE QUADRICHE

8.1 NOZIONI PRELIMINARI

Abbiamo visto che le coniche (degeneri e non degeneri), forniscono la rappresentazione geometrica di tutti e soli i luoghi di punti di un piano le cui coordinate verificano una equazione algebrica di secondo grado in due variabili (cfr. Teorema 7.1). Vogliamo ora estendere questo studio allo spazio $\mathbb{R}^3$, riferito a coordinate cartesiane x, y, z, considerando i luoghi di punti le cui coordinate soddisfano una equazione a coefficienti reali del tipo

$$f(x,y,z) : a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{8.1.1}$$

essendo $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ numeri reali. Un tale luogo geometrico, rappresentato da un polinomio di secondo grado in tre variabili uguagliato a zero, prende il nome di *quadrica*. Come per le coniche, siamo interessati a problemi di classificazione, studio delle principali proprietà geometriche, determinazione delle forme canoniche e costruzione del riferimento rispetto al quale una quadrica è ridotta alla sua forma canonica.

8.1.1 Invarianti di una quadrica

Se lavoriamo in uno spazio euclideo, possiamo cambiare il sistema di riferimento mediante una rototraslazione. Le proprietà metriche di una quadrica restano ovviamente inalterate, mentre cambia il polinomio che la rappresenta analiticamente. Tuttavia, anche a livello algebrico, abbiamo alcune proprietà di invarianza, quantificate da numeri reali detti *invarianti della quadrica*. Essi non vengono mutati da alcuna rototraslazione dello spazio. Gli invarianti di una quadrica di equazione (8.1.1) sono dati da

- **Invariante quartico.** È il determinante della matrice simmetrica $A = [a_{ij}]$ associata alla quadrica, cioè

$$I_4 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{8.1.2}$$

- **Invariante cubico.** È il determinante della matrice Q associata alla parte quadratica dell'equazione della quadrica, cioè

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{8.1.3}$$

- **Invariante quadratico.**

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{8.1.4}$$

- **Invariante lineare.**

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{8.1.5}$$

Come già visto per le coniche (cfr. Paragrafo 7.2.2), i nomi assegnati ai singoli invarianti trovano giustificazione nel fatto che, se moltiplichiamo per uno stesso fattore $k \neq 0$ tutti i coefficienti dell'equazione che rappresenta una data quadrica, questi numeri si alterano per un fattore k^4, k^3, k^2 e k rispettivamente.

Osservazioni ed esempi.

1. Dal momento che almeno uno tra i 10 parametri che si utilizzano per scrivere l'equazione di una generica quadrica è diverso da zero, abbiamo 9 parametri essenziali. Questo significa che per costruire una particolare quadrica si devono assegnare 9 condizioni lineari indipendenti. Tuttavia, non essendo noto in partenza quali parametri siano diversi da zero, è necessario lasciare parametrici tutti i 10 coefficienti, finché non si determina una relazione che consenta di stabilire con certezza che uno di essi è non nullo. Solo a questo punto possiamo dividere tutti i coefficienti per quel valore ed ottenere i parametri essenziali.

2. Consideriamo la quadrica Ω di equazione $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6xz + z^2 - 4x = 0$. La matrice simmetrica A ad essa associata è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I suoi invarianti sono dati da

$$I_4 = \det A = -16, \quad I_3 = -33, \quad I_2 = -1, \quad I_1 = 6.$$

3. Le quadriche per le quali si annulla il determinante della matrice simmetrica ad esse associata vengono dette *quadriche degeneri*, in analogia a quanto avviene per le coniche. Tuttavia, a differenza delle coniche, una quadrica *degenere* non è detto che sia anche *spezzata* (cfr. Paragrafo 8.2.1 e Paragrafo 8.2.2).

4. La parte quadratica dell'equazione (8.1.1) di Ω, è il polinomio

$$F(x, y, z) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

L'invariante cubico I_3 è il determinante della matrice simmetrica Q associata a tale forma quadratica. Come per le coniche, il fatto che sia $I_3 = 0$, oppure $I_3 \neq 0$, descrive particolari proprietà di simmetria della quadrica (cfr. Paragrafo 8.4.1).

5. Sia S una sfera di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio R. Sappiamo che l'equazione di S è data da $S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, cioè

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0. \tag{8.1.6}$$

Di conseguenza S è una particolare quadrica. La matrice simmetrica A ad essa associata è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 \end{bmatrix}$$

I suoi invarianti sono dati da

$$I_4 = \det A = -R^2, \quad I_3 = 1, \quad I_2 = 3, \quad I_1 = 3.$$

6. In un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $Oxyz$ di $\mathbf{R}^3$, consideriamo una equazione dipendente da due sole variabili, per esempio x ed y, del tipo $f(x, y) = 0$. Ci chiediamo quale sia il suo significato geometrico. Osserviamo innanzitutto che, se in una data equazione non compare una certa indeterminata, allora significa che tale indeterminata non è soggetta a relazioni algebriche, e può quindi assumere un qualsiasi valore reale. Nel nostro caso non compare l'indeterminata z, il che

significa che stiamo considerando il luogo dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio aventi una quota qualsiasi, mentre le ascisse e le ordinate sono soggette al vincolo $f(x, y) = 0$. Se ragioniamo nel piano xy, oppure in un qualsiasi piano perpendicolare all'asse z, l'equazione $f(x, y) = 0$ rappresenta una curva γ. Quindi la stessa equazione, pensata nello spazio, rappresenta il luogo delle rette che intersecano la curva γ e sono parallele all'asse z. Un tale luogo si dice *cilindro generalizzato*, e la curva γ di equazione

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

si chiama *curva direttrice* del cilindro.

In particolare, se consideriamo un cilindro generalizzato C avente come curva direttrice una conica del piano xy, allora C è descritto analiticamente da una equazione algebrica di secondo grado in x, y, e quindi è una particolare quadrica. Per esempio, l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$, che nel piano xy descrive la circonferenza avente centro nell'origine e raggio uno, nello spazio rappresenta il cilindro circolare retto avente tale circonferenza come curva direttrice.

7. **Quadriche contenenti una data conica.** Una quadrica dipende da 10 parametri di cui 9 risultano essenziali, per cui esiste una ed una sola quadrica che soddisfa 9 condizioni lineari indipendenti. Una conica dipende invece da 5 parametri essenziali. Quando imponiamo che una quadrica contenga una data conica, otteniamo quindi 5 condizioni lineari indipendenti. Di conseguenza esistono $\infty^{9-5} = \infty^4$ quadriche contenenti una data conica.

   Supponiamo ora che una conica γ sia data come intersezione tra una quadrica Ω ed un piano π. Per determinare le ∞^4 quadriche contenenti γ basta imporre che l'intersezione tra la generica quadrica e π coincida con l'intersezione tra Ω e π. Analiticamente si tratta di ricavare una indeterminata dall'equazione del piano, sostituirla nelle equazioni di Ω e della generica quadrica, ed imporre che i coefficienti delle due equazioni così ottenute siano proporzionali tra loro, con la stessa costante di proporzionalità non nulla.

8. **Quadriche contenenti due date coniche.** Siano γ_1 e γ_2 due coniche assegnate in maniera generica nello spazio. Allora esiste almeno un polinomio di secondo grado che si annulla in tutti i punti di $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Infatti, per ogni coppia di coniche γ_1 e γ_2 scelte arbitrariamente nello spazio, risulta determinata una coppia di piani π_1 e π_2, costituita dai due piani che contengono le coniche considerate. In particolare può essere $\pi_1 = \pi_2$ se le due coniche sono complanari. Quindi la quadrica spezzata nei due piani π_1 e π_2 contiene entrambe le coniche. L'equazione $f(x, y, z) = 0$ della quadrica è soddisfatta da tutti i punti dei due piani, essendo data dal prodotto delle equazioni di π_1 e π_2. Pertanto il polinomio $f(x, y, z)$ si annulla in tutti i punti appartenenti a $\pi_1 \cup \pi_2$, e quindi anche in tutti i punti appartenenti all'unione delle due coniche. □

8.1.2 Coordinate omogenee

Pur lavorando nello spazio euclideo, spesso si rivela utile estendere i concetti allo spazio affine o proiettivo. Senza entrare nei dettagli questo significa che, oltre a rotraslazioni e similitudini, talvolta può essere necessario sfruttare trasformazioni più generali, dette, rispettivamente, *trasformazioni affini* e *trasformazioni proiettive*. Una generica trasformazione affine su tre variabili è data da

$$\begin{cases} x' = Ax + By + Cz \\ y' = Dx + Ey + Fz \\ z' = Gx + Hy + Iz \end{cases} \quad \text{con} \quad \det \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \neq 0. \tag{8.1.7}$$

Per descrivere invece una generica trasformazione proiettiva dobbiamo innanzitutto cambiare la rappresentazione analitica dei punti, ed utilizzare quattro *coordinate omogenee* x_1, x_2, x_3, x_4, il cui legame con le tre coordinate cartesiane x, y, z è dato da

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{8.1.8}$$

In questa maniera un punto $P(x, y, z)$ può essere individuato da infinite quaterne proporzionali (x_1, x_2, x_3, x_4). Al contrario, ad una data quaterna di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4), con $x_4 \neq 0$, corrisponde un ben preciso punto $P \in \mathbb{R}^3$, le cui coordinate cartesiane sono fornite dalle formule (8.1.8). Supponiamo ora di fissare x_1, x_2, x_3 e di prendere x_4 variabile. Posto $\dfrac{1}{x_4} = \lambda$, le formule (8.1.8) diventano

$$\begin{cases} x = \lambda x_1 \\ y = \lambda x_2 \\ z = \lambda x_3. \end{cases}$$

Notiamo pertanto che il punto P varia sulla retta passante per l'origine ed avente parametri direttori x_1, x_2, x_3. Se $x_4 \to 0$ allora $\lambda \to \infty$, ed il punto P si allontana indefinitamente dall'origine. Per questo motivo diciamo che la quaterna $x_1, x_2, x_3, 0$ rappresenta il *punto all'infinito*, o *punto improprio*, della retta avente parametri direttori x_1, x_2, x_3.

Una trasformazione proiettiva cambia le coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 secondo le equazioni seguenti

$$\begin{cases} x_1' = A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 \\ x_2' = A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 \\ x_3' = A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 \\ x_4' = A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 \end{cases} \quad \text{con} \quad \det \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix} \neq 0. \tag{8.1.9}$$

Una tale trasformazione dipende pertanto da 16 parametri, definiti a meno di una costante di proporzionalità non nulla, e quindi abbiamo 15 parametri essenziali.

Osservazioni ed esempi.

1. Utilizzando coordinate omogenee, ed eliminando i denominatori, l'equazione (8.1.1) diventa

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4): a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

Per esempio, scriviamo in coordinate omogenee la quadrica Ω di equazione cartesiana

$$f(x,y,z): x^2 - 3xy + 5y^2 - 6xz + 4yz + z^2 - 2x + y - 3z + 2 = 0.$$

Mediante le sostituzioni descritte dalle formule (8.1.8), e moltiplicando tutto per x_4^2, otteniamo

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 - 3x_3x_4 + 2x_4^2 = 0.$$

Si noti che il polinomio $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ è omogeneo di secondo grado, il che giustifica la parola *omogenee* associata a questo insieme di coordinate.

2. Consideriamo un punto P dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, per esempio $P(1,2,-1)$. Questo può essere descritto dalla quaterna $(1,2,-1,1)$ di coordinate omogenee. In base alle formule (8.1.8), ogni quaterna proporzionale a questa, con costante di proporzionalità non nulla, rappresenta sempre lo stesso punto P. Per esempio $(2,4,-2,2)$, oppure $(\pi, 2\pi, -\pi, \pi)$.

3. Geometricamente un punto improprio $(x_1,x_2,x_3,0)$ si identifica con la direzione della retta avente parametri direttori (x_1,x_2,x_3). Da un punto di vista puramente insiemistico, possiamo pensare lo spazio proiettivo come lo spazio $\mathbb{R}^3$ a cui sono stati aggiunti tutti i punti impropri, cioè l'insieme formato dall'unione dei *punti propri* e delle direzioni di tutte le rette.

4. La singola equazione $x_4 = 0$ rappresenta il luogo di tutti e soli i punti impropri dello spazio, cioè l'insieme delle direzioni di tutte le rette. Questo insieme si chiama *piano improprio*. Ogni piano proprio π interseca il piano improprio in un luogo di punti detto *retta impropria* di π. Essa rappresenta l'insieme delle direzioni di tutte le rette appartenenti al piano π.

   Per esempio, sia π il piano xy. In $\mathbb{R}^3$ la sua equazione è $z = 0$, cioè $x_3 = 0$ in coordinate omogenee. L'intersezione con il piano improprio $x_4 = 0$ fornisce l'insieme di punti di coordinate omogenee $(x_1,x_2,0,0)$, cioè l'insieme dei punti impropri delle rette dello spazio aventi parametri direttori $(x_1,x_2,0)$. Queste coincidono proprio con le rette di π. Infatti, le equazioni parametriche delle rette di π risultano date da $x = at, y = bt, z = 0$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Si nota pertanto che i parametri direttori $(a,b,0)$ sono del tipo considerato.

5. Utilizzando coordinate omogenee (x_1,x_2,x_3,x_4) possiamo dotare una quadrica di punti impropri, le cui coordinate vengono ottenute mettendo a sistema l'equazione (8.1.10) con l'equazione $x_4 = 0$, rappresentante il piano improprio. Il luogo dei punti impropri di una quadrica prende il nome di *conica all'infinito* della quadrica (cfr. Paragrafo 8.5.4).

Per esempio, la conica all'infinito della quadrica

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_3^2 - x_1x_4 + x_2x_4 - x_3x_4 + x_4^2 = 0,$$

è data da

$$C_\infty \begin{cases} 2x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

6. Si noti che tutte le quadriche dotate della medesima parte quadratica possiedono la stessa conica all'infinito. □

8.1.3 Derivazione parziale di polinomi

La nozione di derivata parziale di un polinomio si rivela di particolare utilità nello studio di alcune proprietà geometriche delle quadriche. Per introdurre il concetto consideriamo innanzitutto un monomio $m(x, y)$, dipendente da due variabili reali x, y. La *derivata parziale* di $m(x, y)$ rispetto ad x è un nuovo monomio, indicato con $\frac{\partial m(x,y)}{\partial x}$, ottenuto nella maniera seguente.

(1) Si immagina che y sia una costante, così che $m(x, y)$ viene ritenuto una funzione della sola x.
(2) Si applicano a tale funzione di x le abituali regole di derivazione[1].

Analogamente, la derivata parziale di $m(x, y)$ rispetto ad y è il nuovo monomio $\frac{\partial m(x,y)}{\partial y}$, ottenuto derivando $m(x, y)$ quando x viene ritenuto costante.

Estendendo questo concetto possiamo considerare un monomio $m(x_1, x_2, ..., x_n)$, dipendente da n variabili reali $x_1, x_2, ..., x_n$, e calcolare la sua derivata parziale rispetto alla variabile x_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Essa viene ottenuta derivando il monomio ritenendo solo x_i variabile, ed immaginando che x_j sia costante per $j \neq i$.

Consideriamo ora un polinomio $p(x_1, x_2, ..., x_n)$, dipendente da n variabili reali $x_1, x_2, ..., x_n$. Esso è la somma di un certo numero k di monomi, cioè

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{k} m_j(x_1, x_2, ..., x_n).$$

La derivata parziale di $p(x_1, x_2, ..., x_n)$, rispetto alla variabile x_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ si ottiene calcolando la somma delle derivate parziali dei singoli monomi $m_j(x_1, x_2, ..., x_n)$, cioè

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial m_j(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}. \qquad (8.1.11)$$

[1]Diamo per scontata la conoscenza delle regole di derivazione per una funzione reale di una variabile reale.

Osservazioni ed esempi.

1. Consideriamo il polinomio $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + 2x_2x_4 - x_2x_3$. Abbiamo allora

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1} = x_3 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2} = 2x_4 - x_3 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3} = x_1 - x_2 \\ \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4} = 2x_2. \end{cases}$$

2. Consideriamo il polinomio $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2^3x_3^5x_4$. Abbiamo allora

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1} = 2x_1x_2^3x_3^5x_4 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_2} = 3x_1^2x_2^2x_3^5x_4 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3} = 5x_1^2x_2^3x_3^4x_4 \\ \dfrac{\partial p(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_4} = x_1^2x_2^3x_3^5. \end{cases}$$

3. Se $p(x, y) = x^6 - 3x^5 + 2x4y + 5x^2y^2 - 3xy^3 - y^4 + 2x - y + 2$ risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(x,y)}{\partial x} = 6x^5 - 15x^4 + 8x^3y + 10xy^2 - 3y^3 + 2 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x,y)}{\partial y} = 2x^4 + 10x^2y - 9xy^2 - 4y^3 - 1. \end{cases}$$

4. Se $p(x, y, z) = x^2 - 3xy + 5y^2 - 4xz - 8yz + 4z^2 - 2x + 3y - 6z + 4$ risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial x} = 2x - 3y - 4z - 2 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} = -3x + 10y - 8z + 3 \\[2ex] \dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial z} = -4x - 8y + 8z - 6. \end{cases}$$

□

8.2 DESCRIZIONE ANALITICA

Cerchiamo ora di capire quali e quanti tipi di quadriche possono essere costruiti in $\mathbb{R}^3$. Naturalmente un tale problema, in generale, deve essere considerato in relazione alle trasformazioni geometriche che vengono consentite. Qui ci occupiamo della descrizione metrica delle quadriche, cioè del loro studio a meno di rototraslazioni.

8.2.1 Forme canoniche delle quadriche

Per classificare le quadriche dal punto di vista metrico è opportuno lavorare sulle più semplici equazioni che si possono ottenere, mediante rotazioni e traslazioni, a partire da quella generale fornita dalla (8.1.1). A questo proposito si rivela particolarmente utile il seguente teorema di riduzione.

Teorema 8.1. *Sia Ω una quadrica nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Esiste allora un sistema di riferimento rispetto al quale Ω può essere rappresentata analiticamente con una delle seguenti equazioni*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \tag{8.2.1}$$

oppure

$$Ax^2 + By^2 + 2Cz = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{R}. \tag{8.2.2}$$

-*Dimostrazione.* Consideriamo la parte quadratica $F(x, y, z)$ dell'equazione (8.1.1) di Ω, cioè

$$F(x, y, z) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

Indichiamo con Q la matrice simmetrica associata a tale forma quadratica, il cui determinante è quindi l'invariante cubico I_3. Sappiamo che Q può essere diagonalizzata tramite una matrice di passaggio M ortogonale speciale, cioè $M^tQM = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è una matrice diagonale costruita con gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ della matrice Q (che sono tutti reali). Questo, geometricamente, equivale a fare una rotazione degli assi cartesiani nello spazio $\mathbb{R}^3$. Pertanto, se consideriamo il seguente cambio di coordinate

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \tag{8.2.3}$$

il polinomio $F(x, y, z)$ viene trasformato in $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Di conseguenza, a meno di una rotazione, possiamo sempre pensare che l'equazione di Ω sia

$$f(x', y', z') : \ \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + ax' + by' + cz' + d = 0. \tag{8.2.4}$$

Consideriamo poi una traslazione nello spazio

$$\begin{cases} x'' = x' - x_0 \\ y'' = y' - y_0 \\ z'' = z' - z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' + x_0 \\ y' = y'' + y_0 \\ z' = z'' + z_0. \end{cases} \tag{8.2.5}$$

Essa porta il punto $P(x_0, y_0, z_0)$ nell'origine, e l'equazione (8.2.4) diventa

$$f(x'', y'', z'') : \lambda_1(x'' + x_0)^2 + \lambda_2(y'' + y_0)^2 + \lambda_3(z'' + z_0)^2 +$$

$$+a(x'' + x_0) + b(y'' + y_0) + c(z'' + z_0) + d = 0,$$

da cui, sviluppando i quadrati, otteniamo

$$f(x'', y'', z'') : \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + (a + 2\lambda_1 x_0)x'' + (b + 2\lambda_2 y_0)y'' + (c + 2\lambda_3 z_0)z'' +$$

$$+\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + \lambda_3 z_0^2 + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0. \tag{8.2.6}$$

Osserviamo che l'invariante quartico risulta

$$I_4 = -a^2\lambda_2\lambda_3 - b^2\lambda_1\lambda_3 - c^2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 d. \tag{8.2.7}$$

Supponiamo innanzitutto che Ω sia una quadrica non degenere, cioè che risulti $I_4 \neq 0$. In tale caso esiste al più un autovalore nullo.

Se tutti gli autovalori di Q sono diversi da zero, cioè se $I_3 \neq 0$, possiamo scegliere $x_0 = -\frac{a}{2\lambda_1}, y_0 = -\frac{b}{2\lambda_2}, z_0 = -\frac{c}{2\lambda_3}$, e l'equazione della quadrica risulta priva dei termini di primo grado, cioè di tipo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + D = 0, \quad D \in \mathbb{R}. \tag{8.2.8}$$

Se invece esiste un autovalore nullo, cioè se $I_3 = 0$, allora non è possibile eliminare tutti i termini di primo grado. Per esempio, se $\lambda_3 = 0$, allora, per ogni traslazione (8.2.5), il polinomio $f(x'', y'', z'')$ contiene il termine in z''. In tal caso scegliamo ancora $x_0 = -\frac{a}{2\lambda_1}, y_0 = -\frac{b}{2\lambda_2}$ in maniera da annullare i termini di primo grado in x'' ed y'', e prendiamo invece $z_0 = -\frac{\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + ax_0 + by_0 + d}{c}$, in maniera da annullare il termine noto. Di conseguenza l'equazione della quadrica diventa di tipo

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2Cz'' = 0, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{8.2.9}$$

In entrambi i casi (8.2.8) e (8.2.9) si ottiene quindi un sistema di riferimento, rototraslato rispetto a quello iniziale, in cui, a meno di rinominare le coordinate, la quadrica Ω è rappresentata analiticamente da una delle due equazioni (8.2.1) o (8.2.2).

Supponiamo ora che la quadrica sia degenere, cioè risulti $I_4 = 0$. In questo caso procediamo analizzando gli autovalori della matrice Q. Se essi sono tutti non nulli, cioè se $I_3 \neq 0$, scegliendo ancora $x_0 = -\frac{a}{2\lambda_1}, y_0 = -\frac{b}{2\lambda_2}, z_0 = -\frac{c}{2\lambda_3}$, l'equazione diventa $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + D = 0$. Poiché $I_4 = 0$ deve essere $D = 0$, e quindi si ottiene per Ω una equazione del tipo (8.2.1), con $D = 0$.

Nel caso in cui sia invece $I_3 = 0$, allora uno o due autovalori di Q devono annullarsi (non possono essere tutti nulli, altrimenti la (8.2.4) fornirebbe una equazione lineare, cioè Ω sarebbe un piano).

Se un solo autovalore si annulla, diciamo $\lambda_3 = 0$, allora, essendo $I_4 = 0$, dalla (8.2.7) ricaviamo che deve essere $c = 0$, e quindi la (8.2.4) diventa una equazione in due sole variabili x, y. Pertanto Ω è in tal caso un cilindro con generatrici parallele all'asse z e direttrice fornita dalla conica ω che ha, nel piano xy, la stessa equazione (8.2.4) (cfr. Osservazione 6 a pagina 213). La riduzione della quadrica Ω si ottiene quindi nella stessa maniera con la quale, nel piano xy, si determina l'equazione ridotta della conica ω. Questa è necessariamente del tipo (8.2.1), con $C = 0$, poiché, essendo $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, l'invariante quadratico di ω non è nullo.

Se due autovalori di Q sono nulli, diciamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, allora la (8.2.4) diventa

$$f(x', y', z') : \lambda_1 x'^2 + ax' + by' + cz' + d = 0.$$

Considerando la traslazione (8.2.5) l'equazione viene trasformata nella seguente

$$f(x'', y'', z'') :\ \lambda_1 x''^2 + (a + 2\lambda_1 x_0)x'' + by'' + cz'' + \lambda_1 x_0^2 + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Possiamo annullare il termine di primo grado in x'' scegliendo $x_0 = -\frac{a}{2\lambda_1}$, il che fornisce

$$f(x'', y'', z'') :\ \lambda_1 x''^2 + by'' + cz'' + D = 0,$$

avendo posto $-\frac{a^2}{4\lambda_1} + by_0 + cz_0 + d = D$. Se $b = c = 0$ allora si ottiene una equazione del tipo (8.2.1), altrimenti scegliamo y_0 e z_0 in maniera da annullare D, e consideriamo la trasformazione lineare

$$\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} y''' + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} z''' \\ z'' = -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} y''' + \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} z''', \end{cases} \tag{8.2.10}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix},$$

essendo M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \\ 0 & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che M è una matrice ortogonale speciale, quindi la trasformazione (8.2.10) è una rotazione, che muta l'equazione di Ω nella seguente

$$f(x''', y''', z''') :\ \lambda_1 x'''^2 + \sqrt{b^2 + c^2} z''' = 0,$$

che è di tipo (8.2.2). Ciò completa la dimostrazione del teorema. ■

Le equazioni (8.2.1) e (8.2.2) prendono il nome di *forme canoniche delle quadriche* non degeneri.

Osservazioni ed esempi.

1. Dalla dimostrazione del Teorema 8.1 si nota che i numeri A, B, C della forma canonica (8.2.1), così come i numeri A, B della forma canonica (8.2.2), coincidono con gli autovalori non nulli della matrice Q associata alla parte quadratica del polinomio che descrive la quadrica Ω nel sistema di riferimento iniziale.

2. Nel caso di quadriche non degeneri la forma canonica (8.2.1) si ottiene quando l'invariante cubico $I_3 \neq 0$, mentre la forma canonica (8.2.2) sussiste nel caso in cui sia $I_3 = 0$. Questa proprietà ha un preciso significato geometrico (cfr. Paragrafo 8.4.1).

3. Nel caso di quadriche non degeneri, per calcolare il termine D nella forma canonica (8.2.1) ed il termine C nella forma canonica (8.2.2), possiamo sfruttare gli invarianti. Infatti, poiché essi non si alterano sotto l'azione di una generica rototraslazione, il loro valore, calcolato sulle forme canoniche, deve coincidere con quello iniziale.

   Nella forma canonica (8.2.1), che si ottiene per $I_3 \neq 0$, abbiamo $I_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 D$ ed $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Quindi risulta $D = \frac{I_4}{I_3}$.

   Nella forma canonica (8.2.2) abbiamo $I_4 = -\lambda_1\lambda_2 C^2$ ed $I_2 = \lambda_1\lambda_2$. Quindi, poiché entrambi gli autovalori λ_1 e λ_2 sono non nulli, risulta $C^2 = -\frac{I_4}{I_2}$.

4. La riduzione a forma canonica di una quadrica può essere utile per studiare in maniera agevole, dal punto di vista analitico, le sue proprietà geometriche. □

8.2.2 Classificazione metrica delle quadriche

Per stabilire quante, e quali, famiglie di quadriche possiamo costruire in $\mathbf{R}^3$, a meno di rotazioni e traslazioni, lavoriamo sulle forme canoniche alle quali possiamo sempre ricondurci. Consideriamo innanzitutto le quadriche non degeneri, per le quali si ha cioè $I_4 \neq 0$. Riprendendo la dimostrazione del Teorema 8.1 notiamo che, in questo caso, al più uno degli autovalori di Q si annulla. Osservando le forme canoniche si possono allora distinguere i seguenti casi.

$$I_4 \begin{cases} > 0 & \begin{cases} I_3 \neq 0 & \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ stesso segno} \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ segni diversi} \end{cases} \\ I_3 = 0 & \text{un autovalore è nullo e gli altri hanno segno opposto} \end{cases} \\ < 0 & \begin{cases} I_3 \neq 0 & \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ stesso segno} \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ segni diversi} \end{cases} \\ I_3 = 0 & \text{un autovalore è nullo e gli altri hanno lo stesso segno} \end{cases} \end{cases} \tag{8.2.11}$$

Abbiamo quindi 6 famiglie di quadriche non degeneri.

A queste famiglie vanno aggiunte quelle corrispondenti alle quadriche degeneri, per le quali si ha $I_4 = 0$. Al fine di ricavare una completa classificazione anche di queste quadriche, indichiamo con r la caratteristica della matrice simmetrica A associata alla quadrica. Seguendo la dimostrazione del Teorema 8.1, possiamo distinguere i seguenti casi.

• Se $r = 3$ ed $I_3 \neq 0$, abbiamo una forma canonica del tipo (8.2.1), con $D = 0$, e quindi si ottengono **due famiglie di quadriche**, secondo che i segni degli autovalori di Q siano tutti uguali oppure diversi tra loro.

• Se $r = 3$, $I_3 = 0$ ed uno solo degli autovalori di Q è nullo, diciamo $\lambda_3 = 0$, la quadrica è un cilindro generalizzato, avente come direttrice una conica ω del piano xy, di equazione canonica $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + D = 0$. Poiché $r = 3$, deve essere $D \neq 0$. Abbiamo quindi una prima famiglia di quadriche se λ_1, λ_2 e D hanno lo stesso segno, una seconda famiglia di quadriche se λ_1, λ_2 hanno lo stesso segno e D ha segno opposto, ed una terza famiglia di quadriche quando λ_1, λ_2 hanno segni opposti (in questo caso il segno di D non conta poiché si possono sempre cambiare i segni di tutti i coefficienti restando all'interno della stessa famiglia di quadriche). In totale abbiamo quindi **tre famiglie di quadriche**.

• Se $r = 3$, $I_3 = 0$ e due autovalori di Q sono nulli, diciamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ si deve avere necessariamente la forma canonica (8.2.2), che si semplifica in $x^2 - \frac{2C}{\lambda_1} z = 0$, la quale rappresenta **la sola famiglia di quadriche** dei *cilindri parabolici*.
• Se $r = 2$ ed un solo autovalore di Q è nullo, diciamo $\lambda_3 = 0$, allora si ha una forma canonica di tipo (8.2.1), con $C = 0$, e poiché $r = 2$ deve essere anche $D = 0$. Di conseguenza abbiamo **due famiglie distinte di quadriche**, secondo che gli autovalori non nulli abbiano lo stesso segno oppure segni opposti.
• Se $r = 2$ e due autovalori di Q sono nulli, diciamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, allora si ha una forma canonica di tipo (8.2.1), con $B = C = 0$, e poiché $r = 2$ deve essere $D \neq 0$. Di conseguenza abbiamo **due famiglie distinte di quadriche**, secondo che λ_1 e D abbiano lo stesso segno oppure segni opposti.
• Se $r = 1$ abbiamo sicuramente due autovalori nulli, diciamo $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ed una forma canonica del tipo (8.2.1), con $B = C = 0$, e poiché $r = 1$ deve essere anche $D = 0$. Pertanto abbiamo **una sola famiglia di quadriche**.

Riassumendo abbiamo i seguenti casi

$$r = \begin{cases} 3 & \begin{cases} I_3 \neq 0 & \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ stesso segno} \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ segni diversi} \end{cases} \\ I_3 = 0 & \lambda_3 = 0,\ \lambda_1, \lambda_2, D \text{ stesso segno} \\ I_3 = 0 & \lambda_3 = 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ stesso segno e } D \text{ segno opposto} \\ I_3 = 0 & \lambda_3 = 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ segni opposti} \\ I_3 = 0 & \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ 2 & \Rightarrow\ I_3 = 0 \begin{cases} \lambda_3 = 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ stesso segno} \\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \text{ segni opposti} \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 \cdot D > 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 \cdot D < 0 \end{cases} \\ 1 & \Rightarrow\ I_3 = 0\ \Rightarrow\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{8.2.12}$$

Abbiamo pertanto 11 famiglie di quadriche degeneri. Quindi, complessivamente, esistono 17 famiglie di quadriche, 6 non degeneri ed 11 degeneri, globalmente invarianti sotto l'azione di una generica rototraslazione dello spazio $\mathbf{R}^3$.

Classificazione metrica con gli invarianti

Poiché una generica rototraslazione non altera il valore dei singoli invarianti, possiamo riassumere la *classificazione metrica delle quadriche* facendo riferimento a tali numeri. Le 17 famiglie di quadriche precedentemente determinate, con le rispettive denominazioni, possono allora essere descritte, a meno di scambi tra le indeterminate x, y, z, come segue.

Quadriche non degeneri ($\mathbf{I_4 \neq 0}$)

Invarianti	Denominazione	Forma canonica
$I_3 \neq 0$ $I_4 > 0 \begin{cases} I_2 > 0, I_1 I_3 > 0 \\ \text{altrimenti} \end{cases}$	*ellissoide immaginario* *iperboloide ad una falda*	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
$I_3 \neq 0$ $I_4 < 0 \begin{cases} I_2 > 0, I_1 I_3 > 0 \\ \text{altrimenti} \end{cases}$	*ellissoide reale* *iperboloide a due falde*	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
$I_3 = 0 \begin{cases} I_4 > 0 \\ I_4 < 0 \end{cases}$	*paraboloide iperbolico* *paraboloide ellittico*	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$

Quadriche degeneri (Rango A = r)

r	Invarianti	Denominazione	Forma canonica
3	$I_3 \neq 0 \begin{cases} I_2 > 0, I_1 I_3 > 0 \\ \text{altrimenti} \end{cases}$	*cono immaginario* *cono reale*	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
3	$I_3 = 0 \begin{cases} \begin{cases} I_2 > 0 \\ \text{senza punti reali} \end{cases} \\ \begin{cases} I_2 > 0 \\ \text{con punti reali} \end{cases} \\ I_2 < 0 \\ I_2 = 0 \end{cases}$	*cilindro immaginario* *cilindro ellittico* *cilindro iperbolico* *cilindro parabolico*	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $\frac{x^2}{a^2} - 2z = 0$
2	$\begin{cases} \text{rango } Q = 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 > 0 \end{cases}$	*coppia di piani complessi coniugati secanti*	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
	$\begin{cases} \text{rango } Q = 2 \\ \lambda_1 \lambda_2 < 0 \end{cases}$	*coppia di piani reali secanti*	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
	$\begin{cases} \text{rango } Q = 1 \\ \text{senza punti reali} \end{cases}$	*coppia di piani complessi coniugati paralleli*	$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$
	$\begin{cases} \text{rango } Q = 1 \\ \text{con punti reali} \end{cases}$	*coppia di piani reali paralleli*	$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$
1	$\Rightarrow$ rango $Q = 1$	*piano doppio*	$x^2 = 0$

Osservazioni ed esempi.

1. La distinzione tra cilindro immaginario e cilindro ellittico non può essere fatta con i soli invarianti, in quanto tutti i loro segni coincidono in entrambe le quadriche. Per stabilire in quale dei due casi ci si trova bisogna quindi capire se la quadrica possiede o non possiede punti a coordinate reali. Le stesse considerazioni si applicano per la distinzione tra quadriche spezzate in coppie di piani paralleli, reali o complessi.

2. Consideriamo la quadrica Ω avente la seguente equazione

$$f(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 2yz - 8x + 10y - 8z + 13 = 0.$$

La matrice simmetrica A ad essa associata è data da

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ -4 & 5 & -4 & 13 \end{bmatrix}.$$

I suoi invarianti sono dati da

$$I_4 = \det A = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_2 = 6 > 0, \quad I_1 = 21.$$

Pertanto la quadrica può essere un cilindro immaginario oppure un cilindro ellittico. Calcolando gli autovalori della matrice Q associata alla parte quadratica, otteniamo $\lambda_1 = 3 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{3}$ e $\lambda_3 = 0$. Una terna di autovettori ortogonali ad essi associati è data da

$$\lambda_1 = 3 + \sqrt{3} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_2 = 3 - \sqrt{3} \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\lambda_3 = 0 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normalizzando, si ottiene la seguente matrice

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{12}} & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{12}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} & \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{12}} & \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{12}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Poiché il determinante è uguale ad 1, M è una matrice ortogonale speciale, rappresentativa pertanto di una rotazione nello spazio. Sviluppando tale rotazione, l'equazione della quadrica Ω viene trasformata nella seguente

$$(3+\sqrt{3})x^2 + (3-\sqrt{3})y^2 - x\sqrt{114+58\sqrt{3}} + y\sqrt{114-58\sqrt{3}} + 13 = 0.$$

Nel piano xy tale equazione rappresenta una conica ω, e, calcolando i suoi invarianti troviamo $I_1(\omega) = I_2(\omega) = 6$ ed $I_3(\omega) = -6$, da cui $I_1(\omega)I_3(\omega) = -36 < 0$. Pertanto, ω è una ellisse reale, e quindi la quadrica Ω è un cilindro ellittico.

3. La classificazione delle quadriche può essere fatta anche rispetto a trasformazioni più generali delle rototraslazioni, e fornisce un numero inferiore di famiglie di quadriche distinte.

4. Sia $f(x, y, z) = 0$ una equazione omogenea di secondo grado. Essendo una equazione algebrica di secondo grado essa rappresenta una particolare quadrica. Dall'omogeneità dell'equazione risulta che il polinomio $f(x, y, z)$ è privo del termine noto e dei termini di primo grado. Quindi la quadrica passa per l'origine, ed il piano tangente in tale punto è indeterminato. Di conseguenza si ha un cono con il vertice nell'origine.

   Più in generale, ogni equazione omogenea di secondo grado nelle differenze $x - a$, $y - b$, $z - c$, rappresenta un cono con il vertice nel punto $V(a, b, c)$.

5. In riferimento all'Osservazione 5 a pagina 213, possiamo classificare la sfera come un particolare ellissoide. □

8.3 SEZIONI DI QUADRICHE

Vogliamo ora studiare le figure che si ricavano sezionando una quadrica con rette o piani. Si ottengono così luoghi di punti rappresentati analiticamente dai sistemi formati dalle equazioni della quadrica e degli elementi lineari con cui la si interseca. Si hanno quindi sistemi di secondo grado.

8.3.1 Intersezione tra una quadrica ed una retta

Sia r una retta, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda a \\ y = y_P + \lambda b \\ z = z_P + \lambda c, \end{cases} \tag{8.3.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, essendo P un punto di r ed (a, b, c) una terna di parametri direttori. L'intersezione tra una quadrica Ω e la retta r è rappresentata dal sistema tra l'equazione (8.1.1) della quadrica e le equazioni parametriche (6.1.1) della retta. Si ha allora una equazione risolvente nel parametro λ. Se questa equazione è di secondo grado ci possono essere due soluzioni reali distinte, due soluzioni reali coincidenti oppure due soluzioni complesse coniugate. A tali situazioni corrispondono rispettivamente, due punti reali distinti, due punti reali coincidenti, oppure due punti complessi coniugati comuni alla quadrica ed alla retta. Nel primo caso la retta si dice secante, nel secondo caso tangente e nel terzo caso esterna alla quadrica. Abbiamo poi due casi aggiuntivi. Il primo si ottiene quando l'equazione risolvente è di primo grado, situazione in cui la retta taglia la quadrica in un solo punto reale semplice. Il secondo corrisponde al caso in cui l'equazione risolvente degenera in una identità, cioè il sistema ammette infinite soluzioni, situazione in cui la retta appartiene interamente alla quadrica.

8.3.2 Condizione di tangenza tra una retta ed una quadrica

Studiamo ora più dettagliatamente il sistema tra le equazioni di Ω ed r. Abbiamo in proposito il seguente risultato

Teorema 8.2. *Sia Ω una quadrica di equazione* (8.1.1), *P un punto di Ω ed r una retta passante per P, di equazioni parametriche* (6.1.1). *Allora r è tangente in P ad Ω se e solo se*

$$a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P + b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P + c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P = 0. \tag{8.3.2}$$

-*Dimostrazione.* Sostituendo le (6.1.1) nell'equazione $f(x, y, z) = 0$ di Ω, si ottiene

$$\lambda^2 F(a, b, c) + \lambda\left[a\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P + b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P + c\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P\right] + f(x_P, y_P, z_P) = 0,$$

essendo $F(x, y, z)$ la parte quadratica di $f(x, y, z)$.
Se il punto $P \in \Omega$, abbiamo $f(x_P, y_P, z_P) = 0$, da cui si ricava che l'equazione precedente ammette la soluzione $\lambda = 0$ per ogni terna a, b, c (essa corrisponde al passaggio di Ω per P). La retta r è tangente in P ad Ω se e solo se $\lambda = 0$ è soluzione doppia, il che avviene se e solo se vale l'uguaglianza (8.3.2). ■

L'equazione (8.3.2), esprime pertanto la condizione alla quale devono soddisfare i parametri direttori a, b, c di una retta passante per P affinché essa sia tangente alla quadrica.

8.3.3 Piano tangente

Se consideriamo un qualsiasi valore $\lambda \neq 0$, dalle equazioni (6.1.1) otteniamo

$$a = \frac{x - x_P}{\lambda}, \quad b = \frac{y - y_P}{\lambda}, \quad c = \frac{z - z_P}{\lambda}.$$

Sostituendo nella condizione di tangenza (8.3.2) si ha

$$(x - x_P)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P + (y - y_P)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P + (z - z_P)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P = 0, \tag{8.3.3}$$

il che rappresenta l'equazione di un piano passante per P. Ogni retta per P appartenente a questo piano è tangente alla quadrica in tale punto. Per questo motivo il piano considerato si dice *piano tangente* ad Ω nel punto P.

Vediamo ora come si esprime il piano tangente se si utilizzano coordinate omogenee.

Teorema 8.3. *Utilizzando coordinate omogenee, il piano tangente ad Ω nel punto P ha equazione data da*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P x_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P x_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_P x_4 = 0. \tag{8.3.4}$$

-Dimostrazione. Trasformando le coordinate cartesiane x, y, z secondo le formule (8.1.8), l'equazione (8.3.3) diventa

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{x_4}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P + \frac{x_2}{x_4}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P + \frac{x_3}{x_4}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P - \\ &- \left[x_{1P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P + x_{2P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P + x_{3P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P\right] = 0.\end{aligned} \tag{8.3.5}$$

Dal calcolo delle derivate parziali, osserviamo che

$$\begin{aligned}&x_{1P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P + x_{2P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P + x_{3P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P = \\ &= 2f(x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}, x_{4P}) - 2a_{14}x_{1P} - 2a_{24}x_{2P} - 2a_{34}x_{3P} - 2a_{44}x_{4P}.\end{aligned}$$

Poiché il punto P appartiene alla quadrica, risulta $f(x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}, x_{4P}) = 0$. Di conseguenza si ricava che

$$\begin{aligned}&x_{1P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P + x_{2P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P + x_{3P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P = \\ &= -2a_{14}x_{1P} - 2a_{24}x_{2P} - 2a_{34}x_{3P} - 2a_{44}x_{4P} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_P.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione (8.3.5) si ottiene la (8.3.4). ■

Osservazioni ed esempi.

1. È facile vedere che l'equazione del piano tangente in P ad Ω, fornita dalla formula (8.3.4) è equivalente alla seguente

$$x_{1P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)+x_{2P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)+x_{3P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)+x_{4P}\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)=0. \qquad (8.3.6)$$

Essa è più comoda da utilizzare se alcune coordinate di P sono nulle, in quanto permette di evitare il calcolo delle derivate parziali corrispondenti.

2. Dalla equazione (8.3.4), si deduce che, se in un punto P si annullano tutte le derivate parziali prime del polinomio che rappresenta la quadrica, allora il piano tangente in P è indeterminato. Se P è un punto proprio, allora la quadrica è un cono di vertice P. Se P è improprio, la quadrica è un cilindro le cui generatrici hanno la direzione determinata dal punto P.

3. **Quadriche tangenti ad un piano in un suo dato punto.** Sia π un piano generico dello spazio $\mathbb{R}^3$, la cui equazione, in coordinate omogenee, è del tipo $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$, essendo $a,b,c,d\in\mathbf{R}$. Sia Ω la quadrica di equazione $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$, e sia P un punto appartenente ad Ω. Il piano π è tangente in P ad Ω se a,b,c,d sono proporzionali ai coefficienti di x_1,x_2,x_3,x_4 nell'equazione (8.3.4), cioè se

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P=ka\\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P=kb\\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P=kc\\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_P=kd,\end{cases}$$

con k costante non nulla. Si hanno pertanto 4 condizioni lineari dipendenti. Ricavando k da una equazione, e sostituendo il risultato nelle altre, si ottengono 3 condizioni lineari indipendenti. Di conseguenza, esistono $\infty^{9-3}=\infty^6$ quadriche tangenti ad un dato piano in un suo punto.

4. Vediamo qual è l'equazione di una generica quadrica avente come piano tangente in $O(0,0,0)$ il piano di equazione $2x-y+3z=0$. L'equazione di una generica quadrica passante per $O(0,0,0)$ è priva del termine noto, e quindi è data da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4):\ a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2+$$
$$+2a_{14}x_1+2a_{24}x_2+2a_{34}x_3=0,$$

essendo x_1,x_2,x_3,x_4 coordinate omogenee. Poiché l'origine è $O(0,0,0,1)$, il piano tangente in questo punto ha equazione $\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$, cioè $2a_{14}x_1+2a_{24}x_2+2a_{34}x_3=0$. Esso coincide con il piano assegnato se e solo se i coefficienti risultano proporzionali, cioè

$$\begin{cases}2a_{14}=2k\\ 2a_{24}=-k\\ 2a_{34}=3k,\end{cases}$$

essendo k una costante non nulla. Pertanto, l'equazione della quadrica diventa

$$\begin{aligned}f(x,y,z):\ & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2+\\ & +2kx_1-kx_2+3kx_3=0,\end{aligned}$$

che, dividendo tutto per k e passando a coordinate non omogenee, si può esprimere nella forma seguente

$$f(x,y,z): Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2+2x-y+3z=0.$$

La quadrica viene così a dipendere da 6 parametri essenziali, per cui esistono ∞^6 quadriche soddisfacenti le condizioni assegnate. □

8.3.4 Intersezione tra una quadrica ed un piano

La sezione di una quadrica non degenere Ω di equazione $f(x,y,z)=0$ con un piano è una curva algebrica di secondo grado, cioè una conica γ. Cerchiamo di stabilire le proprietà di questa sezione.

Teorema 8.4. *La conica sezione di una quadrica non degenere Ω con un piano π è spezzata in due rette passanti per un punto P se e solo se π è tangente ad Ω in P.*

-Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto che il piano π sia tangente ad Ω in un suo punto P. Allora, ogni retta di π, passante per P, ha, nel punto P, due intersezioni con Ω. Consideriamo la conica $\gamma=\Omega\cap\pi$. Ovviamente essa passa per P. Supponiamo che γ non sia spezzata, e sia r una generica retta del piano π, passante per P, diversa dalla retta t, tangente in P a γ. Allora r interseca la conica, oltre che in P, anche in un ulteriore punto Q (eventualmente improprio se γ è una parabola ed r è parallela all'asse). Poiché $\gamma=\Omega\cap\pi$, il punto Q appartiene anche ad Ω. Di conseguenza la generica retta r ha tre intersezioni con Ω, due coincidenti con P ed una con Q, il che implica che $r\in\Omega$ (vedi Paragrafo 8.3.1). Quindi, se R è un punto di π, $R\notin t$, allora $R\in\Omega$. Sia ora T un qualsiasi punto della retta t. Per quanto si è dimostrato, una qualsiasi retta $TR\in\pi$, passante per T e diversa da t, appartiene ad Ω. Quindi $T\in\Omega$, e per la genericità della scelta di T, l'intera retta $t\in\Omega$. Di conseguenza, tutti i punti di π appartengono ad Ω, cioè la quadrica è spezzata, e quindi degenere, il che è assurdo. Pertanto, γ deve essere spezzate in due rette a e b. Poiché $P\in\gamma$, almeno una delle due rette, diciamo a deve passare per P. Tuttavia, se b non passasse per P, la retta congiungente P con un qualsiasi punto $Q\in b$ avrebbe tre intersezioni con Ω (due in P ed una in Q), e quindi apparterrebbe ad Ω. Ma allora, facendo variare Q sulla retta b, dedurremmo che tutti i punti di π appartengono alla quadrica, la quale risulterebbe di conseguenza spezzata, il che è assurdo.

Supponiamo ora che la conica $\gamma=\Omega\cap\pi$ sia spezzata in due rette a ed b (reali oppure immaginarie coniugate) secanti in un punto P (che in ogni caso è un punto reale). Ogni retta appartenente al piano π e passante per P interseca sia a che b in questo punto, e quindi, essendo γ contenuta in Ω, ogni tale retta ha anche con Ω una intersezione doppia in P. Pertanto, ogni retta appartenente al piano π e passante per P è tangente in P ad Ω (vedi Paragrafo 8.3.2). Quindi π è il piano tangente ad Ω nel punto P. ■

Le sezioni di una quadrica non degenere con un piano non tangente forniscono invece una conica non degenere. Volendo studiare la natura di una tale conica, possiamo proiettare la conica da un punto improprio qualsiasi. Si ottiene in questa maniera il cilindro avente la conica come direttrice, e generatrici parallele alla direzione associata al punto improprio considerato. Sezionando il cilindro con un piano comodo, per esempio con uno dei piani coordinati, si ottiene una conica che ha la stessa natura affine di quella iniziale. Studiando la natura di tale sezione cilindrica, si ricava di conseguenza la natura della conica considerata (Fig. 8.1).

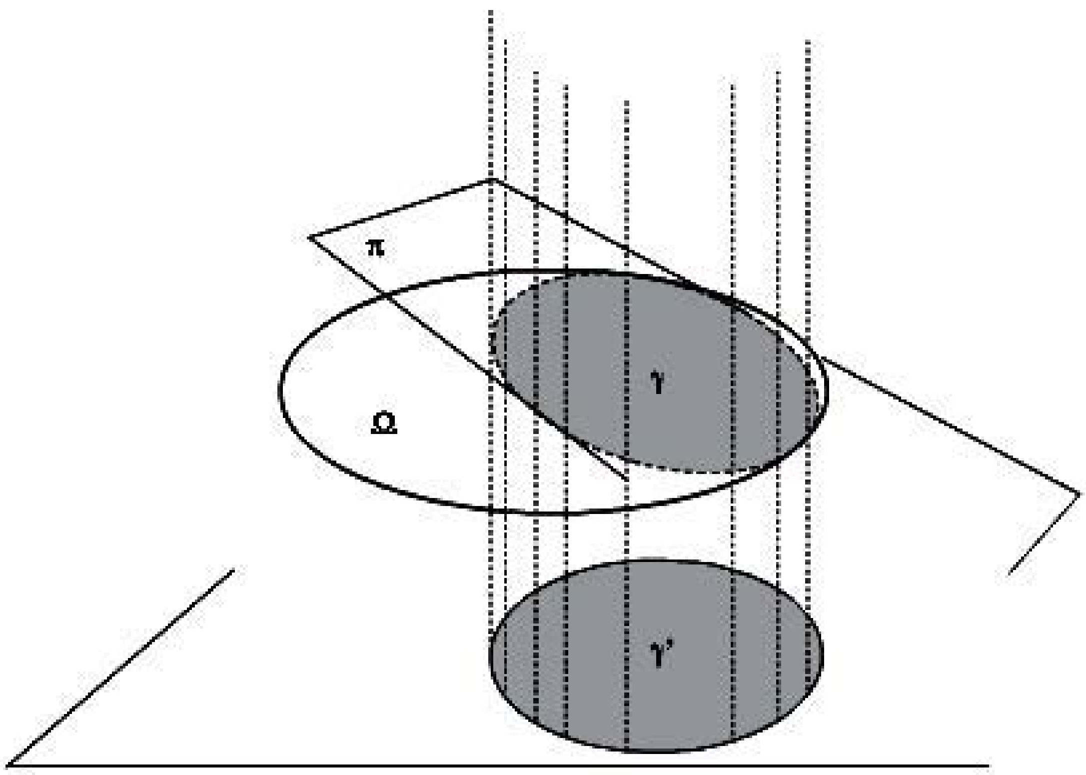


Figura 8.1: proiezione ortogonale di una conica.

Osservazioni ed esempi.

1. Nel Teorema 8.4 ci siamo occupati delle sezioni di una quadrica non degenere con un piano. Se la quadrica è degenere i risultati possono essere diversi. Innanzitutto, se la quadrica Ω è spezzata, non è detto che l'intersezione con un piano sia sempre una conica. Otteniamo per esempio un intero piano se Ω è spezzata in due piani e la sezioniamo con uno di essi. Se Ω è degenere ma non spezzata, cioè se è un cono oppure un cilindro, il Teorema 8.4 può ancora risultare falso. Per esempio, se Ω è un cono di vertice P l'enunciato stesso non ha senso, in quanto il piano tangente

è indeterminato. Se invece Ω è un cilindro, e sezioniamo con piani contenenti una generatrice t, abbiamo in generale coniche spezzate in due rette parallele distinte, a meno che il piano sezione non sia tangente ad Ω lungo tutta la retta t.

2. L'intersezione tra una quadrica Ω ed il piano π ad essa tangente in un suo punto reale P può essere una conica spezzata in due *rette immaginarie coniugate*. Ciò accade, per esempio, nel caso degli ellissoidi reali. In effetti due rette di questo tipo hanno sempre in comune un punto reale (il punto P di tangenza nel caso in considerazione). Infatti, possiamo sempre supporre che π sia il piano di equazione $z = 0$. Allora, le equazioni di due rette $r, s \in \pi$, immaginarie coniugate, sono del tipo

$$r \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s \begin{cases} \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c} = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

essendo $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ i numeri complessi coniugati di a, b, c. Mettendo a sistema le equazioni di r ed s si ottiene

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c} = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

da cui, sommando e sottraendo membro a membro, si ricava

$$\begin{cases} (a + \overline{a})x + (b + \overline{b})y + (c + \overline{c}) = 0 \\ (a - \overline{a})x + (b - \overline{b})y + (c - \overline{c}) = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Semplificando per i la seconda equazione, si ottiene un sistema a coefficienti reali, che ammette quindi una soluzione reale (eventualmente impropria).

3. Per avere un'idea della forma di una quadrica possiamo ridurre la quadrica a forma canonica, e studiare le coniche ottenute sezionando la quadrica con piani di equazione semplice, per esempio con piani paralleli ai piani coordinati.

   Per esempio, se studiamo le sezioni di un ellissoide reale, realizzate con piani paralleli ai piani di simmetria, possiamo notare che quelle reali sono sempre ellissi (eventualmente circonferenze). Si veda in proposito l'Esercizio 9.8.13. In particolare si deduce che un ellissoide appartiene ad una regione limitata di spazio, e, di conseguenza, non può contenere interamente una retta. Anche l'iperboloide a due falde ed il paraboloide ellittico sono quadriche non degeneri che non contengono rette, ma, a differenza degli ellissoidi, queste quadriche non sono contenute in una regione limitata di spazio. Nella Figura 8.2 viene data una rappresentazione qualitativa delle cinque quadriche reali non degeneri.

4. Una conica nello spazio può essere assegnata in varie maniere, ma, di solito, viene data come intersezione di una quadrica con un piano. Per esempio, una circonferenza nello spazio può essere assegnata come intersezione tra una sfera ed un piano (cfr. Esercizio 9.8.1).

5. Assegnata una conica in un generico piano nello spazio, per determinarne la proiezione ortogonale sul piano $z = 0$, basta ricavare z in funzione di x ed y dall'equazione del piano, e sostituire il valore ottenuto nell'equazione della quadrica. Si ottiene così una equazione in x ed y, che rappresenta il cilindro contenente la conica assegnata ed avente le generatrici parallele all'asse z. Si procede analogamente per determinare le proiezioni sugli altri piani coordinati (cfr. Esercizio 9.8.12).

   Si noti che la proiezione ortogonale non altera la natura affine di una conica, ma può alterarne la natura metrica. Per esempio una iperbole equilatera può essere proiettata in una iperbole non equilatera. Analogamente, una circonferenza può essere proiettata in una ellisse avente assi di lunghezza diversa.

6. Le sezioni piane di un cono reale irriducibile sono coniche reali, degeneri o non degeneri, di qualsiasi tipo (cfr. Paragrafo 7.1). La situazione è invece completamente diversa nel caso delle sezioni di un cilindro reale irriducibile mediante piani non paralleli alle generatrici. In tal caso infatti si ottengono coniche aventi tutte la stessa natura affine. Consideriamo infatti due qualsiasi sezioni γ_1 e γ_2, ottenute intersecando il cilindro con i piani π_1 e π_2 rispettivamente. La conica γ_2 si può ottenere proiettando la conica γ_1 sul piano π_2 dal punto improprio P_∞ delle generatrici del cilindro. In particolare, proiettando su π_2 un punto improprio A_∞ di γ_1, si ottiene il punto comune al piano π_2 ed alla retta impropria passante per P_∞ ed A_∞, cioè un punto improprio B_∞ di γ_2. Se A_∞ è reale, B_∞ è reale, se A_∞ è immaginario, anche B_∞ è immaginario. Di conseguenza, i punti impropri di due qualsiasi sezioni hanno la stessa natura, per cui tutte le sezioni considerate sono dello stesso tipo dal punto di vista affine. □

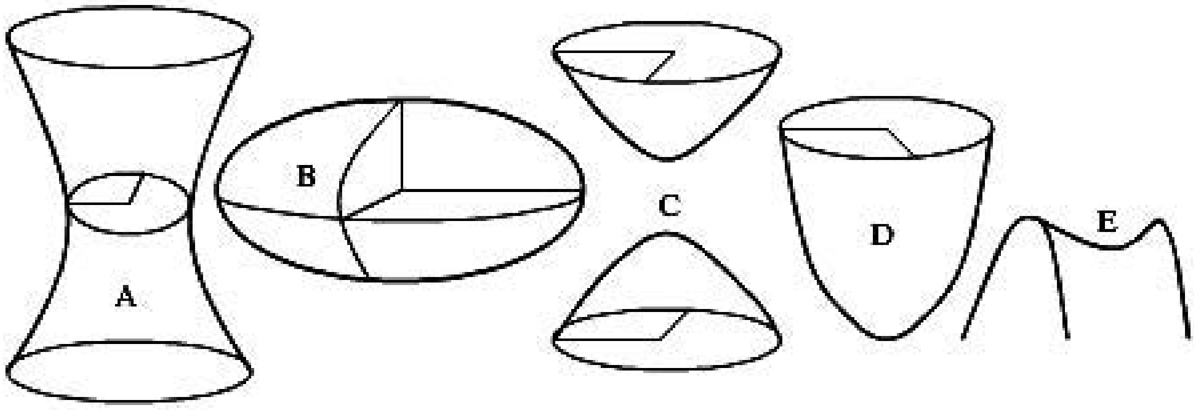


Figura 8.2: le cinque quadriche reali non degeneri. **A** Iperboloide a una falda. **B** Ellissoide reale. **C** Iperboloide a due falde. **D** Paraboloide ellittico. **E** Paraboloide iperbolico.

8.3.5 Piano polare

Il *piano polare* di un punto P rispetto ad una quadrica Ω, di equazione $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, è il piano π_P definito dall'equazione seguente

$$\pi_P : x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_P + x_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_P + x_3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_P + x_4 \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_P = 0. \tag{8.3.7}$$

Il punto P viene detto *polo* di π_P. L'equazione del piano polare di P rispetto ad Ω può anche essere scritta nella maniera seguente

$$x_{1P} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + x_{2P} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + x_{3P} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + x_{4P} \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0. \tag{8.3.8}$$

Confrontando le equazioni (8.3.7) e (8.3.8) con le equazioni (8.3.4) e (8.3.6), ricaviamo che, nel caso in cui il punto P appartenga alla quadrica Ω, il piano polare di P rispetto ad Ω coincide con il piano tangente in P alla quadrica.

Il risultato seguente è noto con il nome di *legge di reciprocità*.

Teorema 8.5. *Se il piano polare di un punto A passa per un punto B, allora il piano polare di B passa per A.*

-*Dimostrazione.* Scriviamo il piano polare π_A di A nella forma (8.3.7)

$$\pi_A : x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A + x_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A + x_3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_A + x_4 \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_A = 0.$$

Poiché $B \in \pi_A$ risulta

$$x_{1B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A + x_{2B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_A + x_{3B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_A + x_{4B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_A = 0 \tag{8.3.9}$$

Scriviamo ora il piano polare π_B di B nella forma (8.3.8)

$$x_{1B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + x_{2B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + x_{3B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) + x_{4B} \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 0.$$

La (8.3.9) si può allora interpretare come l'appartenenza di A a π_B, il che dimostra il risultato. ∎

Vediamo ora come varia il piano polare di un punto P rispetto ad una data quadrica Ω, al variare di P su un piano.

Teorema 8.6. *Se un punto P varia su un piano ϕ, il piano polare di P rispetto ad una quadrica Ω descrive una stella di piani.*

-*Dimostrazione.* Sia Q il polo del piano ϕ rispetto ad Ω. Poiché $P \in \phi$, per la legge di reciprocità il piano polare di P deve passare per Q, per cui appartiene alla stella di piani di centro Q. Al contrario, sia ψ un piano appartenente alla stella di piani di centro Q. Sempre per la legge di reciprocità, il polo di ψ deve appartenere al piano polare di Q, cioè al piano ϕ. ∎

Ci chiediamo ora come varia il piano polare di un punto P rispetto ad una data quadrica Ω, al variare di P su una retta.

Teorema 8.7. *Se P descrive una retta r, il piano polare di P descrive un fascio di piani.*

-Dimostrazione. Sia A un qualsiasi punto della retta r, e siano ϕ e ψ due piani qualsiasi contenenti r. Siano P e Q i poli di ϕ e ψ rispettivamente. Poiché $A \in \phi$, il piano polare di A rispetto ad Ω deve passare per P. Analogamente, poiché $A \in \psi$, il piano polare di A rispetto ad Ω deve passare per Q. Quindi, il piano polare di A appartiene al fascio di piani di sostegno dato dalla retta PQ. Al contrario, sia π un qualsiasi piano di tale fascio di piani. Poiché $P \in \pi$, il polo di π deve appartenere a ϕ. Analogamente, poiché $Q \in \pi$, il polo di π deve appartenere a ψ. Quindi, il polo di π deve appartenere sia a ϕ che a ψ, per cui appartiene alla retta $r = \phi \cap \psi$. ■

Osservazioni ed esempi.

1. Dalla dimostrazione del Teorema 8.6 segue che il centro della stella di piani descritta dal piano polare di P è il polo del piano su cui varia P.

2. Dal Teorema 8.7 sappiamo che quando un punto P descrive una retta r, il piano polare di P descrive un fascio di piani. La retta sostegno di questo fascio di piani si dice *retta reciproca* della retta r rispetto alla data quadrica. □

8.3.6 Quadriche rigate

Nei paragrafi precedenti abbiamo più volte sfruttato il fatto che una retta appartiene interamente ad una quadrica nel momento in cui si riescono a trovare tre punti di intersezione (si veda per esempio il Paragrafo 8.3.1 o la dimostrazione del Teorema 8.4). Cerchiamo ora di studiare la questione dal punto di vista algebrico. Sia r una retta passante per un punto P di una quadrica Ω di equazione $f(x, y, z) = 0$. Le equazioni parametriche di r sono del tipo

$$r \begin{cases} x = x_P + \lambda a \\ y = y_P + \lambda b \\ z = z_P + \lambda c, \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $F(x, y, z)$ la parte quadratica di $f(x, y, z)$. Allora, l'intersezione tra r ed Ω conduce alla seguente equazione

$$\lambda^2 F(a, b, c) + \lambda \left[a \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_P + b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_P + c \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_P \right] = 0.$$

Affinché r appartenga ad Ω, tale equazione deve essere identicamente verificata in λ. Ciò avviene se e solo se

$$\begin{cases} F(a, b, c) = 0 \\ a \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_P + b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_P + c \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_P = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione implica che r deve appartenere al piano tangente ad Ω in P, mentre la prima equazione è omogenea di secondo grado in a, b, c. In uno spazio di coordinate a, b, c, il sistema è allora interpretabile geometricamente come l'intersezione tra un cono di vertice $O(0, 0, 0)$ ed un piano passante per $O(0, 0, 0)$ (cfr. Osservazione 4 a pagina

226). Tale intersezione può essere ridotta al solo punto $O(0,0,0)$, oppure può essere costituita da una generatrice contata due volte, oppure da due generatrici distinte. A queste tre situazioni corrispondono, rispettivamente, nessuna, una oppure due rette reali e distinte, passanti per P ed appartenenti alla quadrica. Abbiamo così una formula algebrica equivalente al procedimento sintetico utilizzato nella dimostrazione del Teorema 8.4.

Per coni e cilindri si vede facilmente che il piano tangente in un loro generico punto P (diverso dal vertice nel caso di un cono) interseca la quadrica lungo tutta la retta generatrice a cui appartiene P.

Considerando invece le quadriche non degeneri, come caso particolare del Teorema 8.4 abbiamo la situazione in cui il piano tangente in P interseca la quadrica in due rette reali distinte. Si parla allora di *quadriche rigate*. Considerando le forme canoniche è facile dedurre che possono essere rigate solo l'iperboloide ad una falda ed il paraboloide iperbolico (si veda anche l'Osservazione 3 a pagina 232). Si dimostra che esse sono effettivamente quadriche rigate. Per ogni loro punto passano due rette interamente contenute nella quadrica. Considerando, per ogni punto, una di tali rette, si ottiene un sistema di rette completamente contenute nella superficie. La quadrica, interpretata come superficie rigata, può allora essere descritta da due sistemi di rette. Questi vengono detti *schiere di rette generatrici*. Analizziamole per entrambe le quadriche rigate.

Schiere di rette generatrici di un iperboloide ad una falda

Per determinare le equazioni delle schiere di rette generatrici di un iperboloide ad una falda possiamo innanzitutto considerare la sua forma canonica (cfr. pag. 224), e scriverla nella maniera seguente

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Scomponendo entrambi i membri come differenze tra due quadrati otteniamo

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Tale relazione è equivalente alle seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = k\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ k\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 + \dfrac{y}{b}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = h\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ h\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 - \dfrac{y}{b}, \end{cases} \qquad h, k \in \mathbb{R}. \tag{8.3.10}$$

Per ogni valore dei parametri reali k ed h, ognuno dei due precedenti sistemi descrive l'intersezione tra due piani. Di conseguenza, ognuno di essi rappresenta una retta nello spazio. Ogni punto di queste rette ha coordinate che verificano l'equazione della quadrica, e quindi le rette appartengono interamente alla superficie. Al variare di k ed h si ottengono pertanto le schiere di rette generatrici dell'iperboloide ad una falda.

Volendo poi ricavare le schiere di rette generatrici in riferimento all'equazione iniziale della quadrica, basta applicare alle equazioni trovate le trasformazioni inverse di quelle che riducono l'iperboloide ad una falda in forma canonica.

Schiere di rette generatrici di un paraboloide iperbolico

Per determinare le equazioni delle schiere di rette generatrici di un paraboloide iperbolico possiamo scrivere l'equazione canonica della quadrica (cfr. pag. 224) nella forma seguente

$$\frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 = 2z,$$

Anche in questo caso, scomponendo il primo membro come differenza tra due quadrati, otteniamo

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z.$$

Tale relazione è equivalente alle seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2kz \\ \\ k\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = h \\ \\ h\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2z, \end{cases} \qquad h, k \in \mathbb{R}. \tag{8.3.11}$$

Al variare dei parametri k ed h si ottengono le schiere di rette generatrici del paraboloide iperbolico.

Osservazioni ed esempi.

1. Tra le quadriche rigate possiamo inserire anche coni e cilindri, nel senso che anche queste quadriche possono essere pensate come luoghi di rette. Tuttavia, quando si parla di *quadriche rigate* si sottointende sempre che queste siano non degeneri.

2. Si osservi che esistono, al più, due rette reali e distinte, passanti per un punto di una quadrica ed interamente contenute in essa.

3. Ovviamente, la determinazione delle equazioni delle schiere di rette generatrici può essere fatta anche senza ridurre la quadrica in forma canonica. A tale scopo bisogna cercare di completare l'equazione della superficie, aggiungendo e togliendo monomi uguali, in maniera da scrivere entrambi i membri come differenza tra due quadrati.

4. Volendo determinare le rette generatrici passanti per un dato punto della superficie, possiamo sostituire le coordinate del punto nelle equazioni delle schiere di rette generatrici, ricavando i corrispondenti valori dei parametri. □

8.4 PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

8.4.1 Centro di una quadrica

Il *centro di una quadrica* è, dal punto di vista proiettivo, il polo del piano improprio. Per determinare il centro di una quadrica possiamo allora sfruttare la legge di reciprocità, in base alla quale il piano polare di un qualsiasi punto improprio, cioè un qualsiasi *piano diametrale*, deve contenere il centro. Quindi, per calcolare le coordinate del centro, basta risolvere il sistema formato dalle equazioni dei piani polari di tre punti impropri qualsiasi. La situazione più semplice si ottiene scegliendo i punti impropri degli assi cartesiani. Infatti, per l'equazione (8.3.8), il piano polare di $X_\infty(1,0,0,0)$ si ottiene uguagliando a 0 la derivata parziale rispetto ad x_1, il piano polare di $Y_\infty(0,1,0,0)$ si ottiene uguagliando a 0 la derivata parziale rispetto ad x_2, mentre il piano polare di $Z_\infty(0,0,1,0)$ si ottiene uguagliando a 0 la derivata parziale rispetto ad x_3. Di conseguenza, il centro di una quadrica è il punto le cui coordinate risolvono il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \end{cases}$$

essendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'equazione della quadrica. Esplicitando le derivate parziali si ricava che il determinante del sistema coincide con l'invariante cubico I_3 associato alla quadrica stessa. Osserviamo pertanto che, secondo che sia $I_3 \neq 0$ oppure $I_3 = 0$, la quadrica possiede o no un centro di simmetria.

8.4.2 Piani di simmetria

Nello studio delle coniche abbiamo visto come si determinano gli assi di simmetria di una conica a centro. In maniera analoga possiamo ora chiederci come si determinano i piani di simmetria di una quadrica a centro. Un *piano di simmetria* deve necessariamente passare per il centro della quadrica. Quindi, per la legge di reciprocità, esso deve essere il piano polare di un punto improprio $P(a, b, c, 0)$. Pertanto ha una equazione del tipo

$$a\frac{\partial f}{\partial x_1} + b\frac{\partial f}{\partial x_2} + c\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \tag{8.4.1}$$

essendo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'equazione della quadrica. Inoltre, la proprietà di simmetria si traduce nel fatto che la direzione rappresentata dal punto improprio $P(a, b, c, 0)$ deve essere ortogonale al piano. Quindi, i parametri direttori del piano di simmetria devono essere proporzionali ad a, b, c, cioè la sua equazione è data da

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda cz + d = 0 \qquad (\lambda \neq 0). \tag{8.4.2}$$

Mettendo a sistema le equazioni (8.4.1) e (8.4.2), si ottiene il seguente sistema

$$(Q - \lambda I) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

essendo Q la matrice associata alla parte quadratica di $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, ed I la matrice identica di ordine 3. Quindi, i parametri direttori a, b, c dei piani di simmetria della quadrica coincidono con le componenti degli autovettori di Q associati agli autovalori $\lambda \neq 0$.

8.4.3 Vertice di un cono

Il *vertice di un cono* è l'unico suo punto in cui il piano tangente è indeterminato (cfr. Osservazione 2 a pagina 229). Quindi, bisogna risolvere il sistema che si ottiene imponendo l'annullamento di tutte le derivate parziali prime del polinomio $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, cioè il sistema dato da $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = \dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0$. Nel caso di un cilindro, che può essere considerato come un cono con il vertice all'infinito, la soluzione di questo sistema fornisce invece la direzione delle generatrici.

8.4.4 Quadriche di rotazione

Una *superficie di rotazione* si può interpretare come luogo di circonferenze nello spazio, aventi centro variabile lungo una retta r, detta *asse di rotazione* della superficie. L'asse di rotazione è asse di simmetria, e le circonferenze che formano la superficie appartengono a piani ortogonali all'asse di rotazione (Fig. 8.3).

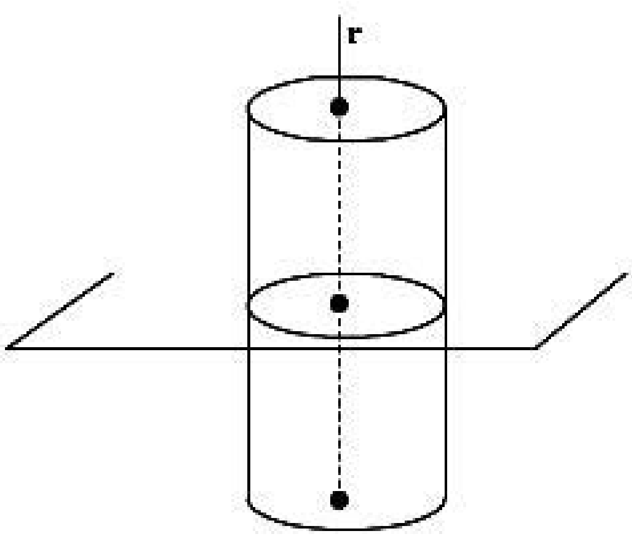


Figura 8.3: superficie di rotazione.

Teorema 8.8. *Sia Ω una quadrica, di equazione $f(x, y, z) = 0$. Allora, Ω è una quadrica di rotazione se e solo se la matrice Q associata alla parte quadratica di $f(x, y, z)$ ammette almeno due autovalori non nulli uguali.*

-Dimostrazione. Affinché una quadrica sia di rotazione è necessario che le sue sezioni mediante piani ortogonali ad uno degli assi di simmetria siano costituite da circonferenze. Poiché la proprietà di essere di rotazione è invariante per rototraslazioni, possiamo sempre pensare che la quadrica sia ridotta a forma canonica, e quindi sia rappresentata da una delle seguenti equazioni

1. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + D = 0$ se $I_3 \neq 0$.
2. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2Cz = 0$ se $I_3 = 0$.

In esse, i coefficienti dei termini al quadrato sono gli autovalori della matrice Q associata alla quadrica. In tal caso gli assi di simmetria coincidono con gli assi cartesiani, e le sezioni con piani ad essi ortogonali sono circonferenze se e solo se almeno due autovalori non nulli coincidono. ■

Costruzione di quadriche di rotazione

Possiamo costruire una *quadrica di rotazione* facendo ruotare una conica γ del piano xy, di equazione $f(x, y) = 0$, intorno ad uno degli assi cartesiani. Per esempio, l'equazione cartesiana della quadrica ottenuta dalla rotazione di γ intorno all'asse y può essere ottenuta applicando il metodo seguente.

1. Sia $P(x_0, y_0, 0)$ il generico punto di γ. I parametri x_0 ed y_0 soddisfano l'equazione $f(x_0, y_0) = 0$.
2. Il piano π_P passante per P ed ortogonale all'asse y ha equazione $y = y_0$.
3. Intersecando π_P con l'asse y si ottiene il punto $C_P(0, y_0, 0)$.
4. La distanza R_P di P da C_P è uguale a $|x_0|$.
5. L'equazione della sfera S_P di centro C_P e raggio R_P è $x^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = x_0^2$.
6. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = x_0^2 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \pm\sqrt{x^2 + z^2} \\ y_0 = y. \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati per x_0 ed y_0 nell'equazione $f(x_0, y_0) = 0$, viene ottenuta l'equazione cartesiana della superficie di rotazione, che è quindi data da

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana della quadrica generata dalla rotazione di una conica del piano xy intorno all'asse y, si ottiene sostituendo $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ ad x nell'equazione della conica.

Considerazioni analoghe valgono per la rotazione intorno all'asse x. In tal caso l'equazione della quadrica di rotazione risulta $f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$. Si ragiona alla stessa maniera per trovare l'equazione cartesiana della quadrica generata dalla rotazione di una conica appartenente ad uno dei piani coordinati, intorno ad un asse cartesiano contenuto in tale piano.

Osservazioni ed esempi.

1. Considerando le forme canoniche delle quadriche si può facilmente constatare che, se $I_3 \neq 0$, il centro è un punto proprio, mentre $I_3 = 0$ implica che il centro è improprio. In particolare, quando $I_3 \neq 0$, il centro di una quadrica determinato secondo la definizione proiettiva coincide con il centro di simmetria della quadrica.

2. Si noti che l'asse di rotazione di una quadrica di rotazione ha direzione ortogonale all'autospazio bidimensionale associato all'autovalore doppio di Q, e quindi è parallelo all'autovettore associato all'autovalore semplice.

3. **Piani di simmetria di un paraboloide.** Se la quadrica considerata è un paraboloide, allora la matrice Q ha un autovalore $\lambda = 0$. In tal caso esistono quindi in generale solo due piani di simmetria, aventi come parametri direttori le componenti degli autovettori associati agli autovalori non nulli. Di conseguenza, un paraboloide ammette un solo asse di simmetria, ottenibile dalla intersezione di tali piani. Inoltre, poiché la matrice Q è simmetrica, i suoi autovettori devono essere ortogonali tra loro. Quindi, l'autovettore associato all'autovalore nullo indica la direzione dell'asse di simmetria del paraboloide.
   Può inoltre capitare che due autovalori non nulli della matrice Q di una generica quadrica coincidano. Poiché Q, essendo simmetrica, è diagonalizzabile, a questo autovalore doppio corrisponde un autospazio di dimensione 2, cioè un piano di autovettori. Per ogni vettore di questo piano viene determinato un piano di simmetria della quadrica. In questo caso la quadrica possiede infiniti piani di simmetria.

4. **Vertice di un paraboloide.** Il *vertice di un paraboloide* può essere ricavato intersecando la quadrica con l'asse di simmetria, cioè con la retta comune ai due piani di simmetria. In alternativa si può considerare il generico piano ortogonale all'autovettore associato all'autovalore nullo, imponendo poi che l'intersezione con il paraboloide sia ridotta ad un solo punto.

5. Se tutti gli autovalori della matrice Q coincidono, allora la quadrica è una sfera. In tal caso l'autospazio associato all'autovalore triplo è tutto $\mathbb{R}^3$. Ciò significa, come è noto, che la sezione di una sfera con un qualsiasi piano passante per il centro è una circonferenza, il che è equivalente a dire che la sfera è una superficie di rotazione intorno ad una qualsiasi retta passante per il centro.

6. Per una quadrica di rotazione almeno due degli autovalori non nulli della matrice Q coincidono. Se la quadrica è a centro, esistono tre autovalori non nulli, e quindi, almeno due di essi hanno lo stesso segno. Di conseguenza, è sempre possibile costruire quadriche a centro in maniera che almeno due autovalori siano uguali. Pertanto

possiamo costruire sia ellissoidi che iperboloidi di rotazione. Se invece consideriamo quadriche non degeneri prive di centro, allora, essendo $I_3 = 0$, almeno un autovalore è nullo. Di conseguenza, se abbiamo due autovalori nulli, oppure se i due autovalori non nulli hanno segni opposti, è impossibile costruire la quadrica in maniera che sia di rotazione. Ciò accade per il cilindro parabolico (due autovalori nulli), per il paraboloide iperbolico e per il cilindro iperbolico (due autovalori non nulli di segno opposto), per cui questi tipi di quadriche non possono mai essere di rotazione.

7. In riferimento alla dimostrazione del Teorema 8.8, possiamo considerare, per esempio, le sezioni di una quadrica di equazione $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + D = 0$ con piani di equazione $z = k$. Otteniamo allora le coniche di equazioni

$$\begin{cases} \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 k^2 + D = 0 \\ z = k, \end{cases}$$

che, per $\lambda_3 k^2 + D < 0$, rappresentano delle circonferenze se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2$.

8. **Quadriche di rotazione rigate.** Le quadriche rigate non degeneri sono l'iperboloide ad una falda ed il paraboloide iperbolico. Il paraboloide iperbolico non può mai essere di rotazione. Di conseguenza, l'unica quadrica non degenere che può essere contemporaneamente rigata e di rotazione è l'iperboloide ad una falda. Se si abbandona l'ipotesi che la quadrica sia non degenere, possiamo avere anche coni e cilindri di rotazione. □

8.5 APPROFONDIMENTI

8.5.1 Natura dei punti di una quadrica

Si parla di natura di un punto di una quadrica nel caso in cui il punto sia semplice e reale, e la quadrica sia irriducibile. La natura di un punto P di una quadrica viene determinata considerando l'intersezione tra la quadrica ed il piano ad essa tangente nel punto P. In base al Teorema 8.4 si ottiene così una conica degenere. Il punto P viene detto *punto iperbolico* se la conica è degenere in due rette reali e distinte, *punto ellittico* se la conica è degenere in due rette immaginarie coniugate e *punto parabolico* se la conica è degenere in due rette reali coincidenti.

In ogni intorno di un punto iperbolico esistono punti della quadrica che si trovano in semispazi diversi rispetto al piano tangente. Se P è un punto ellittico, allora esistono intorni di P in cui tutti i punti della quadrica diversi da P si trovano in uno stesso semispazio rispetto al piano tangente. Se P è un punto parabolico, allora, in ogni intorno di P esistono punti della quadrica diversi da P che appartengono al piano tangente.
Osserviamo inoltre che la natura di un punto non viene alterata da una trasformazione proiettiva dello spazio.

Teorema 8.9. *Se una quadrica Ω ha un punto iperbolico, allora tutti i punti di Ω sono iperbolici.*

-Dimostrazione. Supponiamo che il punto A della quadrica Ω sia iperbolico. Allora il piano π_A, tangente ad Ω in A, interseca la quadrica in due rette reali distinte a e b. Sia B un punto di Ω non appartenente a π_A. Consideriamo i piani π_a e π_b, passanti per il punto B e contenenti, rispettivamente, le rette a e b (Fig. 8.4).

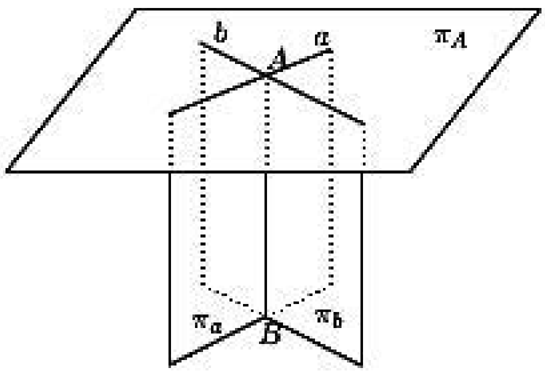


Figura 8.4: natura dei punti di una quadrica.

L'intersezione tra un piano ed una quadrica è una conica. Quindi, il piano π_a interseca Ω in una conica, della quale fanno parte la retta a ed il punto B. Di conseguenza, tale conica è spezzata nella retta a ed in una seconda retta reale a' passante per B e non passante per A, altrimenti da A uscirebbero tre rette, a, b e a' appartenenti ad Ω, il che è assurdo.
Analogamente, l'intersezione tra il piano π_b e la quadrica Ω è una conica spezzata nella retta b ed in una ulteriore retta reale b' passante per B e non per A. Se fosse $a' = b'$, i due piani π_a e π_b avrebbero in comune sia tale retta sia il punto A, e quindi dovrebbero coincidere. Ma in tal caso otterremmo

$$a = \pi_a \cap \pi_A = \pi_b \cap \pi_A = b,$$

il che è assurdo. Quindi $a' \neq b'$, per cui per il punto B passano due rette reali distinte appartenenti ad Ω. Pertanto, anche B è iperbolico, poiché le rette a' e b' devono necessariamente appartenere al piano tangente in B ad Ω (cfr. Paragrafo 8.3.6).
Supponiamo poi che il punto B appartenga al piano π_A, e quindi a una delle due rette a o b. Consideriamo allora un punto C di Ω non appartenente a π_A. Per il ragionamento precedente, C è iperbolico. Ripetendo la dimostrazione con A al posto di C, si ricava che il punto B è ancora iperbolico. ■

Teorema 8.10. *Se una quadrica Ω ha un punto parabolico, allora tutti i punti di Ω sono parabolici.*

-Dimostrazione. Supponiamo che il punto A della quadrica Ω sia parabolico. Allora il piano π_A, tangente ad Ω in A, interseca la quadrica in una retta reale a contata due volte. Quindi, ogni punto di a è parabolico. Sia poi B un punto di Ω non appartenente a π_A. Consideriamo il piano π_a passante per il punto B e contenente la retta a. Allora π_a interseca Ω in una conica spezzata nella retta a ed in una ulteriore retta reale b passante per

B. Il piano tangente ad Ω in B, deve contenere la retta b, quindi B non può essere un punto ellittico. Il punto B non può essere neppure iperbolico, altrimenti, per la dimostrazione precedente, ogni punto di Ω dovrebbe essere iperbolico, ma ciò è assurdo, essendo A parabolico per ipotesi. Di conseguenza, il punto B deve essere parabolico. ■

Teorema 8.11. *Se una quadrica Ω ha un punto ellittico, allora tutti i punti di Ω sono ellittici.*

-*Dimostrazione.* Supponiamo che il punto A della quadrica Ω sia ellittico. Ogni altro punto B di Ω deve allora essere ellittico. Infatti, se B fosse iperbolico, per il Teorema 8.9 tutti i punti di Ω dovrebbero essere iperbolici, il che è assurdo. Analogamente, se B fosse parabolico, per il Teorema 8.10 tutti i punti di Ω dovrebbero essere parabolici, il che è ancora assurdo. ■

8.5.2 Classificazione delle quadriche con la natura dei punti

In base ai teoremi precedenti si rende possibile una classificazione delle quadriche diversa da quella metrica, basata sulla natura dei loro punti. Abbiamo pertanto le seguenti tre famiglie di quadriche.

- **Quadriche a punti iperbolici.**

  1. Iperboloide ad una falda.
  2. Paraboloide iperbolico.

Esse si dicono anche quadriche rigate. Infatti, poiché i loro punti sono di natura iperbolica, le intersezioni tra tali quadriche ed i piani ad esse tangenti sono costituite da coppie di rette reali e distinte. Ciò significa che per ogni punto della quadrica passano due rette interamente contenute nella quadrica stessa.

- **Quadriche a punti ellittici.**

  1. Iperboloide a due falde.
  2. Ellissoide reale.
  3. Paraboloide ellittico.

Osserviamo che nessuna quadrica Ω a punti ellittici può contenere rette reali. Infatti, se esistesse una retta $a \in \Omega$, il piano tangente ad Ω in un punto $A \in a$ dovrebbe contenere la retta a, contro l'ipotesi che A sia ellittico.
La proprietà è comunque evidente per l'iperboloide a due falde, essendo formato da due parti separate tra loro, e per l'ellissoide reale, essendo contenuto in una regione limitata dello spazio.

- **Quadriche a punti parabolici.**

  1. Cono.
  2. Cilindro.

La caratteristica di queste quadriche è che il piano tangente in un punto semplice P non varia al variare di P tra i punti semplici di una stessa generatrice.

8.5.3 Classificazione proiettiva

Possiamo classificare le quadriche anche dal punto di vista proiettivo. Tale classificazione comprende le famiglie di quadriche che restano globalmente invarianti sotto l'azione di una generica proiettività dello spazio, cioè non vengono alterate da un cambio di coordinate omogenee del tipo seguente

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{cases} \tag{8.5.1}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\det[a_{ij}] \neq 0$. Si può verificare che una tale trasformazione non altera la natura dei punti di una quadrica. Inoltre porta punti reali in punti reali, punti immaginari in punti immaginari e quadriche riducibili in quadriche riducibili. Di conseguenza possiamo avere

1. Quadriche immaginarie.
2. Quadriche riducibili.
3. Quadriche irriducibili.
   - Quadriche a punti iperbolici.
   - Quadriche a punti ellittici.
   - Quadriche a punti parabolici.

cioè cinque famiglie di quadriche nello spazio proiettivo.

8.5.4 Punti impropri e classificazione metrica

Le considerazioni precedentemente svolte consentono di ottenere la classificazione metrica delle quadriche anche attraverso l'analisi dei loro punti impropri. Sia $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'equazione di una data quadrica Ω. Il luogo dei punti impropri di Ω, cioè la sua conica all'infinito, si ottiene intersecando Ω con il piano improprio, di equazione $x_4 = 0$.

$$C_\infty \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Dal punto di vista affine si ottiene una equazione

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0,$$

omogenea di secondo grado nelle variabili x_1, x_2, x_3, cioè un cono con il vertice nell'origine. Questo è il cono che proietta la quadrica dall'origine sul piano improprio e viene detto *cono direttore* della quadrica. Per stabilire la natura proiettiva di C_∞, cioè per vedere se C_∞ è reale non degenere, immaginaria non degenere oppure degenere, si può intersecare il cono direttore con un piano qualsiasi non passante per il vertice, per esempio con il piano di equazione $x_3 = 1$. Si ottiene così una conica γ avente la stessa natura proiettiva della conica all'infinito. In base a tale natura abbiamo le seguenti famiglie di quadriche.

1. γ è reale non degenere $\Rightarrow$ **Famiglia** degli iperboloidi.
2. γ è immaginaria non degenere $\Rightarrow$ Famiglia degli ellissoidi.
3. γ è degenere $\Rightarrow$ Famiglia dei paraboloidi.

All'interno di queste famiglie possiamo poi realizzare una classificazione più fine, studiando la natura dei punti della quadrica. Abbiamo allora i seguenti casi.

1. **Famiglia degli iperboloidi.**
    - Punti iperbolici $\Rightarrow$ Iperboloide ad una falda.
    - Punti ellittici $\Rightarrow$ Iperboloide a due falde.
    - Punti parabolici $\Rightarrow$ Cono reale.
2. **Famiglia degli ellissoidi.**
   In tal caso abbiamo una sola sottofamiglia di quadriche reali irriducibili, ottenuta quando i punti hanno natura ellittica. Tuttavia, possiamo inserire nella famiglia degli ellissoidi anche le quadriche immaginarie irriducibili, poiché anche per tali quadriche la conica all'infinito è immaginaria non degenere. Abbiamo allora i seguenti casi
    - Punti ellittici $\Rightarrow$ Ellissoide reale.
    - Esiste un punto doppio $\Rightarrow$ Cono immaginario.
    - Punti semplici immaginari $\Rightarrow$ Ellissoide immaginario.
3. **Famiglia dei paraboloidi.**
   In tal caso, per classificare le sottofamiglie di quadriche irriducibili, bisogna considerare, oltre alla natura dei punti, anche la maniera in cui degenera la conica all'infinito. Inoltre, possiamo introdurre in tale famiglia, anche le sottofamiglie costituite da quadriche riducibili, in quanto anche per queste quadriche la conica all'infinito è degenere. Queste sono distinguibili da quelle irriducibili per il fatto che il rango r della matrice simmetrica associata alla quadrica, è minore di **3**. Otteniamo i seguenti casi.
    - C_∞ degenere in due rette reali distinte.
        - Punti iperbolici $\Rightarrow$ Paraboloide iperbolico.
        - Punti parabolici $\Rightarrow$ Cilindro iperbolico.
        - $r = 2 \Rightarrow$ Coppia di piani reali e distinti.
    - C_∞ degenere in due rette immaginarie coniugate.
        - Punti ellittici $\Rightarrow$ Paraboloide ellittico.
        - Punti parabolici $\Rightarrow$ Cilindro ellittico reale.
        - Punti immaginari $\Rightarrow$ Cilindro ellittico immaginario.
        - $r = 2 \Rightarrow$ Coppia di piani immaginari non paralleli.
    - C_∞ degenere in due rette reali coincidenti.
        - Punti parabolici $\Rightarrow$ Cilindro parabolico.

- Punti immaginari ed $r = 2 \Rightarrow$ Coppia di piani immaginari paralleli.
- Punti reali ed $r = 2 \Rightarrow$ Coppia di piani reali paralleli.
- Punti reali ed $r = 1 \Rightarrow$ Coppia di piani coincidenti paralleli.

Ritroviamo così le 17 famiglie di quadriche descritte nel Paragrafo 8.2.2.

Osservazioni ed esempi.

1. È importante osservare che la classificazione delle quadriche fatta mediante la natura dei loro punti ha significato solo per i punti semplici e reali di quadriche irriducibili. Si escludono pertanto tutti i punti delle quadriche immaginarie, tutti i punti delle quadriche spezzate in piani, ed il vertice di un cono.

2. Se il punto improprio è semplice e reale, e se la quadrica è irriducibile, lo studio della natura del punto ha senso, ed ha lo stesso significato che assume quando il punto è proprio. □

Parte III

ESERCIZI SVOLTI

Capitolo 9

TESTI E SOLUZIONI

9.1 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 1

9.1.1. *Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 aventi coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resti modulo 2. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme formato dalle matrici $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ date da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificare che il prodotto tra matrici $\cdot$ è una operazione interna all'insieme $\mathcal{I}$.

Svolgimento. Poiché i coefficienti sono in $\mathbb{Z}_2$ abbiamo

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

$$C \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C,$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Pertanto, la tavola di composizione risulta

$\cdot$	A	B	C
A	A	B	C
B	B	C	A
C	C	A	B

e quindi l'operazione $\cdot$ è interna ad $\mathcal{I}$. ∎

9.1.2. *Sia $\mathcal{I}$ l'insieme di matrici considerato nell'Esercizio 9.1.1. Stabilire se $(\mathcal{I}, \cdot)$ è un monoide.*

Svolgimento. Verifichiamo l'associatività dell'operazione $\cdot$ controllando l'ordine delle parentesi su ogni possibile terna. Osserviamo innanzitutto che la tavola di composizione è simmetrica, quindi $\cdot$ è commutativa. Questo consente di ridurre il numero di verifiche alle seguenti

$$\begin{array}{ll} A\cdot(B\cdot C)=B\cdot C=A, & (A\cdot B)\cdot C=B\cdot C=A,\\ B\cdot(C\cdot A)=B\cdot C=A, & (B\cdot C)\cdot A=B\cdot C=A,\\ C\cdot(A\cdot B)=C\cdot B=A, & (C\cdot A)\cdot B=C\cdot B=A. \end{array}$$

Pertanto, $\cdot$ è associativa.
Inoltre, A è l'elemento neutro, e quindi $(\mathcal{I},\cdot)$ è un monoide. ■

9.1.3. *Sia $\mathcal{I}$ l'insieme di matrici considerato nell' Esercizio 9.1.1. Stabilire se $(\mathcal{I},\cdot)$ è un gruppo abeliano.*

Svolgimento. Dall'analisi della tavola di composizione notiamo che l'inversa di B è C, e l'inversa di C è B. Pertanto, ogni elemento ammette inverso, e quindi $(\mathcal{I},\cdot)$ è un gruppo. Poiché $\cdot$ è commutativa, $(\mathcal{I},\cdot)$ è un gruppo abeliano. ■

9.1.4. *Sia $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 aventi coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_3$ delle classi di resti modulo 3. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme formato dalle matrici $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ date da*

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

Stabilire se $(\mathcal{I},\cdot)$ è una struttura algebrica.

Svolgimento. Se i coefficienti delle matrici appartengono a $\mathbb{Z}_3$, la legge di composizione $\cdot$ non è interna all'insieme $\mathcal{I}$. Infatti, per esempio, $B\cdot C$ è la matrice seguente

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

la quale non appartiene all'insieme $\mathcal{I}$. Quindi, in tale caso, $(\mathcal{I},\cdot)$ non può essere una struttura algebrica. ■

9.1.5. *Sia $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi nell'insieme $\mathbb{Z}_3$ delle classi di resti modulo 3, e sia $+$ l'usuale somma di matrici. Determinare il numero di elementi di $(\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3),+)$.*

Svolgimento. Ogni matrice appartenente ad $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ è di tipo $(2,2)$, quindi dotata di 4 elementi. Ognuno di essi può assumere, indipendentemente, i tre valori $[0],[1],[2]$, e quindi $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ possiede $3^4=81$ matrici distinte. ■

9.1.6. *Sia $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi nell'insieme $\mathbb{Z}_3$ delle classi di resti modulo 3, e sia $+$ l'usuale somma di matrici. Determinare il numero di elementi di $(\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3),+)$.*

Svolgimento. Ogni matrice appartenente ad $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ è di tipo $(2,2)$, quindi dotata di 4 elementi. Ognuno di essi può assumere, indipendentemente, i tre valori $[0],[1],[2]$, e quindi $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ possiede $3^4 = 81$ matrici distinte. ■

9.1.7. *Determinare in* $(\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3),+)$ *l'inverso di* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Svolgimento. In $(\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3),+)$, l'inversa della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice che sommata a questa fornisce la matrice nulla. Quindi sia ha

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $a,b,c \in \mathbb{Z}_3$. Indicando con $0,1,2$ i rappresentanti degli elementi di $\mathbb{Z}_3$, abbiamo

$$\begin{cases} 2+a=0 \Rightarrow a=1 \\ 1+b=0 \Rightarrow b=2 \\ 1+c=0 \Rightarrow c=2 \\ 0+d=0 \Rightarrow d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

9.1.8. *Sia A la matrice di $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{Z}_3)$ data da*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolare $A^3 - A^2$.

Svolgimento. Indicando con $0,1,2$ i rappresentanti degli elementi di $\mathbb{Z}_3$, abbiamo

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+0 \\ 2+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ A^3 = A^2 \cdot A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+0 \\ 2+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ A^3 - A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-0 & 0-1 \\ 0-2 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

9.1.9. *Sia $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi nell'insieme $\mathbb{Z}_2$ delle classi di resti modulo 2. Determinare il numero di elementi di $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2)$.*

Svolgimento. Ogni matrice appartenente ad $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2)$ è di tipo $(3,3)$, quindi dotata di 9 elementi. Ognuno di essi può assumere, indipendentemente, i due valori $[0],[1]$, e quindi $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2)$ possiede $2^9 = 512$ matrici distinte. ■

9.1.10. *Sia $*$ l'usuale prodotto di matrici in $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2)$. Verificare che la matrice*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
è invertibile in $(\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2), *)$, e scrivere la matrice inversa.

Svolgimento. In $(\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2), *)$, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ammette inversa, in quanto il suo determinante è non nullo, e precisamente vale 1, come si calcola facilmente. Per calcolare la matrice inversa dobbiamo innanzitutto determinare i complementi algebrici degli elementi

$$(-)^{1+1}A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (-)^{1+2}A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \to 1(\text{poiché } -1 = 1 \text{ in } \mathbb{Z}_2),$$

$$(-)^{1+3}A_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (-)^{2+1}A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-)^{2+2}A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad (-)^{2+3}A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-)^{3+1}A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \to 1(\text{poiché } -1 = 1 \text{ in } \mathbb{Z}_2) \quad (-)^{3+2}A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-)^{3+3}A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

L'aggiunta della matrice data è dunque

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e coincide con l'inversa, essendo 1 il determinante della matrice iniziale. ■

9.1.11. *Sia A la matrice di $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{Z}_2)$ data da*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicata con I la matrice identica di ordine 3, calcolare il determinante della matrice $M = (A - I)^{1000}$.

Svolgimento. Indicando con $0, 1$ i rappresentanti degli elementi di $\mathbb{Z}_2$, abbiamo

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det(A-I)=0$, da cui, applicando il teorema di Binet, risulta

$$\det M = \det(A-I)^{1000} = (\det(A-I))^{1000} = 0^{1000} = 0.$$

■

9.1.12. *Sia $\mathcal{I}$ l'insieme dei punti del piano xy aventi coordinate $\left(3\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)$, essendo k un intero relativo. Considerati due punti qualsiasi $P\left(3\cos\left(a\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(a\frac{\pi}{3}\right)\right)$ e $Q\left(3\cos\left(b\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(b\frac{\pi}{3}\right)\right)$ di $\mathcal{I}$, sia $*$ l'operazione interna ad $\mathcal{I}$ data da*

$$P * Q = \left(3\cos\left((a+b)\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left((a+b)\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

1. *Dimostrare che $*$ è associativa.*
2. *Dimostrare che esiste l'elemento neutro.*
3. *Dimostrare che il punto $A\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathcal{I}$, e stabilire se esso ammette inverso in $\mathcal{I}$.*

Svolgimento.

1. Consideriamo tre punti $P\left(3\cos\left(a\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(a\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $Q\left(3\cos\left(b\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(b\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ed $R\left(3\cos\left(c\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(c\frac{\pi}{3}\right)\right)$, appartenenti all'insieme $\mathcal{I}$. Dalla definizione di $*$ risulta

$$(P*Q)*R = \left(3\cos\left((a+b)\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left((a+b)\frac{\pi}{3}\right)\right) * R =$$

$$= \left(3\cos\left([(a+b)+c]\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left([(a+b)+c]\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \left(3\cos\left([a+(b+c)]\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left([a+(b+c)]\frac{\pi}{3}\right)\right) = P*(Q*R).$$

Pertanto l'operazione $*$ è associativa.

2. L'elemento neutro, se esiste, è un punto $U \in \mathcal{I}$ tale che $P*U = U*P = P$ per ogni $P \in \mathcal{I}$. Sia $P\left(3\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)$ un generico punto di $\mathcal{I}$ ed $U\left(3\cos\left(u\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(u\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Dalla definizione di $*$ abbiamo

$$P*U = U*P = \left(3\cos\left((a+u)\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left((a+u)\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Affinché ciò sia uguale a P si deve avere

$$\begin{cases} 3\cos\left((a+u)\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(a\frac{\pi}{3}\right) \\ -3\sin\left((a+u)\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin\left(a\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Le due equazioni risultano entrambe soddisfatte se prendiamo $u=0$, e quindi U è il punto di coordinate $(3,0)$ è l'elemento neutro rispetto all'operazione $*$.

3. Per $k=2$ abbiamo $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pertanto, il punto A appartiene ad $\mathcal{I}$, e si ottiene per $k=2$. Il punto $A^{-1}\left(3\cos\left(h\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(h\frac{\pi}{3}\right)\right)$ è tale che $A*A^{-1} = A^{-1}*A = U$. Deve quindi essere

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = \left(3\cos\left((2+h)\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(k(2+h)\frac{\pi}{3}\right)\right) = (3,0).$$

Di conseguenza abbiamo

$$\begin{cases} 3\cos\left((2+h)\frac{\pi}{3}\right) = 3 \\ -3\sin\left(k(2+h)\frac{\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

Entrambe le equazioni risultano verificate se prendiamo $h = -2$, e quindi

$$\left(3\cos\left(-2\frac{\pi}{3}\right), -3\sin\left(-2\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(3\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right), 3\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

Il punto A^{-1} assume quindi le coordinate determinate. ■

9.1.13. *Sia $\mathbb{Z}_{18}$ l'insieme delle classi di resti modulo 18, e sia $\cdot$ la consueta operazione di prodotto tra classi.*

1. *Determinare l'insieme $\mathcal{I}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{18}$.*
2. *Dimostrare che $(\mathcal{I}, \cdot)$ è un gruppo abeliano.*
3. *Verificare che, in $\mathbb{Z}_{18}$, l'equazione $15x = 6$ ammette tre soluzioni distinte, l'equazione $7x = 17$ ammette una ed una sola soluzione, l'equazione $3x = 11$ non ammette soluzioni. Calcolare poi le soluzioni delle equazioni considerate, nei casi in cui queste esistono.*

Svolgimento.

1. L'insieme $\mathcal{I}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{18}$ è rappresentato dalle soluzioni dell'equazione modulare $[a][x] = [1]$ (modulo 18), le quali esistono quando il massimo comune divisore tra a e 18 è uguale ad 1, cioè se $(a, 18) = 1$. Abbiamo quindi $a = 1, 5, 7, 11, 13, 17$. Di conseguenza risulta $\mathcal{I} = \{[1], [5], [7], [11], [13], [17]\}$.

2. Se $[a], [b] \in \mathcal{I}$, allora $[a] \cdot [b]$ è invertibile. Infatti, se ciò non fosse, essendo $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$, dovrebbe risultare $(a \cdot b, 18) \neq 1$, cioè dovrebbe esistere un fattore comune non banale tra $a \cdot b$ e 18. Ma questo è impossibile, poiché un tale fattore dovrebbe dividere necessariamente almeno uno dei numeri a, b, contro il fatto che entrambi siano primi con 18. Pertanto, il prodotto è una operazione interna ad $\mathcal{I}$. Inoltre il prodotto è associativo e commutativo in $\mathcal{I}$, possedendo tali proprietà in tutto $\mathbb{Z}_{18}$. È poi evidente, per definizione, che ogni elemento di $\mathcal{I}$ ammette inverso. Pertanto $\mathcal{I}$ è un gruppo abeliano.

3. Nel primo caso abbiamo $a = 15$, $b = 6$, $n = 18$, per cui $d = (15, 18) = 3$. Poiché d divide b, l'equazione $15x = 6$ ammette soluzione. Inoltre, essendo $d = 3$, abbiamo 3 soluzioni distinte.

Nel secondo caso abbiamo $a = 7$, $b = 17$ $n = 18$, per cui $d = (7, 18) = 1$. Quindi $d|b$ per cui l'equazione $7x = 17$ ammette soluzione, ed essendo $d = 1$, tale soluzione è unica.

Nel terzo caso abbiamo $a = 3$, $b = 11$, $n = 18$, e quindi $d = (3, 18) = 3$ non divide 11. Pertanto in questo caso non ci sono soluzioni. ■

9.1.14. *Risolvere l'equazione $252x = 42 \pmod{1078}$.*

Svolgimento. Il massimo comune divisore d, tra 252 e 1078, è uguale a 14, e divide 42. Quindi, l'equazione ammette esattamente $d = 14$ soluzioni distinte, non congrue modulo 1078. Applichiamo l'algoritmo di Euclide

$$\begin{array}{lcrcl}
 & & \boxed{14} & = & 42 - 28 \cdot 1 = \\
1078 = 252 \cdot 4 + 70 & & & = & 42 - (70 - 42 \cdot 1) = \\
252 = 70 \cdot 3 + 42 & & & = & -70 + 42 \cdot 2 = \\
70 = 42 \cdot 1 + 28 & \text{da cui} & & = & -70 + (252 - 70 \cdot 3) \cdot 2 = \\
42 = 28 \cdot 1 + \boxed{14} & & & = & 252 \cdot 2 - 70 \cdot 7 = \\
28 = 14 \cdot 1 + 0 & & & = & 252 \cdot 2 - (1078 - 252 \cdot 4) \cdot 7 = \\
 & & & = & 252 \cdot 30 - 1078 \cdot 7
\end{array}$$

Quindi risulta $h = 30$, ed essendo $42 = 3 \cdot 14$ abbiamo $p = 3$, per cui $x_0 = 90$. Le altre soluzioni sono date da

$$x_1 = 90 + \tfrac{1078}{14} = 167; \quad x_2 = 167 + \tfrac{1078}{14} = 244; \quad x_3 = 244 + \tfrac{1078}{14} = 321;$$

$$x_4 = 321 + \tfrac{1078}{14} = 398; \quad x_5 = 398 + \tfrac{1078}{14} = 475; \quad x_6 = 475 + \tfrac{1078}{14} = 552;$$

$$x_7 = 552 + \tfrac{1078}{14} = 629; \quad x_8 = 629 + \tfrac{1078}{14} = 706; \quad x_9 = 706 + \tfrac{1078}{14} = 783;$$

$$x_{10} = 783 + \tfrac{1078}{14} = 860; \quad x_{11} = 860 + \tfrac{1078}{14} = 937; \quad x_{12} = 937 + \tfrac{1078}{14} = 1014;$$

$$x_{13} = 1014 + \tfrac{1078}{14} = 1091 \quad \Rightarrow x_{13} = 13 \pmod{1078}.$$

■

9.1.15. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ una matrice involutoria, cioè tale che $A^2 = A \cdot A = I$ Calcolare $A^{1.000.000.000}$ e $A^{1.000.000.001}$.*

Svolgimento. Proviamo a calcolare qualche potenza di A. Abbiamo $A^2 = I$, $A^3 = A^2A = IA = A$, $A^4 = A^3A = AA = A^2 = I$, $A^5 = A^4A = IA = A$. Ciascuna delle precedenti uguaglianze deriva dalla precedente. È facile dedurre che se A è involutoria ogni sua potenza pari deve coincidere con la matrice identica. Se riusciamo a dimostrare formalmente questa proprietà possiamo facilmente calcolare qualsiasi potenza di A. I calcoli precedenti suggeriscono di dimostrarla ricorrendo ad un procedimento per induzione. L'obiettivo è dunque quello di dimostrare che $A^{2n} = I$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se A è involutoria. Dobbiamo verificare la validità della tesi per un intero n particolare, quindi dimostrare che ogni volta che la tesi è vera per un intero generico n, lo è pure per il successivo $n + 1$. Per definizione di matrice involutoria ($A^2 = I$), la tesi è certamente vera con $n = 1$. Supponiamo ora che sia vera per n, cioè che $A^{2n} = I$ (ipotesi di induzione). Vediamo cosa succede per $n + 1$. Abbiamo:

$$A^{2(n+1)} = A^{2n+2} = A^{2n}A^2. \tag{9.1.1}$$

Ma per l'ipotesi sull'involutorietà di A, abbiamo che $A^2 = I$. Per l'ipotesi di induzione si ha $A^{2n} = I$. Quindi la (9.1.1) diventa $A^{2n}A^2 = I \cdot I = I$. Tornando al nostro problema iniziale, essendo 1.000.000.000 pari, otteniamo:

$$A^{1.000.000.000} = I, \quad A^{1.000.000.001} = A^{1.000.000.000}A = IA = A.$$

■

9.1.16. *Verificare che per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice $A + A^t$ è simmetrica.*

Svolgimento. Una matrice M è simmetrica se e solo se $M = M^t$. Basta che verifichiamo questa uguaglianza per la matrice $A + A^t$, ricordando che la trasposta di una somma di matrici è la somma delle matrici trasposte, e che la trasposizione è un'operazione involutoria (cioè applicata due volte si annulla: $(A^t)^t = A$). Allora:

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t.$$

Quindi $A + A^t$ è sempre simmetrica, qualunque sia la matrice A. ■

9.1.17. *Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ matrici simmetriche. Verificare che anche la matrice $A+B$ è a sua volta simmetrica.*

Svolgimento. Se A e B sono simmetriche abbiamo $A = A^t$ e $B = B^t$. Basta verificare un'analoga uguaglianza per la matrice $A + B$. Possiamo procedere in due modi. Sfruttando la regola di trasposizione di una somma di matrici (la trasposta di una somma è la somma delle trasposte) e le ipotesi (A e B sono simmetriche), otteniamo

$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B.$$

Quindi $A + B$ coincide con la trasposta ed è simmetrica. In alternativa si può utilizzare la definizione di matrice simmetrica. Posto $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, abbiamo $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, per definizione di simmetria e $A + B = C = [c_{ij}]$ dove $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, per definizione di somma di matrici. Allora $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$, per cui $A + B$ è simmetrica. ■

9.1.18. *Dimostrare che se A e B sono matrici simmetriche di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ allora AB è simmetrica se e solo se A e B commutano.*

Svolgimento. È una condizione necessaria e sufficiente. Dividiamo la verifica in due parti, sfruttando il fatto che una matrice simmetrica coincide con la propria trasposta, e la regola di trasposizione di un prodotto di matrici: la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte fatto in ordine inverso, ossia $(A_1 A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t A_1^t$.

($\Rightarrow$) Supponiamo che AB sia simmetrica. Deve coincidere con la sua trasposta, quindi:

$$AB = (AB)^t = B^t A^t \stackrel{(1)}{=} BA,$$

e A e B commutano, L'uguaglianza $(^1)$ è conseguenza del fatto che A e B, prese singolarmente, sono a loro volta simmetriche per ipotesi.

($\Leftarrow$) Supponiamo che A e B commutino, ovvero che $AB = BA$. Abbiamo

$$(AB)^t = B^t A^t = BA = AB.$$

Quindi AB coincide con la sua trasposta, cioè è simmetrica. ■

9.1.19. *Verificare che per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice $A - A^t$ è emisimmetrica.*

Svolgimento. Una matrice M è emisimmetrica se $M^t = -M$ o, che è la stessa cosa, se $M + M^t = O$. Occorre verificare una delle precedenti uguaglianze per la particolare matrice $A - A^t$. Ricordando che la trasposta di una somma di matrici è la somma delle matrici trasposte e che la trasposta di una trasposta è la matrice stessa, abbiamo:

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A \overset{(1)}{=} -(A - A^t).$$

L'uguaglianza $(^1)$ si ottiene raccogliendo -1, sfruttando la proprietà distributiva del prodotto per uno scalare nel confronto della somma di matrici ($k(A + B) = kA + kB$, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ e $k \in \mathbf{K}$). ■

9.1.20. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

determinare $C = (A^t B)^t$

Svolgimento. Notiamo che i due fattori nel prodotto $A^t B$ hanno, rispettivamente, ordini $(2, 3)$ e $(3, 2)$. Sono quindi conformabili e il prodotto è eseguibile. L'ordine della matrice risultato sarà $(2, 2)$, quindi anche $(A^t B)^t$ deve avere ordine $(2, 2)$. Eseguendo i conti, otteniamo:

$$A^t B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Passando alla trasposta, abbiamo

$$(A^t B)^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Possiamo verificare il risultato sfruttando il Teorema 1.15, in base al quale deve essere $(A^t B)^t = B^t (A^t)^t = B^t A$. Abbiamo allora

$$B^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},$$

il che conferma il precedente risultato. ■

9.1.21. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

determinare una matrice C, *di dimensione opportuna, tale che* $A + B - C = O$.

Svolgimento. Se $A+B-C=O$, allora $A+B=C$, quindi per determinare la C basta calcolare la somma $A+B$, che si esegue sommando elemento per elemento i due addendi. Ovvero:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 2+(-2) \\ 2+(1) & 4+(-1) \\ 0+(3) & 1+(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

9.1.22. *Siano*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2b-1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c+2 & a \\ 1-2d & 1 \end{bmatrix}$$

due matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Stabilire se esistono valori dei parametri reali a, b, c e d per i quali le matrici A e B sono uguali.

Svolgimento. Per il principio di uguaglianza di matrici, due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono uguali se hanno ordinatamente uguali tutti i loro elementi, ovvero se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni coppia di indici ij. Ciò significa che, come minimo, devono avere lo stesso ordine. Nel nostro caso le matrici appartengono entrambe all'insieme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Coincidono, ovvero

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2b-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+2 & a \\ 1-2d & 1 \end{bmatrix} = B$$

se e solo se i singoli elementi sono uguali. Procedendo ordinatamente dalla prima riga e dalla prima colonna, abbiamo le condizioni:

$$\begin{cases} -1 = c+2 \\ 0 = a \\ 2 = 1-2d \\ 2b-1 = 1. \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

■

9.1.23. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a e b le matrici A e B commutano.

Svolgimento. Le matrici A e B commutano se $AB = BA$. Calcoliamo i due prodotti ed uguagliamo i risultati. Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$AB = \begin{bmatrix} -a & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+ab & -a+a^2 \\ 0 & a+b \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & a \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+a & 1-a \\ 0 & a+ab \end{bmatrix}.$$

Per il principio di uguaglianza di matrici, i due precedenti prodotti coincidono se e solo se hanno tutti gli elementi ordinatamente uguali. Questa condizione ci conduce a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a+ab=b+a \\ -a+a^2=1-a \\ 0=0 \\ a+b=a+ab, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} ab-b=0 \\ a^2-1=0 \\ 0=0 \\ ab-b=0, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} b(a-1)=0 \\ (a+1)(a-1)=0 \\ 0=0 \\ b(a-1)=0. \end{cases}$$

La terza equazione è un'identità. La prima è soddisfatta o per $b=0$, o per $a=1$. Studiamo questi due casi. Se $b=0$, l'ultima equazione è vera per ogni valore di a, mentre la seconda è soddisfatta solo per $a=\pm 1$. Quindi le coppie $(a,b)=(1,0)$ e $(a,b)=(-1,0)$ sono due possibili soluzioni. Se, nel secondo caso, poniamo $a=1$, la seconda e la terza equazione diventano un'identità indipendentemente dal valore del parametro b, quindi tutte le coppie della forma $(1,b)$ $(b \in \mathbb{R})$ sono soluzioni del problema. Tra queste ultime c'è anche la $(1,0)$, che abbiamo già trovato come soluzione nel primo caso. Facendo l'unione delle soluzioni trovate, possiamo dire che le matrici commutano quando $a=1$ e $b \in \mathbb{R}$, oppure per $(a,b)=(-1,0)$. ■

9.1.24. *Si considerino le matrici*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

determinare $(A+B)^2$.

Svolgimento. Possiamo procedere in due modi. Si può determinare prima la matrice $A+B$, quindi calcolare il suo prodotto con se stessa. Oppure possiamo sviluppare la potenza del binomio $(A+B)^2$. Facciamo innanzitutto notare che non esistono problemi di conformabilità nei prodotti, né di diversità nelle dimensioni delle matrici per quanto riguarda le somme. Infatti sia A che B sono quadrate del secondo ordine. Calcolando prima la somma, otteniamo:

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+1 & 0-1 \\ 3-2 & -1+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo ora il quadrato della matrice così ottenuta:

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nel caso si voglia sviluppare il binomio occorre fare molta attenzione al fatto che in genere il prodotto di matrici non è commutativo. Quindi, nei calcoli, non possiamo usare le regole applicate usualmente nello sviluppo di un binomio di numeri reali. In particolare non ha senso parlare di *doppio prodotto*. Infatti, in $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ non è detto che $AB=BA$, quindi, in genere, $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$. Svolgendo i conti, abbiamo:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2+AB+BA+B^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1+1-2+3 & 0-1+1-1 \\ 0+5-2-2 & 1-3+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

9.1.25. *Determinare tutte le matrici*

$$H = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *che commutano con la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Stiamo cercando le matrici H di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ per cui $HA = AH$. Determiniamo i due membri della precedente equazione ed uguagliamoli. Abbiamo:

$$HA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{bmatrix}$$

$$AH = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{bmatrix}.$$

Uguagliando le due matrici così ottenute, si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x = x+z \\ x+y = y+t \\ z = z \\ z+t = t, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = x \\ x = t \\ z = z \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x = t \\ x = t \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si deduce che $x = t$, mentre il parametro y è libero di variare. Quindi, le matrici cercate hanno la forma

$$H = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix},$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. ■

9.1.26. *Si consideri la matrice reale $A_k = \operatorname{diag}(k, 2)$. Si determini l'insieme V_k delle matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ permutabili con A_k.*

Svolgimento. La matrice A_k è

$$A_k = \operatorname{diag}(k, 2) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

L'insieme V_k che dobbiamo descrivere è formato da matrici del tipo

$$V = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix},$$

con $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tali che $VA_k = A_kV$. Determiniamo la forma delle matrici ai due membri della precedente equazione ed uguagliamoli.

$$VA_k = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx & ky \\ 2z & 2t \end{bmatrix},$$

$$A_kV = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx & 2y \\ kz & 2t \end{bmatrix}.$$

Uguagliando le due matrici otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} kx = kx \\ ky = 2y \\ 2z = kz \\ 2t = 2t \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ y(k-2) = 0 \\ z(k-2) = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La prima e l'ultima sono delle identità. Se $k = 2$, la seconda e terza equazione sono soddisfatte indipendentemente dai valori di y e z, mentre non esistono condizioni su x e t, ovvero non ci sono condizioni su alcun termine delle matrici che formano V_2. Perciò $V_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Possiamo notare che, in questo caso, $A_2 = \operatorname{diag}(2, 2) = 2I_2$, quindi, per ogni $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A_2M = 2I_2M = 2M = 2(MI_2) = M(2I_2) = MA_2.$$

Se $k \neq 2$, le condizioni sugli elementi delle matrici di V_k sono $y = z = 0$. Non si hanno condizioni su x e t. Quindi:

$$V_k = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \middle| \; x, t \in \mathbb{R} \right\},$$

ossia V_k è l'insieme delle matrici diagonali del secondo ordine. ■

9.1.27. *Calcolare, usando le operazioni elementari di riga e di colonna, il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. La matrice A è quadrata del quarto ordine. Cerchiamo, sommando a righe e colonne combinazioni lineari delle rimanenti, di ottenere il massimo numero di zeri in una linea (riga o colonna) della matrice. Indicheremo le operazioni eseguite sulle righe usando il simbolo R, e sulle colonne il simbolo C. Quindi, per esempio, R_1-3R_4 significa sottrarre alla prima riga la quarta moltiplicata per 3. Usando le operazioni elementari passeremo dalla matrice A ad altre matrici, diverse, ma aventi lo stesso determinante. Con l'operazione $R_1 - 2R_2$ otteniamo:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Quindi, con $R_3 + 3R_2$, passiamo a:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e, con } R_4 + R_2, \text{ a } A''' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

È chiaramente più semplice sviluppare il determinante di A''' usando Laplace rispetto alla terza colonna, piuttosto che calcolarlo rispetto ad una sua qualsiasi altra linea. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \det A \;&=\; \det A''' = 0 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \\ &+0 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = *. \end{aligned}$$

Anche su quest'ultima matrice si può operare con operazioni elementari. Eseguendo successivamente le operazioni $C_2 + 2C_1$ e $C_3 - 5C_1$ e sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima riga otteniamo

$$* = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 7 & -13 \end{bmatrix} = -\left(1 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -13 \end{vmatrix}\right) = -1(-52+14) = 38.$$

■

9.1.28. *Dimostrare che se A è emisimmetrica di ordine dispari allora è singolare.*

Svolgimento. Supponiamo che $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, dove $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, è un generico numero dispari. Ricordiamo che una matrice si dice singolare se ha determinante nullo. Ora, se A è emisimmetrica, abbiamo che $A = -A^t$. Quindi sia A che $-A^t$ devono avere lo stesso determinante. Ma il determinante di una matrice coincide con quello della sua trasposta e $\det kA = k^n \det A$ se A ha ordine n. In questo caso, si ha:

$$\det A = \det(-A^t) = \det\left((-1)A^t\right) = (-1)^{2n+1} \det A^t = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A,$$

perché $(-1)^{2n+1} = -1$. Ma in $\mathbb{R}$, l'unico numero che coincide con il suo inverso è 0, quindi $\det A = 0$ e A è singolare. ■

9.1.29. *Determinare i valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti matrici sono singolari:*

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 3 \\ 3 & a-1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2b^2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ b-2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Una matrice è singolare quando il suo determinante è 0. Imponiamo quindi ai determinanti delle due matrici di annullarsi. Calcolando il determinante delle due matrici abbiamo $\det A = (a-1)^2 - 9 = (a-1+3)(a-1-3) = (a+2)(a-4)$ e $\det B = (b-2)(4b^2-25) = (b-2)(2b+5)(2b-5)$. Quindi $\det A = 0$ se e solo se $(a+2)(a-4) = 0$, ovvero se e solo se $a = -2$ oppure $a = 4$. Analogamente $\det B = 0$ se e solo se $(b-2)(2b+5)(2b-5) = 0$, cioè quando $b = 2$ oppure $b = \pm\frac{5}{2}$. ■

9.1.30. *Determinare la matrice inversa di*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Siccome $\det A = -5 \neq 0$ la matrice inversa esiste. Essa si ottiene dividendo per $\det A$ ogni elemento della matrice aggiunta A^*, ottenuta come trasposta della matrice i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi di A. Questi risultano

$$(-)^{1+1}A_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad (-)^{1+2}A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$(-)^{1+3}A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \qquad (-)^{2+1}A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$(-)^{2+2}A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad (-)^{2+3}A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$(-)^{3+1}A_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad (-)^{3+2}A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$(-)^{3+3}A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

L'inversa di A è pertanto la matrice:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per convincersene basta verificare che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$. ■

9.1.31. *Si consideri la matrice di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix},$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Discutere l'esistenza dell'inversa di A al variare del parametro e, quando esiste, calcolarla.

Svolgimento. Una matrice è invertibile se e solo se è non singolare, ovvero ha il determinante diverso da 0. Calcoliamo il determinante di A, sviluppandolo secondo Laplace rispetto alla prima colonna:

$$\det A = -a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a(a-1).$$

Quindi esiste l'inversa quando $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Determiniamo, in questi casi, la matrice aggiunta. I complementi algebrici sono:

$$(-1)^{1+1}A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a-1, \qquad (-1)^{1+2}A_{12} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a^2$$

$$(-1)^{1+3}A_{13} = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a, \qquad (-1)^{2+1}A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1-a$$

$$(-1)^{2+2}A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0, \qquad (-1)^{2+3}A_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{3+1}A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad (-1)^{3+2}A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a$$

$$(-1)^{3+3}A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = -a.$$

L'aggiunta di A è la trasposta della matrice dei complementi algebrici, ovvero:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2a-1 & -a^2 & a \\ 1-a & 0 & 0 \\ -1 & a & -a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2a-1 & 1-a & -1 \\ -a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

L'inversa di A è allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{a(1-a)} \begin{bmatrix} 2a-1 & 1-a & -1 \\ -a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

■

9.1.32. *Si consideri la matrice di* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Determinare la matrice aggiunta A^* *e verificare che* $(A^*)^* = A$.

Svolgimento. Determiniamo i complementi algebrici della A:

$$A_{11} = +d, \quad -A_{12} = -c, \quad -A_{21} = -b, \quad A_{22} = +a.$$

Svolgimento. Una matrice è invertibile se e solo se è non singolare, ovvero ha il determinante diverso da 0. Calcoliamo il determinante di A, sviluppandolo secondo Laplace rispetto alla prima colonna:

$$\det A = -a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a(a-1).$$

Quindi esiste l'inversa quando $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Determiniamo, in questi casi, la matrice aggiunta. I complementi algebrici sono:

$$(-1)^{1+1}A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a-1, \qquad (-1)^{1+2}A_{12} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a^2$$

$$(-1)^{1+3}A_{13} = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a, \qquad (-1)^{2+1}A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1-a$$

$$(-1)^{2+2}A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0, \qquad (-1)^{2+3}A_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{3+1}A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad (-1)^{3+2}A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a$$

$$(-1)^{3+3}A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = -a.$$

L'aggiunta di A è la trasposta della matrice dei complementi algebrici, ovvero:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2a-1 & -a^2 & a \\ 1-a & 0 & 0 \\ -1 & a & -a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2a-1 & 1-a & -1 \\ -a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

L'inversa di A è allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{a(1-a)} \begin{bmatrix} 2a-1 & 1-a & -1 \\ -a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}.$$

■

9.1.32. *Si consideri la matrice di* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Determinare la matrice aggiunta A^* *e verificare che* $(A^*)^* = A$.

Svolgimento. Determiniamo i complementi algebrici della A:

$$A_{11} = +d, \quad -A_{12} = -c, \quad -A_{21} = -b, \quad A_{22} = +a.$$

La matrice aggiunta di A è la trasposta della matrice dei complementi algebrici, ossia:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Per calcolare $(A^*)^*$ rifacciamo conti analoghi, ma usando la A^* come matrice di partenza. I complementi algebrici della A^* sono allora:

$$A'_{11} = +a, \quad -A'_{12} = +c, \quad -A'_{21} = +b, \quad A'_{22} = (-1)^{2+2}d = +d.$$

L'aggiunta è la trasposta della matrice avente i precedenti come elementi:

$$(A^*)^* = \begin{bmatrix} A'_{11} & -A'_{12} \\ -A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

■

9.1.33. *Determinare le matrici di $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ che coincidono con la propria aggiunta, ovvero tali che $A^* = A$.*

Svolgimento. Consideriamo la generica matrice

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, e calcoliamone l'aggiunta. I complementi algebrici sono:

$$A_{11} = +t, \quad -A_{12} = -z, \quad -A_{21} = -y, \quad A_{22} = +x,$$

da cui si ricava l'aggiunta:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} t & -z \\ -y & x \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix}.$$

Siamo interessati alle matrici tali che $A = A^*$. Uguagliando le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix} = A^*$$

otteniamo le seguenti uguaglianze

$$\begin{cases} x = t \\ y = -y \\ z = -z \\ t = x \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x = t. \end{cases}$$

Le matrici che stiamo cercando sono pertanto matrici scalari, $\operatorname{diag}(x, x) = xI_2$, $x \in \mathbb{R}$. ■

9.1.34. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se esiste la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A. In caso affermativo calcolarla e verificare il risultato.

Svolgimento. Se A è una matrice (m,n) qualsiasi, la matrice $Q = A^tA$ è una matrice quadrata (n,n). Se Q è non singolare, allora esiste la matrice $(A^tA)^{-1}A^t$, e viene detta matrice pseudoinversa di Moore-Penrose. Consideriamo quindi, innanzitutto, il prodotto $Q = A^t \cdot A$

$$Q = A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det Q = 56 \neq 0$, la matrice Q è non singolare, e quindi la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A esiste effettivamente. Abbiamo poi

$$Q^{-1} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene

$$(A^tA)^{-1}A^t = Q^{-1}A^t = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 12 & 20 & 4 \\ -8 & -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice trovata è effettivamente la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A

$$(A^tA)^{-1}A^t \cdot A = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 12 & 20 & 4 \\ -8 & -4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

9.1.35. *Determinare il rango della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. A differenza del caso quadrato, in cui conviene partire dall'analisi del determinante della matrice stessa, nel caso rettangolare è più comodo partire da un minore del secondo ordine non nullo (che si individua, se esiste, facilmente, facendo i calcoli a mente), e quindi procedere orlando tale minore secondo quanto affermato nel *Teorema di Krönecker*. Per esempio, il minore individuato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna è uguale a $2 \neq 0$. Possiamo orlare tale minore in soli tre modi: usando la prima, la quarta o la quinta colonna, e ottenendo, rispettivamente

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A = 2$. ■

9.1.36. *Discutere il rango della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} k^2-9 & 0 & 2k-6 \\ 0 & k-3 & 1 \end{bmatrix},$$

al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice A appartiene a $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, quindi il suo rango è un numero compreso fra 0 e 2. Siccome l'unica matrice avente rango 0 è la matrice nulla e, nel nostro caso, non esistono valori di k che annullano contemporaneamente tutti i termini di A (alcuni non dipendono da k e sono diversi da 0), il rango di A è almeno 1, ovvero $1 \leq \text{rk}A \leq 2$. Studiamo la presenza di minori non nulli del secondo ordine. Per esempio, consideriamo il minore formato dalla prima e ultima colonna e vediamo quando si annulla:

$$\begin{vmatrix} k^2-9 & 2k-6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k^2-9-0 = (k+3)(k-3) = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3.$$

Quindi per $k \neq \pm 3$ il minore sopra considerato è $\neq 0$, ha ordine 2 e di conseguenza $\text{rk}A = 2$. Esaminiamo i casi rimanenti, ossia cosa succede quando $k = \pm 3$. Basta sostituire nella matrice e cercare i minori d'ordine massimo non nulli. Se $k = 3$, la A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Non esistono minori del secondo ordine diversi da 0 ed esiste un unico minore del primo ordine non nullo, quello formato dall'elemento $a_{23} = 1$. Quindi per $k = 3$ si ha $\text{rk}A = 1$. Se $k = -3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il minore formato dalle ultime due colonne, cioè

$$\begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 72 = -72 \neq 0,$$

è non nullo, quindi anche per $k = -3$ la matrice A ha rango 2. Riassumendo, abbiamo:

$$\begin{cases} k \neq 3 & \Rightarrow \quad \text{rk}A = 2 \\ k = 3 & \Rightarrow \quad \text{rk}A = 1. \end{cases}$$

■

9.1.37. *Discutere il rango della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} h & 2 & 2h & 0 \\ 2 & 1 & h-1 & h \\ 3h & 3 & 2 & h \end{bmatrix},$$

al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice appartiene a $\mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$. Siccome, se $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, si ha $0 \leq \mathrm{rk}M \leq \min(m,n)$, nel nostro caso il rango di A è compreso tra 1 e 3. Infatti l'unica matrice di rango nullo è la matrice nulla O, ossia la matrice avente tutti gli elementi 0. Ma in A esiste certamente almeno un elemento $\neq 0$ (ad esempio $a_{12} = 2$), quindi $\mathrm{rk}A \geq 1$. Nel caso di matrici rettangolari è in genere conveniente studiare il rango partendo da un minore del secondo ordine $\neq 0$ e facendo man mano crescere l'ordine, *orlando* il minore di partenza secondo quanto suggerisce il Teorema di Krönecker. Studiamo l'annullarsi di un minore del secondo ordine. Molto comodo da studiare è quello formato dalle prime due righe e dalla seconda e quarta colonna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & h \end{vmatrix} = 2h = 0 \iff h = 0. \tag{9.1.2}$$

Quindi se $h \neq 0$ il rango di A è almeno 2.

Esaminiamo prima il caso di $h = 0$. La matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

In questo caso il minore del terzo ordine formato dalle prime tre colonne e non nullo. Infatti:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2(4-0) = -0 \neq 0.$$

Quindi con $h = 0$ abbiamo $\mathrm{rk}A = 3$.

Torniamo al caso di $h \neq 0$. Abbiamo individuato il minore (9.1.2). Possiamo orlarlo ed usare il Teorema di Krönecker. Per l'orlatura usiamo la prima colonna, ottenendo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} h & 2 & 0 \\ 2 & 1 & h \\ 3h & 3 & h \end{vmatrix} &= h \begin{vmatrix} 1 & h \\ 3 & h \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & h \\ 3h & h \end{vmatrix} = h(h-3h) - 2(2h-3h^2) = \\ &= -2h^2 - 4h + 6h^2 = 4h^2 - 4h = 4h(h-1). \end{aligned}$$

Abbiamo sviluppato il determinante rispetto alla prima riga. Il minore (9.1.2) si annulla solo per $h = 0$, che rappresenta un caso già studiato, e per $h = 1$. Se $h = 1$, la matrice diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Orliamo (9.1.2) nell'unico altro modo possibile, cioè usando la terza colonna. Otteniamo, sviluppando rispetto all'ultima colonna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(4-6) + (0-2) = 2 - 2 = 0.$$

Quindi non ci sono minori di ordine 3 non nulli quando $h \neq 0$, e il rango di A è 2. Riassumendo, abbiamo:

$$\begin{cases} h \neq 1 \ \Rightarrow \ \mathrm{rk}A = 3 \\ h = 1 \ \Rightarrow \ \mathrm{rk}A = 2. \end{cases}$$

■

9.1.38. *Studiare, al variare dei parametri reali a, b, il rango della matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 2a+1 & 1 & 2 \\ a-1 & -1 & a \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Poiché A è una matrice quadrata, procediamo innanzitutto calcolando il suo determinante. Risulta $\det A = -(5a^2 - 3a - 2)$, e quindi si annulla per $a = 1$ ed $a = -\frac{2}{5}$.

• Se $a \notin \left\{-\dfrac{2}{5}, 1\right\}$ allora la caratteristica di A è uguale a 3.

• Per $a = -\frac{2}{5}$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & 2 \\ -\frac{7}{5} & -1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è diverso da zero, quindi la caratteristica di A è uguale a 2.

• Per $a = 1$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è diverso da zero, quindi la caratteristica di A è ancora uguale a 2. ■

9.1.39. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & 2 & -a & b \\ a & b-a & c & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Studiare, al variare dei parametri reali a, b, c, il rango della matrice A.

Svolgimento. Indichiamo con R_i e C_j la riga i-ma e la colonna j-ma della matrice. Osserviamo che il minore $\{R_1\} \cap \{C_1\}$ non dipende dai parametri, ed è uguale ad 1, quindi $r(A) \geq 1$ per ogni scelta dei parametri a, b, c. Se orliamo [1] in tutte le possibili maniere, notiamo che non si trova mai un minore sicuramente diverso da zero

$$\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 2 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; 2 - 2a = 0 \quad \text{per } a = 1$$

$$\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_3\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{bmatrix} \;\rightarrow\; 0$$

$$\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_4\} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & b \end{bmatrix} \;\rightarrow\; b - 3a = 0 \quad \text{per } b = 3a$$

$$\{R_1, R_3\} \cap \{C_1, C_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b-a \end{bmatrix} \;\rightarrow\; b - 3a = 0 \quad \text{per } b = 3a$$

$$\{R_1, R_3\} \cap \{C_1, C_3\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & c \end{bmatrix} \;\rightarrow\; c + a = 0 \quad \text{per } c = -a$$

$$\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_4\} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ a & 3 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; 3 - 3a = 0 \quad \text{per } a = 1$$

Pertanto dobbiamo procedere valutando i diversi casi possibili. Possiamo innanzitutto separare i due casi $a = 1$ ed $a \neq 1$, suddividendo poi l'analisi nei sottocasi che si presentano.

- $a = 1$. Distinguiamo i sottocasi $b \neq 3$ e $b = 3$.

  1. $b \neq 3$. In questo caso abbiamo $r(A) \geq 2$, poiché, per esempio, il minore $\{R_1, R_3\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo. Orlando questo minore abbiamo

  $$\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & b-1 & c \end{bmatrix} \;\rightarrow\; 0 \quad \text{per ogni } b, c$$

  $$\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_4\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & b \\ 1 & b-1 & 3 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; -(b-3)^2 \neq 0$$

  Pertanto, in questo caso, $r(A) = 3$.

  2. $b = 3$. Abbiamo gli ulteriori sottocasi $c \neq -1$ e $c = -1$.

     (a) $c \neq -1$. Il minore $\{R_1, R_3\} \cap \{C_1, C_3\}$ è non nullo. Orlando si ha

     $$\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix} \;\rightarrow\; 0 \quad \text{per ogni } c$$

     $$\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_3, C_4\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; 0 \quad \text{per ogni } c.$$

Quindi $r(A) = 2$.

(b) $c = -1$. In questo caso si annullano tutti i minori di ordine 2 ottenuti orlando $\{R_1\} \cap \{C_1\}$, per cui $r(A) = 1$.

- $a \neq 1$. In questo caso il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, per cui $r(A) \geq 2$ per ogni b, c. Orlando si ha

$$\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 2 & -a \\ a & b-a & c \end{bmatrix}$$

e quindi il determinante è $2(1-a)(a+c)$ e si annulla per $c = -a$

$$\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_4\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & b \\ a & b-a & 3 \end{bmatrix}$$

Quindi il determinante è $6 + 6ab - 3a^2 - 12a - b^2$ e si annulla per $b = 3a \pm \sqrt{6}|a-1|$. Di conseguenza, se $b = 3a \pm \sqrt{6}|a-1|$ e $c = -a$, risulta $r(A) = 2$, altrimenti $r(A) = 3$. Riassumendo si ha

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{per } a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = -1 \\ 2 & \text{per } a = 1 \wedge b = 3 \wedge c \neq -1 \text{ oppure } a \neq 1 \wedge b = 3a \pm \sqrt{6}|a-1| \wedge c = -a \\ 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

■

9.1.40. *Calcolare il rango della seguente matrice partendo dall'elemento a_{22}*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det[2] = 2 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rk}(A) \geq 1$$

Tra i vari orlati abbiamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{bmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rk}(A) \geq 2.$$

Consideriamo adesso gli orlati del minore di ordine 2 che abbiamo utilizzato. Tra essi abbiamo

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{3} & 1 & \boxed{0} & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \det \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{3} & \boxed{0} \end{bmatrix} = 0+0+6-0-0-0 = 6 \neq 0$$

Pertanto abbiamo $r(A) \geq 3$. Poiché A è di tipo $(4,5)$, deve essere $r(A) \leq 4$. Osserviamo che la quarta riga è uguale alla somma delle prime tre per cui $\text{rk}(A) < 4$, e quindi 3 è il rango della matrice considerata. ■

9.2 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 2

9.2.1. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} y - 3x + t = 1 \\ t - x = 0 \\ y - z + x = -1 \end{cases}$$

determinare le matrice dei coefficienti, la colonna dei termini noti e riscrivere il sistema dato in forma matriciale.

Svolgimento. Stabiliamo come ordinamento sulle variabili quello alfabetico. Per chiarezza, non essendo le singole equazioni ordinate, riscriviamo il sistema:

$$\begin{cases} -3x + y + t = 1 \\ -x + t = 0 \\ x + y - z = -1. \end{cases}$$

Allora la matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Se poniamo $X = [x, y, t, z]^t$, possiamo scrivere il sistema nella forma $AX = B$. Infatti, sviluppando i calcoli abbiamo

$$AX = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + y + t \\ -x + t \\ x + y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + t = 1 \\ -x + t = 0 \\ x + y - z = -1. \end{cases}$$

■

9.2.2. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 4 \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 1 = -3 \end{cases}$$

determinare le matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti.

Svolgimento. Stabiliamo come ordinamento sulle variabili quello naturale indotto dagli indici. Si noti che le variabili compaiono già ordinate nelle varie equazioni. Invece i termini noti vanno calcolati: nella terza equazione una costante va portata al secondo membro. Il sistema ha tre equazioni in quattro incognite. La matrice dei coefficienti appartiene dunque a $\mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$. Quest'ultima e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

■

9.2.3. *Discutere la risolubilità dei seguenti sistemi lineari:*

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_6 = 3. \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = 0 \\ x - z = 1. \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 6. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x_2 = 2x_4 - 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (e) \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ x + y = 3 \\ -2x + y = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Per determinare se esistono soluzioni e quante sono usiamo il Teorema di Rouché-Capelli.

(a) La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

In A, il minore determinato dalle prime due righe e colonne è non nullo. Quindi $\mathrm{rk}A \geq 2$. Orliamolo con la terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A = 3$. Ma la matrice completa A' non può avere un rango maggiore, avendo ordine $(3, 7)$. Da cui $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 3$. Esistono soluzioni e sono $\infty^{6-3} = \infty^3$. Questo significa che le soluzioni saranno n-ple del tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, contenenti tre parametri indipendenti.

(b) In questo caso abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\det A = 4 \neq 0$, la matrice A ha rango massimo 3. Sappiamo che $\mathrm{rk}A' \geq \mathrm{rk}A$ e che, in questo caso, anche A' ha rango massimo 3. Quindi $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 3$, il sistema è risolubile e le soluzioni sono $\infty^{3-3} = \infty^0$. Perciò esiste una e una sola soluzione.

(c) La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Sviluppando $\det A$ rispetto alla seconda riga si vede che $\det A = 0$. Quindi $\mathrm{rk}A \leq 2$. Il minore individuato dalle prime due righe e colonne è comunque non nullo, quindi $\mathrm{rk}A = 2$. Per determinare il rango della matrice completa possiamo usare questo minore, orlando in tutti i modi possibili. Questi sono solo due: usando la terza o la quarta colonna (la B). Con la terza colonna otteniamo la A, che abbiamo già visto essere singolare. Usando la quarta colonna e sviluppando rispetto alla seconda riga, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Quindi, per il Teorema di Krönecker, anche $\mathrm{rk}A' = 2$. Il sistema ammette soluzioni, e queste sono $\infty^{3-2} = \infty^1$. Esse saranno terne di numeri reali dipendenti da un parametro.

(d) In questo caso abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Il minore

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \tag{9.2.1}$$

ottenuto dalle prime due righe e colonne, è non nullo. Quindi $\mathrm{rk}A \geq 2$. Usiamo il Teorema di Krönecker, e orliamo (9.2.1) nei due modi possibili. Con la terza colonna abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

in quanto la prima e l'ultima colonna sono proporzionali. Usando la quarta colonna, e sviluppando rispetto alla prima:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi rk$A = 2$. Per determinare il rango della matrice completa possiamo sempre usare (9.2.1), orlando con la colonna di A' rimanente: la B. Abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Quindi rk$A' = 3 \neq 2 = $ rk$A$ e il sistema è impossibile.

(e) La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente rk$A = 2$, in quanto esistono minori del secondo ordine non nulli in A. Siccome $A' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, se $\det A' \neq 0$ avremo rk$A' = 3$. Sviluppiamolo rispetto alla terza colonna (formata dalla B):

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(6-6) = 0.$$

Quindi rk$A' = 2 = $ rk$A$. Il sistema è risolubile e le soluzioni sono $\infty^{2-2} = \infty^0$. Questo significa che esiste una e una sola soluzione. ■

9.2.4. *Risolvere i seguenti sistemi lineari:*

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0. \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 2 \\ 2x - 2y = 1. \end{cases} \qquad (e) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \qquad (h) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 6y = 0 \\ 6x + y = 5. \end{cases}$$

Svolgimento.

(a) È un sistema di due equazioni in due incognite. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\det A = -4 \neq 0$, il sistema ammetta un'unica soluzione. Applicando la Regola di Cramer otteniamo la soluzione cercata:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Quindi la coppia $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ è l'unica soluzione del sistema. Considerando la dimostrazione del Teorema 2.3 notiamo che la soluzione equivale ad $X = A^{-1}B$. Verifichiamo questo fatto. L'inversa di A è:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Allora,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Sempre uguagliando termine a termine otteniamo la soluzione $(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

(b) Si tratta di un sistema di due equazioni in quattro incognite, omogeneo. Esiste sempre la soluzione banale. Studiamo l'esistenza di eventuali autosoluzioni. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le prime due colonne formano un minore non nullo (determinante uguale a 2), quindi $\text{rk}A = 2$, ed abbiamo $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, formate da quaterne di numeri con una coppia di parametri indipendenti. Il minore formato dalle prime due colonne individua la parte del sistema riguardante le incognite x e y, che possiamo mettere in evidenza:

$$\begin{cases} x - y = -z - t \\ x + y = -z - t. \end{cases} \tag{9.2.2}$$

Risolvendo, col metodo di Cramer, otteniamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z-t & -1 \\ -z-t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -z - t, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-t \\ 1 & -z-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Posto $z = a$ e $t = b$, la soluzione del sistema di partenza risulta:

$$\begin{cases} x = -a - b \\ y = 0 \\ z = a \\ t = b. \end{cases}$$

(c) Si tratta di un sistema di tre equazioni in tre incognite, omogeneo. Esiste sempre la soluzione banale. Studiamo l'esistenza di eventuali autosoluzioni. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sviluppando il determinante di A rispetto alla prima colonna, abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (0-1) - (1-1) = -1 \neq 0.$$

Dunque, per Cramer, esiste un'unica soluzione. Ma il sistema è omogeneo, quindi questa soluzione unica è quella banale $(0,0,0)$. Non ci sono autosoluzioni.

(d) La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è quadrato (stesso numero di equazioni e di incognite). Possiamo cercare di risolverlo usando il Teorema di Cramer. Il determinante di A, sviluppato rispetto all'ultima colonna è:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+2) = 0.$$

Quindi non esiste un'unica soluzione. Per scoprire se il sistema è risolubile (e quindi ammette infinite soluzioni) o impossibile, il metodo più rapido è quello di usare il Teorema di Rouché-Capelli. Il rango di A è 2, in quanto il minore determinato dalle prime due righe e colonne, è non nullo. Questo è pure un minore della matrice completa A', ottenuta dalla A aggiungendo la colonna dei termini noti. Secondo Krönecker, possiamo orlare il minore precedentemente considerato in soli due modi. Usando la terza colonna otteniamo il determinante di A, già considerato. Con la quarta colonna (quella dei termini noti), e sviluppando rispetto alla seconda colonna, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(1-4) + 2(2-1) = -3+2 = -1 \neq 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A' = 3 \neq 2 = \mathrm{rk}A$. Il sistema è impossibile.

(e) Le matrici A ed A' risultano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le prime due colonne formano un minore non nullo del secondo ordine (determinante uguale a 5), quindi $\mathrm{rk}A = 2$. Ovviamente, anche A' ha rango 2, per cui $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$ ed esistono $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Riducendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 = 2 + x_3. \end{cases} \tag{9.2.3}$$

Applicando ora la Regola di Cramer, le soluzioni di (9.2.3) sono tutte le coppie:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{1 - x_3 + 4 + 2x_3}{5} = \dfrac{5 + x_3}{5}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{2 + x_3 - 2 + 2x_3}{5} = \dfrac{3}{5}x_3. \end{cases}$$

Indicando il valore di x_3 con la lettera a, le soluzioni del sistema diventano:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(1 + \frac{a}{5}, \frac{3}{5}a, a\right), \tag{9.2.4}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Potrebbe sorgere il dubbio che, cambiando minore, la soluzione sia differente. Questo è vero solo in apparenza. Supponiamo, per esempio, di aver calcolato il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

mediante il minore individuato dalle ultime due colonne, invece che dalle prime due, cioè tramite:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Questo minore, che si riferisce alle variabili x_2 e x_3, individua una parte consistente del sistema diversa da quella individuata dal minore usato in precedenza. Risolvendo, con lo stesso metodo, il sistema equivalente:

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = 1 - x_1 \\ x_2 - x_3 = 2 - 2x_1, \end{cases}$$

otteniamo come soluzioni le terne

$$(b, 3(b-1), 5(b-1)). \tag{9.2.5}$$

Con la trasformazione $a = 5(b-1)$ e possibile passare dalla scrittura (9.2.4) alle (9.2.5) e viceversa, per cui le ∞^1 soluzioni sono tutte ricavabili da una qualsiasi delle due scritture.

(f) È un sistema di tre equazioni in tre incognite. Possiamo quindi cercare di risolverlo applicando il Teorema di Cramer. La matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Esaminiamo il determinante di A. Sviluppando rispetto alla prima colonna, otteniamo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= (-2-6) - (+6+2) + 2(9-1) = -8 - 8 + 16 = 0. \end{aligned}$$

Quindi A è una matrice singolare. A questo punto possiamo dire solamente che non esiste un'unica soluzione. Studiamo il rango di A. Chiaramente, essendo singolare, $\mathrm{rk}A \lneqq 3$. Però il minore del secondo ordine ottenuto usando le prime due righe e colonne è non nullo. Infatti:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0.$$

La matrice completa, ottenuta dalla A aggiungendo la colonna B, è:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il rango di A' si calcola a partire dal minore sopra individuato ed usando il Teorema di Krönecker. Lo si può orlare in soli due modi. Usando la terza colonna, riotteniamo il determinante di A, che abbiamo già calcolato. Usando la quarta colonna e sviluppando rispetto alla prima, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+4) - (-9+2) + 2(-6-1) = 7 + 7 - 14 = 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$. Esistono soluzioni e sono $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$, dove $n = 3$ è il numero di incognite e $r = \mathrm{rk}A$. Il simbolo ∞^1 indica che esistono infinite soluzioni, ovvero infinite terne di numeri che soddisfano il sistema di partenza. Queste terne dipenderanno da un (e un solo) parametro reale. Il minore del secondo ordine che abbiamo usato per calcolare il rango di A individua la parte consistente del sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 + x_2 = 2 + 3x_3. \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema è crameriano, nel senso che la matrice dei coefficienti, coincidendo col minore di cui sopra, è non singolare. Possiamo allora usare la Regola di Cramer per risolverlo, osservando che la colonna dei termini noti

$$B = \begin{bmatrix} 1 - x_3 \\ 2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

dipende da un parametro: x_3. La soluzione del precedente sistema è data dalle coppie:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7+8x_3}{4} \\ \\ x_2 = \dfrac{1+4x_3}{4}. \end{cases}$$

Tornando al sistema originale, in tre incognite, e ponendo, per comodità di scrittura $x_3 = a$, dalle precedenti otteniamo le soluzioni cercate:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7+8a}{4} \\ x_2 = \dfrac{1+4a}{4} \\ x_3 = a. \end{cases}$$

(g) La matrice dei coefficienti risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il minore individuato dalle prime due colonne e dalle ultime due righe è non nullo (determinante uguale a 1), quindi $\mathrm{rk}A \geq 2$. Se orliamo usando la quarta colonna, e sviluppiamo rispetto all'ultima riga, otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+2) - (-1+1) = 3 \neq 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A = 3$ e il sistema ammette proprio $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Per determinarle possiamo ricondurci ad un sistema Crameriano usando il minore appena considerato. Questo individua una parte del sistema che possiamo mettere in evidenza, trasportando tutti i termini che non vi compaiono al secondo membro delle varie equazioni:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = -3x_3 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2x_3 \\ x_1 - x_4 = x_3. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è non singolare, in quanto coincide col minore non nullo con cui abbiamo calcolato il rango di A. Quindi si può applicare Cramer, usando come colonna dei termini noti la

$$B = \begin{bmatrix} -3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

dove la variabile x_3 va considerata come un parametro. Risolvendo si trovano le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = -\frac{5}{3}x_3. \end{cases} \quad \text{e, posto } x_3 = a, \text{ abbiamo le quaterne } \left(-\frac{2}{3}a, -a, a, -\frac{5}{3}a\right).$$

(h) La matrice dei coefficienti e quella completa sono, rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Le prime due righe di A determinano un minore del secondo ordine non nullo. Quindi A ha rango massimo, ossia $\mathrm{rk}A = 2$. Il sistema è risolubile se e solo se $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A'$. Per determinare il rango della matrice completa possiamo partire dal minore sopra citato ed orlarlo, usando Krönecker, nell'unico modo possibile: con l'ultima riga (o la terza colonna, che è lo stesso). Sviluppando rispetto all'ultima colonna, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2(1-36) + 5(12+1) = -70 + 65 = -5 \neq 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}A' = 3 \neq 2 = \mathrm{rk}A$. Per Rouché-Capelli il sistema è impossibile. ■

9.2.5. *Discutere, al variare del parametro reale $t \in \mathbb{R}$ il seguente sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = t \\ 3x_1 + tx_3 = 2. \end{cases}$$

Svolgimento. È un sistema di tre equazioni in tre incognite non omogeneo. Siccome è quadrato (numero di equazioni uguale al numero di incognite) possiamo esaminarne la risolubilità usando il Teorema di Cramer. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

Sviluppando il determinante rispetto alla seconda colonna, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t - 9.$$

La A è dunque una matrice singolare se e solo se $\det A = t - 9 = 0$, cioè se e solo se $t = 9$. Quindi, per $t \neq 9$, $\det A \neq 0$ ed esiste una e una sola soluzione, che possiamo determinare con Cramer, ricordando che la colonna dei termini noti che va sostituita nella matrice dei coefficienti è $B = [1, t, 2]^t$:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ t & 1 & 6 \\ 2 & 0 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{t-6}{t-9}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & t & 6 \\ 3 & 2 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{t^2 - 11t + 18}{t - 9} = \frac{(t-2)(t-9)}{t-9} = t - 2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & t \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix}} = \frac{1}{9-t}.$$

Il caso $t = 9$ va studiato a parte. La matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

ed e ovviamente singolare ($t = 9$ è il caso in cui $\det A = 0$). Però le prime due righe e colonne individuano un minore non nullo del secondo ordine. Perciò $\mathrm{rk}A = 2$. Consideriamo la matrice completa A' e orliamo il minore prima citato con la nuova quarta colonna:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (2-0) + (0-3) = 2 - 3 = -1 \neq 0.$$

Lo sviluppo del determinante è stato fatto rispetto alla prima riga. Dunque $\mathrm{rk}A' = 3 \neq 2 = \mathrm{rk}A$. Per il Teorema di Rouché-Capelli, con $t = 9$ non esistono soluzioni. ■

9.2.6. *Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ affinché il sistema*

$$\begin{cases} ax + by - z = -b \\ x - ay = b \\ bx - 2az = a + 1 \end{cases} \tag{9.2.6}$$

ammetta la soluzione $(1, 2, 3)$. In questo caso verificare se ne esistono altre.

Svolgimento. Se $(1,2,3)$ è soluzione di (9.2.6), deve soddisfare contemporaneamente tutte le equazioni dello stesso. Sostituendo i valori ad x, y e z, otteniamo:

$$\begin{cases} a+2b-3=-b \\ 1-2a=b \\ b-6a=a+1 \end{cases} \tag{9.2.7}$$

sistema di tre equazioni in due incognite, la cui matrice dei coefficienti e colonna dei termini noti sono, rispettivamente:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le tre equazioni del sistema di partenza sono soddisfatte se e solo se esistono soluzioni per (9.2.7), ovvero se A e la matrice completa A', ottenuta da A accostando la colonna B, hanno lo stesso rango. È evidente che $\mathrm{rk}A=2$, essendoci minori di ordine 2 non nulli. Orlando uno di questi nell'unico modo possibile in A', otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

essendo le ultime due colonne uguali. Perciò, per il Teorema di Krönecker, $\mathrm{rk}A=\mathrm{rk}A'=2$. Esiste quindi un'unica soluzione per (9.2.7), in quanto il teorema di Rouché-Capelli dice che queste sono in numero di $\infty^{n-r}=\infty^{2-2}=\infty^0$. Risolvendo, troviamo:

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1. \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y-z=-1 \\ x=1 \\ x=1. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni coincidono e determinano il valore della variabile x. Risolvendo l'equazione rimasta, per esempio, rispetto ad y, riusciamo ad esprimere y in funzione di z, che rimane libera di variare. Quindi le terne $(1,z-1,z))$ o, se poniamo $z=t$, le terne $(1,t-1,t)$ rappresentano infinite soluzioni del sistema di partenza per il caso in cui anche $(1,2,3)$ è soluzione. Quest'ultima si ottiene per $t=3$. Questa infinità di soluzioni è confermata dal Teorema di Rouché-Capelli. La matrice dei coefficienti e la matrice completa sono, rispettivamente:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $\mathrm{rk}A=\mathrm{rk}A'=2$, per cui esistono $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni. ■

9.2.7. *Discutere, al variare del parametro reale t, il sistema avente come matrici associate:*

$$A=\begin{bmatrix} t-1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} t \\ t \\ t-1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Potremmo risolvere il quesito lavorando solo sulle matrici date. Comunque, per esercizio, proviamo a ricostruire il sistema. Questi si ottiene risolvendo l'equazione matriciale $AX = B$, dove X è una colonna di incognite. Sviluppando i calcoli, abbiamo:

$$AX = \begin{bmatrix} t-1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t-1)x \\ x \\ 2x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t-1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema si ottiene uguagliano i rispettivi termini dei due membri nell'equazione precedente:

$$\begin{cases} (t-1)x = t \\ x = t \\ 2x + 3y = t-1. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la risolubilità del sistema, iniziamo a studiare il rango di A. Il minore determinato dalle ultime due righe è indipendente dal parametro t ed è non nullo. Quindi $\mathrm{rk}A = 2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. La matrice completa è quadrata del terzo ordine ed ha rango 3 solo se è non singolare. Sviluppando il suo determinante rispetto la seconda colonna, si ha:

$$\begin{vmatrix} t-1 & 0 & t \\ 1 & 0 & t \\ 2 & 3 & t-1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} t-1 & t \\ 1 & t \end{vmatrix} = -3(t^2 - t - t) = -3t(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2.$$

Per $t \neq 0$ e $t \neq 2$ si ha $\mathrm{rk}A' = 3$, mentre $\mathrm{rk}A = 2$. Quindi, per Rouché-Capelli il sistema è impossibile. Invece, per $t = 0$ e $t = 2$ i ranghi coincidono, esistono soluzioni e sono $\infty^{n-r} = \infty^{2-2} = \infty^0$. In questi casi, quindi, esiste un'unica soluzione. ■

9.2.8. *Si consideri il sistema $AX = B$, dove $B = [1, 3, -1]^t$, mentre $A = [a_{ij}]$ è la matrice di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con $A = A^t$, $a_{12} = t$, $a_{13} = a_{23} = 1$ e tale per cui $A - \mathrm{diag}(2,3,1)$ abbia gli elementi principali nulli. Determinare t in modo che il sistema abbia una e una sola soluzione.*

Svolgimento. Iniziamo a ricostruire la matrice dei coefficienti A in base ai dati forniti. Il fatto che $A = A^t$ ci dice che A è simmetrica. Quindi $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia i, j. In questo modo, conoscendo i valori di a_{12}, a_{13} e a_{23} conosciamo anche quelli di a_{21}, a_{31} e a_{32}. Gli elementi principali di una matrice sono quelli che stanno sulla diagonale principale. Quindi imporre che quelli di $A - \mathrm{diag}(2,3,1)$ siano nulli equivale a dire che gli elementi principali di A e di $\mathrm{diag}(2,3,1)$ coincidano, ovvero che $a_{11} = 2$, $a_{22} = 3$ e $a_{33} = 1$. Perciò la A ha la forma seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema che ammette A come matrice dei coefficienti ha un'unica soluzione se e solo se la A è non singolare. Sviluppiamo $\det A$ rispetto alla prima riga (Teorema di Cramer):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & t & 1 \\ t & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} t & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2(3-1) - t(t-1) + (t-3) = 4 - t^2 + t + t - 3 = -t^2 + 2t + 1. \end{aligned}$$

Dunque $\det A = 0$ se e solo se $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Esiste un'unica soluzione solo per $t \neq 1 \pm \sqrt{2}$. ∎

9.2.9. *Discutere, al variare del parametro reale t, il sistema*

$$\begin{cases} tx + y + 2z = 2 \\ 2x + 2ty + z = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. È un sistema di due equazioni in tre incognite. La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & 2t & 1 \end{bmatrix}.$$

Non esistono minori di ordine due indipendenti da t. Consideriamo dunque quello individuato dalle ultime due colonne:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2t & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4t.$$

Si annulla se e solo se $t = \frac{1}{4}$. Quindi se $t \neq \frac{1}{4}$ sia la A che la matrice completa A' hanno rango massimo 2 e le soluzioni del sistema sono $\infty^{3-2} = \infty^1$. Infatti entrambe hanno il minore sopra considerato come minore d'ordine massimo non nullo e non è possibile, in A', considerare minori d'ordine superiore. Se $t = \frac{1}{4}$, il minore costruito con la prima e ultima colonna, ossia

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4},$$

è diverso da 0. Concludendo anche in questo caso $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$. Quindi esistono ∞^1 soluzioni per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$. ∎

9.2.10. *Discutere e risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - y = 1 - 2a \\ ax + y = a, \end{cases}$$

al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. È un sistema con tre equazioni in due incognite, quindi è rettangolare. Dobbiamo ricorrere al **Teorema di Rouché-Capelli** per esaminarne la risolubilità. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix},$$

quella completa è:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1-2a \\ a & 1 & a \end{bmatrix}.$$

In A non esistono minori di ordine due indipendenti dal parametro a. Se consideriamo quello determinato dalle prime due righe, ossia:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1+2a) \tag{9.2.8}$$

vediamo che questo è non nullo se e solo se $a \neq -\frac{1}{2}$. Se $a = -\frac{1}{2}$ il minore dato dalle ultime due righe, cioè

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \tag{9.2.9}$$

è $\neq 0$. Quindi $\mathrm{rk}A = 2$ per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$. Per Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni (e saranno ∞^{2-2}, cioè la soluzione sarà unica) se e solo se $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$. Sviluppando $\det A'$ rispetto alla prima riga, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1-2a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1-2a \\ 1 & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 2 & 1-2a \\ a & a \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-a-1+2a) - a(2a-a+2a^2) + (2+a) = a - 1 - a^2 - 2a^3 + 2 + a = \\ &= -2a^3 - a^2 + 2a + 1 = -a^2(2a+1) + (2a+1) = (2a+1)(1-a)(1+a). \end{aligned}$$

Se $a = \pm 1$ oppure $a = -\frac{1}{2}$, il precedente determinante è nullo e $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$. Invece, per $a \neq \pm 1$ e $a \neq -\frac{1}{2}$ abbiamo che $\mathrm{rk}A' = 3 \neq 2 = \mathrm{rk}A$ e il sistema è impossibile. Risolviamolo dunque per i valori ammissibili. Se $a = 1$, il minore (9.2.8) determina la parte consistente del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -1. \end{cases}$$

Determiniamo la soluzione con Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 1.$$

Se $a = -1$, sempre il minore (9.2.8) determina la parte consistente del sistema:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Le soluzioni, determinate con Cramer, sono:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Infine, quando $a = -\frac{1}{2}$, il minore (9.2.8) si annulla. In questo caso, però, il rango di A è calcolato mediante (9.2.9), che individua la parte consistente del sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -\frac{1}{2}x + y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Risolvendo usando Cramer, abbiamo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Riassumendo, le soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = 1 & \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 1), \\ a = -1 & \Rightarrow \quad (x, y) = (2, 1), \\ a = -\frac{1}{2} & \Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

■

9.2.11. *Discutere e, quando possibile, risolvere il sistema lineare $AX = B$, essendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 2a+1 & 1 & 2 \\ a-1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Dall'Esercizio 9.1.38 sappiamo che se $a \notin \left\{-\frac{2}{5}, 1\right\}$ allora la caratteristica di A è uguale a 3, altrimenti essa è uguale a 2.
Di conseguenza, se $a \notin \left\{-\frac{2}{5}, 1\right\}$ il sistema è risolubile, in quanto la caratteristica di A deve necessariamente coincidere con la caratteristica della matrice completa $\overline{A}$. Esistono in questo caso $\infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni, cioè una sola soluzione.

• Per $a = -\frac{2}{5}$ orliamo il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ con la colonna dei termini noti, ed abbiamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & b \\ -\frac{7}{5} & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice risulta uguale a $\frac{18+3b}{5}$, per cui si annulla se e solo se $b = -6$. Pertanto, se $b \neq -6$ la caratteristica di $\overline{A}$ è uguale a 3, maggiore della caratteristica di A, e quindi il sistema non è risolubile. Se invece $b = -6$ abbiamo $r(\overline{A}) = r(A) = 2$, ed il sistema è risolubile con $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni distinte.

• Per $a = 1$ orliamo ancora il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ con la colonna dei termini noti, ottenendo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & b \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice risulta uguale a $2b - 2$, per cui si annulla se e solo se $b = 1$. Pertanto, se $b \neq 1$ la caratteristica di $\overline{A}$ è uguale a 3, maggiore della caratteristica

di A, e quindi il sistema non è risolubile. Se invece $b = 1$ abbiamo $r(\overline{A}) = r(A) = 2$, ed il sistema è risolubile con $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni distinte.
Riassumendo abbiamo

$$\begin{cases} a \notin \left\{-\frac{2}{5}, 1\right\} & \Rightarrow \quad r(A) = r(\overline{A}) = 3 \text{ esiste una sola soluzione} \\ a = -\frac{2}{5} & \Rightarrow \quad \begin{cases} b = -6 & \Rightarrow r(A) = 2 = r(\overline{A}) \text{ esistono } \infty^1 \text{ soluzioni} \\ b \neq -6 & \Rightarrow r(A) = 2 < r(\overline{A}) \text{ non esistono soluzioni} \end{cases} \\ a = 1 & \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 1 & \Rightarrow r(A) = 2 = r(\overline{A}) \text{ esistono } \infty^1 \text{ soluzioni} \\ b \neq 1 & \Rightarrow r(A) = 2 < r(\overline{A}) \text{ non esistono soluzioni} \end{cases} \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema nei casi possibili.

- Per $a \notin \left\{-\frac{2}{5}, 1\right\}$ abbiamo $X = A^{-1}B$. Calcolando la matrice inversa abbiamo

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(5a+2)} \begin{bmatrix} -a-2 & 2a & a-2 \\ 2a^2 - a + 2 & a(a-3) & -2a^2 - a + 4 \\ 3a & -a-1 & 2a-1 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{(a-1)(5a+2)} \begin{bmatrix} -a-2 & 2a & a-2 \\ 2a^2 - a + 2 & a(a-3) & -2a^2 - a + 4 \\ 3a & -a-1 & 2a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2[a(b+1)-2]}{(a-1)(5a+2)} \\ \frac{2a(b-4)-a(3b+2)+8}{(a-1)(5a+2)} \\ \frac{a(b-4)+b+2}{(a-1)(5a+2)} \end{bmatrix}.$$

- Per $a = -\frac{2}{5} \wedge b = -6$ il sistema viene ridotto al seguente

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{2}{5} z \\ \frac{1}{5} x + y = -2z - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}(2z + 5) \\ y = -\frac{2}{15}(17z + 50) \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(2z + 5) \\ -\frac{2}{15}(17z + 50) \\ z \end{bmatrix}.$$

- Per $a = 1 \wedge b = 1$ il sistema viene ridotto al seguente

$$\begin{cases} 2x + y = -z \\ 3x + y = -2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z - 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 - z \\ z - 2 \\ z \end{bmatrix}$$

■

9.2.12. *Discutere e, quando possibile, risolvere il sistema lineare $AX = B$, essendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & 2 & -a & b \\ a & b-a & c & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Dall'Esercizio 9.1.39 abbiamo

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{per } a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = -1 \\ 2 & \text{per } a = 1 \wedge b = 3 \wedge c \neq -1 \text{ oppure } a \neq 1 \wedge b = 3a \pm \sqrt{6}|a-1| \wedge c = -a \\ 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si vede facilmente che orlando il minore $\{R_1\} \cap \{C_1\}$ con la colonna B si può ottenere un minore non nullo (per esempio $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, B\}$), per cui la caratteristica della matrice completa è sempre almeno 2. Quindi, se $r(A) = 1$ il sistema non è risolubile. I due casi in cui $r(A) = 2$ si ottengono in corrispondenza dei seguenti minori

- $\{R_1, R_3\} \cap \{C_1, C_3\}$, quando $a = 1 \wedge b = 3 \wedge c \neq -1$.
- $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$, quando $a \neq 1 \wedge b = 3a \pm \sqrt{6}|a-1| \wedge c = -a$.

Nel primo caso il minore orlato $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_3, B\}$ è uguale a zero, per cui anche la caratteristica della matrice completa è uguale a 2. Di conseguenza, il sistema è risolubile con ∞^2 soluzioni.
Nel secondo caso il minore orlato $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, B\}$ è non nullo, per cui la caratteristica della matrice completa è uguale a 3, ed il sistema non è risolubile.
Quando poi $r(A) = 3$ il sistema è ovviamente risolubile, ed ammette ∞^1 soluzioni.
Riassumendo abbiamo

$$\begin{cases} a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = -1 \Rightarrow r(A) = 1 < r(\overline{A}) & \text{non esistono soluzioni} \\ a = 1 \wedge b = 3 \wedge c \neq -1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(\overline{A}) & \text{esistono } \infty^2 \text{ soluzioni} \\ a \neq 1 \wedge b = 3a \pm \sqrt{6}|a-1| \wedge c = -a \Rightarrow r(A) = 2 < r(\overline{A}) & \text{non esistono soluzioni} \\ \text{altrimenti} \Rightarrow r(A) = 3 = r(\overline{A}) & \text{esistono } \infty^1 \text{ soluzioni.} \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema nei casi possibili. Nel caso $a = 1 \wedge b = 3 \wedge c \neq -1$ abbiamo ∞^2 soluzioni. Queste si ottengono riducendo il sistema in maniera cha la matrice dei coefficienti corrisponda al minore $\{R_1, R_3\} \cap \{C_1, C_3\}$. Indicando con x, y, z, t le incognite i cui coefficienti corrispondono, rispettivamente, alla prima, seconda, terza e quarta colonna di A abbiamo

$$\begin{cases} x - z = -2y - 3t \\ x + cz = -2y - 3t + 1. \end{cases}$$

Ricaviamo pertanto la soluzione

$$\begin{cases} x = -2y - 3t + \frac{1}{c+1} \\ z = \frac{1}{c+1}. \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c+1} \\ 0 \\ \frac{1}{c+1} \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nei casi in cui $r(A) = 3$ abbiamo ∞^1 soluzioni, per cui la riduzione del sistema consiste semplicemente nel portare al secondo membro una delle incognite. Tuttavia, per decidere

l'incognita da trattare come parametro, dobbiamo fare attenzione a lasciare al primo membro un minore non nullo.
• Possiamo considerare il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$, e spostare quindi t al secondo membro, nel caso in cui sia $r(A) = 3$ con $a \neq 1$ e $c \neq -a$, ottenendo

$$\begin{cases} x = \dfrac{t[3a^2 + 2a(3-2b) + b^2 + 2bc - 6(c+1)] - 2(a-1)}{2(1-a)(a+c)} \\ \\ y = \dfrac{t(3a-b)}{2(1-a)} \\ \\ z = \dfrac{t[3a^2 + 6a(2-b) + b^2 - 6] - 2(a-1)}{2(1-a)(a+c)}. \end{cases}$$

• Se $r(A) = 3$ con $a \neq 1$ e $c = -a$, deve essere necessariamente $6 + 6ab - 3a^2 - 12a - b^2 \neq 0$, per cui possiamo usare il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_4\}$, spostando di conseguenza z al secondo membro. Otteniamo quindi

$$\begin{cases} x = \dfrac{z[3a^2 + 2a(3-2b) + b^2 + 2bc - 6(c+1)] - 2(b-3)}{6 + 6ab - 3a^2 - 12a - b^2} \\ \\ y = \dfrac{(3a-b)([z(a+c) - 1]}{6 + 6ab - 3a^2 - 12a - b^2} \\ \\ t = \dfrac{2(1-a)[z(a+c) - 1]}{6 + 6ab - 3a^2 - 12a - b^2}. \end{cases}$$

• Abbiamo poi $r(A) = 3$ anche per $a = 1 \ \wedge \ b \neq 3$. In questo caso dobbiamo usare ancora il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_4\}$, spostando quindi z al secondo membro, per cui otteniamo

$$\begin{cases} x = \dfrac{z(b + 2c - 1) - b^2 + 3b - 2}{b - 3} \\ \\ y = \dfrac{z(c+1) - 1}{b - 3} \\ \\ t = \dfrac{b}{3}. \end{cases}$$

■

9.3 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 3

9.3.1. *Verificare che l'insieme* $\mathbf{W}$ *delle funzioni reali di variabile reale limitate è un sottospazio dello spazio* $\mathbf{V}$ *delle funzioni reali di variabile reale.*

Svolgimento. Da quanto si è visto nel Paragrafo 3.1.3 ricaviamo che $\mathbf{V}$ è effettivamente uno spazio vettoriale, rispetto alle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di una funzione per uno scalare. Ricordiamo ora che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **limitata** se esiste un reale positivo $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se h è un qualsiasi scalare di $\mathbb{R}$, vale la disuguaglianza $|h||f(x)| = |hf(x)| \leq |h|M$. Ricordiamo, inoltre che, per ogni coppia di numeri reali $A, B \in \mathbb{R}$ risulta $|A+B| \leq |A| + |B|$. Si osservi che, ovviamente, $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. Verifichiamo la chiusura lineare dell'insieme $\mathbf{W}$. Ciò significa verificare che la combinazione lineare di una qualsiasi coppia di funzioni limitate è ancora una funzione limitata. Siano $f, g \in \mathbf{W}$: esistono due reali M, N tali che $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq N$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sfruttando le precedenti disuguaglianze, con $h, k \in \mathbb{R}$ generici scalari, otteniamo $|hf(x)+kg(x)| \leq |hf(g)|+|kg(x)| = |h||f(x)|+|k||g(x)| \leq |h|M+|k|N$. Quindi combinazioni lineari di funzioni limitate sono ancora limitate. L'insieme $\mathbf{W}$ è linearmente chiuso, quindi sottospazio di $\mathbf{V}$. ■

9.3.2. *Dimostrare che l'insieme $\mathbf{W}_T = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) | \, AT = TA\}$, delle matrici quadrate d'ordine n che commutano con una matrice data, è sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Svolgimento. Per verificarlo usiamo il Teorema 3.1. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e $A, B \in \mathbf{W}_T$. Dobbiamo verificare che

$$aA + bB \in \mathbf{W}_T. \tag{9.3.1}$$

La (9.3.1) è vera se e solo se $aA + bB$ commuta con la matrice T:

$$\begin{aligned}(aA + bB)T &= (aA)T + (bB)T = a(AT) + b(BT) = \\ &= a(TA) + b(TB) = T(aA) + T(bB) = T(aA + bB).\end{aligned}$$

Quindi la (9.3.1) è vera e $\mathbf{W}_T$ è sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. ■

9.3.3. *Dimostrare che l'insieme $\mathbb{K}_n[t]$ dei polinomi di grado $r \leq n$ è un sottospazio di $\mathbb{K}[t]$.*

Svolgimento. Ovviamente $\mathbf{K}_n[t] \subseteq \mathbb{K}[t]$. Dobbiamo verificare la validità della condizione sufficiente per essere sottospazio. Ovvero se, per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e per ogni $p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ si ha:

$$ap_1(t) + bp_2(t) \in \mathbb{K}_n[t]. \tag{9.3.2}$$

Ogni combinazione lineare di due (o più) polinomi di grado $r \leq n$ è un polinomio il cui grado, al più, si abbassa rispetto a quello dei polinomi addendi, ma non può certo aumentare. Quindi la (9.3.2) è sempre vera e $\mathbf{K}_n[t]$ è sottospazio di $\mathbf{K}[t]$. ■

9.3.4. *Dimostrare che l'insieme $\mathcal{D}_n$ delle matrici diagonali di ordine n è un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Svolgimento. Basta verificare, per l'insieme $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la validità della condizione necessaria e sufficiente per essere un sottospazio. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ e $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ due matrici di $\mathcal{D}_n$. Allora

$$\begin{aligned}aA + bB &= a \cdot \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) + b \cdot \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \\ &= \operatorname{diag}(aa_1, \ldots, aa_n) + \operatorname{diag}(bb_1, \ldots, bb_n) = \\ &= \operatorname{diag}((aa_1 + bb_1), \ldots, (aa_n + bb_n)) \in \mathcal{D}_n.\end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{D}_n$ è linearmente chiuso ed è un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. ■

9.3.5. *Dimostrare che gli insiemi $\mathcal{T}_n^\uparrow$ e $\mathcal{T}_n^\downarrow$ delle matrici triangolari superiori ed inferiori sono sottospazi di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Svolgimento. È sufficiente ragionare solo sull'insieme $\mathcal{T}_n^\uparrow$, in quanto per $\mathcal{T}_n^\downarrow$ il discorso è simmetrico. Dobbiamo verificare la validità del Teorema 3.1. Ricordiamo che $A = [a_{ij}] \in \mathcal{T}_n^\uparrow$ se e solo se $a_{ij} = 0$ se $i > j$. Per ogni $a \in \mathbb{K}$ e per ogni $A, B \in \mathcal{T}_n^\uparrow$ abbiamo che $aA \in \mathcal{T}_n^\uparrow$ e $A + B \in \mathcal{T}_n^\uparrow$. Infatti $aA = [aa_{ij}]$ e $aa_{ij} = 0$ se $i > j$, essendo $a_{ij} = 0$ per $i > j$ per ipotesi. Inoltre $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ e $a_{ij} + b_{ij} = 0$ se $i > j$, perché $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i > j$. Quindi $\mathcal{T}_n^\uparrow$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ∎

9.3.6. *Dimostrare che l'insieme delle matrici antisimmetriche è un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Svolgimento. Ricordiamo che una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice antisimmetrica (o emisimmetrica) se $A^t = -A$. Occorre verificare che l'insieme di tali matrici è linearmente chiuso, ossia che, se A e B sono antisimmetriche e $a, b \in \mathbb{K}$, allora anche $aA + bB$ è antisimmetrica. Dalle proprietà dell'operazione di trasposizione abbiamo:

$$(aA + bB)^t = (aA)^t + (bB)^t = aA^t + bB^t = a(-A) + b(-B) = -aA - bB = -(aA + bB).$$

∎

9.3.7. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e il suo sottoinsieme $\mathbf{W} = \{(x, y, z) | \ x \geq 0\}$. Stabilire se $\mathbf{W}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.*

Svolgimento. Per verificare se un sottoinsieme è sottospazio occorre stabilire se è linearmente chiuso, cioè se una qualsiasi combinazione lineare di suoi elementi appartiene ancora all'insieme. La chiusura lineare va ovviamente dimostrata in modo rigoroso. Invece, se essa non sussiste, basta presentare un controesempio. Consideriamo un elemento $\mathbf{w} = (x, y, z)$ di $\mathbf{W}$ con $x \neq 0$ e lo scalare $h = -1 \in \mathbb{R}$. Se $\mathbf{W}$ fosse linearmente chiuso, esso conterrebbe ogni multiplo di un suo vettore, quindi anche $h\mathbf{w}$. Ma $k\mathbf{w} = (hx, hy, hz) = (-x, -y, -z) \notin \mathbf{W}$. Infatti, essendo $x > 0$, abbiamo $-x < 0$. L'insieme $\mathbf{W}$ non è chiuso rispetto al prodotto per scalari, quindi non è linearmente chiuso. Non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. ∎

9.3.8. *Stabilire se l'insieme $S = \{[a, b, c, d]^t \in \mathbb{R}^4 \mid 2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.*

Svolgimento. Come spiegato nell'Esercizio 9.3.7, in genere la dimostrazione che un sottoinsieme è sottospazio passa attraverso la verifica della sua chiusura lineare. In certi casi è però più comodo utilizzare una condizione necessaria per essere sottospazio vettoriale: un sottospazio contiene necessariamente il vettore nullo. Ovviamente, in quanto necessaria, questa condizione non dà alcuna informazione quando è verificata. In questo caso, invece, ci è utile. Infatti il vettore nullo in $\mathbb{R}^4$ è $\mathbf{0} = [a, b, c, d]^t] = [0, 0, 0, 0]^t$, per il quale non è soddisfatta la condizione caratterizzante gli elementi di S. Infatti $2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$, e quindi $\mathbf{0} \notin S$, per cui l'insieme S non può essere un sottospazio. ∎

9.3.9. *Verificare se l'insieme*

$$\mathbf{V} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array} \right] \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Svolgimento. L'insieme $\mathbf{V}$ è formato da tutte e sole le matrici aventi gli stessi elementi sulla diagonale principale e, indipendentemente, gli stessi elementi su quella secondaria. Verifichiamo che ogni combinazione lineare di vettori di $\mathbf{V}$ è ancora una matrice appartenente a $\mathbf{V}$, ossia è della forma appena descritta. Consideriamo due generici vettori di $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{v}_1 = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array} \right], \quad \mathbf{v}_2 = \left[\begin{array}{cc} a' & b' \\ b' & a' \end{array} \right],$$

e siano $h, k \in \mathbb{R}$ due generici scalari. Calcolando $k\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2$ abbiamo:

$$h \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & a \end{array} \right] + k \left[\begin{array}{cc} a' & b' \\ b' & a' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} ha & hb \\ hb & ha \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} ka' & kb' \\ kb' & ka' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} ha + ka' & hb + kb' \\ hb + kb' & ha + ka' \end{array} \right].$$

Anche il vettore risultante è una matrice che ha gli stessi elementi sulle diagonali, quindi appartiene all'insieme $\mathbf{V}$, per come questo è stato definito. Ovvero $h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$. L'insieme $\mathbf{V}$ è pertanto linearmente chiuso, quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. ■

9.3.10. *Verificare direttamente (senza usare il Teorema 5.1) che le rette di equazione* $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ *sono sottospazi di* $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. I vettori $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^2$ che appartengono alla retta di equazione $y = mx$, qualsiasi sia $m \in \mathbb{R}$, sono della forma $\mathbf{v} = [x, mx]^t$. Verifichiamo che ogni combinazione lineare di due vettori siffatti è ancora un vettore della stessa retta. Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ e per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}_1 = [x_1, mx_1]^t$ e $\mathbf{v}_2 = [x_2, mx_2]^t$, il vettore $h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2$ risulta:

$$h \left[\begin{array}{c} x_1 \\ mx_1 \end{array} \right] + k \left[\begin{array}{c} x_2 \\ mx_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} hx_1 + kx_2 \\ hmx_1 + kmx_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} hx_1 + kx_2 \\ m(hx_1 + kx_2) \end{array} \right].$$

Il precedente vettore ha le componenti che soddisfano l'equazione $y = mx$, quindi appartiene alla retta avente quest'equazione. L'insieme definito da $y = mx$ è dunque linearmente chiuso in $\mathbb{R}^2$, ovvero è un sottospazio. ■

9.3.11. *Sia* $\mathbf{V}$ *lo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale e* $\mathbf{W}$ *il suo sottoinsieme delle funzioni dispari. Dimostrare che* $\mathbf{W}$ *è sottospazio di* $\mathbf{V}$.

Svolgimento. Ricordiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *dispari* se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per dimostrare che $\mathbf{W}$ è sottospazio di $\mathbf{V}$ notiamo come prima cosa che, ovviamente, $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. In quanto sottoinsieme di $\mathbf{V}$, per essere anche sottospazio, $\mathbf{W}$ deve essere linearmente chiuso. Significa verificare che una qualsiasi combinazione lineare di funzioni dispari è ancora una funzione dispari. Siano f e g dispari, e $h, k \in \mathbb{R}$ due scalari generici. Abbiamo $hf(-x) + kg(-x) = h(-f(x)) + k(-g(x)) = -hf(x) - kg(x) = -(hf(x) + g(x))$, il che ci dice che la funzione $kf + kg$ è dispari, quindi appartiene a $\mathbf{W}$. Allora $\mathbf{W}$ è linearmente chiuso e $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$. ■

9.3.12. *Dimostrare che l'insieme* $\mathbf{V}$ *dei polinomi a coefficienti reali con esponenti pari è un sottospazio di* $\mathbb{R}[t]$.

Svolgimento. Ovviamente $\mathbf{V} \subseteq \mathbb{R}[t]$. Nel Paragrafo 3.1.1 è stata discussa la struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$, in particolare sono state definite le operazioni di somma di polinomi e di prodotto di polinomi per uno scalare. Tenendo conto di queste definizioni, è facile verificare che combinazioni lineari di vettori di $\mathbf{V}$ sono ancora polinomi ad esponenti pari. Infatti, se

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i}, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{n} b_i t^{2i},$$

sono due vettori di $\mathbf{V}$, una loro combinazione lineare con coefficienti $h, k \in \mathbb{R}$ generici è:

$$h\mathbf{u} + k\mathbf{v} = k\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i}\right) + k\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^{2i}\right) = \sum_{i=0}^{n} (ha_i + kb_i)t^{2i}.$$

Indipendentemente dai valori assunti dai coefficienti $ha_i + kb_i$, il precedente polinomio ha sempre tutti gli esponenti pari, quindi appartiene all'insieme $\mathbf{V}$. Essendo linearmente chiuso, $\mathbf{V}$ è sottospazio di $\mathbb{R}[t]$. ∎

9.3.13. *Verificare se l'insieme* $\mathbb{R}_n[t]$ *dei polinomi a coefficienti reali di grado massimo* n *è un sottospazio di* $\mathbb{R}[t]$.

Svolgimento. Dimostrare che $\mathbb{R}_n[t] \leq \mathbb{R}[t]$ significa verificare la chiusura lineare di $\mathbb{R}_n[t]$, ovvero che ogni combinazione lineare di polinomi di grado massimo n è ancora un polinomio di grado massimo n. Siano $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i, q(t) \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \in \mathbb{R}_n[t]$ e $h, k \in \mathbb{R}$ due scalari generici. Abbiamo:

$$hp(t) + kq(t) = \sum_{i=0}^{n} (ha_i + kb_i)t^i.$$

Ci possono essere casi in cui i coefficienti del precedente polinomio si annullano, quando, per qualche $i = 0, \ldots, n$, $ha_i + kb_i = 0$. In particolare, se succede quando $i = n$ il precedente polinomio si abbassa di grado. In nessun caso, comunque, può capitare che il grado aumenti. Quindi, partendo da due polinomi di grado al massimo n, la loro combinazione lineare sarà ancora al massimo di grado n, appartenendo perciò all'insieme $\mathbb{R}_n[t]$. Quest'ultimo è quindi linearmente chiuso e $\mathbb{R}_n[t] \leq \mathbb{R}[t]$. ∎

9.3.14. *Stabilire se l'insieme* $\mathbf{V}$ *dei polinomi a coefficienti reali di grado* n *è sottospazio di* $\mathbb{R}[t]$.

Svolgimento. In questo caso la discussione è più delicata di quella svolta nell'Esercizio 9.3.13, in cui si è verificato che la combinazione di polinomi di grado al massimo n è ancora un polinomio di grado al massimo n. Nel caso ora in esame è necessario dimostrare la stessa cosa per polinomi di grado esattamente n. Ma questo è falso. Basta fare in modo che i termini di grado massimo si elidano a vicenda. Per esempio, con $n > 1$, consideriamo i polinomi $p(t) = 3t^n - t + 1$ e $q(t) = 6t^n + 1$, e costruiamo la combinazione lineare $2p(t) - q(t)$. Otteniamo:

$$2(3t^n - t + 1) - (6t^n + 1) = (6t^n - 2t + 2) + (-6t^n - 1) = (6-6)t^n - 2t + (2-1) = -2t + 1.$$

Il risultato è un polinomio di primo grado, inferiore ad n. Quindi $\mathbf{V}$ non è linearmente chiuso e, di conseguenza, non è sottospazio di $\mathbb{R}[t]$. ■

9.3.15. *Dimostrare il Teorema 3.15.*

Svolgimento. La condizione è necessaria. Se $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, in particolare si ha che $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$, cioè ogni vettore di $\mathbf{V}$ è somma di vettori di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, per definizione di somma di sottospazi. Quindi esistono due vettori, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, tali che $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. Basta verificare che questa scrittura è unica. Supponiamo che ne esista un'altra: $\mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$. Allora $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$ da cui $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}'$. Siccome $\mathbf{u} - \mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{w} - \mathbf{w}' \in \mathbf{W}$, essendo $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$ perché $\mathbf{V}$ è somma diretta, da $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}'$ otteniamo $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}'$ e ,$\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{w}'$, e la scrittura $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ è unica.

La condizione è sufficiente. Se ogni vettore di $\mathbf{V}$ si scrive in modo unico come somma di vettori di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, automaticamente sappiamo che $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$. Rimane da verificare che $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$. Supponiamo che $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Da $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$ segue che $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$, con $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$, e $\mathbf{0}$ considerato come vettore di $\mathbf{W}$. D'altra parte è anche $\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$, con $\mathbf{0}$ questa volta considerato vettore di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$. L'unicità della scrittura di $\mathbf{v}$ come somma di vettori di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ ha come conseguenza che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$.

■

9.3.16. *Indicato con* $\mathbf{V}$ *lo spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale, verificare che* $\mathbf{V} = \mathbf{P} \oplus \mathbf{D}$, *dove* $\mathbf{P}$ *e* $\mathbf{D}$ *indicano, rispettivamente, il sottospazio delle funzioni pari e quello delle funzioni dispari.*

Svolgimento. Sappiamo che l'insieme delle funzioni reali di variabile reale è uno spazio vettoriale. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari se $f(x) = f(-x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre è dispari se $f(x) = -f(-x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Chiaramente

$$\mathbf{P} \cap \mathbf{D} = \{\mathbf{0}\}, \tag{9.3.3}$$

in quanto l'unica funzione contemporaneamente pari e dispari è la funzione nulla. Quindi, se dimostriamo che $\mathbf{V} = \mathbf{P} + \mathbf{D}$, in virtù della (9.3.3) abbiamo risolto il problema. Questo si ottiene verificando che ogni funzione di $\mathbf{V}$ si può scrivere come somma di una funzione pari e una dispari. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un vettore di $\mathbf{V}$. Allora

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)). \tag{9.3.4}$$

Il primo addendo al secondo membro della (9.3.4) è una funzione pari. Infatti, posto $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ si ha $g(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$. Il secondo addendo è una funzione dispari. Infatti, posto $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, abbiamo:

$$h(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -h(x).$$

Allora $f = g + h$ per ogni $f \in \mathbf{V}$, con $g \in \mathbf{P}$ e $h \in \mathbf{D}$, ovvero

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} + \mathbf{D}. \tag{9.3.5}$$

Unendo (9.3.3) e (9.3.5), abbiamo $\mathbf{V} = \mathbf{P} \oplus \mathbf{D}$. La scrittura (9.3.4) è unica, come conseguenza di quanto discusso nell'Esercizio 9.3.15. ■

9.3.17. *Nello spazio* $\mathbb{R}^3$, *si determinino i vettori di* $\mathbf{X} = \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, *dove*
$\mathbf{U} = \langle [1,1,0]^t, [2,1,-1]^t \rangle$ *e* $\mathbf{V} = \langle [-1,2,-7]^t, [1,-1,6]^t, [1,4,1]^t \rangle$.

Svolgimento. Iniziamo ad analizzare $\mathbf{V}$. I generatori di $\mathbf{V}$ sono linearmente dipendenti. Infatti la matrice A che ha come colonne i generatori, ossia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

è singolare, in quanto $\det A = 0$. Quindi $\mathrm{rk}A < 3$. In particolare $\mathrm{rk}A = 2$ poiché, ad esempio, il minore del secondo ordine determinato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è $\neq 0$. Da questo fatto deduciamo anche che le colonne, che determinano il minore, sono indipendenti. Quindi i primi due generatori di $\mathbf{V}$ sono anche una base per $\mathbf{V}$ e tutti i vettori di questo spazio si possono esprimere come loro combinazione lineare. Con un ragionamento analogo, si verifica che i due generatori di $\mathbf{U}$ formano a loro volta una base. Riassumendo, il generico vettore di $\mathbf{U}$ ha la forma seguente:

$$\mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ a+b \\ -b \end{bmatrix},$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. In modo analogo, il generico vettore di $\mathbf{V}$ si scrive:

$$\mathbf{v} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c+d \\ 2c-d \\ -7c+6d \end{bmatrix}$$

al variare di $c, d \in \mathbb{R}$. Cerchiamo di esprimere le relazioni che intercorrono tra le coordinate di un generico vettore $\mathbf{x} = [x, y, z]^t$ affinché questi appartenga contemporaneamente a $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, abbiamo $[x, y, z]^t = [a + 2b, a + b, -b]^t$. Uguagliando elemento per elemento, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = a + b \\ z = -b. \end{cases}$$

Siamo interessati a relazioni che coinvolgano le componenti di $\mathbf{x}$. Quindi, eliminando a e b nel precedente sistema, otteniamo la relazione $x - y + z = 0$. Se $\mathbf{x}$ appartiene a $\mathbf{V}$, abbiamo $[x, y, z]^t = [-c + d, 2c - d, -7c + 6d]^t$, che ci conduce al sistema:

$$\begin{cases} x = -c + d \\ y = 2c - d \\ z = -7c + 6d. \end{cases}$$

Come prima, determiniamo una relazione tra le componenti di $\mathbf{x}$, eliminando c e d. Otteniamo l'equazione $5x - y - z = 0$. A questo punto sappiamo che $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ se e solo se le sue componenti soddisfano l'equazione $x - y + z = 0$, mentre $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ se e solo se soddisfano l'equazione $5x - y - z = 0$. Quindi $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ solo se x,y e z soddisfano contemporaneamente le due equazioni. Studiando il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$$

possiamo determinare la scrittura di un generico vettore di $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Risolvendo rispetto a z, otteniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ \\ y = \frac{3}{2}z. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z}{2} \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}z \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Quindi $[1, 3, 2]^t$ genera $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, anzi, ne è una base, da cui si deduce che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = 1$. ■

9.3.18. *Nello spazio* $\mathbb{R}^3$, *determinare quali tra i vettori generati da* $\mathbf{w}_1 = [1, 0, 2]^t$ *e* $\mathbf{w}_2 = [0, 1, 0]^t$ *appartengono anche a* $\mathbf{W} = \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$, *dove* $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u}_1 = [1, 1, 0]^t, \mathbf{u}_2 = [2, 1, -1]^t \rangle$ *e* $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1 = [-1, 2, -7]^t, \mathbf{v}_2 = [1, -1, 6]^t, \mathbf{v}_3 = [1, 4, 1]^t \rangle$.

Svolgimento. Notiamo, innanzitutto, che i vettori che generano $\mathbf{U}$ sono indipendenti. Infatti il rango della matrice che li ha come colonne, e che indica il numero di linee indipendenti, è 2, essendoci almeno un minore del secondo ordine non nullo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Quindi essi formano una base di $\mathbf{U}$. Facendo lo stesso ragionamento sui tre vettori che generano $\mathbf{V}$, scopriamo che invece sono dipendenti. Infatti il determinante della matrice

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -7 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha i tre vettori come colonne, è nullo. Però esiste almeno un minore del secondo ordine. Per esempio quello determinato dalle prime due righe e dalla seconda e terza colonna è uguale a 5. Le colonne che lo individuano sono indipendenti. Quindi i vettori $[1, -1, 6]^t$ e $[1, 4, 1]^t$ sono una base di $\mathbf{V}$. Cerchiamo di determinare la forma del generico vettore di $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Se un vettore $\mathbf{x} = [x, y, z]^t$ appartiene ad $\mathbf{U}$, deve essere combinazione lineare dei vettori della sua base, ovvero $\mathbf{x} = [x, y, z]^t = a\,[1, 1, 0]^t + b\,[2, 1, -1]^t = [a + 2b, a + b, -b]^t$. Uguagliando le componenti del primo e ultimo vettore nella precedente catena di uguaglianze, otteniamo:

$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = a + b \\ z = -b, \end{cases} \quad \text{ed eliminando } a \text{ e } b\text{, otteniamo (1) } x - y + z = 0,$$

il che fornisce la relazione che lega le componenti del generico vettore di $\mathbf{U}$. Facciamo lo stesso ragionamento per $\mathbf{V}$.
Da $\mathbf{x} = [x, y, z]^t = a\,[1, -1, 6]^t + b\,[1, 4, 1]^t = [a + b, -a + 4b, 6a + b]^t$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = -a + 4b \\ z = 6a + b. \end{cases} \Rightarrow \quad (2)\ 5x - y - z = 0,$$

il che fornisce la relazione che è soddisfatta dalle componenti di tutti e soli i vettori di $\mathbf{V}$. Allora le componenti di un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ devono soddisfare contemporaneamente alla (1) e alla (2), ovvero devono essere soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x \\ z = 2x. \end{cases}$$

Le precedenti rappresentano le relazioni che devono essere soddisfatte dalle componenti di tutti e soli i vettori appartenenti a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Dobbiamo ora determinare quali vettori generati da $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ soddisfano le precedenti relazioni, e appartengono quindi a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Tali vettori sono del tipo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a \end{bmatrix}.$$

Ponendo $y = 3x$ e $z = 2x$, otteniamo:

$$\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 2a \end{cases} \text{ e quindi } \begin{cases} b = 3a \\ 0 = 0. \end{cases}$$

I vettori che stiamo cercando sono quindi quelli del tipo $\mathbf{x} = [a, b, 2a]^t$ con $b = 3a$. ■

9.3.19. *Si determini il valore del parametro reale k affinché i vettori $\mathbf{v}_1 = [0, 1, 1, 2]^t$, $\mathbf{v}_2 = [-1, 0, 1, 2]^t$ e $\mathbf{v}_3 = [1, 2, k, k + 1]^t$ di $\mathbb{R}^4$ siano linearmente indipendenti.*

Svolgimento. Lo studio sull'indipendenza lineare di un insieme di vettori può essere svolto in modo comodo usando il concetto di rango di una matrice. Infatti il rango di $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ rappresenta il massimo numero di linee (righe o colonne) linearmente indipendenti di M. Consideriamo dunque una matrice avente per righe i vettori $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, \ldots, 3$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k & k+1 \end{bmatrix}.$$

Studiamo il rango di A al variare del parametro k. Siccome $A \in \mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$ ed ha almeno un elemento costante non nullo, possiamo subito affermare che $1 \leq \text{rk}A \leq 3$. Inoltre il minore del secondo ordine individuato dalle prime due righe e colonne è uguale a $1 \neq 0$, quindi il rango è almeno 2 e $2 \leq \text{rk}A \leq 3$. Usiamo il Teorema di Krönecker, studiando le orlature del minore di cui sopra. Iniziamo orlando con la terza colonna di A e sviluppandolo rispetto alla prima riga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = k + 1 - 2 = k - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k = 1.$$

Allora, con $k \neq 1$, esiste un minore del terzo ordine non nullo e A ha rango massimo $\mathrm{rk}A = 3$. Se $k = 1$, possiamo orlare il minore del secondo ordine di partenza nell'ultimo modo possibile, usando la quarta colonna di A. Sviluppando sempre rispetto alla prima riga otteniamo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -(-2-2) + 2(-2-0) = 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Quindi, con $k = 1$, i due minori del terzo ordine presi in considerazione sono entrambi nulli. Il Teorema di Krönecker ci garantisce che non dobbiamo studiarne altri e che $\mathrm{rk}A = 2$. Riassumendo:

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow \mathrm{rk}A = 2 \\ k \neq 1 \Rightarrow \mathrm{rk}A = 3 \end{cases}$$

Tornando al problema originale, quello dell'indipendenza, i tre vettori sono indipendenti se e solo se $\mathrm{rk}A = 3$, quindi se e solo se $k \neq 1$. ■

9.3.20. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} h & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} h & 3h \\ 1 & h \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dipendenti dal parametro reale h. Stabilire per quali valori di h le tre matrici sono linearmente dipendenti.

Svolgimento. Le tre matrici sono dipendenti se esistono terne $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ per cui vale l'uguaglianza $xA + yB + zC = O$. Scrivendola per esteso otteniamo:

$$\begin{aligned} xA + yB + zC &= x \begin{bmatrix} h & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} h & 3h \\ 1 & h \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} hx & 0 \\ -2x & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hy & 3hy \\ y & hy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & 2z \\ 0 & z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} hx + hy + z & 3hy + 2z \\ -2x + y & x + hy + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uguagliando i due membri della precedente equazione, otteniamo il seguente sistema omogeneo di quattro equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} hx + hy + z = 0 \\ 3hy + 2z = 0 \\ -2x + y = 0 \\ x + hy + z = 0. \end{cases} \quad \text{la cui matrice dei coefficienti è} \quad H = \begin{bmatrix} h & h & 1 \\ 0 & 3h & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \end{bmatrix}.$$

Vogliamo che le tre matrici siano dipendenti, ovvero che esistano soluzioni non banali del precedente sistema (terne $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$). Cerchiamo dunque le condizioni affiché esistano autosoluzioni. Si nota subito che $1 \leq rkH \leq 3$, in quanto esiste almeno un elemento non nullo in H indipendente dal parametro h (quindi $H \neq O$ per ogni valore di h) e $H \in \mathcal{M}_{43}(\mathbb{R})$, quindi può avere al massimo rango 3. Inoltre il minore del secondo ordine formato con le ultime due righe e dalla prima e terza colonna è uguale a -2, quindi ancora indipendente da h e non nullo. Pertanto $\mathrm{rk}H \geq 2$. Proseguiamo lo studio orlando il minore sopra individuato nei due soli modi possibili, applicando il Teorema di Krönecker. Orliamo dapprima usando la seconda riga di H, e sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3h & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & h & 1 \end{vmatrix} = -3h \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & h \end{vmatrix} = 2h - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = 1.$$

Se $h \neq 1$ abbiamo $\mathrm{rk}H = 3$ e il sistema ammette solo la soluzione banale (è privo di autosoluzioni). Se $h = 1$ invece tale orlato è nullo, e così pure quello ottenuto usando la prima riga di H, perché esistono due linee proporzionali (la prima e l'ultima riga sono addirittura uguali). Per $h = 1$ entrambe le orlature del terzo ordine studiate sono quindi nulle. La matrice H ha rango 2, ovvero il sistema sopra indicato ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioè ammette autosoluzioni. E questo significa che le A, B e C sono linearmente dipendenti.

È possibile risolvere l'esercizio in maniera diversa, identificando le matrici quadrate di ordine 2 con vettori di $\mathbb{R}^4$, secondo quanto accennato a pagina 73, nel paragrafo riguardante le coordinate di un vettore. Alle matrici A, B e C, si associano pertanto, rispettivamente, i vettori di $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{v}_A = [h, 0, -2, 1]^t$, $\mathbf{v}_B = [h, 3h, 1, h]^t$ e $\mathbf{v}_C = [1, 2, 0, 1]$. Lo studio dell'indipendenza lineare di A, B e C equivale allora a studiare l'indipendenza di $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$, ovvero il rango della matrice avente i tre vettori come righe o come colonne. Ma questa non è altro che la matrice H considerata nello svolgimento dell'esercizio. Alla fine, quindi, i calcoli che si è obbligati a fare sono esattamente gli stessi, anche se il punto di vista è leggermente diverso. ■

9.3.21. *Determinare se esistono valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per cui i vettori $\mathbf{v}_1 = [h, h^2 - 1, 1 - h^2]^t$, $\mathbf{v}_2 = [0, h+1, 1]^t$ e $\mathbf{v}_3 = [0, 2, 1]^t$ siano linearmente indipendenti.*

Svolgimento. Sfruttiamo la nozione di rango di una matrice.
Se $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, sappiamo che $\mathrm{rk}A$ indica il massimo numero di linee (righe o colonne) linearmente indipendenti di A. Se si ragiona sulle righe avremo informazioni sull'indipendenza di vettori di $\mathbb{R}^n$, se si ragiona sulle colonne avremo informazioni sull'indipendenza di vettori di $\mathbb{R}^m$. Nel caso in questione, possiamo costruire una matrice le cui colonne siano i vettori $\mathbf{v}_i$ e studiarne il rango:

$$A = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ h^2 - 1 & h+1 & 2 \\ 1 - h^2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è quadrata d'ordine 3. È comodo, in questo caso, esaminarne dapprima il deteminante, per studiare i casi in cui A ha rango massimo. Usando Laplace e sviluppando rispetto alla prima riga otteniamo:

$$\begin{vmatrix} h & 0 & 0 \\ h^2 - 1 & h+1 & 2 \\ 1 - h^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} h+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = h(h + 1 - 2) = h(h - 1).$$

Se $h \neq 0$ e $h \neq 1$ si ha $\det A \neq 0$, quindi $\text{rk}A = 3$ e i tre vettori formati dalle colonne di A, ossia i $\mathbf{v}_i$, sono linearmente indipendenti. Quando $h = 0$ o $h = 1$ il rango di A è certamente inferiore a 3. Non ci interessa il suo valore, perché questo fatto è sufficiente a garantire che i tre vettori sono dipendenti. ■

9.3.22. *Determinare per quali valori del parametro reale h i polinomi di* $\mathbb{R}_2[t]$, $P_1(t) = t^2$, $P_2(t) = ht - 1$ *e* $P_3(t) = 2t^2 + h - 1$ *sono linearmente dipendenti.*

Svolgimento. Dobbiamo determinare i valori di h affinché l'equazione

$$aP_1(t) + bP_2(t) + cP_3(t) = 0$$

sia soddisfatta per una terna non tutta nulla $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Sviluppando i calcoli e riordinando rispetto alle potenze decrescenti di t, otteniamo:

$$\begin{aligned} aP_1(t) + bP_2(t) + cP_3(t) &= a(t^2) + b(ht - 1) + c(2t^2 + h - 1) = \\ &= (a + 2c)t^2 + hbt + (h - 1)c - b = 0. \end{aligned}$$

Per il principio di uguaglianza dei polinomi, la precedente equazione è soddisfatta se si annullano contemporaneamente tutti i coefficienti delle potenze di t, ovvero se:

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ hb = 0 \\ (h-1)c - b = 0. \end{cases} \quad \text{la cui matrice dei coefficienti è} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & -1 & h-1 \end{bmatrix}.$$

Dal Teorema di Rouché-Capelli, esistono autosoluzioni nel precedente sistema se e solo se $\det A = 0$. Infatti le soluzioni sono ∞^{n-r}, con $n = 3$ (numero di incognite) e $r = \text{rk}A$. Se fosse $r = 3$, ovvero $\det A \neq 0$, avremmo ∞^0 soluzioni, che significa una sola soluzione: quella banale. Sviluppandolo rispetto alla prima colonna, otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & -1 & h-1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} h & 0 \\ -1 & h-1 \end{vmatrix} = h(h-1) = 0 \iff h = 0 \vee h = 1.$$

Quindi i polinomi sono dipendenti solo quando $h = 0$ o $h = 1$.

Possiamo risolvere l'esercizio anche da un altro punto di vista. I tre polinomi sono dipendenti se lo sono i vettori associati in $\mathbb{R}^3$. Come regola per determinare i vettori consideriamo l'ordinamento decrescente delle potenze di t. Allora ai polinomi $P_1(t)$, $P_2(t)$ e $P_3(t)$ possiamo associare, rispettivamente, in modo unico, i tre vettori $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 0]^t$, $\mathbf{v}_2 = [0, h, -1]^t$, e $\mathbf{v}_3 = [2, 0, h - 1]^t$, che coincidono proprio con le colonne della matrice A. Questi vettori sono dipendenti se la matrice che essi formano come colonne ha rango inferiore a 3. Questi calcoli sono esattamente gli stessi che abbiamo appena fatto. ■

9.3.23. *Determinare i valori del parametro* $k \in \mathbb{R}$ *tali per cui i vettori* $\mathbf{v}_1 = [k-1, -1, -1]^t$, $\mathbf{v}_2 = [-3, k, 3]^t$ *e* $\mathbf{v}_3 = [-1, -1, 1]^t$ *di* $\mathbb{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

Svolgimento. Prendiamo in considerazione la matrice A avente per colonne i vettori $\mathbf{v}_i$, e calcoliamo il suo determinante. Sviluppando rispetto alla prima riga, otteniamo:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} k-1 & -3 & -1 \\ -1 & k & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (k-1)(k+3) + 3(-1-1) - (-3+k) =$$

$$= k^2 + 2k - 3 - 6 + 3 - k = k^2 + k - 6.$$

Il determinante di A si annulla se e solo se $k = 2$ oppure $k = -3$. Quindi per $k \neq 2$ e $k \neq -3$, abbiamo $\det A \neq 0$, $\mathrm{rk}A = 3$, e le tre colonne (i vettori $\mathbf{v}_i$) sono linearmente indipendenti. Se $k = 2$ o $k = -3$ il rango di A è 2. Esiste sempre, in questi casi, un minore del secondo ordine non nullo. Quelli, fra i $\mathbf{v}_i$, che, in quanto colonne di A, contribuiscono a formare il minore non nullo individuato, rappresentano vettori indipendenti. ■

9.3.24. *Esprimere la matrice di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

come combinazione lineare delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Dobbiamo individuare tre costanti, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tali che $M = aA + bB + cC$. Sviluppiamo quest'ultima equazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = aA + bB + cC = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & c \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+c \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Uguagliando termine a termine il primo e l'ultimo membro della precedente catena di uguaglianze, otteniamo il seguente sistema di quattro equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 1 = a + c \\ 2 = b + c \\ 0 = 0 \\ 3 = c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 - c \\ b = 2 - c \\ 0 = 0 \\ c = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 3. \end{cases} \quad \text{da cui} \quad M = -2A - B + 3C.$$

■

9.3.25. *Stabilire se le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Svolgimento. Dobbiamo determinare se esistono tre scalari $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tali che $aA + bB + cC = O$. Sviluppiamo questa equazione.

$$\begin{aligned} aA + bB + cC &= a\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3c & c \\ c & 4c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a+2b-3c & -a+b+c \\ b+c & 2a+4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uguagliando termine a termine le ultime due matrici della precedente catena di uguaglianze, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ 2a + 4c = 0, \end{cases} \quad \text{la cui matrice dei coefficienti è} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Certamente è $\text{rk}A \geq 2$, in quanto, ad esempio, il minore formato dalle ultime due righe e dalle prime due colonne è uguale a -2, quindi non nullo. Orlando con la seconda riga e sviluppando rispetto alla prima colonna otteniamo un minore uguale a -4, per cui $\text{rk}A = 3$. Esiste quindi un'unica soluzione del precedente sistema, quella banale $(0, 0, 0)$ e le tre matrici sono linearmente indipendenti. ∎

9.3.26. *Stabilire, al variare del parametro reale t, se il vettore $\mathbf{v} = [t, 3, 3]^t$ è combinazione lineare dei vettori $\mathbf{w}_1 = [-1, 3, 0]^t$ e $\mathbf{w}_2 = [2, 2, 1]^t$*

Svolgimento. Dobbiamo decidere se esistono valori di t afinché l'equazione $\mathbf{v} = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$ sia soddisfatta, per qualche coppia di reali $a, b \in \mathbb{R}$. Sviluppando i calcoli, otteniamo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} t \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = a\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ 3a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b \\ 2b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+2b \\ 3a+2b \\ b \end{bmatrix}.$$

Uguagliando i vettori elemento per elemento, abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} t = -a + 2b \\ 3 = 3a + 2b \\ 3 = b \end{cases}, \quad \text{essendo} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

la matrice dei coefficienti e quella dei termini noti, rispettivamente. Il rango di A è 2, in quanto, ad esempio, il minore del secondo ordine individuato dalle ultime due righe è uguale a 3, quindi non nullo. Se vogliamo che esistano soluzioni, il determinante della matrice completa $A' = [A|B]$ deve essere 0. Solo in questo caso, infatti, i due ranghi coincidono e il sistema ammette soluzioni. Sviluppando rispetto all'ultima riga, otteniamo:

$$\begin{aligned} \det A' = \begin{vmatrix} -1 & 2 & t \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= -1\begin{vmatrix} -1 & t \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 + 3t - 24 = 3t - 21 = 0 \Leftrightarrow t = 7. \end{aligned}$$

Per $t \neq 7$ il sistema non ammette soluzioni e $\mathbf{v}$ non può essere combinazione lineare dei $\mathbf{w}_i$. La soluzione del problema è $t = 7$. ■

9.3.27. *Stabilire se il seguente insieme di vettori di* $\mathbb{R}^3$ *è indipendente:*

$$X = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Svolgimento. L'insieme X è indipendente se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti. Detta A la matrice avente come colonne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, abbiamo $\det A = 0$. Quindi $\mathrm{rk}A < 3$, per cui l'insieme X è dipendente. Si vede facilmente che $\mathrm{rk}A = 2$, quindi uno dei vettori è combinazione lineare degli altri due. In particolare abbiamo $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. ■

9.3.28. *Determinare una base per* $\mathbf{V} = \{(x, y, x+y, x-y) \in \mathbb{R}^4 |\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Svolgimento. Il generico vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [x, y, x+y, x-y]^t = [x, 0, x, x]^t + [0, y, y, -y]^t = \\ &= x\,[1, 0, 1, 1]^t + y\,[0, 1, 1, -1]^t = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Quindi tutti i vettori di $\mathbf{V}$ sono combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Ovvero $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un insieme generatore per $\mathbf{v}$. Ma i $\mathbf{v}_i$ sono linearmente indipendenti. Infatti, si verifica facilmente che il rango della matrice A, avente per colonne i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, è 2, quindi i vettori $\mathbf{v}_i$ sono indipendenti, e $\mathcal{B}$ è una base. ■

9.3.29. *Siano* $\mathbf{U} = \{[x, y, z]^t |\ x + 2y - z = 0\}$ *e* $\mathbf{V} = \{[x, y, z]^t = a\,[1, 0, -1]^t + b\,[2, 1, 0]^t\}$ *due sottospazi di* $\mathbb{R}^3$. *Dopo aver determinato una base di* $\mathbf{U}$, *individuare una base di* $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

Svolgimento. Gli elementi di $\mathbf{U}$ sono tutti e soli i vettori $\mathbf{u} = [x, y, z]^t$ tali che $x + 2y - z = 0$, cioè tali che $x = -2y + z$. Hanno dunque la forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2.$$

Quindi tutti e soli i vettori di $\mathbf{U}$ si esprimono come combinazione lineare degli $\mathbf{u}_i$. Inoltre la matrice da essi formata ha almeno un minore del secondo ordine non nullo (per esempio quello individuato dalle prime due righe). Perciò i vettori $\mathbf{u}_i$ sono indipendenti, e $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ è una base per $\mathbf{U}$. Consideriamo ora il sottospazio $\mathbf{V}$. Ogni elemento di $\mathbf{V}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1 = [1, 0, -1]^t$ e $\mathbf{v}_2 = [2, 1, 0]^t$, per definizione. Quindi, $\mathbf{v} = [x, y, z]^t \in \mathbf{V}$ se e solo se, per qualche $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ b \\ -a \end{bmatrix}.$$

Uguagliando, termine a termine, il primo e l'ultimo vettore della precedente catena di uguaglianze, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = b \\ z = -a \end{cases}$$

da cui, eliminando a e b, otteniamo l'equazione $x - 2y + z = 0$. La precedente esprime la relazione che deve esistere tra le componenti di un vettore $\mathbf{v}$ affinché esso appartenga a $\mathbf{V}$. Possiamo allora studiare l'intersezione $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$. Se un vettore $\mathbf{x} = [x, y, z]^t$ appartiene a $\mathbf{U}$, le sue componenti devono soddisfare, per definizione, l'equazione $x + 2y - z = 0$. Se appartiene anche a $\mathbf{V}$ devono soddisfare pure l'equazione $x - 2y + z = 0$. Per cui $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ se e solo se le componenti di $\mathbf{x}$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y, \end{cases} \quad \text{e quindi } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = y\mathbf{w}.$$

Il vettore $\mathbf{w}$ genera $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ e, essendo non nullo e quindi indipendente, ne è una base. Ne consegue che $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = 1$. ■

9.3.30. *In* $\mathbb{R}^4$, *siano* $\mathbf{V} = \langle [1, 1, 0, 1]^t, [2, 0, 0, 1]^t \rangle$ *e* $\mathbf{W} = \langle [-1, 1, 0, 0]^t, [0, 0, 0, 1]^t \rangle$. *Determinare la dimensione e una base per* $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$.

Svolgimento. Iniziamo a rappresentare i generici vettori di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$. Un vettore di $\mathbf{V}$ è combinazione lineare dei suoi generatori, quindi ha la forma:

$$\mathbf{v} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 0 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x \\ 0 \\ x + y \end{bmatrix},$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. Analogamente, il generico vettore di $\mathbf{W}$ è:

$$\mathbf{w} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ 0 \\ t \end{bmatrix},$$

con $z, t \in \mathbb{R}$. Dobbiamo individuare la forma del generico vettore appartenente all'intersezione $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$. Un tale vettore, appartenendo sia a $\mathbf{V}$ che a $\mathbf{W}$ si deve poter scrivere sia usando $\mathbf{v}$, per opportuni valori di x e y, sia usando $\mathbf{w}$, per opportuni valori di z e t. Uguagliamo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cercando delle relazioni tra x e y, da un lato, e tra z e t, dall'altro. Abbiamo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \iff \begin{bmatrix} x + 2y \\ x \\ 0 \\ x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x + 2y = -z \\ x = z \\ 0 = 0 \\ x + y = t, \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y = -z \\ x = z \\ 0 = 0 \\ t = 0. \end{cases}$$

Se prendiamo in considerazione $\mathbf{v}$, ossia x e y, dalle prime due equazioni otteniamo $x = -y$ e, sostituendo nella generica scrittura di $\mathbf{v}$, abbiamo il generico vettore di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, svolgendo i calcoli in riferimento a $\mathbf{w}$ e prendendo in considerazione z e t, dall'ultima equazione otteniamo $t = 0$. Non abbiamo condizioni sulla z. Sostituendo nella scrittura di $\mathbf{w}$, otteniamo la generica forma di un vettore dell'intersezione:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} z \\ -z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi tutti i vettori di $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ sono multipli di $[1, -1, 0, 0]^t$, ovvero $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \langle [1, -1, 0, 0]^t \rangle$ e $\dim(\mathbf{V} \cap \mathbf{W}) = 1$. ■

9.3.31. *Siano*

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4]^t \,|\, v_2 + v_3 + v_4 = 0 \right\},$$

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^t \,|\, w_1 + w_2 = 0,\ w_3 = 2w_4 \right\}$$

due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$. Dimostrare che $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinarne dimensione ed una base.

Svolgimento. Iniziamo con $\mathbf{V}$. Siano $\mathbf{v}' = [v_1', v_2', v_3', v_4']^t$ e $\mathbf{v}'' = [v_1'', v_2'', v_3'', v_4'']^t$ due generici vettori di $\mathbf{V}$. Per definizione, valgono le seguenti equazioni:

$$(1)\ v_2' + v_3' + v_4' = 0 \quad \text{e} \quad (2)\ v_2'' + v_3'' + v_4'' = 0.$$

Verifichiamo se le componenti di una combinazione lineare di $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}''$ soddisfano un'equazione analoga. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\mathbf{v}''' = \begin{bmatrix} v_1''' \\ v_2''' \\ v_3''' \\ v_4''' \end{bmatrix} = a\mathbf{v}' + b\mathbf{v}'' = a \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ v_3'' \\ v_4'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} av_1' + bv_1'' \\ av_2' + bv_2'' \\ av_3' + bv_3'' \\ av_4' + bv_4'' \end{bmatrix}.$$

L'equazione $v_2''' + v_3''' + v_4''' = 0$ è soddisfatta. Infatti:

$$\begin{aligned} v_2''' + v_3''' + v_4''' &= (av_2' + bv_2'') + (av_3' + bv_3'') + (av_4' + bv_4'') = \\ &= (av_2' + av_3' + av_4') + (bv_2'' + bv_3'' + bv_4'') = \\ &\overset{(1)}{=} a(v_2' + v_3' + v_4') + b(v_2'' + v_3'' + v_4'') = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

L'uguaglianza $(^1)$ è valida in virtù delle (1) e (2). Quindi $\mathbf{v}''' \in \mathbf{V}$, che è linearmente chiuso. Cioè è un sottospazio. Un ragionamento analogo si fa per $\mathbf{W}$. Se $\mathbf{w}' = [w_1', w_2', w_3', w_4']^t$ e $\mathbf{w}'' = [w_1', w_2', w_3', w_4']^t$ sono due elementi di $\mathbf{W}$, valgono le seguenti equazioni:

$$(3)\ w_1' + w_2' = 0, \quad (4)\ w_3' = 2w_4', \quad (5)\ w_1'' + w_2'' = 0, \quad (6)\ w_3'' = 2w_4''.$$

Le componenti di $a\mathbf{w}' + b\mathbf{w}''$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ sono:

$$\mathbf{w}''' = \begin{bmatrix} w_1''' \\ w_2''' \\ w_3''' \\ w_4''' \end{bmatrix} = a\mathbf{w}' + b\mathbf{w}'' = \begin{bmatrix} aw_1' + bw_1'' \\ aw_2' + bw_2'' \\ aw_3' + bw_3'' \\ aw_4' + bw_4'' \end{bmatrix}.$$

Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
(7)\quad w_1''' + w_2''' &= (aw_1' + bw_1'') = (aw_2' + bw_2'') = \\
&= (aw_1' + aw_2') + (bw_1'' + bw_2'') = \\
&= a(w_1' + w_2') + b(w_1'' + w_2'') \stackrel{(2)}{=} 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
(8)\quad w_3''' = aw_3' + bw_3'' \stackrel{(3)}{=} a(2w_4') + b(2w_4'') = 2(aw_4' + bw_4'') = 2w_4'''.
$$

L'uguaglianza (^{2}) è conseguenza delle (3) e (5), mentre l'uguaglianza (^{3}) è conseguenza delle (4) e (6). Le equazioni (7) e (8) ci dicono che $\mathbf{w}''' \in \mathbf{W}$, che quindi è linearmente chiuso, ovvero è un sottospazio. Ora che abbiamo verificato che $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ sono sottospazi, studiamone la dimensione e determiniamone una base. Dall'equazione (1) segue che la relazione che lega le componenti di un generico vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{V}$ è $v_2 = -v_3 - v_4$. Questa relazione permette di scrivere la seconda componente in funzione delle ultime due. Le componenti v_1, v_3 e v_4 sono invece libere di variare. Quindi:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_3 - v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -v_3 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -v_4 \\ 0 \\ v_4 \end{bmatrix} = \\
&= v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1\mathbf{v}_1 + v_3\mathbf{v}_2 + v_4\mathbf{v}_3.
\end{aligned}
$$

Nella matrice A avente come colonne i $\mathbf{v}_i$, il minore determinato dalla prima, terza e quarta riga è la matrice identica del terzo ordine, quindi è $\neq 0$ e le colonne di A sono indipendenti. Perciò non solo i $\mathbf{v}_i$ sono generatori di $\mathbf{V}$, ma essendo indipendenti ne rappresentano una base e $\dim \mathbf{V} = 3$. Ragioniamo nello stesso modo per $\mathbf{W}$. Dalle equazioni (3) e (4), segue che le componenti di un generico vettore di $\mathbf{W}$ sono legate dalle relazioni $w_1 = -w_2$ e $w_3 = 2w_4$. Quindi possiamo scrivere w_1 e w_3 in funzione, rispettivamente, di w_2 e w_4, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ 2w_4 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2w_4 \\ w_4 \end{bmatrix} = \\
&= w_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = w_2\mathbf{w}_1 + w_4\mathbf{w}_2.
\end{aligned}
$$

Pertanto A ha rango 2, quindi i $\mathbf{w}_i$ sono indipendenti e non solo generano $\mathbf{W}$, ma ne determinano una base. Ne consegue che $\dim \mathbf{W} = 2$. ∎

9.3.32. *Sia* $\mathbf{U}$ *l'insieme dei vettori* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ *tali che* $\mathbf{w}^t\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *con*

$$
\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Dimostrare che **U** *è un sottospazio e determinarne la dimensione ed una base.*

Svolgimento. Posto $\mathbf{u} = [x, y, z]^t$, la condizione che caratterizza i vettori dell'insieme **U** diventa:

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = x - 2y + z = 0.$$

Quindi $x = 2y - z$ è la relazione che permette di esprimere la componente x, di tutti e soli i vettori di **U**, in funzione delle altre due componenti. Iniziamo a dimostrare che **U** è un sottospazio. Verifichiamone la chiusura lineare. Consideriamo due vettori di **U**, $\mathbf{u}' = [x', y', z']^t$ e $\mathbf{u}'' = [x'', y'', z'']^t$. Per quanto detto, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{array}{ll} (1) & x' = 2y' - z' \\ (2) & x'' = 2y'' - z''. \end{array}$$

Per ogni coppia di scalari $a, b \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$a\mathbf{u}' + b\mathbf{u}'' = \begin{bmatrix} ax' + bx'' \\ ay' + by'' \\ az' + bz'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = \mathbf{u}'''.$$

Allora, dalle (1) e (2) segue:

$$x''' = ax' + bx'' = a(2y' - z') + b(2y'' - z'') = 2(ay' + by'') - (az' + bz'') = 2y''' - z'''.$$

Quindi $\mathbf{u}''' \in \mathbf{U}$, che è linearmente chiuso, cioè è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Sempre dalla relazione che caratterizza i vettori di **U**, possiamo scrivere:

$$\mathbf{u} \ = \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y\mathbf{u}_1 + z\mathbf{u}_2.$$

Perciò ogni vettore **u** di **U** è combinazione lineare degli $\mathbf{u}_i$, che formano quindi un insieme generatore per **U**. Nella matrice A_1 avente come colonne i vettori $\mathbf{u}_i$, il minore individuato dalle prime due righe è uguale a 1, quindi non nullo. Di conseguenza, il rango di A ci indica il numero di colonne linearmente indipendenti. Gli $\mathbf{u}_i$ sono indipendenti, generano **U**, ovvero ne sono una base. Dunque $\dim \mathbf{U} = 2$. ■

9.3.33. *Determinare una base e la dimensione dello spazio* $\mathbf{U} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$, *con*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. L'insieme $X = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ è un insieme generatore di **U**. Quindi contiene necessariamente una base di **U**. Dobbiamo cercare di individuare il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di X. Ricordando che il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di linee (righe o colonne) indipendenti della matrice stessa, possiamo studiare il rango di una matrice che ha come colonne i vettori di X. La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

appartiene a $\mathcal{M}_{43}(\mathbb{R})$ e ha almeno un elemento $\neq 0$. Quindi $1 \leq \mathrm{rk}A \leq 3$. Il minore del secondo ordine individuato dalle ultime due righe e dalle prime due colonne, ovvero

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \tag{9.3.6}$$

ci dice che $\mathrm{rk}A \geq 2$. Per determinare se A ha rango massimo possiamo usare il Teorema di Krönecker, calcolando solo i minori di ordine 3 ottenuti orlando (9.3.6). Usando la prima riga e sviluppando rispetto all'ultima colonna, otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \neq 0.$$

Esiste quindi un minore di ordine massimo non nullo e $\mathrm{rk}A = 3$. Tutte le colonne di A, ovvero i vettori di X, sono indipendenti. Quindi X è una base e $\dim \mathbf{U} = 3$. ■

9.3.34. *Determinare una base e la dimensione dello spazio $\mathbf{U} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$, con*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. I vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono generatori di $\mathbf{U}$. Dobbiamo scoprire quali sono anche linearmente indipendenti. Possiamo studiare una matrice A avente questi vettori come colonne (o righe). Il rango di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rappresenta il massimo numero di colonne indipendenti, quindi ci indica quanti lo sono fra i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$. Siccome $\det A = -1 \neq 0$, abbiamo che $\mathrm{rk}A = 3$ e i vettori sono tutti indipendenti. Formano dunque una base di $\mathbf{U}$ che quindi ha dimensione $\dim \mathbf{U} = 3$. ■

9.3.35. *Nello spazio $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi:*

$$\mathbf{U}: \ x - z = y + t = 0 \quad (1);$$

$$\mathbf{V}: \ x + t = y - z = 0 \quad (2).$$

Determinare le dimensioni di $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U} + \mathbf{V}$, stabilire se $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ è una somma diretta, trovarne una base e darne una rappresentazione.

Svolgimento. Le equazioni (1) e (2) permettono di determinare la forma di un generico vettore, rispettivamente, di $\mathbf{U}$ e di $\mathbf{V}$. Infatti, per definizione, un vettore $\mathbf{x} : [x, y, z, t]^t$ appartiene ad $\mathbf{U}$ se e solo se $x = z$ e $y = -t$ (equazioni (1)). Quindi il generico vettore di $\mathbf{U}$ è:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ -t \\ x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2.$$

I vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ generano $\mathbf{U}$. Sono indipendenti, in quanto la matrice A che ha come colonne gli $\mathbf{u}_i$, ha rango 2 (si prenda, ad esempio, in considerazione il minore determinato dalle prime due righe). Quindi $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ è una base di $\mathbf{U}$ e $\dim \mathbf{U} = 2$. Ragionando allo stesso modo su $\mathbf{V}$, dalle equazioni (2) otteniamo che un vettore di componenti x, y, z, t appartiene a $\mathbf{V}$ se e solo se $x = -t$ e $y = z$. Quindi il generico vettore di $\mathbf{V}$ è:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -t \\ y \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2.$$

Lo spazio $\mathbf{V}$ è generato dai vettori $\mathbf{v}_i$, in quanto tutti gli elementi di $\mathbf{V}$ si scrivono come loro combinazione lineare. Inoltre i $\mathbf{v}_i$ sono indipendenti, come si può dimostrare osservando che la matrice avente i $\mathbf{v}_i$ come colonne ha rango 2. Quindi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è base di $\mathbf{V}$ e $\dim \mathbf{V} = 2$. Per quanto riguarda la determinazione di $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V})$ possiamo ragionare nel modo seguente. I vettori dello spazio somma sono tutti e soli i vettori di tipo $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, al variare di $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Ma, per quanto visto, ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ si scrive come combinazione lineare degli $\mathbf{u}_i$ e ogni $\mathbf{v}$ si scrive come combinazione lineare dei $\mathbf{v}_i$. Allora il generico vettore di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ non è altro che una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, che rappresentano un insieme generatore di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Dobbiamo solo individuare quanti, fra questi vettori, sono indipendenti. Consideriamo la matrice A, avente i quattro vettori come colonne e studiamone il rango. È una matrice quadrata ad elementi non tutti nulli. Quindi $1 \leq \text{rk}A \leq 4$. Siccome $\det A = 0$, $\text{rk}A < 4$. Però il minore del terzo ordine individuato dalle prime tre righe e colonne è non nullo. Infatti, sviluppando rispetto alla prima riga, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0.$$

Quindi $\text{rk}A = 3$, e ci sono tre colonne indipendenti. Queste colonne sono quelle che contribuiscono alla costruzione del minore appena calcolato. Quindi i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1$ determinano una base di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ e $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 3$. Per stabilire se la somma è diretta possiamo usare la Formula di Grassmann. Sappiamo che $\dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V})$, da cui $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 2 + 2 - 3 = 1$. Questo significa che $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ non si riduce al sottospazio banale $\{\mathbf{0}\}$, per cui, per definizione, la somma non può essere diretta. Cerchiamo infine di rappresentare i vettori di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$. Per fare questo dobbiamo determinare una relazione che leghi le componenti di un generico vettore appartenente a $\mathbf{U}+\mathbf{V}$. Abbiamo individuato una base di $\mathbf{U}+\mathbf{V}$: $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\}$.

Se un vettore $\mathbf{x} = [x, y, z, t]^t$ appartiene a $\mathbf{U}+\mathbf{V}$, ovviamente è combinazione dei vettori di $\mathcal{B}''$. In particolare l'insieme $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}\}$ è linearmente dipendente. Questo significa che, detta M la matrice avente come colonne i vettori del precedente insieme deve risultare $\text{rk}M < 4$. Posto quindi $\det M = 0$ e sviluppando i conti, troviamo l'equazione $x+y-z+t = 0$, che rappresenta la relazione che deve intercorrere tra le componenti di un vettore affinché questi appartenga a $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Quindi $\mathbf{U}+\mathbf{V} = \{[x, y, z, t]^t \mid x+y-z+t = 0\}$. ■

9.3.36. *In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti vettori*

$$\mathbf{u} = [1, 2, 0, 0]^t, \quad \mathbf{v} = [0, -1, 1, 0]^t, \quad \mathbf{w} = [0, 0, 2, 1]^t$$

e gli spazi $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$ e $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Stabilire la dimensione di $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ e determinare se $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ è somma diretta.

Svolgimento. Siccome dobbiamo indagare sulle dimensioni di spazi somma e intersezione, il metodo migliore è quello di utilizzare la Formula di Grassmann. Intanto osserviamo che $\dim \mathbf{U} = 1$, essendo $\mathbf{U}$ generato da un unico vettore non nullo. Per quanto riguarda $\mathbf{V}$, si osservi che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

le cui righe sono i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, ha rango due (per esempio il minore determinato dalle ultime due colonne è $\neq 0$). Quindi i generatori di $\mathbf{V}$ sono indipendenti e $\dim \mathbf{V} = 2$. L'insieme $X = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ genera $\mathbf{U}+\mathbf{V}$. Infatti tutti i vettori della somma sono del tipo $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, con $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Ma un vettore di $\mathbf{U}$ è multiplo di $\mathbf{u}$, mentre i vettori di $\mathbf{V}$ sono combinazioni lineari di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Quindi gli elementi di $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ si ottengono come combinazione dei vettori dell'insieme X. Per capire quanti di questi sono indipendenti, studiamo il rango della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha gli elementi di X come righe. Il minore individuato dalle ultime tre colonne è $\neq 0$, quindi $\text{rk}B = 3$ e i vettori di X sono indipendenti. L'insieme X è una base di $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ e $\dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = 3$. Dalla formula di Grassmann abbiamo $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U}+\mathbf{V}) = 1+2-3 = 0$. L'unico spazio di dimensione 0 è quello banale, quindi $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$ e la somma è diretta. ■

9.3.37. *In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{u}_1 = [1, -1, 3, 1]^t$, $\mathbf{u}_2 = [1, 1, -1, 1]^t$, $\mathbf{v}_1 = [1, 1, -1, 0]^t$, $\mathbf{v}_2 = [1, 1, -1, 3]^t$ e i sottospazi $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ e $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Determinare le dimensioni di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ e stabilire se la loro somma è diretta.*

Svolgimento. Iniziamo a studiare le dimensioni di $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Esaminiamo il rango delle matrici A e B, aventi come colonne, rispettivamente, i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Si vede facilmente che entrambe hanno almeno un minore del secondo ordine non nullo, quindi $\text{rk}A = \text{rk}B = 2$. Ciò significa che entrambe le coppie di colonne sono indipendenti, ovvero che gli insiemi $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono basi, rispettivamente, di $\mathbf{U}$ e di $\mathbf{V}$. Quindi $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V} = 2$. I vettori di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ sono tutte e sole le somme di vettori di $\mathbf{U}$ e di $\mathbf{V}$, ciascuno dei quali è rispettivamente una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{B}'$. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{U} + \mathbf{V}$ esistono due vettori, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tali che $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Ma, per definizione, $\mathbf{u} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, con $a, b \in \mathbb{R}$, mentre $\mathbf{v} = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$, con $c, d \in \mathbb{R}$. Quindi $\mathbf{x} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$. Di conseguenza i vettori dello spazio somma sono combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$. Consideriamo la matrice $C = [A|B]$, ottenuta accostando le matrici A e B. Facendo i calcoli si ottiene $\det C = 0$, mentre il minore del terzo ordine individuato dalle ultime tre righe e dalle prime tre colonne è $\neq 0$. Ne deduciamo che $\mathrm{rk}C = 3$. Ciò significa che le tre colonne che determinano il minore in questione sono linearmente indipendenti, ovvero che $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\}$ sono una base di $\mathbf{U} + \mathbf{V}$, che quindi ha dimensione 3. Utilizzando la formula di Grassmann, abbiamo $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 2 + 2 - 3 = 1$. Quindi $\mathbf{U} \cap \mathbf{V} \neq \{\mathbf{0}\}$ (altrimenti avremmo $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{V}) = 0$) e la somma non è diretta. ■

9.3.38. *Si consideri lo spazio $\mathbb{R}_4[t]$ dei polinomi di grado $n \leq 4$ a coefficienti reali, e gli insiemi $U = \{p(t) \in \mathbb{R}_4[t] : p(-1) = p(0) = p(1) = 0\}$ e $V = \{q(t) \in \mathbb{R}_4[t] : q(0) = q(1) = q(2) = 0\}$.*

1. *Dimostrare che U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}_4[t]$.*

2. *Determinare la dimensione ed una base di $U \cap V$.*

Svolgimento.

(1) Il generico polinomio $p(t) \in U$ si può scrivere come $p(t) = t(t-1)(t+1)(at+b)$. Consideriamo una generica combinazione lineare $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$, con $p_1(t), p_2(t) \in U$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo allora $p_1(t) = t(t-1)(t+1)(a_1t+b_1)$ e $p_2(t) = t(t-1)(t+1)(a_2t+b_2)$, per cui $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) = t(t-1)(t+1)[(\alpha a_1 + \beta a_2)t + \alpha b_1 + \beta b_2]$. Posto $\alpha a_1 + \beta a_2 = a_3$ e $\alpha b_1 + \beta b_2 = b_3$, risulta $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) = t(t-1)(t+1)(a_3t+b_3)$, e quindi $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \in U$. Pertanto, U è chiuso rispetto alle combinazioni lineari di suoi elementi, e quindi U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_4[t]$. In maniera analoga si dimostra che anche V è un sottospazio di $\mathbb{R}_4[t]$.

(2) Indichiamo con $r(t)$ il generico polinomio dello spazio $U \cap V$. Abbiamo allora

$$\begin{cases} r(t) = t(t-1)(t+1)(at+b) & \text{poiché } r(t) \in U \\ r(t) = t(t-1)(t-2)(ct+d) & \text{poiché } r(t) \in V \end{cases}$$

Quindi deve essere $t(t-1)(t+1)(at+b) = t(t-1)(t-2)(ct+d)$, cioè $at^2 + (a+b)t + b = ct^2 + (-2c+d)t - 2d$. Per il principio di identità dei polinomi risulta

$$\begin{cases} a = c \\ a + b = -2c + d \\ b = -2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ c = d \\ b = -2d \end{cases}$$

Di conseguenza, $r(t) = t(t-1)(t+1)(dt-2d) = dt(t-1)(t+1)(t-2)$, per cui $\dim(U \cap V) = 1$, ed una sua base è rappresentata dal polinomio $t(t-1)(t+1)(t-2)$. ■

9.3.39. *Nello spazio canonico $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ associati, rispettivamente, ai seguenti sistemi lineari*

$$\mathbf{U}\left\{\begin{array}{l} 2x+y-5z-5t=0 \\ 3x-2y+3z-11t=0 \\ x-3y+8z-6t=0 \end{array}\right. \qquad \mathbf{W}\left\{\begin{array}{l} x+y+2z-5t=0 \\ x-2y-z-2t=0 \\ 2x+5y+7z-13t=0. \end{array}\right.$$

Determinare la dimensione ed una base per gli spazi $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{W}$.

Svolgimento. Detta $[U]$ la matrice dei coefficienti del sistema associato ad $\mathbf{U}$, notiamo facilmente che $r([U]) \geq 2$, in quanto il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo. Orlando questo minore nei due modi possibili otteniamo sempre determinanti nulli, e quindi $r([U]) = 2$. Di conseguenza, per il teorema di classificazione dei sottospazi, risulta $\dim\mathbf{U} = 2$. Per trovare una base di $\mathbf{U}$ risolviamo il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=5z+5t \\ 3x-2y=-3z+11t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z+3t \\ y=3z-t \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, una base di $\mathbf{U}$ è data da $\mathcal{B}_U = \left\{[1,3,1,0]^t, [3,-1,0,1]^t\right\}$.
Sia ora $[W]$ la matrice dei coefficienti del sistema associato a $\mathbf{W}$, notiamo che anche $r([W]) = 2$, in quanto il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, ed orlando otteniamo sempre determinanti nulli. Di conseguenza, anche $\dim\mathbf{W} = 2$. Per trovare una base di $\mathbf{W}$ risolviamo il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=-2z+5t \\ x-2y=z+2t \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z+4t \\ y=-z+t \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, una base di $\mathbf{W}$ è $\mathcal{B}_W = \left\{[-1,-1,1,0]^t, [4,1,0,1]^t\right\}$. ∎

9.3.40. *Siano* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{W}$ *i sottospazi di* $\mathbb{R}^4$ *definiti nell'Esercizio 9.3.39. Determinare lo spazio* $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, *e dedurre la dimensione di* $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

Svolgimento. Il generico vettore di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ si ottiene uguagliando le scritture del generico vettore di $\mathbf{U}$ e di $\mathbf{W}$, cioè $[z+3t, 3z-t, z, t]^t = [-z+4t, -z+t, z, t]^t$, e risolvendo otteniamo $t = 2z$. Pertanto, il generico vettore di $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ si ottiene imponendo il vincolo $t = 2z$ in $\mathbf{U}$ (oppure in $\mathbf{W}$), e quindi $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \left\{[7z, z, z, 2z]^t = z\,[7,1,1,2]^t,\ z \in \mathbb{R}\right\}$. In particolare abbiamo $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 1$, e dalla formula di Grassmann ricaviamo

$$\dim(\mathbf{U}+\mathbf{W}) = \dim\mathbf{U} + \dim\mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = 3.$$

∎

9.4 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 4

9.4.1. *Studiare la linearità dell'applicazione:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [x,y,z]^t & \longmapsto & x-y+2z. \end{array}$$

Svolgimento. Dobbiamo verificare se f conserva la somma di vettori e il prodotto di scalari. Consideriamo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{u} = [x,y,z]^t$ e $\mathbf{v}[x',y',z']^t$ e $h,k \in \mathbb{R}$. È equivalente verificare che

$$f(h\mathbf{u}+k\mathbf{v}) = hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}).$$

Poiché $h\mathbf{u}+k\mathbf{v} = h[x,y,z]^t + [x',y',z']^t = [hx+kx', hy+ky', hz+kz']^t$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(h\mathbf{u}+k\mathbf{v}) &= f([hx+kx', hy+ky', hz+kz']^t) = \\ &= (hx+kx') - (hy+ky') + 2(hz+kz') = \\ &= hx + kx' - hy - ky' + 2hz + 2kz' = \\ &= (hx - hy + 2hz) + (kx' - ky' + 2kz') = \\ &= h(x-y+2z) + k(x'-y'+2z') = hf([x,y,z]^t) + kf([x',y',z']^t) = \\ &= hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Quindi f è lineare. ∎

9.4.2. *Verificare se l'applicazione:*

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}^2 :\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & [x,y]^t \longmapsto [x-y, x+y]^t \end{array}$$

è lineare.

Svolgimento. Dobbiamo verificare se f conserva la somma di vettori e il prodotto di scalari. Consideriamo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, con $\mathbf{u} = [a,b]^t$ e $\mathbf{v} = [a',b']^t$ e $h,k \in \mathbb{R}$. È equivalente verificare che

$$f(h\mathbf{u}+k\mathbf{v}) = hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}).$$

Poiché $h\mathbf{u}+k\mathbf{v} = h[a,b]^t + k[a',b']^t = [ha+ka', hb+kb']^t$, abbiamo:

$$\begin{aligned} f(h\mathbf{u}+k\mathbf{v}) &= f([ha+ka', hb+kb']^t) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= [(ha+ka') - (hb+kb'), (ha+ka') + (hb+kb')]^t = \\ &= [h(a-b) + k(a'-b'), h(a+b) + k(a'+b')]^t = \\ &= [h(a-b), h(a+b)) + (k(a'-b'), k(a'+b')]^t = \\ &= h[a-b, a+b]^t + k[a'-b', a'+b']^t = hf[a,b]^t + kf[a',b']^t = \\ &= hf(\mathbf{u}) + kf(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Quindi f è lineare. ∎

9.4.3. *Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari così definite:*

$$f([x, y]^t) = x + y + 1;$$
$$g(x) = [x, -2x]^t.$$

Stabilire se $g \circ f$ è lineare.

Svolgimento. Dobbiamo verificare se $g \circ f$ conserva la somma di vettori e il prodotto di vettori con scalari. Controlliamo prima quest'ultimo. Posto $\mathbf{x} = [x, y]^t$ e $a \in \mathbb{R}$, dobbiamo controllare se $g \circ f(a\mathbf{x}) = a(g \circ f(\mathbf{x}))$. Dalla definizione, l'applicazione f manda il vettore $\mathbf{x} = [x, y]^t$ in $x + y + 1 \in \mathbb{R}$. Quindi, facendo agire su quest'ultimo l'applicazione g, otteniamo il vettore di $\mathbb{R}^2$ di componenti

$$[x + y + 1, -2(x + y + 1)]^t,$$

che rappresenta l'immagine di $\mathbf{x}$ tramite $g \circ f$. Eseguendo i calcoli, abbiamo:

$$\begin{aligned} g \circ f(a\mathbf{x}) &= g \circ f([ax, ay]^t) = g(ax + ay + 1) = \\ &= [ax + ay + 1, -2(ax + ay + 1)]^t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(g \circ f(\mathbf{x})) &= a(g(f([x, y]^t)) = a(g(x + y + 1)) = \\ &= a[x + y + 1, -2(x + y + 1)]^t = [ax + ay + a, -2(ax + ay + a)]^t. \end{aligned}$$

Quindi $g \circ f(a\mathbf{x}) \neq a(g \circ f(\mathbf{x}))$. Basta questo per poter dire che $g \circ f$ non è lineare. ■

9.4.4. *Sia $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da:*

$$f(A) = 2A,$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Stabilire se f è lineare.

Svolgimento. La funzione f manda ogni matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nel prodotto della matrice stessa con la costante 2. Verifichiamo che f conserva somma di vettori e prodotto di scalari. Possiamo farlo in un colpo solo, verificando che $f(aA + bB) = af(A) + bf(B)$, per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e per ogni coppia di scalari $a, b \in \mathbb{R}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} f(aA + bB) &= 2(aA + bB) = 2(aA) + 2(bB) = \\ &= a(2A) + b(2B) = af(A) + bf(B). \end{aligned}$$

Quindi la f è lineare. ■

9.4.5. *Stabilire se è lineare l'applicazione $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definita da $f(A) = A + 2I_n$, con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Svolgimento. Un'applicazione f è lineare se conserva la somma di vettori e il prodotto per scalari. Verifichiamo, in questo caso, se viene conservata la somma. Dobbiamo, in particolare, vedere se $f(A + B) = f(A) + f(B)$, al variare di $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dalla definizione di f otteniamo:

$$f(A + B) = (A + B) + 2I_n = A + B + 2I_n.$$

Invece, sempre dalla definizione, si ha:

$$f(A) + f(B) = (A + 2I_n) + (B + 2I_n) = A + B + 4I_n.$$

Quindi $f(A+B) \neq f(A)+f(B)$. Già questo basterebbe per poter dire che f non è lineare. Verifichiamo comunque che f non conserva nemmeno il prodotto per scalari. Infatti, al variare di $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e di $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(aA) &= aA + 2I_n, \\ a(f(A)) &= a(A + 2I_n)) = aA + 2aI_n. \end{aligned}$$

Quindi, tranne per il caso $a = 1$, $f(aA) \neq a(f(A))$. ■

9.4.6. *Si consideri l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$

$$f([x, y, z]^t) = [2x + 2y, x - ty, x - y - z]^t,$$

$t \in \mathbb{R}$. *Stabilire per quali valori del parametro t l'applicazione f è un automorfismo.*

Svolgimento. Un endomorfismo è un *automorfismo* se e solo se è invertibile. Lo studio dell'invertibilità di un'applicazione lineare si scarica su quello dell'invertibilità della sua matrice. Quindi, in questo caso, l'unica difficoltà risiede nella costruzione della matrice associata ad f. Supponiamo che la matrice associata ad f sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Allora l'immagine di un vettore $\mathbf{x} = [x, y, z]^t$ si ottiene moltiplicandolo a sinistra per A, ovvero

$$f(\mathbf{x}) = f([x, y, z]^t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$f([x, y, z]^t) = [a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z]^t.$$

Nel nostro caso, quindi, la matrice associata ad f è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La A è invertibile se e solo se è non singolare. Il suo determinante è $\det A = 2t + 2$, che si annulla solo quando $t = -1$. Pertanto f è un automorfismo se e solo se $t \neq -1$.

■

9.4.7. *Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita:*

$$f([x, y]^t) = [2x - y, x + y, y]^t.$$

Stabilire se f è iniettiva e suriettiva.

Svolgimento. Un'applicazione $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ è iniettiva se e solo se $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ ed è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im} f = \mathbf{V}$. La prima condizione è equivalente a dire che $\dim(\mathrm{Im} f) = 0$, mentre la seconda equivale a $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbf{V}$. Per avere informazioni sulle dimensioni di $\mathrm{Im} f$ e $\ker f$ possiamo usare l'Equazione Dimensionale, ma abbiamo bisogno della matrice A associata all'applicazione (rispetto a due qualsiasi basi), in quanto il suo rango ci fornisce la dimensione di $\mathrm{Im} f$ (e le sue colonne rappresentano un insieme generatore per $\mathrm{Im} f$). In questo caso abbiamo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il rango di A è 2: per esempio il minore determinato dalle ultime due righe è $\neq 0$. Quindi $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$. Dall'*Equazione Dimensionale*, otteniamo:

$$\begin{aligned} n &= \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) \;\Rightarrow \\ 2 &= \dim(\ker f) + 2 \;\Leftrightarrow\; \dim(\ker f) = 0. \end{aligned}$$

Dal fatto che $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, mentre la dimensione del codominio è 3, deduciamo che f non è suriettiva. Invece, da $\dim(\mathrm{Im} f) = 0$, si deduce che $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, quindi che f è iniettiva. ■

9.4.8. *Stabilire per quali valori del parametro reale t l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da:*

$$f([x, y]^t) = [x + ty, (t-1)x + 2y]^t$$

è iniettiva.

Svolgimento. Un'applicazione f è iniettiva se e solo se $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, ovvero se e solo se $\dim(\ker f) = 0$. Dall'Equazione Dimensionale $n = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$, segue:

$$\dim(\ker f) = 2 - \dim(\mathrm{Im} f).$$

Quindi f è iniettiva se e solo se $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$. Ma la dimensione dell'immagine di un'applicazione non è nient'altro che il rango della matrice ad essa associata. Le sue righe sono i coefficienti delle componenti dell'immagine di un generico vettore nella definizione di f. Quindi la matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t-1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\det A = -(t^2 - t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ o $t = -1$, ne consegue che per $t \neq 2$ e $t \neq 1$ il rango di A è 2 e f è iniettiva. ■

9.4.9. *Verificare che l'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definita da* $f([x, y]^t) = [x + y, x - y, x]^t$ *è iniettiva.*

Svolgimento. La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il rango di A coincide con la dimensione dell'immagine. Quindi $\mathrm{rk}A = \dim(\mathrm{Im}f) = 2$. Usando l'Equazione Dimensionale, abbiamo:

$$2 = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}f) = \dim(\ker f) + 2.$$

Quindi $\dim(\ker f) = 0$ e questo può accadere se e solo se $\ker f = \{\mathbf{0}\}$. Quindi f è un'applicazione iniettiva. ■

9.4.10. *Stabilire se l'endomorfismo di* $\mathbb{R}^3$ *definito da* $f([x, y, z]^t) = [2x+2y, x-y, x-y-z]^t$ *è un automorfismo.*

Svolgimento. Un automorfismo è caratterizzato dal fatto che la matrice associata A è invertibile. In questo caso abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La A è invertibile se e solo se è non singolare, ovvero se e solo se $\det A \neq 0$. Sviluppando rispetto all'ultima colonna, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-2-2) = 4 \neq 0.$$

Quindi esiste A^{-1} e f è un automorfismo. Ciò significa che esiste f^{-1}, pure lei lineare, cui è associata la matrice A^{-1}. ■

9.4.11. *Si consideri l'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definita da:*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Si determini la matrice associata ad f *e si stabilisca se* f *è un'applicazione iniettiva.*

Svolgimento. L'applicazione f viene descritta, in questo caso, definendo le immagini dei vettori della base canonica del dominio in funzione dei vettori della base canonica del codominio. Supponiamo che la matrice associata ad f sia la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

L'immagine del primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^2$, ossia di $\mathbf{e}_1 = [1, 0]^t$ è:

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

Quindi l'immagine di $\mathbf{e}_1$ non è altro che la prima colonna della matrice A. Analogamente l'immagine di $\mathbf{e}_2$ è la seconda colonna di A. Se esprimiamo questa immagine mettendo in evidenza i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, ovvero del codominio, otteniamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{31} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3.$$

Quindi i coefficienti dei termini della base canonica del codominio, negli sviluppi delle immagini degli elementi della base del dominio, non sono altro che i termini delle colonne della matrice associata ad f. Nel nostro caso abbiamo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

il rango di A è $\mathrm{rk}A = 2$, quindi, essendo $\dim(\mathrm{Im} f) = \mathrm{rk}A$, dall'Equazione Dimensionale:

$$\begin{aligned} 2 &= \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \\ &= \dim(\ker f) + \mathrm{rk}A = \\ &= \dim(\ker f) + 2 \iff \dim(\ker f) = 0. \end{aligned}$$

Ma $\dim(\ker f) = 0 \Leftrightarrow \ker f = \{\mathbf{0}\}$ e quindi f è un'applicazione iniettiva. ■

9.4.12. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da*

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x - 2y \\ 3x - 3y \end{bmatrix}.$$

1. *Determinare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. *Scrivere, rispetto alla base $\mathcal{B}_2$, l'immagine del vettore*

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento.

1. Osserviamo innanzitutto che gli insiemi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono effettivamente basi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente, in quanto

$$\det[\mathcal{B}_1] = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 \neq 0, \quad \det[\mathcal{B}_2] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

La matrice che rappresenta f rispetto alle basi date risulta

$$A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) = [\mathcal{B}_2]^{-1} A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)[\mathcal{B}_1],$$

essendo $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ la matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.

Abbiamo allora

$$[\mathcal{B}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Applicando la matrice $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ al vettore $\mathbf{v}$, scritto rispetto alla base $\mathcal{B}_1$, risulta

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}_2} = A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)\mathbf{v}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 8 & -8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

■

9.4.13. *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice*

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 2 & t+1 \\ 2 & t & t+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinare il valore del parametro t affinché f sia un automorfismo. Posto $t = -2$, determinare base e dimensione di $\operatorname{Im} f$. *Posto $t = 3$, determinare base e dimensione di* $\ker f$.

Svolgimento. Un endomorfismo è un automorfismo se e solo se è invertibile. A livello di matrici associate ciò significa che deve essere invertibile la sua matrice A_t. E questo accade se e solo se A_t è non singolare, ovvero se e solo se $\det A_t \neq 0$. Sviluppando rispetto alla prima riga, abbiamo:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} t & 2 & t+1 \\ 2 & t & t+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= t\begin{vmatrix} t & t+3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & t+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (t+1)\begin{vmatrix} 2 & t \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= t(4t-2t-6) - 2(8-t-3) + (t+1)(4-t) = \\ &= 2t^2 - 6t - 10 + 2t + 4t - t^2 + 4 - t = t^2 - t - 6.\end{aligned}$$

Quindi $\det A_t = 0 \Leftrightarrow t = 3$ oppure $t = -2$. Pertanto f è un automorfismo se e solo se $t \neq 3$ e $t \neq -2$. Poniamo ora $t = -2$. La matrice associata diventa:

$$A_{-2} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Il minore del secondo ordine determinato dalle ultime due righe e dalle prime due colonne è $\neq 0$. Siccome $\det A_{-2} = 0$ ne consegue che $\mathrm{rk}A_{-2} = 2$. Ma il rango della matrice associata ad un'applicazione lineare f rappresenta la dimensione dell'immagine di f. Quindi $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$ e una base per $\mathrm{Im}f$ è fornita dalle colonne di A_{-2} che contribuiscono a formare il minore con cui si è determinato il rango di $\mathrm{rk}A_{-2}$, in questo caso le prime due. Quindi l'insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathrm{Im}f$. Poniamo ora $t = 3$. La matrice associata diventa:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso $\mathrm{rk}A_3 = 2$. Infatti, per quanto visto prima $\det A_3 = 0$, mentre il minore del secondo ordine, determinato dalle prime due righe e colonne, è $\neq 0$. Quindi $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$. Ricordando l'Equazione Dimensionale:

$$n = \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\ker f),$$

dove n è la dimensione dello spazio dominio dell'applicazione f (in questo caso $n = 3$), abbiamo:

$$3 = 2 + \dim(\ker f),$$

ossia $\dim(\ker f) = 1$. Per determinare una base cerchiamo di esprimere il generico vettore di $\ker f$. Se $\mathbf{x} = [x, y, z]^t \in \ker f$, per definizione di nucleo, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. In questo caso, l'immagine di $\mathbf{x}$ tramite f si ottiene moltiplicando il vettore $\mathbf{x}$ a sinistra per la matrice A_3. Dall'equazione matriciale $A_3\mathbf{x} = \mathbf{0}$ otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 2y + 4z \\ 2x + 3y + 6z \\ x + 2y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uguagliando termine a termine nella precedente equazione, si ha:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + 6z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

che ammette la terna $(0, -2t, t)$ come soluzione, al variare di $t \in \mathbb{R}$. Ciò significa che il generico vettore di $\ker f$ si scrive come:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = t\mathbf{v}.$$

Questa è la conferma che $\dim(\ker f) = 1$, e il vettore $\mathbf{v}$ individua una base per il nucleo di f. ■

9.4.14. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinare una base per $\mathrm{Im} f$. *Dopo aver verificato che l'insieme*

$$\mathbf{W} = \left\{ [x, y, 0]^t \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio di $\mathbb{R}^3$, determinare una base per $\mathbf{W} + \mathrm{Im} f$.

Svolgimento. Sappiamo che le colonne della matrice associata ad un'applicazione f sono generatori di $\mathrm{Im} f$. Cerchiamo di individuare quante, fra esse, sono indipendenti. Determiniamo il rango di A. Siccome le prime due colonne della matrice sono proporzionali (la prima si ottiene dalla seconda moltiplicandola per -2) evidentemente $\det A = 0$. Quindi $\mathrm{rk} A \leq 2$. Il minore individuato dalle ultime due righe e dalle ultime due colonne, ossia

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$$

è non nullo, quindi $\mathrm{rk} A = 2$. Non solo abbiamo scoperto che $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, ma ne abbiamo anche determinato una base, in quanto le colonne di A, generatori di $\mathrm{Im} f$, che contribuiscono a formare il minore di cui sopra, sono indipendenti. Quindi una base di $\mathrm{Im} f$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per verificare che $\mathbf{W}$ è un sottospazio consideriamo la sua chiusura lineare. Siano $\mathbf{w}_1 = [x_1, y_1, 0]^t$ e $\mathbf{w}_2 = [x_2, y_2, 0]^t$ due vettori di $\mathbf{W}$. Sono entrambi caratterizzati dall'avere l'ultima componente nulla. Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ consideriamo la combinazione lineare $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$:

$$a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 = a \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_2 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ ay_1 + by_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi anche $a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$ ha l'ultima componente nulla. Ciò significa che è un vettore di $\mathbf{W}$, che $\mathbf{W}$ è linearmente chiuso, ovvero che è un sottospazio. Per determinare una base di $\mathbf{W}$ basta esaminare un suo generico vettore:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x\mathbf{w}_1 + y\mathbf{w}_2.$$

I vettori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ non solo generano $\mathbf{W}$, ma, essendo evidentemente indipendenti, ne formano anche una base. A questo punto abbiamo determinato una base di $\mathbf{Im}f$ e una di $\mathbf{W}$. Tutti e soli i vettori della somma $\mathbf{W} + \mathbf{Im}f$ si scrivono come combinazioni lineari dei vettori delle due basi. Una base per $\mathbf{W} + \mathbf{Im}f$ si troverà individuando, nell'unione delle due basi, quelli indipendenti. Per fare questo consideriamo la matrice aventi i vettori in questione come colonne:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e studiamone il rango. Certamente il minore del secondo ordine individuato dalle ultime due righe e dalle prime due colonne è non nullo (l'abbiamo visto esaminando la base di $\mathrm{Im}f$). Usiamo il Teorema di Krönecker, orlando dapprima questo minore con la terza colonna. Sviluppando rispetto alla seconda colonna, otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1) = -3 \neq 0.$$

Quindi $\mathrm{rk}B = 3$, le tre prime colonne sono indipendenti e formano una base di $\mathbf{W} + \mathbf{Im}f$. ■

9.4.15. *Dato in* $\mathbb{R}^4$ *l'endomorfismo* f_t *rappresentato dalla matrice*

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

verificare che $\dim(\ker f) = 2$ *solo per* $t = 0$.

Svolgimento. Possiamo usare l'Equazione Dimensionale

$$n = \dim(\ker f) + \dim(\mathbf{Im}f),$$

sapendo che $n = \dim \mathbb{R}^4 = 4$. Quindi

$$\begin{aligned} \dim(\ker f) &= n - \dim(\mathbf{Im}f) = \\ &= 4 - \dim(\mathbf{Im}f) = 2 \Leftrightarrow \dim(\mathbf{Im}f) = 2. \end{aligned}$$

Sappiamo anche che $\dim(\mathbf{Im}f) = \mathrm{rk}A_t$, quindi non ci rimane che verificare quali siano le condizioni sul parametro t affinché la matrice associata ad f abbia rango 2. La A_t è quadrata del quarto ordine. Sviluppiamo il suo determinante prima rispetto alla seconda colonna poi rispetto alla terza riga:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t & 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= t \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= t\left(1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \\
&= t((0-2) - 2(2t-1)) = t(-2-4t+2) = -4t^2.
\end{aligned}$$

Siccome ci interessano condizioni affinché $\mathrm{rk}A_t = 2$, certamente deve essere $\det A_t = 0$, altrimenti avremmo $\mathrm{rk}A_t = 4$. Ma $\det A_t = 0$ se e solo se $t = 0$. vediamo cosa succede per $t = 0$. La matrice A_0 diventa:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Esiste almeno un minore non nullo del secondo ordine. Per esempio quello determinato dalle prime due righe e dalle ultime due colonne. Usiamo il Teorema di Krönecker, orlando questo minore in tutti i modi possibili. Questi sarebbero quattro, potendo lavorare su due ulteriori righe e due ulteriori colonne. Ma una delle colonne è formata da zeri (la seconda), quindi possiamo trascurarla. Orlando con la prima colonna e terza riga e sviluppando rispetto alla prima riga, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -(0+1) + (2-1) = -1+1 = 0.
\end{aligned}$$

Orlando con la prima colonna e la quarta riga e sviluppando rispetto alla prima riga, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -(-2-0) + (0-2) = +2-2 = 0.
\end{aligned}$$

Tutti i minori del terzo ordine ottenuti orlando quello di partenza sono nulli. Il Teorema di Krönecker garantisce che non dobbiamo controllarne altri per poter affermare che $\mathrm{rk}A_0 = 2$. Quindi $\dim(\ker f) = 2$ se e solo se $t = 0$. ■

9.4.16. *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da:*

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = t\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + +t\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) = (t+1)\mathbf{e}_1 + (t+3)\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ f è un automorfismo e determinare negli altri casi la dimensione ed una base per $\ker f$.

Svolgimento. I coefficienti dei vettori della base canonica che compaiono ai secondi membri delle precedenti equazioni formano le colonne della matrice A associata ad f. Essa è quindi data da

$$A = \begin{bmatrix} t & 2 & t+1 \\ 2 & t & t+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

L'applicazione f è un automorfismo se e solo se è invertibile la matrice associata A, e questo avviene se e solo se $\det A \neq 0$. Siccome $\det A = t^2 - t - 6 = 0$ se e solo se $t = -2$ o $t = 3$, abbiamo che f è un automorfismo con $t \neq -2$ e $t \neq 3$. Sia ora $t = -2$. La matrice associata diventa:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

In questo caso $\mathrm{rk}A = 2$ (esistono minori del secondo ordine non nulli, mentre siamo nel caso in cui $\det A = 0$). Quindi $\dim(\mathrm{Im}f) = \mathrm{rk}A = 2$. Dall'Equazione Dimensionale abbiamo:

$$\dim(\ker f) = n - \dim(\mathrm{Im}f) = 3 - 2 = 1.$$

Per la determinazione di una base del nucleo, troviamo l'immagine di un generico vettore tramite la f e imponiamo che appartenga a $\ker f$. Se $\mathbf{x} = [x, y, z]^t \in \ker f$, allora $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sviluppando i calcoli ed uguagliando termine a termine otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

che ammette la terna $(10y, 7y, -6y)$ come soluzione. Quindi i vettori del nucleo sono tutti e soli quelli della forma:

$$\begin{bmatrix} 10y \\ 7y \\ -6y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix} = y\mathbf{u}.$$

Il vettore $\mathbf{u}$ è una base di $\ker f$. Se $t = 3$ si ragiona nello stesso modo. La matrice associata ad f diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\mathrm{rk}A = 2$ abbiamo che $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$. Sempre dall'Equazione Dimensionale otteniamo:

$$\dim(\ker f) = 3 - \dim(\mathrm{Im}f) = 3 - 2 = 1.$$

Per determinare una base del nucleo, come prima, imponiamo al generico vettore $\mathbf{x}$ di appartenere a $\ker f$. Ponendo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e sviluppando i calcoli, arriviamo al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + 6z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

che ammette la terna $(0, -2z, z)$ come soluzione. Il generico vettore di $\ker f$ ha la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = z\mathbf{v},$$

e $\{\mathbf{v}\}$ è una base del nucleo. ■

9.4.17. *Sia f l'applicazione lineare associata alla matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare una base per $\mathrm{Im} f$ *ed una per* $\ker f$.

Svolgimento. Le colonne della matrice associata ad f formano un insieme generatore per $\mathrm{Im} f$. Dobbiamo estrarre da questo una base. Il rango della matrice A ci indica quanti, fra le colonne, sono vettori indipendenti e, siccome il rango viene calcolato tramite un minore non nullo, ci dice anche quali sono questi vettori: quelli che contribuiscono a formare il minore in questione. Si osservi che il minore del secondo ordine individuato dalle prime due righe e colonne è $\neq 0$. Proviamo ad orlarlo nei due soli modi possibili, usando il Teorema di Krönecker. Se usiamo la terza colonna e sviluppiamo rispetto all'ultima riga, abbiamo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 5(2+1) + 3(-1-4) = 15 - 15 = 0. \end{aligned}$$

Usando la quarta colonna e sviluppando rispetto alla prima riga, abbiamo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= (-2-0) - 2(4-5) = -2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Quindi tutti i minori del terzo, ottenuti da quello di partenza d'ordine 2, sono nulli. Non occorre esaminarne altri, in quanto Krönecker garantisce che $\mathrm{rk}A = 2$. Le colonne che costituiscono il minore sono allora indipendenti e formano una base di $\mathrm{Im} f$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

e $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$. Per quanto riguarda il nucleo di f, determiniamo la forma generale di un vettore ad esso appartenente. Se $\mathbf{x} = [x, y, z, t]^t \in \ker f$, deve essere $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ma l'immagine di un vettore nell'applicazione f si ottiene moltiplicandolo a sinistra per A. Sviluppando i conti, otteniamo:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ 2x - y + z + t \\ 5x + 3z + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui, uguagliando termine a termine fra i due membri:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z + t = 0 \\ 5x + 3z + 2t = 0. \end{cases}$$

Il precedente sistema ammette come soluzione la quaterna $(3y-t, y, -5y+t, t)$, che fornisce il generico vettore di $\ker f$. Tutti e soli i vettori di $\ker f$ sono quelli della forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3y - t \\ y \\ -5y + t \\ t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3y \\ y \\ -5y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ t \end{bmatrix} = \\ &= y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= y\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Quindi i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ generano $\ker f$. Siccome sono indipendenti (la matrice che li ha come righe o colonne ha rango 2) sono una base di $\ker f$, da cui segue che $\dim(\ker f) = 2$. Un metodo alternativo per determinare la dimensione del nucleo è quello di utilizzare l'Equazione Dimensionale. Abbiamo precedentemente verificato che $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, quindi da $n = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$, con $n = 4$ abbiamo

$$4 = \dim(\ker f) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\ker f) = 2.$$

Ovviamente in questo modo possiamo determinare la dimensione del nucleo, ma non una sua base. ■

9.4.18. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da*

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 2x + 3y - 4z \\ x - 6y + 10z \end{bmatrix}.$$

Determinare nucleo ed immagine di f, la loro dimensione ed una loro base.

Svolgimento. La matrice associata all'applicazione lineare rispetto alle basi canoniche, è data da

$$A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Il determinante è nullo, mentre il minore ottenuto intersecando le prime due righe con le prime due colonne è non nullo. Quindi la matrice ha rango 2 e ciò fornisce la dimensione di $\operatorname{Im} f$.
Una base di tale sottospazio è formata dalle prime due colonne della matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.
Dall'equazione dimensionale $3 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$ ricaviamo $\dim(\ker f) = 1$.
Per ottenere una base del nucleo risolviamo il sistema omogeneo associato alla matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 6y + 10z = 0. \end{cases}$$

Si ottiene

$$x = -\frac{2}{5}z, \quad y = \frac{8}{5}z \quad \Rightarrow \quad \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$$

■

9.4.19. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da*

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - 3z \\ ax + (2-a)y + (a-4)z \end{bmatrix},$$

essendo a un parametro reale.

1. *Determinare, al variare di a in $\mathbb{R}$, il nucleo, l'immagine, le loro dimensioni ed una loro base.*
2. *Scrivere, per $a = 1$, la matrice che rappresenta f rispetto alle basi date da*

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Svolgimento.
(1) La matrice $A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ è data da

$$A_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ a & 2-a & a-4 \end{bmatrix}$$

La dimensione di $\mathrm{Im} f$ corrisponde al rango di tale matrice. Come si verifica facilmente, esso è 1 se $a = 1$ mentre è uguale a 2 per $a \neq 1$. In entrambi i casi una base dell'immagine di f si ricava considerando colonne indipendenti della matrice. Per esempio abbiamo

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{per } a = 1,$$

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2-a \end{bmatrix} \right\} \quad \text{per } a \neq 1.$$

Dall'equazione dimensionale ricaviamo anche che la dimensione del nucleo è 2 per $a = 1$, ed 1 per $a \neq 1$. Per determinare esplicitamente $\ker f$ nel caso $a = 1$ risolviamo il sistema seguente

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases},$$

le cui ∞^2 soluzioni descrivono il piano di equazione $x + y - 3z = 0$. Pertanto, in tale caso, una base di $\ker f$ si ricava considerando due vettori linearmente indipendenti appartenenti a tale piano, per esempio

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per determinare $\ker f$ se $a \neq 1$ dobbiamo risolvere il sistema seguente

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ ax + (2-a)y = (4-a)z. \end{cases}$$

Abbiamo allora le ∞^1 soluzioni date da

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 3z & 1 \\ (4-a)z & 2-a \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2-a \end{bmatrix}} = z$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 3z \\ a & (4-a)z \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2-a \end{bmatrix}} = 2z.$$

Pertanto, in tale caso, una base di $\ker f$ è data da

$$\mathcal{B}_{\ker f} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(2) Indichiamo con $[\mathcal{B}_1]$ la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, e con $[\mathcal{B}_2]$ la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_2$ alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Abbiamo allora

$$[\mathcal{B}_2]^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix},$$

e quindi, la matrice richiesta risulta

$$\begin{aligned} A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) &= [\mathcal{B}_2]^{-1} A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)[\mathcal{B}_1] = \\ &= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{13}{8} & 1 & -\frac{19}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

9.4.20. *Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $Pol_3(\mathbb{R})[x]$ lo spazio dei polinomi di grado $n \leq 3$ in x, a coefficienti reali. Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to Pol_3(\mathbb{R})[x]$ la seguente applicazione lineare*

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c + 2d)x^3 + (-b + 2d)x^2 + (a + b - c)x + a + b - 2c + 2d,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. *Determinare la dimensione di* $\mathrm{Im} f$, *e scrivere una sua base.*
2. *Determinare la dimensione di* $\ker f$, *e scrivere una sua base.*

Svolgimento.

1. La dimensione dell'immagine di una applicazione lineare è la caratteristica di una qualsiasi matrice che la rappresenta rispetto a due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ scelte nello spazio di partenza e di arrivo, rispettivamente. Assumiamo $\mathcal{B}_2 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ come base di $M_2(\mathbb{R})$, essendo $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ le matrici canoniche fondamentali, cioè

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assumiamo poi $\mathcal{B}_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ come base di $Pol_3(\mathbb{R})[x]$. Abbiamo allora

$$A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che $R_3 = R_1 - R_2$, cioè la terza riga è uguale alla differenza tra le prime due. Pertanto la caratteristica di $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ è al massimo 3. Considerando la sottomatrice $M = \{R_1, R_2, R_4\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$, ottenuta intersecando la prima, seconda e quarta riga con la prima, seconda e terza colonna, abbiamo $\det M = 1 \neq 0$, e quindi la caratteristica di $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ è esattamente 3, per cui $\dim(\mathrm{Im} f) = 3$.

L'immagine è quindi generata dai polinomi corrispondenti alle colonne C_1, C_2, C_3 di $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$, cioè

$$\begin{aligned} q(x) &= x^3 + x + 1, \\ r(x) &= -x^2 + x + 1 \\ s(x) &= -x^3 - x - 2. \end{aligned}$$

Pertanto una base di $\mathrm{Im} f$ è $\mathbf{B} = \{q(x), r(x), s(x)\}$, ed $\mathrm{Im} f = \{p(x) \in Pol_3(\mathbb{R})[x] : \ p(x) = \alpha q(x) + \beta r(x) + \gamma s(x), \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

2. Dall'equazione dimensionale $n = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ ricaviamo $\dim(\ker f) = 4 - \dim(\mathrm{Im} f) = 1$. Per determinare una base del nucleo, consideriamo il sistema omogeneo $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} a - c + 2d = 0 \\ -b + 2d = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b - 2c + 2d = 0 \end{cases}$$

Dalle considerazioni precedentemente svolte possiamo ridurre il sistema a quello formato dalla prima, seconda e quarta equazione, lasciando a, b, c come incognite principali ed assumendo d come parametro. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} a - c = -2d \\ -b = -2d \\ a + b - 2c = -2d \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2d \\ 2d \\ d \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = d\mathbf{v}$$

Pertanto $\ker f$ è generato dalla matrice corrispondente a $\mathbf{v}$ nella proiezione canonica inversa, data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$\ker f = \{dA : \ d \in \mathbb{R}\}.$$

■

9.4.21. *Sia $Pol_3(\mathbb{R})[x]$ lo spazio dei polinomi di grado $n \leq 3$ in x, a coefficienti reali. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $f : Pol_3(\mathbb{R})[x] \to M_2(\mathbb{R})$ la seguente applicazione lineare*

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} a + b - c & 2a + b - 3c - d \\ a - 2c - d & 3a + 2b - 4c - d \end{bmatrix},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. *Determinare la dimensione di* $\mathrm{Im} f$*, e scrivere una sua base.*

2. *Determinare la dimensione di* $\ker f$*, e scrivere una sua base.*

Svolgimento.

1. La dimensione dell'immagine di una applicazione lineare è la caratteristica di una qualsiasi matrice che la rappresenta rispetto a due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ scelte nello spazio di partenza e di arrivo, rispettivamente. Assumiamo $\mathcal{B}_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ come base di $Pol_3(\mathbb{R})[x]$, e $\mathcal{B}_2 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ come base di $M_2(\mathbb{R})$, essendo $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ le matrici canoniche fondamentali, cioè

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo allora

$$A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considerando la sottomatrice $M = \{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$, ottenuta intersecando la prima e la seconda riga con la prima e seconda colonna, abbiamo $\det M = -1 \neq 0$, e quindi la caratteristica di $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ è almeno 2. Orlando M in $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ abbiamo le quattro matrici $M_1 = \{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$, $M_2 = \{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_4\}$, $M_3 = \{R_1, R_2, R_4\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$ ed $M_4 = \{R_1, R_2, R_4\} \cap \{C_1, C_2, C_4\}$. È facile vedere che queste matrici hanno tutte determinante nullo. Di conseguenza la caratteristica di $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$ è 2, per cui $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$.

L'immagine è quindi generata dalle matrici corrispondenti alle prime due colonne di $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)$, date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto una base di $\mathrm{Im} f$ è $\mathbf{B} = \{A, B\}$, ed $\mathrm{Im} f = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \ M = \alpha A + \beta B,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2. Dall'equazione dimensionale $n = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ ricaviamo $\dim(\ker f) = 4 - \dim(\mathrm{Im} f) = 2$. Per determinare una base del nucleo, consideriamo il sistema omogeneo $A^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + b - 3c - d = 0 \\ a - 2c - d = 0 \\ 3a + 2b - 4c - d = 0 \end{cases}$$

Dalle considerazioni precedentemente svolte possiamo ridurre il sistema a quello formato dalle prime due equazioni, lasciando a, b come incognite principali ed assumendo c, d come parametri. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} a = 2c + d \\ b = -c - d \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2c + d \\ -c - d \\ c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$$

Pertanto $\ker f$ è generato dai polinomi corrispondenti a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ nella proiezione canonica inversa, dati da $p(x) = 2x^3 - x^2 + x$ e $q(x) = x^3 - x^2 + 1$, rispettivamente. Abbiamo quindi

$$\ker f = \{cp(x) + dq(x) : c, d \in \mathbb{R}\}.$$

■

9.4.22. *Sia $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinarne gli autovalori, sapendo che*

$$\det(A - 2I) = 0, \quad \det(A - I) = 0.$$

Svolgimento. Le radici del polinomio caratteristico $\chi(t) = \det(A - tI) = 0$ sono autovalori. Per ipotesi, questa equazione è soddisfatta proprio da $t_1 = 2$ e $t_2 = 1$. Essi sono pertanto gli autovalori di A. ■

9.4.23. *Sia $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinarne gli autovalori, sapendo che*

$$\det(A - 2I) = 1, \quad \det(A - I) = -2.$$

Svolgimento. Essendo A una matrice di ordine 2, il suo polinomio caratteristico è $\chi(t) = \det(A - tI) = t^2 + pt + q$. Le ipotesi dicono che $\chi(2) = 1$ e $\chi(1) = -2$, ovvero

$$\begin{cases} 4 + 2p + q = 1 \\ 1 + p + q = -2, \end{cases}$$

da cui $p = 0$ e $q = -3$. Quindi il polinomio caratteristico di A è $\chi(t) = t^2 - 3$, e le sue radici, $t_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, sono gli autovalori cercati. ■

9.4.24. *Sia $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non singolare. Determinare gli autovalori della matrice sapendo che* $\det(I - A) = 0$ *e che* $\det((A^{-1}(2I - A))) = 0$.

Svolgimento. Da $\det(I - A) = 0$, segue che $\lambda_1 = 1$ è un autovalore. Poiché $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \neq 0$, per il Teorema di Binet abbiamo:

$$\det((A^{-1}(2I - A))) = \det(A^{-1}) \cdot \det(2I - A) = 0,$$

ovvero $\det(2I - A) = 0$. Quindi anche $\lambda_2 = 2$ è un autovalore. ■

9.4.25. *Sia $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinarne gli autovalori, sapendo che* $\det(I - A) = 4$ *e* $\det(4I - A) = 1$.

Svolgimento. Essendo A una matrice di ordine 2, il suo polinomio caratteristico ha grado 2, ed è della forma $\chi(t) = \det(tI - A) = t^2 + pt + q$. Le ipotesi dicono che $\chi(1) = 4$ e $\chi(4) = 1$, ovvero

$$\begin{cases} 16 + 4p + q = 1 \\ 1 + p + q = 4, \end{cases}$$

da cui $p = -6$ e $q = 9$. Quindi il polinomio caratteristico di A è $\chi(t) = t^2 - 6t + 9$, e la sua radice, $t_{1,2} = 3$, di molteplicità 2, è l'autovalore cercato. ■

9.4.26. *Sia f un endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbf{V}$, tale che $f^2+f=0$. Dimostrare che $\mathbf{Spec} f \subseteq \{0,-1\}$.*

Svolgimento. Sia λ un autovalore di f. Detto $\mathbf{v}$ un suo autovettore, si ha $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Per l'ipotesi su f abbiamo allora:

$$\mathbf{0} = (f^2+f)(\mathbf{v}) = f^2(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} = (\lambda^2+\lambda)\mathbf{v}.$$

Essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dalla precedente catena di uguaglianze segue $\lambda^2 + \lambda = 0$. Pertanto $\lambda \in \{0,-1\}$. ■

9.4.27. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinarne autovalori e autovettori e stabilire se A è diagonalizzabile.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è $\chi(t) = \det(A-tI) = t(-t^2+t+6)$, le cui radici $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ e $t_3 = 3$ sono gli autovalori cercati. Siccome sono distinti, A è diagonalizzabile. Gli autovettori corrispondenti si determinano derivano dall'equazione $AX = tX$, dove $X = [x,y,z]^t$. Per $t_1 = 0$, $AX = \lambda X$ diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} 6y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -z. \end{cases}$$

L'autovettore corrispondente a $t_1 = 0$ è dunque $a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$. Quest'ultima condizione è essenziale, perché un autovettore, per definizione, non può essere nullo. Con conti analoghi, per $t_2 = -2$ troviamo $b \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $b \neq 0$ e, per $t_3 = 3$, $c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $c \neq 0$.
Una verifica alternativa si può fare ricordando che condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità è avere autovettori indipendenti. Infatti la matrice che ha come colonne i tre autovettori appena trovati ha il determinante diverso da zero, quindi gli autovettori sono linearmente indipendenti. ■

9.4.28. *Mostrare che la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo determinare una matrice B diagonale simile ad A e la relativa matrice di passaggio P.

Svolgimento. Poiché $\chi(t) = -t^3 + 9t^2 - 20t$, si ha $t_1 = 0$, $t_2 = 4$ e $t_3 = 5$ (radici del polinomio $\chi(t)$). Essendo distinti, sono regolari, quindi A è diagonalizzabile. Le matrici di passaggio hanno come colonne gli autovettori di A. Gli autovettori corrispondenti a t_1, t_2 e t_3 sono $a \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, rispettivamente, con $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Una matrice di passaggio è quindi la seguente:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

9.4.29. *Sia A la seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ k & 1 & -3 \\ -9 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

essendo k un parametro reale.

1. *Determinare lo spettro di A*
2. *Stabilire i valori di k per i quali A è diagonalizzabile.*
3. *Determinare, quando è possibile, una matrice P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

Svolgimento.
(1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 0 & 6 \\ k & 1-\lambda & -3 \\ -9 & 0 & 10-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \begin{cases} 1 \text{ soluzione doppia} \\ 4 \text{ soluzione semplice} \end{cases}$$

Pertanto abbiamo $\text{Spec}A = \{1, 1, 4\}$.

(2) Per studiare la diagonalizzabilità della matrice, dobbiamo studiare la regolarità degli autovalori. L'autovalore $\lambda = 4$ è semplice, quindi è regolare per ogni k. Per studiare la regolarità di $\lambda = 1$, calcoliamo la caratteristica di $A - 1 \cdot I$

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ k & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

La terza riga è multipla della prima ($R_3 = \frac{3}{2} R_2$) per ogni k. Se $k \neq 3$ la caratteristica di $A - 1 \cdot I$ è uguale a 2, quindi

$$m_g(1) = n - r(A - 1 \cdot I) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(1),$$

cioè la molteplicità geometrica m_g di 1 è diversa dalla molteplicità algebrica m_a di tale autovalore, che, quindi, non è regolare.
Per $k = 3$ abbiamo invece caratteristica 1, e quindi $m_g(1) = m_a(1) = 2$, per cui l'autovalore è regolare.
Di conseguenza, la matrice A ammette autovalori tutti regolari solo per $k = 3$, e quindi è diagonalizzabile solo per tale valore del parametro.

(3) Una matrice P che diagonalizza A esiste solo per $k = 3$. In corrispondenza di questo valore del parametro, calcoliamo gli autospazi associati ai due autovalori.

$$\lambda = 1 \ \Rightarrow \ \begin{cases} -6x + 6z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ -9x + 9z = 0 \end{cases}$$

Abbiamo pertanto la soluzione $x = z$, $\forall y$, e quindi

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{autospazio associato a } \lambda = 1$$

$$\lambda = 4 \ \Rightarrow \ \begin{cases} -9x + 6z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \\ -9x + 6z = 0 \end{cases}$$

Abbiamo pertanto la soluzione $x = -2y$, $z = -3y$, e quindi

$$E_4 = \left\{ \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ -3y \end{bmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{autospazio associato a } \lambda = 4.$$

Una matrice P che diagonalizza A ha come colonne le basi degli autospazi. Per esempio

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

■

9.4.30. *Sia A la seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ k-1 & k & -5 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

essendo k un parametro reale.

1. *Determinare, al variare di k in $\mathbb{R}$, lo spettro di A.*
2. *Studiare, al variare di k in $\mathbb{R}$, la diagonalizzabilità della matrice.*

Svolgimento.
(1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ k-1 & k-\lambda & -5 \\ -1 & 0 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (k-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-2)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = \begin{cases} k \\ 6 \\ 2 \end{cases}$$

Pertanto abbiamo $\mathrm{Spec} A = \{k, 2, 6\}$.

(2) Per studiare la diagonalizzabilità della matrice, dobbiamo studiare la regolarità degli autovalori. Se $k \neq 2, 6$ i tre autovalori sono semplici, quindi regolari, ed A è diagonalizzabile.
Se $k = 2$ abbiamo

$$A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La seconda riga è l'opposta della prima mentre la terza è uguale alla prima riga. Il rango di $A - 2 \cdot I$ è quindi uguale ad 1, e di conseguenza la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è

$$m_g(2) = 3 - r(A - 2 \cdot I) = 2,$$

uguale alla molteplicità algebrica m_a di tale autovalore, che, pertanto, è regolare. Di conseguenza, la matrice è diagonalizzabile anche per $k = 2$.
Sia ora $k = 6$. Abbiamo allora

$$A - 6 \cdot I = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso il rango è uguale ad 1, quindi

$$m_g(6) = 3 - r(A - 6 \cdot I) = 2,$$

uguale alla molteplicità algebrica m_a di tale autovalore, che, pertanto, è regolare. Di conseguenza, la matrice è diagonalizzabile anche per $k = 6$.
Riassumendo, la matrice è diagonalizzabile per ogni valore del parametro. ■

9.4.31. *Sia A la seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & a & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

essendo a un parametro reale.

1. *Determinare lo spettro di A*
2. *Stabilire i valori del parametro a per i quali A è diagonalizzabile.*

Svolgimento.
(1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ -4 & a-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda = \begin{cases} a \\ 1 \\ 4 \end{cases}$$

Pertanto abbiamo $\mathrm{Spec}A = \{a, 1, 4\}$.

(2) Per studiare la diagonalizzabilità della matrice, dobbiamo studiare la regolarità degli autovalori. Se $a \neq 1, 4$ i tre autovalori sono semplici, quindi regolari, ed A è diagonalizzabile.
Se $a = 1$ abbiamo

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terza colonna è multipla della prima ($C_3 = \frac{1}{2} C_2$), mentre la seconda è nulla. Quindi, il rango di $A - 1 \cdot I$ è uguale ad 1, e di conseguenza la molteplicità geometrica di **1** è

$$m_g(1) = 3 - r(A - 1 \cdot I) = 2,$$

uguale alla molteplicità algebrica m_a di tale autovalore, che, quindi, è regolare. Pertanto, la matrice è diagonalizzabile anche per $a = 1$.
Sia ora $a = 4$. Abbiamo allora

$$A - 4 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

In questo caso il rango è uguale a 2, quindi

$$m_g(4) = 3 - r(A - 4 \cdot I) = 1,$$

diversa dalla molteplicità algebrica m_a di tale autovalore, che, quindi, non è regolare. Pertanto, la matrice non è diagonalizzabile per $a = 4$.
Riassumendo, la matrice è diagonalizzabile per ogni valore di a diverso da 4. ■

9.4.32. *Stabilire se la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Calcoliamo gli autovalori di A. Dall'equazione $\det(A - tI) = t^3 - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4} = 0$, otteniamo $t_1 = -1$ e $t_{2,3} = \frac{1}{2}$. Quest'ultimo è un autovalore doppio. Quindi A è diagonalizzabile se e solo se $\frac{1}{2}$ è regolare. In questo caso ciò significa che $\mathrm{rk}(A - \frac{1}{2}I) = 3 - 2 = 1$. Siccome

$$\mathrm{rk}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{rk}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2,$$

l'autovalore $t = \frac{1}{2}$ non è regolare e A non è diagonalizzabile. ■

9.4.33. *Sia* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *una matrice tale che*

$$\det(A) = \det(2I - A) = 0.$$

Stabilire se A *è diagonalizzabile.*

Svolgimento. Poiché $\det(A) = 0$, $\lambda = 0$ è autovalore di A. Inoltre, da $\det(A - 2I) = 0$, segue che anche $\lambda = 2$ è un autovalore. Siccome A è una matrice di ordine 2, e possiede due autovalori distinti, tali autovalori risultano semplici e regolari. Quest'ultima è una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità. ■

9.4.34. *Determinare i valori del parametro* $h \in \mathbb{R}$ *in modo che la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ -1 & 2 & h \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sia diagonalizzabile.

Svolgimento. Determiniamo gli autovalori di A. Dall'equazione

$$\det(A - tI) = -t(h-t)(2-t) = 0,$$

otteniamo $t_1 = 0$, $t_2 = 2$ e $t_3 = h$. Per $h \neq 0, 2$, gli autovalori sono distinti, quindi regolari e la matrice è diagonalizzabile. Nei casi $h = 0$, oppure $h = 2$, t_1 o t_2 sono doppi. Per la diagonalizzabilità occorre dunque stabilire la regolarità di t_1 o t_2, ovvero se $\operatorname{rk}(A - t_{1,2}I) = 1$.

Sia $h = 0$. Il rango di $A - 0I$ è 2, quindi $t = 0$ non è regolare e A non è diagonalizzabile.

Sia $h = 2$. Il rango di $A - 2I$ è 1, quindi $t = 2$ è regolare e A è diagonalizzabile.

Concludendo, la matrice A è diagonalizzabile se e solo se $h \neq 0$. ∎

9.4.35. *Determinare tutti i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ tali che la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2h & 0 & 0 \\ h & 2h & 1 \end{bmatrix}$$

sia diagonalizzabile

Svolgimento. La matrice A è triangolare inferiore, quindi i suoi autovalori sono i termini principali, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = 1$. Per la diagonalizzabilità dobbiamo verificare se l'autovalore doppio $\lambda = 1$ è regolare. Questo significa che $\operatorname{rk}(A - 1 \cdot I) = n - m_a(1) = 3 - 2 = 1$. Siccome

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2h & -1 & 0 \\ h & 2h & 0 \end{bmatrix},$$

abbiamo $\operatorname{rk}(A - I) = 1$ se e solo se $\begin{vmatrix} 2h & -1 \\ h & 2h \end{vmatrix} = 0$, ovvero $4h^2 + h = 0$. Dunque A è diagonalizzabile se e solo se $h = 0$ oppure $h = -\frac{1}{4}$. ∎

9.4.36. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

È possibile che A e B rappresentino lo stesso endomorfismo (rispetto a basi diverse)?

Svolgimento. Due matrici rappresentano lo stesso endomorfismo se e solo se sono simili. Detti $\chi_A(t) = -t^3 + t^2 + t - 1$ e $\chi_B(t) = -t^3 + (h+2)t^2 - 2ht + h - 1$ i polinomi caratteristici di A e B, rispettivamente, affinché le due matrici siano simili è necessario che $\chi_A(t) = \chi_B(t)$. Per il principio d'identità dei polinomi, i coefficienti di t di $\chi_A(t)$ e $\chi_B(t)$ devono essere ordinatamente proporzionali. Il rango della matrice

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & h+2 & -2h & h-1 \end{bmatrix},$$

le cui righe sono i coefficienti dei due polinomi, deve essere 1. Il minore costruito con le prime due colonne è nullo se e solo se $h = -1$. Però questo valore non annulla il minore determinato dalla prima e dall'ultima colonna quindi $\mathrm{rk}(C) = 2$ per ogni valore di h. Le matrici A e B, non essendo mai simili, non possono in alcun caso rappresentare lo stesso endomorfismo. ■

9.4.37. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con h parametro reale. Stabilire se A è diagonalizzabile per ogni valore di h e se esiste un valore di h tale che A sia ortogonalmente simile ad una matrice diagonale D.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è $\chi(t) = (1-t)(t^2 - 2t + 1 - h)$. Gli autovalori sono quindi $t_1 = 1$ e $t_{2,3} = 1 \pm \sqrt{h}$. Essendo questi ultimi dipendenti dal parametro h, non è vero che A è diagonalizzabile per ogni h. Ad esempio, per $h = 0$, l'autovalore $t = 1$ è triplo, quindi A è diagonalizzabile se e solo se $t = 1$ è regolare, ovvero se $\mathrm{rk}(A - I) = 0$. Ma $\mathrm{rk}(A - I) = 1$.

Osserviamo che, per $h = 1$, la A è reale e simmetrica, quindi ortogonalmente simile ad una matrice diagonale reale. Non è detto, però, che non esistano altri valori di h che soddisfino le richieste del problema, magari con D complessa. Se A è diagonalizzabile tramite una matrice di passaggio ortogonale U, significa che esiste una matrice diagonale D tale che $A = U^t DU$. Trasponendo entrambi i membri di quest'ultima uguaglianza, otteniamo

$$A^t = U^t D^t \left(U^t\right)^t = U^t DU = A.$$

Quindi, coincidendo con la sua trasposta, A è simmetrica. Questo accade se e solo se $h = 1$, che rappresenta quindi l'unico valore che risolve il problema. Si noti che non abbiamo potuto usare le proprietà delle matrici reali e simmetriche, perché nelle ipotesi non viene specificato se la matrice D è reale o meno. Si è invece dovuto verificare direttamente che, come conseguenza della diagonalizzabilità con matrice di passaggio ortogonale, la A è simmetrica. ■

9.4.38. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h+1 & h & 1 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se esiste un valore del parametro reale h tale che A sia simile ad una matrice reale simmetrica B avente come polinomio caratteristico $\chi_B(t) = t^3 - 2t^2 + t$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di B è $\chi_B(t) = t^3 - 2t^2 + t = t(t^2 - 2t + 1) = 0$, perciò gli autovalori sono $t_1 = 0$, $t_{2,3} = 1$. Osserviamo che B è reale e simmetrica, quindi diagonalizzabile. In altre parole, rispetto alla relazione di similitudine, la classe $[B]$ è formata da tutte e sole le matrici simili a $\mathrm{diag}(0, 1, 1)$. Il polinomio caratteristico di A è

9.4.41. *Dimostrare che una matrice di proiezione è simmetrica.*

Svolgimento. Si consideri un sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbb{R}^n$, e sia A la matrice avente come colonne i vettori di una base di $\mathbf{W}$. Sia P_A la corrispondente matrice di proiezione. Come è noto, date due matrici conformabili X, Y risulta $(XY)^t = Y^t X^t$. Inoltre, se Q è una matrice quadrata, vale la formula $(Q^t)^{-1} = (Q^{-1})^t$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} P_A^t &= (A(A^tA)^{-1}A^t)^t = \\ &= (A^t)^t\left((A^tA)^{-1}\right)^t A^t = \\ &= A\left((A^tA)^t\right)^{-1} A^t = \\ &= A(A^tA)^{-1}A^t = P_A, \end{aligned}$$

per cui P_A è una matrice simmetrica. □

9.4.42. *Si considerino le matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Siano λ_A e λ_B autovalori di A e B, rispettivamente, entrambi associati all'autovettore $\mathbf{x}$. Dimostrare che $\mathbf{x}$ è un autovettore sia di AB che di BA, associato all'autovalore $\lambda_A\lambda_B$.*

Svolgimento. Essendo $(\mathbf{x}, \lambda_A)$ e $(\mathbf{x}, \lambda_B)$ due coppie autovalore-autovettore per le matrici A e B, rispettivamente, abbiamo $A\mathbf{x} = \lambda_A\mathbf{x}$ e $B\mathbf{x} = \lambda_B\mathbf{x}$. Dobbiamo verificare la validità di due uguaglianze analoghe per le matrici AB e BA, ovvero

$$\begin{aligned} (AB)\mathbf{x} &= \lambda_A\lambda_B\mathbf{x} \\ (BA)\mathbf{x} &= \lambda_A\lambda_B\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

Da $A\mathbf{x} = \lambda_A\mathbf{x}$, moltiplicando entrambi i membri per λ_B, otteniamo $\lambda_B(A\mathbf{x}) = \lambda_B(\lambda_A\mathbf{x})$, ovvero

$$A(\lambda_B\mathbf{x}) = \lambda_A\lambda_B\mathbf{x}. \tag{9.4.2}$$

Essendo $B\mathbf{x} = \lambda_B\mathbf{x}$, sostituendo nel primo membro di (9.4.2), otteniamo la prima delle (9.4.1). ■

9.4.43. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificare che A non è diagonalizzabile per alcun valore del parametro $h \in \mathbb{R}$, e che non è mai simile a B.

Svolgimento. La matrice A è triangolare inferiore. I suoi autovalori coincidono quindi con i termini principali: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = 2$. Essendo quest'ultimo un autovalore doppio, la A è diagonalizzabile se e solo se $\lambda = 1$ è regolare ($\lambda = 0$ è semplice, quindi automaticamente regolare). Nella matrice

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -h & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

abbiamo il minore $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -h & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, indipendentemente dal valore di h. Quindi $\mathrm{rk}(A-2I) = 2 > 1$ e $\lambda = 2$ non è regolare. La matrice A non è mai diagonalizzabile. Invece B è reale simmetrica, dunque diagonalizzabile. Non è pertanto possibile che le due matrici siano simili. ■

9.4.44. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} h & h-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare gli $h \in \mathbb{R}$ tali che A non sia diagonalizzabile.

Svolgimento. Gli autovalori di A coincidono con i suoi termini principali, in quanto A è triangolare superiore, e sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = h$. Se $h \neq 1, 2$, i tre autovalori sono distinti, quindi regolari, e la A è diagonalizzabile. Poniamo $h = 1$. L'autovalore $\lambda = 1$, doppio, è regolare se e solo se $\mathrm{rk}(A - I) = 1$. Siccome questo è proprio ciò che accade, anche per $h = 1$ la A è diagonalizzabile. Per $h = 2$, il rango di

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è 2, quindi $\lambda = 2$ è un autovalore doppio non regolare. Pertanto A non è diagonalizzabile solo per $h = 2$. ■

9.4.45. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verificare che A e B sono simili per ogni $h \in \mathbb{R}$ e stabilire se esistono valori di h per i quali siano ortogonalmente simili.

Svolgimento. La matrice A è triangolare superiore, mentre B è diagonale, entrambe con gli stessi termini principali, che coincidono con i loro autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, e $\lambda_3 = 1$. Essendo distinti, sono regolari. Quindi A e B, entrambe diagonalizzabili con stessi autovalori, sono simili, il tutto indipendentemente dalla scelta del valore di h. La B è una matrice diagonale e reale. Affinché la A sia ortogonalmente simile a B, dev'essere reale simmetrica. Questo avviene se e solo se $h = 0$. ■

9.4.46. *Sia $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $(A + I)^2 = 2(A + I)$. Stabilire se A è diagonalizzabile.*

Svolgimento. Per ipotesi $(A + I)^2 - 2(A + I) = O$, quindi $(A + I)(A + I - 2I)$, ovvero

$$(A + I)(A - I) = O. \tag{9.4.3}$$

Per il Teorema di Binet, $\det(A + I) \cdot \det(A - I) = 0$. Possono verificarsi tre casi.

(i) Se $\det(A+I)=0$ e $\det(A-I)\neq 0$, esiste la matrice $(A-I)^{-1}$. Moltiplicando entrambi i membri della (9.4.3) a destra, otteniamo $A+I=O$, ovvero $A=-I$. Perciò A, essendo scalare, è diagonale, quindi diagonalizzabile.

(ii) Se $\det(A+I)\neq 0$ e $\det(A-I)=0$, esiste la matrice $(A+I)^{-1}$. Moltiplicando la (9.4.3) a sinistra, in entrambi i membri, otteniamo $A-I=O$, cioè $A=I$. Come nel punto (i), A è diagonalizzabile.

(iii) Se $\det(A+I)=\det(A-I)=0$, i numeri $\lambda=\pm 1$ sono gli autovalori di A ed essendo distinti sono regolari. Quindi A è diagonalizzabile.

■

9.4.47. *Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da*

$$f([x,y,z]^t)=[x+y,x+z,y+z]^t\,.$$

Stabilire se f è diagonalizzabile e calcolarne autovalori e autovettori.

Svolgimento. La matrice associata ad f è:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $\chi_f(t)=\chi_A(t)=\det(A-tI)=(1-t)(t-2)(t+1)=0$ se e solo se $t=-1,1,2$. Gli autovalori sono semplici, quindi regolari ed f è diagonalizzabile. Gli autovettori associati a $t=-1$, $t=1$ e $t=2$ sono le autosoluzioni dei sistemi $AX=tX$, con $t=-1,1,2$ e $X=[x,y,z]^t$. Ovvero dei tre sistemi:

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+y=-x\\x+z=-y\\y+z=-z,\end{cases}$$

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+y=x\\x+z=y\\y+z=z,\end{cases}$$

$$A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+y=2x\\x+z=2y\\y+z=2z,\end{cases}$$

le cui soluzioni sono, rispettivamente:

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad c\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

con $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ■

9.4.48. *Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da*

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x - 4z \\ 5x - y - 5z \\ x - z \end{bmatrix}$$

1. *Determinare la matrice caratteristica, il polinomio caratteristico e lo spettro di f.*

2. *Determinare gli autospazi associati ad f, la loro dimensione ed una base per ognuno di essi.*

3. *Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale f è rappresentato dalla matrice seguente*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Svolgimento.

1. Determiniamo innanzitutto la matrice caratteristica $M = A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda I_3$ associata all'endomorfismo f

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & -4 \\ 5 & -1-\lambda & -5 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Sappiamo che il polinomio caratteristico di f è $\chi(\lambda) = \det M$. Quindi

$$\chi(\lambda) = \det M = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & -4 \\ 5 & -1-\lambda & -5 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$$
$$= (4-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 4(-1-\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(-1-\lambda)(\lambda-3).$$

Lo spettro di f si ottiene determinando le radici del polinomio caratteristico, e quindi

$$\chi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 & \text{semplice} \\ -1 & \text{semplice} \\ 3 & \text{semplice} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Spec}\, f = \{0, -1, 3\}.$$

2. In corrispondenza dell'autovalore $\lambda = 0$ abbiamo

$$\lambda = 0 \quad \to \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 5x - y - 5z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases}$$

Pertanto, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 0$ risulta

$$E_0 = \ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim E_0 = 1$, ed una base di E_0 è data da

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per $\lambda = -1$ abbiamo

$$\lambda = -1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x - 4z = 0 \\ 5x - 5z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = z = 0, \ \forall y.$$

Pertanto, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$ risulta

$$E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim E_{-1} = 1$, ed una sua base è data da

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per $\lambda = 3$ risulta

$$\lambda = 3 \ \rightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 4z = 0 \\ 5x - 4y - 5z = 0 \\ x - 4z = 0 \end{cases} \ \Rightarrow x = 4z, \, y = \frac{15}{4} z.$$

Pertanto, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 3$ risulta

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 4z \\ \frac{15}{4} z \\ z \end{bmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim E_3 = 1$, ed una sua base è data da

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Determiniamo innanzitutto gli autovalori della matrice A. Poiché A è una matrice triangolare i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale, e quindi $\boldsymbol{SpecA} =$

$\mathbf{Spec}\, f = \{0, -1, 3\}$. Poiché esistono tre autovalori distinti (cioè di molteplicità algebrica 1), sia la matrice A che la matrice $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ sono diagonalizzabili, e la matrice diagonale D è la stessa. Quindi A è simile ad $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$, e quindi esiste una base rispetto alla quale l'endomorfismo è rappresentato dalla matrice A. In particolare, dalla transitività della relazione di similitudine tra matrici, si ricava che, se P è la matrice di passaggio da $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ a D, e Q è la matrice di passaggio da A a D, la base rispetto alla quale f è rappresentato dalla matrice A è formata dalle colonne della matrice PQ^{-1}. ■

9.4.49. *Si stabilisca se le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

rappresentano lo stesso endomorfismo in $\mathbb{R}^3$*, rispetto a basi opportune.*

Svolgimento. Due matrici rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse se e solo se sono simili. Siccome A e B sono entrambe triangolari, hanno come autovalori i termini principali, ovvero, per entrambe, lo spettro è $\{1, 2\}$. Poiché A è addirittura diagonale, B è simile ad A se e solo se è diagonalizzabile. L'autovalore 2 è doppio. Siccome $\mathrm{rk}(B - 2I) = 2$, si ha $m_g(2) + m_a(2) = 4$, quindi 2 non è regolare per B. Non essendo diagonalizzabile, non può essere simile ad A. ■

9.4.50. *Si consideri l'endomorfismo* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice*

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. *Determinare la matrice caratteristica, il polinomio caratteristico e lo spettro di* f.
2. *Determinare gli autospazi associati ad* f*, la loro dimensione ed una base per ognuno di essi.*
3. *Stabilire se* $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ *è simile alla matrice data da*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento.

1. Determiniamo innanzitutto la matrice caratteristica $M = A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda I_3$ associata all'endomorfismo f

$$M = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Sappiamo che il polinomio caratteristico di f è $\chi(\lambda) = \det M$. Quindi

$$\chi(\lambda) = \det M = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3.$$

Lo spettro di f si ottiene determinando le radici del polinomio caratteristico, e quindi

$$\chi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 3 & \text{semplice} \\ 1 & \text{doppio} \end{cases} \Rightarrow \quad \boldsymbol{Spec} f = \{1, 1, 3\}.$$

2. In corrispondenza dell'autovalore $\lambda = 3$ abbiamo

$$\lambda = 3 \quad \to \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x. \end{cases}$$

Pertanto, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 3$ risulta

$$E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim E_3 = 1$, ed una base di E_3 è data da

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Analogamente, per $\lambda = 1$ abbiamo

$$\lambda = 1 \quad \to \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = z, \ \forall y.$$

Pertanto, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$ risulta

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}, \, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

In particolare, $\dim E_1 = 2$, ed una base di E_1 è data da

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

matrice con un unico autovalore t è diagonalizzabile se e solo se è scalare di tipo tI. In questo caso dovrebbe essere $A_1 = 1 \cdot I_3 = I_3$, cosa impossibile (cfr. Esercizio 9.4.51). ■

9.4.53. *Siano dati i vettori* $\mathbf{v}_1 = [6, -2, 0]^t$, $\mathbf{v}_2 = [0, 1, 1]^t$, $\mathbf{v}_3 = [2, 4, -4]^t$, $\mathbf{w}_1 = [1, -1, 0]^t$, $\mathbf{w}_2 = [0, 2, 2]^t$, $\mathbf{w}_3 = [1, 1, 0]^t$ *di* $\mathbb{R}^3$, *con* $h \in \mathbb{R}$. *Vedere se esiste un endomorfismo* f *di* $\mathbb{R}^3$ *tale che* $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ *per* $i = 1, 2, 3$. *Stabilire inoltre quali dei* $\mathbf{v}_i$ *sono autovettori di* f.

Svolgimento. Osserviamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$. Dall'algebra lineare sappiamo che esiste un unico endomorfismo f verificante le condizioni assegnate. Per terminare l'esercizio non è necessario calcolare esplicitamente f. Per definizione di autovettore basta infatti vedere se $f(\mathbf{v}_i) = \lambda \mathbf{v}_i$ per qualche $\lambda \neq 0$. Questa condizione vale solo per $i = 2$, con $\lambda = 2$. Perciò $\mathbf{v}_2$ è un autovettore, mentre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ non lo sono. ■

9.4.54. *Sia* $f \neq 0$ *un endomorfismo nilpotente di* $\mathbf{V}$. *Dimostrare che* $\mathbf{Spec}\ f = \{\mathbf{0}\}$.

Svolgimento. Per $\lambda \neq 0$, sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\lambda(f)$: mostriamo che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Per ipotesi si ha $f^m = 0$ per qualche m. Allora $\mathbf{0} = f^m(\mathbf{v}) = \lambda^m \mathbf{v}$. Essendo $\lambda^m \neq 0$, ne segue $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pertanto l'autospazio relativo a $\lambda \neq 0$ si riduce al solo vettore nullo. Lo spettro di f contiene quindi, al più, 0. È ora sufficiente mostrare che 0 è effettivamente un autovalore.

Supponiamo ora che $f^{m-1} \neq 0$: ciò non è restrittivo, basta prendere come m il minimo intero che annulla la corrispondente potenza di f. Il sottospazio $\mathbf{W} = \operatorname{Im} f^{m-1}$ non si riduce allora al solo vettore nullo. Inoltre se $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ si ha $\mathbf{w} = f^{m-1}(\mathbf{v})$ per qualche $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Allora $f(\mathbf{w}) = f(f^{m-1}(\mathbf{v})) = f^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{w} \in \ker f$: segue $\mathbf{W} \subseteq \ker f$. Poiché $\ker f$ non è altro che l'autospazio relativo a 0, ciò prova che questo non si riduce al vettore nullo. Esistono quindi autovettori relativi a 0, dunque $0 \in \mathbf{Spec}\ f = \{\mathbf{0}\}$. ■

9.4.55. *Due matrici* A *e* B *di ordine 3 hanno autovettori* $\mathbf{r} = [1, 0, 1]^t$, $\mathbf{s} = [1, 1, 1]^t$ *e* $\mathbf{t} = [0, 0, 1]^t$. *Verificare che tutte le matrici* A, B, AB *e* BA *sono diagonalizzabili.*

Svolgimento. Condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di una matrice d'ordine n è avere n autovettori indipendenti. In questo caso dobbiamo verificare che il determinante della matrice P, le cui colonne sono gli autovettori, non sia nullo. Infatti

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Quindi sia A che B sono diagonalizzabili. Con lo stesso ragionamento dell'Esercizio 9.4.42, si dimostra che $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ sono autovettori, corrispondenti ai medesimi autovalori, pure per AB e BA. Quindi anche queste matrici sono diagonalizzabili. ■

9.4.56. *Una matrice reale invertibile* A *di tipo* $(2, 2)$ *soddisfa le condizioni*

$$\det(\det(A)I - A) = 0, \quad \det(-\det(A)I - A) = 0.$$

Calcolare gli autovalori di A *e stabilire se è diagonalizzabile.*

Svolgimento. Per ipotesi, i numeri $\det(A)$ e $-\det(A)$ sono radici del polinomio caratteristico, quindi sono (tutti) gli autovalori di A. Non possono coincidere perché A è invertibile, quindi, essendo distinti, sono regolari ed A è diagonalizzabile. ■

9.4.57. *Verificare che ogni matrice quadrata di ordine 2 tale che $A^2 + I = O$ è diagonalizzabile nel campo complesso.*

Svolgimento. Dall'ipotesi $A^2 + I = O$, abbiamo

$$(A + i \cdot I)(A - i \cdot I) = O. \tag{9.4.4}$$

Quindi, per il Teorema di Binet, $\det((A + i \cdot I)) \cdot \det((A_i \cdot I)) = 0$. Consideriamo tre casi.

(i) Se $\det(A + i \cdot I) = 0$ e $\det(A - i \cdot I) \neq 0$, allora la matrice $A - i \cdot I$ è invertibile. Moltiplicando a destra per la sua inversa entrambi i membri della (9.4.4), abbiamo $A + i \cdot I = O$, quindi $A = -i \cdot I$ è scalare (quindi diagonalizzabile).

(ii) Se $\det(A + i \cdot I) \neq 0$ e $\det(A - i \cdot I) = 0$, la matrice $A + i \cdot I$ è invertibile. Moltiplicando a sinistra per la sua inversa entrambi i membri della (9.4.4), abbiamo $A - i \cdot I = O$, quindi $A = i \cdot I$, matrice scalare, è diagonalizzabile.

(iii) Se $\det((A + i \cdot I)) = \det((A - i \cdot I)) = 0$, i numeri $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$ sono autovalori di A, perchè radici del polinomio caratteristico, sono regolari, perché semplici, quindi A è diagonalizzabile.

■

9.4.58. *Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ tali che le due matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix}$$

siano simili.

Svolgimento. La matrice B è triangolare superiore. I suoi termini principali $t_1 = 1, t_2 = 5$ e $t_3 = -h$ coincidono con gli autovalori. Le radici del polinomio $\det(A - tI) = (1-t)(t-5)(t+1)$, ovvero $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ e $t_3 = 5$, sono gli autovalori di A. Condizione necessaria affinché A e B siano simili è che abbiano gli stessi autovalori. Questo è vero se e solo se $h = 1$. In questo caso entrambe le matrici hanno gli stessi autovalori distinti, quindi regolari. Sono entrambe diagonalizzabili e simili alla stessa matrice diagonale. Quindi sono simili. ■

9.4.59. *Determinare tutte le matrici che ammettono $\mathbf{x}_1 = [1, 1]^t$ e $\mathbf{x}_2 = [1, -1]^t$ come autovettori.*

Svolgimento. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

la matrice che ammette $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ come autovettori. Essendo questi indipendenti A è diagonalizzabile e la matrice di passaggio ha come colonne $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ stessi:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Detti λ_1 e λ_2 gli autovalori rispettivi di $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, si ha

$$A = P^{-1}DP,$$

con $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, ovvero $PA = DP$:

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{9.4.5}$$

Ricordando che $\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 = a + d$, dalla (9.4.5), otteniamo

$$\begin{cases} a+c = \lambda_1 \\ b+d = \lambda_1 \\ a-c = \lambda_2 \\ b-d = -\lambda_2 \\ a+d = \lambda_1 + \lambda_2, \end{cases}$$

da cui $a = d$ e $b = c$. Quindi

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Il fatto che A sia simmetrica è in accordo col risultato dell'Esercizio 9.5.3, dato che $U = \frac{1}{\sqrt{2}}P$ è ortogonale. ■

9.4.60. *Stabilire se le seguenti matrici sono simili:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Sono entrambe triangolari superiori, con gli stessi termini principali, quindi con gli stessi autovalori. Esaminiamo la regolarità dell'autovalore doppio $\lambda = 1$. Per A, $\mathrm{rk}(A - I) = 1$, quindi $\lambda = 1$ è regolare ed A è diagonalizzabile. Siccome $\mathrm{rk}(B - I) = 2$, l'autovalore $\lambda = 1$ non è regolare per la matrice B, che quindi non è diagonalizzabile. Essendo una diagonalizzabile, l'altra no, le matrici A e B non possono essere simili. ■

9.4.61. *Mostrare che le seguenti matrici sono simili*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e calcolare una matrice di passaggio.

Svolgimento. Sono entrambe triangolari, con gli stessi autovalori doppi, coincidenti coi termini principali. Verifichiamo la regolarità degli autovalori. Per A, siccome $\text{rk}(A-I)=1\neq 0$, $\lambda=1$ non è regolare. **Quindi** A non è diagonalizzabile. Lo stesso discorso vale per B. Per stabilire se A e B sono simili, costruiamo direttamente la matrice di passaggio
$$P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
tale che $PA=BP$. Quest'ultima uguaglianza determina il sistema
$$\begin{cases} a=a \\ 2a+b=b \\ c=a+c \\ 2c+d=b+d, \end{cases}$$
da cui $a=0$, $b=2c$, $c=c$ e $d=d$. La matrice è quindi:
$$P=\begin{bmatrix} a & 2c \\ c & d \end{bmatrix}.$$
La similitudine si ha se P è invertibile, ovvero se e solo se $\det(P)=2c^2\neq 0$, cioè $c\neq 0$. ■

9.5 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 5

9.5.1. *Rappresentare analiticamente il sottospazio* $\mathbf{W}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *generato dal vettore* $[-1,3,2]^t$.

Svolgimento. In base al Teorema 5.1 dobbiamo imporre che sia uguale ad 1 la caratteristica della seguente matrice
$$A=\begin{bmatrix} -1 & x \\ 3 & y \\ 2 & z \end{bmatrix}.$$
Possiamo annullare entrambi gli orlati del minore $[-1]$ ottenuto considerando la prima riga e la prima colonna.
Pertanto abbiamo
$$\begin{cases} \det\begin{bmatrix} -1 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}=0 \\ \\ \det\begin{bmatrix} -1 & x \\ 2 & z \end{bmatrix}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x+z=0. \end{cases}$$
Abbiamo così ottenuto la rappresentazione analitica del sottospazio $\mathbf{W}$. Esso è ottenuto come intersezione di due piani, e fornisce quindi le equazioni cartesiane della retta dello spazio $\mathbb{R}^3$, passante per l'origine e per il punto $P(-1,3,2)$. ■

9.5.2. *Rappresentare analiticamente il sottospazio di* $\mathbb{R}^3$ *generato dai vettori* $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 2]^t$ *e* $\mathbf{v}_2 = [2, -4, 1]^t$.

Svolgimento. Riferendoci al Teorema 5.1, dobbiamo considerare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -4 & y \\ 2 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Essendo $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ indipendenti, essi generano un sottospazio di dimensione 2, la cui equazione viene ottenuta imponendo che il determinante di A sia nullo. Di conseguenza si ricava l'equazione $8x + 3y - 4z = 0$, che rappresenta analiticamente il sottospazio. Abbiamo così ottenuto l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$, passante per l'origine e generato dai vettori considerati.

9.5.3. *Dimostrare che se* $P = aU$, *con* U *matrice ortogonale, e* D *è diagonale, la matrice* PDP^{-1} *è simmetrica.*

Svolgimento. Abbiamo $PDP^{-1} = aUDa^{-1}U^t = UDU^t$. Essendo $\left(UDU^t\right)^t = UDU^t$, si ha quanto sopra affermato. ∎

9.5.4. *Sia A una matrice ad elementi reali avente n righe e k colonne. Si dimostri che, se A ha rango massimo, allora A ammette matrice pseudoinversa di Moore-Penrose.*

Svolgimento. La matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A esiste se $Q = A^tA$ è non singolare. A meno di scambiare A con A^t possiamo sempre pensare che sia $k \leq n$, e quindi, per ipotesi, $\text{rk}(A) = k$. Scrivendo A come accostamento di colonne abbiamo $A = [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|...|\mathbf{x}_k]$, e quindi $Q = [q_{ij}] = [\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle]$. Siano $\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_k$ le colonne di Q, e supponiamo che Q sia singolare. Ciò significa che esiste una combinazione lineare $\sum_{j=1}^{k} a_j\mathbf{q}_j = \mathbf{0}$, con $a_1, a_2 ..., a_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli. Posto $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{v}$, il vettore $\mathbf{v}$ appartiene al sottospazio lineare $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k)$ generato dalle colonne di A. Poiché $\mathbf{q}_j = [\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_j\rangle, \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_j\rangle, ..., \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j\rangle]^t$, sfruttando anche la commutatività del prodotto scalare, abbiamo

$$\begin{aligned}
&a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + ... + a_k\mathbf{q}_k = \\
&a_1[\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle, \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1\rangle, ..., \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1\rangle]^t + \\
&+a_2[\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle, \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle, ..., \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_2\rangle]^t + \\
&+...+ \\
&+a_k[\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k\rangle, \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_k\rangle, ..., \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k\rangle]^t = \\
&= [\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1\rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_2\rangle, ..., \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_k\rangle] = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza $\mathbf{v}$ appartiene anche al sottospazio $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k)^\perp$, e quindi $\mathbf{v} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Poiché $\text{rk}(A) = k$, i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k$ sono linearmente indipendenti, per cui deve essere $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$, il che è assurdo. Pertanto la matrice Q è non singolare. ∎

9.5.5. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino il vettore $\mathbf{v} = [3, -1, 2]^t$, ed il sottospazio $\mathbf{U}$ generato dai vettori $\mathbf{x}_1 = [1, 4, 1]^t$ ed $\mathbf{x}_2 = [2, -1, 1]^t$. Determinare la proiezione di $\mathbf{v}$ su U e la lunghezza della proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{U}^\perp$.*

Svolgimento. Indichiamo con U la matrice associata al sottospazio U, le cui colonne sono date dai vettori $\mathbf{x}_1$ ed $\mathbf{x}_2$. La proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{U}$ si ottiene moltiplicando il vettore, a sinistra, per la matrice di proiezione $P_U = UR$, essendo R la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di U. Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
&P_U = UR = U(U^tU)^{-1}U^t \\
&U^tU = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \\
&(U^tU)^{-1} = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \\
&R = (U^tU)^{-1}U^t = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 8 & 23 & 7 \\ 37 & -14 & 19 \end{bmatrix} \\
&P_U = UR = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 23 & 7 \\ 37 & -14 & 19 \end{bmatrix} = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 82 & -5 & 45 \\ -5 & 106 & 9 \\ 45 & 9 & 26 \end{bmatrix} \\
&P_U\mathbf{v} = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 82 & -5 & 45 \\ -5 & 106 & 9 \\ 45 & 9 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{341}{107} \\ -\frac{103}{107} \\ \frac{178}{107} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

La lunghezza della proiezione di $\mathbf{v}$ su $U^\perp$ si può ottenere moltiplicando il vettore, a sinistra, per la matrice $I - P_U$. Abbiamo quindi

$$
(I - P_U)\mathbf{v} = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} 25 & 5 & -45 \\ 5 & 1 & -9 \\ -45 & -9 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{107} \\ -\frac{4}{107} \\ \frac{36}{107} \end{bmatrix}
$$

$$
\|(I - P_U)\mathbf{v}\| = \sqrt{\frac{400 + 16 + 1296}{(107)^2}} = \frac{4}{\sqrt{107}}
$$

Si noti che $\mathbf{v}$ e le sue proiezioni sui sottospazi ortogonali devono verificare il teorema di Pitagora. In effetti abbiamo

$$
\|(I - P_U)\mathbf{v}\|^2 + \|P_U\mathbf{v}\|^2 = \frac{16}{107} + \left(\left(\frac{341}{107}\right)^2 + \left(\frac{103}{107}\right)^2 + \left(\frac{178}{107}\right)^2 \right) = \frac{16}{107} + \frac{1498}{107} = 14 = \|\mathbf{v}\|^2.
$$

■

9.5.6. *Determinare la proiezione del vettore $\mathbf{v} = [2, 1, 0, -1]^t \in \mathbb{R}^4$ sul sottospazio $\mathbf{W}^2$ di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{x}_1 = [1, -1, 1, 0]^t$ ed $\mathbf{x}_2 = [0, 1, 0, 1]^t$ e sul sottospazio ad esso ortogonale.*

Svolgimento. La matrice generata dai vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Costruiamo innanzitutto la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A. Abbiamo quindi

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = (A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

La matrice di proiezione P_A è data da

$$P_A = AR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Possiamo a questo punto proiettare $\mathbf{v}$ sul sottospazio considerato, ed abbiamo

$$P_A \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

La proiezione di $\mathbf{v}$ sul sottospazio ortogonale al precedente è invece data da

$$P_A^{\perp} \mathbf{v} = (I - P_A)\mathbf{v} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

■

9.5.7. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcolare la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A, e verificare il risultato.

Svolgimento. Consideriamo innanzitutto il prodotto $Q = A^t \cdot A$

$$Q = A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det Q = 56 \neq 0$, la matrice Q è non singolare, e quindi la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A esiste effettivamente. Abbiamo poi

$$Q^{-1} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene

$$(A^t A)^{-1} A^t = Q^{-1} A^t = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 12 & 20 & 4 \\ -8 & -4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che la matrice trovata è effettivamente la matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A

$$(A^t A)^{-1} A^t \cdot A = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 12 & 20 & 4 \\ -8 & -4 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

9.5.8. *Determinare la matrice di proiezione sul sottospazio π di $\mathbb{R}^3$ avente equazione $x + 2y - 3z = 0$.*

Svolgimento. Poiché π è descritto da una sola equazione, esso è un sottospazio bidimensionale di $\mathbb{R}^3$. Ricavando $x = -2y + 3z$ dall'equazione di π, osserviamo che una sua base si ottiene, per esempio, dando ad y, z i valori $1, 0$ e $0, 1$. Abbiamo quindi la base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

La matrice A associata a tale base risulta

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi

$$Q = A^tA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = (Q)^{-1}A^t = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P_A = AR = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

■

9.5.9. *Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti P dello spazio per i quali la norma del vettore $\overrightarrow{OP}$ è uguale all'area del parallelogramma che $\overrightarrow{OP}$ forma con il vettore $\mathbf{w} = [1, 0, 1]$.*

Svolgimento. L'area del parallelogramma formato dai vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\mathbf{w}$ è uguale alla norma del prodotto vettoriale $\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w}$. Abbiamo

$$\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [y, z - x, -y],$$

e quindi $\|\overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{w}\| = \sqrt{2y^2 + (z-x)^2}$.
Imponendo che ciò sia uguale a $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ si ottiene l'equazione $y^2 - 2xz = 0$.

■

9.5.10. *Sia f_h l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_h) = \begin{pmatrix} 4 & h & 2 \\ 0 & h & 0 \\ 2 & h & 1 \end{pmatrix},$$

essendo h un parametro reale.

1. *Determinare, al variare di h, lo spettro di f_h.*
2. *Determinare per quali valori di h l'endomorfismo f_h è diagonalizzabile.*
3. *Determinare una matrice M ortogonale speciale che diagonalizza f_h nel caso in cui l' endomorfismo sia simmetrico.*

Svolgimento.

1. Il polinomio caratteristico $\chi(\lambda) = \det(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_h) - \lambda I) = (\lambda - h)(\lambda^2 - 5\lambda)$, per cui $Spec(f_h) = \{h, 0, 5\}$.

2. Per $h \neq 0, 5$ f_h ammette autovalori semplici, quindi regolari, ed è pertanto diagonalizzabile. Per $h = 0$ l'autovalore $\lambda = 0$ è doppio. Osserviamo che la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_0)$ è simmetrica, quindi f_0 è un endomorfismo simmetrico (la base canonica è ortonormale), e quindi è diagonalizzabile. Per $h = 5$ l'autovalore $\lambda = 5$ è doppio, e la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_h) - 5I$ ha rango 2, quindi E_5 ha dimensione $3 - 2 = 1$, per cui $m_g(5) \neq m_a(5)$, ed f_5 non è diagonalizzabile.

3. L'endomorfismo f_h è simmetrico se e solo se $h = 0$. In tal caso gli autospazi sono dati da

$$E_0 : M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_0) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2x + z = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2x \end{bmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$E_5 = E_0^{\perp} \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{bmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Una base di autovettori è data da $\mathcal{B} = \{[1, 0, -2]^t, [0, 1, 0]^t, [2, 0, 1]^t\}$. Osserviamo che i due vettori della base di E_0 sono già ortogonali tra loro, quindi una matrice ortogonale che diagonalizza $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_0)$ si ottiene semplicemente normalizzando i vettori di $\mathcal{B}$. Disponendo poi le colonne in maniera che il determinante sia uguale ad 1 si ottiene una matrice ortogonale speciale, per esempio

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

■

9.5.11. *Si considerino i vettori* $\mathbf{a} = [3, -1, -1]$, $\mathbf{b} = [4, 1, -6]$, $\mathbf{c} = [-2, 1, 1]$. *Calcolare* $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ *e stabilire se l'angolo da esso formato con il vettore* $[1, 1, 1]$ *è acuto, retto oppure ottuso.*

Svolgimento. Calcolando i prodotti vettoriali opportuni abbiamo i seguenti risultati

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0, -1, 1]$$

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [7, 8, 6]$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} = [-14, 7, 7]$$

$$\langle (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}), [1, 1, 1] \rangle = 0 \quad \Rightarrow \text{ l'angolo tra i due vettori è retto.}$$

■

9.5.12. *Nello spazio* $\mathbb{R}^3$ *si considerino i punti* $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 3)$, $C(3, -1, 0)$. *Calcolare l'area del triangolo* ABC.

Svolgimento. Consideriamo i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ paralleli ai segmenti orientati $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, rispettivamente. Abbiamo allora $\mathbf{v} = [2, 0, -1]$ e $\mathbf{w} = [3, -2, -3]$. L'area del triangolo ABC è uguale all'area del triangolo determinato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, la quale è uguale alla metà del parallelogramma formato da tali vettori. Pertanto risulta

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\| = \frac{1}{2}\left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\|[-2, 3, -4]\| = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

■

9.5.13. *Si consideri il parallelepipedo obliquo determinato dai vettori* $\mathbf{a} = [1, 4, 1]$, $\mathbf{b} = [2, -1, 1]$ *e* $\mathbf{c} = [3, -1, 2]$. *Calcolare le lunghezze delle altezze del parallelepipedo obliquo descritto dai vettori* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *relativamente alle facce* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *ed* $\mathbf{a}, \mathbf{c}$.

Svolgimento. L'altezza relativa ad una faccia si può ottenere dividendo il volume V del parallelepipedo per l'area della faccia. Abbiamo quindi

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right| = |-4| = 4$$

$$h_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{4}{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|} = \frac{4}{\sqrt{107}}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = [9, 1, -13]$$

$$h_{\mathbf{a},\mathbf{c}} = \frac{4}{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}\|} = \frac{4}{\sqrt{251}}.$$

■

9.5.14. *Si considerino i vettori* $\mathbf{a} = [1, 0, 1]$, $\mathbf{b} = [2, -1, 3]$, $\mathbf{c} = [-2, 1, 0]$.

1. *Determinare la lunghezza della proiezione di* $\mathbf{a}$ *sulla retta contenente* $\mathbf{b}$.
2. *Stabilire se l'angolo tra* $\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{c}$ *è acuto, retto oppure ottuso.*
3. *Calcolare il volume del parallelepipedo obliquo descritto da* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
4. *Determinare l'area della faccia descritta da* $\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{c}$.
5. *Calcolare l'altezza del parallelepipedo relativa alla faccia descritta da* $\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{c}$.

Svolgimento.

1.
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| |\cos \widehat{\mathbf{ab}}| = \|\mathbf{a}\| \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{|2 + 0 + 3|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

2.
$$\cos \widehat{\mathbf{bc}} = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle}{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|} = \frac{-4 - 1 + 0}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{70}} < 0 \;\Rightarrow\; \widehat{\mathbf{bc}} \text{ ottuso}$$

3.
$$\text{Volume}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = |2 - 2 - 3| = 3$$

4.
$$\text{Area}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\| =$$

$$= \|[-3, -6, 0]\| = \sqrt{9 + 36 + 0} = 3\sqrt{5}$$

5.

$$h_{\mathbf{b},\mathbf{c}} = \frac{\text{Volume}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\text{Area}(\mathbf{b},\mathbf{c})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

■

9.5.15. *Si considerino i punti $A(-1,2,3)$ e $B(1,0,0)$. Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti P dello spazio per i quali l'angolo $A\hat{P}B$ è uguale a $\frac{\pi}{3}$.*

Svolgimento. Possiamo osservare che i punti P richiesti sono quelli per i quali il coseno dell'angolo tra le rette AP e BP vale $\frac{1}{2}$. Sia $\mathbf{a}$ il vettore parallelo al segmento AP dato da $\mathbf{a} = [x_P - x_A, y_P - y_A, z_P - z_A] = [x+1, y-2, z-3]$. Analogamente, sia $\mathbf{b}$ il vettore parallelo al segmento BP dato da $\mathbf{b} = [x_P - x_B, y_P - y_B, z_P - z_B] = [x-1, y, z]$. Per la definizione di prodotto scalare abbiamo

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|,$$

da cui,

$$\begin{aligned} &(x+1)(x-1) + y(y-2) + z(z-3) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando otteniamo l'equazione

$$\begin{aligned} &4(x^2 - 1 + y^2 - 2y + z^2 - 3z)^2 = \\ &= [(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2][(x-1)^2 + y^2 + z^2]. \end{aligned}$$

■

9.5.16. *Si consideri il tetraedro descritto dai vettori $\overrightarrow{OA} = [0,1,2]$, $\overrightarrow{OB} = [1,0,1]$, $\overrightarrow{OC} = [-1,2,0]$. Calcolare il volume e le aree delle superfici delle facce.*

Svolgimento. Il volume di un tetraedro è la terza parte del volume del prisma obliquo generato dagli stessi vettori. Quindi abbiamo

$$\text{Volume} = \frac{1}{6}\left\|\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\rangle\right\| = \frac{1}{6}\left\|\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{6}|3| = \frac{1}{2}.$$

Poiché le facce di un tetraedro sono triangolari, l'area di ogni faccia è la metà del modulo del prodotto vettoriale dei due vettori che la descrivono. Pertanto si ha

$$\text{Area}\,(OAB) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|[1,2,-1]\| = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{Area}\,(OAC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|[-4,-2,1]\| = \frac{\sqrt{21}}{2},$$

$$\text{Area}\,(OBC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|[-2,-1,2]\| = \frac{3}{2},$$

$$\text{Area}\,(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{bmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\|[3,3,0]\| = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

■

9.5.17. *Si consideri il parallelepipedo obliquo descritto in Figura 9.1*

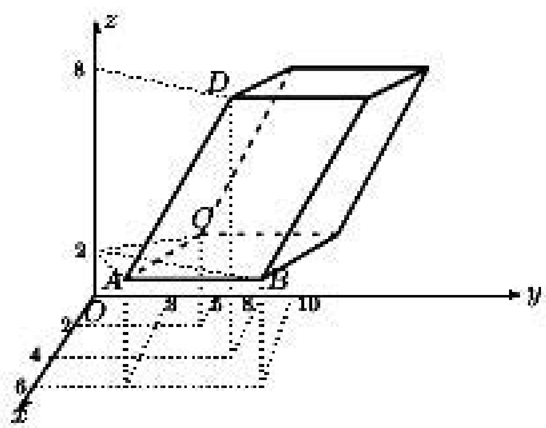


Figura 9.1: il parallelepipedo dell'Esercizio 9.5.17.

Determinare il volume e l'area della superficie totale.

Svolgimento. Dall'analisi della figura si ricava che i punti A, B, C, D hanno coordinate

$$A(6,3,2), \;\; B(6,10,2), \;\; C(2,5,2), \;\; D(4,8,8).$$

Il volume del parallelepipedo è uguale al valore assoluto del prodotto misto $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\rangle$ dei tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ corrispondenti alle tre dimensioni del parallelepipedo. Per esempio possiamo prendere $\mathbf{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. Abbiamo allora

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle = \det \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 168.$$

Per calcolare la superficie totale bisogna sommare l'area delle sei facce. L'area di una faccia è il modulo del prodotto vettoriale dei due vettori che la descrivono. Pertanto abbiamo tre facce con le seguenti aree

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 7 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \|[0, 0, 28]\| = 28,$$

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right\| = \|[42, 0, 14]\| = 14\sqrt{10},$$

$$\|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right\| = \|[12, 24, -16]\| = 4\sqrt{61}.$$

Poichè le facce sono a due a due uguali si ha

$$\text{Area totale} = 2 \cdot (28 + 14\sqrt{10} + 4\sqrt{61}),$$

il che fornisce l'area della superficie totale del parallelepipedo considerato. ■

9.5.18. *Si consideri il parallelepipedo obliquo descritto dai vettori* $\overrightarrow{OA} = [1, 1, 1]$, $\overrightarrow{OB} = [-1, 2, 5]$, $\overrightarrow{OC} = [0, 3, 2]$. *Calcolare il volume e le aree delle superfici delle facce.*

Svolgimento. Il volume si calcola mediante il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori, per cui

$$\text{Volume} = \left| \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} \rangle \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right| = |-12| = 12.$$

L'area di una faccia è il modulo del prodotto vettoriale dei due vettori che la descrivono. Pertanto si ha

$$\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right\| = \|[3, -6, 3]\| = \sqrt{54},$$

$$\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right\| = \|[-1, -2, 3]\| = \sqrt{14},$$

$$\|\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}\| = \left\| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right\| = \|[-11, 2, -3]\| = \sqrt{134}.$$

■

9.5.19. *Si consideri il tetraedro descritto in Figura 9.2.*

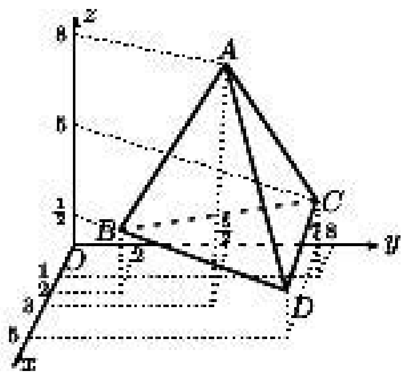


Figura 9.2: il tetraedro dell'Esercizio 9.5.19.

(a) Determinare la direzione del lato BD.

(b) Determinare la lunghezza del lato BC.

(c) Calcolare il volume del tetraedro.

Svolgimento.

(a) Il lato BD è parallelo al vettore $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$. Pertanto la sua direzione risulta $\left[5,7,\frac{1}{2}\right]-\left[2,2,\frac{1}{2}\right]=[3,5,0]$.

(c) La lunghezza del lato BC risulta

$$\overline{BC}=\sqrt{(2-1)^2+(2-8)^2+\left(\frac{1}{2}-5\right)^2}=\frac{\sqrt{229}}{2}.$$

(d) Il volume di un tetraedro è uguale alla terza parte del volume del prisma obliquo generato da tre lati non complanari del tetraedro, per esempio dai lati AB, AC, ed AD. Il volume di un prisma a base triangolare è la metà del volume del parallelepipedo obliquo generato dagli stessi lati, per cui

$$\text{Volume Tetraedro}=\frac{1}{3}\text{Volume Prisma}=\frac{1}{6}|\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\rangle|,$$

con $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ dati da

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left[-1,-\frac{1}{2},-\frac{15}{2}\right],$$

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left[-2, \frac{11}{2}, -3\right],$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \left[2, \frac{9}{2}, -\frac{15}{2}\right].$$

Sviluppando il determinante che fornisce il prodotto misto si ottiene $\frac{753}{4}$, e quindi

$$\text{Volume tetraedro} = \frac{753}{24}.$$

■

9.6 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 6

9.6.1. *Stabilire la posizione reciproca tra le rette r ed s di equazioni*

$$r \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, \qquad s \begin{cases} x = 1 - q \\ y = -1 + 2q \\ z = 3 + q. \end{cases}$$

Svolgimento. Due rette nello spazio possono essere parallele, secanti o sghembe. Sono parallele se i rispettivi parametri direttori sono proporzionali tra loro.
In questo esercizio i parametri direttori sono $3, 1, 4$ per la retta r, e $-1, 2, 1$ per la retta s. Il rapporto tra i parametri corrispondenti non è fisso, cioè $\frac{3}{-1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{4}{1}$, le due rette non sono parallele. Vediamo allora se sono secanti. Se ciò fosse dovrebbe esistere un punto $P = r \cap s$. Le coordinate di P dovrebbero verificare sia le equazioni di r che quelle di s, cioè dovrebbe esistere un valore t_0 del parametro t ed un valore q_0 del parametro q, per cui

$$\begin{cases} x_P = 2 + 3t_0 = 1 - q_0 \\ y_P = t_0 = -1 + 2q_0 \\ z_P = -1 + 4t_0 = 3 + q_0 \end{cases}$$

Questo conduce ad un sistema di tre equazioni nelle due sole incognite t_0 e q_0. Se questo sistema ammette soluzione allora questa fornisce il punto P, e le rette sono secanti. Altrimenti il sistema non ammette soluzione, cioè r ed s non si intersecano.

Scriviamo il sistema in maniera che tutte le incognite siano nei primi membri e tutti i termini noti nei secondi membri

$$\begin{cases} 3t_0 + q_0 = -1 \\ t_0 - 2q_0 = -1 \\ 4t_0 - q_0 = 4 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le prime due equazioni si ottiene $4t_0 - q_0 = -2$, che è chiaramente in contraddizione con la terza equazione. Pertanto il sistema non ammette soluzioni, e le due rette non si intersecano.
Le rette r ed s non sono quindi nè parallele nè secanti, per cui sono sghembe. ■

Osservazione L'esercizio può anche essere risolto osservando che non esiste alcun piano che possa contenere entrambe le retta date. Questo equivale a dire che, presi due punti $A \in r$ e $B \in s$ risulta

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \neq 0,$$

essendo a, b, c i parametri direttori di r ed a', b', c' quelli di s.
Nel nostro caso possiamo prendere per esempio i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(1, -1, 3)$, e si ha

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 42 \neq 0,$$

il che conferma che le due rette date sono sghembe tra loro. ■

9.6.2. *Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per i punti*

$$A(1, 0, -1), \ B(0, 1, 2), \ C(-1, 1, 1).$$

Svolgimento. Possiamo utilizzare le formule ottenute nell' Esempio 3 a pag. 169. Si perviene così alla seguente condizione

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando il calcolo otteniamo $x + 4y - z - 2 = 0$, che è l'equazione richiesta. ■

9.6.3. *Si considerino i punti* $A(1, -1, 2)$ *e* $B(3, 2, 5)$.
Scrivere l'equazione del piano contenente il parallelogramma di lati $\overrightarrow{OA}$ *ed* $\overrightarrow{OB}$, *e calcolare l'area del parallelogramma stesso.*

Svolgimento. Il piano richiesto è quello che passa per l'origine e per i punti A e B. La sua equazione è la seguente

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si ottiene $-9x + y + 5z = 0$.
L'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{OA}$ ed $\overrightarrow{OB}$ è invece fornita dalla norma del prodotto vettoriale di questi vettori. Si ha

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{bmatrix} = [-9, 1, 5],$$

la cui norma risulta uguale a $\sqrt{81+1+25} = \sqrt{107}$.
Osservazione. Il prodotto vettoriale di due vettori fornisce un terzo vettore che è perpendicolare al piano formato dai primi due. Questo implica che le componenti del prodotto vettoriale coincidono con i coefficienti di x, y, z nell'equazione del piano determinato dai due vettori. ■

9.6.4. *Nello spazio* $\mathbb{R}^3$ *si considerino i punti* $A(1,-1,1)$, $B(0,1,3)$, $C(3,-1,0)$. *Calcolare l'area del triangolo* ABC.

Svolgimento. Possiamo risolvere l'esercizio in due maniere diverse. Il primo metodo è quello che abbiamo seguito nella risoluzione dell'Esercizio 9.5.12. Ritroviamo ora il risultato considerando il tetraedro avente base ABC e vertice nell'origine. Il suo volume è uguale alla terza parte del volume del prisma obliquo generato dai lati OA, OB, ed OC. Il volume di un prisma a base triangolare è la metà del volume del parallelepipedo obliquo generato dagli stessi lati, per cui

$$\text{Volume Tetraedro} = \frac{1}{3}\text{Volume Prisma} = \frac{1}{6}|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \rangle|,$$

dove $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = [1,-1,1]$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = [0,1,3]$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = [3,-1,0]$. Pertanto abbiamo

$$\text{Volume Tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-9| = \frac{3}{2}.$$

Sappiamo anche che il volume di un tetraedro è uguale alla terza parte del prodotto tra l'altezza h e l'area del triangolo ABC della base. L'altezza è la distanza dell'origine dal piano $\pi : -2x + 3y - 4z + 9 = 0$ contenente i vertici A, B, C

$$h = d(O, \pi) = \frac{|9|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{9}{\sqrt{29}}.$$

Pertanto abbiamo

$$\text{Volume Tetraedro} = \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\text{Area(ABC)}\frac{9}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad \text{Area(ABC)} = \frac{\sqrt{29}}{2},$$

che fornisce l'area richiesta. ■

9.6.5. *Scrivere le equazioni normali della retta passante per il punto* $P(1,2,-1)$ *e perpendicolare alla retta*

$$s \begin{cases} x = 2 - q \\ y = -1 + 2q \\ z = 3 + q. \end{cases}$$

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che il punto P non appartiene alla retta s, poiché $x_P = 1$ si ottiene per $q = 1$, il che però fornisce $y = 1 \neq y_P$.
Pertanto la retta richiesta è unica. Per determinarla, consideriamo il piano passante per P e perpendicolare ad s. Questo ha equazione del tipo $-x + 2y + z + d = 0$, dove d si ricava imponendo il passaggio per P. Sostituendo le coordinate risulta $-1 + 4 - 1 + d = 0$, cioè $d = -2$. Si ottiene pertanto l'equazione $-x + 2y + z - 2 = 0$.
Troviamo ora il punto H in cui questo piano interseca la retta s, risolvendo la seguente equazione

$$-(2 - q) + 2(-1 + 2q) + 3 + q - 2 = 0,$$

da cui $q = \dfrac{1}{2}$. Pertanto il punto H ha coordinate $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{7}{2}\right)$.
Abbiamo quindi

$$PH : \frac{x-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z+1}{\frac{7}{2}+1} \Rightarrow 2(x-1) = \frac{2-y}{2} = \frac{2}{9}(z+1),$$

il che fornisce l'equazione della retta richiesta. ■

9.6.6. *Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per* $A(1, 2, 3)$ *e perpendicolare alla retta*

$$r \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Innanzitutto troviamo i parametri direttori della retta r. Essi possono essere ricavati determinando l'equazione parametrica di r. A questo proposito, attribuiamo ad una delle indeterminate il significato di parametro, ed esplicitiamo le due equazioni di α rispetto alle altre indeterminate.
Poiché il determinante dei coefficienti di y e z è diverso da zero, possiamo porre $x = t$, e risulta

$$r \begin{cases} x = t \\ y = -4t \\ z = -3t. \end{cases}$$

Pertanto la direzione di r è descritta dal vettore $\mathbf{v} = [1, -4, -3]$. Le componenti di $\mathbf{v}$ sono anche i parametri direttori dei piani ortogonali alla retta r. L'equazione di un generico piano perpendicolare ad r è pertanto $x - 4y - 3z + d = 0$. Imponendo il passaggio per il punto A si ottiene $d = 16$, per cui $x - 4y - 3z + 16 = 0$ è l'equazione del piano richiesto. ■

■

9.6.9. *In* $\mathbb{R}^3$*, si considerino il piano* $\pi : x-4y-4z+1=0$ *e la retta* $r : 2x = \frac{2-y}{2} = \frac{1-2z}{4}$.

(a) Dimostrare che r *è perpendicolare a* π.

(b) Scrivere il coseno dell'angolo formato da r *con l'asse* x.

Svolgimento.

(a) La retta r non viene assegnata con la scrittura abituale

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},$$

per cui i denominatori non forniscono immediatamente i parametri direttori. Per determinarli, scriviamo le tre frazioni date nella maniera seguente

$$2x = \frac{x-0}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2-y}{2} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow b = -2,$$

$$\frac{1-2z}{4} = \frac{2z-1}{-4} = \frac{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}{-4} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2} \Rightarrow c = -2.$$

Quindi una terna di parametri direttori di r è $\frac{1}{2}, -2, -2$, oppure $1, -4, -4$ volendo eliminare i denominatori.

Di conseguenza $r \perp \pi$, poiché una terna di parametri direttori è uguale ai coefficienti di x, y, z nell'equazione del piano.

(b) Normalizzando il vettore $[1, -4, -4]$ si ha il versore

$$\left[\frac{1}{\sqrt{33}}, \frac{-4}{\sqrt{33}}, \frac{-4}{\sqrt{33}}\right],$$

le cui componenti forniscono i coseni direttori di r. In particolare, la prima componente rappresenta il coseno dell'angolo formato da r con l'asse x.

■

9.6.10. *Scrivere le equazioni della retta* r*, parallela ai piani* $\pi_1 : x-y-3z+1=0$ *e* $\pi_2 : 2x+y-z-2=0$*, e passante per il punto* $P(-1,2,-4)$.

Svolgimento. La condizione di parallelismo tra la retta r ed il piano π_1 è data da $a - b - 3c = 0$.
La condizione di parallelismo tra la retta r ed il piano π_2 è data da $2a + b - c = 0$.
Mettendo a sistema le due condizioni si ricava $a = \frac{4}{3}c$ e $b = -\frac{5}{3}c$, per cui la direzione di r è descritta da un qualsiasi vettore del tipo $\mathbf{v} = \left[\frac{4}{3}c, -\frac{5}{3}c, c\right]$, con $c \neq 0$. Prendiamo, per esempio, $c = 3$, ed imponendo il passaggio per il punto P abbiamo

$$r \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 - 5t \\ z = -4 + 3t, \end{cases}$$

che forniscono le equazioni parametriche della retta richiesta. ■

9.6.11. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $P(1, -2, 2)$ e la seguente retta*

$$r \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della retta s perpendicolare ad r, passante per P e parallela al piano $\pi : x - y + 3z - 1 = 0$.

Svolgimento. Una generica retta passante per il punto P ha equazioni normali date da

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y+2}{b} = \frac{z-2}{c}.$$

Le richieste di perpendicolarità ad r e di parallelismo a π si traducono analiticamente nel seguente sistema

$$\begin{cases} -2a + b + 2c = 0 \\ a - b + 3c = 0. \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $a = 5c$ e $b = 8c$. Pertanto, una terna di parametri direttori è $5, 8, 1$, e le equazioni normali della retta s risultano

$$s : \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{8} = z - 2.$$

■

9.6.12. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino il piano $\pi : 2x - 3y + 2z - 1 = 0$ e la seguente retta*

$$r \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

(a) *Verificare che r interseca π e scrivere le coordinate del punto di intersezione.*

(b) *Determinare una terna di parametri direttori della proiezione ortogonale di r su π.*

Svolgimento.

(a) Sostituiamo nell'equazione del piano i valori di x, y, z forniti dalle equazioni parametriche di r. Otteniamo l'equazione $2(1-t)-3(2+t)+2(-1+3t)-1=0$, la quale ammette soluzione $t=7$, il che implica che la retta ed il piano si intersecano.

Le coordinate del punto di intersezione tra la retta ed il piano si ottengono sostituendo il valore $t=7$, precedentemente determinato, nelle equazioni parametriche di r. Si ottiene $P(-6,9,20)$.

(b) Esprimiamo innanzitutto r come intersezione di due piani. Ricavando $t=1-x$ dalla prima equazione parametrica e sostituendo il risultato nelle altre due si ha

$$r\begin{cases} x+y-3=0 \\ 3x+z-2=0. \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno r ha equazione $x+y-3+\lambda(3x+z-2)=0$, cioè $(1+3\lambda)x+y+\lambda z-3-2\lambda=0$. Imponendo la condizione di perpendicolarità con il piano π si ottiene $2(1+3\lambda)-3+2\lambda=0$, da cui ricaviamo $\lambda=\dfrac{1}{8}$. Sostituendo nell'equazione del fascio questo valore di λ, e svolgendo i calcoli, otteniamo σ : $11x+8y+z-26=0$.

La proiezione ortogonale di r su π è data da

$$\begin{cases} 2x-3y+2z-1=0 \\ 11x+8y+z-26=0. \end{cases}$$

Posto, per esempio, $y=q$, si ottiene

$$\begin{cases} 2x+2z=1+3q \\ 11x+z=26-8q \\ y=q, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x=\frac{51}{20}-\frac{19}{20}q \\ y=q \\ z=-\frac{41}{20}+\frac{49}{20}q. \end{cases}$$

Una terna di parametri direttori è $-\dfrac{19}{20}, 1, \dfrac{49}{20}$, oppure $-19, 20, 49$.

■

9.6.13. *Si consideri la retta r di equazioni parametriche*

$$r\begin{cases} x=2-3q \\ y=-1+q \\ z=3-q, \end{cases}$$

Calcolare il coseno degli angoli che la retta r forma con gli assi cartesiani.

Svolgimento. Una terna di parametri direttori di r è fornita dalle componenti del vettore $\mathbf{r} = [-3, 1, -1]$. Normalizzando questo vettore si ha il versore associato alla retta, le cui componenti sono i coseni degli angoli che la retta forma con gli assi cartesiani. Questi sono quindi dati da

$$\cos\widehat{rx} = -\frac{3}{\sqrt{11}} \quad \cos\widehat{ry} = \frac{1}{\sqrt{11}} \quad \cos\widehat{rz} = -\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

■

9.6.14. *Scrivere l'equazione del piano contenente le due rette r ed s di equazioni*

$$r\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}, \qquad s\begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Svolgimento. Stabiliamo innanzitutto la posizione reciproca delle due rette. Esprimendo anche r in forma parametrica, si ha

$$r\begin{cases} x = q \\ y = q \\ z = -1 + q. \end{cases}$$

Dall'analisi dei parametri direttori si deduce che r ed s non sono parallele.
Controlliamo se sono sghembe calcoliando il seguente determinante

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

essendo A un punto comodo di r e B un punto comodo di s. Per esempio possiamo considerare $A(1, 1, 0)$ (ottenuto ponendo $q = 1$) e $B(-1, 3, 1)$ (ottenuto ponendo $t = 1$), il che fornisce

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Pertanto le due rette non sono sghembe, e quindi, non essendo parallele, sono secanti. Esiste pertanto un piano che le contiene entrambe. Questo si ottiene considerando il fascio di piani che contiene una delle due rette, per esempio r, ed imponendo il passaggio per un punto scelto a piacere su s. Si ha quindi

$$\mathcal{F}_r : (x - y) + \lambda(x - z - 1) = 0 \text{ (fascio di piani per } r).$$

Imponendo che $B \in \mathcal{F}$ si ha $\lambda = -\frac{4}{3}$. Sostituendo e semplificando si trova che il piano richiesto ha equazione $x + 3y - 4z - 4 = 0$. ■

9.6.15. *Si considerino, nello spazio, le rette r ed s di equazioni*

$$r\begin{cases} x = 1 \\ y = 3, \end{cases} \qquad s\begin{cases} x = 2z \\ y = 2. \end{cases}$$

Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti dello spazio dai quali le rette r ed s vengono proiettate in due rette ortogonali del piano xy.

Svolgimento. Innanzitutto, procediamo come si è visto nell'Esempio 5 di pag. 186 per determinare le proiezioni delle rette r ed s sul piano xy. In questo caso il centro di proiezione è un generico punto $P(a, b, c)$ dello spazio. Il fascio di piani di sostegno r ha equazione $x - 1 + \lambda(y - 3) = 0$. Imponendo il passaggio per P ricaviamo $\lambda = \frac{1-a}{b-3}$. Quindi, la proiezione di r sul piano xy ha equazioni

$$\begin{cases} x - 1 + \frac{1-a}{b-3}(y-3) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

ed in forma parametrica si ha

$$\begin{cases} x = \frac{a-1}{b-3}t + \frac{b-3a}{b-3} \\ y = tz = 0. \end{cases}$$

Pertanto la direzione di questa proiezione è fornita dal vettore $\mathbf{a} = [\frac{a-1}{b-3}, 1, 0]$.
Il fascio di piani di sostegno s ha equazione $x - 2z + \mu(y - 2) = 0$.
Imponendo il passaggio per P ricaviamo $\mu = \frac{2c-a}{b-2}$.
Quindi, la proiezione di s sul piano xy ha equazioni

$$\begin{cases} x - 2z + \frac{2c-a}{b-2}(y-2) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

ed in forma parametrica si ha

$$\begin{cases} x = \frac{a-2c}{b-2}q + 2\frac{2c-a}{b-2} \\ y = qz = 0. \end{cases}$$

Pertanto la direzione di questa proiezione è fornita dal vettore $\mathbf{b} = [\frac{a-2c}{b-2}, 1, 0]$.
Imponendo ora la condizione di perpendicolarità $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ si ottiene

$$\frac{(a-1)(a-2c)}{(b-3)(b-2)} + 1 = 0,$$

che, passando a coordinate x, y, z fornisce l'equazione $(x-1)(x-2z) + (y-3)(y-2) = 0$ per il luogo richiesto. ■

9.6.16. *Si considerino, nello spazio, le rette r ed s di equazioni*

$$r\begin{cases} x = 0 \\ y = 1, \end{cases} \qquad s\begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases}$$

Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti dello spazio dai quali le rette r ed s vengono proiettate in due rette ortogonali del piano xy.

Svolgimento. Procediamo come nella soluzione dell'Esercizio 9.6.15. Il fascio di piani di sostegno r ha equazione $x + \lambda(y-1) = 0$. Imponendo il passaggio per il centro di proiezione $P(a, b, c)$ ricaviamo $\lambda = \frac{a}{1-b}$. Quindi, la proiezione di r sul piano xy ha equazioni

$$\begin{cases} x + \frac{a}{1-b}(y-1) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

ed in forma parametrica si ha

$$\begin{cases} x = \frac{a}{b-1}t + \frac{a}{1-b} \\ y = tz = 0. \end{cases}$$

La direzione della proiezione è quindi fornita dal vettore $\mathbf{a} = [\frac{a}{b-1}, \mathbf{1}, 0]$. Il fascio di piani di sostegno s ha equazione $x - z + \mu y = 0$.
Imponendo il passaggio per P ricaviamo $\mu = \frac{c-a}{b}$.
Quindi, la proiezione di s sul piano xy ha equazioni

$$\begin{cases} x - z + \frac{c-a}{b}y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

ed in forma parametrica si ha

$$\begin{cases} x = \frac{a-c}{b}q + \frac{a}{1-b} \\ y = qz = 0. \end{cases}$$

La direzione di questa proiezione è quindi fornita dal vettore $\mathbf{b} = [\frac{a-c}{b}, 1, 0]$. Imponendo la condizione di perpendicolarità $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ abbiamo

$$\frac{a(a-c)}{b(b-1)} + 1 = 0.$$

Passando a coordinate cartesiane x, y, z si ha l'equazione $x(x-z) + y(y-1) = 0$ per il luogo richiesto. ■

9.6.17. *Sia t un parametro reale. Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti delle rette dello spazio parallele al piano xz, passanti per il punto $P(t^3, t^2, t)$ ed incidenti l'asse y.*

Svolgimento. La generica retta passante per $P(t^3, t^2, t)$ ha equazioni parametriche

$$r \begin{cases} x = t^3 + a\lambda \\ y = t^2 + b\lambda z = t + c\lambda. \end{cases}$$

La condizione di parallelismo tra r ed il piano $y = 0$ si traduce in $b = 0$, per cui r ha direzione $[a, 0, c]$. La condizione di incidenza con l'asse y si traduce nel passaggio per un punto Q del tipo $Q(0, q, 0)$, per cui la direzione di r deve coincidere con quella di un vettore parallelo al segmento PQ, e quindi

$$[a, 0, c] = [x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_q] = [t^3, t^2 - q, t].$$

Pertanto, $a = t^3$ e $c = t$. Sostituendo nell'equazione di r la direzione $[a, b, c] = [t^3, 0, t]$ otteniamo

$$r \begin{cases} x = t^3 + t^3\lambda \\ y = t^2 z = t + t\lambda. \end{cases}$$

L'equazione cartesiana si ottiene eliminando i parametri λ e t.
Abbiamo allora

$$r \begin{cases} x = yt(1+\lambda) \\ z = t(1+\lambda), \end{cases}$$

e quindi $x = yz$. ■

9.6.18. *Determinare la distanza del punto $P(1, 2, 3)$ dalla retta $r : x = y - 1 = \frac{z-3}{2}$.*

Svolgimento. Una possibile soluzione si ottiene applicando la formula (6.4.2). Come metodo alternativo consideriamo invece il piano π, passante per P e perpendicolare alla retta r. Detto H il punto di intersezione tra r e π, la distanza $\overline{PH}$ tra i punti P ed H corrisponde alla distanza di P da r.
Il piano π ha equazione $ax + by + cz + d = 0$, con a, b, c uguali ai parametri direttori di r, per cui $\pi : x + y + 2z + d = 0$. Il termine noto d si ottiene imponendo il passaggio per P. Sostituendo le sue coordinate nell'equazione precedente si ha $1 + 2 + 6 + d = 0$, da cui $d = -9$, e quindi $\pi : x + y + 2z - 9 = 0$.
Le equazioni parametriche di r sono

$$r \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Per determinare il punto di intersezione tra r e π si deve risolvere l'equazione, nell'incognita t, che si ottiene sostituendo nell'equazione del piano i valori di x, y, z ricavati dalla retta. Si ha

$$t + 1 + t + 6 + 4t - 9 = 0,$$

da cui $t = \dfrac{1}{3}$. Il punto H ha quindi coordinate $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$, e la distanza $\overline{PH}$ risulta

$$\overline{PH} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

■

9.6.19. *Determinare la distanza tra l'asse x e la retta comune ai piani $x + y = 0$ e $z = 3$.*

Svolgimento. La retta r comune ai due piani $x + y = 0$ e $z = 3$, appartenendo in particolare al piano $z = 3$, non ha punti in comune con l'asse x, essendo questo appartenente al piano $z = 0$, parallelo a $z = 3$. Inoltre, i parametri direttori di r sono $1, -1, 0$ mentre quelli dell'asse x sono $1, 0, 0$. Poichè il secondo parametro direttore di r è diverso dal secondo parametro direttore dell'asse x, mentre gli altri due sono uguali, se ne deduce che le due rette sono sghembe tra loro.
La distanza tra due rette sghembe r ed s è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di r dal piano contenente s e parallelo ad r.
Nel nostro caso basta quindi valutare la distanza dell'origine (punto comodo sull'asse x) dal piano $z = 3$. Questa risulta uguale a $|-3| = 3$, che è pertanto la distanza tra le due rette date. ■

9.6.20. *Determinare la distanza tra le due rette r ed s di equazioni*

$$r \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \qquad s \begin{cases} x = 1 - q \\ y = -1 + 2q \\ z = 3 + q. \end{cases}$$

Svolgimento. Nell'Esercizio 9.6.1 abbiamo visto che le due rette r ed s sono sghembe tra loro. La loro distanza può essere valutata con il metodo descritto nell'Esercizio 9.6.19. Traducendo analiticamente troviamo che il piano contenente r e parallelo ad s ha equazione

$$\pi : \det \begin{bmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 0,$$

essendo A un punto di r, a, b, c i suoi parametri direttori, ed a', b', c' quelli di s.
Se $B \in s$, applicando la formula per la distanza punto-piano, si ha

$$\mathrm{d}(B, \pi) = \frac{\det \begin{bmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

essendo α, β, γ i parametri direttori di π, cioè

$$\alpha = bc' - b'c, \;\; \beta = a'c - ac', \;\; \gamma = ab' - a'b.$$

Il determinante al numeratore è uguale a 42, mentre, essendo $a = 3, b = 1, c = 4, a' = -1, b' = 2, c' = 1$, risulta $\alpha = -7, \beta = -7, \gamma = 7$, per cui

$$d(r, s) = \frac{42}{\sqrt{3 \cdot 49}} = 2\sqrt{3}.$$

■

9.6.21. *Determinare l'equazione del piano contenente la retta $x = y = z$ ed il punto $P(4, -6, -2)$.*

Svolgimento. Per scrivere l'equazione di un piano contenente una retta ed un punto si procede come segue

1. Si scrive l'equazione del fascio di piani contenente la data retta. Per fare questo basta scrivere la combinazione lineare di due qualsiasi piani contenenti la retta. Nel nostro caso la retta appartiene, per esempio, ai piani $x = y$ ed $y = z$, le cui equazioni possono essere scritte come $x - y = 0$ ed $y - z = 0$. Il fascio di piani di sostegno r ha quindi equazione data da $\lambda(x - y) + \mu(y - z) = 0$, con λ, μ parametri reali.

2. Si impone il passaggio per il punto assegnato. In questo esercizio si ha pertanto $\lambda(4 + 6) + \mu(-6 + 2) = 0$, il che fornisce $10\lambda - 4\mu = 0$, cioè $\mu = \frac{5}{2}\lambda$. Sostituendo nell'equazione del fascio di piani e semplificando per λ si ottiene l'equazione richiesta, cioè

$$x - y + \frac{5}{2}(y - z) = 0 \text{ e quindi } 2x + 3y - 5z = 0.$$

■

9.6.22. *Determinare la distanza tra l'asse y e la retta comune ai piani $x - y = 0$ e $z = 5$.*

Svolgimento. La retta s comune ai piani $x - y = 0$ e $z = 5$ ha parametri direttori $1, 1, 0$, e quindi non è parallela all'asse y. Poiché la quota dei suoi punti è sempre uguale a 5, essa non interseca l'asse y. Pertanto s è sghemba rispetto all'asse y. La loro distanza si può ottenere considerando la distanza tra l'origine (punto comodo scelto sull'asse y) ed il piano contenente s e parallelo all'asse y. Tale piano, ovviamente, ha equazione $z = 5$, e quindi la distanza richiesta è uguale a 5. ■

9.6.23. *Determinare la distanza tra le rette*

$$\begin{cases} x = q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 3q, \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 5t. \end{cases}$$

Svolgimento. Imponendo che le ascisse e le ordinate delle due rette siano uguali tra loro, si ottiene $t = q = 1$. In corrispondenza di questi valori dei parametri anche le quote coincidono.
Pertanto, la distanza tra le due rette è nulla, poiché esse si intersecano nel punto $P(1, 0, 5)$.
■

9.6.24. *Si consideri la retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 2 + q \\ y = q \\ z = 2, \end{cases}$$

ed il piano $\pi : x + y - 2z = 0$.

(a) Dimostrare che r interseca π.

(b) Calcolare le coordinate del punto $P = r \cap \pi$.

(c) *Scrivere l'equazione del piano contenente il punto P e la retta $s : x = y - 1 = \frac{z-2}{2}$.*

Svolgimento.

(a) Sostituendo nell'equazione del piano i valori di x, y, z ricavati dalle equazioni parametriche di r si ha $2 + q + q - 4 = 0$, da cui $q = 1$. Poiché l'equazione ammette soluzione, r interseca π.

(b) Il punto $P = r \cap \pi$ si ottiene sostituendo $q = 1$ nell'equazione di r, per cui $P(3, 1, 2)$.

(c) La retta s si può esprimere come intersezione di due piani nella seguente maniera

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ 2x = z - 2. \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno s ha equazione

$$\mathcal{F}_s : x - y + 1 + \lambda(2x - z + 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per il punto P, si ricava $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Sostituendo questo valore in F_s si ottiene il piano richiesto, la cui equazione risulta $y - 2z = 0$.

■

9.6.25. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino il piano $\pi : x - 2y - z + 1 = 0$, la retta $r : x = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$ ed il punto $P(1, 2, 2)$.*

(a) *Calcolare la distanza di P da π.*

(b) *Stabilire se r interseca π.*

(c) *Determinare l'equazione del piano σ passante per P, parallelo ad r e perpendicolare a π.*

Svolgimento.

(a) La distanza di P dal piano π risulta

$$\mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|1 - 4 - 2 + 1|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

(b) Una terna di parametri direttori per la retta r è fornita dai numeri $1, 2, 4$. Il prodotto scalare tra il vettore che ha queste componenti ed il vettore avente per componenti i coefficienti di x, y, z nell'equazione di π risulta uguale a $-7 \neq 0$, per cui la retta r non è parallela a π. Di conseguenza r interseca π.

(c) Sia $\sigma : ax+by+cz+d=0$, e determiniamo a, b, c, d imponendo le condizioni richieste. Abbiamo allora

$$\begin{cases} a+2b+4c=0 & (\sigma \parallel r) \\ a+2b+2c+d=0 & (P \in \sigma) \\ a-2b-c=0 & (\sigma \perp \pi). \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $a = -\frac{3}{4}d, b = -\frac{5}{8}d, c = \frac{1}{2}d$. Sostituendo e dividendo tutto per $\frac{d}{8}$ $(d \neq 0)$, si ha $\sigma : -6x-5y+4z+8=0$.

■

9.6.26. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino il piano $\pi : x-y-2z+1=0$, il punto $P(1,2,5)$ e la retta r di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2+3t. \end{cases}$$

(a) Calcolare la distanza di P da r.

(b) Determinare l'equazione del piano σ passante per P e perpendicolare ad r.

(c) Determinare il coseno dell'angolo formato dai piani σ e π.

Svolgimento.

(a) In alternativa al metodo descritto nell' Esercizio 9.6.18, possiamo utilizzare la formula (6.4.2), scegliendo un punto comodo R sulla retta r. Consideriamo per esempio il punto $R(0,1,2)$, ottenuto per $t=0$. Abbiamo $\overrightarrow{PR} = [-1,-1,-3]$ ed $\overrightarrow{r} = [1,-1,3]$, per cui

$$\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{r} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = [-6,0,2].$$

Pertanto, $\|\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{r}\| = \sqrt{40}$, mentre $\|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{11}$, e quindi $\mathrm{d}(P,r) = \sqrt{\frac{40}{11}}$.

(b) La condizione di perpendicolarità con la retta r porta a considerare piani del tipo $x-y+3z+d=0$. Il passaggio per il punto P fornisce $d=-14$, per cui $\sigma : x-y+3z-14=0$.

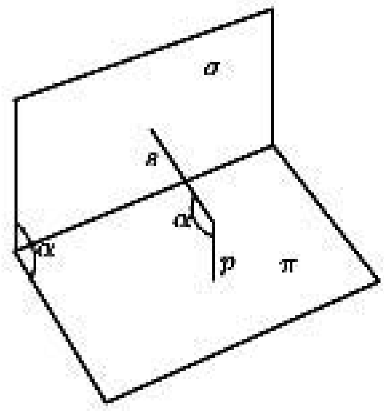


Figura 9.3: angolo tra due piani

(c) Sia α l'angolo tra i piani σ e π. Allora α è anche l'angolo tra le normali ai piani σ e π (Fig. 9.3).

Una retta p perpendicolare a π ha parametri direttori $1, -1, -2$, come si ricava guardando i coefficienti di x, y, z nell'equazione di π.

Analogamente, una retta s perpendicolare a σ ha parametri direttori $1, -1, 3$, come si ricava guardando i coefficienti di x, y, z nell'equazione di σ.

Quindi si ha

$$\cos\alpha = \frac{\langle [1,-1,-2], [1,-1,3] \rangle}{\|[1,-1,-2]\| \cdot \|[1,-1,3]\|} = -\frac{4}{\sqrt{66}}.$$

■

9.6.27. *In* $\mathbf{R}^3$, *si considerino il punto* $P(1,-2,-3)$, *il piano* $\pi : x - y + 2z - 3 = 0$ *e la seguente retta*

$$r \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

(a) Verificare che r interseca π e scrivere le coordinate del punto di intersezione.

(b) Determinare l'equazione del piano contenente la retta r ed il punto P.

(c) Scrivere l'equazione del piano π' passante per P e parallelo al piano π.

Calcolare poi la distanza tra i due piani

Svolgimento.

(a) La direzione della retta r è descritta dal vettore $\mathbf{r} = [-1, 3, 4]$. La normale al piano π è invece parallela al vettore $\mathbf{n} = [1, -1, 2]$. Poiché $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = 4 \neq 0$, la retta r non è perpendicolare ad $\mathbf{n}$, quindi non è parallela a π. Di conseguenza la retta interseca il piano.

(b) La retta r si può esprimere come intersezione dei due piani

$$r \begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 4x + z - 7 = 0. \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno r ha equazione $3x+y-7+\lambda(4x+z-7) = 0$. Imponendo il passaggio per P si ha $\lambda = -1$. Sostituendo e semplificando si ricava che l'equazione del piano richiesto risulta $-x + y - z = 0$.

(c) Il piano π' passante per P e parallelo a π ha equazione $1(x-1)-1(y+2)+2(z+3) = 0$, cioè $x - y + 2z + 3 = 0$.

La distanza tra π e π' è uguale alla distanza di P da π, e quindi

$$\mathrm{d}(\pi, \pi') = \mathrm{d}(P, \pi) = \frac{|1 + 2 - 6 - 3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

■

9.6.28. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino il piano $\pi : 2x - y + z - 3 = 0$ e la seguente retta*

$$r \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

(a) Verificare che r interseca π e scrivere le coordinate del punto di intersezione.

(b) Determinare le equazioni parametriche della proiezione ortogonale di r su π.

Svolgimento.

(a) Sostituiamo nell'equazione del piano i valori di x, y, z forniti dalle equazioni parametriche di r. Otteniamo l'equazione $2(1-t) - 2 - t - 1 + 4t - 3 = 0$, la quale ammette soluzione $t = 4$, il che implica che la retta ed il piano si intersecano.

Le coordinate del punto di intersezione tra la retta ed il piano si ottengono sostituendo il valore $t = 4$ precedentemente determinato, nelle equazioni parametriche di r. Si ottiene $P(-3, 6, 15)$.

(b) La retta richiesta può essere ottenuta intersecando π con il piano σ contenente la retta r e perpendicolare a π. Per trovare σ, esprimiamo innanzitutto r come intersezione di due piani. Ricavando $t = 1 - x$ dalla prima equazione parametrica e sostituendo il risultato nelle altre due, si ha

$$r \begin{cases} x+y-3=0 \\ 4x+z-3=0. \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno r ha equazione $x+y-3+\lambda(4x+z-3)=0$, cioè $(1+4\lambda)x+y+\lambda z-3-3\lambda=0$. Imponendo la condizione di perpendicolarità con il piano π si ottiene $2(1+4\lambda)-1+\lambda=0$, da cui ricaviamo $\lambda=-\frac{1}{9}$. Pertanto, il piano σ ha equazione $5x+9y-z-24=0$.

La proiezione ortogonale di r su π è data da

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 5x+9y-z-24=0. \end{cases}$$

Queste forniscono le equazioni della proiezione come intersezione di due piani. Per ricavare le equazioni parametriche, diamo ad una delle variabili x, y, z il valore di parametro. Posto, per esempio, $y=q$, si ottiene

$$\begin{cases} 2x+z=3+q \\ 5x-z=24-9q \\ y=q, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x=\frac{27}{7}-\frac{8}{7}q \\ y=q \\ z=-\frac{33}{7}+\frac{23}{7}q. \end{cases}$$

■

9.6.29. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette r ed s di equazioni*

$$r \begin{cases} x=2+3t \\ y=t \\ z=-1+4t \end{cases}, \qquad s \begin{cases} x=1-q \\ y=-1+2q \\ z=3+q. \end{cases}$$

(a) Stabilire la loro posizione reciproca.

(b) Determinare l'equazione del piano passante per il punto $A(1,2,-6)$ e perpendicolare alla retta r.

(c) Scrivere l'equazione del piano π passante per $O(0,0,0)$ e contenente la retta s.

(d) Determinare l'equazione della retta p, perpendicolare ad r ed s e secante entrambe le rette.

Svolgimento.

(a) Imponendo che le ascisse e le ordinate dei punti di r siano uguali alle ascisse ed ordinate dei punti di s, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} 2+3t = 1-q \\ t = -1+2q, \end{cases}$$

la cui soluzione è $t = -\frac{3}{7}$, $q = \frac{2}{7}$. In corrispondenza di questi valori dei parametri le quote dei punti di r ed s sono diverse, e valgono rispettivamente $z_r = -\frac{19}{7}$ e $z_s = \frac{23}{7}$. Pertanto le due rette sono tra loro sghembe.

(b) La condizione di perpendicolarità con la retta r porta a considerare piani del tipo $3x + y + 4z + d = 0$. Il passaggio per il punto A fornisce $d = 19$, per cui σ : $3x + y + 4z + 19 = 0$.

(c) La retta s si può esprimere come intersezione di due piani ricavando $q = 1 - x$ dalla prima equazione parametrica e sostituendo questo valore nelle altre due. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+z-4=0. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\mathcal{F}_s : 2x + y - 1 + \lambda(x + z - 4) = 0 \text{ (fascio di piani per s).}$$

Il passaggio per l'origine si traduce in $\lambda = -\frac{1}{4}$, che, sostituito nell'equazione del fascio di piani, fornisce $\pi : 7x + 4y - z = 0$.

(d) Poiché la retta p deve essere perpendicolare sia ad r che ad s, i suoi parametri direttori sono forniti dalle componenti del vettore $\mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$, cioè

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [-7, -7, 7].$$

La retta p ha quindi equazioni parametriche date da

$$p \begin{cases} x = \alpha - 7k \\ y = \beta - 7k \\ z = \gamma + 7k, \quad k \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

dove α, β, γ sono le coordinate di un qualche punto di p. Poiché p deve intersecare la retta r, deve esistere un valore $k = k_r$ per il quale α, β, γ forniscono un punto R di r, cioè

$$\begin{cases} \alpha - 7k_r = 2 + 3t \\ \beta - 7k_r = t \\ \gamma + 7k_r = -1 + 4t. \end{cases}$$

Eliminiamo ora k_r. Sottraendo la seconda equazione dalla prima, e sommando la prima e la terza equazione otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 + 2t \\ \alpha + \gamma = 1 + 7t. \end{cases}$$

Analogamente, poiché p deve intersecare la retta s, deve esistere un valore $k = k_s$ per il quale α, β, γ forniscono un punto S di s, cioè

$$\begin{cases} \alpha - 7k_s = 1 - q \\ \beta - 7k_s = -1 + 2q \\ \gamma + 7k_s = 3 + q. \end{cases}$$

Come in precedenza, eliminiamo ora k_s. Sottraendo la seconda equazione dalla prima, e sommando la prima e la terza equazione otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 - 3q \\ \alpha + \gamma = 4. \end{cases}$$

Confrontando i due sistemi ottenuti abbiamo

$$\begin{cases} 2 + 2t = 2 - 3q \\ 1 + 7t = 4, \end{cases}$$

da cui si ricava $t = \frac{3}{7}$ e $q = -\frac{2}{7}$. Questi sono i valori dei parametri che, sostituiti in r ed s rispettivamente, forniscono le coordinate dei punti R ed S in cui la retta p interseca le rette r ed s, e precisamente si ottiene $R\left(\frac{23}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$ ed $S\left(\frac{9}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$. Le equazioni della retta p si possono ora ottenere sostituendo ad α, β, γ le coordinate di R o di S, e quindi

$$p \begin{cases} x = \frac{23}{7} - 7k \\ y = \frac{3}{7} - 7k \\ z = \frac{5}{7} + 7k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

■

9.6.30. *In $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette r ed s di equazioni*

$$r \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}, \qquad s \begin{cases} x = 1 - 2q \\ y = -1 + q \\ z = 3 - q. \end{cases}$$

(a) Stabilire la loro posizione reciproca.

(b) Determinare la distanza tra r ed s.

Svolgimento.

(a) Innanzitutto si vede facilmente che le due rette non sono parallele, in quanto i parametri direttori non sono proporzionali tra loro. Vediamo se sono secanti. Imponendo che le ascisse e le ordinate dei punti di r siano uguali alle ascisse ed ordinate dei punti di s, si ottiene $t = -\dfrac{3}{8}$, $q = -\dfrac{1}{8}$. In corrispondenza di questi valori dei parametri le quote dei punti di r ed s sono diverse, e valgono rispettivamente $z_r = -\dfrac{11}{8}$ e $z_s = \dfrac{25}{8}$. Pertanto le due rette sono tra loro sghembe.

(b) Per calcolare la distanza tra le due rette sghembe, consideriamo un punto $R \in r$, e valutiamo la distanza tra R ed il piano σ passante per s e parallelo ad r.

La retta s si può esprimere come intersezione di due piani ricavando $q = 1 + y$ dalla seconda equazione parametrica e sostituendo questo valore nelle altre due. Si ottiene

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\mathcal{F}_s : x + 2y + 1 + \lambda(y + z - 2) = 0 \text{ (fascio di piani per } s).$$

Il parallelismo con la retta r si traduce nell'equazione $2 + 3(2 + \lambda) + \lambda = 0$, la cui soluzione è $\lambda = -2$. Di conseguenza $\sigma : x - 2z + 5 = 0$.

Sia ora $R(2, 0, -1)$ il punto di r ottenuto per $t = 0$. Abbiamo quindi

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(R, \sigma) = \frac{|2 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{5}},$$

il che fornisce la distanza tra le due rette sghembe.

■

9.6.31. *Si considerino i punti $A(1, -1, 0)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 1, 1)$ e si determini*

(a) l'equazione del piano π passante per A, B, C;

(b) l'equazione della retta ortogonale a π e passante per l'origine;

(c) la distanza dell'origine dal piano π;

(d) le equazioni delle rette AB, AC, BC;

(e) il perimetro del triangolo ABC;

(f) il volume del parallelepipedo obliquo determinato dai vettori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Svolgimento.

(a) Il piano richiesto ha equazione

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si ottiene l'equazione $2x - 2(y - 3z + 2) = 0$, cioè $x - y + 3z - 2 = 0$.

(b) Tutte le rette perpendicolari al piano passante per A, B, C hanno, a meno di una costante di proporzionalità, parametri direttori $1, -1, 3$. Quindi, la retta passante per l'origine ed ortogonale a tale piano ha equazioni normali

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{3},$$

che in forma parametrica diventano

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t, \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

(c) La distanza dell'origine dal piano π risulta

$$\mathrm{d}(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{1 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

(d) La retta AB ha parametri direttori proporzionali alle componenti del vettore $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] = [1, 4, 1]$. Pertanto, la retta AB si può esprimere in forma compatta scrivendo $(x, y, z) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, cioè

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = t. \end{cases}$$

Analogamente, AC ha parametri direttori proporzionali alle componenti del vettore $\overrightarrow{AC} = [-1, 2, 1]$, e quindi ha equazione

$$\begin{cases} x = 1 - q \\ y = -1 + 2q \\ z = q, \end{cases}$$

mentre la retta BC ha parametri direttori proporzionali alle componenti del vettore $\overrightarrow{BC} = [-2, -2, 0]$, e quindi ha equazione

$$\begin{cases} x = 2 - 2r \\ y = 3 - 2r \\ z = 1. \end{cases}$$

(e) Calcoliamo le lunghezze dei lati

$$\begin{array}{rclclcl} \overline{AB} & = & \sqrt{(1-2)^2 + (-1-3)^2 + (0-1)^2} & = & \sqrt{18} & = & 3\sqrt{2}, \\ \overline{AC} & = & \sqrt{(1-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2} & = & \sqrt{6}, & & \\ \overline{BC} & = & \sqrt{(2-0)^2 + (3-1)^2 + (1-1)^2} & = & \sqrt{8} & = & 2\sqrt{2}. \end{array}$$

Pertanto il perimetro risulta $5\sqrt{2} + \sqrt{6}$

(f) Il volume del parallelepipedo obliquo determinato dai tre vettori corrisponde al valore assoluto del loro prodotto misto, cioè al valore assoluto del seguente determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo di questo determinante è superfluo. Infatti, osservando il determinante considerato nel punto a) precedente, si nota che il prodotto misto corrisponde al complemento algebrico dell'elemento 1 situato nella prima riga e quarta colonna della matrice. Esso coincide quindi con il termine noto dell'equazione del piano passante per A, B, C (prima della semplificazione), cioè è uguale a -4. Di conseguenza, $|-4| = 4$ è il volume del parallelepipedo obliquo considerato.

■

9.6.32. *Determinare le equazioni, il centro ed il raggio della circonferenza γ passante per i punti dello spazio $A(1, 0, 3)$, $B(0, 1, 3)$, $C(1, 3, 0)$*

Svolgimento. Una circonferenza nello spazio viene ottenuta, per esempio, intersecando una sfera con un piano. Analiticamente si deve quindi considerare la coppia di equazioni che rappresentano, rispettivamente, il piano π contenente i punti A, B, C ed una qualsiasi sfera passante per questi.

Osserviamo che la somma delle coordinate dei tre punti $A(1,0,3)$, $B(0,1,3)$ e $C(1,3,0)$ è costante, cioè risulta $x+y+z=4$. Quindi A,B,C appartengono al piano π avente questa equazione.
Tra le infinite sfere contenenti A,B,C c'è quella con il centro nell'origine, poiché i tre punti hanno la stessa distanza da $O(0,0,0)$, uguale a $\sqrt{10}$ (Fig. 9.4)

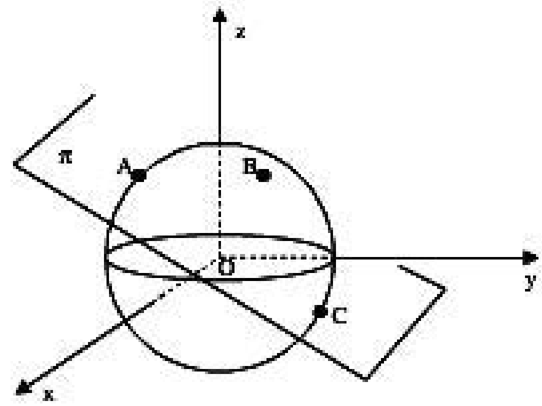


Figura 9.4: circonferenza passante per $A(1,0,3)$, $B(0,1,3)$, $C(1,3,0)$.

Quindi, la circonferenza γ richiesta ha equazioni

$$\gamma \begin{cases} x^2+y^2+z^2=10 \\ x+y+z=4. \end{cases}$$

Il centro viene ottenuto intersecando la retta passante per l'origine e perpendicolare a π, con il piano π stesso. Poiché i coefficienti di x,y,z nell'equazione di π sono uguali, le rette ad esso ortogonali hanno parametri direttori tutti uguali, cioè sono del tipo $x-x_0=y-y_0=z-z_0$. Quella che passa per l'origine ha quindi equazione $x=y=z$.
La sua intersezione con π fornisce il punto $Q(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$, che rappresenta il centro della circonferenza.
Il raggio è dato dalla distanza di Q da uno qualsiasi dei punti assegnati, per esempio $\overline{QA}=\frac{\sqrt{42}}{3}$. ■

9.6.33. *Determinare centro e raggio della circonferenza*

$$\gamma \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+20=0 \\ x+y+z-4=0. \end{cases}$$

Svolgimento. La circonferenza viene assegnata come intersezione tra una sfera ed un piano. Il centro della sfera è $C_1(2,-1,4)$, ed il suo raggio è $R=1$. La retta per C_1 perpendicolare al piano $x+y+z-4=0$ ha equazione

$$r \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=4+\lambda. \end{cases}$$

Il centro C della circonferenza è l'intersezione tra r ed il piano. Questa si ottiene per $\lambda = -\frac{1}{3}$, e quindi $C(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{11}{3})$. Essendo $\overline{CC_1}^2 = \frac{1}{3}$, dal teorema di Pitagora si ricava che il raggio r della circonferenza è $r = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. ■

9.6.34. *Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(1,0,1)$, avente come direttrice la curva γ del piano xy di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$.*

Svolgimento. Il metodo di costruzione di un cono descritto nel Paragrafo 6.5.2, basato sulla parametrizzazione della direttrice, in tal caso non è agevole. Possiamo invece considerare la generica retta passante per il vertice, e poi imporre su questa le condizioni che determinano la direttrice. Nel caso considerato, la generica generatrice ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 0 + bt \\ z = 1 + ct, \end{cases}$$

essendo a, b, c i generici parametri direttori. Imponiamo che l'intersezione con il piano xy coincida con la curva γ. Se $z = 0$ allora $t = -\frac{1}{c}$, per cui $x = 1 - \frac{a}{c}$ ed $y = -\frac{b}{c}$. Sostituendo nell'equazione di γ abbiamo

$$\left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{a}{c}\right)\frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} - 4\frac{a}{c} + 6\frac{b}{c} + 2 = 0.$$

Scriviamo ora le equazioni della generica retta generatrice in forma normale, ed abbiamo

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-1}{c},$$

da cui

$$\frac{a}{c} = \frac{x-1}{z-1} \text{ e } \frac{b}{c} = \frac{y}{z-1}.$$

Sostituendo nell'equazione precedente, dopo qualche semplificazione, otteniamo

$$(z - x - y)^2 - 4(x-1)(z-1) + 6y(z-1) + 2(z-1)^2 = 0,$$

che rappresenta l'equazione cartesiana del cono considerato. ■

9.6.35. *Stabilire se esistono sfere passanti per i punti $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(0,1-1)$, $C(1,0,2)$.*

Svolgimento. Innanzitutto vediamo se i quattro punti sono complanari.
Il piano π contenente O, A, B ha equazione

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui $\pi : -2x + y + z = 0$. Le coordinate del punto C soddisfano l'equazione, quindi il punto C appartiene al piano passante per O, A, B.
Di conseguenza, i quattro punti assegnati sono complanari. Pertanto, se O, A, B, C appartengono ad una stessa circonferenza γ, tutte le sfere che contengono γ passano per questi punti, altrimenti non esiste alcuna sfera avente questa proprietà.
Per controllare se i quattro punti appartengono ad una stessa circonferenza, la quale deve necessariamente appartenere a π, possiamo trovare innanzitutto il punto P in cui il piano π interseca la retta r comune ai piani assiali dei segmenti OA ed OB. Il punto P è il centro della circonferenza di π passante per O, A, B, per cui $\overline{PO} = \overline{PA} = \overline{PB}$ (Fig. 9.5).

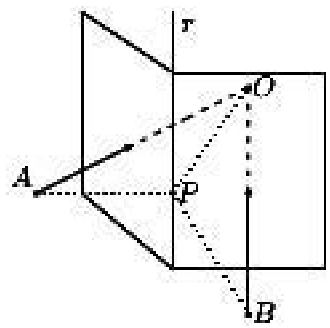


Figura 9.5: il punto P equidistante da A, O, B.

Se anche $\overline{PC}$ ha lo stesso valore, allora i punti O, A, B, C appartengono alla stessa circonferenza.
I parametri direttori della retta OA sono $1, 1, 1$, mentre il punto medio del segmento OA è $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Quindi, il piano assiale di OA ha equazione

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x + y + z - \frac{3}{2} = 0.$$

I parametri direttori della retta OB sono $0, 1, -1$, mentre il punto medio del segmento OB è $M_2\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Quindi, il piano assiale di OB ha equazione

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) - \left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; y - z - 1 = 0.$$

La retta r comune ai due piani assiali risulta

$$r \begin{cases} x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \\ y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

e le sue equazioni parametriche sono

$$r\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$$

Intersecando r con π otteniamo il punto $P\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, per cui $\overline{PO} = \overline{PA} = \overline{PB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Poiché $\overline{PC} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$, C non appartiene alla circonferenza di π che passa per O, A,B, e quindi non esiste alcuna sfera che contiene i punti assegnati. ■

9.6.36. *Determinare, se esistono, le equazioni delle sfere passanti per i punti* $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1 - 1)$, $C(-1, 5, 3)$.

Svolgimento. Procediamo innanzitutto osservando che il piano π contenente O, A, B ha equazione $-2x + y + z = 0$ (vedere Esercizio 9.6.35), per cui $C \notin \pi$. In questo caso i quattro punti non sono complanari. Di conseguenza esiste una ed una sola sfera che li contiene tutti.
Il centro di questa sfera è il punto di intersezione dei piani assiali dei segmenti OA, OB e BC.
I parametri direttori della retta BC sono $-1, 4, 4$, mentre il punto medio del segmento BC è $M\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right)$. Quindi, il piano assiale di BC ha equazione

$$-\left(x + \frac{1}{2}\right) + 4(y - 3) + 4(z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 8y - 8z + 33 = 0.$$

Dall'Esercizio 9.6.35 sappiamo che i piani assiali di OA ed OB si intersecano lungo la retta di equazioni parametriche

$$r\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$$

Intersecando r con il piano assiale di BC si perviene ad una equazione nell'incognita t, la cui soluzione è $t = \dfrac{13}{10}$, a cui corrisponde il punto $Q\left(-\dfrac{21}{10}, \dfrac{23}{10}, \dfrac{13}{10}\right)$. Questo è il centro della sfera cercata.
Per avere il raggio basta calcolare la distanza di Q da uno dei punti dati, per esempio

$$\overline{OQ} = \sqrt{\left(\frac{21}{10}\right)^2 + \left(\frac{23}{10}\right)^2 + \left(\frac{13}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{1139}}{10}.$$

Pertanto si ha

$$\left(x + \frac{21}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{10}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{1139}{100},$$

il che fornisce l'equazione della sfera cercata. ■

9.6.37. *Dimostrare che il piano $\pi : x + y + z - 4 = 0$ interseca la sfera di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ in una circonferenza reale γ. Calcolare quindi centro e raggio di γ.*

Svolgimento. Il centro della sfera è il punto $C(1,2,3)$, mentre il suo raggio R è uguale a 4. La distanza di C da π risulta

$$d(C,\pi) = \frac{|1+2+3-4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 4 \;\;\Rightarrow\;\; \pi \text{ interseca la sfera in una circonferenza reale } \gamma.$$

Indichiamo con H il centro e con r il raggio di γ (Fig. 9.6).

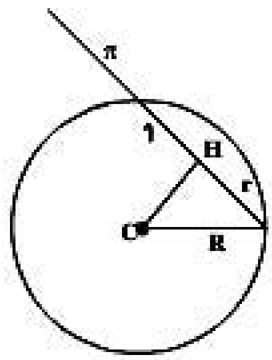


Figura 9.6: la circonferenza dell'Esercizio 9.6.37.

La retta CH passa per C ed è perpendicolare a π, quindi

$$CH \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} , \quad H = CH \cap \pi \;\rightarrow\; -(1+\lambda) + (2+\lambda) + (3+\lambda) - 4 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = -\frac{2}{3}$$

Quindi risulta $H\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Inoltre abbiamo

$$r = \sqrt{R^2 - (\overline{CH})^2} = \sqrt{R^2 - (d(C,\pi))^2} = \sqrt{16 - \frac{4}{3}} = 2\sqrt{\frac{11}{3}}$$

■

9.6.38. *Scrivere l'equazione cartesiana di una sfera passante per l'origine, avente raggio $R = 3$ e secante sul piano $\pi : x - y - z = 0$ una circonferenza di centro $H(1,1,0)$. Dedurre il numero di soluzioni del problema considerato.*

Svolgimento. Il centro C della sfera si trova sulla retta ortogonale al piano π e passante per il punto H, data da

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\lambda, \end{cases}$$

essendo λ un parametro reale. Pertanto abbiamo $C(1+\lambda, 1-\lambda, -\lambda)$. Poiché la sfera deve passare per l'origine, risulta $\overline{CO} = R = 3$, e quindi

$$(1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + \lambda^2 = 9 \text{ da cui } \lambda = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Abbiamo pertanto due soluzioni rappresentate dalle equazioni seguenti

$$\left(x - 1 + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + \left(y - 1 - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + \left(z - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = 9 \text{ per } \lambda = \sqrt{\frac{7}{3}},$$
$$\left(x - 1 - \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + \left(y - 1 + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 + \left(z + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = 9 \text{ per } \lambda = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

■

9.6.39. *Sia r la retta passante per i punti $A(1,-1,1)$ e $B(2,1,3)$, e sia S la sfera di equazione $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$*

1. *Scrivere l'equazione del piano π parallelo alla retta r, perpendicolare al piano σ : $2x - y - z + 5 = 0$ e passante per il punto $P(1,4,3)$.*
2. *Dimostrare che π taglia la sfera S secondo una circonferenza reale γ non degenere.*
3. *Determinare centro e raggio di γ.*

Svolgimento.

1. La retta AB ha equazioni parametriche date da

$$AB \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto, il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, è tale che

$$\begin{cases} a + 4b + 3c + d = 0 & \text{passaggio per } P \\ a + 2b + 2c = 0 & \text{condizione di parallelismo con } AB \\ 2a - b - c = 0 & \text{condizione di perpendicolarità con } \sigma \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -d \\ c = d, \end{cases} \quad \Rightarrow \pi : -y + z + 1 = 0.$$

2. La sfera assegnata ha centro $C(1,1,1)$ e raggio $R=1$. La distanza di C da π risulta

$$\mathrm{d}(C,\pi)=\frac{|-1+1+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1 \Rightarrow \pi \text{ interseca la sfera in una circonferenza reale } \gamma.$$

3. Indichiamo con H il centro e con r il raggio di γ (vedi Figura 9.6). La retta CH passa per C ed è perpendicolare a π, quindi

$$CH\begin{cases} x=1 \\ y=1-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}, \quad H=CH\cap\pi \ \rightarrow \ -(1-\mu)+(1+\mu)+1=0 \quad \Rightarrow \ \mu=-\frac{1}{2}$$

Quindi risulta $H\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. Inoltre abbiamo

$$r=\sqrt{R^2-(\overline{CH})^2}=\sqrt{R^2-(d(C,\pi))^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

■

9.7 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 7

9.7.1. *Determinare la lunghezza degli assi, le coordinate dei vertici e le coordinate dei fuochi dell'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Svolgimento. Data una ellisse nella forma canonica $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, con $a,b>0$, le lunghezze degli assi corrispondono al doppio di a e di b. Nel nostro caso $a=3$ e $b=2$, per cui le lunghezze degli assi sono 4 e 6.
I vertici sono i punti $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$, $V_3(0,b)$, $V_4(0,-b)$.
Pertanto i vertici dell'ellisse assegnata sono $V_1(3,0)$, $V_2(-3,0)$, $V_3(0,2)$, $V_4(0,-2)$.
I fuochi appartengono all'asse maggiore, per cui in questo caso sono situati sull'asse x. Essi hanno coordinate $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, essendo $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Di conseguenza, abbiamo $F_1(\sqrt{5},0)$ ed $F_2(-\sqrt{5},0)$. ■

9.7.2. *Determinare la lunghezza degli assi dell'ellisse di equazione* $x^2+2xy+6y^2-2x-2y-4=0$.

Svolgimento. Osserviamo che $I_3=-25$, $I_2=5$, $I_1=7$, per cui la conica è un'ellisse reale.
La lunghezza degli assi non cambia se riduciamo la conica a forma canonica.
Calcolando gli autovalori associati alla parte quadratica otteniamo $\lambda_1=\frac{7-\sqrt{29}}{2}$ e $\lambda_2=\frac{7+\sqrt{29}}{2}$.
La forma canonica è quindi

$$\frac{7-\sqrt{29}}{2}x^2+\frac{7+\sqrt{29}}{2}y^2-5=0.$$

Questa equazione è del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a^2=\frac{10}{7-\sqrt{29}}$ e $b^2=\frac{10}{7+\sqrt{29}}$.
Le lunghezze degli assi sono quindi

$$2a=2\sqrt{\frac{10}{7-\sqrt{29}}},\quad 2b=2\sqrt{\frac{10}{7+\sqrt{29}}}.$$

■

9.7.3. *Determinare le coordinate dei fuochi e le equazioni degli asintoti dell'iperbole* $4x^2-6y^2-24=0$.

Svolgimento. L'equazione assegnata è del tipo $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$ con $a^2=6$ e $b^2=4$.
I fuochi hanno coordinate $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ con $c^2=a^2+b^2=10$, da cui ricaviamo $F_1(-\sqrt{10},0)$ ed $F_2(\sqrt{10},0)$.
Gli asintoti sono le rette di equazioni $y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}x$. ■

9.7.4. *Si consideri l'iperbole di equazione* $3x^2+3y^2+10xy+2x+14y+3=0$. *Determinare la distanza tra i vertici.*

Svolgimento. La distanza tra i vertici resta invariata passando alla forma canonica.
Abbiamo $I_3=-128$, $I_2=-16$, $I_1=6$, mentre gli autovalori associati alla parte quadratica sono $\lambda_1=8$ e $\lambda_2=-2$.
Pertanto, una forma canonica della conica considerata è $8x^2-2y^2+8=0$.
I vertici si ottengono intersecando l'iperbole con l'asse y, e quindi sono i punti $V_1(0,2)$ e $V_2(0,-2)$.
Pertanto, la distanza tra i vertici è uguale a 4. ■

9.7.5. *Riconoscere la conica rappresentata dall'equazione*

$$x^2-2xy-y^2+4x-2y+1=0.$$

Svolgimento. Calcolando gli invarianti otteniamo

- $I_3=\det\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&1\end{bmatrix}=5\neq 0\Rightarrow$ la conica è non degenere.
- $I_2=\det\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}=-2<0\Rightarrow$ la conica è una iperbole.

Inoltre $I_1 = 1 - 1 = 0$, per cui la conica è una iperbole equilatera.

9.7.6. *Riconoscere la conica rappresentata dall'equazione*

$$x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 0.$$

Svolgimento. Calcolando l'invariante cubico, otteniamo $I_3 = 0$, per cui la conica è degenere. Ciò significa che il polinomio che la rappresenta si può scomporre in fattori di primo grado. Essendo $I_2 < 0$ i fattori devono essere reali e distinti. In effetti abbiamo:

$$x^2 + xy - 2y^2 - x + y = (x - y)(x + 2y - 1) = 0.$$

Quindi, la conica considerata è spezzata nelle due rette reali distinte di equazioni $x - y = 0$ ed $x + 2y - 1 = 0$.

9.7.7. *Riconoscere la conica rappresentata dall'equazione*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Svolgimento. Essendo $I_3 = 0$ la conica è degenere. Poiché $I_2 = 0$ i fattori devono essere reali e coincidenti. Scomponendo il polinomio troviamo

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y = (x + y)(x + y - 2) = 0,$$

e quindi la conica è spezzata in due rette parallele.

9.7.8. *Stabilire la natura della conica* $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$.

Svolgimento. Calcolando gli invarianti si ricava $I_3 = 0, I_2 = 0, I_1 = 2$. Essendo $I_3 = 0$ la conica è degenere, mentre $I_2 = 0$ indica che la conica è spezzata in due rette parallele. Poiché l'equazione data si può esprimere nella forma $(x + y)^2 + 1 = 0$, cioè è la somma di due quadrati uguagliata a zero, la conica non possiede alcun punto reale proprio. Scomponendo il polinomio otteniamo $(x+y+i)(x+y-i) = 0$ (dove i rappresenta l'unità immaginaria), cioè due rette parallele immaginarie, di equazioni $x + y + i = 0$ ed $x + y - i = 0$ rispettivamente.

9.7.9. *Classificare le coniche seguenti*

(a) $2x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 - 4x + 1 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 = 0$.

Svolgimento. Calcolando gli invarianti abbiamo

(a) $I_3 = -12$, implica che la conica è non degenere.
$I_2 = 0$, implica che la conica è una parabola.
(b) $I_3 = 0$, implica che la conica è degenere. In tale caso il polinomio si spezza in $(x+iy)(x-iy) = 0$, essendo i l'unità immaginaria. Pertanto la conica è degenere in due rette immaginarie coniugate.

9.7.10. *Riconoscere la conica rappresentata dall'equazione* $x^2 - 6xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Svolgimento. Si ha $I_3 = -1$, $I_2 = -8$, $I_1 = 2$. Pertanto la conica è una iperbole non equilatera.

9.7.11. *Riconoscere la conica rappresentata dall'equazione* $x^2 - 4xy - 3y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$.

Svolgimento. Calcolando gli invarianti otteniamo

- $I_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow$ la conica è non degenere.
- $I_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = -7 < 0 \Rightarrow$ la conica è una iperbole.

Inoltre $I_1 = 1 - 3 = -2 \neq 0$, per cui la conica è una iperbole non equilatera. ■

9.7.12. *Riconoscere e rappresentare graficamente la conica di equazione* $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 5 = 0$.

Svolgimento. Calcolando gli invarianti si ricava $I_3 = 0, I_2 = 0, I_1 = 5$.
Essendo $I_3 = 0$ la conica è degenere, mentre $I_2 = 0$ indica che la conica è spezzata in due rette parallele. L'equazione assegnata si può esprimere nella forma seguente

$$(x + 2y)^2 + 6(x + 2y) + 5 = 0.$$

Posto $x + 2y = t$, abbiamo $t^2 + 6t + 5 = 0$, il che fornisce per t i valori $t = -5$ e $t = -1$. Pertanto la conica è spezzata nelle due rette di equazioni $x + 2y = -5$ ed $x + 2y = -1$, ed ammette quindi la rappresentazione grafica di Figura 9.7.

9.7.13. *Classificare e ridurre a forma canonica la conica di equazione* $x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 4 = 0$.

Svolgimento. Considerando gli invarianti abbiamo $I_1 = 2$, $I_2 = -8$, $I_3 = 48$, per cui la conica è una iperbole non equilatera. La sua forma canonica è quindi $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$, essendo λ_1, λ_2 gli autovalori della matrice M associata alla parte quadratica $x^2 + 6xy + y^2$. Di conseguenza ricaviamo $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ e $\frac{I_3}{I_2} = -6$. Pertanto, la forma canonica è $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$.
Anche l'equazione $2x^2 - y^2 - 3 = 0$ fornisce una forma canonica della stessa conica. Rispetto alla precedente gli assi di simmetria sono scambiati tra loro. ■

3.

Gli autovalori associati alla conica sono dati da

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Le direzioni degli assi di simmetria sono fornite dagli autospazi associati, cioè

$$\lambda = -1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda = 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pertanto, le direzioni degli assi di simmetria dell'iperbole coincidono con quelle delle rette $y = \pm x$. Per quanto riguarda la forma canonica, abbiamo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \frac{I_3}{I_2} \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 3y^2 - \frac{41}{3} = 0.$$

■

9.7.17. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. *Scrivere l'equazione cartesiana della conica associata ad A.*

2. *Calcolare gli invarianti e classificare la conica.*

3. *Determinare la direzione dell'asse principale, e la forma canonica della conica considerata*

Svolgimento.

1. $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 3 = 0$.

2. Calcolando gli invarianti abbiamo $I_3 = \det A = -4 \neq 0$, $I_2 = 4 - 4 = 0$ ed $I_1 = 5$, per cui si ha una parabola non degenere.

3. Gli autovalori associati alla conica sono dati da

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} 0 \\ 5. \end{cases}$$

La direzione dell'asse principale è fornita dall'autospazio E_0 associato a $\lambda = 0$, cioè

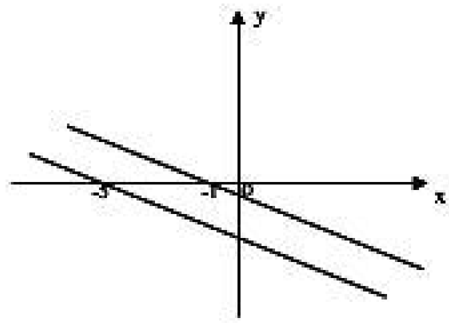


Figura 9.7: rappresentazione grafica della conica degenere $x^2+4xy+4y^2+6x+12y+5=0$.

9.7.14. *Classificare e ridurre a forma canonica la conica di equazione* $2x^2+4xy+6y^2-4x-2y-1=0$.

Svolgimento. Considerando gli invarianti otteniamo $I_1=8$, $I_2=8$, $I_3=-26$, per cui la conica è una ellisse. Essendo poi $I_1 \cdot I_3 < 0$, si ha una ellisse reale.
La sua forma canonica è quindi $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$, essendo λ_1, λ_2 gli autovalori della matrice Q associata alla parte quadratica $2x^2+4xy+6y^2$. Svolgendo i calcoli ricaviamo $\lambda_1 = 4-2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 4+2\sqrt{2}$ e $\frac{I_3}{I_2} = -\frac{13}{4}$. Pertanto, la forma canonica risulta data da $8(2-\sqrt{2})x^2 + 8(2+\sqrt{2})y^2 - 13 = 0$.

Osservazione 9.7.15. *Anche l'equazione* $8(2+\sqrt{2})x^2+8(2-\sqrt{2})y^2-13=0$ *fornisce una forma canonica della stessa conica. Rispetto alla precedente gli assi di simmetria sono scambiati tra loro.*

■

9.7.16. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Scrivere l'equazione cartesiana della conica associata ad A.*
2. *Calcolare gli invarianti e classificare la conica.*
3. *Determinare le direzioni degli assi, e la forma canonica della conica.*

Svolgimento.
1. $x^2+4xy+y^2+8x+12y+1=0$.

2. Abbiamo $I_3 = \det A = 41 \neq 0$, per cui la conica non è degenere. Inoltre $I_2 = 1-4 = -3 < 0$, ed $I_1 = 2 \neq 0$, quindi si ha una iperbole non equilatera.

$$\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pertanto, la direzione dell'asse principale della parabola coincide con quella della retta $y = -2x$. Per quanto riguarda la forma canonica, abbiamo

$$y^2 = 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}x \quad\Rightarrow\quad y^2 = \frac{4}{5\sqrt{5}}x.$$

■

9.7.18. *Si consideri la conica γ di equazione*

$$x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 4 = 0.$$

1. *Determinare il cambio di riferimento che porta γ in forma canonica.*
2. *Tracciare un grafico approssimativo di γ.*

Svolgimento.

1. Nello svolgimento dell'Esercizio 9.7.13 abbiamo visto che la conica è una iperbole non equilatera, ed una sua forma canonica risulta data dall'equazione $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$. La riduzione a questa forma canonica avviene mediante una rototraslazione del sistema di riferimento. La rotazione è descritta dalla matrice ortogonale speciale M che diagonalizza la matrice Q associata alla parte quadratica della conica, mentre la traslazione è quella che porta il centro C nell'origine. Bisogna quindi determinare la matrice M ed il centro C dell'iperbole.

   La matrice M ha come colonne gli autovettori normalizzati di Q.

$$\lambda = -2 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad y = -x \quad\Rightarrow\quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda = 4 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad y = x \quad\Rightarrow\quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normalizzando $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ otteniamo i versori $\widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1$ ed $\widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2$, per cui la matrice M risulta

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

La componente rotatoria del cambio di riferimento è quindi data da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Per determinare il centro di γ illustriamo due metodi. Il primo è più lungo, ma consente di lavorare direttamente con le trasformazioni geometriche che si devono effettuare per portare γ in forma canonica. Il secondo è invece puramente algebrico, e fornisce il risultato in maniera molto veloce.

Primo metodo. Applichiamo a γ la rotazione precedentemente determinata, cioè cambiamo x ed y secondo le equazioni seguenti

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di γ e semplificando otteniamo l'equazione data da

$$x'^2 - 2y'^2 - 2x' + 4y' + 2 = 0.$$

Questa rappresenta l'equazione della conica dopo la rotazione. In particolare, il suo centro $C(x_C, y_C)$ è stato trasformato in un punto $C'(x_{C'}, y_{C'})$. Sappiamo poi che se trasliamo il centro $C'(x_{C'}, y_{C'})$ nell'origine, l'equazione deve assumere la forma canonica precedentemente trovata, cioè $x''^2 - 2y''^2 + 3 = 0$. La traslazione ha equazioni

$$\begin{cases} x'' = x' - x_{C'} \\ y'' = y' - y_{C'}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' + x_{C'} \\ y' = y'' + y_{C'}. \end{cases}$$

Sostituendo abbiamo

$$\begin{aligned} &x''^2 - 2y''^2 + x''(2x_{C'} - 2) + y''(-4xy_{C'} + 4) + \\ &+ x_{C'}^2 - 2y_{C'}^2 - 2x_{C'} + 4y_{C'} + 2 = 0. \end{aligned}$$

Poiché i coefficienti di x'' e di y'' devono annullarsi, ricaviamo

$$\begin{cases} 2x_{C'} - 2 = 0 \\ -4xy_{C'} + 4 = 0 \end{cases}$$

da cui $x_{C'} = 1$ ed $y_{C'} = 1$. Si noti che per questi valori il termine noto $x_{C'}^2 - 2y_{C'}^2 - 2x_{C'} + 4y_{C'} + 2$ diventa effettivamente uguale a 3, come stabilito nella forma canonica. Il centro $C(x_C, y_C)$ di γ si ottiene sostituendo queste coordinate nella relazione tra le coordinate x, y ed x', y' precedentemente determinata, cioè

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Otteniamo di conseguenza $x_C = \sqrt{2}$ ed $y_C = 0$, cioè il centro di γ è il punto $C(\sqrt{2}, 0)$.

Secondo metodo. In generale il centro C è l'unica soluzione del sistema

$$Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix},$$

essendo Q la matrice associata alla parte quadratica della conica. Nel caso che stiamo considerando risulta

$$Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

da cui ricaviamo immediatamente $x_C = \sqrt{2}, y_C = 0$, e quindi $C(\sqrt{2}, 0)$.

Pertanto, il cambio di riferimento che riduce γ a forma canonica risulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{cases}$$

2. Gli assi di γ sono le rette passanti per il centro e parallele agli autovettori, cioè le rette $y = x - \sqrt{2}$ ed $y = -x + \sqrt{2}$. In particolare, quando γ è rappresentata nella forma canonica $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$, l'asse principale (cioè quello contenente i vertici) è l'asse y, ed i vertici sono i punti $V_1'\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, e $V_2'\left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Sostituendo ad x' ed y' le coordinate di tali punti nelle equazioni del cambio di riferimento, otteniamo le coordinate x, y dei vertici di γ. Si ottengono pertanto i punti $V_1\left(\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $V_2\left(\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Osserviamo poi che, data l'equazione canonica di una iperbole nella forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, gli asintoti sono le rette di equazioni $y = \pm\frac{b}{a}x$. Nel nostro caso, utilizzando le coordinate x', y' per esprimere il riferimento nel quale la conica è ridotta a forma canonica abbiamo

$$x'^2 - 2y'^2 + 3 = 0 \quad \frac{x'^2}{3} - \frac{2y'^2}{3} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 3, \; b^2 = \frac{3}{2}.$$

Pertanto gli asintoti dell'equazione canonica sono le rette $y' = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x'$. Per ricavare gli asintoti di γ dobbiamo trasformare queste rette mediante la trasformazione inversa di quella che riduce γ a forma canonica. Poiché M è una matrice ortogonale, risulta $M^{-1} = M^t$, per cui abbiamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{bmatrix},$$

e quindi

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}y. \end{cases}$$

Sostituendo in $y' = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x'$ otteniamo che gli asintoti di γ sono le rette $(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}+1)y + \sqrt{2} - 2 = 0$ e $(\sqrt{2}+1)x + (\sqrt{2}-1)y - \sqrt{2} - 2 = 0$, rispettivamente.

La rappresentazione approssimativa di γ (per esigenze grafiche le unità di misura sui due assi sono state leggermente alterate) è descritta nella Figura 9.8.

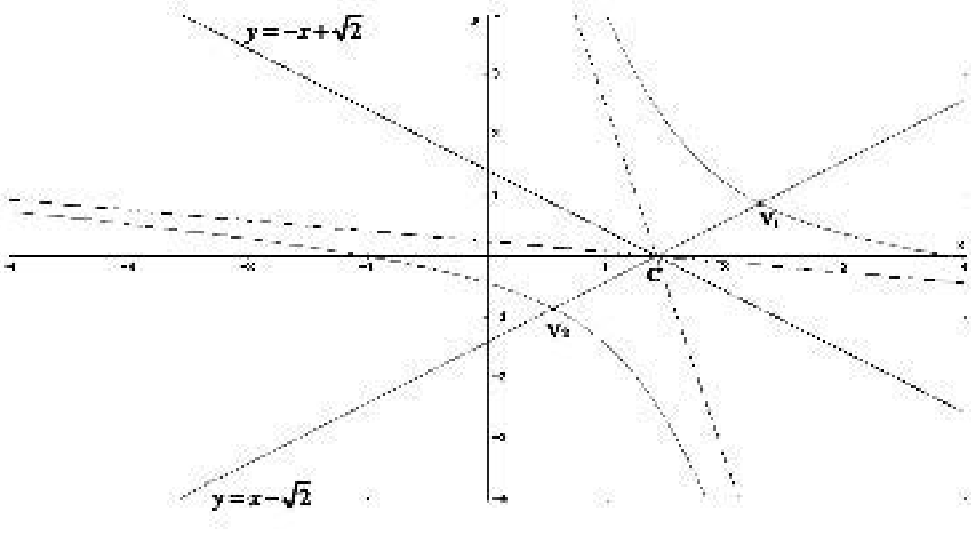


Figura 9.8: rappresentazione grafica della conica $x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 4 = 0$.

■

9.7.19. *Si consideri la conica γ di equazione*

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 475x + 200y + 1875 = 0.$$

1. *Classificare γ.*

2. *Ridurre γ a forma canonica.*

3. *Determinare il cambio di riferimento che porta γ in forma canonica.*

4. *Tracciare un grafico approssimativo di γ.*

Svolgimento.

1. Calcolando gli invarianti di γ otteniamo

   - Invariante cubico

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} 16 & -12 & -\frac{475}{2} \\ -12 & 9 & 100 \\ -\frac{475}{2} & 100 & 1875 \end{bmatrix} = -\frac{5^8}{4} \neq 0 \text{ (conica non degenere)}$$

   - Invariante quadratico

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

   - Invariante lineare

$$I_1 = \operatorname{Tr} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 6 \end{bmatrix} = 25$$

   Pertanto γ è una parabola.

2. La forma canonica di una parabola è del tipo $y^2 = 2px$, essendo

$$p = \pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}} \quad \Rightarrow \quad p = \pm\frac{5}{2}.$$

   Scegliendo la soluzione positiva otteniamo la forma canonica $y^2 = 5x$.

3. Calcoliamo innanzitutto gli autovalori della matrice Q associata alla parte quadratica

$$\det \begin{bmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \begin{cases} 0 \\ 25 \end{cases}$$

   La matrice ortogonale M che diagonalizza Q ha come colonne gli autovettori normalizzati di Q.

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 16x - 12y = 0 \\ -12x + 9y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{4}{3}x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda = 25 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -9x - 12y = 0 \\ -12x - 16y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -\tfrac{3}{4}x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalizzando $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ otteniamo i versori $\widehat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{5}\mathbf{u}_1$ ed $\widehat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{u}_2$, per cui la matrice M risulta

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

La componente rotatoria del cambio di riferimento è quindi data da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Dobbiamo poi traslare il vertice nell'origine. Per determinare il vertice della parabola possiamo seguire due metodi.

Primo metodo. Possiamo intersecare la parabola con la generica retta $y = -\frac{3}{4}x + q$ ortogonale all'asse, e selezionare poi il valore di q che rende nullo il discriminante $\triangle$ del sistema. In corrispondenza di tale q si ha la retta tangente, ed il corrispondente punto di contatto è il vertice della parabola.

Quindi si ha

$$\begin{cases} \gamma \\ y = -\frac{3}{4}x + q \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \left(4x + \frac{9}{4}x - 3q\right)^2 - 475x - 150x + 200q + 1875 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + q \end{cases}$$

L'equazione risolutiva diventa

$$625x^2 - 2x(300q + 2^3 \cdot 5^4) + 144q^2 + 2^7 \cdot 5^2 + 2^4 3 \cdot 5^4,$$

da cui, svolgendo i calcoli, si ricava che $\triangle = 0$ se e solo se $q = -\frac{25}{4}$. La retta tangente ha quindi equazione $y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$, e l'ascissa del vertice risulta

$$x_V = \frac{-300q + 2^3 \cdot 5^4}{5^4} = \frac{-300 \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) + 2^3 \cdot 5^4}{5^4} = 5.$$

Sostituendo nell'equazione della retta tangente si ricava $y_V = -10$, per cui il vertice è il punto $V(5, -10)$.

Secondo metodo. Intersecando la parabola con una qualsiasi retta ortogonale all'asse si ottengono due punti P_1, P_2 il cui punto medio M appartiene all'asse. Questo è vero anche se i punti P_1, P_2 sono immaginari coniugati (cioè se la retta scelta non ha intersezioni reali con la parabola), in quanto il loro punto medio ha comunque coordinate reali. Possiamo allora utilizzare una qualsiasi retta ortogonale all'asse, per esempio proprio l'autospazio $y = -\frac{3}{4}x$ associato all'autovalore non nullo. Una volta trovato M, l'asse si ottiene considerando la retta passante per M e parallela all'autospazio associato all'autovalore nullo, ed il vertice è l'intersezione tra l'asse e la parabola.

Nel caso considerato abbiamo

$$\begin{cases} \gamma \\ y = -\frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 625x^2 - 2^3 \cdot 5^4 x + 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottengono i punti $P_1(4, -3)$ e $P_2(12, -9)$, il cui punto medio è $M(8, -6)$. Quindi l'asse della parabola è la retta $y + 6 = \frac{4}{3}(x - 8)$, cioè $y = \frac{4}{3}x - \frac{50}{3}$. Intersecando con γ si trova il punto $V(5, -10)$.

Pertanto, il cambio di riferimento che riduce γ a forma canonica risulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + 5 \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - 10 \end{cases}$$

4. L'asse di γ è la retta $y = \frac{4}{3}x - \frac{50}{3}$, il vertice è il punto $V(5, -10)$ e le intersezioni tra γ e l'asse x sono fornite dai punti $A\left(\frac{75}{16}, 0\right)$ e $B(25, 0)$, come si ricava facilmente mettendo $y = 0$ nell'equazione della parabola data. La rappresentazione grafica approssimativa di γ è illustrata nella Figura 9.9

■

Osservazione 9.7.20. *Per determinare l' asse di una parabola qualsiasi possiamo generalizzare il ragionamento svolto nel secondo metodo precedentemente illustrato. Si ricava allora che, data la parabola di equazione $(Ax + By)^2 + Cx + Dy + E = 0$, il suo asse è la retta di equazione*

$$2Ax(A^2 + B^2) + 2By(A^2 + B^2) + AC + BD = 0.$$

■

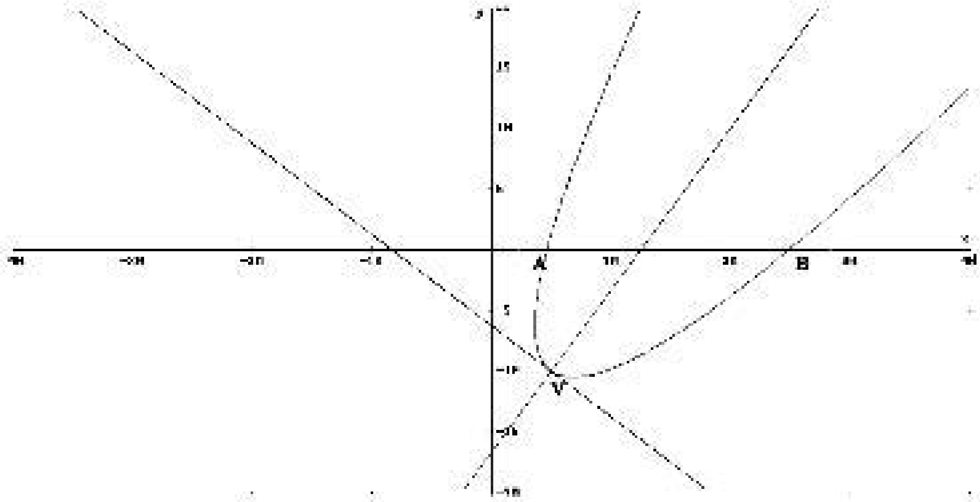


Figura 9.9: rappresentazione grafica della conica $16x^2-24xy+9y^2-475x+200y+1875=0$.

9.7.21. *Sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche di equazione*

$$2x^2+2y^2+3xy-x-2y-1+\lambda(7x+2)(7y-5)=0.$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{F}$ ha quattro punti base.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti in cui le coniche di $\mathcal{F}$ hanno tangente parallela all'asse x.

Svolgimento.

(a) Il fascio é generato dalle coniche $\gamma_1 : 2x^2+2y^2+3xy-x-2y-1$ e $\gamma_2 : (7x+2)(7y-5)=0$. La prima é una ellisse reale di centro $C(-\frac{2}{7},\frac{5}{7})$. La seconda é una conica degenere in due rette passanti per C. Quindi l'intersezione tra γ_1 e γ_2 é costituita da 4 punti reali distinti, per cui il fascio ha 4 punti base.

(b) Possiamo procedere in due maniere distinte. La prima consiste nell'intersecare il fascio con la generica retta parallela all'asse x, di equazione $y=k$, ed imporre l'annullamento del discriminante Δ del sistema. Questo fornisce una equazione dalla quale si può ricavare λ in funzione di x e k, cioè di x ed y. Sostituendo questa relazione nell'equazione del fascio di coniche si ottiene l'equazione del luogo di punti richiesto.

Lo stesso risultato si può conseguire sfruttando la seguente considerazione. Data una conica di equazione $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, la *retta tangente* in un punto $P(x_P,y_P)$ ha equazione

$$(2Ax_P+By_P+D)x+(Bx_P+2Cy_P+E)y+Dx_P+Ey_P+2F=0.$$

La retta tangente è parallela all'asse x se e solo se $2Ax_P + By_P + D = 0$.

In questo caso ciò corrisponde a $4x_P + 3y_P - 1 + \lambda(49y_P - 35) = 0$. Ricavando λ, sostituendo nel fascio e rinominando x_P ed y_P con x ed y rispettivamente, si ottiene il luogo richiesto, di equazione $(7y-5)(-14x^2+14y^2-8x-20y-5) = 0$. ■

9.7.22. *Sia $\mathcal{F}$ il fascio di coniche avente come generatrici le due curve $\gamma_1 : x^2+y^2-2x-2y+1=0$ e $\gamma_2 : (2x-y-1)(3x+y-4)=0$.*

(a) Dimostrare che $\mathcal{F}$ ha quattro punti base.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti in cui le coniche di $\mathcal{F}$ hanno tangente passante per l'origine.

Svolgimento.

(a) La curva $\gamma_1 : x^2+y^2-2x-2y+1=0$ é una circonferenza di centro $C(1,1)$. La curva $\gamma_2 : (2x-y-1)(3x+y-4)=0$ é spezzata in due rette passanti per C. Quindi γ_1 e γ_2 hanno in comune 4 punti reali e distinti, per cui il fascio ha 4 punti base.

(b) Il fascio di coniche ha equazione

$$x^2+y^2-2x-2y+1+\lambda(2x-y-1)(3x+y-4)=0.$$

Usiamo la formula che fornisce l'equazione della tangente ad una generica conica in un punto P (cfr. Esercizio 9.7.21 parte (b)).

La retta tangente alla generica conica del fascio passa per l'origine se e solo se $-2x-2y+2+\lambda(-11x+3y+8)=0$. Ricavando λ e sostituendo nel fascio si ottiene il luogo richiesto, di equazione $(x^2+y^2-2x-2y+1)(-11x+3y+8)+2(x+y-1)(2x-y-1)(3x+y-4)=0$.

■

9.7.23. *Scrivere l'equazione cartesiana dell'iperbole equilatera γ tangente in $O(0,0)$ ed $A(2,2)$ alla circonferenza $x^2+y^2-2x-2y=0$.*

Svolgimento. Possiamo innanzitutto costruire il fascio di coniche descritto dalla combinazione lineare tra due qualsiasi coniche soddisfacenti le condizioni date. Si puó prendere la circonferenza stessa, e la retta $OA : y = x$ contata due volte. Abbiamo quindi il fascio di equazione $x^2+y^2-2x-2y+\lambda(x-y)^2=0$. Per avere una iperbole equilatera, l'invariante lineare deve essere nullo, e quindi $\lambda = -1$. Sostituendo nell'equazione del fascio si ha la conica $xy - x - y = 0$. ■

9.7.24. *Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano nei quali le parabole di vertice $V(1,1)$ ed asse $y = x$ hanno tangente parallela alla retta $y = 2x$.*

Svolgimento. Possiamo osservare che la retta tangente nel vertice, essendo perpendicolare all'asse, ha coefficiente angolare -1, e quindi é la retta $x + y - 2 = 0$. Quindi possiamo costruire il fascio di equazione $\mathcal{F} : x + y - 2 + \lambda(x - y)^2 = 0$.
Il coefficiente angolare di una generica retta tangente ad una conica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é (cfr. Esercizio 9.7.21 parte (b))

$$m = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}.$$

Una tangente al fascio è quindi parallela alla retta $y = 2x$ se e solo se, sostituendo ad A, B, C, D, E i coefficienti ricavati da $\mathcal{F}$, si ha $m = 2$. Questo corrisponde a $2\lambda(x-y)-3 = 0$, e quindi $\lambda = \frac{3}{2(x-y)}$. Sostituendo in $\mathcal{F}$ si ricava la conica degenere $(x-y)(5x-y-4) = 0$. ■

9.7.25. *Si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F}$ di equazione $(x - y + 1)^2 + \lambda(2x - y) = 0$.*

(a) Dimostrare che le coniche non degeneri di $\mathcal{F}$ sono tutte parabole.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei vertici delle parabole del fascio.

Svolgimento.

(a) Calcolando l'invariante quadratico si nota che esso è nullo per qualsiasi valore di λ, il che implica che tutte le coniche non degeneri del fascio sono parabole.

(b) L' asse di una parabola di equazione $(Ax + By)^2 + Cx + Dy + E = 0$ è la retta di equazione $2Ax(A^2 + B^2) + 2By(A^2 + B^2) + AC + BD = 0$ (cfr. Osservazione 3 a pagina 201).

L'equazione del fascio di parabole assegnato si può scrivere nella maniera seguente

$$(x - y)^2 + 2(1 + \lambda)x - (2 + \lambda)y + 1 = 0,$$

da cui ricaviamo $A = 1$, $B = -1$, $C = 2 + 2\lambda$, $D = -2 - \lambda$.

Di conseguenza, il generico asse ha equazione $4x - 4y + 4 + 3\lambda = 0$.

Per ottenere il luogo dei vertici bisogna intersecare il fascio con il generico asse. Ricavando λ dall'equazione dell'asse, e sostituendo nell'equazione di $\mathcal{F}$, si ottiene $(x - y + 1)(-5x + y + 3) = 0$, che é il luogo dei vertici, costituito pertanto da una conica degenere in due rette reali distinte. ■

9.7.26. *Determinare il vertice della parabola non degenere del fascio di coniche di equazione $\mathcal{F} : (x + y - 1)^2 + \lambda xy = 0$.*

Svolgimento. Calcolando gli invarianti abbiamo $I_3 = -\frac{\lambda^2}{4}$, mentre $I_2 = 0$ per $\lambda = 0$ e $\lambda = 4$. Per $\lambda = 0$ si ha la parabola degenere nella retta $x + y - 1 = 0$ contata due volte. Quindi, l'unica parabola non degenere del fascio si ottiene per $\lambda = -4$, ed ha equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Usando la formula per determinare l'asse di una parabola (cfr. Esercizio 9.7.25 parte (b)), ricaviamo che l'asse della parabola è la retta $y = x$. Intersecando con la parabola si ottiene il vertice, dato dal punto $V(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. ∎

9.7.27. *Studiare il fascio di coniche di equazione*

$$F(x, y, \lambda) : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 + \lambda(x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3) = 0.$$

Svolgimento. Il fascio di coniche è ottenuto mediante la combinazione lineare di due circonferenze, quindi è un fascio di circonferenze. Raccogliendo i termini simili abbiamo

$$F(x, y, \lambda) : (1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 + (2 - 4\lambda)x + (2 - 6\lambda)y - 7 - 3\lambda = 0.$$

Il generico centro risulta dato da

$$C\left(\frac{2\lambda - 1}{1 + \lambda}, \frac{3\lambda - 1}{1 + \lambda}\right),$$

mentre il generico raggio è

$$R = \sqrt{\frac{(2\lambda - 1)^2 + (3\lambda - 1)^2}{(1 + \lambda)^2} - \frac{-7 - 3\lambda}{1 + \lambda}} = \frac{\sqrt{16\lambda^2 + 9}}{1 + \lambda}.$$

Per trovare la retta dei centri possiamo procedere in due maniere distinte. La prima consiste nell'eliminare λ nel sistema

$$\begin{cases} x = \frac{2\lambda - 1}{1 + \lambda} \\ y = \frac{3\lambda - 1}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x = 2\lambda - 1 \\ (1 + \lambda)y = 3\lambda - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1 + \lambda)x - 2\lambda = (1 + \lambda)y - 3\lambda \\ (1 + \lambda)y = 3\lambda - 1, \end{cases}$$

da cui ricaviamo $\lambda = \dfrac{y - x}{x - y + 1}$, e, sostituendo nella seconda equazione, si ottiene

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Allo stesso risultato si perviene, più velocemente, calcolando l'equazione della retta passante per i centri delle due circonferenze generatrici, cioè per i punti $C_1(-1, -1)$ e $C_2(2, 3)$.

L'asse radicale del fascio è la retta che si ottiene facendo la differenza tra le equazioni delle due circonferenze generatrici. Si ricava $(2 - (-4))x + (2 - (-6))y - 7 - (-3) = 0$, e quindi la retta di equazione $3x + 4y - 2 = 0$. Si noti che essa è ortogonale alla retta dei centri.

Se intersechiamo l'asse radicale con una qualsiasi delle circonferenze del fascio otteniamo i punti base. Utilizzando per esempio la generatrice corrispondente a $\lambda = 0$ abbiamo per cui l'asse radicale interseca γ in due punti reali distinti, e quindi il fascio di circonferenze ammette due punti base. Risolvendo il sistema tra le equazioni di γ e dell'asse radicale si ottengono le coordinate dei punti base, dati da

$$A(-1,2), \quad B\left(\frac{19}{5},-\frac{2}{5}\right).$$

■

9.8 ESERCIZI RELATIVI AL CAPITOLO 8

9.8.1. *Determinare centro e raggio della circonferenza*

$$\gamma\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+20=0 \\ x+y+z-4=0. \end{cases}$$

Svolgimento. La circonferenza viene assegnata come intersezione tra una sfera ed un piano. Il centro della sfera è $C_1(2,-1,4)$, ed il suo raggio è $R=1$. La retta per C_1 perpendicolare al piano $x+y+z-4=0$ ha equazione

$$r\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=4+\lambda. \end{cases}$$

Il centro C della circonferenza è l'intersezione tra r ed il piano. Questa si ottiene per $\lambda=-\frac{1}{3}$, e quindi $C(\frac{5}{3},-\frac{4}{3},\frac{11}{3})$. Essendo $\overline{CC_1}^2=\frac{1}{3}$, dal teorema di Pitagora si ricava che il raggio r della circonferenza è $r=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$. ■

9.8.2. *Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(1,0,1)$, avente come direttrice la curva γ del piano xy di equazione $x^2-2xy+y^2-4x-6y+2=0$.*

Svolgimento. Si veda la soluzione dell'Esercizio 9.6.34. ■

9.8.3. *Scrivere l'equazione cartesiana del cono circolare retto avente il vertice nel centro della sfera $S: x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+20=0$, e per direttrice la circonferenza γ tagliata su S dal piano $\pi: x+y+z-4=0$.*

Svolgimento. Il centro della sfera é $C(2,-1,4)$. La generica retta per C ha equazione

$$r\begin{cases} x=2+a\lambda \\ y=-1+b\lambda \\ z=4+c\lambda. \end{cases}$$

La retta r interseca il piano $\pi: x+y+z-4=0$ per $\lambda = -\frac{1}{a+b+c}$, cioé nel punto $P\left(2-\dfrac{a}{a+b+c}, -1-\dfrac{b}{a+b+c}, 4-\dfrac{c}{a+b+c}\right)$. Imponendo che P appartenga alla sfera si ottiene $ab+ac+bc=0$. Essendo $a=\frac{x-2}{\lambda}$, $b=\frac{y+1}{\lambda}$ e $c=\frac{z-4}{\lambda}$, otteniamo $(x-2)(y+1)+(x-2)(z-4)+(y+1)(z-4)=0$, che é l'equazione del cono richiesto.

■

9.8.4. *Determinare il piano tangente alla quadrica $x^2+2xy+y^2-2xz=0$ nel punto $P(1,-1,0)$.*

Svolgimento. Il piano tangente in un punto $P(x_P, y_P, z_P)$ appartenente alla quadrica ha equazione

$$\begin{aligned}&(x-x_P)(a_{11}x_P+a_{12}y_P+a_{13}z_P)+(y-y_P)(a_{12}x_P+a_{22}y_P+a_{23}z_P)+\\&+(z-z_P)(a_{13}x_P+a_{23}y_P+a_{33}z_P)=0.\end{aligned}$$

In questo esercizio il punto P appartiene effettivamente alla quadrica, in quanto le sue coordinate verificano l'equazione assegnata. Dalla formula precedente ricaviamo quindi che il piano tangente in P ha equazione $z=0$. ■

9.8.5. *Classificare con gli invarianti la quadrica Ω di equazione $5y^2+5z^2+x-10y-10z+5=0$.*

Svolgimento. Gli invarianti di Ω sono dati da

$$I_1 = 10, \quad I_2 = 25, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = -\frac{25}{4}.$$

Quindi la quadrica è un paraboloide ellittico. ■

9.8.6. *Data la quadrica $S: x^2-2xy+4y^2-6xz+z^2-4x=0$,*

(a) stabilire la natura dei punti di S.

(b) stabilire la natura della conica all'infinito della quadrica.

Svolgimento.

(a) Il punto $O(0,0,0)$ appartiene alla quadrica S. Il piano tangente in questo punto si ottiene uguagliando a zero i termini di primo grado di S, per cui ha equazione $x=0$. Intersecando la quadrica con tale piano si ottiene

$$\begin{cases}4y^2+z^2=0\\x=0,\end{cases}$$

cioé due rette immaginarie coniugate. Quindi $O(0,0,0)$ é un punto ellittico, e, di conseguenza, tutti i punti della quadrica sono ellittici.

(b) La conica all'infinito si ottiene intersecando la quadrica con il piano improprio. Il cono affine che la proietta dall'origine ha equazione $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6xz + z^2 = 0$. La sua sezione con il piano $z = 1$ determina una ellisse reale non degenere. Quindi, la conica all'infinito é reale non degenere. ■

9.8.7. *Classificare la quadrica dell'Esercizio 9.8.5 mediante la conica all'infinito.*

Svolgimento. Nello svolgimento dell'Esercizio 9.8.5 abbiamo visto che la quadrica è un paraboloide ellittico. Determiniamo lo stesso risultato utilizzando la conica all'infinito. Il cono direttore di Ω ha equazione $5y^2 + 5z^2 = 0$. Intersecando con il piano $z = 1$ otteniamo la conica

$$\gamma \begin{cases} y^2 + 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 = \pm i \\ z = 1. \end{cases}$$

Quindi, la conica γ, e di conseguenza anche la conica all'infinito, è degenere, per cui la quadrica Ω appartiene alla famiglia dei paraboloidi. Poiché il punto $P(-5, 0, 0) \in \Omega$, la quadrica non è completamente immaginaria. Utilizzando l'equazione (8.3.6), si ricava che il piano tangente in P ha equazione $x - 10y - 10z + 5 = 0$. L'intersezione con la quadrica fornisce

$$\begin{cases} 5y^2 + 5z^2 + x - 10y - 10z + 5 = 0 \\ x - 10y - 10z + 5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2 + z^2 = 0 \\ x - 10y - 10z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y = \pm iz \\ x - 10y - 10z + 5 = 0. \end{cases}$$

Si ha cioè una conica degenere in due rette immaginarie coniugate, per cui Ω è a punti ellittici. Di conseguenza la quadrica è un paraboloide ellittico. ■

9.8.8. *Si consideri la quadrica S di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0$.*

(a) Dimostrare che i punti di S hanno natura ellittica.

(b) Dimostrare che S é una superficie di rotazione, e determinare l'equazione dell'asse di rotazione.

(c) Determinare la misura dell'angolo formato dall'asse di rotazione con la retta $x = y = z$.

Svolgimento.

(a) Calcolando gli invarianti della quadrica assegnata, otteniamo $I_4 = -1 < 0$ ed $I_3 = 0$.

Pertanto la quadrica é un paraboloide ellittico, quindi é a punti ellittici.

Svolgimento. Sia $S : Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2+Gx+Hy+Iz+L=0$ la generica quadrica. La tangenza in $O(0,0,0)$ al piano $\pi : 4x-2y-z=0$ implica $G=4k, H=-2k, I=-k, L=0$, con k costante non nulla. Poiché i piani di simmetria sono paralleli ai piani coordinati, i coefficienti dei termini misti sono nulli, cioé $B=D=E=0$. Il centro di una quadrica : $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dxz+Eyz+Fz^2+Gx+Hy+Iz+L=0$ è la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} 2Ax+By+Dz+G=0 \\ Bx+2Cy+Ez+H=0 \\ Dx+Ey+2Fz+I=0. \end{cases}$$

Nel nostro caso, imponendo che il sistema sia risolto dalle coordinate del punto $P(1,2,1)$, otteniamo $A=-2k, C=\frac{k}{2}, F=\frac{k}{2}$. Dividendo tutto per k si ha $S : -4x^2+y^2+z^2+8x-4y-2z=0$, che è l'equazione della quadrica richiesta. ∎

9.8.11. *Determinare l'asse di simmetria ed il vertice del paraboloide di equazione* $f(x,y,z)$: $5y^2+5z^2+x-10y-10z+5=0$.

Svolgimento. Dall'Esercizio 9.8.7 sappiamo che la quadrica considerata è un paraboloide ellittico. Determiniamo l'autovettore associato all'autovalore nullo:

$$Q\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, l'asse di simmetria è parallelo all'asse x. Per ottenerlo possiamo intersecare i due piani di simmetria del paraboloide determinati dagli autovettori associati agli autovalori non nulli. Il polinomio caratteristico della matrice Q si annulla, oltre che per $\lambda=0$, solo per $\lambda=5$, che è quindi un autovalore doppio. Il paraboloide ammette quindi infiniti piani di simmetria (cfr. Osservazione 3 a pagina 241). L'asse di simmetria è allora l'intersezione tra i piani di simmetria determinati da una qualsiasi base dell'autospazio associato all'autovalore doppio. Il calcolo esplicito mette in evidenza che tale autospazio è costituito dal piano yz, per cui possiamo assumere, come base, la coppia di vettori

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ad essi corrispondono i piani di simmetria dati da

$$\pi_1 = \mathbf{j} \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0 \Rightarrow y = 1,$$

$$\pi_2 = \mathbf{k} \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0 \Rightarrow z = 1.$$

Di conseguenza, l'asse di simmetria è la retta di equazioni

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Il vertice si ottiene intersecando l'asse di simmetria con il paraboloide, per cui

$$\begin{cases} 5y^2 + 5z^2 + x - 10y - 10z + 5 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow V(5, 1, 1).$$

Se vogliamo ottenere il vertice senza determinare l'asse di simmetria, possiamo considerare il generico piano ortogonale all'asse di simmetria, di equazione $x = k$. Intersechiamolo con il paraboloide, e determiniamo k imponendo che questa intersezione sia ridotta ad un solo punto:

$$\begin{cases} 5y^2 + 5z^2 + x - 10y - 10z + 5 = 0 \\ x = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 + \frac{k}{5} = 0 \\ x = k. \end{cases}$$

Risolvendo rispetto ad y la prima equazione si ottiene

$$y = 1 \pm \sqrt{-z^2 + 2z - \frac{k}{5}}.$$

Poiché ci interessano i valori di k per i quali si ha un solo punto di intersezione, è necessario avere un solo valore per y ed un solo valore per z. Dobbiamo quindi imporre innanzitutto che il discriminante sia nullo, per cui

$$z^2 - 2z + \frac{k}{5} = 0 \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k}{5}}.$$

Abbiamo un solo valore di z se e solo se $k = 5$, da cui si ricava $z = 1$ ed $y = 1$. Il vertice del paraboloide è quindi il punto $V(5, 1, 1)$. ■

9.8.12. *Data la conica γ, di equazione*

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2xz + y^2 + 2x - 2y = 0 \\ x - y - z = 0, \end{cases}$$

stabilirne la natura.

Svolgimento. Sostituendo $z = x - y$ nell'equazione della quadrica, otteniamo il cilindro che proietta γ da $Z_\infty(0, 0, 1, 0)$:

$$x^2 - 6xy - y^2 - 2x + 2y = 0.$$

Sul piano xy ciò rappresenta la conica proiezione di γ. Calcolando gli invarianti si ricava $I_3 = 6$, $I_2 = -10$, $I_1 = 0$, per cui tale conica è una iperbole equilatera. La conica γ, è quindi una iperbole. Tuttavia, essa non è una iperbole equilatera, poiché il piano $x - y - z = 0$ al quale appartiene non è ortogonale alle generatrici del cilindro (si veda anche l'Osservazione 5 a pagina 233. ■

9.8.13. *Classificare le coniche che si ottengono sezionando un ellissoide reale con piani paralleli ai piani di simmetria.*

Svolgimento. Riducendo l'ellissoide a forma canonica otteniamo una equazione del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + D = 0$, essendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori della matrice Q associata alla parte quadratica dell'equazione della quadrica. I piani di simmetria coincidono allora con i piani coordinati. Sezioniamo con piani paralleli al piano xy

$$\begin{cases} \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + D = 0 \\ z = k. \end{cases}$$

Sul piano $z = k$ si ottiene allora la conica γ_k di equazione $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 k^2 + D = 0$. Si hanno allora i seguenti casi

1. $|k| < \sqrt{-\frac{D}{\lambda_3}}$. Allora γ_k è una ellisse reale se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mentre è una circonferenza se $\lambda_1 = \lambda_2$.

2. $|k| = \sqrt{-\frac{D}{\lambda_3}}$. Allora il piano $z = k$ è tangente a γ_k, che è quindi una conica degenere, spezzata in due rette immaginarie coniugate.

3. $|k| > \sqrt{-\frac{D}{\lambda_3}}$. Allora γ_k è una conica completamente immaginaria.

Si hanno risultati analoghi sezionando l'ellissoide con piani paralleli ai piani xz ed yz. ■

9.8.14. *Scrivere l'equazione della generica quadrica contenente la seguente conica*

$$\gamma \begin{cases} -x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La conica γ si può scrivere nella forma seguente

$$\gamma \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = z. \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione di una generica quadrica

$$\begin{aligned} f(x,y,z): \ & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ & +2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned}$$

L'intersezione con il piano $x = z$ è rappresentata dalla conica

$$\begin{cases} (a_{11} + 2a_{13} + a_{33})x^2 + (2a_{12} + 2a_{23})xy + a_{22}y^2 + (2a_{14} + 2a_{34})x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \\ x = z. \end{cases}$$

Essa coincide con γ se e solo se i coefficienti del polinomio di secondo grado in x ed y risultano essere proporzionali, cioè

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = k \\ 2a_{12} + 2a_{23} = 0 \\ a_{22} = k \\ 2a_{14} + 2a_{34} = 0 \\ 2a_{24} = 0 \\ a_{44} = -k, \end{cases}$$

con k costante non nulla. Risolvendo otteniamo

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - (a_{11} + a_{33} - a_{22})xz - 2a_{12}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x - 2a_{14}z - a_{22} = 0.$$

Essendo $a_{22} \neq 0$ possiamo dividere tutto per a_{22}, e, ponendo

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = A, \frac{a_{12}}{a_{22}} = B, \frac{a_{33}}{a_{22}} = C, \frac{a_{14}}{a_{22}} = D,$$

otteniamo

$$Ax^2 + 2Bxy + y^2 - (A + C - 1)xz - 2Byz + Cz^2 + 2Dx - 2Dz - 1 = 0,$$

che rappresenta l'equazione delle ∞^4 quadriche contenenti la conica assegnata. ■

9.8.15. *Stabilire se la quadrica di equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 2y - 4z - 1 = 0$ è di rotazione e se possiede un centro di simmetria.*

Svolgimento. La matrice Q associata alla parte quadratica è già in forma diagonale, poiché mancano i termini in xy, xz, yz. Quindi, i coefficienti dei termini al quadrato sono già gli autovalori, e, poiché due di essi sono uguali, la quadrica è di rotazione. Inoltre, non essendoci autovalori nulli, la quadrica è a centro, e quindi possiede un centro di simmetria. ■

9.8.16. *Data la quadrica di equazione*

$$f(x, y, z) : \; x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 2y - 4z - 1 = 0,$$

determinare l'asse di rotazione.

Svolgimento. Dall'Esercizio 9.8.15, sappiamo che la quadrica assegnata è di rotazione ed ha un centro di simmetria. L'asse ha la direzione dell'autovettore associato all'autovalore semplice $\lambda = -1$, cioè

$$[Q - (-1)I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; x = y = 0 \; \forall z.$$

Quindi, l'asse di rotazione è parallelo all'asse z. Il centro di simmetria della quadrica si ottiene risolvendo il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, per cui si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1, -1, -2).$$

La retta parallela all'asse z e passante per il centro di simmetria $C(-1, -1, -2)$ ha equazioni

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1, \end{cases}$$

e rappresenta l'asse di rotazione della quadrica. ■

9.8.17. *Dimostrare che la quadrica di equazione $x^2+4y^2-z^2-1=0$ è rigata, e determinare le sue schiere di rette generatrici.*

Svolgimento. La parte quadratica dell'equazione di Ω è già in forma diagonale, per cui la matrice Q possiede tre autovalori distinti non nulli, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ e $\lambda_3 = -1$. Quindi la quadrica è un iperboloide ad una falda, la cui equazione, che è già data in forma canonica, può essere scritta nella forma seguente

$$(x - z)(x + z) = (1 - 2y)(1 + 2y).$$

Abbiamo allora le relazioni

$$\begin{cases} x - z = k\,(1 - 2y) \\ x + z = \frac{1}{k}\,(1 + 2y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = h\,(1 + 2y) \\ x + z = \frac{1}{h}\,(1 - 2y), \end{cases}$$

che esprimono le schiere di rette generatrici. ■

9.8.18. *Dimostrare che la quadrica di equazione $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 6x - 1 = 0$ è rigata, e determinare le sue schiere di rette generatrici. Data la quadrica di equazione.*

Svolgimento. Gli autovalori di Q risultano dati da $1, 4, -4$, mentre $I_4 = 160 > 0$, per cui la quadrica è un iperboloide ad una falda. Possiamo scrivere l'equazione della quadrica nella forma seguente

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 4y^2 - 4z^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 - 4z^2 = 10 - 4y^2$$

$$\Rightarrow (x - 3 - 2z)(x - 3 + 2z) = \left(\sqrt{10} - 2y\right)\left(\sqrt{10} + 2y\right).$$

Da ciò si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} x - 3 - 2z = k\left(\sqrt{10} - 2y\right) \\ x - 3 + 2z = \frac{1}{k}\left(\sqrt{10} + 2y\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3 - 2z = h\left(\sqrt{10} + 2y\right) \\ x - 3 + 2z = \frac{1}{h}\left(\sqrt{10} - 2y\right), \end{cases}$$

che esprimono le schiere di rette generatrici. ■

9.8.19. *Dimostrare che la quadrica di equazione $4x^2 - 2xy - y^2 + 2x - 4z - 1 = 0$ è rigata, e determinare le sue schiere di rette generatrici.*

Svolgimento. Essendo $I_3 = 0$ ed $I_4 = 12 > 0$ la quadrica è un paraboloide iperbolico. Scriviamo l'equazione in maniera da evidenziare dei quadrati

$$4x^2 + x^2 - x^2 - 2xy - y^2 + 2x - 4z - 1 = 0 \Rightarrow 5x^2 - (x+y)^2 = -2x + 4z + 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}x - x - y)(\sqrt{5}x + x + y) = -2x + 4z + 1.$$

Da ciò si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} \left(\sqrt{5}-1\right)x - y = k\left(-2x + 4z + 1\right) \\ \left(\sqrt{5}+1\right)x + y = \frac{1}{k}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\sqrt{5}-1\right)x - y = h \\ \left(\left(\sqrt{5}+1\right)x + y = \frac{1}{h}\left(-2x + 4z + 1\right), \end{cases}$$

che esprimono le schiere di rette generatrici. ■

9.8.20. *Determinare le rette generatrici del paraboloide di equazione $f(x,y,z) : 4x^2 - y^2 - 4z = 0$ passanti per il punto $P(1,2,0)$.*

Svolgimento. Possiamo procedere in due maniere diverse. Un metodo è quello di determinare il piano tangente in P ed intersecarlo con la quadrica. Utilizzando coordinate omogenee, rappresentiamo la quadrica mediante l'equazione $4x_1^2 - x_2^2 - 4x_3x_4 = 0$, mentre il punto diventa $P(1,2,0,1)$. In tal caso abbiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = -4x_4 \\ \frac{\partial f}{\partial x_4} = -4x_3. \end{cases}$$

Di conseguenza, tornando in coordinate non omogenee, il piano tangente in P ha equazione $8x - 4y - 4z = 0$, cioè $y = 2x - z$. Sostituendo nell'equazione della quadrica, otteniamo

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 4z = 0 \\ y = 2x - z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(-z + 4x - 4) = 0 \\ y = 2x - z, \end{cases}$$

da cui si ricava la coppia di generatrici

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 2x - z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -z + 4x - 4 = 0 \\ y = 2x - z. \end{cases}$$

In alternativa possiamo determinare le schiere di rette generatrici del paraboloide e sostituire poi nelle loro equazioni le coordinate del punto P, in maniera da stabilire i valori dei parametri che danno il passaggio per questo punto. Scomponendo il polinomio si ottiene $(2x - y)(2x + y) = 4z$, da cui si ricavano le schiere di rette generatrici, date da

$$\begin{cases} 2x - y = 4hz \\ h(2x+y) = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y = k \\ k(2x+y) = 4z. \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate del punto P si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 4h = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 0 = k \\ 4k = 0, \end{cases}$$

da cui si ricavano i valori $h = \frac{1}{4}$ e $k = 0$ dei parametri. Di conseguenza, le generatrici passanti per il punto P risultano essere le seguenti

$$\begin{cases} 2x - y = z \\ 2x + y = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 0 = 4z, \end{cases}$$

che si possono anche scrivere nella forma

$$\begin{cases} 4x - z - 4 = 0 \\ y = 2x - z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x - z, \end{cases}$$

come precedentemente ottenuto attraverso l'intersezione con il piano tangente. ■

9.8.21. *Determinare l'equazione cartesiana della quadrica generata dalla rotazione della conica di equazione $4x^2 + y^2 - 1 = 0$, intorno all'asse y.*

Svolgimento. Applicando il metodo descritto a pagina 240, si ricava che l'equazione della quadrica di rotazione richiesta è la seguente

$$4(x^2 + z^2) + y^2 - 1 = 0.$$

La conica γ che genera la quadrica è una ellisse in forma canonica, ed essa viene ruotata intorno ad uno dei suoi assi di simmetria. Notiamo in effetti che l' equazione risultante rappresenta un ellissoide di rotazione in forma canonica, le cui sezioni reali non degeneri con piani ortogonali all'asse y sono circonferenze. ■

9.8.22. *Sia γ la circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $C(1,2,-1)$ e raggio $R = 1$ con il piano $\pi : x + y - z - 4 = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro S che proietta la circonferenza γ parallelamente alla retta $r : x - 1 = \frac{y}{2} = -z$. Si classifichi poi il cilindro, si determini il suo asse e si scriva una sua forma canonica. Si determini inoltre, esplicitamente, il cambio di riferimento che riduce il cilindro a forma canonica.*

Svolgimento. Detto P il generico punto della circonferenza γ, si ha

$$\gamma : \begin{cases} (x_P - 1)^2 + (y_P - 2)^2 + (z_P + 1)^2 = 1 \\ x_P + y_P - z_P - 4 = 0. \end{cases}$$

Il cilindro S è formato dalle rette passanti per P ed aventi parametri direttori uguali a quelli di r, cioè $1, 2, -1$, per cui si ha

$$\lambda = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E_8 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\lambda = 9 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_9 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Una base di autovettori è data da

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pertanto, la matrice di rotazione M che ci interessa, ottenuta normalizzando B, è data da

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Il cambio di riferimento

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

riduce il cilindro alla forma canonica considerata. In particolare, applicando la matrice $M^{-1} = M^t$ al generico punto $[x, y, z]^t = [1 + q, 2 + 2q, -1 + q]^t \in a$, si trasforma l'asse del cilindro nell'asse z del sistema di riferimento. ■

9.8.23. *Determinare l'equazione cartesiana della superficie che si ottiene facendo ruotare la retta $s : 2x = 1 - y = z$ intorno alla retta $r : x = y = z$.*

Svolgimento. La retta r è data in forma normale, ed ha parametri direttori $1, 1, 1$. Dalle equazioni di s si ricava che i suoi parametri direttori sono $\frac{1}{2}, -1, 1$, e quindi le due rette non sono parallele. Controlliamo se sono sghembe applicando il criterio generale. Consideriamo quindi il punto $O(0, 0, 0) \in r$ ed il punto $S(1, -1, 2) \in s$, ed abbiamo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

e quindi le due rette sono sghembe. La superficie richiesta deve pertanto fornire un iperboloide ad una falda. Per determinare l'equazione di tale superficie osserviamo che essa è il luogo delle circonferenze appartenenti ai piani $\pi(\lambda)$ ortogonali ad r, centrate nei punti $C(\lambda) \in r$, ed aventi raggi uguale alla distanza tra $C(\lambda)$ ed $S(\lambda) = \pi(\lambda) \cap s$ (vedi Figura 9.10).

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + 2\lambda \\ z = z_P - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Otteniamo quindi $x_P = x - \lambda, y_P = y - 2\lambda, z_P = z + \lambda$, che, sostituiti nelle equazioni di γ forniscono

$$\gamma: \begin{cases} (x - \lambda - 1)^2 + (y - 2\lambda - 2)^2 + (z + \lambda + 1)^2 = 1 \\ x + y - z - 4\lambda - 4 = 0. \end{cases}$$

Ricavando λ dalla seconda equazione, e sostituendo nella prima, otteniamo l'equazione cartesiana del cilindro, che, dopo aver eseguito le opportune semplificazioni, risulta

$$\mathcal{S}: 7x^2 - 6xy + 2xz + 3y^2 + 6yz + 7z^2 - 8 = 0.$$

Il calcolo degli autovalori della matrice Q associata alla parte quadratica fornisce $\lambda = 0$ (come è ovvio trattandosi di un cilindro, $\lambda = 8$ e $\lambda = 9$. Pertanto gli autovalori non nulli hanno lo stesso segno e quindi si tratta di un cilindro ellittico. L'asse del cilindro è la retta passante per C e parallela all'autospazio E_0 associato all'autovalore nullo. Ovviamente E_0 deve coincidere con il vettore avente come componenti i parametri direttori della retta r, ma verifichiamo direttamente questo fatto. Detta Q la matrice associata alla parte quadratica di $\mathcal{S}$ si ha

$$Q = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

e, a meno di cambiare i segni, si hanno i parametri direttori di r. L'asse del cilindro è quindi dato da

$$a \begin{cases} x = 1 + q \\ y = 2 + 2q \\ z = -1 - q, \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Poiché l'equazione del cilindro è priva dei termini di primo grado, la forma canonica di $\mathcal{S}$ viene ottenuta immediatamente dopo la rotazione, in quanto questa non altera il termine noto, e diagonalizza la parte quadratica. Per esempio, volendo che l'asse a coincida con l'asse delle z del sistema di riferimento, una forma canonica di $\mathcal{S}$ risulta del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - 8 = 0$, essendo λ_1, λ_2 gli autovalori non nulli. Per esempio, possiamo assumere $8x^2 + 9y^2 - 8 = 0$ come forma canonica di $\mathcal{S}$

Per ottenere esplicitamente la rotazione richiesta dobbiamo costruire la matrice ortogonale speciale M che diagonalizza Q, le cui colonne sono gli autovettori normalizzati. Volendo portare a nell'asse z, dobbiamo costruire M lasciando la normalizzazione di E_0 come terza colonna. Cerchiamo poi gli autospazi associati agli altri due autovalori

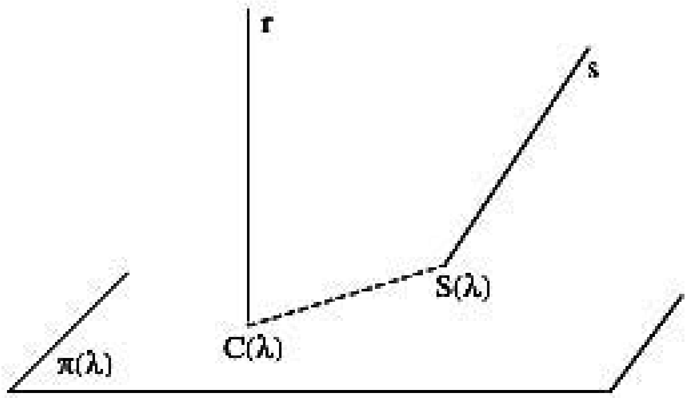


Figura 9.10: rotazione di s intorno ad r.

Abbiamo quindi $C(\lambda) = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\pi(\lambda) : x + y + z - 3\lambda = 0$, il che fornisce $S(\lambda) = (3\lambda - 1, 3 - 6\lambda, 6\lambda - 2)$. La superficie richiesta si ottiene quindi eliminando λ dalle due equazioni date da

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 + (z-\lambda)^2 = (\lambda - 3\lambda + 1)^2 + (\lambda - 3 + 6\lambda)^2 + (\lambda - 6\lambda + 2)^2 \\ x + y + z - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene la seguente equazione

$$4x^2 + 9xy + 4y^2 + 9xz + 9yz + 4z^2 - 11x - 11y - 11z + 7 = 0.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = \frac{1}{16} > 0$ ed $I_3 = \frac{13}{4} > 0$, per cui si ha effettivamente un iperboloide ad una falda. Gli autovalori sono $-\frac{1}{2}$ (autovalore doppio) e 13, il che conferma che l'iperboloide è di rotazione. La sua forma canonica risulta

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{52} = 0.$$

■

9.8.24. *Scrivere l'equazione cartesiana del cono S di vertice $V(1, -1, 3)$, avente come direttrice la circonferenza γ intersecata dal piano $x = y$ sulla sfera di centro $C(1, 1, -1)$ e raggio $R = 2$.*

Svolgimento. Detto P il generico punto della circonferenza γ, si ha

$$\gamma : \begin{cases} (x_P - 1)^2 + (y_P - 1)^2 + (z_P + 1)^2 = 4 \\ x_P = y_P. \end{cases}$$

Il cono richiesto si ottiene come luogo delle rette VP, per cui si ha

$$VP : \begin{cases} x = x_V + \lambda(x_V - x_P) \\ y = y_V + \lambda(y_V - y_P) \\ z = z_V + \lambda(z_V - z_P), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

da cui

$$\lambda = \frac{x-1}{1-x_P} = \frac{y+1}{-1-y_P} = \frac{z-3}{3-z_P}.$$

Mettendo a sistema con le equazioni di γ abbiamo

$$\begin{cases} (x_P-1)^2+(y_P-1)^2+(z_P+1)^2=4 \\ x_P=y_P \\ \frac{x-1}{1-x_P}=\frac{y+1}{-1-y_P} \\ \frac{y+1}{-1-y_P}=\frac{z-3}{3-z_P}. \end{cases}$$

Usando la seconda, terza e quarta equazione ricaviamo x_P, y_P, z_P in funzione di x, y, z

$$\gamma : \begin{cases} x_P = \frac{x+y}{2-x+y} \\ y_P = \frac{x+y}{2-x+y} \\ z_P = \frac{-3x+3y+2z}{2-x+y}, \end{cases}$$

e, sostituendo nella prima equazione, otteniamo l'equazione del cono. Svolgendo i calcoli e semplificando si ha

$$\mathcal{S} : 5x^2-6xy+3y^2-4xz+4yz+z^2-4x+2z-1=0.$$

■

9.8.25. *Si consideri la conica* Γ *di equazione* $x^2+6xy+y^2+2x-10y-6=0$.

(a) *Classificarla e ridurla a forma canonica.*

(b) *Determinare il cambio di riferimento che porta* Γ *in forma canonica.*

(c) *Determinare l'equazione della quadrica* Q *ottenuta facendo ruotare* Γ *intorno al suo asse non trasverso (non contenente i vertici), nel sistema di riferimento associato a* Γ. *Verificare che il punto* $P\left(1,1,\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \in Q$, *e che esistono due rette reali distinte passanti per* P *interamente contenute nella quadrica.*

Svolgimento.

(a) La matrice completa di Γ è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice associata alla forma quadratica di Γ è

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det(A) = -8$ allora $r(A) = 3$ e quindi Γ è una conica non degenere. Visto poi che $\det(Q) = -8 < 0$ allora gli autovalori di Q sono discordi. In conclusione Γ è un'iperbole. La forma canonica dell' iperbole è $\Gamma : \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma = 0$, con α, β autovalori di Q e $\alpha\beta\gamma = \det(A)$. Il polinomio caratteristico di Q è $\chi(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$ e quindi gli autovalori di Q sono $\alpha = -2, \beta = 4$. Infine, $\gamma = 1$, risolvendo $\alpha\beta\gamma = \det(A)$ rispetto a γ, dopo aver sostituito. In conclusione, una forma canonica per Γ è $-2X^2 + 4Y^2 + 1 = 0$ ossia $2X^2 - 4Y^2 = 1$.

(b) L' autospazio di Q relativo all' autovalore -2 è formato da tutti e soli i vettori le cui componenti verificano l' equazione lineare $x + y = 0$. Un vettore di modulo 1 ha allora componenti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e quindi la matrice ortogonale M del cambio di riferimento è

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Il centro di simmetria dell' iperbole ha coordinate che risolvono il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

e quindi è il punto di coordinate $(2, -1)$. In conclusione, il cambio di riferimento è descritto dall' equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Nel nuovo sistema di riferimento, dobbiamo ruotare l' iperbole Γ intorno all' asse Y. Ovviamente, l' equazione di Γ nello spazio è $\begin{cases} Z = 0 \\ 2X^2 - 4Y^2 = 1 \end{cases}$. Detto $P_0(a, b, c)$ un punto di Γ, la circonferenza che esso descrive nella rotazione intorno all' asse Y ha equazione $\begin{cases} Y = b \\ X^2 + Z^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$. La superficie di rotazione ha allora equazione che si ottiene eliminando a, b, c dal sistema

$$\begin{cases} Y = b \\ X^2 + Z^2 = a^2 + c^2 \\ c = 0 \\ 2a^2 - 4b^2 = 1 \end{cases}$$

dove le ultime due equazioni rappresentano l' appartenenza di P_0 a Γ. Effettuando i facili calcoli, otteniamo che Q ha equazione $Q : 2(X^2 + Z^2) - 4Y^2 = 1$. Sostituendo le coordinate di P nell' equazione di Q otteniamo l' identità $0 = 0$ e quindi $P \in Q$. Il piano tangente a Q in P ha equazione $2X - 4Y + Z\sqrt{6} - 1 = 0$. Intersecando la quadrica con il piano tangente, otteniamo una conica degenere unione delle due rette di equazione

$$\begin{cases} 2X = Z(\sqrt{6} + 2) - 1 + \sqrt{6} \\ 4Y = 2X + Z\sqrt{6} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X = Z(\sqrt{6} - 2) - 1 - \sqrt{6} \\ 4Y = 2X + Z\sqrt{6} - 1 \end{cases}.$$

Si noti che lo stesso risultato si può ottenere scomponendo la quadrica nelle due schiere di rette generatrici ed imponendo poi il passaggio di ognuna di esse per il punto P assegnato. ■

9.8.26. *Sia γ la curva ottenuta intersecando la quadrica Q, di equazione $y = x^2$, con il piano $\pi : x + y - z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro $\mathcal{S}$ che proietta γ parallelamente alla retta $r : x = y = z$.*

Svolgimento. Detto P il generico punto della conica γ, si ha

$$\gamma : \begin{cases} y_P = x_P^2 \\ x_P + y_P - z_P = 0. \end{cases}$$

Il cilindro $\mathcal{S}$ è formato dalle rette passanti per P ed aventi parametri direttori uguali a quelli di r, cioè $1, 1, 1$, per cui si ha

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + \lambda \\ z = z_P + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Otteniamo quindi $x_P = x - \lambda, y_P = y - \lambda, z_P = z - \lambda$, che, sostituiti nelle equazioni di γ forniscono

$$\gamma : \begin{cases} y - \lambda = (x - \lambda)^2 \\ x + y - z = \lambda. \end{cases}$$

Eliminando λ otteniamo l'equazione cartesiana del cilindro, data da

$$\mathcal{S} : y^2 - 2yz + z^2 + x - z = 0.$$

■

9.8.27. *Studiare e ridurre a forma canonica la quadrica $\mathcal{S} : 5x^2 - 6xy + 3y^2 - 4xz + 4yz + z^2 - 4x + 2z - 1 = 0$.*

Svolgimento. Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = 0$, $I_3 = -2$, $I_2 = 6$ ed $I_1 = 9$, per cui la quadrica è un cono. Possiamo poi facilmente osservare che la quadrica è dotata di punti reali. Per esempio, mettendo a sistema con l'asse z, ponendo cioè $x = y = 0$ nell'equazione di $\mathcal{S}$, abbiamo l'equazione risolvente $z^2 + 2z - 1 = 0$, che ha soluzioni reali $z = -1 \pm \sqrt{2}$. Pertanto $\mathcal{S}$ è un cono reale.

Determiniamo il vertice V. A tale scopo bisogna imporre che il piano tangente in V

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x - x_V) + \frac{\partial S}{\partial y}(y - y_V) + \frac{\partial S}{\partial z}(z - z_V) = 0,$$

sia indeterminato. Quindi V è la soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 10x - 6y - 4z - 4 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} = -6x + 6y + 4z = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial z} = -4x + 6y + 2z + 2 = 0, \end{cases}$$

che, svolgendo i calcoli, fornisce $V(1, -1, 3)$.

L'equazione caratteristica $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$ ha soluzioni $\lambda = 1$, $\lambda = 4 - 3\sqrt{2}$ e $\lambda = 4 + 3\sqrt{2}$. Gli autovalori non hanno tutti lo stesso segno, il che conferma per altra via che il cono è reale. Una sua forma canonica risulta $x^2 + (4-3\sqrt{2})y^2 + (4+3\sqrt{2})z^2 = 0$. La matrice associata alla forma quadratica di S è

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agli autovalori $\lambda = 1$, $\lambda = 4 - 3\sqrt{2}$ e $\lambda = 4 + 3\sqrt{2}$ corrispondono, rispettivamente, gli autospazi seguenti

$$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y = 2z \quad \Rightarrow \quad E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\lambda = 4 - 3\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1+3\sqrt{2} & -3 & -2 \\ -3 & -1+3\sqrt{2} & 2 \\ -2 & 2 & -3+3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}-4}{4} z \\ \\ y = \frac{2-3\sqrt{2}}{4} z \end{cases} \ \Rightarrow \ E_{4-3\sqrt{2}} = \left\langle \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}-4 \\ 2-3\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\lambda = 4 + 3\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1-3\sqrt{2} & -3 & -2 \\ -3 & -1-3\sqrt{2} & 2 \\ -2 & 2 & -3-3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{2}+4}{4} z \\ \\ y = \frac{2+3\sqrt{2}}{4} z \end{cases} \ \Rightarrow \ E_{4+3\sqrt{2}} = \left\langle \begin{bmatrix} -3\sqrt{2}-4 \\ 2+3\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

I piani passanti per il vertice $V(1,-1,3)$ ed ortogonali ai generatori degli autospazi, forniscono piani di simmetria del cono. Essi sono dati da

$2x + 2y + z - 3 = 0$ piano per V ortogonale ad E_1

$(3\sqrt{2}-4)x + (2-3\sqrt{2})y + 4z - 6\sqrt{2} - 6 = 0$ piano per V ortogonale ad $E_{4-3\sqrt{2}}$

$(-3\sqrt{2}-4)x + (2+3\sqrt{2})y + 4z + 6\sqrt{2} - 6 = 0$ piano per V ortogonale ad $E_{4+3\sqrt{2}}$.

Osservazione 9.8.28. *La quadrica assegnata in questo esercizio coincide con il cono determinato nell'Esercizio 9.8.24, costruito a partire dal vertice e dalla direttrice. Le considerazioni svolte ci hanno ora permesso di ritrovare, a partire dall'equazione cartesiana, le principali proprietà geometriche della quadrica. Si noti, in particolare, che il centro* $C(1,1,-1)$ *della conica direttrice* γ *appartiene al piano di simmetria* $2x+2y+z-3=0$.

■

9.8.29. *Studiare e ridurre a forma canonica la quadrica* $S : y^2 - 2yz + z^2 + x - z = 0$.

Svolgimento. La matrice associata alla quadrica è data da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

La somma delle prime tre righe è nulla, quindi $I_4 = \det A = 0$. La matrice Q associata alla parte quadratica di Ω risulta

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

e quindi, poiché la prima riga è nulla, abbiamo $I_3 = \det Q = 0$. Pertanto Ω può essere un cilindro oppure una quadrica spezzata. Osserviamo che la sottomatrice di A data da $\{R_2, R_3, R_4\} \cap \{C_2, C_3, C_4\}$ ha determinante uguale a $-\frac{1}{4}$, quindi A ha caratteristica 3, e, di conseguenza, Ω non è spezzata. Il calcolo dell'invariante quadratico fornisce $I_2 = 0$, per cui Ω è un cilindro parabolico. Tale quadrica è ottenuta proiettando una parabola γ parallelamente ad una data direzione, per cui si puó considerare come luogo di parabole aventi vertici appartenenti ad una retta r (vedi Figura 9.11)

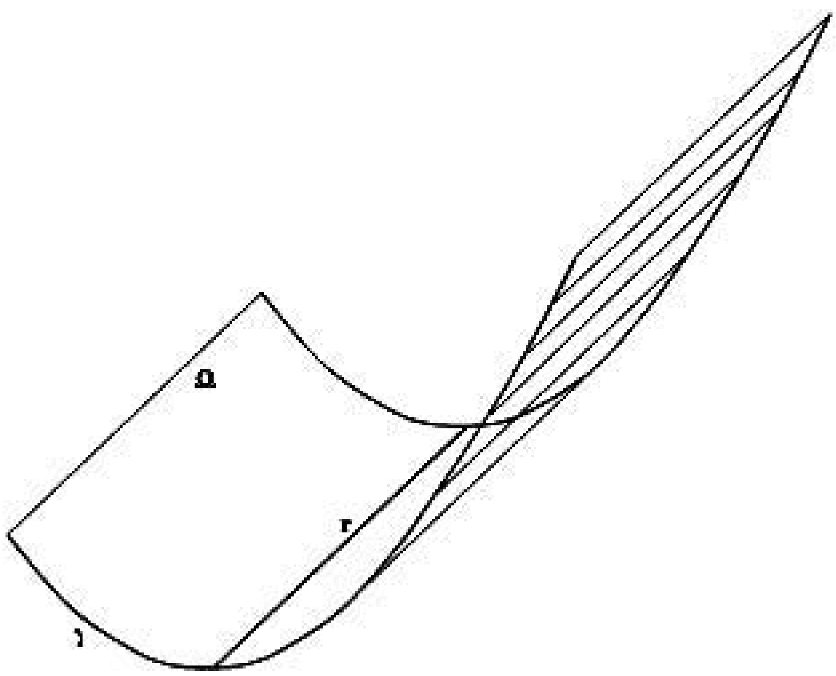


Figura 9.11: cilindro parabolico avente come direttrice la parabola γ e come luogo dei vertici la retta r.

Per ridurre la quadrica a forma canonica dobbiamo innanzitutto eseguire una rotazione che disponga la retta r, luogo dei vertici, parallelamente ad uno degli assi cartesiani. Tale rotazione, come avviene abitualmente, si ottiene considerando la matrice ortogonale speciale avente come colonne una base ortonormale di autovettori, della quale però faccia parte il versore associato ad r. A questo proposito determiniamo innanzitutto gli autospazi. Poiché $I_4 = I_3 = I_2 = 0$, l'equazione caratteristica di un cilindro parabolico risulta semplicemente $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 = 0$, e quindi gli autovalori sono $\lambda = 0$ (autovalore doppio) e $\lambda = I_1$ (autovalore semplice). Nel nostro caso l'autovalore semplice è $\lambda = 2$. All'autovalore doppio corrisponde un autospazio piano E_0, parallelo al piano di simmetria di Ω, contenente l'asse di γ e la retta r. In questo caso esso è dato da

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad Q\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y = z, \ \forall x \quad \Rightarrow \quad E_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'autospazio associato all'autovalore semplice, ortogonale ad E_0, è dato da

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad (Q - 2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \ z = -y \quad \Rightarrow \quad E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Cerchiamo ora l'equazione della retta r. A tale scopo dobbiamo intersecare Ω con il suo piano di simmetria. Per ottenere questo piano, intersechiamo Ω con l'autospazio E_2, determinando due punti B_1, B_2. Il piano parallelo ad E_0 e passante per il punto medio M di B_1B_2 è il piano di simmetria della quadrica. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} y^2 - 2yz + z^2 + x - z = 0 \\ x = 0 \\ y = -z, \end{cases}$$

il che fornisce i punti $B_1 = O(0,0,0)$ e $B_2\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Il punto medio è $M\left(0, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, e quindi il piano di simmetria di Ω è dato $y - z + \frac{1}{4} = 0$. Intersecando la quadrica con tale piano si ottiene

$$r\begin{cases} y^2 - 2yz + z^2 + x - z = 0 \\ y - z + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r\begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{1}{4} + t \\ z = t \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto, una terna di parametri direttori di r è fornita dal vettore $[1,1,1]^t \in E_0$. Il vettore $[2,-1,-1]^t$ appartiene ad E_0 ed è ortogonale ad r. Una base di autovettori contenenti r è quindi data da

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Di conseguenza, la matrice che ci interessa è data da

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

La rotazione $[x, y, z]^t = M[x', y', z']^t$ trasforma l'equazione di Ω nella seguente

$$\Omega' : 2z'^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' = 0,$$

mentre la retta r viene portata in

$$r' \begin{cases} y' = \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{3}} \\ z' = -\frac{1}{4\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Per ottenere la forma canonica di Ω basta ora traslare un punto V di r' nell'origine. Per esempio, prendiamo $V\left(0, \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{3}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{3}} \\ z'' = z' + \frac{1}{4\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{3}} \\ z' = z'' - \frac{1}{4\sqrt{2}}, \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione di Ω' si ottiene la forma canonica di Ω, data da

$$2z''^2 + \frac{\sqrt{6}}{2}y'' = 0.$$

Osservazione 9.8.30. *La quadrica assegnata in questo esercizio coincide con il cilindro determinato nell'Esercizio 9.8.26, costruito a partire dalla direttrice γ e dalla direzione di proiezione. Le considerazioni svolte ci hanno ora permesso di ritrovare, a partire dall'equazione cartesiana, le principali proprietà geometriche della quadrica. Si noti, in particolare, che la retta r luogo dei vertici delle parabole che formano il cilindro parabolico è parallela alla direzione lungo la quale si proietta γ.*

■

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Otteniamo quindi $I_4 = \det A = -8 < 0$, $I_3 = \det Q = 0$, $I_2 = 4$ ed $I_1 = 4$, il che dimostra conferma che la quadrica è effettivamente un paraboloide ellittico. La sua equazione caratteristica è $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$, cioè $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$, e quindi abbiamo gli autovalori $\lambda = 0$ (autovalore semplice) e $\lambda = 2$ (autovalore doppio). La presenza dell'autovalore doppio deriva dal fatto che Ω è una quadrica di rotazione. Calcoliamo ora gli autospazi associati ai singoli autovalori.

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; x = y, \; z = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad (Q - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \; x = -y, \; \forall z \quad \Rightarrow \quad E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \right\rangle.$$

L'autospazio associato al'autovalore $\lambda = 0$ è parallelo al'asse di rotazione del paraboloide, mentre l'autospazio associato all'autovalore doppio è parallelo al piano tangente ad Ω nel vertice. Il vertice di Ω (che ovviamente deve coincidere con il vertice di γ) si può determinare in due maniere distinte.

Primo metodo. Si cerca il piano parallelo ad E_2 avente intersezione con Ω ridotta ad un solo punto. Poiché $E_2 : x + y = 0$ dobbiamo considerare il sistema tra Ω ed il piano $x + y + \lambda = 0$, cercando il valore di λ che fornisce l'intersezione richiesta. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4x = 0 \\ y = -x - \lambda. \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} 4x^2 + 2z^2 + 4(\lambda - 1)x + \lambda^2 = 0 \\ y = -x - \lambda, \end{cases}$$

che è una conica sul piano $x + y + \lambda = 0$. L'intersezione si riduce ad un punto se tale conica è degenere in due rette immaginarie coniugate. Per stabilire quando questo avviene studiamo l'annullamento dell'invariante cubico della proiezione di tale conica sul piano xz

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2(\lambda - 1) \\ 0 & 2 & 0 \\ 2(\lambda - 1) & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} = 8(2\lambda - 1),$$

9.8.31. *Determinare l'equazione della superficie Ω ottenuta facendo ruotare la conica γ del piano xy, di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 4x = 0$, intorno al suo asse principale. Classificare la superficie ottenuta, determinare le principali proprietà geometriche (assi di simmetria, piani di simmetria, centro o vertice), e scrivere una sua forma canonica.*

Svolgimento. La conica γ è una parabola, avente asse parallelo alla retta

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

come si vede facilmente considerando la parte quadratica. Intersechiamo la parabola con una qualsiasi retta ortogonale all'asse, per esempio

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Si ottengono i punti $O(0,0,0)$ ed $A(1,-1,0)$, il cui punto medio è $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. L'asse di γ è quindi la retta

$$a \begin{cases} y = x - 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

La superficie richiesta si ottiene come luogo di circonferenze centrate nel generico punto C di a, situate sul piano per C ortogonale ad a, dato da $x + y + \lambda = 0$, ed aventi raggio uguale a CH, essendo H il punto in cui tale piano generico interseca γ. Abbiamo quindi $C\left(\frac{1-\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, 0\right)$, e, intersecando il piano con la parabola otteniamo i due punti dati da

$$H_1\left(x_C - \frac{\sqrt{1-2\lambda}}{2}, y_C + \frac{\sqrt{1-2\lambda}}{2}, 0\right), \quad H_2\left(x_C + \frac{\sqrt{1-2\lambda}}{2}, y_C - \frac{\sqrt{1-2\lambda}}{2}, 0\right),$$

da cui $CH_1^2 = CH_2^2 = \frac{1-2\lambda}{2}$. Pertanto si ha

$$\Omega \begin{cases} (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = \frac{1-2\lambda}{2} \\ x + y + \lambda = 0. \end{cases}$$

Eliminando λ, dopo le opportune semplificazioni otteniamo

$$\Omega : x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4x = 0,$$

che fornisce l'equazione della superficie richiesta.

Poiché Ω è ottenuta facendo ruotare una parabola intorno al proprio asse principale, la quadrica deve essere un paraboloide ellittico. Controlliamo questo risultato attraverso il calcolo degli invarianti. Detta A la matrice associata ad Ω, e Q la sottomatrice di A relativa alla parte quadratica della quadrica, abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e quindi si annulla se e solo se $\lambda = \frac{1}{2}$. Di conseguenza il piano tangente ad Ω nel vertice risulta $x + y + \frac{1}{2} = 0$, ed il vertice V è dato da

$$V \begin{cases} 4x^2 + 2z^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0 \\ y = -x - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z^2 + \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ y = -x - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

e quindi $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0\right)$.

Secondo metodo. Si trova innanzitutto la conica Γ sezione di Ω con il piano E_2. Detto B il centro di tale conica, si considera la retta a, passante per B e parallela ad E_0. Tale retta costituisce l'asse di rotazione di Ω (che in questo caso deve coincidere con l'asse principale della parabola γ). A questo punto il vertice V si trova intersecando Ω con a. Abbiamo quindi

$$\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma \begin{cases} 4x^2 + 2z^2 - 4x = 0 \\ y = -x. \end{cases}$$

Il cilindro $4x^2 + 2z^2 - 4x = 0$ proietta Γ sul piano xz nella conica

$$\Gamma' \begin{cases} 4x^2 + 2z^2 - 4x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

il cui centro C risulta

$$C \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

Abbiamo quindi $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$, e l'asse di rotazione risulta

$$a \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ 0, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad a \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

che coincide con l'asse di γ. Intersecando Ω con a ritroviamo il vertice $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0\right)$.

Osservazione 9.8.32. *Il primo metodo consente di trovare prima il vertice e, successivamente, calcolare l'asse di rotazione come retta passante per il vertice e parallela all'autospazio E_0. Con il secondo metodo si trova invece prima l'asse di rotazione e poi il vertice. Inoltre, dal momento che Ω è ottenuta per rotazione di γ, ogni piano contenente l'asse di rotazione è un piano di simmetria della quadrica*

■

9.8.33. *Studiare la quadrica Ω di equazione data da*

$$\Omega : x^2 + 2xy + 4xz + y^2 + 4yz + 4z^2 + 2x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Svolgimento. Innanzitutto classifichiamo Ω mediante gli invarianti. La matrice A associata alla quadrica risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

e la matrice Q relativa alla parte quadratica è data da

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sia in A che in Q le prime due righe sono uguali, quindi $I_4 = I_3 = 0$. Pertanto Ω può essere un cilindro oppure una quadrica spezzata. Osserviamo che la sottomatrice di A data da $\{R_2, R_3, R_4\} \cap \{C_2, C_3, C_4\}$ ha determinante uguale a -9, quindi A ha caratteristica 3, e, di conseguenza, Ω non è spezzata. Il calcolo dell'invariante quadratico fornisce $I_2 = 0$, quindi la quadrica è un cilindro parabolico. L'invariante lineare risulta $I_1 = 6$, che coincide anche con l'unico autovalore non nullo di Ω (cfr. Esercizio 9.8.29).

Determiniamo ora il piano di simmetria del cilindro. L'autospazio associato all'autovalore nullo risulta

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad Q \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = -y - 2z \quad \Rightarrow \quad E_0 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'autospazio associato all'autovalore non nullo è invece dato da

$$\lambda = 6 \quad \Rightarrow \quad (Q - 6I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = y = \frac{1}{2} z \quad \Rightarrow \quad E_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Intersecando Ω con E_6 otteniamo

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 4xz + y^2 + 4yz + 4z^2 + 2x + 2y - 2z + 3 = 0 \\ x = \frac{1}{2} z \\ y = \frac{1}{2} z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9z^2 + 3 = 0 \\ x = \frac{1}{2} z \\ y = \frac{1}{2} z. \end{cases}$$

Abbiamo quindi i due punti immaginari $M_1 \left(i\frac{\sqrt{3}}{6}, i\frac{\sqrt{3}}{6}, i\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$ ed $M_2 \left(-i\frac{\sqrt{3}}{6}, -i\frac{\sqrt{3}}{6}, -i\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$, il cui punto medio è l'origine. Il piano di simmetria del cilindro parabolico, dovendo essere parallelo ad E_0 e passante per l'origine, coincide pertanto con l'autospazio E_0. Il luogo dei vertici delle parabole di Ω aventi asse di simmetria appartenente ad E_0 è la retta r che si ottiene intersecando la quadrica con tale piano, e si ha

$$\begin{cases} x^2+2xy+4xz+y^2+4yz+4z^2+2x+2y-2z+3=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z+3=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-1 \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Abbiamo quindi una retta di parametri direttori $[-1,1,0]$.

Determiniamo ora una forma canonica della quadrica. A tale proposito dobbiamo costruire innanzitutto una rotazione che disponga, contemporaneamente, E_0 parallelamente ad uno dei piani cartesiani ed r parallelamente ad uno degli assi cartesiani. Questa rotazione si ottiene applicando la trasformazione rappresentata da una matrice ortogonale speciale M avente come colonne gli autospazi normalizzati, ed assumendo in E_0 una base contenente il vettore $[-1,1,0]$. Si noti che tale vettore appartiene già alla base $\{v_1, v_2\}$ scelta in E_0. Tuttavia, a differenza di quanto si è visto nell'Esercizio 9.8.29, la base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ ottenuta accostando le basi dei due autospazi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

non è ancora ortogonale (il prodotto scalare tra i primi due vettori non è nullo). Bisogna quindi ortonormalizzare, mediante il metodo di Gram-Schmidt, le basi di E_0 ed E_6. Per quanto riguarda E_6 basta normalizzare il suo unico vettore, ottenendo il versore $\frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,2]^t$. Per quanto riguarda E_0, abbiamo invece

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1,1,0]^t,$$

$$w_2 = \frac{v_2 - w_1\langle v_2, w_1\rangle}{\|v_2 - w_1\langle v_2, w_1\rangle\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-1,-1,1]^t.$$

Pertanto, la matrice di rotazione M che ci interessa, è data da

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

La rotazione descritta da tale matrice trasforma l'equazione di Ω in $6z'^2 - 2\sqrt{3}y' + 3 = 0$, mentre la retta r viene mutata nella retta r' di equazioni

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z' = 0, \end{cases}$$

come si ricava sostituendo nelle rispettive equazioni $[x,y,z]^t = M[x',y',z']^t$ e svolgendo i calcoli opportuni. Si noti che la retta r' è effettivamente parallela ad uno degli assi cartesiani, in particolare all'asse x. Per completare la riduzione di Ω a forma canonica dobbiamo ora traslare nell'origine un punto di r' scelto arbitrariamente. Prendiamo per esempio il punto $V\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, e consideriamo la traslazione $[x'', y'', z'']^t = \left[x', y' - \frac{\sqrt{3}}{2}, z'\right]^t$. Ricavando x', y', z' e sostituendo nella precedente equazione otteniamo $\sqrt{3}z''^2 - y'' = 0$, che rappresenta una forma canonica della quadrica. ■

9.8.34. *Studiare la quadrica Ω di equazione data da*

$$\Omega : x^2 - xy - 3xz - 2y^2 + 3yz + 2z^2 - x - 4y + 3z - 2 = 0.$$

Svolgimento. La matrice A associata alla quadrica risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}.$$

La seconda e quarta riga sono uguali, quindi $I_4 = 0$, e la quadrica è degenere. Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è uguale a $-\frac{9}{4}$, quindi la caratteristica r di A è almeno uguale a 2. Calcolando i minori orlati si vede facilmente che essi sono tutti nulli, quindi A ha caratteristica 2, e quindi Ω è spezzata in due piani secanti. Calcoliamo ora gli altri invarianti. Poiché $r(A) = 2$ risulta $I_3 = 0$, mentre invece si ricava $I_2 = -\frac{35}{4}$ ed $I_1 = 1$. L'equazione caratteristica della quadrica è

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - \frac{35}{4}\right) = 0.$$

Il prodotto tra gli autovalori non nulli di Ω è uguale a $-\frac{35}{4} < 0$, quindi la quadrica è spezzata in due piani reali secanti.

Per determinare la coppia di piani dobbiamo scomporre il polinomio che rappresenta analiticamente la quadrica. A tale proposito consideriamo il cono direttore di Ω, cioè il cono $C(\Omega)$ ottenuto uguagliando a zero i termini di secondo grado di Ω. Ordinando l'equazione di $C(\Omega)$ rispetto ad x, e risolvendo, otteniamo

$$x^2 - x(y + 3z) - 2y^2 + 3yz + 2z^2 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{y + 3z \pm \sqrt{(y + 3z)^2 - 4(-2y^2 + 3yz + 2z^2)}}{2} = \frac{y + 3z \pm \sqrt{(3y - z)^2}}{2},$$

e quindi $x = 2y + z$ oppure $x = -y + 2z$. Pertanto $C(\Omega)$ si spezza nei due piani $x - 2y - z = 0$ ed $x + y - 2z = 0$. Quindi Ω è spezzata in due piani ad essi paralleli, cioè, l'equazione di Ω deve essere del tipo $(x - 2y - z + \alpha)(x + y - 2z + \beta) = 0$. Svolgendo i calcoli otteniamo

$$x^2 - xy - 3xz - 2y^2 + 3yz + 2z^2 + x(\alpha + \beta) + y(\alpha - 2\beta) + z(-2\alpha - \beta) + \alpha\beta = 0.$$

Confrontando con l'equazione iniziale della quadrica si ricava facilmente $\alpha = -2$ e $\beta = 1$, e quindi $x - 2y - z - 2 = 0$ ed $x + y - 2z + 1 = 0$ sono i piani in cui si spezza la quadrica considerata. ■

9.8.35. *Si considerino le sfere S ed S_1, di centro $C(1, 2, -3)$ e raggi $R = 2$ ed $R_1 = \sqrt{17}$, rispettivamente.*

1. *Scrivere l'equazione del luogo delle rette passanti per il punto $A(1, 2, 4)$ e tangenti alla sfera S.*

2. *Determinare l'equazione dei piani passanti per il punto $B(1,-1,2)$ e paralleli alla retta AC.*

3. *Calcolare le coordinate dei punti in cui la retta $r: x=y=z$ interseca la sfera S_1.*

4. *Determinare le equazioni dei piani tangenti ad S_1 in $r \cap S_1$.*

Svolgimento.

1. Osserviamo innanzitutto che $d(A,C) = \sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(4+3)^2} = 7 > 2$, quindi il punto A è esterno alla sfera S. Le rette passanti per A e tangenti alla sfera determinano quindi una superficie conica di vertice A ed asse AC. L'equazione di tale superficie può essere ottenuta imponendo che la distanza di C dalla generica retta del cono sia uguale al raggio $R=2$ della sfera. Indicando con a,b,c una terna di parametri direttori della generica generatrice, si ha

$$d(C,r) = \frac{\|\overrightarrow{AC} \wedge [a,b,c]\|}{\|[a,b,c]\|} = \frac{\|\overrightarrow{[0,0,7]} \wedge [a,b,c]\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{7\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

e quindi deve essere

$$\frac{7\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 49(a^2+b^2) = 4(a^2+b^2+c^2).$$

Se $P(x,y,z)$ rappresenta il generico punto della retta generatrice di parametri direttori a,b,c, allora $a=x-1, b=y-2, c=z-4$, e quindi, eliminando i parametri e semplificando, l'equazione del cono risulta

$$45x^2+45y^2-4z^2-90x-180y+32z+161=0.$$

2. Esistono infiniti piani passanti per un punto e paralleli ad una data retta. Il generico piano per B ha equazione $a(x-1)+b(y+1)+c(z-2)$, e la condizione di parallelismo con la retta AC è $\langle \overrightarrow{AC} \wedge [a,b,c] \rangle = 0$, cioè $c=0$. Quindi i piani richiesti hanno equazione $a(x-1)+b(y+1)=0$ con scelte arbitrarie di $a,b \in \mathbb{R}$.

3. L'equazione di S_1 è $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=17$. Sostituendo $x=y=z$ otteniamo $x^2=1$, da cui i due punti $H(1,1,1)$ e $K(-1,-1,-1)$.

4. L'equazione del piano tangente ad una quadrica Ω in un suo punto P è data da

$$(x-x_P)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_P + (y-y_P)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_P + (z-z_P)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_P = 0.$$

Nel caso in cui Ω sia la sfera S_1 si ha

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = 2(x-1), \quad \frac{\partial S_1}{\partial y} = 2(y-2), \quad \frac{\partial S_1}{\partial z} = 2(z+3),$$

e quindi i piani tangenti in H e K hanno equazioni $y-4z+3=0$ e $2x+3y-2z+3=0$ rispettivamente. ■

9.8.36. *Sia S la quadrica di equazione $x^2+2xy+4y^2-4x-2y-2=0$, γ la conica sezione di S con il piano $x-y+z=0$ ed r la retta di equazioni $x=-\frac{y}{2}=z$. Determinare l'equazione della quadrica Ω che si ottiene proiettando γ parallelamente alla retta data.*

Svolgimento. La quadrica S è un cilindro con generatrici parallele all'asse z, la cui intersezione con il piano xy è rappresentata dalla conica γ'

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 4y^2 - 4x - 2y - 2 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Mediante gli invarianti si vede facilmente che γ' è una ellisse, quindi anche γ è una ellisse. Di conseguenza Ω è un cilindro ellittico. La sua equazione si ottiene proiettando il generico punto P di γ parallelamente alla direzione $[1, -2, 1]$ della retta r. Abbiamo quindi

$$\Omega \begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P - 2\lambda \\ z = z_P + \lambda, \end{cases}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} x_P = \frac{2x+y-y_P}{2} \\ z_P = \frac{y+2z-y_P}{2}. \end{cases}$$

Le coordinate x_P, y_P, z_P di P verificano le equazioni di γ, e quindi

$$\gamma \begin{cases} x_P^2 + 2x_Py_P + 4y_P^2 - 4x_P - 2y_P - 2 = 0 \\ x_P - y_P + z_P = 0. \end{cases}$$

Sostituendo i risultati precedenti nella seconda equazione abbiamo $y_P = \frac{x+y+z}{2}$, da cui $x_P = \frac{3x+y-z}{4}$ e $z_P = \frac{-x+y+3z}{4}$. Sostituendo nella prima equazione di γ e svolgendo le opportune semplificazioni otteniamo

$$\Omega : 37x^2 + 54xy + 34xz + 21y^2 + 30yz + 13z^2 - 64x - 32y - 32 = 0.$$

Osserviamo che Ω è dotata di punti reali. Infatti, per esempio, essa interseca l'asse z nei punti $A\left(0, 0, -\sqrt{\frac{32}{13}}\right)$ e $B\left(0, 0, \sqrt{\frac{32}{13}}\right)$. Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = I_3 = 0$, $I_2 = 288$, $I_1 = 71$, il che conferma che la quadrica è un cilindro ellittico. ■

Parte IV

TEMI D'ESAME SVOLTI

Presentiamo in questa sezione alcuni recenti temi d'esame assegnati nel Corso di Geometria e Algebra Lineare per la Laurea in Ingegneria Elettronica del Politecnico di Milano.

Riteniamo comunque che questi esercizi possano rappresentare un ulteriore utile sussidio didattico anche in altri Corsi di Laurea.

Di ogni tema assegnato presentiamo il testo e lo svolgimento dettagliato.

Inoltre, per agevolare l'autovalutazione degli studenti, abbiamo quantificato il peso di ogni esercizio mediante un punteggio indicativo.

TEMA D'ESAME - 06/02/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4+2+4+1$ punti)
Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni seguenti

- $[1,1,0]^t$ è autovettore per f relativo all'autovalore -1;
- $[1,0,1]^t$ appartiene al nucleo di f;
- $f([0,1,1]^t) = [2,1,1]^t$.

(a) Scrivere la matrice $M_B^B(f)$ rispetto alla base

$$B = \{[1,1,0]^t, [1,0,1]^t, [0,1,1]^t\}.$$

(b) Trovare gli autovalori di f.

(c) Trovare una base per ogni autospazio.

(d) Stabilire se f è diagonalizzabile, motivando la risposta.

Svolgimento.

(a) Indicando con v_1, v_2, v_3 i vettori di B, dalle ipotesi abbiamo $f(v_1) = -v_1$, $f(v_2) = 0$, $f(v_3) = v_1 + v_2$. Quindi, la matrice associata ad f rispetto alla base B è data da

$$M_B^B(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) La matrice è triangolare, quindi gli autovalori sono gli elementi principali, cioè $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(c) La caratteristica di $M_B^B(f)$ è uguale a 2, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ è $3-2=1$. Quindi entrambi gli autospazi $E_0 = \mathrm{Ker} f$ bed E_{-1} hanno dimensione 1. Dalle ipotesi deduciamo immediatamente che v_1 è una base di E_{-1}, mentre v_2 è una base di E_0.

(d) Poiché la molteplicitá geometrica dell'autovalore doppio è diversa dalla sua molteplicità algebrica, f non è diagonalizzabile.

Esercizio 2. $(2+5+4$ punti)
Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano dati i piani $\alpha : x+y=1$ e $\beta : x+2y-2z=0$.

(a) Calcolare l'angolo ϑ tra α e β.

(b) Calcolare l'equazione del piano β', simmetrico di β rispetto ad α.

(c) Determinare il luogo dei centri delle sfere che tagliano i tre piani α, β, β' secondo circonferenze di uguale raggio.

Svolgimento.

(a) Le normali n_α, n_β ai piani α, β hanno parametri direttori, rispettivamente $1, 1, 0$ e $1, 2, -2$. Di conseguenza

$$\cos\vartheta = \frac{\langle n_\alpha, n_\beta\rangle}{\|n_\alpha\|\|n_\beta\|} = \frac{1+2}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

da cui $\vartheta = \pi/4$.

(b) Il piano β' appartiene al fascio di piani F avente sostegno nella retta comune ad α e β, ed è ortogonale a β. Abbiamo $F = (1+\lambda)x + (1+2\lambda)y - 2\lambda z - 1 = 0$, per cui β' corrisponde al valore di λ tale che

$$1\cdot(1+\lambda) + 2\cdot(1+2\lambda) - 2\cdot(2\lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = -\frac{1}{3}.$$

Sostituendo nell'equazione del fascio otteniamo $\beta' : 2x + y + 2z - 3 = 0$.

(c) Due qualsiasi piani π_1, π_2 del fascio F vengono tagliati da una sfera S in circonferenze di raggio uguale se e solo se S ha il centro sul piano che biseca l'angolo diedro formato da π_1 e π_2. Quindi, il luogo dei centri delle sfere che tagliano i tre piani α, β, β' secondo circonferenze di uguale raggio è la retta comune ai piani bisettori dei diedri tra α, β ed α, β', cioè le retta sostegno del fascio F.

Esercizio 3. $(8+3$ punti)

Si consideri la conica Γ di equazione

$$\Gamma : x^2 - xy + 2x - y = 0.$$

(a) Classificare Γ, trovarne una forma canonica e l'equazione del relativo cambio di riferimento.

(b) Dopo aver verificato che tutte le rette parallele all'asse x tagliano Γ in punti reali, determinare la parallela che taglia su Γ la corda di lunghezza minima.

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla conica risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_3 = 1/4, I_2 = -1/4, I_1 = 1$. Abbiamo quindi un'iperbole non equilatera. Dall'equazione caratteristica $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ ricaviamo gli autovalori $\lambda = (1 \pm \sqrt{2})/2$. Una forma canonica risulta data da

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + I_3/I_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1+\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}y^2 - 1 = 0.$$

Gli autovettori normalizzati forniscono la matrice ortogonale speciale data da

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}.$$

Dal sistema delle derivate parziali uguagliato a zero ricaviamo il centro $C(-1,0)$, per cui il cambio di riferimento che riduce Γ a forma canonica risulta $[x,y]^t = M[x',y']^t + [-1,0]^t$.

(b) Intersecando Γ con la retta di equazione $y = k$, otteniamo l'equazione risolvente $x^2 + (2-k)x - k = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4 + k^2$. Quindi $\Delta > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, ed i punti di intersezione sono entrambi reali. La lunghezza della corda è uguale a $\sqrt{\Delta}$, quinmdi la corda di lunghezza minima si ottiene per $k = 0$, corrispondente all'asse x

SECONDA PROVA IN ITINERE - 29/06/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+8$ punti)

Sia $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia dato $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo definito dalle seguenti condizioni

- $f_a(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - a\vec{v}_3$;
- $f_a(\vec{v}_2) = 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3$;
- $\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ è autovettore per f_a relativo all' autovalore 1.

(a) Scrivere la matrice che rappresenta f_a rispetto alla base B.

(b) Calcolare gli autovalori di f_a, una base per ogni suo autospazio e stabilire i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui f_a è diagonalizzabile.

Svolgimento.

(a) Le colonne della matrice $M_B^B(f_a)$ sono formate dai coefficienti che esprimono le immagini dei vettori di B come combinazione lineare degli stessi vettori di B. Le prime due condizioni forniscono pertanto, immediatamente, le prime due colonne della matrice. Inoltre, essendo $\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ è autovettore per f_a relativo all' autovalore 1, abbiamo $f_a(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$. Ma, per la linearità, abbiamo anche

$$f_a(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) = f_a(\vec{v}_2) - f_a(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 - f_a(\vec{v}_3),$$

da cui $f_a(\vec{v}_3) = 2\vec{v}_2$. Di conseguenza risulta

$$M_B^B(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -a & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) L'equazione caratteristica $\det(M_B^B(f_a) - \lambda I) = 0$ risulta $(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$, cioè $(\lambda - 1)^2(2-\lambda) = 0$. Si ha quindi l'autovalore $\lambda = 1$ di molteplicità algebrica 2, e l'autovalore semplice $\lambda = 2$. Per $\lambda = 1$ la matrice caratteristica diventa

$$M_B^B(f_a) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -a & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per $a \neq \frac{1}{2}$ il minore $\{R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, quindi il rango è 2 e l'autospazio associato E_1 ha dimensione $3 - 2 = 1$. Pertanto l'autovalore $\lambda = 1$ non è regolare e l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Per $a = \frac{1}{2}$ l'autospazio E_1 ha invece dimensione 2, e l'endomorfismo è diagonalizzabile. Calcoliamo, in entrambi i casi, una base per gli autospazi E_1 ed E_2.

• $a \neq \frac{1}{2}$.

L'autospazio E_1 risulta

$$\begin{cases} x + 2y = -2z \\ -ax - y = z, \end{cases}$$

da cui $x = 0$, $y = -z$. Quindi $E_1 = \{[0, -z, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$, ed un base è, per esempio, il vettore $[0, -1, 1]^t$.
Per $\lambda = 2$ la matrice caratteristica diventa

$$M_B^B(f_a) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio E_2 risulta descritto, per esempio, dalle due equazioni determinate dalle prime due righe, cioè

$$\begin{cases} -x = 0 \\ x + y = -2z, \end{cases}$$

da cui $x = 0$, $y = -2z$. Quindi $E_2 = \{[0, -2z, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$, ed un base è, per esempio, il vettore $[0, -2, 1]^t$. Si noti che E_2 resta invariato anche se $a = \frac{1}{2}$, in quanto le sue equazioni non dipendono da a.

• $a = \frac{1}{2}$. In questo caso E_1 è descritto dall'unica equazione $x + 2y + 2z = 0$. Quindi $E_1 = \{[-2y - 2z, y, z]^t,\ y, z \in \mathbb{R}\}$, ed un base è rappresentata , per esempio, dalla coppia di vettori $\{[-2, 1, 0]^t, [-2, 0, 1]^t\}$.

Esercizio 2. (5 + 6 punti)
Nel piano euclideo, sia dato il fascio di coniche di equazione

$$\Gamma_t : 2tx^2 + 2(t+1)xy + 2ty^2 - 2x - 2(t+1)y + 2 = 0.$$

(a) Classificare le coniche del fascio al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Posto $t = 2$, calcolare una forma canonica, il cambio relativo di coordinate e disegnare la conica Γ_2.

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla generica conica del fascio è data da

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t & t+1 & -1 \\ t+1 & 2t & -(t+1) \\ -1 & -(t+1) & 2 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_3 = -2t(t^2 - 2t + 2)$, $I_2 = 3t^2 - 2t - 1$, $I_1 = 4t$. Quindi si ha

• **Coniche degeneri**. Deve essere $I_3 = 0$ per $t = 0$ e $t^2 - 2t + 2 = 0$. La seconda equazione ha soluzioni complesse, quindi si ha una sola conica degenere, corrispondente a $t = 0$, cioè $xy - x - y + 1 = 0$. Poiché $xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1)$ la conica è spezzata nelle due rette $x = 1$ ed $y = 1$.

• **Ellissi.** Deve essere $I_2 = 3t^2 - 2t - 1 > 0$, quindi $t < -\frac{1}{3}$ e $t > 1$. Osserviamo che $I_1 I_3 = -4t^2(t^2 - 2t + 2)$, quindi minore di 0 per ogni $t \neq 0$, per cui le ellissi sono tutte reali. In particolare, per $t = -1$ si ha una circonferenza, in quanto i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali ed il coefficiente del termine in xy si annulla.

• **Parabole**. Deve essere $I_2 = 3t^2 - 2t - 1 = 0$, quindi per $t = -\frac{1}{3}$ e $t = 1$.

• **Iperboli**. Deve essere $I_2 = 3t^2 - 2t - 1 < 0$, quindi $-\frac{1}{3} < t < 1$. Per $t = 0$ si annulla I_1 ma ciò non fornisce una iperbole equilatera in quanto la corrispondente conica è degenere.

(b) Per $t = 2$ abbiamo la conica $\Gamma_2 : 4x^2+6xy+4y^2-2x-6y+2 = 0$, che, come si è detto, corrisponde ad una ellisse. I corrispondenti invarianti risultano $I_3 = -8$, $I_2 = 7$, $I_1 = 8$. Gli autovalori della matrice associata alla parte quadratica sono le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$, cioè $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$, da cui $\lambda = 1, 7$. Una forma canonica di Γ_2 è pertanto $x^2 + 7y^2 - \frac{8}{7} = 0$. L'autospazio associato a $\lambda = 1$ ha equazione $x + y = 0$, quello associato a $\lambda = 7$ è $-x + y = 0$. La matrice ortogonale speciale corrispondente al movimento rotatorio è formata degli autovettori normalizzati, quindi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Il centro di Γ_2 è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 8x + 6y - 2 = 0 \\ 6x + 8y - 6 = 0, \end{cases}$$

cioè il punto $C\left(-\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right)$. Il cambio di riferimento che riduce Γ_2 a forma canonica risulta quindi dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. (5 + 6 punti)

Sia σ la sfera di centro l' origine e raggio 2, e sia α il piano di equazione $\sqrt{3}y+z-2\sqrt{3} = 0$.

(a) Calcolare centro e raggio della circonferenza $\gamma = \sigma \cap \alpha$.

(b) Scrivere l' equazione del cono S di vertice $V(0,0,1)$ avente γ come direttrice, e classificare quindi la conica Γ intersezione del cono S con il piano $[xy]$.

Svolgimento.

(a) La distanza dell'origine dal piano α è uguale a $\sqrt{3} < 2$, quindi γ è reale non degenere. Il suo raggio è fornito dal teorema di **Pitagora**, e vale $r = \sqrt{2^2 - 3} = 1$. Il centro di γ è il punto H in cui la retta per $O(0,0,0)$ e perpendicolare ad α interseca tale piano. Le equazioni parametriche della retta OH sono date da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}t \\ z = t, \end{cases}$$

e mettendo a sistema con l'equazione di α si ha $4t - 2\sqrt{3} = 0$, da cui $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Di conseguenza $H = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) L'equazione cartesiana della sfera σ è $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Detto P il generico punto di γ, le equazioni parametriche del cono richiesto sono date da

$$\begin{cases} x = x_V + (x_P - x_V)\lambda \\ y = y_V + (y_P - y_V)\lambda \\ z = z_V + (z_P - z_V)\lambda \\ \sqrt{3}y_P + z_P - 2\sqrt{3} = 0 \\ x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = 4. \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate di V, dalle prime tre equazioni ricaviamo

$$\begin{cases} x_P = \frac{x}{\lambda} \\ y_P = \frac{y}{\lambda} \\ z_P = \frac{z-1}{\lambda} + 1. \end{cases}$$

Dalla quarta equazione ricaviamo quindi $\lambda = \frac{\sqrt{3}y+z-1}{2\sqrt{3}-1}$, il che fornisce

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{(2\sqrt{3}-1)x}{\sqrt{3}y+z-1} \\ y_P = \dfrac{y}{\lambda} = \dfrac{(2\sqrt{3}-1)y}{\sqrt{3}y+z-1} \\ z_P = \dfrac{z-1}{\lambda} + 1 = \sqrt{3}\dfrac{y+2z-2}{\sqrt{3}y+z-1}. \end{cases}$$

Sostituendo nella quinta equazione otteniamo

$$(2\sqrt{3}-1)^2x^2 + (2\sqrt{3}-1)^2y^2 + 3(y+2z-2)^2 - 4(\sqrt{3}y+z-1)^2 = 0,$$

e semplificando si ha

$$x^2(13-4\sqrt{3}) + y^2(4-4\sqrt{3}) + yz(12-8\sqrt{3}) + y(8\sqrt{3}-12) + 8z^2 - 16z + 8 = 0,$$

che rappresenta l'equazione cartesiana del cono. Posto $z = 0$ si ha

$$x^2(13-4\sqrt{3}) + y^2(4-4\sqrt{3}) + y(8\sqrt{3}-12) + 8 = 0.$$

Essa rappresenta, nello spazio, un cilindro, che, sul piano xy, taglia la conica avente, su quel piano, la stessa equazione. Poiché il piano xy non passa per il vertice V del cono, la conica è non degenere, ed essendo $I_2 = 100 - 68\sqrt{3} < 0$, essa è una iperbole

TEMA D'ESAME - 18/07/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (3 + 6 + 2 punti)

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ una sua base. Sia poi data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : V \to V$ l' endomorfismo definito da $M_B^B(f) = A$.

(a) Calcolare gli autovalori di f.

(b) Calcolare una base per ogni autospazio di f, ed una matrice invertibile P, se esiste, che diagonalizza A.

(c) Introducendo in $\mathbb{R}^3$ la base canonica, determinare un vettore $\vec{u}$ non nullo di $\mathbb{R}^3$ tale che l' angolo tra $\vec{u}$ e $f(\vec{u})$ sia ottuso. Ne esiste anche uno non nullo tale che l' angolo tra $\vec{u}$ e $f(\vec{u})$ sia retto?

Svolgimento.

(a) Il polinomio caratteristico di f è

$$p(t) = \det(A - tI) = (1-t)[(-t)(-1-t) - 2] = -(t-1)^2(t+2).$$

Essendo le sue radici reali, gli autovalori di f sono $t_1 = 1$ e $t_2 = -2$ di molteplicità $m(1) = 2, m(-2) = 1$, rispettivamente.

(b) Calcoliamo l' autospazio E_1. I vettori $\vec{v}$ che appartengono a tale autospazio hanno componenti $[\vec{v}]_B = {}^t(a,b,c)$ che risolvono il sistema lineare omogeneo avente

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

come matrice dei coefficienti delle incognite. Il suo rango è 1, e quindi

$$\dim(V(1)) = 3 - 1 = 2 = m(1).$$

Sia $B_1 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ una base di $V(1)$. L' unica equazione da risolvere è $a - b + c = 0$ e quindi $b = a + c$. Le componenti dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ di B_1 sono, ad esempio, $[\vec{v}_1]_B = [1,1,0]^t$ e $[\vec{v}_2]_B = [0,1,1]^t$.

Con procedimento analogo, si ha che E_{-2} ha dimensione 1, e, detta $B_{-2} = (\vec{v}_3)$ una sua base, le componenti di $\vec{v}_3$ sono $[\vec{v}_3]_B = [0,1,-2]^t$.

Essendo le radici di $p(t)$ tutte reali, ed avendo gli autospazi dimensione uguale alla molteplicità dell' autovalore relativo, f è diagonalizzabile, $E = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di V di autovettori per f, ed una matrice P che diagonalizza A è

$$P = M_E^B(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

essendo i l'applicazione lineare identica.

(c) Le componenti degli autovettori, rispetto alla base canonica, sono date da $[\vec{v}_1]_C = [1,1,0]^t$, $[\vec{v}_2]_C = [1,2,1]^t$ e $[\vec{v}_3]_C = [-2,-1,-2]^t$. Il vettore $\vec{w} = \vec{v}_3 + t\vec{v}$ dove $[\vec{v}]_B = [1,0,-1]^t \in E_1$ è ortogonale a $\vec{v}_3$. Scrivendo $\vec{v}$ rispetto alla base canonica abbiamo $[\vec{v}]_C = [0,-1,-1]^t$. Usando la linearità di f, si ha che $f(\vec{w}) = -2\vec{v}_3 + t\vec{v}$, e quindi $\langle \vec{w}, f(\vec{w})\rangle = -2\langle \vec{v}_3, \vec{v}_3\rangle - t\langle \vec{v}, \vec{v}_3\rangle + t^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = -18 + 2t^2$. Se $2t^2 - 18 < 0$, ossia $-3 < t < 3$, possiamo assumere $\vec{u} = \vec{w}$, e l' angolo tra $\vec{u}$ e la sua immagine è ottuso, mentre se $t = 3$ oppure $t = -3$, possiamo assumere $\vec{u} = \vec{w}$ e $\vec{u}$ è ortogonale alla sua immagine.

Esercizio 2. $(5+4+2$ punti)

In $\mathbb{R}^4$, siano dati i sottospazi

$$V = \langle [1,0,-1,0]^t, [0,-1,2,1]^t \rangle$$

e

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0, z - t = 0\}$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ applicazioni lineari tali che $V = \operatorname{Im}(f)$ e $W = \ker(g)$.

(a) Determinare una base di $V \cap W$ e la sua dimensione.

(b) Calcolare $\dim \ker(g \circ f)$ e dedurre che $g \circ f$ ha un autovalore di molteplicità algebrica almeno uguale a 3.

(c) Determinare esplicitamente due applicazioni lineari f e g per le quali si abbia $\ker(f \circ g) = W$.

Svolgimento.

(a) I vettori di V sono della forma $a[1,0,-1,0]^t + b[0,-1,2,1]^t = [a,-b,-a+2b,b]^t$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Sostituendo tale vettore nel sistema che definisce W, otteniamo il nuovo sistema lineare $a - b = 0$ essendo la prima equazione identicamente soddisfatta. Abbiamo che le soluzioni sono infinite e tutte verificano $a = b$. Quindi, $V \cap W$ ha dimensione 1 ed una sua base è $B = \{[1,-1,1,1]^t\}$.

(b) Dalla definizione di applicazione composta, sappiamo che $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(G)$ dove $G : \operatorname{Im}(f) \to \mathbb{R}^4$ è la restrizione di g a $\operatorname{Im}(f)$. Dall'equazione dimensionale applicata a G sappiamo che $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\ker(G)) + \dim(\operatorname{Im}(G))$, cioè $\dim(V) = \dim(\ker(G)) + \dim(\operatorname{Im}(G))$. Dalla definizione di nucleo abbiamo

$$\ker(G) = \{v \in \mathbb{R}^4 \setminus G(v) = 0\} =$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^4 \setminus f(v) \in \ker(g)\} =$$

$$\operatorname{Im}(f) \cap \ker g = V \cap W.$$

Quindi $\dim(\ker(G)) = \dim(V \cap W) = 1$, per cui $\dim(\operatorname{Im}(G)) = \dim(V) - 1 = 2 - 1 = 1$. Pertanto $\dim(\operatorname{Im}(g \circ f)) = 1$, da cui, usando ancora l'equazione dimensionale, applicata a $g \circ f$, otteniamo $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(g \circ f)) + \dim(\operatorname{Im}(g \circ f))$, cioè $\dim(\ker(g \circ f)) = 3$. Di conseguenza $g \circ f$ ammette l' autovalore 0 con autospazio E_0 di dimensione 3. Ne risulta che $m_a(0) \geq m_g(0) = 3$.

(c) Il sottospazio W ha base $B_W = \{[-2,1,0,0),[-1,0,1,1)\}$ che si ottiene con facili calcoli risolvendo il sistema che definisce W. Una base di $\mathbb{R}^4$ che completa la base di W è, ad esempio,

$$B = \{[-2,1,0,0]^t, [-1,0,1,1]^t, [1,0,0,0]^t, [0,0,0,1]^t\}.$$

Definiamo g ponendo

$$g([-2,1,0,0]^t) = [0,0,0,0]^t, g([-1,0,1,1]^t) = [0,0,0,0]^t,$$

$$g([1,0,0,0]^t) = [1,0,0,0]^t, g([0,0,0,1]^t) = [0,0,0,1]^t.$$

È evidente che $\mathrm{Im}(g) = L([1,0,0,0]^t, [0,0,0,1]^t)$. Definiamo ora f ponendo

$$f([1,0,0,0]^t) = [0,-1,2,1]^t, f([0,0,0,1])^t = [1,0,-1,0]^t,$$

$$f([0,1,0,0]^t) = [0,0,0,0]^t, f([0,0,1,0]^t) = [0,0,0,0]^t.$$

La composizione delle due applicazioni si calcola facilmente, ed abbiamo

$$(f \circ g)([-2,1,0,0]^t) = (f \circ g)([-1,0,1,1]^t) = [0,0,0,0]^t,$$

$$(f \circ g)([1,0,0,0]^t) = [0,-1,2,1]^t, (f \circ g)([0,0,0,1]^t) = [1,0,-1,0]^t$$

ed è quindi evidente che $\ker(f \circ g) = W$ mentre $\mathrm{Im}(f \circ g) = V$.

Esercizio 3. $(6+5$ punti)

Sia dato il piano $\alpha : x-y-1=0$, e sia Ω la quadrica formata dai punti P che verificano

$$d(P,r) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d(P,\alpha)$$

dove r è l' asse x.

(a) Calcolare l'equazione di Ω e classificarla.

(b) Trovare una forma canonica della conica $\Omega \cap [yz]$ essendo $[yz]$ il piano coordinato che contiene gli assi y e z, ed il relativo cambio di coordinate.

Svolgimento.

(a) Sia $P(x,y,z)$ un punto. La distanza di P dall' asse x è $d(P,r) = \sqrt{y^2+z^2}$ visto che la proiezione ortogonale di P su tale retta ha coordinate $(x,0,0)$. La distanza di P dal piano α è uguale a $d(P,\alpha) = |x-y-1|/\sqrt{2}$. Sostituendo nella relazione che definisce Ω, elevando al quadrato e semplificando, otteniamo l' equazione

$$\Omega : x^2 - 2xy - 2y^2 - 3z^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Le matrici associate a Ω sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det A = 0$ e $r(A) = 3$ ossia Ω è una quadrica degenere non spezzata. Il polinomio caratteristico di Q è $p(t) = (-3-t)(t^2+t-3)$ e quindi Q ha due autovalori negativi ed uno positivo. Di conseguenza, Ω è un cono reale.

La conica $\Gamma = \Omega \cap [yz]$ ha equazione $x = 0, 2y^2 + 3z^2 - 2y - 1 = 0$. La matrice completa della conica è

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante $\det(A') = -9$. Quindi Γ è non degenere. In particolare, è un' ellisse.

(b) Una sua forma canonica è

$$2Y^2 + 3Z^2 - \frac{9}{6} = 0$$

. La matrice associata alla parte quadratica è già in forma diagonale, quindi il cambio di coordinate che fornisce la forma canonica è una semplice traslazione. Avendo Γ centro di simmetria in $(\frac{1}{2}, 0)$, allora

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

è la traslazione richiesta.

TEMA D'ESAME - 07/09/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(6+5$ punti)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare $\ker(f)$ ed $Im(f)$, una loro base, e la loro equazione cartesiana.

(b) Determinare gli autospazi ed una base ortonormale per ciascuno di essi.

Svolgimento.

(a) Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti, mentre il determinante di A risulta nullo. Quindi la caratteristica di A è 2, il che implica che la dimensione di $Im(f)$ è 2 (cioè $Im(f)$ è un piano), mentre, per l'equazione dimensionale, la dimensione di $\ker(f)$ è uguale a 1 (cioè $\ker(f)$ è una retta). Le prime due colonne di A possono quindi essere assunte come base di $Im(f)$, la cui equazione cartesiana risulta pertanto data da

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 1 & x \\ 1 & 10 & y \\ -3 & 3 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + 3z = 0,$$

ed $Im(f) = \{[x, x+3z, z]^t \setminus x, z \in \mathbb{R}\}$. Le equazioni parametriche del nucleo si ottengono risolvendo il sistema $A[x, y, z]^t = [0, 0, 0,]^t$. Svolgendo i conti otteniamo

$$\ker f \begin{cases} x = -q \\ y = q \\ z = -3q \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Di conseguenza $\ker(f) = \{[-q, q, -3q]^t \setminus q \in \mathbb{R}\}$, ed una sua base è rappresentata, per esempio, dal vettore $[-1, 1, -3]^t$. Si noti, in particolare, che $\ker(f)$ è perpendicolare ad $Im(f)$.

(b) Uno degli autospazi è $E_0 = \ker(f)$, essendo il nucleo non banale. Poichè A è una matrice simmetrica, per il teorema spettrale f è diagonalizzabile, e gli altri autospazi sono ortogonali ad E_0. Essendo $Im(f) \perp \ker(f)$, gli altri autospazi sono contenuti in $Im(f)$.

Osserviamo che il generico vettore di $v = [x, x+3z, z] \in Im(f)$ è tale che $Av = 11v$, per ogni scelta di x, z. Di conseguenza $Im(f)$ è tutto autospazio, cioè $\lambda = 11$ è autovalore doppio ed $Im(f)$ è l'autospazio ad esso associato (in alternativa si può ottenere lo stesso risultato calcolando il polinomio caratteristico di A, che risulta uguale a $-\lambda(11-\lambda)^2$).

Dal generico vettore di $Im(f)$ possiamo poi ricavare una base più semplice di quella formata dalle prime due colonne di A, per esempio $\{v_1 = [1, 1, 0]^t; v_2 = [0, 3, 1]^t\}$. Una base ortonormale di $\ker(f)$ è data dal vettore $\frac{1}{\sqrt{11}}[-1, 1, -3]^t$. Una base ortonormale

$\{w_1, w_2\}$ di $Im(f)$ si ottiene applicando il procedimento di Gram-Schmidt a $\{v_1, v_2\}$, e si ha

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0]^t$$
$$w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\|} = \frac{v_2 - \frac{3}{2}v_1}{\|v_2 - \frac{3}{2}v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{22}}[-3, 3, 2]^t.$$

Esercizio 2. $(8+3$ punti)

Nel piano euclideo, si consideri la conica di equazione

$$x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 4y + 1 = 0.$$

(a) Classificarla e rappresentarla graficamente in maniera accurata.

(b) Determinare la distanza tra i suoi vertici.

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla conica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo degli invarianti risulta $I_3 = -85$, $I_2 = -1$, $I_1 = 4$, quindi la conica è un'iperbole (non equilatera). Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il centro $C(-16, 10)$. Uguagliando a zero la parte quadratica abbiamo $x^2 + 4xy + 3y^2 = (x + 3y)(x + y) = 0$, quindi gli asintoti sono le rette passanti per il centro e coefficienti angolari $m_1 = -1/3$ ed $m_2 = -1$. Gli assi sono le rette per C parallele agli autospazi. Gli autovalori associati alla parte quadratica sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$, cioè $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$, da cui $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$. Per $\lambda = 2 - \sqrt{5}$ si ha l'autospazio $(\sqrt{5} - 1)x + 2y = 0$, per $\lambda = 2 + \sqrt{5}$ si ha l'autospazio $(-\sqrt{5} - 1)x + 2y = 0$. Il grafico della conica è riportato in Figura 9.12

(b) La distanza tra i vertici si può calcolare facilmente riducendo la conica a forma canonica. Questa è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + I_3/I_2 = 0$. Sostituendo i valori trovati abbiamo $(2-\sqrt{5})x^2 + (2+\sqrt{5})y^2 + 85 = 0$. Le intersezioni reali con gli assi cartesiani danno i punti

$$V_1\left(-\sqrt{\frac{85}{\sqrt{5}-2}}, 0\right), V_2\left(\sqrt{\frac{85}{\sqrt{5}-2}}, 0\right),$$

la loro distanza è uguale a $2\sqrt{\frac{85}{\sqrt{5}-2}}$ e corrisponde alla distanza richiesta.

Esercizio 3. $(6+5$ punti)

Nello spazio euclideo, sia Q il cilindro avente generatrici parallele alla retta $r : x = y = z$, e direttrice data da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

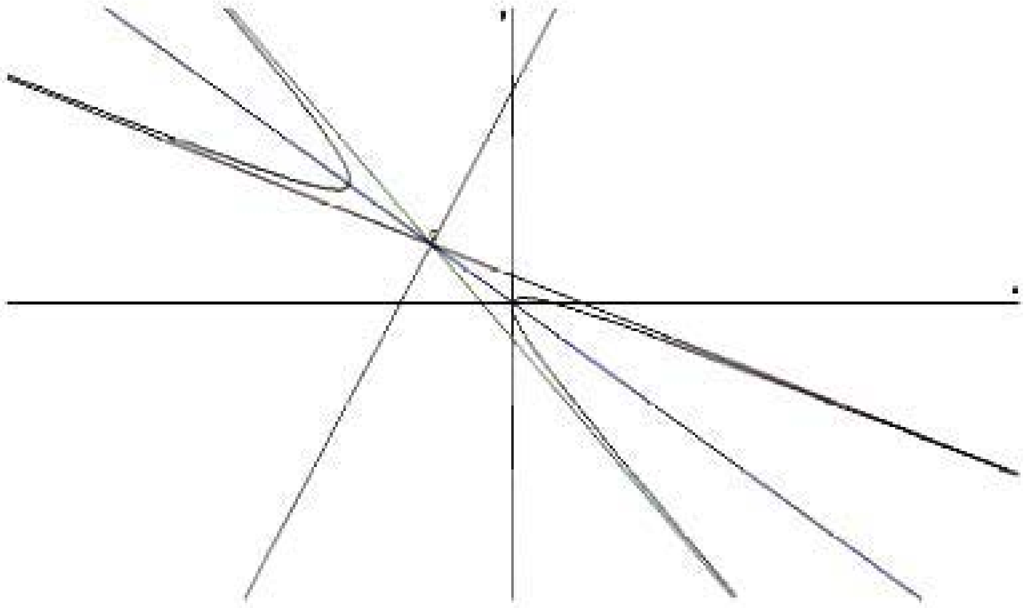


Figura 9.12: grafico della conica $x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$.

(a) Calcolare l'equazione di Q e riconoscerla.

(b) Verificare che Q ammette un piano di simmetria, e scriverne l'equazione corrispondente.

Svolgimento.

(a) L'equazione cartesiana del cilindro richiesto si ottiene eliminando i parametri x_0, y_0, z_0, λ dal seguente sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda & \text{(condizione affinché il primo parametro direttore sia 1)} \\ y = y_0 + \lambda & \text{(condizione affinché il secondo parametro direttore sia 1)} \\ z = z_0 + \lambda & \text{(condizione affinché il terzo parametro direttore sia 1)} \\ y_0 = x_0^2 & \text{(condizione affinché un punto della direttrice stia su } y = x^2\text{)} \\ z_0 = 0 & \text{(condizione affinché un punto della direttrice stia su } z = 0\text{).} \end{cases}$$

Dalla terza e quinta condizione ricaviamo $\lambda = z$, che sostituita nelle prime due fornisce $x_0 = x - z$, $y_0 = y - z$. Dalla quarta condizione si ottiene quindi l'equazione cartesiana di Q, data da $y - z = (x - z)^2$, cioè

$$x^2 - 2xz + z^2 - y + z = 0.$$

(b) La direttrice di Q è una parabola, quindi Q è un cilindro parabolico. La matrice ad esso associata è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori associati alla parte quadratica sono $\lambda = 0$ (autovalore doppio) e $\lambda = I_1 = 2$.
Il cilindro ammette un solo piano di simmetria, parallelo all'autospazio E_0, associato all'autovalore nullo. Esso risulta dato da $E_0 : x - z = 0$, per cui il piano di simmetria è del tipo $x - z + k = 0$ per un dato valore di $k \in \mathbb{R}$.
L'autospazio E_2 ha equazioni date da

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 0. \end{cases}$$

L'intersezione $Q \cap E_2$ fornisce i punti $O(0,0,0)$ e $P\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$, il cui punto medio $M\left(\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{8}\right)$ deve appartenere al piano di simmetria. Di conseguenza si ricava $k = -1/4$, e quindi $x - z - 1/4 = 0$ è l'equazione del piano di simmetria del cilindro ottenuto

TEMA D'ESAME - 19/02/2013

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. ($4 + 4 + 3$ **punti**)

Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 2-h & h \\ 1 & 2 & h-1 \\ 1 & -h & 3 \end{pmatrix},$$

essendo h un parametro reale, e sia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

l' applicazione lineare avente A come matrice associata rispetto alla base canonica.

(a) Determinare, al variare di h in $\mathbb{R}$, la caratteristica di A

(b) Determinare nucleo ed immagine di f, al variare di h in $\mathbb{R}$.

(c) Determinare, nel caso $h = 1$, la proiezione ortogonale di $\ker f$ su $\mathrm{Im} f$

Svolgimento.

(a) Il determinante di A è uguale ad $h^3 - 3h^2 + 10h - 8$, e si fattorizza in $(h-1)(h^2-2h+8)$. Il primo fattore si annulla per $h = 1$, mentre il secondo è sempre diverso da zero. Quindi, per $h \neq 1$ la caratteristica di A è uguale a 3. Per $h = 1$ si vede facilmente che la caratteristica è 2, essendoci un minore non nullo di ordine 2, per esempio $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$.

(b) L'endomorfismo f è rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice A. Quindi, per $h \neq 1$ abbiamo $\ker f = \{0\}$ ed $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$. Per $h = 1$ l'immagine di f ha dimensione 2, ed è generata, per esempio, dalle prime due colonne di A. Il nucleo si ottiene invece risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Poiché la caratteristica di A è uguale a 2 abbiamo ∞^1 soluzioni, che possono essere ottenute riducendo il sistema al seguente

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x + 2y = 0, \end{cases}$$

da cui $x = -2z$ ed $y = z$. Quindi $\ker f = \{[-2z, z, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$, ed una sua base è, per esempio, $\{[-2, 1, 1]^t\}$.

(c) L'equazione del piano $\mathrm{Im} f$ è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & -1 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y - z = 0.$$

Consideriamo la retta passante per $P(-2,1,1)$ e perpendicolare ad $\mathrm{Im} f$

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sostituendo in $3x - 2y - z = 0$ si ottiene $t = 9/14$, per cui la retta interseca il piano nel punto $H(-1/14, -2/7, 5/14)$. La retta OH ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{14} q \\ y = -\frac{2}{7} q \\ z = \frac{5}{14} q, \quad q \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e fornisce la proiezione del nucleo sull'immagine.

Esercizio 2. $(5+6$ punti$)$

Nel piano euclideo, si consideri la conica γ di equazione

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 9 = 0.$$

(a) Classificare γ e ridurla a forma canonica.

(b) Determinare l'equazione della circonferenza γ_1 di raggio massimo contenuta in γ, e l'equazione della circonferenza γ_2 di raggio minimo contenente γ, nel caso in cui γ_1 e γ_2 abbiano lo stesso centro di γ.

Svolgimento.

(a) Dal calcolo degli invarianti otteniamo $I_3 = -3$, $I_2 = 5$, $I_1 = 6$, quindi γ è un'ellisse reale. La forma canonica è

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

essendo λ_1, λ_2 gli autovalori associati alla parte quadratica. Dall'equazione caratteristica $\chi(\lambda) = \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ ricaviamo $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$. Quindi una forma canonica di γ risulta

$$x^2 + 5y^2 - \frac{3}{5} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{x^2}{\frac{3}{5}} + \frac{y^2}{\frac{3}{25}} = 1.$$

(b) Il centro C di γ è la soluzione del sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, cioè

$$\begin{cases} 6x - 4y - 8 = 0 \\ -4x + 6y = 0, \end{cases}$$

da cui $C(12/5, 8/5)$. I raggi R_1, R_2 delle circonferenze γ_1, γ_2 corrispondono, rispettivamente, al semiasse minore ed al semiasse maggiore di γ. Questi si possono dedurre imediatamente dalla forma canonica $\frac{x^2}{\frac{3}{5}} + \frac{y^2}{\frac{3}{25}} = 1$, e risultano

$$R_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Pertanto si ha

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - \frac{24}{5}x - \frac{16}{5}y + \frac{41}{5} = 0$$

e

$$\gamma_2 : x^2 + y^2 - \frac{24}{5}x - \frac{16}{5}y + \frac{193}{25} = 0.$$

Esercizio 3. $(4 + 4 + 3$ punti$)$

Nello spazio euclideo, si considerino il punto $F(1, 0, 1)$ ed il piano π di equazione $x - y = 0$.

(a) Calcolare l'equazione del luogo Γ formato dai punti equidistanti da F e da π.

(b) Verificare che Γ è una quadrica di rotazione, classificarla e ridurla a forma canonica.

(c) Determinare l'equazione dell'asse di rotazione della quadrica

Svolgimento.

(a) Sia $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio. Abbiamo

$$PF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2},$$

mentre la distanza di P da π risulta $|x - y|/\sqrt{2}$. Quindi l'equazione del luogo Γ è data da

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando otteniamo $x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$.

(b) L'equazione determinata è algebrica di secondo grado, il che mostra che Γ è una quadrica. Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = -8$, $I_3 = 0$, $I_2 = 4$, $I_1 = 4$, quindi si ha un paraboloide ellittico. L'equazione caratteristica risulta $\chi(\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 2$ (soluzione doppia) e $\lambda = 0$. Essendoci un autovalore doppio non nullo la quadrica è di rotazione. Una forma canonica è del tipo $2x^2 + 2y^2 + 2Cz = 0$, con $C^2 = -I_4/I_2 = 2$, il che fornisce $C = \pm\sqrt{2}$. Quindi la forma canonica risulta $x^2 + y^2 \pm \sqrt{2}z = 0$.

(c) L'autospazio associato all'autovalore doppio è il piano π, quindi l'asse di rotazione è perpendicolare a tale piano e quindi ha parametri direttori $1, -1, 0$. Il punto medio del segmento di perpendicolare calato da F su π appartiene, per definizione, al luogo Γ, e fornisce il punto a minima distanza da π. Esso è quindi il vertice del paraboloide, per cui l'asse di rotazione passa per F. Di conseguenza

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

forniscono le equazioni parametriche dell'asse di rotazione

TEMA D'ESAME - 17/07/2013

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4+5+2$ punti)

Siano

$$B = \{(1,1,0)^t, (1,0,1)^t, (1,1,1)^t\}$$

e

$$B' = \{(1,1,0)^t, (1,0,1)^t, (0,1,1)^t\}$$

basi di $\mathbb{R}^3$, e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l' endomorfismo che verifica le seguenti condizioni:

i. $(1,1,0)^t$ è autovettore per f relativo all' autovalore 1;

ii. $(1,0,1)^t$ è autovettore per f relativo all' autovalore -1;

iii. $f((0,1,1)^t) = (1,-1,0)^t$.

(a) Scrivere la matrice $M_B^{B'}(f)$.

(b) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori di f ed una base per ogni autospazio di f. Dire quindi se f è diagonalizzabile.

(c) Verificare che f è invertibile e stabilire se f^{-1} è diagonalizzabile.

Svolgimento.

(a) Le colonne della matrice $M_B^{B'}(f)$ si ottengono determinando i coefficienti che permettono di esprimere le immagini dei vettori della base B come combinazione lineare dei vettori della base B'. Essi si possono ottenere con molti metodi, sfruttando il teorema del cambio base in diverse maniere. Ne presentiamo di seguito due.

Primo metodo. Se indichiamo con v_1, v_2, v_3 i vettori di B, e con w_1, w_2, w_3 quelli di B', dalle informazioni del testo abbiamo $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_2$. Dalle ipotesi sappiamo che $f(w_1) = f(v_1) = v_1 = (1,1,0)^t$, $f(w_2) = f(v_2) = -v_2 = (-1,0,-1)^t$ ed $f(w_3) = (1,-1,0)^t$, cioè le immagini dei vettori di B' rispetto alla base canonica C. Possiamo quindi scrivere immediatamente la matrice $M_{B'}^C(f)$

$$M_{B'}^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema del cambio base sappiamo che $M_{B'}^C(f) = M_C^C(f)[B']$, per cui $M_C^C(f) = M_{B'}^C(f)[B']^{-1}$. Di conseguenza

$$M_B^{B'}(f) = [B']^{-1} M_C^C(f)[B] = [B']^{-1} M_{B'}^C(f)[B']^{-1}[B].$$

Calcolando la matrice $[B']^{-1}$ si ha

$$[B']^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

e quindi, sostituendo:

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Secondo metodo. Dalle ipotesi *i.* ed *ii.* sappiamo che $f(v_1) = v_1$ ed $f(v_2) = -v_2$, per cui $f(v_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$ ed $f(v_2) = 0 \cdot w_1 - 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3$. Pertanto le prime due colonne di $M_B^{B'}(f)$ sono $(1,0,0)^t$ e $(0,-1,0)^t$, rispettivamente. Per trovare la terza colonna possiamo determinare $f((1,1,1)^t)$ e scrivere poi tale vettore come combinazione lineare di w_1, w_2, w_3. Poiché $w_1 + w_2 + w_3 = (2,2,2)^t = 2w_3$, per la linearità, risulta

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(w_1 - w_2 + (1,-1,0)^t\right).$$

Inoltre $(1,-1,0)^t = w_2 - w_3$, per cui

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}(w_1 - w_2 + w_2 - w_3) = \frac{1}{2} \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 - \frac{1}{2} \cdot w_3.$$

Pertanto la terza colonna di $M_B^{B'}(f)$ è $(1/2, 0, -1/2)$, e quindi

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Per calcolare il polinomio caratteristico bisogna utilizzare una qualsiasi matrice che rappresenti f rispetto alla stessa base, in partenza ed in arrivo. Dalla formula di cambio base $M_C^C(f) = M_{B'}^C(f)[B']^{-1}$, (già utilizzata nella parte (a), primo metodo) abbiamo

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi il polinomio caratteristico di f è $\det(M_C^C(f) - \lambda I) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$. Abbiamo $Spec(f) = \{-1, 1\}$, con $\lambda = -1$ autovalore doppio. Sostituendo si ottiene che $M_B^B(f) + I$ ha caratteristica due, quindi l'autovalore doppio non è regolare e di conseguenza f non è diagonalizzabile. Poiché abbiamo solo i due autovalori $\lambda = \pm 1$, dalle ipotesi ricaviamo immediatamente i corrispondenti autospazi, cioè $E_{-1} = \{(x,0,x)^t,\ x \in \mathbb{R}\}$ ed $E_1 = \{(x,x,0)^t,\ x \in \mathbb{R}\}$.

(c) Poiché f non ha autovalori nulli, si ha $\det M_C^C(f) \neq 0$, quindi f è invertibile. Se f^{-1} fosse diagonalizzabile, esisterebbero una matrice P invertibile, ed una matrice D diagonale, tali che $P^{-1}M_C^C(f^{-1})P = D$, e quindi $(P^{-1}M_C^C(f^{-1})P)^{-1} = D^{-1} = D$, da cui

$$(P^{-1})(M_C^C(f^{-1}))^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}M_C^C(f)P = D,$$

ed f sarebbe diagonalizzabile, il che è assurdo. Quindi f^{-1} non è diagonalizzabile.

Esercizio 2. $(2 + 6 + 3$ punti$)$

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3a-1 & 3b+1 \\ 2 & -2a+6 & -2b+1 \\ 1 & a & b \end{pmatrix},$$

essendo a, b parametri reali.

(a) Stabilire per quali valori di a, b la matrice A è la matrice associata ad una conica Γ.

(b) Classificare Γ, trovare una sua equazione canonica ed il relativo cambio di riferimento.

(c) Tracciare un grafico qualitativo della conica Γ considerata

Svolgimento.

(a) La matrice $A = (a_{ij})$ è associata ad una conica se è simmetrica, cioè $a_{ij} = a_{ji}$. Imponendo $a_{12} = a_{21}$ si ha $3a - 1 = 2$ e quindi $a = 1$. Imponendo $a_{13} = a_{31}$ si ha $3b+1 = 1$ e quindi $b = 0$ Per tali valori dei parametri si ha anche $a_{32} = a_{23}$, il che rende A simmetrica. La conica Γ da essa rappresentata ha equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 2y = 0$.

(b) Calcolando gli invarianti della conica Γ rappresentata dalla matrice A, si ottiene $I_3 = -1$, $I_2 = 0$, $I_1 = 5$, per cui Γ è una parabola. Una sua equazione canonica è $\lambda_2 y^2 + 2Cx = 0$, dove C risulta

$$C = \lambda_2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}} = \frac{\lambda_2}{5\sqrt{5}},$$

essendo λ_2 l'autovalore non nullo. Quindi una forma canonica è $5\sqrt{5}y^2 + 2x = 0$. Per scrivere il cambio di riferimento che porta Γ in forma canonica, bisogna trovare la matrice M di rotazione ed il vertice. La parte quadratica di Γ si può scrivere come $(x+2y)^2$, quindi l'autospazio associato all'autovalore nullo è $x + 2y = 0$. Per il teorema spettrale, l'altro auto spazio è $2x - y = 0$. Una base ortonormale di autovettori è $\{(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})^t, (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})^t\}$, quindi si ha

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora il vertice. L'intersezione tra Γ e l'autospazio $y = 2x$ (ortogonale all'asse), fornisce l'equazione risolvente $25x^2 + 6x = 0$, le cui radici determinano i punti $O(0,0)$ e $P(-6/25, -12/25)$. Il loro punto medio è $M(-3/25, -6/25)$, quindi l'asse della parabola è la retta $y + 6/25 = -1/2(x + 3/25)$, cioè $y = -1/2x - 3/10$. Mettendo a sistema con l'equazione di Γ si ricava che il vertice è il punto $V(6/25, -21/50)$. Di conseguenza, il cambio di riferimento che riduce Γ a forma canonica è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{25} \\ -\frac{21}{50} \end{bmatrix}.$$

(c) Per tracciare un grafico qualitativo di Γ aggiungiamo alle informazioni già trovate le intersezioni con gli assi. Queste, oltre all'origine, sono date dai punti $A(0,-1/2)$ e $B(-2,0)$. Abbiamo quindi il grafico riportato in Figura 9.13

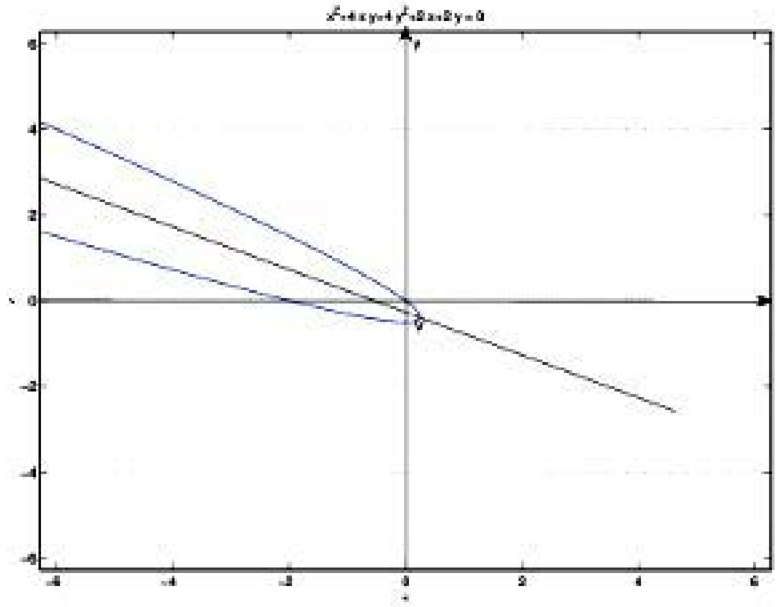


Figura 9.13: grafico della conica Γ.

Esercizio 3. $(1+2+2+4+2$ punti$)$

Nello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$, sia σ la sfera di centro l' origine e raggio 2.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana di σ.

(b) Scrivere l' equazione del fascio di piani F, contenenti la retta passante per $A(1,1,0)$ e parallela all' asse z.

(c) Scrivere l'equazione del piano $\alpha \in F$, che taglia la sfera σ lungo una circonferenza Γ di raggio $\sqrt{2}$.

(d) Scrivere l' equazione cartesiana del cono S di vertice O avente Γ come direttrice.

(e) Verificare che S è di rotazione, e scrivere l'equazione dell'asse di rotazione

Svolgimento.

(a) L'equazione di σ risulta $x^2+y^2+z^2=4$.

(b) La retta passante per A e parallela all'asse z appartiene, per esempio, ai piani $x=1$ ed $y=1$. Quindi l'equazione del fascio F risulta $x-1+\lambda(y-1)=0$, cioè $x+\lambda y-\lambda-1=0$ con $\lambda \in \mathbf{R}$, a cui si aggiunge il piano $y=1$.

(c) Il piano α si ottiene imponendo che la distanza di $O(0,0,0)$ (centro di σ) dal generico piano di F sia uguale a $\sqrt{2}$, in quanto il triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio di σ ed un cateto uguale al raggio di Γ è isoscele. Da ciò si ottiene

$$\frac{|-\lambda-1|}{\sqrt{1+\lambda^2}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)^2=0,$$

e quindi il piano α corrisponde a $\lambda = 1$, per cui ha equazione $x + y - 2 = 0$.

(d) Sia P il generico punto di Γ. Allora le equazioni che descrivono S sono date da

$$\begin{cases} x = x_P t \\ y = y_P t \\ z = z_P t \\ x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = 4 \\ x_P + y_P - 2 = 0. \end{cases}$$

Ricavando x_P, y_P, z_P dalle prime tre equazioni, e sostituendo nella quinta si ottiene $t = (x+y)/2$, da cui $x_P = 2x/(x+y)$, $y_P = 2y/(x+y)$, $z_P = 2z/(x+y)$. Sostituendo nella quarta equazione si ricava l'equazione cartesiana del cono, che, svolgendo i conti, risulta $z^2 - 2xy = 0$.

(e) Gli autovalori di S risultano essere $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. L'autovalore $\lambda = 1$ è doppio, quindi S è un cono di rotazione. Essendo Γ una sezione circolare, l'asse di rotazione è la retta passante per l'origine e perpendicolare al piano α. Di conseguenza

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0, \end{cases}$$

rappresentano le equazioni parametriche dell'asse di rotazione del cono

TEMA D'ESAME - 09/09/2013

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1.(6 + 5 punti)

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{x}_1 = [2, 1, k, -k]^t, \qquad \mathbf{x}_2 = [k, 1, k, 2]^t, \qquad \mathbf{x}_3 = [2k, k, 2k, 0]^t,$$

essendo k un parametro reeale

(a) Determinare, al variare di k, la dimensione del sottospazio vettoriale X di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.

(b) Per $k = 1$, stabilire se il vettore $\mathbf{v} = [1, 1, -1, 2]^t$ appartiene al sottospazio X.

Svolgimento.

(a) Sia A la matrice avente come colonne i vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 2k \\ 1 & 1 & k \\ k & k & 2k \\ -k & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensione di X corrisponde al numero di generatori indipendenti, quindi alla caratteristica di A, per cui $\dim X \leq 3$. Il minore $\{R_1, R_4\} \cap \{C_1, C_2\}$ è uguale a $4 + k^2$, quindi è diverso da zero per ogni valore di k. I due possibili orlati si annullano contemporaneamente per $k = 0$ e per $k = 2$. Quindi X ha dimensione 3 per $k \neq 0, 2$, mentre ha dimensione 2 per $k = 0, 2$.

(b) Per $k = 1$, la matrice $B = [A|\mathbf{v}]$ ha determinante non nullo, quindi $\mathbf{v}$ è indipendente da X, per cui $\mathbf{v} \notin X$.

Esercizio 2. $(2 + 2 + 3 + 4$ punti)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f([x, y, z]^t) = [2x - y + z, -x + y - z, x - y + 2z]^t$$

per ogni $[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica.

(b) Stabilire se f è un endomorfismo diagonalizzabile.

(c) Verificare che f è un automorfismo e determinare l'applicazione lineare inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(d) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = f^{-1}$. In caso affermativo, scrivere la matrice che rappresenta g rispetto alla base canonica.

Svolgimento.

(a)

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ è simmetrica, quindi f è diagonalizzabile.

(c) Poiché $\det M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = 1 \neq 0$, f è suriettiva, quindi, essendo un endomorfismo, anche iniettiva, per cui è un automorfismo. L'applicazione lineare inversa f^{-1} è descritta dalla matrice inversa $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)^{-1}$, data da

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x+3y+z \\ y+z \end{bmatrix}.$$

(d) Una g del tipo richiesto deve essere tale che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f^{-1})$. Ma $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g)M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, e quindi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g) = \left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f^{-1})\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 11 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. $(3+1+1+3+2+1$ punti$)$

Sia Q il luogo dei punti P dello spazio tali che

$$\mathrm{d}(P,F) = 2\,\mathrm{d}(P,\pi),$$

dove $F = (1,-1,-1)$ e $\pi : x - y + 1 = 0$.

(a) Trovare l'equazione di Q, verificare che Q è una quadrica e riconoscerla.

(b) Scrivere un'equazione canonica di Q.

(c) Verificare che Q è una quadrica a centro e di rotazione.

(d) Determinare il centro C, l'asse di rotazione a e i vertici di Q.

(e) Stabilire se esiste una rototraslazione che porta la quadrica Q nella quadrica

$$Q' : 3x^2 - y^2 - z^2 + 6x + 4y + 2z - 8 = 0.$$

(f) Determinare il raggio della circonferenza che si ottiene intersecando Q con il piano π' passante per F ed ortogonale all'asse di rotazione

Svolgimento.

(a) Sia $P(x,y,z)$ il generico punto dello spazio.
Abbiamo $d(P,F) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2}$, e $d(P,\pi) = |x-y+1|/\sqrt{2}$. Inserendo nella definizione di Q, e svolgendo i calcoli, si ha

$$Q: x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 6x - 6y - 2z - 1 = 0.$$

Il luogo Q è descritto da un polinomio di secondo grado in tre variabili, quindi è una quadrica. Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = -18$, $I_3 = 3$, quindi Q è un iperboloide a due falde.

(b) Il calcolo degli autovalori fornisce $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$, mentre $I_4/I_3 = -6$. Quindi una forma canonica risulta $3x^2 - y^2 - z^2 - 6 = 0$.

(c) Poiché Q è un iperboloide, la quadrica è dotata di centro. Essendoci un autovalore doppio non nullo, Q è una quadrica di rotazione.

(d) Il centro di Q è la soluzione del sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, quindi $C(-1, 1 -1)$. L'asse di rotazione è la retta passante per C ortogonale all'autospazio $E_{-1}: x - y = 0$, parallelo al piano π, quindi ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 \end{cases}$$

Si noti che F appartiene all'asse di rotazione. I vertici sono i punti V_1, V_2 in cui l'asse di rotazione interseca Q. Sostituendo nell'equazione di Q le equazioni parametriche dell'asse di rotazione, e svolgendo i calcoli, otteniamo l'equazione risolvente $t^2 + 4t + 3 = 0$, che ha come soluzioni $t = -1$ e $t = -3$. Per questi valori del parametro si ottengono i punti $V_1(0, 0, -1)$ e $V_2(-2, 2, -1)$, rispettivamente.

(e) La parte quadratica di Q' coincide con quella della forma canonica di Q. Poiché questa è ottenuta da Q mediante una rototraslzione, basta vedere se la traslazione che porta il centro di Q' nell'origine fornisce la stessa forma canonica. Si vede facilmente che il centro di Q' è il punto $C'(-1, 2, 1)$, per cui la traslazione che porta C' nell'origine ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z - 1. \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \\ z = z' + 1. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di Q' si ottiene la forma canonica di Q, quindi Q' può essere ottenuta da Q mediante una rototraslazione.

(f) Sia P un qualsiasi punto della circonferenza $Q \cap \pi'$, e sia r il raggio. Poichè F appartiene all'asse di rotazione, si ha

$$r = d(P, F) = 2d(P, \pi) = 2d(F, \pi) = 2\frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2},$$

il che fornisce la lunghezza del raggio della circonferenza considerata

TEMA D'ESAME - 11/02/2014

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+3+2+3$ punti$)$

Sia $M(2,\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali, e sia $f: M(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la seguente applicazione lineare

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b-c \\ -2b+c+d \\ a-b+d \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare $ker f$, la sua dimensione ed una sua base.

(b) Determinare $Im f$, la sua dimensione ed una sua base.

(c) Determinare lo spazio $(Im f)^{\perp}$.

(d) Determinare l'insieme $\mathcal{A}$ formato dalle matrici aventi come immagine il vettore $v = [1,0,1]^t$.

Svolgimento.

(a) Il nucleo di f è lo spazio delle matrici aventi come immagine il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, quindi deve essere

$$\begin{cases} a+b-c=0 \\ -2b+c+d=0 \\ a-b+d=0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è data da

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si vede facilmente che M ha rango 2 ed il sistema si può ridurre al seguente

$$\begin{cases} a+b=c \\ -2b=-c-d, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $a=(c-d)/2$, $b=(c+d)/2$. Pertanto si ha

$$ker(f) = \left\{\begin{bmatrix} \frac{c-d}{2} & \frac{c+d}{2} \\ c & d \end{bmatrix}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Di conseguenza $ker(f)$ ha dimensione 2, e quindi $\dim(Im(f)) = 4-2 = 2$.

(b) L'immagine di f è generata dai vettori corrispondenti alle colonne di una matrice che rappresenta f rispetto a due qualsiasi basi scelte negli spazi di partenza e di arrivo. Scegliendo come base dello spazio di partenza l'insieme delle matrici canoniche fondamentali, e come base dello spazio di arrivo q uella canonica, si vede immediatamente che la matrice rappresentativa di f coincide con M. Quindi si ha

$$Im(f) = \{\alpha[1,0,1]^t + \beta[1,-2,-1]^t,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \langle [1,0,1]^t, [1,-2,-1]^t \rangle.$$

(c) Poiché $\dim(Im(f)) = 2$, $Im(f)$ è un piano di $\mathbb{R}^3$, ed $Im(f)^\perp$ è la retta ortogonale a questo piano e passante per l'origine. L'equazione del piano corrispondente ad $Im(f)$ è data da

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x + y - z = 0.$$

Di conseguenza $Im(f)^\perp = \langle [1,1,-1]^t \rangle$.

(d) L'insieme richiesto è formato dalle matrici tali che

$$\begin{cases} a + b - c = 1 \\ -2b + c + d = 0 \\ a - b + d = 1. \end{cases}$$

Poiché la colonna dei termini noti è uguale alla prima colonna di M, il Teorema di Rouché-Capelli assicura che il sistema è risolubile, ed esistono ∞^2 soluzioni. Esse si ottengono aggiungendo ad una soluzione particolare l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato, corrispondente a $Ker(f)$. Si vede facilmente che una soluzione particolare si ottiene per $a = 1$ e $b = c = d = 0$, per cui si ha

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + Ker(f).$$

Esercizio 2. $(2+3+2+2+2$ punti$)$

Si consideri la conica $\gamma : (x-2y)^2 - 2x - 4 = 0$.

(a) Dimostrare che γ è una parabola.

(b) Ridurre γ a forma canonica.

(c) Determinare l'asse di γ.

(d) Determinare il vertice di γ.

(e) Determinare il cambio di riferimento che riduce γ a forma canonica.

Svolgimento.

(a) Il calcolo degli invarianti fornisce $I_3 = -4$, $I_2 = 0$, $I_1 = 5$, quindi la conica è una parabola.

(b) La sua forma canonica è del tipo $y^2 = 2px$, dove

$$p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}} = \frac{2}{5\sqrt{5}},$$

da cui $y^2 = \frac{4}{5\sqrt{5}}x$.

(c) L'asse di γ è parallelo alla retta $x - 2y = 0$, quindi l'autospazio ad esso ortogonale ha equazione $y = -2x$. Intersecando tale autospazio con la parabola otteniamo i punti

$$A\left(\frac{1-\sqrt{101}}{25}, -2\frac{1-\sqrt{101}}{25}\right), \quad B\left(\frac{1+\sqrt{101}}{25}, -2\frac{1+\sqrt{101}}{25}\right),$$

il cui punto medio è $M(1/25, -2/25)$. L'asse della parabola passa per M, quindi ha equazione $y = 1/2x - 1/10$.

(d) Intersecando con la parabola si ottiene il vertice $V(-99/50, -109/100)$.

(e) La matrice ortogonale speciale formata dagli autovettori normalizzati è data da

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

ed il cambio di riferimento che riduce γ alla forma canonica è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{99}{50} \\ -\frac{109}{100} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. $(5 + 4 + 2$ punti$)$

Si consideri il cono Γ avente vertice nel punto $V(0, 0, 1)$, e come direttrice la conica

$$\gamma \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana di Γ.

(b) Classificare la conica ψ ottenuta intersecando Γ con il piano $x - z = 0$.

(c) Determinare il centro della conica ψ precedentemente considerata

Svolgimento.

(a) Sia $P(x_P, y_P, z_P)$ il generico punto della direttrice. La retta VP ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x = x_V + \lambda(x_V - x_P) \\ y = y_V + \lambda(y_V - y_P) \\ z = z_V + \lambda(z_V - z_P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda x_P \\ y = -\lambda y_P \\ z = 1 + \lambda(1 - z_P). \end{cases}$$

Poiché $z_P = 0$, dalla terza equazione ricaviamo $\lambda = z - 1$, che, sostituita nelle prime due equazioni fornisce $x_P = x/1 - z$ ed $y_P = y/1 - z$. Essendo poi $y_P = x_P^2$ abbiamo che l'equazione cartesiana del cono Γ è data da

$$\Gamma : \frac{y}{1-z} = \frac{x^2}{(1-z)^2} \Rightarrow \Gamma : x^2 - y(1-z) = 0.$$

(b) La conica ψ è data da

$$\psi \begin{cases} x^2 - y(1-z) = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Consideriamo la proiezione ortogonale ψ' di ψ sul piano $z = 0$. Per fare questo scriviamo ψ come intersezione, con il piano $x = z$, del cilindro avente direttrice ψ' e generatrici parallele all'asse z, cioè

$$\psi \begin{cases} x^2 - y(1-x) = 0 \\ z = x. \end{cases} \Rightarrow \psi' \begin{cases} x^2 + xy - y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Il calcolo degli invarianti di $x^2 + xy - y = 0$ fornisce $I_3' = -1/4$, $I_2' = -1/4$, $I_1' = 1$, quindi ψ' è una iperbole non equilatera. Di conseguenza anche ψ è una iperbole.
La parte quadratica di ψ' è $x^2 + xy$ e si annulla per $x = 0$ ed $x + y = 0$, quindi gli asintoti hanno parametri direttori $(0, 1, 0)$ ed $(1, -1, 0)$. Gli asintoti di ψ si ottengono proiettando quelli di ψ' sul piano $x = z$, per cui hanno parametri direttori $(0, 1, 0)$ ed $(1, -1, 1)$, e, non essendo ortogonali, anche ψ è una iperbole non equilatera.

(c) Il centro C' di ψ' si ottiene risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi'}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \psi'}{\partial y} = x - 1 = 0 \\ \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi risulta $C'(1, -2, 0)$. Di conseguenza il punto $C(1, -2, 1)$ rappresenta il centro della conica ψ considerata

TEMA D'ESAME - 28/04/2014

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4 + 4 + 3$ punti)

In $\mathbb{R}^3$ si considerino il piano α_h e la retta r di equazioni rispettivamente

$$\alpha_h : hx + y - (1+h)z = 2h, \quad r : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases},$$

essendo h un parametro reale.

(a) Stabilire se esistono valori di h per i quali α_h è parallelo ad r.

(b) Stabilire se esistono valori di h per i quali α_h interseca r nel punto $P(-1, -2, 2)$, e se esistono valori di h per i quali α_h interseca r nel punto $Q(1, -2, 2)$.

(c) Determinare l'equazione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ contenente r.

Svolgimento.

(a) Il piano α_h è parallelo ad r se il sistema

$$\begin{cases} hx + y - (1+h)z = 2h \\ x + y + 2z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Per il teorema di Rouché-Capelli questo avviene se e solo se la caratteristica della matrice dei coefficienti è inferiore alla caratteristica della matrice completa. Poiché entrambe le caratteristiche sono almeno 2 (i due piani che definiscono r non sono paralleli), ciò è possibile se e solo se la caratteristica dell matrice dei coefficienti è 2 e quella della matrice completa è 3. Quindi, innanzitutto, deve essere

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ h & 1 & -(1+h) \end{bmatrix} = 4h + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = -1.$$

Si vede facilmente che per tale valore di h la matrice completa ha caratteristica 3, e quindi α_{-1} è parallelo alla retta.

(b) Il punto P appartiene ad r, quindi basta imporre che $P \in \alpha_h$, cioè

$$-h - 2 - 2(1+h) = 2h \quad \Rightarrow \quad h = -\frac{4}{5}.$$

Si nota che le coordinate di Q non verificano le equazioni che definiscono r, quindi $Q \notin r$ e, di conseguenza, non esiste alcun piano α_h che interseca r in Q.

(c) Il sottospazio richiesto è il piano contenente r e passante per l'origine. Il generico piano contenente r ha equazione data da

$$x + y + 2z - 1 + \lambda(x - y - 1) = 0.$$

L'origine verifica tale equazione se e solo se $\lambda = -1$, e sostituendo si ha $y + z = 0$, che fornisce l'equazione del sottospazio considerato.

Esercizio 2. ($3 + 3 + 2 + 3$ punti)

Sia $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali, e siano $A, B, C, D \in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ tali che

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare la dimensione dei sottospazi $U = \langle A, C \rangle$ e $W = \langle B, D \rangle$.

(b) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $U \cap W$.

(c) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $U + W$.

(d) Data la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

si verifichi che $M \in \langle A, B \rangle$, ma $M \notin \langle C, D \rangle$.

Svolgimento.

(a) Una generica combinazione lineare $\alpha A + \beta C$ è uguale alla matrice nulla se e solo se

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il che implica $\alpha = \beta = 0$, e quindi le matrici A, C sono indipendenti. Di conseguenza U ha dimensione 2, e le matrici A, C rappresentano una base. Analogamente, una generica combinazione lineare $\gamma B + \delta D$ è uguale alla matrice nulla se e solo se

$$\begin{bmatrix} \gamma + \delta & -\gamma + \delta \\ \gamma - \delta & \gamma - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il che fornisce di nuovo $\gamma = \delta = 0$, e quindi le matrici B, D sono indipendenti. Di conseguenza W ha dimensione 2, e le matrici B, D rappresentano una base.

(b) Per determinare $U \cap W$ risolviamo il sistema che si ottiene uguagliando il generico elemento di U al generico elemento di W

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma + \delta & -\gamma + \delta \\ \gamma - \delta & \gamma - \delta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \gamma + \delta \\ -\beta = \gamma + \delta \\ \beta = \gamma - \delta \\ \alpha = \gamma - \delta. \end{cases}$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni, date da $\alpha = \beta = \gamma$, $\delta = 0$. Quindi $U \cap W$ ha dimensione 1, e, sostituendo le condizioni in U o in w, si ha

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} \setminus \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(c) Per la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Ovviamente $U+W$ ha come generatori le quattro matrici A, B, C, D, quindi una base di $U+W$ si ottiene considerando una terna indipendente di tali matrici. Identificando $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ le quattro matrici corrispondono alle colonne della seguente matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La terza colonna di Q è uguale alla differenza tra la seconda e la prima, il che corrisponde a dire che la matrice C è combinazione lineare di A e B. Di conseguenza, essendo la caratteristica di Q uguale a 3, le matrici A, B, D sono indipendenti, e rappresentano una base di $U+W$.

(d) Posto $M = aA + bB$ si ottiene $a = -3$, $b = 5$, quindi $M \in \langle A, B \rangle$. Posto invece $M = cC + dD$ si ottengono relazioni contraddittorie (per esempio $d = 2$, $d = -2$), per cui $M \notin \langle C, D \rangle$.

Esercizio 3. $(2+2+2+2+3$ punti$)$

Sia $\mathbb{R}_2[t]$ lo spazio dei polinomi in t di grado minore o uguale a 2 a coefficienti reali. Sia $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ la seguente applicazione lineare

$$f\left(at^2 + bt + c\right) = (a + b - c)t^2 + (2a - b + 3c)t + 3a + 2c.$$

(a) Determinare $ker f$, la sua dimensione ed una sua base.

(b) Determinare $Im f$, la sua dimensione ed una sua base.

(c) Determinare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{t^2, t, 1\}$ (in partenza) e $\mathcal{B}' = \{t, 1, t^2\}$ (in arrivo).

(d) Identificando $\mathbb{R}_2[t]$ con $\mathbb{R}^3$ si determinino le equazioni dei sottospazi corrisponenti a $ker f$ ed $Im f$.

(e) Determinare $f^{-1}(t^2 - t)$.

Svolgimento.

(a) Il nucleo è il sottospazio di $\mathbb{R}_2[t]$ formato dai polinomi $p(t)$ tali che $f(p(t)) = 0$ (polinomio nullo). I coefficienti devono quindi verificare il seguente sistema

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b + 3c = 0 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di A è nullo (la terza riga è la somma delle prime due), mentre il m inore formato dlle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo. Il sistema ammette quindi ∞^1 soluzioni, date da

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3}c \\ b = \frac{5}{3}c. \end{cases}$$

Di conseguenza $ker f$ ha dimensione 1, e, nell'isomorfismo canonico che identifica $\mathbb{R}_2[t]$ con $\mathbb{R}^3$, $ker f$ corrisponde al seguente insieme

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}c \\ \frac{5}{3}c \\ c \end{bmatrix} \setminus c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pertanto $ker f$ è dato da

$$ker f = \left\{ p(t) = -\frac{2}{3}ct^2 + \frac{5}{3}ct + c \setminus c \in \mathbb{R} \right\} = \langle -2t^2 + 5t + 3 \rangle.$$

(b) Identificando $\mathbb{R}_2[t]$ con $\mathbb{R}^3$ la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica corrisponde alla matrice A precedentemente utilizzata. L'immagine di f corrisponde pertanto al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Esso ha dimensione 2 ed una base è descritta, per esempio, dalle prime due colonne. Quindi $Im f$ è lo spazio delle combinazioni lineari dei polinomi $p_1(t) = t^2 + 2t + 3$ e $p_2(t) = t^2 - t$ corrispondenti a tali colonne, cioè

$$Im f = \{ p(t) = \alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \setminus \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} = \langle p_1(t), p_2(t) \rangle.$$

(c) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ ha come colonne i coefficienti che esprimono le immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}'$, per cui

$$\begin{array}{lll} f(t^2) = t^2 + 2t + 3 = 2 \cdot t + 3 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 & \Rightarrow & [2, 3, 1]^t \\ f(t) = t^2 - t = -1 \cdot t + 0 \cdot 1 + 1 \cdot t^2 & \Rightarrow & [-1, 0, 1]^t \\ f(1) = -t^2 + 3t + 2 = 3 \cdot t + 2 \cdot 1 - 1 \cdot t^2 & \Rightarrow & [3, 2, -1]^t, \end{array}$$

e quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Usando in $\mathbb{R}^3$ coordinate x, y, z, dal punto (1) si ha immediatamente

$$ker f \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Poiché Imf ha dimensione 2 essa corrisponde ad un piano di $\mathbb{R}^3$, la cui equazione , in base al teorema di caratterizzazione dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$ è data da

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 0 & z \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad Imf : x + y - z = 0.$$

(e) Sfruttando l'identificazione di $\mathbb{R}_2[t]$ con $\mathbb{R}^3$, $f^{-1}(t^2 - t)$ è descritto dall'insieme delle soluzioni del sistema

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

essendo $[-1, 0, 1]^t$ le coordinate di $t^2 - t$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ dello spazio di arrivo. Per il teorema di caratterizzazione delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo, queste si ottengono sommando $kerf$ ad una soluzione particolare. Si vede semplicemente che $[0, 1, 0]^t$ è una soluzione particolare, alla quale corrisponde il polinomio $q(t) = t$ dello spazio $\mathbb{R}_2[t]$ di partenza (in cui la base è $\mathcal{B}$). Quindi si ha

$$f^{-1}(t^2 - t) = t + kerf = -\frac{2}{3}ct^2 + \left(\frac{5}{3}c + 1\right)t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

VERIFICA IN ITINERE - 26/06/2014

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(2+4+4+1$ punti)

Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f_h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+hz \\ 2x+4y+2z \\ x+2y+3z \end{bmatrix},$$

essendo h un parametro reale.

(a) Verificare, senza calcolare $Spec f_h$, che f_h ammette l'autovalore nullo per ogni h reale.

(b) Calcolare $Spec f_h$, e stabilire se esistono valori di h per i quali non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f_h.

(c) Verificare che f_4 ammette una base $\mathbf{B}$ di autovettrori, e calcolarla esplicitamente.

(d) Valutare l'angolo tra gli autospazi di f_4 diversi da $ker f_4$.

Svolgimento.

(a) Consideriamo la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_h)$ che rappresenta f_h rispetto alla base canonica

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_h) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & h \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

La seconda colonna è il doppio della prima, quindi il rango di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_h)$ è sempre inferiore a 3 per ogni h. Di conseguenza $ker f_h$ non è mai banale, e quindi $0 \in Spec f_h$ per ogni h reale.

(b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f_h

$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & h \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 11 - h).$$

Le radici di $\chi(\lambda)$ sono quindi $\lambda = 0$ e $\lambda = 4 \pm \sqrt{5+h}$, per cui $Spec f_h = \{0, 4-\sqrt{5+h}, 4+\sqrt{5+h}\}$. Osserviamo che lo spettro è reale per $h \geq -5$. Studiamo per quali valori di h due autovalori coincidono.

• Abbiamo $0 = 4 - \sqrt{5+h}$ per $\sqrt{5+h} = 4$, cioè $5 + h = 16$, da cui $h = 11$. In questo caso $Spec f_{11} = \{0, 0, 8\}$, per cui bisogna controllare la dimensione di E_0. Per $h = 11$ abbiamo

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

e si vede immediatamente che esiste un minore non nullo di ordine 2 (per esempio $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$). Quindi $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_{11})$ ha rango 2 e $m_g(0) = dim(E_0) = 3 - 2 = 1 < m_a(0)$, quindi f_{11} non è diagonalizzabile.

• L'uguaglianza $0 = 4 + \sqrt{5+h}$ è impossibile.

• Abbiamo $4 - \sqrt{5+h} = 4 + \sqrt{5+h}$ per $\sqrt{5+h} = 0$, cioè $h = -5$. In questo caso $Spec f_{-5} = \{0, 4, 4\}$, per cui bisogna controllare la dimensione di E_4. Per $h = -5$ abbiamo

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_{-5}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

e si vede immediatamente che esiste un minore non nullo di ordine 2 (per esempio $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$). Quindi $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f_{-5})$ ha rango 2 e $m_g(4) = dim(E_4) = 3 - 2 = 1 < m_a(4)$, quindi f_{-5} non è diagonalizzabile.

Per $h > -5$ ed $h \neq 11$ abbiamo sempre radici reali e distinte, ed f_h è diagonalizzabile, mentre, per $h \leq -5$ ed $h = 11$ f_h non è diagonalizzabile, per cui non esiste una base $\mathbf{B}$ di autovettori.

(c) Per $h = 4$ abbiamo $Spec f_4 = \{0, 1, 7\}$. Calcoliamo i tre autospazi

• E_0 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)[x, y, z]^t = [0, 0, 0]^t$, per cui

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi $E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \\ 0 \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$. Una base di E_0 è data dal vettore $w_1 = [2, -1, 0]^t$, che normalizzato fornisce $\widehat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[2, -1, 0]^t$.

• E_1 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - I][x, y, z]^t = [0, 0, 0]^t$, per cui

$$\begin{cases} 2y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z. \end{cases}$$

Quindi $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2z \\ -2z \\ z \end{bmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$. Una base di E_1 è data dal vettore $w_2 = [2, -2, 1]^t$, che normalizzato fornisce $\widehat{w}_2 = \frac{1}{3}[2, -2, 1]^t$.

• E_7 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - 7I][x, y, z]^t = [0, 0, 0]^t$, per cui

$$\begin{cases} -6x + 2y + 4z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ x + 2y - 4z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{8}{7}z \\ y = \frac{10}{7}z. \end{cases}$$

Quindi $E_7 = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{8}{7}z \\ \frac{10}{7}z \\ z \end{bmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$. Una base di E_7 è data dal vettore $w_3 = [8, 10, 7]^t$, che normalizzato fornisce $\widehat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{213}}[8, 10, 7]^t$.

(d) Valutiamo l'angolo α tra E_1 ed E_7 tramite il prodotto scalare, ed otteniamo

$$\cos\alpha = \frac{\langle E_1, E_7\rangle}{\|E_1\|\|E_7\|} = \frac{1}{\sqrt{213}}.$$

Esercizio 2. $(3+2+3+3$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino il piano $\alpha : x - y - 2z + 1 = 0$, e la retta r passante per i punti $A(1,0,1)$ e $B(0,1,1)$.

(a) Determinare la proiezione r' di r su α.

(b) Valutare l'angolo tra r ed α.

(c) Determinare l'equazione del piano β contenente r e perpendicolare ad α.

(d) Scrivere l'equazione della retta passante per B e perpendicolare alle rette r' ed r.

Svolgimento.

(a) Osserviamo che il punto $A \in \alpha$ mentre $B \notin \alpha$, per cui r' è la retta che unisce A con la proiezione H di B su α. La retta per B perpendicolare ad α ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di α otteniamo $t = \frac{1}{3}$, per cui $H = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Di conseguenza $r' = AH$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}q \\ y = \frac{2}{3}q \\ z = 1 - \frac{2}{3}q, \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) L'angolo tra r ed α corrisponde all'angolo tra r ed r', per cui possiamo valutarlo mediante il prodotto scalare. La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = 1, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Abbiamo quindi $\vec{r} = [-1,1,0]^t$, $r' = [-2,2,-2]^t$, e quindi

$$\cos\widehat{rr'} = \frac{\langle r, r'\rangle}{\|r\|\|r'\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; \widehat{rr'} = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(c) Determiniamo innanzitutto l'equazione del fascio di piani contenenti r. A tale proposito scriviamo r come intersezione tra due piani sostituendo $k = y$ nella prima delle equazionei parametriche di r

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Il fascio di piani di sostegno r ha pertanto equazione $x + y - 1 + \lambda(z - 1) = 0$, essendo λ un parametro reale. Il vettore dei coefficienti è $[1, 1, \lambda]^t$, mentre quello dei coefficienti di α è $[1, -1, -2]^t$. Imponendo l'annullamento del loro prodotto scalare abbiamo $\lambda = 0$, quindi il piano richiesto è $x + y - 1 = 0$.

(d) La retta richiesta è parallela ad $\vec{r} \wedge \vec{r'}$, dato da

$$\vec{r} \wedge \vec{r'} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = [-2, -2, 0]^t.$$

Dovendo poi passare per B ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -2h \\ y = 1 - 2h \\ z = 1, \quad h \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 3. $(4 + 4 + 3$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, sia data la conica

$$\gamma : \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

(a) Verificare che γ è una parabola, e determinare asse di simmetria e vertice.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro Ω avente come direttrice γ e generatrici parallele al vettore $r = [1, 1, 1]^t$

(c) Dimostrare che Ω ammette un piano di simmetria, e scriverne l'equazione corrispondente.

Svolgimento.

(a) Ragioniamo sul piano $z = 0$. Scrivendo la matrice simmetrica associata a γ si calcolano facilmente gli invarianti, che risultano essere $I_3 = -1$, $I_2 = 0$, $I_1 = 2$. Pertanto γ è una parabola. L'asse è parallelo all'autospazio associato all'autovalore nullo, dato da $E_0 : y = x$. L'intersezione tra la parabola ed $E_0^\perp : y = -x$ fornisce l'equazione risolvente $4x^2 - 2x = 0$, avente come soluzioni $x = 0, 2$, a cui corrispondono i punti $O(0, 0)$ ed $A(1/2, -1/2)$. Il loro punto medio è $M(1/4, -1/4)$, per cui l'asse ha equazione y=x-1/2. L'intersezione con la parbola fornisce il vertice $V(1/8, -3/8)$. Riportando i risultati nello spazio abbiamo che l'asse è la retta di equazioni

$$\begin{cases} y = x - 1/2 \\ z = 0, \end{cases}$$

mentre il vertice è il punto $V(1/8, -3/8, 0)$.

(b) Sia P il generico punto di γ. La retta passante per P e parallela ad r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + \lambda \\ z = z_P + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Poiché γ appartiene al piano $z = 0$ abbiamo $z_P = 0$, quindi $z = \lambda$. Sostituendo nelle prime due equazioni ricaviamo $x_P = x - z$ ed $y_P = y - z$. Sostituendo poi nell'equazione di γ otteniamo $(x-z)^2 - 2(x-z)(y-z) + (y-z)^2 - 2(x-z)$, da cui

$$\Omega : x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2z = 0.$$

(c) La matrice associata alla quadrica è data da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = I_3 = I_2 = 0$, $I_1 = 2$. Pertanto Ω è un cilindro parabolico, cosa che si può anche dedurre direttamente dalla costruzione. Il cilindro parabolico ha un piano di simmetria, parallelo all'autospazio E_0. Tale autospazio si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $Q[x, y, z]^t = [0, 0, 0]^t$, essendo Q la matrice associata alla parte quadratica di Ω, per cui

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quindi E_0 è il piano $x - y = 0$. L'altro autospazio è la retta passante per l'origine ed ortogonale ad E_0, data da

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di Ω otteniamo $4t^2 - 2t = 0$, le cui soluzioni sono $t = 0$ e $t = \frac{1}{2}$. Pertanto la retta interseca la quadrica nei punti $O(0,0,0)$ ed $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. Il loro punto medio è $M\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right)$. Il piano di simmetria di Ω è parallelo ad E_0 e passa per M. Di conseguenza $x - y - \frac{1}{2} = 0$ è l'equazione del piano di simmetria del cilindro considerato.

TEMA D'ESAME - 11/07/2014

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(5+5+1$ punti)

Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente applicazione lineare

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-3y+z \\ -3x+y+2z \\ -2x-2y+3z \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare nucleo ed immagine, la rispettiva dimensione, una loro base, e le equazioni di tali sottospazi.

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0. \end{cases}$$

Determinare le equazioni di $U \cap Imf$ e di $U+Ker(f)$.

(c) Determinare, se esiste, un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagine.

Svolgimento.

(a) La matrice associata all'endomorfismo rispetto alla base canonica (sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo), è data da

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo $R_3 = R_1 + R_2$, quindi il determinante è nullo, mentre il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo. Di conseguenza la matrice ha rango 2, per cui dim$Imf = 2$ e dim$ker(f) = 1$. Il sistema $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)[x,y,z]^t = [0,0,0]^t$ si riduce al seguente

$$\begin{cases} x-3y=-z \\ -3x+y=-2z, \end{cases}$$

il che fornisce le equazioni del nucleo. Risolvendo abbiamo le ∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} x=\frac{7}{8}z \\ y=\frac{5}{8}z. \end{cases}$$

Quindi $ker(f) = \{[7z, 5z, 8z]^t,\ z \in \mathbb{R}\}$, ed una sua base è, per esempio, il vettore $[7,5,8]^t$. L'immagine di f ha come base le prime due colonne di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, ed è quindi formata da tutte le loro possibili combinazioni lineari. L'equazione del piano che fornisce l'immagine di f è data da

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -3 & x \\ -3 & 1 & y \\ -2 & -2 & z \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - z = 0.$$

(b) Il sottospazio U è formato da tutti i vettori del tipo $[x, x, 2x]^t$, per un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, per cui ha dimensionje 1, ed una sua base è il vettore $[1, 1, 2]^t$. Osserviamo che $[1, 1, 2]^t$ si può scrivere come combinazione lineare delle prime due colonne di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza $U \cap Imf = U$, e le equazioni sono quelle che definiscono U. Invece, i vettori che formano la base di $ker(f)$ e la base di U sono indipendenti, quindi $U + Ker(f)$ ha dimensione 2, e l'equazione di tale piano è data da

$$\det \begin{bmatrix} 7 & 1 & x \\ 5 & 1 & y \\ 8 & 2 & z \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3y + z = 0.$$

(c) Poichè $Imf \subset \mathbb{R}^3$, per avere vettori del tipo richiesto basta considerare una retta non appartenente al piano $x + y - z = 0$, Pper esempio la retta per l'origine ad esso perpendicolare. Una base di tale retta è data dal vettore $v = [1, 1, -1]^t$, che pertanto non appartiene ad Imf e fornisce una possibile scelta

Esercizio 2. $(5 + 3 + 3$ punti$)$

Sia f_k l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile.

(b) Dimostrare che f_k ha nucleo non banale se e solo se f_k è simmetrico.

(c) Determinare la matrice M che diagonalizza A nel caso in cui f_k sia un endomorfismo simmetrico.

Svolgimento.

(a) Il polinomio caratteristico di f_k è $\chi(\lambda) = (k-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$. Quindi $Spec f_k = \{k, 2, 4\}$, e lo spettro è reale per ogni k. Per $k \neq 2, 4$ abbiamo autovalori distinti, quindi f_k è diagonalizzabile. Per $k = 2$ l'autovalore $\lambda = 2$ è doppio, e la matrice caratteristica diventa

$$A_2 - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che essa ha rango 1, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è uguale a $3 - 1 = 2$, per cui f_2 è diagonalizzabile. Per $k = 4$ l'autovalore $\lambda = 4$ è doppio, e la matrice caratteristica diventa

$$A_4 - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che essa ha rango 2, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda = 4$ è uguale a $3 - 2 = 1$, per cui f_4 non è diagonalizzabile.

(b) Il nucleo di f_k è non banale se e solo se f_k ammette l'autovalore nullo, il che equivale a richiedere $k = 0$, che è l'unico valore del parametro che rende A_k simmetrica, e quindi f_k un endomorfismo simmetrico.

(c) La matrice M ha come colonne gli autospazi normalizzati corrispondenti agli autovalori $0, 2, 4$.

- E_0 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 3y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

- E_2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ -2z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -y \\ z = 0. \end{cases}$$

- E_4 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -4z = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

fornisce la matrice richiesta.

Esercizio 3. $(1+1+3+3+3$ punti$)$

Nel piano euclideo, si consideri la conica di equazione

$$x^2 - 6xy + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0.$$

(a) Verificare che la conica è un'iperbole.

(b) Determinare una sua forma canonica.

(c) Determinare le equazioni degli assi di simmetria.

(d) Determinare l'equazione degli asintoti

(e) Rappresentarla graficamente in maniera accurata.

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla conica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo degli invarianti risulta $I_3 = -95$, $I_2 = -8$, $I_1 = 2$, quindi la conica è un'iperbole (non equilatera).

(b) Gli autovalori associati alla parte quadratica sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\chi(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 9 = 0$, da cui $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, e quindi $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$. Una forma canonica è $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + I_3/I_2 = 0$, cioè $-16x^2 + 36y^2 + 9 = 0$.

(c) Per $\lambda = -2$ si ha l'autospazio $y = x$, per $\lambda = 4$ si ha l'autospazio $y = -x$. Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il centro $C(7/8, 5/8)$. Gli assi sono paralleli agli autospazi e passano per il centro, quindi le loro equazioni risultano $y = -x + 3/2$ ed $y = x - 1/4$, rispettivamente.

(d) Uguagliando a zero la parte quadratica abbiamo $x^2 - 4xy + y^2 = 0$, cioè $y = (3 \pm 2\sqrt{2})x$. Gli asintoti sono le rette passanti per il centro ed aventi coefficienti angolari $m_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ ed $m_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, quindi le loro equazioni risultano $y = (3 - 2\sqrt{2})(x - 7/8) + 5/8$ ed $y = (3 + 2\sqrt{2})(x - 7/8) + 5/8$, rispettivamente.

(e) Il grafico della conica risulta pertanto illustrato in Figura 9.14

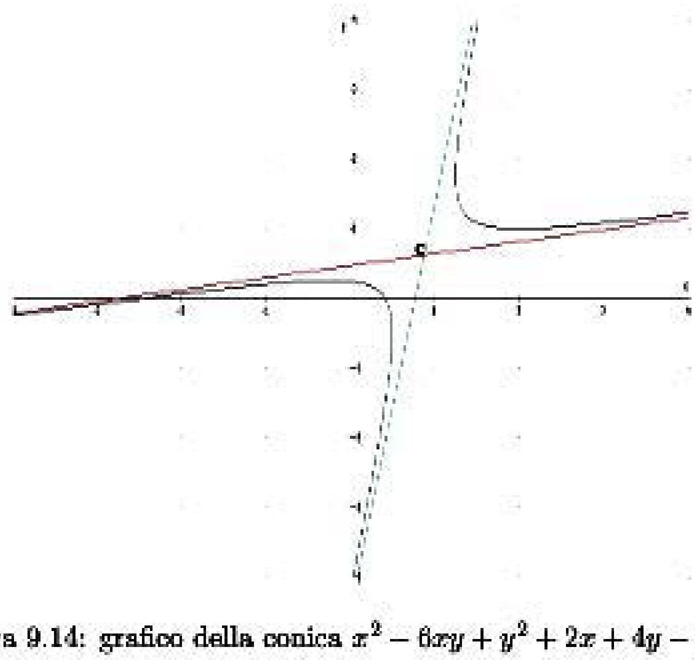


Figura 9.14: grafico della conica $x^2 - 6xy + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$.

TEMA D'ESAME - 28/07/2014

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(5+5+1$ punti$)$

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y-z \\ x-t \\ y-z+t \\ 2x+y-z-t \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare nucleo ed immagine, la rispettiva dimensione ed una loro base.

(b) Scrivere le equazioni di $ker f$ e di $Im f$.

(c) Determinare la dimensione di $ker f \cap Im f$.

Svolgimento.

(a) La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è data da

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo. Ogni suo orlato risulta nullo, quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza $ker f$ ed $Im f$ hanno entrambi dimensione 2. Il nucleo si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)X = 0$, il che fornisce

$$ker f = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ z-t \\ z \\ t \end{bmatrix},\ z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'immagine di f ha come base, per esempio, le prime due colonne di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, per cui

$$Im f = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(b) Per il teorema di caratterizzazione dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$, sia $ker f$ che $Im f$ sono descritti da due equazioni in 4 incognite. Le equazioni del nucleo si ottengono imponendo che abbia rango 2 la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

e quindi

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}, \\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-t=0. \end{cases}$$

Le equazioni dell'immagine si ottengono imponendo che abbia rango 2 la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

e quindi

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}, \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-t=0. \end{cases}$$

(c) Consideriamo la matrice avente per colonne i vettori delle basi determinate per $ker f$ e per $Im f$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le colonne di M rappresentano un insieme di generatori per il sottospazio $ker f + Im f$. Il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$ è non nullo, ed essendo $C_4 = C_1 + C_2$ risulta che M ha rango 3. Pertanto $ker f + Im f$ ha dimensione 3 e, per la formula di Grassmann, $ker f \cap Im f$ ha dimensione 1 ed è quindi una retta.

Esercizio 2. $(2+4+5$ punti$)$

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio α rappresentato dalla seguente equazione

$$\alpha : x + 2y - 3z = 0.$$

(a) Determinare la dimensione ed una base di α e di $\alpha^\perp$.

(b) Determinare una base ortonormale $\mathbf{B}_\alpha$ di α ed una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathbf{B}_\alpha$.

(c) Determinare le proiezioni del vettore $v = [2, 3, -2]$ sui sottospazi α ed $\alpha^\perp$, e valutare gli angoli formati da v con tali sottospazi

Svolgimento.

(a) Il sottospazio α è descritto da una sola equazione in $\mathbb{R}^3$, quindi ha dimensione 2 ed è un piano. Di conseguenza, lo spazio $\alpha^\perp$ ha dimensione 1, ed è una retta. Scrivendo l'equazione di α nella forma $x = -2y + 3z$ osserviamo che il generico vettore di tale piano è del tipo $[-2y+3z, y, z]^t$, quindi una sua base è data dai vettori $v_1 = [-2, 1, 0]^t$ e $v_2 = [3, 0, 1]^t$. Una base della retta $\alpha^\perp$ è data dal vettore $v_3 = [1, 2, -3]^t$ avente per componenti i coefficienti di x, y, z nell'equazione di α.

(b) Una base ortonormale $\mathbf{B}_\alpha$ di α è data dai vettori

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2, 1, 0]^t$$
$$w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\|} = \frac{v_2 + \frac{6}{5}v_1}{\|v_2 + \frac{6}{5}v_1\|} = \frac{1}{70}[3, 6, 5]^t.$$

Essendo $\alpha^\perp$ ortogonale ad α, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathbf{B}_\alpha$ si ottiene semplicemente aggiungendo ai versori w_1, w_2 il versore

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}[1, 2, -3]^t.$$

(c) Sia $A = [v_1|v_2]$ la matrice avente per colonne i vettori v_1, v_2 che formano una base di α. La matrice pseudoinversa di Moore-Penrose di A risulta

$$R = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quindi, la matrice di proiezione su α è data da

$$P_\alpha = AR = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, la proiezione $\widehat{v}$ di v su α è data da

$$\widehat{v} = P_\alpha v = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La proiezione di v su $\alpha^\perp$ risulta data da $v - \widehat{v} = [1, 2, -3]^t$. L'angolo ϕ tra v e la sua proiezione su $\alpha^\perp$ risulta quindi dato da

$$\cos\phi = \frac{\langle v, v - \widehat{v}\rangle}{\|v\|\,\|v - \widehat{v}\|} = \sqrt{\frac{14}{17}}.$$

Esercizio 3. $(5 + 3 + 3$ punti$)$

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ siano dati il punto $F(1, 1, 0)$ ed il piano $\alpha : x - 2z - 1 = 0$.

(a) Determinare l' equazione cartesiana del luogo S formato dai punti $P \in \mathbb{R}^3$ che verificano la condizione
$$d(P, F) = \sqrt{5}d(P, \alpha)$$
e verificare che S è una quadrica.

(b) Classificare S e calcolare una sua equazione canonica.

(c) Verificare che S è una quadrica di rotazione, e determinare l'equazione dell'asse di rotazione

Svolgimento.

(a) Detto $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio, la condizione fornisce

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{5}\frac{|x-2z-1|}{\sqrt{5}},$$

da cui, elevando al quadrato e svolgendo i calcoli, otteniamo la quadrica S di equazione

$$y^2 - 3z^2 + 4xz - 2y - 4z + 1 = 0.$$

(b) La matrice associata ad S risulta

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_4 = 0$, $I_3 = -4$, $I_2 = -7$, $I_1 = -2$. La quadrica è quindi un cono reale. L'equazione caratteristica $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$ fornisce soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$. Una forma canonica di S risulta $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$.

(c) Poichè $\lambda_1 = 1$ è autovalore doppio, il cono è di rotazione. Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il vertice $V = F(1, 1, 0)$. Questo si può dedurre direttamente osservando che il punto F appartiene al piano α, quindi S deve essere simmetrica rispetto ad α ed F rappresenta il vertice del cono. L'asse di rotazione deve pertanto essere la retta per F ortogonale al piano α. Esso deve anche essere parallelo all'autospazio associato all'autovalore semplice. Per $\lambda = -4$ abbiamo l'autospazio $E_{-4} = \{[x, 0, -2x]^t, \ x \in \mathbb{R}\}$. Quindi l'asse di rotazione ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + q \\ y = 1 \\ z = -2q, \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

TEMA D'ESAME - 25/09/2014

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(6+3+2$ punti$)$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ -2x+2y-z \\ x-2y \end{bmatrix}$$

(a) Determinare $\ker(f)$ ed $Im(f)$, una loro base, e la loro equazione cartesiana.

(b) Determinare l'angolo tra $\ker(f)$ ed $Im(f)$.

(c) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autospazi di f,

Svolgimento.

(a) La matrice $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ associata all'endomorfismo è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti, mentre il determinante di A risulta nullo. Quindi la caratteristica di A è 2, il che implica che la dimensione di $Im(f)$ è 2 (cioè $Im(f)$ è un piano), mentre, per l'equazione dimensionale, la dimensione di $\ker(f)$ è uguale a 1 (cioè $\ker(f)$ è una retta). Le prime due colonne di A possono quindi essere assunte come base di $Im(f)$, la cui equazione cartesiana risulta pertanto data da

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & -2 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y+z=0,$$

ed $Im(f) = \{[x, y, -x-y]^t \setminus x, y \in \mathbb{R}\}$. Le equazioni cartesiane del nucleo corrispondono al sistema $A[x, y, z]^t = [0, 0, 0,]^t$, che, per riduzione, risulta essere equivalente a quello formato dalle prime due equazioni, cioè

$$\ker f \begin{cases} x+z=0 \\ -2x+2y-z=0. \end{cases}$$

Svolgendo i conti otteniamo

$$\ker f \begin{cases} x=-q \\ y=-\frac{1}{2}q \\ z=q \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Di conseguenza $\ker(f) = \{[-q, -\frac{1}{2}q, q]^t \setminus q \in \mathbb{R}\}$, ed una sua base è rappresentata, per esempio, dal vettore $[2, 1, -2]^t$.

(b) La normale al piano che descrive $Im(f)$ ha parametri direttori $1, 1, 1$, mentre $\ker f$ ha parametri direttori $2, 1, -2$. Il coseno dell'angolo α tra $\ker f$ e la normale ad $Im(f)$ risulta pertanto

$$\cos\alpha = \frac{\langle [1,1,1]^t, [2,1,-2]^t \rangle}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Ciò corrisponde al seno dell'angolo β tra $\ker f$ ed $Im(f)$, per cui

$$\beta = \arcsin\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

(c) Calcoliamo lo spettro di f. Il polinomio carattristico risult

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda + 1).$$

Calcolando le radici di $\chi(\lambda)$ otteniamo $Spec f = \{\frac{3-\sqrt{13}}{2}, 0, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\}$. Quindi f ha spettro reale ed autovalori semplici, per cui f è diagonalizzabile. Esiste pertanto una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Esercizio 2. $(3 + 4 + 4$ punti$)$

Nel piano euclideo, si consideri la conica γ di equazione

$$x^2 - 2xy + y^2 + y - 1 = 0.$$

(a) Classificare γ e determinare una sua forma canonica.

(b) Determinare l'equazione dell'asse principale di γ.

(c) Scrivere le equazioni del cambio di riferimento che consente a γ di assumere la forma canonica considerata.

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla conica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo degli invarianti risulta $I_3 = -\frac{1}{4}$, $I_2 = 0$, $I_1 = 2$, quindi γ è una parabola. Una sua forma canonica é, per esempio, $y^2 + 2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1^3}}x = 0$, e quindi $y^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x = 0$.

(b) L'asse principale è parallelo all'autospazio associato all'autovalore nullo, corrispondente all base della parte quadratica uguagliata a zero, cioé $x - y = 0$. L'autospazio ortogonale è $y = -x$ che interseca la parabola in due punti A, B, il cui punto medio è $M\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$. L'asse principale ha equazione $y - y_M = x - x_M$, per cui $y = x - \frac{1}{4}$.

(c) Intersecando γ con il proprio asse principale si ottiene il vertice, dato da

$$V\left(\frac{19}{16},\frac{15}{16}\right).$$

La matrice M che fornisce la rotazione è fornita dagli autospazi normalizzati, quindi risulta

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Il cambio di riferimento che porta γ alla forma canonica considerata è dato da

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{19}{16} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{15}{16} \end{cases}$$

Esercizio 3. $(2+3+3+2+1$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, si consideri la quadrica Ω di equazione

$$x^2+4xy+y^2+2z^2+2z-1=0.$$

(a) Verificare che Ω ammette centro di simmetria, e calcolarne poi le coordinate

(b) Verificare che Ω ammette tre assi di simmetria distinti.

(c) Scrivere le equazioni dei piani di simmetria della quadrica.

(d) Verificare che il punto $P(0,1,0)$ appartiene ad Ω, e scrivere l'equzione del piano tangente alla quadrica in P.

(e) Determinare una forma canonica della quadrica

Svolgimento.

(a) La matrice associata all quadrica è data da

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli invrianti fornisce $I_4=9$ ed $I_3=-6$, il che implica che Ω una quadrica non degenere dotata di centro. Le coordinate del centro di simmetria si ottengono risolvendo il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, dato da

$$\begin{cases} \frac{\partial\Omega}{\partial x}=2x+4y=0 \\ \\ \frac{\partial\Omega}{\partial y}=4x+2y=0 \\ \\ \frac{\partial\Omega}{\partial z}=4z+2=0. \end{cases}$$

La soluzione fornisce $C\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$.

(b) Il polinomio caratteristico relativo alla matrice Q associata alla parte quadratica di Ω è dato da

$$\chi(\lambda) = \det(Q - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4].$$

Le radici di $\chi(\lambda)$ sono date da $-1, 2, 3$, per cui Q ammette tre autospazi distinti, e quindi Ω ammette tre assi di simmetria distinti, ognuno parallelo ad un autospazio e passante per il centro.

(c) Ogni piano di simmetria della quadrica è ortogonale ad uno degli autospazi e passa per il centro di Ω. L'autospazio E_{-1} è rappresentato dalle equazioni date da

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3z = 0, \end{cases}$$

quindi $E_{-1} = \langle [1, -1, 0]^t \rangle$, Il piano $E_{-1}^{\perp}$ ortogonale ad E_{-1} ha quindi equazione $x - y = 0$, e poiché le coordinate di C soddisfano già tale equazione, esso coincide con un piano di simmetria.
L'autospazio E_2 è rappresentato dalle equazioni date da

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0, \end{cases}$$

quindi $E_2 = \langle [0, 0, 1]^t \rangle$, Il piano $E_2^{\perp}$ ortogonale ad E_2 ha quindi equazione $z = 0$, ed il piano di simmetria ad esso parallelo ha equazione $z + \frac{1}{2} = 0$.
L'autospazio E_3 è rappresentato dalle equazioni date da

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -z = 0, \end{cases}$$

quindi $E_3 = \langle [1, 1, 0]^t \rangle$, Il piano $E_1^{\perp}$ ortogonale ad E_1 ha quindi equazione $x + y = 0$, e poiché le coordinate di C soddisfano già tale equazione, esso coincide con un piano di simmetria.

(d) Sostituendo le coordinate di P nell'euazione di Ω si ottiene l'identità $0 = 0$, il che implica che il punto appartiene alla quadrica. Valutando le derivate parziali di Ω in P abbiamo

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_P = 4 \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_P = 2 \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)_P = 2. \end{cases}$$

Quindi il piano tangente ad Ω in P ha equazione $4x + 2(y-1) + 2z = 0$, cioé $2x + y + z - 1 = 0$.

(e) Essendo $I_4/I_3 = -3/2$, l'equazione

$$-x^2 + 2y^2 + 3z^2 - \frac{3}{2} = 0,$$

fornisce una forma canonica della quadrica considerata.

TEMA D' ESAME 10/02/2015

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. ($3+4+4$ punti)

Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi in x di grado minore o uguale a tre. Siano U, V i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}_3[x]$

$$\begin{array}{l} U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \backslash\ p(0) = p(1) = 0\} \\ V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \backslash\ p''(1/3) = 0\}. \end{array}$$

(a) Dimostrare che U, V sono sottospazi di $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Determinare $U \cap V$, la sua dimensione ed una sua base.

(c) Determinare basi e dimensioni di U e V, e dedurre la dimensione di $U+V$.

Svolgimento.

(a) Un generico elemento di $\mathbb{R}_3[x]$ è del tipo ax^3+bx^2+cx+d. Imponendo le condizioni che ne implicano l'appartenenza ad U abbiamo

$$\begin{array}{l} p(0) = d = 0 \\ p(1) = a+b+c+d = 0, \end{array}$$

da cui possiamo ricavare $d=0$ e $c=-a-b$. Pertanto, il generico polinomio $p(x)$ di U, è del tipo $ax^3+bx^2-(a+b)x$.
Imponendo che la derivata seconda di ax^3+bx^2+cx+d si annulli per $x=1/3$ otteniamo invece la condizione di appartenenza a V. La derivata seconda è uguale a $6ax+2b$, quindi, per $x=1/3$ si ha $2a+2b$, che si annulla per $b=-a$. Pertanto, il generico polinomio $p(x)$ di V, è del tipo ax^3-ax^2+cx+d.
Per dimostrare che U è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$ possiamo verificare che una generica combinazione lineare di elementi di U fornisce ancora un elemento di U. Presi $p(x), q(x) \in U$, ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{array}{l} \alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha(ax^3+bx^2-(a+b)x) + \beta(a'x^3+b'x^2-(a'+b')x) = \\ = (\alpha a+\beta a')x^3 + (\alpha b+\beta b')x^2 - (\alpha a+\alpha b+\beta a'+\beta b')x = \\ = \overline{a}x^3+\overline{b}x^2-(\overline{a}+\overline{b})x, \end{array}$$

Analogamente, presi $p(x), q(x) \in V$, ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{array}{l} \alpha p(x) + \beta q(x) = \alpha(ax^3-ax^2+cx+d) + \beta(a'x^3-a'x^2+c'x+d') = \\ = (\alpha a+\beta a')x^3 - (\alpha a+\beta a')x^2 + (\alpha c+\ betac')x + \alpha d+\beta d' = \\ = \overline{a}x^3-\overline{a}x^2+\overline{c}x+\overline{d}, \end{array}$$

il che rappresenta ancora un elemento di V, avendo posto $\alpha a+\beta a' = \overline{a}$, $\alpha c+\beta c' = \overline{c}$ ed $\alpha d+\beta d' = \overline{d}$.
(b) Lo spazio $U \cap V$ è formato dai polinomi di U che appartengono anche a V, quindi si ottiene uguagliando la scritture del generico polinomio di U alla scritture del generico

polinomio di V ed imponendo poi l'uguaglianza dei coefficienti dei termini aventi lo stesso grado. Abbiamo quindi

$$ax^3 + bx^2 - (a+b)x = ax^3 - ax^2 + cx + d \;\Rightarrow\; b = -a, c = a+b = 0, d = 0,$$

per cui $U \cap V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \setminus p(x) = a(x^3 - x^2)\}$. Di conseguenza $U \cap V$ ha dimensione 1, ed $x^3 - x^2$ è una sua base.

(c) Ogni polinomio dello spazio U si può scrivere come $a(x^3 - x) + b(x^2 - x)$, quindi è combinazione lineare di $x^3 - x$ e d $x^2 - x$ che sono quindi un insieme generatore. Avendo gradi diversi sono anche indipendenti, quindi formano una base di U. Pertanto U ha dimensione 2. Analogamente, i polinomi di V sono del tipo $a(x^3 - x^2) + cx + d$, quindi la dimensione di V è uguale a 3, ed una sua base è formata dai polinomi $x^3 - x^2, x, 1$. Per la formula di Grassmann abbiamo

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 2 + 3 - 1 = 4,$$

il che implica che $U + V$ coincide con tutto lo spazio $\mathbb{R}_3[x]$.

Esercizio 2. $(1 + 3 + 3 + 4$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, si considerino i punti $A(1,0,4)$, $B(-1.-1,0)$, $C(0,0,3)$.

(a) Determinare l'equazione del piano π passante per A, B, C.

(b) Determinare le equazioni dei piani assiali dei segmenti AB e BC.

(c) Determinare il centro della circonferenza γ del piano π passante per A, B, C.

(d) Determinare le coordinate dei centri delle sfere contenenti γ e raggio uguale a $9/2$.

Svolgimento.

(a) L'equazione del piano passante per A, B, C si può ottenere uguagliare a zero il determinante del sistema ottenuto imponendo che l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ sia verificata dalla coordinate dei tre punti, per cui

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x + 2y - z + 3 = 0,$$

(b) Il punto medio di AB è $M(0, -1/2, 2)$. La direzione della retta AB è quella del vettore $\overrightarrow{AB} = [-2, -1, -4]$. Il piano assiale di AB ha pertanto equazione data da

$$\pi_1 : -2(x-0) - 1(y+1/2) - 4(z-2) = 0 \;\Rightarrow\; 4x + 2y + 8z - 15 = 0.$$

Il punto medio di BC è $M'(-1/2, -1/2, 3/2)$. La direzione della retta BC è quella del vettore $\overrightarrow{BC} = [1, 1, 3]$. Il piano assiale di BC ha pertanto equazione data da

$$\pi_2 : 1(x+1/2) + 1(y+1/2) + 3(z-3/2) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2y + 6z - 7 = 0.$$

(c) Il centro della circonferenza γ si ottiene intersecando i tre piani π, π_1, π_2. Si ha pertanto il seguente sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 4x + 2y + 8z - 15 = 0 \\ 2x + 2y + 6z - 7 = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $H(3, -5/2, 1)$

(d) I centri delle sfere richieste appartengono alla retta s passante per H ed ortogonale a π, e, per il teorema di Pitagora, distano da π di $\sqrt{81/4 - r^2}$, essendo $r = AH = BH = CH$ il raggio di γ. Risulta pertanto $r^2 = 77/4$, e quindi la distanza dei centri da π deve essere uguale ad 1. Una terna di parametri direttori di π è data da $1, 2, -1$, quindi il generico punto di s risulta

$$S = H + t[1, 2, -1] = (3 + t, -5/2 + 2t, 1 - t).$$

La distanza di S da π è data da

$$d(S, \pi) = \frac{|3 + t - 5 + 4t - 1 + t + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}|t|.$$

Pertanto si deve avere $\sqrt{6}|t| = 1$, da cui $t = \pm 1/\sqrt{6}$. Esistono quindi due soluzioni, date da

$$\begin{gathered} S_1\left(3 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -5/2 + \tfrac{2}{\sqrt{6}}, 1 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ S_2\left(3 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -5/2 - \tfrac{2}{\sqrt{6}}, 1 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{gathered}$$

Esercizio 3. $(4 + 3 + 2 + 2$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, si consideri la quadrica Ω di equazione

$$\Omega : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + yz - 2x + y - 2z + 2 = 0.$$

(a) Classificare la quadrica.

(b) Stabilire se Ω è di rotazione.

(c) Ridurre Ω a forma canonica.

(d) Verificare che il punto $P(0, 2, 0)$ appartiene ad Ω, e scrivere l'equazione del piano tangente in P alla quadrica

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla quadrica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che $C_1 + C_3 + C_4 = \mathbf{0}$, cioè la somma tra la prima, la terza e la quarta colonna fornisce il vettore nullo, quindi $\det A = 0$ il che implica che Ω è una quadrica degenere. Il calcolo dell'invariante cubico fornisce $I_3 = -9/4 \neq 0$, quindi Ω è un cono. Calcoliamo il vertice risolvendo il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, dato da

$$\begin{cases} \frac{\partial\Omega}{\partial x} = 2x - 2y - 2 = 0 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -2y - 2x + z + 1 = 0 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 2z + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene $V(1, 0, 1)$. Inoltre il punto $P(0, 2, 0)$ verifica l'equazione di Ω, quindi esistono punti reali diversi da V appartenenti alla quadrica. Essa è pertanto un cono reale.
(b) Gli autovalori associati ad Ω si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica, data da

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{9}{4}\right).$$

Abbiamo pertanto $\lambda = 1$, $\lambda = -3/2$ e $\lambda = 3/2$, quindi gli autovalori sono distinti e la quadrica non è di rotazione.

(c) Una forma canonica di Ω è data da $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$, e quindi, per esempio $2x^2 - 3y^2 + 3z^2 = 0$.

(d) Abbiamo già visto che $P(0, 2, 0)$ è un punto di Ω. Il piano tangente in P ad Ω ha equazione data da

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_P (x - x_P) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_P (y - y_P) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_P (z - z_P) = 0.$$

Pertanto $-6x - 3(y - 2) = 0$, cioè $2x + y - 2 = 0$ è l'equazione del piano richiesto.

TEMA D' ESAME 30/04/2015

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4+3+4$ punti$)$

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette r ed s di equazioni date da

$$r\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \qquad s\begin{cases} x-hy+3z=0 \\ y-z=0, \end{cases}$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare, al variare di h in $\mathbb{R}$, la posizione reciproca di r ed s.

(b) Determinare, nel caso $h=2$, la direzione della retta s.

(c) Determinare, nel caso $h=2$, il piano contenente r e parallelo ad s.

Svolgimento.
(a) Consideriamo il sistema formato dalle equazioni di r ed s

$$r\cap s\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y=-1 \\ x-hy+3z=0 \\ y-z=0. \end{cases}$$

La matrice A dei coefficienti risulta

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -h & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre la matrice completa è

$$[A|B]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -h & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Il minore $\{R_1,R_2\}\cap\{C_1,C_2\}$ di A ci dice che la caratteristica di tale matrice è almeno 2, e, orlando, otteniamo i due determinanti dati da $1-h$ e 0. Di conseguenza, $r(A)=2$ per $h=1$, mentre $r(A)=3$ altrimenti. Per $h=1$ il minore $\{R_1,R_2,R_3\}\cap\{C_1,C_2,C_4\}$ estratto da $[A|B]$ è non nullo, quindi $r[A|B]=3$ e le rette r ed s sono parallele.

Per $h\neq 1$ il determinante di $[A|B]$ risulta uguale a $2-2h$, quindi non si annlla mai, e le rette r ed s sono sghembe.

(b) Scriviamo le equazioni parametriche di s. La matrice ad essa associata è data da

$$S=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, quindi possiamo esplicitare rispetto a z, e abbiamo

$$s \begin{cases} x - 2y = -3z \\ y = z, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad s \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t. \end{cases}$$

Pertanto la direzione di s corrisponde a quella del vettore $\overrightarrow{s} = [-1, 1, 1]^t$.

(c) Il fascio di piani contenenti r ha equazione $F_r : (x + y + z - 1) + k(x + 2y + 1) = 0$, essendo k un parametro reale. Sostituendo ad x, y, z in F_r le corrispondenti funzioni di t, indicate in s, abbiamo l'equazione in t data da

$$(-t + t + t - 1) + k(-t + 2t + 1) = 0,$$

da cui

$$t = \frac{1-k}{1+k}.$$

La retta s interseca quindi il generico piano del fascio nel punto

$$P\left(-\frac{1-k}{1+k}, \frac{1-k}{1+k}, \frac{1-k}{1+k}\right).$$

Il piano parallelo ad s si ottiene quindi facendo tendere all'infinito le coordinate di P, il che avviene per $k \to -1$. Sostituendo in F_r abbiamo $(x+y+z-1)-1(x+2y+1) = 0$, e quindi $y - z + 2 = 0$ fornisce l'equazione del piano richiesto.

Esercizio 2. $(4 + 3 + 4$ punti$)$

Nello spazio $\mathbf{R}^4$, si considerino i sottospazi U e V dati da

$$U \begin{cases} 3x - 3y - z = 0 \\ x - 2y + t = 0, \end{cases} \qquad V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(a) Determinare la dimensione ed una base di U.

(b) Scrivere le equazioni di V.

(c) Determinare $U \cap V$, la sua dimensione ed una sua base.

Svolgimento.

(a) La matrice associata al sistema che descrive U è data da

$$A_U = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il minore di ordine 2 formato con le due righe di A_U e con le prime due colonne è non nullo, per cui A_U ha rango 2, e $dim(U) = 4 - 2 = 2$. Per trovare una base di U risolviamo il sistema assumendo z, t come parametri, ed otteniamo

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}z + t \\ y = \frac{1}{3}z + t. \end{cases}$$

Pertanto abbiamo

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3}z + t \\ \frac{1}{3}z + t \\ z \\ t \end{bmatrix}, \ z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(b) Considerando il rango della matrice avente per colonne i due generatori di V si vede immediatamente che essa ha rango 2, per cui i due generatori sono indipendenti e $dim(V) = 2$. Per scrivere le equazioni di V consideriamo la matrice

$$A_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \\ -1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Per il teorema di caratterizzazione dei sottospazi di $\mathbb{R}^n$, le equazioni di V si ottengono imponendo che il rango di A_V sia 2. Per il Teorema di Kroneker questo avviene, per esempio, se i due orlati di $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ sono nulli, il che fornisce

$$V \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ x - 2y + t = 0. \end{cases}$$

(c) Per determinare $U \cap V$ possiamo considerare il sistema formato dalle due equazioni di U e dale due equazioni di V

$$\begin{cases} 3x - 3y - z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ x - 2y + t = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema risulta

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la quarta riga coincide con la seconda, quindi il determinante di M è nullo. Si vede poi facilmente che la matrice ha rango 3, per esempio il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$ è non nullo, per cui $dim(U \cap V) = 1$. Per determinare $U \cap V$ risolviamo il sistema esplicitando t come parametro, per cui si ha

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = -3t, \end{cases}$$

Quindi si ha

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -3t \\ t \end{bmatrix}, : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Esercizio 3. $(4+2+3+2$ punti)

Sia V lo spazio delle matrici di tipo $(2,3)$ a coefficienti reali. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ data da

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a+b-c+d \\ b-c+e-f \\ a+d-e+f \\ a-b+c+d-2e+2f \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare $ker(f)$, $Im(f)$, una loro base e la loro dimensione.

(b) Scrivere le equazioni di $Im(f)$

(c) Verificare che $v = [2,1,1,0]^t$ appartiene ad $Im(f)$ e scrivere l'insieme delle controimmagini di v.

(d) Determinare una base di $Im(f)$ contenente v.

Svolgimento.

(a) Per determinare $ker(f)$ imponiamo che l'immagine sia nulla e si ha

$$\begin{cases} a+b-c+d \\ b-c+e-f=0 \\ a+d-e+f=0 \\ a-b+c+d-2e+2f=0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti risulta

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che $C_3 = -C_2, C_4 = C_1, C_5 = C_2 - C_1, C_6 = -C_5 = C_1 - C_2$, mentre C_1, C_2 sono indipendenti, il che implica che $r(M) = 2$. Pertanto il sistema ammette $\infty^{6-2} = \infty^4$ soluzioni, per cui $dim(ker(f)) = 4$. Risolvendo il sistema abbiamo

$$\begin{cases} a = -d+e-f \\ b = c-e+f, \end{cases}$$

e quindi

$$ker(f) = \left\{ \begin{bmatrix} -d+e-f & c-e+f & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base del nucleo risulta pertanto formata dalle quattro matrici date da

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per l'equazione dimensionale $Im(f)$ ha dimensione 2, ed è formata dall'insieme delle combinazioni lineari di C_1 e C_2. Essendo indipendenti, C_1, C_2 formano una base di $Im(f)$.

(b) Consideriamo la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}.$$

Le equazioni di $Im(f)$ si ottengono imponendo che il rango sia uguale a 2, il che fornisce il sistema

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - t = 0. \end{cases}$$

(c) Per stabilire se $v \in Im(f)$ bisogna vedere se il sistema $\alpha C_1 + \beta C_2 = v$ ha soluzioni, oppure verificare che le coordinate di v soddisfano le equazioni di $Im(f)$. Utilizzando il primo metodo abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha - \beta = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione risulta $\alpha = \beta = 1$. Quindi $v \in \Im(f)$ ed una sua controimmagine è data dalla matrice A_v tale che $f(A_v) = v$. Sfruttando la linearità di f, e la definizione di matrice associata ad una applicazione lineare, abbiamo

$$\begin{aligned} f(A_v) &= v = 1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = \\ &= 1 \cdot f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

e quindi una soluzione è data da

$$A_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per il teorema di caratterizzazione dei sistemi lineari si ha che $A_v + ker(f)$ fornisce l'insieme delle controimmagini del vettore considerato.

(d) Per determinare una base di $Im(f)$ contenente v basta aggiungere a v un vettore $w \neq kv$ ($k \in \mathbb{R}$) ottenuto come combinazione lineare di C_1 e C_2. Quindi un qualsiasi $w = aC_1 + bC_2$ con $a \neq b$ è utilizzabile.

VERIFICA IN ITINERE 25/06/2015

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4 + 4 + 3$ punti$)$
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -2x-2y \\ -z \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare nucleo ed immagine di f, la loro dimensione, ed una loro base.

(b) Determinare lo spettro di f, e stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile.

(c) Valutare l'angolo tra gli autospazi.

Svolgimento.
(a) La matrice associata all'endomorfismo rispetto alla base canonica è data da

$$A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo $R_2 = -2R_1$, mentre il minore $\{R_2, R_3\} \cap \{C_2, C_3\}$ è non nullo. Quindi A ha rango 2, che corrisponde alla dimensione dell'immagine. Questa è data da

$$Im(f) = \{\alpha C_2 + \beta C_3,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

ed una sua base è formata, per esempio, da $B = \{C_2, C_3\}$. Il nucleo si ottiene risolvendo il sistema associato al minore $\{R_2, R_3\} \cap \{C_2, C_3\}$, e quindi

$$ker(f) \begin{cases} -2y = 2x \\ -z = 0. \end{cases}$$

Pertanto $\dim(ker(f)) = 1$ e $ker(f) = \{[x, -x, 0]^t,\ x \in \mathbb{R}\} = \langle [1, -1, 0]^t \rangle$.
(b) Poiché il nucleo non è ridotto al solo vettore nullo, lo spettro di f contiene l'autovalore 0. Calcolando poi l'equazione caratteristica abbiamo

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(1+\lambda)^2,$$

per cui $Spec(f) = \{0, -1, -1\}$. L'autovalore $\lambda = 0$ è semplice, quindi è regolare. Poiché $\lambda = -1$ ha molteplicità algebrica uguale a 2, per valutare la diagonalizzabilità di f dobbiamo calcolare la molteplicità algebrica di tale autovalore. Sostituendo $\lambda = -1$ nella matrice caratteristica abbiamo

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $R_2 = -R_1$ e $R_3 = \mathbf{0}$, la caratteristica di $A+I$ è uguale ad 1, per cui $m_g(-1) = 3 - 1 = 2 = m_a(-1)$. Pertanto gli autovalori sono tutti regolari e quindi f è diagonalizzabile.
(c) L'autospazio E_0 coincide con $ker(f)$, quindi è la retta avente parametri direttori $1, -1, 0$. L'autospazio E_{-1} è invece il piano avente equazione $2x + y = 0$, la cui direzione ortogonale ha parametri direttori $2, 1, 0$. L'angolo ξ tra E_0 ed E_{-1} è il complementare dell'angolo tra $ker(f)$ e la direzione ortogonale ad E_{-1}. Abbiamo quindi

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\langle [1,-1,0]^t, [2,1,0]^t \rangle}{\| [1,-1,0]^t \| \| [2,1,0]^t \|} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Esercizio 2.($3+5+3$ punti)

Nel piano cartesiano euclideo $\mathbf{R}^2$, si consideri la conica γ di equazione data da

$$\gamma : x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 4y = 0.$$

(a) Classificare γ e scrivere una sua forma canonica.

(b) Scrivere l'equazione dell'asse principale di γ.

(c) Scrivere l'equazione del cambio di riferimento che riduce γ a forma canonica.

Svolgimento.

(a) Calcolando gli invarianti abbiamo $I_3 = -36$, $I_2 = 0$, $I_1 = 5$, quindi γ è una parabola. Una sua forma canonica è data da

$$y^2 = 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}x \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{12}{5\sqrt{5}}x.$$

(b) Poiché $\gamma : (x-2y)^2 - 4x - 4y = 0$, l'asse proncipale è parallelo alla retta $x - 2y = 0$, che rappresenta l'autospazio associato all'autovalore nullo. L'altro autovalore è $\lambda = I_1 = 5$, il cui autospazio associato, per il teorema spettrale, è $y = -2x$. Intersecando con γ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = -2x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 25x^2 + 4x = 0 \\ y = -2x, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date dai punti $O(0,0)$ ed $A\left(-\frac{4}{25}, \frac{8}{25}\right)$. Il punto medio del segmento OA è $M\left(-\frac{2}{25}, \frac{4}{25}\right)$, per cui l'asse principale di γ ha equazione data da

$$y - \frac{4}{25} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{25}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}.$$

(c) Intersecando l'asse con la parabola otteniamo il vertice $V\left(-\frac{8}{75}, \frac{11}{75}\right)$. Avendo scelto una forma canonica nella quale la paraboila ha l'asse sull'asse x, il cambio di riferimento che riduce γ a forma canonica deve essere descritto, per la parte rotatoria, dalla matrice ortogonale speciale che ha come prima colonna l'autospazio E_0 normalizzato. La seconda colonna è ovviamente rappresentata dall'autospazio E_5 normalizzato. Quindi si ha

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{8}{75} \\ \frac{11}{75} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3.$(2+3+4+2$ punti)

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette

$$r \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t, \ (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \qquad s \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0. \end{cases}$$

(a) **Determinare le equazioni parametriche di s.**

(b) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana della quadrica Ω ottenuta dalla rotazione di r intorno ad s.

(d) **Riconoscere Ω e determinare una sua forma canonica**

Svolgimento. **(a)** Esplicitando rispetto a z abbiamo

$$s \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \end{cases}$$

da cui

$$s \begin{cases} x = 0 \\ y = q \\ z = q \ \ q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Una terna di parametri direttori di r è $1, 1, 1$, mentre una terna di parametri direttori di s è $0, 1, 1$. Non essendo proporzionali le due rette non sono parallele. I valori di x ricavati da r e da s coincidono per $t = -1$, da cui si ricava che i valori di y coincidono per $q = -1$. Sostituendo $q = -1$ e $t = -1$ nelle z di r ed s si ha lo stesso valore -1. Pertanto r ed s sono secanti, ed il loro punto comune è $V(0, -1, -1)$.

(c) Poiché s interseca r, Ω è un cono di vertice V. Per eterminarne l'equazione cartesiana consideriamo il generico punto R di r, dato da $R(1+t, t, t)$. Il piano π passante per R ed ortogonale ad s ha equazione

$$(y-t)+(z-t)=0 \quad \Rightarrow \quad y+z-2t=0.$$

Intersecando con s abbiamo l'equazione risolvente

$$q+q-2t=0 \quad \Rightarrow \quad q=t.$$

Quindi il piano per R ortogonale ad s interseca s nel punto

$$H\,(0,t,t)\,.$$

La quadrica Ω si ottiene come luogo delle circonferenze di centro H e raggio RH. Queste si scrivono come intersezione tra π e la sfera di centro H e raggio $\overline{PH}$, per cui si ha

$$\Omega \left\{ \begin{array}{l} (x-0)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=(1+t)^2 \\ y+z-2t=0. \end{array} \right.$$

Ricavando $t=\frac{y+z}{2}$ dall'equazione, sostituendolo nell'equazione della sfera, e semplificando, otteniamo

$$\Omega : 4x^2+y^2-6yz+z^2-4y-4z-4=0,$$

che fornisce l'equazione cartesiana del cono.

(d) Calcolando gli autovalori della matrice associata alla parte quadratica di Ω otteniamo l'autovalore doppio $\lambda=4$, e l'autovalore semplice $\lambda=-2$, per cui $4x^2+4y^2-2z^2=0$ è una forma canonica del cono considerato.

TEMA D'ESAME DEL 10/07/2015

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4+4+3$ punti$)$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la seguente applicazione lineare

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x-y \\ y-2z \\ -2x+z \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare nucleo ed immagine, la rispettiva dimensione ed una loro base.

(b) Determinare lo spettro di f, e stabilire se f è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è simile alla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Svolgimento.

(a) La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è data da

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo del determinante fornisce un valore nullo, mentre il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo. Di conseguenza la caratteristica della matrice è uguale a 2, e coincide con la dimensione di $Im f$. Per l'equazione dimensionale $ker f$ ha dimensione $3-2=1$, e si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)X = 0$, il che fornisce $x = z$, $y = 2z$, per cui

$$ker f = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ 2z \\ z \end{bmatrix},\ z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'immagine di f ha come base, per esempio, le prime due colonne di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, per cui

$$Im f = \left\{\alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(b) Il polinomio caratteristico di f è dato da

$$\chi(\lambda) = \det\left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4 = -\lambda(\lambda-3)^2.$$

Pertanto si ha $Spec(f) = \{0, 3, 3\}$. L'autovalore 0 è semplice, quindi regolare. La molteplicità algebrica di $\lambda = 3$ è uguale a due, quindi dobbiamo calcolare la sua molteplicità geometrica

$$m_g(3) = 3 - r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 < m_a(3).$$

Quindi l'autovalore $\lambda = 3$ non è regolare, e, pertanto, f non è diagonalizzabile.

(c) Calcolando lo spettro di A_h si ha

$$\det(A_h - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda)(h-\lambda).$$

Quindi A_h ammette $\{0, 3, h\}$ come insieme degli autovalori. Di conseguenza, se $h \neq 3$, abbiamo $\{0, 3, h\} \neq Spec(f)$, ed A_h non può essere simile ad $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$. Se invece $h = 3$, allora $\{0, 3, h\} = Spec(f)$, quindi le due matrici potrebbero essere simili. Dobbiamo però controllare la molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ in riferimento all'endomorfismo rappresentato da A_h, e si ha

$$m_g(3) = 3 - r(A_h - 3I) = 3 - r\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 = m_a(3).$$

Quindi A_3 è diagonalizzabile, e anche in questo caso non può quindi essere simile ad $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$. Di conseguenza, non esistono valori di h che rendono simili le due matrici.

Esercizio 2. $(2 + 5 + 2 + 2$ punti)

Nel piano euclideo $\mathbf{R}^2$, si consideri la conica γ di equazione

$$\gamma : x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2\sqrt{2}x + 2y + 2 = 0.$$

(a) Verificare che la conica è un'iperbole, e scrivere una sua forma canonica.

(b) Determinare le coordinate dei vertici di γ.

(c) Determinare le equazioni degli asintoti.

(d) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro avente generatrici parallele all'asse z e direttrice coincidente con la simmetrica di γ rispetto all'origine.

Svolgimento.

(a) Calcolando gli invarianti abbiamo $I_3 = -1$, $I_2 = -2$, $I_1 = 1$, quindi γ è un'iperbole non equilatera. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$, cioè $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, ed ammette come soluzioni $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Quindi una forma canonica di γ è data da

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x'^2 + 2y'^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x'^2 - 4y'^2 - 1 = 0.$$

In particolare i vertici sono sull'asse x'.

(b) Possiamo trovare le coordinate dei vertici in forma canonica, poi applicare a queste le equazioni del cambio di riferimento necessario. Intersecando con l'asse $y' = 0$ abbiamo $x' = \pm 1/\sqrt{2}$, quindi i vertici in forma canonica risultano $V_1'(-1/\sqrt{2}, 0)$, $V_2'(1/\sqrt{2}, 0)$.

L'autospazio associato a $\lambda = -1$ ha equazione $\sqrt{2}x + y = 0$, ed è generato da $[1, -\sqrt{2}]^t$, mentre quello associato a $\lambda = 2$ ha equazione $-x + \sqrt{2}y = 0$, ed è generato da $[\sqrt{2}, 1]^t$. Quindi, una base ortonormale di autovettori risulta

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}.$$

Il centro C dell'iperbole si ottiene risolvendo il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, per cui si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 2x + 2\sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 2\sqrt{2}x + 2 = 0, \end{cases}$$

e quindi $C = (-1/\sqrt{2}, -1/2)$. Il cambio di riferimento che riduce γ a forma canonica è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

con la matrice di rotazione avente come seconda colonna l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 2$, in quanto questo è stato scelto come coefficiente di y' nella forma canonica. Quindi i vertici V_1, V_2 di γ hanno coordinate, rispettivamente, date da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad V_1\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad V_2\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)$$

(c) Gli asintoti sono le rette passanti per il centro e parallele alle direzioni che annullano la parte quadratica. La parte quadratica si annulla per $x = 0$ ed $x = -2\sqrt{2}y$, quindi gli asintoti hanno equazioni $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed $y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, cioè $y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{3}{4}$.
(d) L'equazione della curva simmetrica di γ rispetto all'origine si ottiene scambiando x con $-x$ ed y con $-y$ nell'equazione di γ. Si ottiene quindi

$$x^2 + 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}x - 2y + 2 = 0,$$

che in $\mathbb{R}^3$ rappresenta l'equazione cartesiana del cilindro richiesto.
Esercizio 3. $(5 + 2 + 4$ punti$)$

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano $\pi : x - y + z = 0$, ed il punto $A(1, 0, 1)$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del luogo Ω formato dai punti dello spazio equidistanti da π e da A.

(b) Dimostrare che Ω è una quadrica di rotazione, e scrivere l'equazione dell'asse di rotazione.

(c) Stabilire, senza fare calcoli, la natura delle coniche ottenute sezionando Ω con piani contenenti l'asse di rotazione, e descrivere qualche loro proprietà geometrica specifica

Svolgimento.

(a) Sia $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio. La distanza di P da π è uguale a $|x - y + z|/\sqrt{3}$, mentre la distanza di P da A risulta data da $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$. Uguagliando, elevando al quadrato e semplificando i termini simili si ottiene l'equazione cartesiana data da

$$\Omega : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 6x - 6z + 6 = 0.$$

(b) Il luogo Ω è una quadrica, essendo rappresentato da una equazione algebrica di secondo grado. La matrice associata alla parte quadratica è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo dell'invariante cubico fornisce $I_3 = 0$, mentre $I_2 = 9$ ed $I_1 = 6$, quindi l'equazione caratteristica di Ω è $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0$, semplice e $\lambda = 3$, doppio. Essendoci un autovalore doppio non nullo, la quadrica di rotazione. Per costruzione, l'asse di rotazione deve essere la retta passante per A ed ortogonale a π, data da

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Un metodo alternativo, ma più lungo, consiste nel determinare il centro C della conica sezione di Ω con E_3 e considerare la retta passante per C e parallela ad E_0. A tale proposito, osserviamo che l'autospazio E_3 coincide con il piano π, e quindi si ha

$$\begin{cases} \Omega : 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz + 2yz - 6x - 6z + 6 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \Omega : 6x^2 + 6z^2 + 6xz - 6x - 6z + 6 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce $x = z = 1/3$, quindi, poiché $C \in \pi$ si ha $C(1/3, 2/3, 1/3)$. Per il teorema spettrale l'autospazio E_0 è la retta avente parametri direttori $1, -1, 1$, per cui l'asse di rotazione risulta

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + q \\ y = \frac{2}{3} - q \\ z = \frac{1}{3} + q \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il cambio di parametro $q = 2/3 + t$ mette in evidenza che tale retta coincide con quella precedentemente trovata.
(c) Per costruzione Ω è un paraboloide ellittico, cosa che si può anche ottenere dal calcolo dell'invariante quartico, dato da $I_4 = -108$. Di conseguenza, le sezioni di Ω con piani contenenti l'asse di rotazione sono parabole. Ogni parabola sezione ha il fuoco nel punto A, mentre la corrispondente direttrice è la retta di intersezione tra il piano sezione ed il piano π assegnato.

TEMA D' ESAME 22/07/2015

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4+3+4$ punti$)$

Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi in x di grado minore o uguale a tre, e sia $C = \{x^3, x^2, x, 1\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tale che

$$\begin{aligned} f(x^3) &= x^2 - x^3 \\ f(x^2) &= x^3 + x \\ f(x) &= x^2 + x \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Determinare nucleo ed immagine di f, la rispettiva dimensione ed una loro base.

(b) Determinare lo spettro dell'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice $A = M_C^C(f)$.

(c) Determinare gli autospazi di F associati agli autovalori interi, e scrivere le equazioni corrispondenti.

Svolgimento.

(a) Il nucleo di f è rappresentato dall'insieme dei polinomi aventi immagine uguale al polinomio identicamente nullo. Il generico polinomio di $\mathbb{R}_3[x]$ è del tipo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, e la sua immagine è data da

$$\begin{aligned} f(p(x)) &= f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = af(x^3) + bf(x^2) + cf(x) + df(1) = \\ &= a(x^2 - x^3) + b(x^3 + x) + c(x^2 + x) + d = x^3(-a+b) + x^2(a+c) + x(b+c) + d. \end{aligned}$$

Esso fornisce il polinomio nullo se e solo se

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -c \\ b = -c \\ d = 0, \end{cases}$$

Pertanto si ha

$$ker(f) = \{p(x) = -cx^3 - cx^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}\} = \langle -x^3 - x^2 + x \rangle,$$

ed, in particolare, il polinomio $-x^3 - x^2 + x$ rappresenta una base del nucleo. Quindi $ker(f)$ ha dimensione 1, e, per l'equazione dimensionale, $Im(f)$ ha dimensione $4 - 1 = 3$. L'insieme $\{p_1(x) = x^2 - x^3, p_2(x) = x^3 + x, p_3(x) = x^2 + x, p_4(x) = 1\}$ è un sistema di generatori dell'immagine. Osserviamo poi che $p_1(x) + p_2(x) = p_3(x)$, quindi $p_3(x)$ è linearmente dipendente dagli altri polinomi, per cui

$$Im(f) = \{\alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_4(x),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle p_1(x), p_2(x), p_4(x) \rangle.$$

(b) La matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ ha come colonne i coefficienti che esprimono le immagini dei vettori di C come combinazione lineare degli stessi vettori di C, per cui si ha

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico risulta quindi

$$\chi(\lambda) = \det(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - \lambda I) = \lambda(1-\lambda)(3-\lambda^2),$$

e, di conseguenza, $Spec(F) = \{0, 1, \pm\sqrt{3}\}$. Gli autovalori interi sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

(c) L'autospazio associato a $\lambda = 0$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ isomorfo a $ker(f)$ nell'isomorfismo canonico, quindi

$$E_0 = \{v = [-c, -c, c, 0]^t,\ c \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Esso è rappresentato da $4-1=3$ equazioni, che corrispondono, nell'isomorfismo canonico, alle equazioni usate per detreminare $ker(f)$. Usando le indeterminate x_1, x_2, x_3, x_4, esse si riscrivono nella maniera data da

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Poiché $f(1) = 1$, l'autospazio associato a $\lambda = 1$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dal vettore isomorfo al polinomio $p_4(x) = 1$ nell'isomorfismo canonico, quindi

$$E_1 = \{v = [0, 0, 0, d]^t,\ d \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

È immediato osservare che le $4-1=3$ equazioni che definiscono tale sottospazio di $\mathbb{R}^4$ sono date da

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. $(2+3+3+3$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, si consideri il tetaedro T avente per vertici i punti $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,1)$.

(a) Determinare l'equazione del piano π contenente la faccia ABC.

(b) Determinare l'area di ABC, e la lunghezza dell'altezza di T relativa a questa faccia.

(c) Scrivere le equazioni delle rette contenenti i lati OA e BC, e stabilire la loro posizione reciproca.

(d) Determinare l'angolo tra i piani contenenti le facce ABC ed OAB.

Svolgimento.

(a) La somma delle coordinate x, y, z di A, B, C è sempre 2, quindi l'equazione del piano contenente A, B, C è $x+y+z-2=0$. In alternativa essa si ottiene sviluppando il seguente determinante

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) L'area di ABC è uguale alla metà della norma del prodotto vettoriale tra i vettori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ paralleli, rispettivamente, ai segmenti orientati AB e BC. Abbiamo quindi

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = [-1,-1,-1]^t.$$

e, di conseguenza, Area$(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. L'altezza di T relativa alla faccia ABC corrisponde alla distanza di $O(0,0,0)$ dal piano ABC, per cui è uguale a $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) Si possono scrivere immediatamente le equazioni parametriche delle rette OA e BC, date da

$$OA\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0. \end{cases} \qquad BC\begin{cases} x = 1+q \\ y = -q \\ z = 1. \end{cases}$$

Le due rette non sono parallele in quanto hanno parametri direttori non proporzionali, ed inoltre, appartengono ai piani paralleli $z = 0$ e $z = 1$, rispettivamente. Pertanto le due rette sono sghembe.

(d) L'angolo α tra i piani contenenti le facce OAB ed ABC coincide con l'angolo tra le direzioni normali ai piani. Dalle equazioni parametriche di OA possiamo ricavare facilmente le equazioni cartesiane, date da

$$OA\begin{cases} x = y \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi, il fascio di piani di sostegno OA ha equazione $x - y + \lambda z = 0$, ed imponendo il passaggio per B abbiamo $\lambda = -1$. Quindi il piano OAB ha equazione $x - y - z = 0$. Le rette normali ai piani OAB ed ABC hanno parametri direttori $1, -1, -1$ ed $1, 1, 1$, rispettivamente. Pertanto si ha

$$\cos\alpha = \frac{1-1-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3. $(4+3+2+2$ punti$)$

Nel piano euclideo $\mathbf{R}^2$, si consideri la conica γ di equazione

$$\gamma : x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x = 0.$$

(a) Riconoscere γ e ridurla a forma canonica.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro Ω che proietta γ parallelamente al vettore $\overrightarrow{r} = [1, 1, 1]^t$.

(c) Determinare l'equazione dell'asse di Ω.

(d) Scrivere la matrice di rotazione che dispone l'asse del cilindro parallelamente all'asse z, e determinare l'angolo di rotazione corrispondente

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla conica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce $I_3 = -8 \neq 0$, $I_2 = 1 > 0$, $I_1 = 3$, per cui γ è un'ellisse. Essendo poi $I_1 I_3 < 0$ essa è un'ellisse reale. Gli autovalori associati a γ si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica, data da $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$, e quindi $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, le cui soluzioni sono date da

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Inoltre $I_3/I_2 = -8$, quindi una forma canonica di γ è data da

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}y^2 - 8 = 0.$$

(b) Sia $P(x_P, y_P, z_P)$ il generico punto del cilindro richiesto. Il cilindro si può allora rappresentare attraverso il sistema dato da

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda \\ y = y_P + \lambda \\ z = z_P + \lambda \\ z_P = 0 \\ x_P^2 + 2x_P y_P + 2y_P^2 - 4x_P = 0. \end{cases}$$

Dalla terza e quarta equazione ricaviamo $\lambda = z$, che, sostituito nella prima e nella seconda equazione, fornisce $x_P = x - z$ ed $y_P = y - z$, rispettivamente. Sostituendo nella quinta equazione, e svolgendo i calcoli, otteniamo l'equazione cartesiana del cilindro, data da

$$\Omega : x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4xz - 6yz - 4x + 4z = 0.$$

(c) L'asse del cilindro Ω è la retta parallela all'autospazio E_0 associato all'autovalore nullo, e passante per il centro di γ. Per costruzione, l'autospazio E_0 è generato dal vettore $\overrightarrow{r}$. Il centro C di γ ha coordinate x, y che risolvono il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, mentre $z = 0$ poiché C appartiene al piano xy. Di conseguenza si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \\ \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 2x + 4y = 0, \end{cases}$$

da cui $C(4, -2, 0)$. Quindi l'asse di Ω ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x = 4 + q \\ y = -2 + q \\ z = q, \quad q \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(d) La matrice di rotazione che dispone l'asse parallelamente all'asse z ha come terza colonna il generatore di E_0 normalizzato, mentre le prime due colonne sono ottenute prendendo una base ortonormale di $E_0^{\perp} : x + y + z = 0$. Osserviamo che si ha

$$E_0^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Ortonormalizzando la base $\{v_1, v_2\}$ di $E_0^{\perp}$ abbiamo

$$\begin{cases} w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 \\ w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Di conseguenza, la matrice richiesta è data da $M = [w_1 | w_2 | \vec{r}]$, il cui determinate è uguale ad 1, come si verifica immediatamente. L'angolo di rotazione corrispondente coincide con l'angolo β tra l'asse z e l'asse del cilindro, per cui si ha

$$\cos\beta = \frac{\langle \vec{r}, [0, 0, 1]^t \rangle}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

TEMA D' ESAME 15/09/2015

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(4+3+4$ punti)

Sia $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y-3z+w \\ x-y+z+w \\ x+2y-4z \end{bmatrix}.$$

(a) Calcolare nucleo ed immagine di f, le rispettive dimensioni ed una loro base.

(b) Scrivere le equazioni di $ker(f)$ e di $Im(f)$.

(c) Verificare che il vettore $v=[1,2,-1]^t$ appartiene ad $Im(f)$, e determinare $f^{-1}(v)$.

Svolgimento.

(a) La matrice $M_{C_1}^{C_2}(f)$ associata ad f rispetto alle basi canoniche C_1 di $\mathbb{R}^4$ e C_2 di $\mathbb{R}^3$ ha come colonne i coefficienti che esprimono le immagini dei vettori di C_1 come combinazione lineare dei vettori di C_2, per cui si ha

$$M_{C_1}^{C_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la terza riga si ottiene sottraendo la seconda dalla prima. Inoltre il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza l'immagine di f ha dimensione 2, e, per l'equazione dimensionale, anche $ker f$ ha dimensione 2. Il nucleo si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $M_{C_1}^{C_2}(f)X=0$, il che fornisce

$$ker f = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2z-2w}{3} \\ \frac{5z+w}{3} \\ z \\ w \end{bmatrix},\ z,w\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'immagine di f ha come base, per esempio, le prime due colonne di $M_{C_1}^{C_2}(f)$, per cui

$$Im f = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(b) Le equazioni del nucleo corrispondono al sistema omogeneo ridotto che lo determina, per cui

$$ker f \begin{cases} 2x + y - 3z + w = 0 \\ x - y + z + w = 0. \end{cases}$$

L'immagine è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2, quindi è descritta da una sola equazione, data da

$$Im f : \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z = 0.$$

(c) Le coordinate di v verificano l'equazione dell'immagine, quindi $v \in Im(f)$. L'insieme delle controimmagini $f^{-1}(v)$ è dato da $w + ker(f)$, essendo w un qualsiasi vettore tale che $f(w) = v$. Osserviamo che si ha

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = v.$$

Quindi risulta

$$f^{-1}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + ker(f) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3+2z-2w}{3} \\ \frac{3+5z+w}{3} \\ z \\ w \end{bmatrix}, \ z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 2. $(3 + 3 + 2 + 3$ punti)

Siano U, V i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti dalle seguenti equazioni

$$U \begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ x - y + z - 3w = 0 \end{cases} \qquad V \begin{cases} 2x - y + 3z - 6w = 0 \\ x + y + z - w = 0 \\ 3x + 4z - 7w = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare una base di U ed una base di V.

(b) Determinare $U \cap V$, la sua dimensione ed una sua base.

(c) Determinare una base di $U^{\perp}$.

(d) Stabilire se esistono vettori di $U^{\perp}$ ortogonali a V.

Svolgimento.

(a) La matrice associata al sistema omogeneo che descrive U è data da

$$[U] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, quindi la matrice ha rango 2. Pertanto il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, e quindi U ha dimensione 2. Una sua base si ottiene risolvendo il sistema omogeneo rispetto a z, w, e si ha

$$U \begin{cases} x + y = z - w \\ x - y = -z + 3w \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = w, y = z - 2w,$$

e quindi

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ z - 2w \\ z \\ w \end{bmatrix}, \ z, w \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

La matrice associata al sistema omogeneo che descrive V è data da

$$[V] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, quindi la matrice ha rango 2. Pertanto il sistema ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, e quindi V ha dimensione 2,. Una sua base si ottiene risolvendo il sistema omogeneo rispetto a z, w, e si ha

$$V \begin{cases} 2x - y = -3z + 6w \\ x + y = -z + w \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{3}z + \frac{7}{3}w, y = \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}w,$$

e quindi

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}z + \frac{7}{3}w \\ \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}w \\ z \\ w \end{bmatrix}, \ z, w \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(b) Lo spazio $U \cap V$ si ottiene risolvendo il sistema omogeneo formato dalle equazioni di U e di V, per cui si ha

$$U \cap V \begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ x - y + z - 3w = 0 \\ 2x - y + 3z - 6w = 0 \\ x + y + z - w = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è data da

$$[U \cap V] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la somma tra la prima e la terza colonna è uguale alla differenza tra la seconda e la quarta colonna, quindi $\det[U \cap V] = 0$. Inoltre il minore formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne è uguale a -4, quindi $[U \cap V]$ ha rango 3. Di conseguenza il sistema ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni, e quindi $U \cap V$ ha dimenione 1. Risolvendo il sistema si ha

$$x = w, y = -w, z = w \quad \Rightarrow \quad U \cap V = \left\{ \begin{bmatrix} w \\ -w \\ w \\ w \end{bmatrix}, w \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(c) Lo spazio $U^\perp$ contiene tutti i vettori ortogonali ad U, quindi

$$U^\perp = \left\{ u' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}, \langle u', u \rangle = 0 \ \forall u \in U \right\}.$$

Per determinare u' basta annullare il suo prodotto scalare con i vettori di una base di U, quindi

$$U^\perp \left\{ \begin{array}{l} \langle [a, b, c, d]^t, [0, 1, 1, 0]^t \rangle = 0, \\ \langle [a, b, c, d]^t, [1, -2, 0, 1]^t \rangle = 0, \end{array} \right.$$

da cui si ha $c = -b$ ed $a = 2b - d$, per cui

$$U^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 2b - d \\ b \\ -b \\ d \end{bmatrix}, b, d \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(d) Un vettore $v = [2b-d, b, -b, d]^t \in U^\perp$ appartiene a $V^\perp$ se è nullo il suo prodotto scalare con i due vettori di una base di V. Pertanto, utilizzando la base di V precedentemente trovata, si ottiene $d = 5/2b$, e quindi i vettori di $U^\perp$ del tipo $b/2[-1, 2, -2, 5]^t$ appartengono anche a $V^\perp$.

Esercizio 3. $(4 + 3 + 4$ punti)

Sia Ω il luogo dei punti di $\mathbf{R}^3$ la cui distanza dal piano $\pi : x + y - z = 0$ coincide con la distanza che hanno dallasse x.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana di Ω.

(b) Dimostare che Ω rappresenta una quadrica degenere non spezzata.

(c) Si fornisca, al variare di λ in $\mathbf{R}$, un grafico qualitativo del polinomio caratteristico $\chi(\lambda)$ associato ad Ω, deducendo il segno degli autovalori e precisando la natura (reale o immaginaria) della quadrica

Svolgimento.

(a) Sia $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio. La distanza di P dal piano assegnato è data da

$$d(P,\pi) = \frac{|x+y-z|}{\sqrt{3}}.$$

La distanza di P dall'asse x è uguale a $\sqrt{y^2+z^2}$, per cui si ha

$$\Omega : \frac{|x+y-z|}{\sqrt{3}} = \sqrt{y^2+z^2}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e svolgendo i calcoli si ottiene

$$\Omega : x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 0.$$

(b) L'equazione di Ω è algebrica di secondo grado, quindi Ω è una quadrica. Poiché il polinomio è omogeneo in x, y, z ed $I_3 = 9 \neq 0$, la quadrica è un cono con vertice nell'origine.
(c) Calcolando gli invarianti quadratico e lineare di Ω abbiamo $I_2 = -9$ ed $I_1 = -3$, quindi

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 9.$$

Per $\lambda \to -\infty$ abbiamo $\chi(\lambda) \to +\infty$, mentre per $\lambda \to +\infty$ abbiamo $\chi(\lambda) \to -\infty$. Inoltre si ha

$$\chi'(\lambda) = -3\lambda^2 - 6\lambda + 9 = -3(\lambda+3)(\lambda-1),$$

per cui la derivata si annulla in $\lambda = -3, 1$. Per $\lambda = -3$ si ha il punto di minimo $m(-3,-18)$, per $\lambda = 1$ si ha il punto di massimo $M(1,14)$. Un grafico qualitativo è dato da

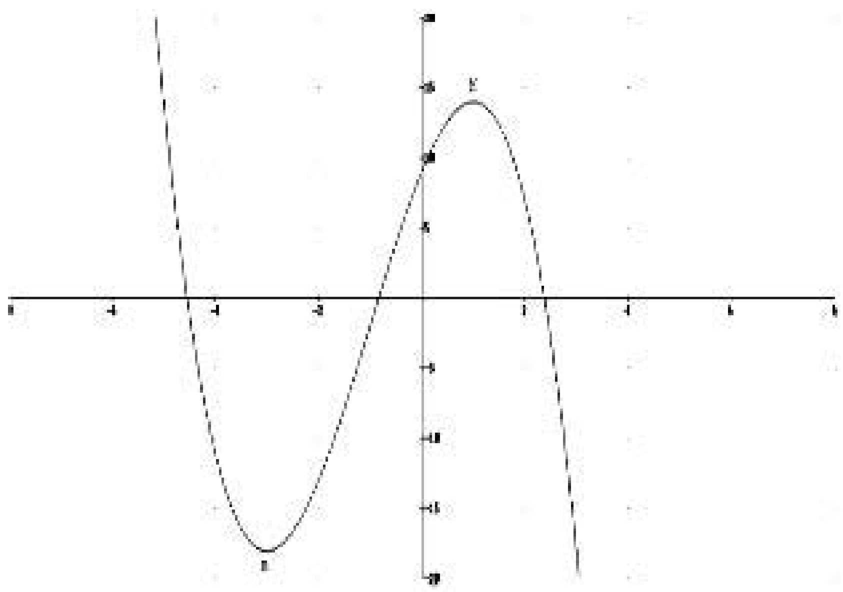


Figura 9.15: grafico del polinomio $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 9$.

Il grafico interseca l'asse orizzontale in tre punti, quindi abbiamo tre autovalori distinti, con segni non tutti uguali. Di conseguenza Ω è un cono reale.

TEMA D'ESAME DEL 10/02/2016

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(2+4+2+3$ punti)

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato da

$$\mathcal{B} = \{[1, -1, 1]^t, [-1, 0, 1]^t, [-1, 0, -1]^t\},$$

e sia $v = 2v_1 + 3v_3$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 3v_2$, ed $f(v) = 3v_1 + 6v_2 - 3v_3$.

(a) Verificare che $\mathcal{B}$ rappresenta una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolare $f(v_3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(c) Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

(d) Verificare che f ammette autovalore $\lambda = 3$, e calcolare l'angolo tra il corrispondente autospazio ed il nucleo.

Svolgimento.

(a) La matrice che ha come colonne le componenti dei tre vettori è data da

$$[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det[\mathcal{B}] = 2 \neq 0$ i tre vettori sono indipendenti, quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Per la linearità di f abbiamo

$$f(v) = f(2v_1 + 3v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_3) = 2 \cdot 0 + 3f(v_3) = 3f(v_3)$$

$$\Rightarrow \quad f(v_3) = \tfrac{1}{3} f(v) = v_1 + 2v_2 - v_3.$$

In particolare $f(v_3)_{\mathcal{B}} = [1, 2, -1]^t$.

(c) La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ha come colonne i coefficienti che esprimono le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ come combinazione lineare degli stessi, quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Poiché $f(v_2) = 3v_2$, $\lambda = 3$ è un autovalore. Inoltre, la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - 3I$ ha rango 2, quindi l'autospazio E_3 ha dimensione 1, per cui $E_3 = \langle v_2 \rangle$. Poiché $f(v_1) = 0$, il vettore v_1 appartiene al nucleo. La matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ha rango 2, quindi, per l'equazione dimensionale, il nucleo di f ha dimensione 1, e, di conseguenza $ker(f) = \langle v_1 \rangle$. L'angolo tra E_3 e $ker(f)$ coincide con quello tra v_1 e v_2. Essendo $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, i due spazi sono ortogonali tra loro.

Esercizio 2. $(4+2+2+3$ punti$)$

Si considerino le rette

$$r\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad s\begin{cases} 2x-z-1=0 \\ y=1. \end{cases}$$

(a) Stabilire la posizione reciproca di r ed s.

(b) Determinare le equazioni dei piani π_r e π_s passanti per il punto $P(1,2,-1)$ ed ortogonali, rispettivamente, ad r ed s.

(c) Determinare la direzione della retta $\pi_r \cap \pi_s$.

(d) Valutare l'angolo tra π_r e π_s.

Svolgimento.

(a) I punti della retta r hanno tutti $z=0$, quelli della retta s hanno tutti $y=1$. Sostituendo questi valori nelle equazioni delle due rette ricaviamo $x=1$ in r ed $x=1/2$ in s. Essendo questi valori diversi le due rette non sono secanti. Inoltre, la dirazione di r è parallela al vettore $[1,1,0]^t$, quella di s è parallela al vettore $[1,0,2]$ quindi le rette non sono parallele. Di conseguenza r ed s sono sghembe tra loro.

(b) Il piano passante per P ed ortogonale ad r ha equazione $1\cdot(x-x_P)+1\cdot(y-y_P)+0\cdot(z-z_P)=0$, quindi $\pi_r : x+y-3=0$. Analogamente, il piano passante per P ed ortogonale ad s ha equazione $1\cdot(x-x_P)+0\cdot(y-y_P)+2\cdot(z-z_P)=0$, quindi $\pi_s : x+2z+1=0$.

(c) La retta $\pi_r \cap \pi_s$ è data da

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=3-t \\ y=tz=-2+\frac{1}{2}t. \end{cases}$$

Pertanto, la direzione di $\pi_r \cap \pi_s$ risulta parallela al vettore $[-2,2,1]^t$.

(d) L'angolo tra π_r e π_s è uguale all'angolo tra le direzioni ortogonali, cioè all'angolo α tra i vettori $[1,1,0]^t$ ed $[1,0,2]^t$. Abbiamo quindi

$$\cos\alpha = \frac{\langle [1,1,0]^t, [1,0,2]^t \rangle}{\|[1,1,0]^t\| \|[1,0,2]^t\|} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

e, di conseguenza, l'angolo tra π_r e π_s risulta $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Esercizio 3. $(6+2+3$ punti$)$

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino il punto $V(1,-1,2)$, e la conica Γ data da

$$\Gamma\begin{cases} x-y=0 \\ 2x^2-z=0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del cono Ω di vertice V e direttrice Γ.

(b) Scrivere l'equazione del piano tangente ad Ω nell'origine.

(c) Classificare la conica intersecata da Ω sul piano xy

Svolgimento.

(a) L'equazione cartesiana di Ω si ottiene eliminando i mparametri dal sistema formato dalla generica retta passante per V e secante Γ. Detto P il generico punto di Γ abbiamo

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(x_P - 1) \\ y = -1 + \lambda(y_P + 1) \\ z = 2 + \lambda(z_P - 2) \\ x_P - y_P = 0 \\ 2x_P^2 - z_P = 0. \end{cases}$$

Ricavando x_P, y_P, z_P dalle prime tre equazioni, e sostituendo nella quarta, otteniamo $\lambda = \frac{1}{2}(-x+y+2)$, da cui

$$\begin{cases} x_P = \frac{x+y}{-x+y+2} \\ y_P = \frac{x+y}{-x+y+2} \\ z_P = 2\frac{-x+y+z}{-x+y+2}. \end{cases}$$

Sostituendo nella quinta equazione, e semplificando, abbiamo pertanto

$$\Omega : 4xy + xz - yz + 2x - 2y - 2z = 0.$$

(b) Il piano tangente nell'origine è dato da

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_O x + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_O y + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_O z = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z = 0,$$

il che coincide anche con il complesso dei termini di primo grado di Ω uguagliato a zero.

(c) Intersecando Ω col piano $z = 0$ otteniamo la conica

$$\begin{cases} 2xy + x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = \frac{x}{1-2x} \\ z = 0, \end{cases}$$

che rappresenta una iperbole equilatera.

VERIFICA IN ITINERE 02/05/2016

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+2+4+2$ punti)

Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino le rette

$$r\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases} \qquad s_k\begin{cases} x+y-z=k \\ y-kz=0, \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

(a) Determinare le equazioni parametriche di r e di s_k, al variare di k in $\mathbb{R}$.

(b) Stabilire se esistono valori di k per i quali s_k è parallela ad r.

(c) Determinare l'equazione del piano π_r perpendicolare ad r e passante per l'origine, e scrivere una sua base.

(d) Determinare, al variare di k, il punto di intersezione tra s_k e π_r.

Svolgimento.

(a) La matrice dei coefficienti del sistema che definisce r risulta

$$R=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

La caratteristica è 2, come si ottiene, per esempio, utilizzando il minore $\{C_1,C_2\}\cap\{R_1,R_2\}$. Esplicitando quindi z come parametro, si ottiene

$$r\begin{cases} x=-3-2t \\ y=2+t \\ z=t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Analogamente, la matrice dei coefficienti del sistema che definisce s_k risulta

$$S_k=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix},$$

e quindi $r(S_k)=2$ per ogni k, da cui

$$s_k\begin{cases} x=k+(1-k)q \\ y=kq \\ z=q, \quad q\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Dalle equazioni parametriche si ricava immediatamente che r ha la direzione del vettore $[-2,1,1]^t$, mentre s_k ha la direzione del vettore $[(1-k),k,1]$. Le due rette sono parallele se le componenti di questi due vettori sono proporzionali, cioè se esiste una costante h tale che

$$\begin{cases} -2 = h(1-k) \\ 1 = hk \\ 1 = h. \end{cases}$$

Dalla seconda e terza uguaglianza si ha $h = k = 1$, che, sostituite nella prima uguaglianza forniscono l'assurdo $-2 = 0$. Quindi le due rette non sono mai parallele.

(c) I coefficienti di x, y, z nell'equazione del piano π_r devono essere proporzionali ai parametri direttori di r, quindi π_r ha equazione $-2x + y + z = 0$. Tale piano è un sottospazio in quanto passa per l'origine. Possiamo scrivere l'equazione nella forma $y = 2x - z$ per cui il generico vettore è $[x, 2x - z, z]^t$, e quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x - z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\mathcal{B} = \{[1, 2, 0]^t, [0, -1, 1]^t\}$ è una base.

(d) Il punto di intersezione tra s_k e π_r si ottiene sostituendo le coordinate parametriche della retta al posto di x, y, z nell'equazione del piano, e risolvendo rispetto a q. Abbiamo quindi

$$-2(k + (1-k)q) + kq + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2k}{3k-1} \quad \left(k \neq \frac{1}{3}\right).$$

Pertanto si ha

$$s_k \cap \pi_r = P_k\left(\frac{k^2 + k}{3k-1}, \frac{2k^2}{3k-1}, \frac{2k}{3k-1}\right).$$

In particolare, per $k \to \frac{1}{3}$, il punto tende all'infinito, cioè retta e piano diventano paralleli tra loro.

Esercizio 2. $(3 + 2 + 4 + 2$ punti)

Siano U, V i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \langle [1, -1, 1, 1]^t, [1, -3, -1, 1]^t, [1, 0, 2, 1]^t \rangle \quad V \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + z - w = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni di U.

(b) Determinare una base di V.

(c) Determinare $U \cap V$, la sua dimensione ed una sua base.

(d) Stabilire se esistono applicazioni lineari iniettive $f : U + V \to \mathbf{R}^2$, giustificando la risposta.

Svolgimento.

(a) Considerata la matrice $[U]$ avente come colonne i tre generatori di U, il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo, mentre i suoi due orlati possibili sono entrambi nulli. Pertanto $r([U]) = dim(U) = 2$, ed una base di U è formata da C_1, C_2. Per il teorema di caratterizzazione dei sottospazi U si rappresenta mediante un sistema di 2 equazioni in 4 incognite, ottenuto imponendo che la matrice $A_U = [C_1|C_2|X$ abbia caratteristica 2, essendo $X = [x, y, z, w]^t$ il generico vettore di $\mathbb{R}^4$. Orlando $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ e ponendo i due minori uguali a zero si ottiene

$$U \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - w = 0. \end{cases}$$

(b) La matrice del sistema che descrive V risulta

$$[V] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il minore $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ è non nullo. Quindi si ha $r([V]) = 2$. Pertanto $dim(V) = n - r = 4 - 2 = 2$. Una base di V si ottiene risolvendo il sistema. Esplicitando z, w come parametri, il generico vettore di V risulta

$$\begin{bmatrix} -z + w \\ -2w \\ z \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto una base di V risulta $B_V = \{[-1, 0, 1, 0]^t, [1, -2, 0, 1]^t\}$.
(c) Lo spazio $U \cap V$ è rappresentato dal sistema formato dalle equazioni di U e di V. La matrice del sistema risulta

$$[U \cap V] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che il minore $\{R_2, R_3, R_4\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$ è non nullo. Il calcolo del determinante di $[U \cap V]$ fornisce valore nullo. Quindi $r([U \cap V]) = 3$, ed il sistema ammette ∞^1 soluzioni, per cui $dim(U \cap V) = 1$. Una sua base si ottiene risolvendo il sistema equivalente, descritto dalla matrice $\{R_2, R_3, R_4\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$. Si ottiene $U \cap V = \{w[1, -2, 0, 1]^t,\ w \in \mathbb{R}\}$, e $\{[1, -2, 0, 1]^t\}$ rappresenta una sua base
(d) Per la formula di Grassmann si ha

$$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Per l'equazione dimensionale, una eventuale applicazione lineare iniettiva $f : U + V \to \mathbb{R}^2$ sarebbe tale che $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = 0 + dim(Im(f)) = dim(Im(f)) = dim(U + V) = 3$, il che è impossibile, dovendo essere $Im(f)$ un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.
Esercizio 3. $(4 + 4 + 3$ punti)

Sia $f : Pol_3(\mathbb{R})[x] \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita nella maniera seguente

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{bmatrix} d - b \\ c - 2d \\ a - c \\ -a + 4b - c \end{bmatrix}$$

(a) Determinare nucleo ed immagine di f, una loro base e la loro dimensione.

(b) Verificare che $v = [1, -1, -1, -1]^t$ appartiene ad $Im(f)$, e scrivere l'insieme delle sue controimmagini.

(c) Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y - z - w \\ x - y + z - w \end{bmatrix}.$$

Determinare $g \circ f(x^3)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{[1,2]^t, [-1,1]^t\}$.

Svolgimento.

(a) Il nucleo si ottiene uguagliando a zero l'immagine del generico vettore, per cui si ha

$$\begin{bmatrix} d - b \\ c - 2d \\ a - c \\ -a + 4b - c = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -a + 4b - c \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = d \\ c = 2d \\ a = c = 2d \end{cases}$$

Quindi $dim(ker(f)) = 1$, e si ha

$$ker(f) = \{d(2x^3 + x^2 + 2x + 1),\ d \in \mathbb{R}\} = \langle 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \rangle.$$

Per determinare $Im(f)$, consideriamo la matrice che rappresenta f rispetto alle basi fissate

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per l'equazione dimensionale, essendo $dim(ker(f)) = 1$ si ha $dim(Im(f)) = 3$, il che implica che la caratteristica di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ è uguale a 3. Si vede facilmente che il minore $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$ è non nullo, per cui si ha

$$Im(f) = \{aC_1 + bC_2 + cC_3,\ a, b, c \in \mathbb{R}\} = \langle C_1, C_2, C_3 \rangle,$$

(b) Per determinare l'equazione di $Im(f)$ si deve considerare la matrice data da

$$A_{Im(f)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & -1 & z \\ -1 & 4 & -1 & w \end{pmatrix},$$

Imponendo che la caratteristica sia uguale a $dim(Im(f)) = 3$, si deve porre il determinante uguale a zero, il che fornisce

$$Im(f) : 4x + 2y + z + w = 0.$$

Le coordinate di v verificano l'equazione di $Im(f)$, quindi v appartiene all'immagine. Di conseguenza v si può scrivere come combinazione lineare delle colonne C_1, C_2, C_3, cioè $v = aC_1 + bC_2 + cC_3$ per determinati valori reali a, b, c. Svolgendo i conti si trova $a = -2, b = -1, c = -1$. Sfruttando la linearità di f si ha

$$v = -2C_1 - C_2 - C_3 = -2f(x^3) - f(x^2) - f(x) = f(-2x^3 - x^2 - x).$$

Pertanto il polinomio $-2x^3 - x^2 - x$ appartiene alla controimmagine di v, e quindi

$$f^{-1}(v) = -2x^3 - x^2 - x + ker(f),$$

rappresenta l'insieme delle controimmagini del vettore considerato.

(c) Rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$g \circ f(x^3) = g([0, 0, 1, -1]^t) = [0, 2]^t.$$

Per scrivere $[0, 2]^t$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ possiamo risolvere il sistema dato da

$$[0, 2]^t = a[1, 2]^t + b[-1, 1]^t,$$

da cui i ricava $a = b = 2/3$, che rappresentano pertanto le coordinate di $g \circ f(x^3)$ rispetto alla base considerata.

In alternativa si possono calcolare le coordinate applicando la matrice $[\mathcal{B}]^{-1} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g \circ f)$ al vettore corrispondente di x^3 nello spazio canonico $\mathbb{R}^4$ isomorfo a $Pol_3(\mathbb{R})[x]$, cioè al vettore $\mathbf{v} = [1, 0, 0, 0]^t$. Abbiamo quindi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g) M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha

$$f(x^3)_{\mathcal{B}} = [\mathcal{B}]^{-1} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g \circ f)\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

il che corrisponde al risultato precedentemente determinato.

VERIFICA IN ITINERE 25/06/2016

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(2+5+4$ punti)

Sia $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo dato da

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z-w \\ y \\ y+3z \\ y+3w \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare lo spettro di f.

(b) Determinare gli autospazi, e stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

(c) Determinare la matrice di proiezione sull'autospazio associato all'autovalore maggiore.

Svolgimento.

(a) La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica risulta

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\chi(\lambda) = \det(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - \lambda I) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)^2.$$

Pertanto si ha $Spec(f) = \{1, 1, 3, 3\}$.

(b) L'autospazio E_1 è descritto dal sistema omogeneo $(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - I)[x, y, z]^t = [0, 0, 0]^t$. La matrice $(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - I)$ ha la seconda riga e la prima colonna nulle. Eliminandole resta la matrice di ordine 3 data da $\{R_1, R_3, R_4\} \cap \{C_2, C_3, C_4\}$, il cui determinante è nullo. Pertanto la caratteristica di $(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) - I)$ è inferiore a 3. Il minore $\{R_3, R_4\} \cap \{C_3, C_4\}$ è non nullo, quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza $dim(E_1) = 4 - 2 = 2$, ed il sistema che lo descrive risulta

$$\begin{cases} 2z = -y \\ 2w = -y. \end{cases}$$

Pertanto abbiamo

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\frac{y}{2} \\ -\frac{y}{2} \end{bmatrix} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

L'autospazio E_3 è descritto dal sistema omogeneo $(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)-3I)[x,y,z]^t=[0,0,0]^t$. La matrice $(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)-3I)$ ha $R_3=R_4$, $R_2=-2R_3$, quindi la caratteristica di $(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)-3I)$ è inferiore a 3. Il minore $\{R_1,R_2\}\cap\{C_1,C_2\}$ è non nullo, quindi la matrice ha rango 2. Di conseguenza $dim(E_3)=4-2=2$, ed il sistema che lo descrive risulta

$$\begin{cases} -2x=-z+w \\ -2y=0. \end{cases}$$

Pertanto abbiamo

$$E_3=\left\{\begin{bmatrix} \frac{z-w}{2} \\ 0 \\ z \\ w \end{bmatrix}\right\}=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\rangle.$$

Abbiamo quindi $m_g(1)=m_a(1)=2$, e $m_g(3)=m_a(3)=2$, per cui i due auto valori sono regolari. Di conseguenza f è diagonalizzabile, e quindi esiste una base di autovettori. Questa si ottiene unendo la base di E_1 e la base di E_3, in quanto autovettori associati ad autovlori distinti sono indipendenti.

(c) Sia A la matrice avente come colonne i due vettori della base di E_3. La matrice di proiezione su E_3 è data da $P=AR=A(A^tA)^{-1}A^t$, per cui

$$A^tA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A^tA)^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad R=(A^tA)^{-1}A^t=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$P=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 20 & 4 \\ -8 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. $(2+2+3+4$ punti$)$

Nel piano cartesiano euclideo $\mathbb{R}^2$, si consideri la conica γ di equazione data da

$$\gamma: x^2+2xy+3y^2-4x-2y+1=0.$$

(a) Classificare γ.

(b) Scrivere una forma canonica di γ.

(c) Determinare la distanza tra i fuochi di γ.

(d) Rappresentare graficamente γ.

Svolgimento.

(a) Calcolando gli invarianti abbiamo $I_3=-7$, $I_2=2$, $I_1=4$, quindi γ è una ellisse reale.

(b) Gli auto valori della matrice Q associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, quindi una forma canonica di γ è data da

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\sqrt{2})x'^2 + (2+\sqrt{2})y'^2 - \frac{7}{2} = 0.$$

(c) La distanza tra i fuochi è invariante per rototraslazioni, quindi possiamo calcolarla sulla forma canonica. I fuochi sono sull'asse maggiore, quindi, per la scelta fatta, sull'asse x', ed hanno distanza $d(F_1, F_2) = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$, essendo a e b le lunghezze dei semiassi, cioè,

$$a^2 = \frac{7}{4 - 2\sqrt{2}} \quad b^2 = \frac{7}{4 + 2\sqrt{2}}.$$

Pertanto si ha

$$d(F_1, F_2) = 2\sqrt{\frac{7}{\sqrt{2}}}.$$

(d) Risolvendo il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero si ha che il centro ha coordinate $C(5/2, -1/2)$. Gli autospazi associati a Q sono dati da

$$E_{\lambda_1} : y = (1 - \sqrt{2})x, \quad E_{\lambda_2} : y = (1 + \sqrt{2})x.$$

Gli assi dell'ellisse sono paralleli agli autospazi e passano per il centro

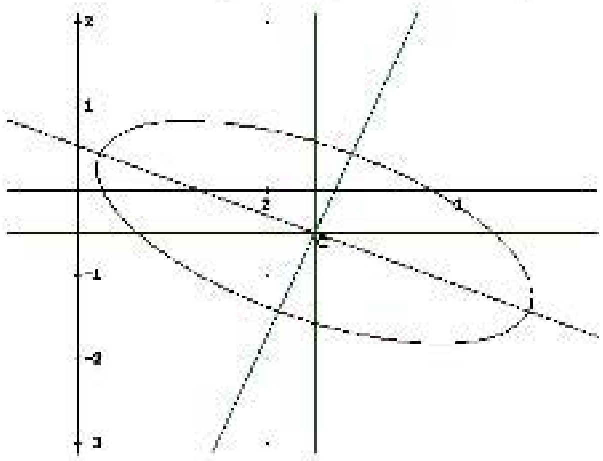


Figura 9.16: grafico della conica $\gamma : x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Esercizio 3. $(2 + 3 + 4 + 2$ punti$)$

Nello spazio $\mathbf{R}^3$, sia r l'asse y, ed s la retta passante per il punto $A(2, 0, 0)$ e parallela all'asse z.

(a) Scrivere le equazioni di r e di s.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo Ω formato dai punti la cui distanza da r è il doppio della distanza che hanno da s.

(c) Riconoscere Ω e determinare una sua forma canonica.

(d) Determinare gli assi di simmetria della quadrica

Svolgimento.

(a) L'asse y ha equazioni $x = z = 0$, la retta s ha equazioni $x - 2 = y = 0$.
(b) Sia $P(x, y, z)$ il generico punto dello spazio. La distanza di P dall'asse y è data da $PH = \sqrt{x^2 + z^2}$. La distanza di P dalla retta s è data da $PK = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Pertanto si ha

$$\Omega : (x^2 + z^2) = 4[(x-2)^2 + y^2] \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 - z^2 - 16x + 16 = 0.$$

(c) Calcolando gli invarianti abbiamo $I_4 = 64$, $I_3 = -12$, $I_2 = 5$, $I_1 = 6$. La matrice Q associata alla parte quadratica è già in forma diagonale, abbiamo auto valori di segno opposto e la quadrica è un iperboloide ad una falda. Una forma canonica di Ω risulta data da

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + fracI_4 I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4y^2 - z^2 - \frac{16}{3} = 0.$$

(d) Essendo Q diagonale, gli autospazi sono paralleli agli assi cartesiani, quindi gli assi di simmetria di Ω sono paralleli agli assi cartesiani e passano per il centro C della quadrica. Il centro si ottiene risolvendo il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, che fornisce

$$C\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right).$$

Quindi le rette

$$a_1 \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = 0. \end{cases}$$

$$a_2 \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ z = 0. \end{cases}$$

$$a_3 \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

forniscono gli assi di simmetria della quadrica.

TEMA D'ESAME DELLO 07/07/2016

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(5 + 2 + 4$ punti$)$

Sia $Pol_2(\mathbb{R})[\lambda]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due in λ. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to Pol_2(\mathbb{R})[\lambda]$ l'applicazione lineare definita nella maniera seguente

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \lambda + 1$$
$$f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda + 2$$
$$f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 2\lambda + 3.$$

(a) Determinare $ker(f)$, $Im(f)$, la rispettiva dimensione ed una loro base.

(b) Determinare le equazioni dello spazio ortogonale a $ker(f)$.

(c) Verificare che $P(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 5$ appartiene ad $Im(f)$, e scrivere l'insieme delle sue controimmagini.

Svolgimento.

(a) Assumendo $\{\lambda^2, \lambda, 1\}$ come base di $Pol_2(\mathbb{R})[\lambda]$, ed identificando $Pol_2(\mathbb{R})[\lambda]$ con lo spazio canonico $\mathbb{R}^3$, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica risulta data da

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $C_3 = C_1 + C_2$ quindi $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ ha rango minore di 3, e si vede facilmente che il minore formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo. Pertanto $ker(f)$ si ottiene risolvendo il sistema omogeneo avente come matrice dei coefficienti quella formata da tali linee, e, risulta

$$ker(f) = \{[-z, -z, z]^t,\ z \in \mathbb{R}\} = \langle [-1, -1, 1]^t \rangle.$$

Quindi $ker(f)$ ha dimensione 1, e, per l'equazione dimensionale, $Im(f)$ ha dimensione $3 - 1 = 2$. Una base dell'immagine è data dai due polinomi corrispondenti alle prime due colonne di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ nell'isomorfismo canonico, quindi si ha

$$Im(f) = \{a(\lambda + 1) + b(\lambda^2 + \lambda + 2),\ a, b \in \mathbb{R}\} = \langle \lambda + 1, \lambda^2 + \lambda + 2 \rangle.$$

(b) Essendo $ker(f)$ una retta, lo spazio $ker(f)^{\perp}$ è il piano ad essa ortogonale, quindi ha equazione $-x - y + z = 0$.

(c) Per stabilire se il polinomio $2\lambda^2+3\lambda+5$ appartiene all'immagine di f, possiamo cercare di esprimerlo come combinazione lineare della base dell'immagine. Abbiamo quindi

$$2\lambda^2+3\lambda+5=a(\lambda+1)+b(\lambda^2+\lambda+2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=2 \\ a+b=3 \\ a+2b=5 \end{cases},$$

il che fornisce la soluzione $a=1, b=2$. Quindi il polinomio appartiene ad $Im(f)$. Per la linearità di f abbiamo

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=af\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+bf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+cf\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=a(\lambda+1)+b(\lambda^2+\lambda+2)+c(\lambda^2+2\lambda+3),$$

per cui una controimmagine di $2\lambda^2+3\lambda+5$ è data dal vettore $[1,2,0]^t$. Di conseguenza $[1,2,0]^t+ker(f)$ fornisce l'insieme delle controimmagini del polinomio considerato.

Esercizio 2. $(2+2+3+4$ punti$)$

Nel piano cartesiano euclideo $\mathbb{R}^2$, si consideri la conica γ di equazione data da

$$\gamma : x^2-2xy-y^2+4x-2y=0.$$

(a) Classificare γ.

(b) Scrivere una forma canonica di γ.

(c) Determinare la distanza tra i vertici di γ.

(d) Rappresentare graficamente γ.

Svolgimento.

(a) La matrice associata alla conica è data da

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo degli invarianti risulta $I_3=7$, $I_2=-2$, $I_1=0$, quindi la conica è un'iperbole equilatera.

(b) Gli autovalori associati alla parte quadratica sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$, cioè $\lambda^2-2=0$, da cui $\lambda=\pm\sqrt{2}$. Una forma canonica di γ è data da

$$\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}y^2-\frac{7}{2}=0.$$

(c) La distanza tra i vertici si può calcolare facilmente dalla forma canonica. Le intersezioni reali con gli assi cartesiani danno i punti

$$V_1\left(-\sqrt{\frac{7}{2\sqrt{2}}},0\right), V_2\left(\sqrt{\frac{7}{2\sqrt{2}}},0\right),$$

Quindi la distanza tra i vertici risulta uguale a $\sqrt{7\sqrt{2}}$.

(d) Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il centro $C(-3/2, 1/2)$. Uguagliando a zero la parte quadratica abbiamo

$$x^2 - 2xy - y^2 = 0,$$

da cui $y = -(1+\sqrt{2})x$ ed $y = (\sqrt{2}-1)x$, quindi gli asintoti sono le rette passanti per il centro e coefficienti angolari $m_1 = -(1+\sqrt{2})$ ed $m_2 = \sqrt{2}-1$. Gli assi sono le rette per C parallele agli autospazi.

Per $\lambda = -\sqrt{2}$ si ha l'autospazio $(1+\sqrt{2})x - y = 0$, per $\lambda = \sqrt{2}$ si ha l'autospazio $(1-\sqrt{2})x - y = 0$. Il grafico della conica risulta pertanto dato da

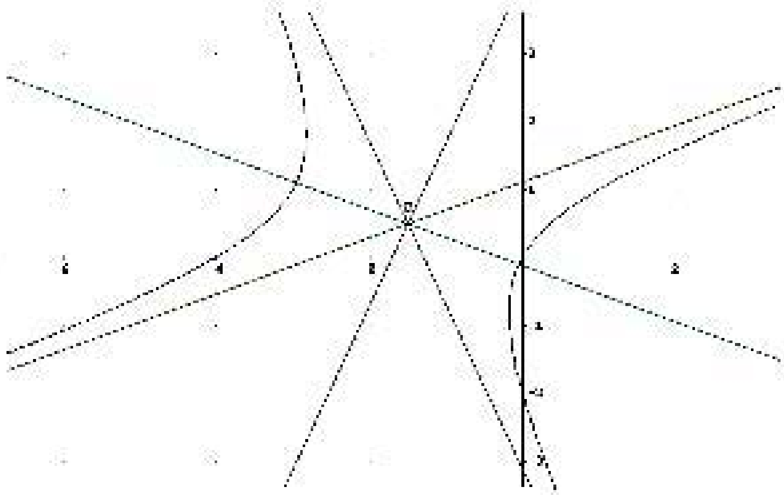


Figura 9.17: grafico della conica $\gamma : x^2 - 2xy - y^2 + 4x - 2y = 0$.

Esercizio 3. $(4+3+2+2$ punti$)$

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, si consideri il punto $A(0,1,0)$ ed il piano $\pi : x - z - 1 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo Ω formato dai punti equidistanti da A e dal piano π.

(b) Verificare che Ω è una quadrica di rotazione, e classificarla.

(c) Determinare l'asse di rotazione di Ω.

(d) Determinare il vertice di Ω

Svolgimento.

(a) Sia $P(x,y,z)$ il generico punto dello spazio. La distanza PA è data da

$$PA = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

la distanza di P dal piano π è data da

$$d(P, \pi) = \frac{|x - z - 1|}{\sqrt{2}}.$$

Uguagliando PA e $d(P, \pi)$, elevando al quadrato e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione cartesiana di Ω,data da

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2x - 4y - 2z + 1 = 0.$$

(b) Calcolando gli invarianti si ottiene $I_4 = -8$, $I_3 = 0$, $I_2 = 4$, $I_1 = 4$, quindi Ω è un paraboloide ellittico. L'equazione caratteristica risulta $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$. Abbiamo quindi la soluzione semplice $\lambda = 0$ e la soluzione doppia $\lambda = 2$. Essendoci un auto valore doppio non nullo la quadrica è di rotazione.

(c) Primo metodo.
L'asse di rotazione è parallelo all'autospazio E_0 e passa per il centro della conica ottenuta sezionando Ω con il piano $E_0^\perp$. L'autospazio E_0 è rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y = 0, \end{cases}$$

e quindi $E_0 = \{[x, 0, -x]^t,\ x \in \mathbb{R}\}$. Di conseguenza $E_0^\perp$ è il piano di equazione $x - z = 0$, la cui intersezione con Ω fornisce la conica

$$\begin{cases} 4x^2 + 2y^2 - 4y + 1 = 0 \\ x - z = 0, \end{cases}$$

Le coordinate x, y del centro C di tale conica si ottiene risolvendo il sistema delle derivate parziali rispetto ad x e ad y uguagliate a zero, mentre la coordinata z deve coincidere con la coordinata x come si ricava dall'equazione di $E_0^\perp$. Pertanto risulta $C(0, 1, 0)$, e l'asse di rotazione ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1z = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Secondo metodo.
In alternativa l'asse si può determinare dalle condizioni geometriche che forniscono Ω. Infatti l'asse deve essere la retta passante per A e perpendicolare a π, le cui equazioni parametriche coincidono con quelle determinate.

(d) Il vertice V si può determinare intersecando la quadrica con l'asse di rotazione, il che fornisce l'equazione $4\lambda - 1 = 0$, da cui $\lambda = 1/4$. Pertanto il vertice risulta $V(1/4, 1, -1/4)$. Esso coincide con il punto medio del segmento di perpendicolare calato da A sul piano π, come si ricava dalle condizioni geometriche che forniscono la quadrica considerata.

TEMA D'ESAME DELLO 09/09/2016

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. ($2+4+4+1$ punti)

Sia $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Sia $f: M_{(2,2)}(\mathbb{R}) \to M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ la funzione tale che

$$f(A) = A - A^t,$$

per ogni $A \in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$, essendo A^t la matrice trasposta di A.

(a) Dimostrare che f è un'applicazione lineare.

(b) Determinare il nucleo di f, la sua dimensione ed una sua base.

(c) Determinare l'immagine di f, la sua dimensione ed una sua base.

(d) Senza fare calcoli, spiegare come mai una qualsiasi matrice appartenente a $ker(f)$ è sicuramente diagonalizzabile.

Svolgimento.

(a) Una funzione $f: V \to W$ è lineare se e solo se

$$f(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w}),$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e per ogni coppia a, b di scalari. Nel caso considerato, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ (e quindi anche $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$) sono matrici quadrate di ordine 2. Posto $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = A$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&f(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = f(A) = A - A^t = \\
&= (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) - (a\mathbf{v} + b\mathbf{w})^t = \text{(la trasposta della somma è la somma delle trasposte)} \\
&= a\mathbf{v} - (a\mathbf{v})^t + b\mathbf{w} - (b\mathbf{w})^t = \\
&= a\mathbf{v} - a\mathbf{v}^t + b\mathbf{w} - b\mathbf{w}^t = \\
&= a(\mathbf{v} - \mathbf{v})^t + b(\mathbf{w} - \mathbf{w})^t = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w}),
\end{aligned}$$

e quindi f è lineare.

(b) Il nucleo è formato dalle matrici A aventi come immagine la matrice nulla, quindi deve essere $A - A^t = \mathbf{0}$ (matrice nulla), e quindi $A = A^t$. Quindi le matrici del nucleo sono del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pertanto abbiamo

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi $dim(ker(f)) = 3$, ed una sua base risulta data dalle tre matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Per l'equazione dimensionale l'immagine di f ha dimensione $4-3=1$. La generica matrice di $Im(f)$ è data da

$$X = A - A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = (b-c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto una base di $Im(f)$ è data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Le matrici del nucleo sono tutte simmetriche, quindi, per il teorema spettrale, hanno autovalori reali e regolari, quindi sono diagonalizzabili.

Esercizio 2. $(3+2+3+3$ punti)

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette r ed s date da

$$r \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \\ z = 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad\qquad s \begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

(a) Stabilire se r ed s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Valutare l'angolo tra le due rette.

(c) Scrivere l'equazione del piano π, passante per r e parallelo ad s.

(d) Scrivere l'equazione della sfera tangente al piano π ed avente centro nel punto di ascissa nulla della retta s.

Svolgimento.

(a) Ricaviamo innanzitutto le equazioni parametriche di s. Risolvendo il sistema rispetto al parametro $x = q$ abbiamo

$$s \begin{cases} x = q \\ y = -1-q \\ z = q, \quad q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

I parametri direttori di r e di s sono, rispettivamente, -1,-1,2 e 1,-1,1, quindi, non essendo proporzionali, le rette non sono parallele.

Uguagliando le ascisse e le ordinate dei punti di r e di s si ricava $t = 3/2$ e $q = -1/2$, ed in corrispondenza di tali valori, le coordinate z sono diverse, quindi le rette non sono secanti. Di conseguenza esse sono sghembe.

(b) L'angolo tra le due rette corrisponde all'angolo α tra i vettori $\overline{r} = [-1,-1,2]$ ed $\overline{s} = [1,-1,1]$. Questo può essere valutato mediante il coseno e si ha

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overline{r}, \overline{s}\rangle}{\|\overline{r}\|\|\overline{s}\|} = \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(c) Ricavando $t = 1 - x$ dalla prima equazione parametrica di r, e sostituendo nelle altre due, si scrive r come intersezione di due piani

$$r \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Pertanto $F_r : (x - y) + \lambda(2x + z - 2) = 0$ descrive, al variare di λ in $\mathbb{R}$, il fascio di piani di sostegno r. I coefficienti di x, y, z risultano $1 + 2\lambda, -1, \lambda$, rispettivamente. La condizione di parallelismo con s corrisponde all'annullamento del prodotto scalare tra il vettore $[1 + 2\lambda, -1, \lambda]$ ed il vettore $\overline{s}$, il che fornisce $\lambda = -2/3$. Sostituendo in F_r si ha il piano di richiesto, di equazione $x + 3y + 2z - 4 = 0$.
(d) Il punto di s di ascissa nulla si ottiene per $q = 0$, quindi risulta dato da $S(0, -1, 0)$. Una sfera di centro S è tangente a π se il suo raggio è uguale alla distanza di S da π, cioè

$$d(S, \pi) = \frac{|x_S + 3y_S + 2z_S - 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Quindi la sfera richiesta ha equazione data da

$$x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \frac{7}{2}.$$

Esercizio 3. $(4 + 4 + 3$ punti$)$

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri la conica γ data da

$$\gamma \begin{cases} y^2 - 2yz - z^2 + 4y - 2z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

(a) Classificare il cilindro che proietta γ parallelamente all'asse x, e ridurlo a forma canonica.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del cono Ω di vertice $V(1, 0, 0)$ e direttrice γ

(c) Dimostrare che la sezione del cono Ω con il piano $\pi : x - y = 0$ è una conica a centro, e determinare le coordinate del centro

Svolgimento.

(a) Il cilindro che proietta γ parallelamente all'asse x ha equazione uguale all'equazione che descrive γ sul piano yz, e quindi $y^2 - 2yz - z^2 + 4y - 2z = 0$. L'invariante quadratico risulta uguale a -2, quindi si ha un cilindro iperbolico. Di conseguenza γ è un'iperbole. Avendo le rette generatrici parallele all'asse x, la forma canonica del cilindro si ottiene riducendo γ a forma canonica. La matrice associata a γ risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e quella associata alla parte quadratica è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $I_3 = 7$, $I_2 = -2$, ed il polinomio caratteristico risulta $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2$. Quindi gli autovalori sono dati da $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = \sqrt{2}$. La forma canonica di γ è

$$\gamma \begin{cases} \sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}z^2 - \frac{7}{2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

e quindi $\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}z^2 - \frac{7}{2} = 0$ è l'equazione canonica del cilindro.

(b) Detto P il generico punto del cono Ω, l'equazione cartesiana si ottiene eliminando i parametri x_P, y_P, z_P, λ dalle equazioni lineari del seguente sistema

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(x_P - 1) \\ y = \lambda(y_P - 0) \\ z = \lambda(z_P - 0) \\ y_P^2 - 2y_P z_P - z_P^2 + 4y_P - 2z_P = 0 \\ x_P = 0. \end{cases}$$

Abbiamo $x_P = 0$, quindi $\lambda = 1 - x$ dalla prima equazione, il che, sostituito nelle seconda e nella terza equazione, fornisce $y_P = y/(1-x)$ e $z_P = z/(1-x)$. Sostituendo nell'equazione di secondo grado e svolgendo i calcoli, si ottiene

$$\Omega : y^2 - 2yz - z^2 - 4xy + 2xz + 4y - 2z = 0.$$

(c) Intersecando Ω con il piano $x = y$ si ottiene la conica data da

$$\begin{cases} 3y^2 + z^2 - 4y + 2z = 0 \\ x = y. \end{cases}$$

Il cilindro che proietta la conica parallelamente all'asse x ha equazione $3y^2 + z^2 - 4y + 2z = 0$. Il calcolo degli invarianti fornisce $I_2 = 3$, $I_1 = 4$ (e, ovviamente, $I_4 = I_3 = 0$), quindi l'equazione caratteristica risulta $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$. Le radici sono $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = 3$, quindi si ha un cilindro ellittico (ovviamente reale, essendo Ω un cono reale). Pertanto, la conica sezione di Ω con il piano $x = y$ risulta essere un'ellisse, quindi dotata di centro, Le coordinate del centro si ottengono intersecando l'asse del cilindro con il piano $x = y$. L'asse del cilindro è parallelo all'asse x, e passa per il centro della conica che il cilindro taglia sul piano yz, data da

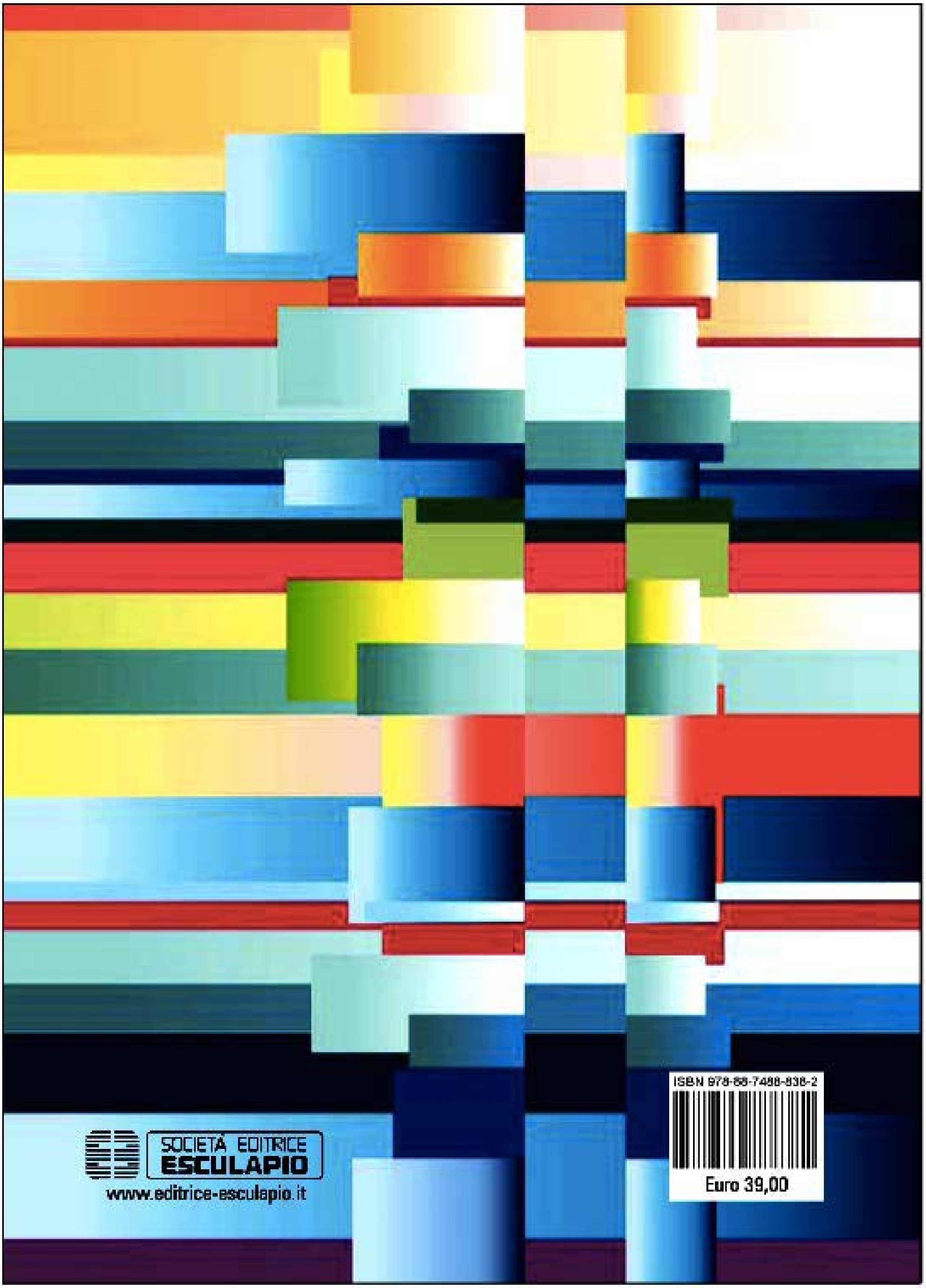
$$\begin{cases} 3y^2 + z^2 - 4y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce

$$\begin{cases} 6y - 4 = 0 \\ 2z + 2 = 0, \end{cases}$$

che, sul piano $x = 0$, forniscono il punto $(0, 2/3, -1)$. Quindi, sul piano $x = y$, abbiamo $C(2/3, 2/3, -1)$ che è il centro richiesto

Indice analitico


SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO
www.editrice-esculapio.it

ISBN 978-88-7488-838-2

Euro 39,00