Algebra Lineare 2025/26 – Scheda Esercizi 4

1. Indipendenza lineare e generatori

Esercizio 1. Per ciascuno spazio vettoriale V e insieme di vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$, determinare se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti e se generano V. Se sono linearmente dipendenti, scartare alcuni vettori senza cambiare lo span lineare, fino a ottenere un sottoinsieme linearmente indipendente. Se sono linearmente indipendenti ma non sono generatori di V, aggiungerne dei vettori fino ad ottenere una base di V.

(1) $V = \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $V = \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $V = \mathrm{Mat}(2,2), \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $V = \mathrm{Mat}(2,2), \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(5) $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}, \quad \mathbf{v}_1 = 1 + t^2, \mathbf{v}_2 = 1 - t, \mathbf{v}_3 = 1 - t^2$

(6) $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}, \quad \mathbf{v}_1 = 1 + t, \mathbf{v}_2 = 1 - t, \mathbf{v}_3 = 1 + t^2, \mathbf{v}_4 = 1 + t$

(7) $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}, \quad \mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = 1 + 2t, \mathbf{v}_3 = 2t + 3t^2$

Esercizio 2. Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)^\intercal, \mathbf{v}_2 = (\lambda, 2, \lambda, 2)^\intercal, \mathbf{v}_3 = (1, 1+\lambda, 1, 2\lambda)^\intercal$$

(1) determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti

(2) determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $(5,1,4,2)^\intercal$ appartiene a $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$

Esercizio 3. Per ciascuna coppia di sottospazi $H, K \subseteq \mathbb{R}^4$, determinare se $H = K$.

(1) $H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ e $K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$

(2) $H = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ e $K = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$

2. Base e dimensione

Esercizio 4. Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali.

(1) $H_1 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4$

(2) $H_2 = \ker\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^5$

(3) $H_3 = \{A \in \operatorname{Mat}(3,3) \mid A = A^\intercal\} \subseteq \operatorname{Mat}(3,3)$

(4) $H_4 = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \mid p'(1) = p(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$