Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Quarto Appello – 9 settembre 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ______________________________

Codice Persona: ____________________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

Parte A (10 punti)

1. In $\mathbb{R}^2$ considerare l'insieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Allora

[A] W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

[B] $\dim(W) = 2$

[C] $\dim(W) = 1$ e W è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

[D] $\dim(W) = 1$ e W è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$\text{Span}\,\{(0,1,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$$

una forma cartesiana è data da

[A] $y = z$ ✓

[B] $x - y = z = 0$

[C] $x = y = z$

[D] nessuna delle precedenti

3. Il sistema

$$\begin{cases} 4x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

[A] ammette infinite soluzioni

[B] ammette due soluzioni

[C] ammette un'unica soluzione ✓

[D] non ammette soluzioni

4. Considerare l'endomorfismo $T : \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \to \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ definito da

$$T(A) = A^T.$$

Allora

[A] T non è diagonalizzabile

[B] gli autovalori di T sono 1 e -1 ✓

[C] gli autovalori di T sono 0 e 1

[D] T ha un unico autovalore

5. La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- A è diagonalizzabile se $k = 1$
- B è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$ ✓
- C non è diagonalizzabile se $k = 2$
- D è sempre diagonalizzabile

6. L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

- A $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- B $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- C $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- D $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

7. Sia $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matrice quadrata, dove C_1, C_2, C_3 sono vettori colonna. Sia $B = (C_1, C_2 + C_3, C_2)$, allora

- A $\det(B) = -\det(A)$ ✓
- B $\det(B) = \det(A)$
- C $\det(B) = 2\det(A)$
- D nessuna delle precedenti

8. Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (10, 4), \mathbf{v}_2 = (-6, 15)$ in $\mathbb{R}^2$. Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una isometria lineare, allora l'insieme $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2)\}$

- A non è una base di $\mathbb{R}^2$
- B è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$
- C è una base non ortogonale di $\mathbb{R}^2$
- D è una base ortogonale ma non ortonormale di $\mathbb{R}^2$ ✓

9. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita, e $L : V \to W$ un'applicazione lineare

- A se $\dim(V) = \dim(W)$ e L è iniettiva, allora è anche suriettiva ✓
- B se $\dim(V) > \dim(W)$ e L è suriettiva, allora è anche iniettiva
- C se $\dim(V) > \dim(W)$, allora L è iniettiva
- D se $\ker(L) \neq \{\mathbf{0}\}$, allora $\dim(V) > \dim(W)$

10. Trovare la retta di $\mathbb{R}^3$ parallela ai piani

$$\pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_3 = 1\} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_2 = 2\},$$

e passante per il punto $(0, 1, 0)$.

- [A] $(0, 1, 0) + \mathrm{Span}(1, 0, 1)$
- [B] $(1, 2, 0) + \mathrm{Span}(1, 1, 0)$
- [C] $(2, -1, -2) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$ ✓
- [D] $(0, 2, 1) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 3, 2, 2]
In $\mathbb{R}^4$ considerare i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad W = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U e W.
2. Determinare una forma parametrica e cartesiana di $U + W$
3. Determinare la dimensione di $U \cap W$.
4. Rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$, determinare $U^\perp$ e $W^\perp$.

1. osservo che i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ sono L.I. quindi

$$\mathcal{B}_U = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad \dim U = 2.$$

Risolvo
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ -\cancel{x_3} - \cancel{x_4} + x_2 + \cancel{x_3} + \cancel{x_4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi,

$$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

che è una base e $\dim W = 2$.

2. $$U + W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ forma parametrica

Trovo la forma cartesiana: sia $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ t.c.

$$\begin{cases} (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 \\ (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} = 0 \\ (a_1, a_2, a_3, a_4)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0 \\ -a_1 + a_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = a_1 \\ a_1 + 2a_2 + 2a_1 = 0 \\ a_4 = a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = a_1 \\ a_2 = -\frac{3}{2}a_1 \\ a_4 = a_1 \end{cases}$$

cioè

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = t\left(1, -\frac{3}{2}, 1, 1\right)$$

e quindi

$$U+W = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

3. Dalla formula di Grassmann:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$$
$$= 2 + 2 - 3 = 1$$

siccome $\dim(U+W) = 3$.

4. $U^\perp$:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases} \qquad U^\perp = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$W^\perp$:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = x_1 \end{cases} \qquad W^\perp = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 2. [Punteggio: 2, 3, 3, 3]

In $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ considerare l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \times \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\left(A^T B\right) .$$

1. Dimostrare che è un prodotto scalare in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$.
2. Determinare, rispetto a questo prodotto scalare, il complemento ortogonale di
$$H = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
3. Determinare una base ortonormale di $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ rispetto a questo prodotto scalare.
4. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ su H, Rispetto a questo prodotto scalare.

1. Simmetria: osservo che per ogni matrice quadrata $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T)$ (le due matrici hanno la stessa diagonale), quindi

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}\left((A^T B)^T\right) = \mathrm{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle .$$

Bilinearità: segue dalle proprietà delle operazioni tra matrici e dal fatto che la traccia è lineare:

$$\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \mathrm{tr}\left((\alpha A + \beta B)^T C\right) = \mathrm{tr}(\alpha A^T C + \beta B^T C)$$

$$= \alpha\, \mathrm{tr}(A^T C) + \beta\, \mathrm{tr}(B^T C)$$

$$= \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle .$$

Definito positivo: Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e calcolo

$$\langle A, A \rangle = \mathrm{tr}(A^T A) = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \\ a_{12} a_{11} + a_{22} a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \geq 0$$

e $= 0$ sse $a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = 0$. e quindi $\langle A, A \rangle = 0$ sse $A = 0$.

2. $H^\perp$: $0 = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = tr \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = tr \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a+b$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = tr \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = tr \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = d$$

cioè $\begin{cases} a = -b \\ d = 0 \end{cases}$ quindi $H^\perp = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Osservo che

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = 1$$

quindi

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base o.n. di H

Inoltre,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{tr \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

quindi

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base o.n. di $H^\perp$.

Di conseguenza

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è base o.n di $Mat_{\mathbb{R}}(2,2)$.

4. osservo che

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\pi_H\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2\pi_H\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in H} + 4\pi_H\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in H} + 2\pi_H\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in H^\perp} - \pi_H\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in H^\perp}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$