Algebra Lineare

Appello di luglio – Parte B

05/07/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

Istruzioni

1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
2) La durata della Parte B è 60 minuti.
3) La Parte B contiene 2 esercizi, con un punteggio totale di 13 punti. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte verranno valutate nella loro interezza; pertanto, è importante fornire una soluzione chiara e giustificare i passaggi.
4) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, cuffie, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 1, 2, 1]

Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Trovare un valore di k per cui l'insieme delle soluzioni S del sistema ha dimensione 2.

b) Determinare una forma parametrica della retta $R \subseteq \mathbb{R}^4$ passante per i due punti $(2, 0, -1, -2)^\intercal$ e $(1, -1, 0, -1)^\intercal$.

c) Per il valore di k trovato nel punto (a), determinare la posizione reciproca dei sottospazi affini R e S.

d) Determinare l'immagine della retta R mediante l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da $L\big((x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal\big) = (x_2 + x_3, x_3 - x_4)^\intercal$.

Esercizio 2. [Punteggio: 2, 2, 2, 1]

Dato un endomorfismo $L : V \to V$, l'endomorfismo $L^3 : V \to V$ è definito come composizione $L^3(\mathbf{v}) = L(L(L(\mathbf{v})))$.

a) Sia L un endomorfismo tale che $L^3 = \mathrm{id}_V$. Dimostrare che L è un isomorfismo.

b) Sia L un endomorfismo tale che $L^3 = \mathrm{id}_V$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di L, dimostrare che $\lambda^3 = 1$.

c) Sia L un endomorfismo tale che $L^3 = \mathrm{id}_V$, e supponiamo che L sia diagonalizzabile. Dimostrare che $L = \mathrm{id}_V$.

d) Sia $L : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ l'endomorfismo $L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4)$. Dimostrare che L non è diagonalizzabile.