Esame Algebra Lineare – Febbraio 2024

Domande a risposta multipla.

1. Siano $A, B, C \in \mathrm{Mat}(2,2)$ matrici invertibili. Quale delle seguenti matrici è uguale a $(ABC)^{-1}(C^{-1}BA^{-1})^{-1}$?

(A) I_2

(B) B^{-2}

(C) $C^{-1}B^{-2}C$

(D) $A^{-1}B^{-1}C^{-1}CB^{-1}A$

2. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare, con $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(A) Se il sistema ammette un'unica soluzione allora $m = n$

(B) Se $m > n$ allora il sistema non ammette soluzioni

(C) Se $m < n$ allora il sistema non può ammettere un'unica soluzione

(D) Se $m = n$ allora $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$

3. Quale dei seguenti vettori appartiene a $\mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big)$?

(A) $(2,1,4)$

(B) $(2,1,-4)$

(C) $(1,1,-1)$

(D) $(1,1,1)$

4. Sia V uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$.

(A) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di V, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti

(B) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ generano V, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ generano V

(C) Se $\dim V = 4$, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di V

(D) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti

5. Le rette $r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = x_1 - x_2 = 1\}$ e $s = (0,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$

(A) sono coincidenti

(B) sono perpendicolari

(C) sono parallele

(D) sono sghembe

6. Dati due sottospazi $H, K \subseteq \mathbb{R}^9$ con $\dim H = \dim K = 5$

(A) $H \cap K \neq \{\mathbf{0}\}$
(B) $H + K \neq \mathbb{R}^9$
(C) $H \cup K$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^9$
(D) $\dim(H + K) \geq 6$

7. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la seguente applicazione lineare è suriettiva.

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + kx_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) $k = -2$
(B) $k \neq -2$
(C) per ogni $k \in \mathbb{R}$
(D) per nessun $k \in \mathbb{R}$

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$, e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ dei vettori non nulli tali che

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2, \quad A\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3.$$

(A) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \in \ker(A)$
(B) A è simile a una matrice diagonale
(C) A è simmetrica
(D) $\ker(A)$ è un autospazio di A

9. Una matrice $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ ha polinomio caratteristico $\chi_A(x) = -x(1-x)^2$.

(A) A è diagonalizzabile
(B) A non è diagonalizzabile
(C) A è invertibile
(D) A non è invertibile

10. Sia V uno spazio euclideo, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(A) $\langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
(B) $\langle 3\mathbf{v}, 3\mathbf{w} \rangle = 3\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
(C) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$
(D) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2)$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il nucleo $\ker(L)$ e la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(L)$.

b) Determinare la matrice $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ che rappresenta L rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left\{1+t, 1-t, t^2+t^3, t^2-t^3\right\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Determinare tre vettori $p_1(t), p_2(t), p_3(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ linearmente indipendenti e tali che le immagini $L\big(p_1(t)\big), L\big(p_2(t)\big), L\big(p_3(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

Esercizio 2. Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base ortonormale di H.

b) Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale $H^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$.

c) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_H(\mathbf{v})$ e $\pi_{H^\perp}(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v} = (3,4,5)^\intercal$ sui sottospazi H e $H^\perp$.

d) Determinare un'isometria lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T\big(\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\big) = H$, dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Soluzioni

Domande a risposta multipla.

1. Siano $A, B, C \in \mathrm{Mat}(2,2)$ matrici invertibili. Quale delle seguenti matrici è uguale a $(ABC)^{-1}(C^{-1}BA^{-1})^{-1}$?

(A) I_2

(B) B^{-2}

(C) $C^{-1}B^{-2}C$ ✓

(D) $A^{-1}B^{-1}C^{-1}CB^{-1}A$

$(ABC)^{-1})(C^{-1}BA^{-1})^{-1} = (C^{-1}B^{-1}A^{-1})((A^{-1})^{-1}B^{-1}(C^{-1})^{-1}) = C^{-1}B^{-1}A^{-1}AB^{-1}C = C^{-1}B^{-2}C$

2. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare, con $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

(A) Se il sistema ammette un'unica soluzione allora $m = n$

(B) Se $m > n$ allora il sistema non ammette soluzioni

(C) Se $m < n$ allora il sistema non può ammettere un'unica soluzione ✓

(D) Se $m = n$ allora $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$

Segue dal teorema di Rouché-Capelli

3. Quale dei seguenti vettori appartiene a $\mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big)$?

(A) $(2,1,4)$

(B) $(2,1,-4)$

(C) $(1,1,-1)$

(D) $(1,1,1)$ ✓

Riducendo la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

scopriamo che $\dim \mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big) = \dim \mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4),(1,1,1)\big) = 2$, quindi $\mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4)\big) = \mathrm{Span}\big((2,-3,2),(4,1,4),(1,1,1)\big)$.

4. Sia V uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$.

(A) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di V, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti ✓

(B) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ generano V, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ generano V

(C) Se $\dim V = 4$, allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di V

(D) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ sono linearmente dipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti

Un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è ancora linearmente indipendente.

5. Le rette $r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = x_1 - x_2 = 1\}$ e $s = (0,1,0)^\intercal + \mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$

(A) sono coincidenti

(B) sono perpendicolari

(C) sono parallele

(D) sono sghembe ✓

Nessun punto di $s = \{(t,1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ soddisfa $x_1 - x_3 = 1$, quindi $r \cap s = \emptyset$. Risolvendo il sistema, troviamo $r = (1,0,0) + \mathrm{Span}\big((1,1,1)^\intercal\big)$, quindi le due rette hanno direzioni diverse.

6. Dati due sottospazi $H, K \subseteq \mathbb{R}^9$ con $\dim H = \dim K = 5$

(A) $H \cap K \neq \{\mathbf{0}\}$ ✓

(B) $H + K \neq \mathbb{R}^9$

(C) $H \cup K$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^9$

(D) $\dim(H + K) \geq 6$

Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(H \cap K) = \dim H + \dim K - \dim(H+K) \geq \dim H + \dim K - \dim \mathbb{R}^9 = 5 + 5 - 9 = 1$.

7. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui la seguente applicazione lineare è suriettiva.

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + kx_2 - x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) $k = -2$

(B) $k \neq -2$ ✓

(C) per ogni $k \in \mathbb{R}$

(D) per nessun $k \in \mathbb{R}$

L è l'applicazione lineare associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, e L è suriettiva se e solo se $\mathrm{col}(A) = \mathbb{R}^2$, equivalentemente, $\mathrm{rk}(A) = 2$. Riducendo a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 4+2k & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che $\mathrm{rk}(A) = 2$ se e solo se $k \neq -2$.

8. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$, e siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ dei vettori non nulli tali che

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2, \quad A\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3.$$

(A) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \in \ker(A)$

(B) A è simile a una matrice diagonale ✓

(C) A è simmetrica

(D) $\ker(A)$ è un autospazio di A

La matrice A ha tre autovalori distinti, pertanto, è diagonalizzabile per il secondo criterio di diagonalizzabilità.

9. Una matrice $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ ha polinomio caratteristico $\chi_A(x) = -x(1-x)^2$.

(A) A è diagonalizzabile

(B) A non è diagonalizzabile

(C) A è invertibile

(D) A non è invertibile ✓

Vediamo che 0 è un autovalore di A, quindi, $\ker(A) \neq \{\mathbf{0}\}$ è un autospazio di A.

10. Sia V uno spazio euclideo, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(A) $\langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(B) $\langle 3\mathbf{v}, 3\mathbf{w} \rangle = 3\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(C) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$

(D) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2)$ ✓

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2 = \frac{1}{2}(\langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle)$$
$$= \frac{1}{2}(\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L\big(p(t)\big) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(-1) \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il nucleo $\ker(L)$ e la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(L)$.

b) Determinare la matrice $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ che rappresenta L rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \big\{1+t, 1-t, t^2+t^3, t^2-t^3\big\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

c) Determinare tre vettori $p_1(t), p_2(t), p_3(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ linearmente indipendenti e tali che le immagini $L\big(p_1(t)\big), L\big(p_2(t)\big), L\big(p_3(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti.

a) Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Abbiamo

$$p(t) \in \ker(L) \Leftrightarrow L\big(p(t)\big) = \mathbf{0} \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_3 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Concludiamo che $\ker(L) = \{-at + at^3 \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(-t + t^3)$. Dal teorema di nullità + rango deduciamo che $\dim \mathrm{Im}(L) = \dim \mathbb{R}[t]_{\leq 3} - \dim \ker(L) = 4 - 1 = 3$.

b) Calcoliamo le immagini dei vettori della prima base e scriviamo i risultati come combinazione lineare dei vettori della seconda base

$$L(1+t) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$L(1-t) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$L(t^2+t^3)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$L(t^2-t^3)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow [L(1+t)]_{\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

e concludiamo che $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}-1&1&-2&0\\2&-2&2&-2\\0&2&0&2\end{pmatrix}$.

c) E' sufficiente scegliere 3 vettori p_1,p_2,p_3 linearmente indiependenti il cui span contenga il nucleo $\ker(L)$: infatti, dal teorema di nullità + rango seuge che

$$\dim \operatorname{Span}(L(p_1),L(p_2),L(p_3))=\dim L(\operatorname{Span}(p_1,p_2,p_3))=$$

$$\dim \operatorname{Span}(p_1,p_2,p_3)-\dim\ker(L)=3-1=2$$

quindi $L(p_1),L(p_2),L(p_3)$ non sono linearmente indipendenti. Ad esempio, $1,t^2,-t+t^3$.

Esercizio 2. Considerare il sottospazio $H=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base ortonormale di H.
b) Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale $H^\perp\subseteq\mathbb{R}^3$.
c) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_H(\mathbf{v})$ e $\pi_{H^\perp}(\mathbf{v})$ del vettore $\mathbf{v}=(3,4,5)^\intercal$ sui sottospazi H e $H^\perp$.
d) Determinare un'isometria lineare $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che $T\big(\operatorname{Span}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\big)=H$, dove $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Risolvendo l'equazione lineare $x_1=-x_2-x_3$, troviamo la base $\{(1,-1,0)^\intercal,(1,0,-1)^\intercal\}$. Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$

$$\mathbf{b}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Dalla forma cartesiana di H segue immediatamente che $H^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, quindi una base ortonormale è data dal vettore $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Determiniamo prima la proiezione su $H^\perp$

$$\pi_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3+4+5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e deduciamo quella su H

$$\pi_H(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \pi_{H^\perp}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Basta considerare l'applicazione lineare T_A associata a una matrice ortogonale A le cui prime due colonne siano una base di H. Utilizzando i punti a) e b), una tale matrice è $A = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, che è ortogonale dato che $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.