Algebra Lineare – Esempio di Esame

Parte B – Soluzione

Esercizio 1. Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, e si considerino le basi di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}, \qquad \mathcal{C} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}.$$

Considerare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ è data da

$$A = M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\ker(A)$ e $\mathrm{col}(A)$.
2. Determinare una base di $\ker(L)$ e $\mathrm{Im}(L)$.

1. Effettuiamo operazioni sulle righe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_3, R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = A'.$$

Segue che $\ker(A) = \ker(A') = \{(x_1, x_2, x_3)^\intercal \mid x_2 = -3x_3, x_1 = 4x_3\}$, e una base è $\{(4, -3, 1)^\intercal\}$. Inoltre, segue che $\dim \mathrm{col}(A) = \mathrm{rk}(A) = 3 - \dim\ker(A) = 2$, quindi una base di $\mathrm{col}(A)$ è composta da due colonne L.I., ad esempio, $\{(2, 2, 1)^\intercal, (2, 3, 0)^\intercal\}$.

2. Dal teorema di rappresentazione abbiamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L"] & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "L_A"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P_{\mathcal{C}}"'] \end{tikzcd}$$

da cui $\ker(L) = P_{\mathcal{B}}(\ker(L_A)) = P_{\mathcal{B}}(\ker(A)), \mathrm{Im}(L) = P_{\mathcal{C}}(\mathrm{Im}(L_A)) = P_{\mathcal{C}}(\mathrm{col}(A))$. Abbiamo

$$P_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + y(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + z\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ y + z \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_2 + y(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + z(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} y \\ x + y + z \\ z \end{pmatrix}.$$

In conclusione, una base di $\ker(L)$ è $\{P_{\mathcal{B}}(4, -3, 1)^\intercal\} = \{(4, 1, -2)^\intercal\}$, e una base di $\mathrm{Im}(L)$ è $\{P_{\mathcal{C}}(2, 2, 1)^\intercal, P_{\mathcal{C}}(2, 3, 0)^\intercal\} = \{(2, 5, 1)^\intercal, (3, 5, 0)^\intercal\}$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & k+1 \\ 0 & -1 & 0 & k-1 \\ -2 & k & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile.
2. Sia $M = A_0$, la matrice dove poniamo $k = 0$. Determinare gli autospazi di M.
3. Sia $\mathbf{v} = (1, 2, -1, 0)^\intercal$. Calcolare $M^{2023}\mathbf{v}$.

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\chi_{A_k}(t) = \det \begin{pmatrix} 4-t & 0 & 3 & k+1 \\ 0 & -1-t & 0 & k-1 \\ -2 & k & -1-t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = (-1-t)\det \begin{pmatrix} 4-t & 0 & 3 \\ 0 & -1-t & 0 \\ -2 & k & -1-t \end{pmatrix}$$
$$= (-1-t)^2 \det \begin{pmatrix} 4-t & 3 \\ -2 & -1-t \end{pmatrix} = (-1-t)^2\big[(4-t)(-1-t)+6\big]$$
$$= (-1-t)^2(t^2-3t+2) = (-1-t)^2(t-1)(t-2)$$

Gli autovalori di A_k sono $-1, 1, 2$ con molteplicità algebrica $a_{-1} = 2, a_1 = a_2 = 1$. Segue che A_k è diagonalizzabile se e solo se $g_{-1} = 2$. Consideriamo l'autospazio E_{-1}

$$E_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \\ -2 & k & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che le colonne C_1 e C_3 sono sempre linearmente indipendenti, $C_2 \in \operatorname{Span}(C_1, C_3)$, mentre $C_4 \in \operatorname{Span}(C_1, C_3)$ se e solo se $k - 1 = 0$. Segue che il rango è 3 se $k \neq 1$, 2 se $k = 1$; quindi, $g_{-1} = 4 - 3 = 1$ se $k \neq 1$, $g_{-1} = 4 - 2 = 2$ se $k = 1$. In conclusione, A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$.

2. Poniamo $k = 0$. Dal punto precedente, sappiamo che tutti i 3 autospazi hanno dimensione uguale a 1. Calcoliamo

$$E_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Scriviamo $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di autovettori

$$\mathbf{v} = (1,2,-1,0)^\intercal = 2(0,1,0,0)^\intercal + (1,0,-1,0)^\intercal$$

e applichiamo M^{2023}

$$\begin{aligned} M^{2023}\mathbf{v} &= M^{2023}\big(2(0,1,0,0)^\intercal + (1,0,-1,0)^\intercal\big) \\ &= 2M^{2023}(0,1,0,0)^\intercal + M^{2023}(1,0,-1,0)^\intercal \\ &= 2(-1)^{2023}(0,1,0,0)^\intercal + (1)^{2023}(1,0,-1,0)^\intercal \\ &= -2(0,1,0,0)^\intercal + 1\cdot(1,0,-1,0)^\intercal = (1,-2,-1,0)^\intercal. \end{aligned}$$