Algebra Lineare – Appello di gennaio – Parte A – Soluzioni

1. Trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema lineare ammette soluzioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 + kx_3 - x_4 & = 2 \\ x_3 - x_4 & = 2 \end{cases}$$

(A) $k = 1$

(B) $k \neq 1$

(C) per nessun $k \in \mathbb{R}$

(D) per ogni $k \in \mathbb{R}$ ✓

Riduciamo a scala la matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1) & -2(k-1) \end{pmatrix}$$

Per ogni k, otteniamo una matrice completa a scala senza pivot nella colonna dei termini noti. Segue che il sistema lineare ha sempre soluzioni.

2. Date due soluzioni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(A) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(B) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \ker(A)$

(C) $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$ è una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ ✓

(D) $2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 \in \ker(A)$

Abbiamo $A(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2) = 2A\mathbf{v}_1 - 3A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{b} - 3\mathbf{b} = -\mathbf{b}$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi non è un sottospazio vettoriale?

(A) $\{(s+t, s-t, 2s+3t, 4t)^{\intercal} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(B) $\{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid \det(A) = 0\} \subseteq \mathrm{Mat}(2,2)$ ✓

(C) $\{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \mid p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(D) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = x_2 - x_4 = 0\}$

Basta considerare, ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare con $\ker(L) = \mathrm{Span}\big((1,1,0,0)^\intercal, (0,0,1,1)^\intercal\big)$.

(A) L è iniettiva

(B) L è suriettiva ✓

(C) $(1,-1,1,-1)^\intercal \in \ker(L)$

(D) $\mathrm{Im}(L) \perp \ker(L)$

Segue dal teorema di nullità + rango: $\dim \mathrm{Im}(L) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \ker(L) = 4 - 2 = 2$.

5. Sia $A = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4) \in \mathrm{Mat}(4,4)$, dove $\mathbf{c}_i$ è l'i-esima colonna di A. Considerare la matrice $B = (\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) \in \mathrm{Mat}(4,4)$.

(A) $\det(B) = 3\det(A)$ ✓

(B) $\det(B) = 2\det(A)$

(C) $\det(B) = -6\det(A)$

(D) $\det(B) = \det(A)$

$\det(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) = -\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, -3\mathbf{c}_4) = +3\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_4, \mathbf{c}_4) = 3\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$.

6. Quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice ha due autovalori diversi $1, 2$, necessariamente con molteplicità geometrica uguale a 1. La conclusione segue dal secondo criterio di diagonalizzabilità.

7. Trovare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2,0,-2)^\intercal$ e $\mathbf{w} = (1,2,-2)^\intercal$.

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$ ✓

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

$\cos(\widehat{\mathbf{vw}}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{2+0+4}{\sqrt{2^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi $\widehat{\mathbf{vw}} = \frac{\pi}{4}$.

8. Sia V uno spazio euclideo e $H \subseteq V$ un sottospazio.

(A) La proiezione ortogonale $\pi_H : V \to V$ è un isomorfismo

(B) il complemento ortogonale $H^\perp$ soddisfa $\dim H = \dim H^\perp$

(C) l'unione di una base di H e una base di $H^\perp$ è una base di V ✓

(D) $\pi_H(H) = H^\perp$

Segue dal fatto che $V = H + H^\perp$ e $H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

9. Quale delle seguenti matrici è ortogonale?

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Le due colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

10. Una matrice simmetrica $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$ ha polinomio caratteristico $\chi_A(x) = (1-x)(2-x)^2$. Un autospazio di A è $\mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)$. Qual è l'altro autospazio di A?

(A) $\mathrm{Span}\big((1,0,0)^\intercal, (0,0,1)^\intercal\big)$

(B) $\mathrm{Span}\big((0,1,0)^\intercal\big)$

(C) $\mathrm{Span}\big((0,0,0)^\intercal\big)$

(D) $\mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$ ✓

Dal teorema spettrale segue che autospazi diversi sono ortogonali. Dal polinomio caratteristico scopriamo che A ha due autospazi, E_1 e E_2. Segue che l'uno è il complemento ortogonale dell'altro, quindi la risposta è $\mathrm{Span}\big((1,0,1)^\intercal\big)^\perp = \mathrm{Span}\big((1,0,-1)^\intercal, (0,1,0)^\intercal\big)$.