Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Secondo Appello – 14 febbraio 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ______________________________

Codice Persona: ____________________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

Parte A (10 punti)

1. Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 3y - z = 3 \\ 2x + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

- [A] ammette infinite soluzioni
- [B] ammette due soluzioni
- [C] ammette un'unica soluzione ✓
- [D] non ammette soluzioni

2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$

- [A] non è invertibile per $k = 5$
- [B] non è invertibile per $k = \frac{10}{3}$ ✓
- [C] è invertibile per $k = 1$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
- [D] è invertibile per $k = 0$ e l'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. Trovare la retta perpendicolare alle due rette

$$r_1 = (1, 0, 2) + \mathrm{Span}(0, 1, 0), \qquad r_2 = (2, 1, 0) + \mathrm{Span}(0, 0, 1)\,.$$

- [A] $(0, 1, 2) + \mathrm{Span}(1, 0, 0)$ ✓
- [B] $(0, 2, 1) + \mathrm{Span}(1, 0, 0)$
- [C] $(1, 0, 2) + \mathrm{Span}(1, 0, 0)$
- [D] $(2, 1, 0) + \mathrm{Span}(1, 0, 0)$

4. Quale dei seguenti sottoinsiemi è un sottospazio vettoriale?

   A $\{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   B $\{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ✓
   C $\{(0, t^2) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
   D $\{(t, 1) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(3, 3)$ una matrice diagonalizzabile con $\chi_A(x) = -x(3 + x)^2$. Allora

   A $\dim\ker(A + 3I_3) = 2$ ✓
   B A è invertible
   C A è simmetrica
   D Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di A

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2, 2)$ una matrice simile a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

   A $\mathrm{rk}(A) = 2$
   B $\det(A) = 4$
   C $\chi_A(x) = (1 - x)^2$
   D $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non è suriettiva ✓

7. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ i suoi autovalori distinti. Quali delle seguenti condizioni è impossibile?

   A $r = 0$
   B $\sum_{i=1}^{r} g_{\lambda_i} < \sum_{i=1}^{r} a_{\lambda_i}$
   C $\sum_{i=1}^{r} g_{\lambda_i} > n$ ✓
   D $\sum_{i=1}^{r} a_{\lambda_i} < n$

8. Sia V uno spazio euclideo e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tali che $\|\mathbf{v}\| = 3, \|\mathbf{w}\| = 5$. Quali dei seguenti valori di $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ è possibile?

   A $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 4$ ✓
   B $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0$
   C $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 1$
   D $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 9$

9. Sia $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ una matrice ortogonale. Allora

   A $\det A = \pm 1$ ✓
   B $\det A = 0$
   C $\det A = \pm\sqrt{2}$
   D $\det(A) = 1$

10. In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ il vettore delle coordinate del polinomio $p(t) = 2 + 3t + t^2$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1 + t, 2t, t^2\}$ è

   A $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   B $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   C $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓
   D $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2,3,3,2]
In $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \,:\, p(1) = 2p(0)\} \quad \text{e} \quad W = \text{Span}\{t-1, t^2\}\,.$$

1. Determinare una base di U e di W.
2. Determinare una base di $U \cap W$ e di $U + W$.
3. Si scriva (se possibile) il polinomio $p(t) = t$ come somma di un polinomio di U e di un polinomio di W. C'è un'unica soluzione? Perché?
4. Stabilire se la funzione $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ definita da

$$L(p(t)) = p(1) - 2p(0)$$

è un'applicazione lineare. In caso affermativo trovare basi dell'immagine e del nucleo.

1) Base di U: se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U \iff p(1) = 2p(0)$

$$\iff a_0 + a_1 + a_2 = 2a_0 \iff a_0 = a_1 + a_2,$$

cioè $U = \text{Span}\{1+t, 1+t^2\}$ che essendo L.I. sono una base di U.
Quindi

$$\mathcal{B}_U = \{1+t, 1+t^2\}.$$

Base di W: i polinomi $t-1$ e t^2 sono L.I. quindi $\mathcal{B}_W = \{t-1, t^2\}$

2) $p(t) \in U \cap W$ se può essere scritto come comb. lineare degli elementi di $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$, cioè

$$p(t) = \alpha(1+t) + \beta(1+t^2) \quad \text{e} \quad p(t) = \gamma(t-1) + \delta t^2 \qquad (\bullet)$$

da cui

$$\alpha(1+t) + \beta(1+t^2) = \gamma(t-1) + \delta t^2$$

cioè

$$\alpha + \beta + \gamma + (\alpha - \gamma)t + (\beta - \delta)t^2 = 0$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \beta - \delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = \gamma \\ \delta = -2\gamma \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Scelgo $K=1$ e sostituisco $\alpha = 1$ e $\beta = -2$ in $(\bullet)$ e trovo $p(t) = 1+t-2(1+t^2) = -1+t-2t^2$.
Di conseguenza

$$\mathcal{B}_{U \cap W} = \{-1+t-2t^2\}.$$

Dalle formule di Grassmann sappiamo:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W) = 2+2-1 = 3$$

e siccome $U+W \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ ho $U+W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ e una base è

$$\mathcal{B}_{U+W} = \{1, t, t^2\}.$$

3) Siccome $U+W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ sicuramente il polinomio $p(t)=t$ potrà essere scritto come somma di un elemento in U e di un elemento in W. Non mi aspetto un'unica soluzione visto che $U\cap W \neq \emptyset$. Scrivo

$$t = \lambda_1(1+t) + \lambda_2(1+t^2) + \lambda_3(t-1) + \lambda_4 t^2$$

cioè

$$t = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_3)t + (\lambda_2 + \lambda_4)t^2$$

cioè

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_4 \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ \lambda_2 = -\lambda_4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\lambda_4 + 1}{2} \\ \lambda_3 = \frac{1-\lambda_4}{2} \\ \lambda_2 = -\lambda_4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K+1}{2} \\ -K \\ \frac{1-K}{2} \\ K \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{R}$$

quindi

$$t = \frac{K+1}{2}(1+t) - K(1+t^2) + \frac{1-K}{2}(t-1) + Kt^2 \qquad \forall K \in \mathbb{R}.$$

Si vede che non c'è un'unica soluzione.

4) $L(p(t)+q(t)) = p(1) + q(1) - 2[p(0) + q(0)] = p(1) - 2p(0) + q(1) - 2q(0) = L(p(t)) + L(q(t))$

$L(\lambda p(t)) = \lambda p(1) - 2\lambda p(0) = \lambda L(p(t))$.

Quindi L è applicazione lineare.

$\operatorname{Ker} L$: $L(p(t)) = 0 \iff p(1) - 2p(0) = 0 \iff p(t) \in U \Rightarrow \operatorname{Ker} L = U$ e

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(L)} = \mathcal{B}_U.$$

$\operatorname{Im} L$: da nullità + rango: $\dim \operatorname{Im}(L) = \dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 2}) - \dim \operatorname{Ker} L = 3 - 2 = 1$

quindi $\operatorname{Im}(L) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}(L)} = \{1\}$.

Esercizio 2. [Punteggio: 1, 3, 2, 2, 2]

In $\mathbb{R}^2$, considerare l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \,.$$

1. Dimostrare che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\intercal A \mathbf{y}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Dimostrare che è un prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$.
3. Determinare il complemento ortogonale di $H = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a questo prodotto scalare.
4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questo prodotto scalare.
5. Rispetto a questo prodotto scalare, determinare la proiezione ortogonale $\pi_H(\mathbf{v})$ del $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sul sottospazio H.

1) $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle.$

2) $\langle \alpha \underline{x} + \beta \underline{z}, \underline{y} \rangle = (\alpha \underline{x} + \beta \underline{z})^T A \underline{y} = \alpha \underline{x}^T A \underline{y} + \beta \underline{z}^T A \underline{y} = \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{z}, \underline{y} \rangle$

$\langle \underline{x}, \alpha \underline{y} + \beta \underline{z} \rangle = \underline{x}^T A (\alpha \underline{y} + \beta \underline{z}) = \alpha \underline{x}^T A \underline{y} + \beta \underline{x}^T A \underline{z} = \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$ bilineare

$\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = \underline{y}^T A \underline{x} \underset{\underline{y}^T A \underline{x} \in \mathbb{R}}{=} (\underline{y}^T A \underline{x})^T = \underline{x}^T A^T \underline{y} \underset{A \text{ simmetrica}}{=} \underline{x}^T A \underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ simmetrico

$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_2x_1 = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$

e $= 0$ sse $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ sse $\underline{x} = \underline{0}$. Def. positivo

3) Cerco $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \iff 2x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 2x_1$

Quindi $H^\perp = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4) I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono ortogonali e quindi LI e di conseguenza $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$. Calcolo:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{6}.$$

Quindi $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è base o.n. di $\mathbb{R}^2$.

5) $\mathcal{B}_H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è base o.n. di H, calcolo:

$$\Pi_H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (2a - b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$