

Algebra Lineare

Appello di giugno – Parte B

10/06/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

Istruzioni

- 1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
- 2) La durata della Parte B è 60 minuti.
- 3) La Parte B contiene 2 esercizi, con un punteggio totale di 13 punti. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte verranno valutate nella loro interezza; pertanto, è importante fornire una soluzione chiara e giustificare i passaggi.
- 4) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, cuffie, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 2, 2]

Sia $V = \text{Mat}(2, 2)$ e sia $M \in V$ una matrice fissata. Considerare l'insieme

$$H = \{A \in \text{Mat}(2, 2) \mid AM = MA\} \subseteq V$$

formato da tutte la matrici che commutano con M .

- a) Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di V .
- b) Trovare un endomorfismo $L : V \rightarrow V$ tale che $\ker(L) = H$.
- c) Determinare una base di H nel caso in cui $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. [Punteggio: 3, 1, 3]

Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Considerare l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$L_k(p(t)) = \begin{pmatrix} p(k) - p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

- a) Determinare una base di $\text{Im}(L_k)$ e di $\ker(L_k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- b) Determinare i valori di k per cui L_k è iniettiva.
- c) Determinare la matrice rappresentativa di L_k rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{t - 1, t + 2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$