Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Quarto Appello – 23 luglio 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ______________________________

Codice Persona: ____________________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e <u>non vanno consegnati</u>.

Parte A (10 punti)

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il piano π e la retta r dati da

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y + 2z = 3 \right\} \quad \text{e} \quad r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- [A] La retta r è contenuta nel piano π
- [B] La retta r intereseca il piano π in due punti
- [C] La retta r intereseca il piano π in un punto
- [D] La retta r non intereseca il piano π

2. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ due soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Allora

- [A] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- [B] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 1$
- [C] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 + c_2 = 0$
- [D] $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$

3. Quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale?

- [A] $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 x_2 = 0\}$
- [B] $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 - x_2^2 = 0\}$
- [C] $\{(a + b, b + c) \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- [D] $\{(a, b^2) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$

4. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$:

$$H_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \,:\, p(1) = 0\} \quad \text{e} \quad H_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \,:\, p(2) = 0\}.$$

Allora

- [A] $\dim(H_1 \cap H_2) = 0$
- [B] $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$
- [C] $\dim(H_1 \cap H_2) = 2$
- [D] $\dim(H_1 \cap H_2) = 3$

5. Sia $A \in \mathrm{Mat}(2, 2)$ tale che $A^2 = 0$. Allora

- [A] $A = 0$
- [B] $\mathrm{rk}(A) = 0$
- [C] $\mathrm{rk}(A) = 1$
- [D] $\dim(\ker A) \geq 1$

6. Sia $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$, e si considerino le applicazioni lineari $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $T_{A^\intercal} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

   - [A] se $n \geq m$, allora T_A è suriettiva
   - [B] se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è suriettiva
   - [C] se T_A è suriettiva, allora $T_{A^\intercal}$ è iniettiva
   - [D] se T_A è invertibile, allora $T_{A^\intercal} = (T_A)^{-1}$

7. La proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (5,5,5)^\intercal$ sul piano di equazione $x - 2z = 0$ è

   - [A] $(-1,0,2)^\intercal$
   - [B] $(-1,5,2)^\intercal$
   - [C] $(6,0,3)^\intercal$
   - [D] $(6,5,3)^\intercal$

8. Un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ è

   - [A] 0
   - [B] 1
   - [C] 2
   - [D] 3

9. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro, allora

   - [A] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A è sempre suriettiva
   - [B] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A è sempre iniettiva
   - [C] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A è iniettiva per un solo valore di λ
   - [D] l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ associata a A non è mai suriettiva

10. Sia V uno spazio euclideo e $H_1, H_2, H_3 \subseteq V$ sottospazi tali che $H_3 \subseteq H_1^\perp$ e $H_3 \subseteq H_2^\perp$. Allora

    - [A] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3$
    - [B] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim V - \dim H_3^\perp$
    - [C] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim H_3$
    - [D] $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim(H_1 + H_2)^\perp$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2,3,4]
In $\mathbb{R}^3$, si consideri la seguente retta

$$r_1 \, : \, \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

1. Trovare la retta r_2 parallela a r_1 e passante per $(2, 1, 4)$.
2. Trovare il piano contenente r_1 e r_2.
3. Trovare la retta perpendicolare a r_1 e passante per $(6, -1, 3)$.

Esercizio 2. [Punteggio: 2,2,3,4]
Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y+2z \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

2. Stabilire se T è diagonalizzabile.

3. Trovare la matrice rappresentativa di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Stabilire se le matrici del punto 1. e del punto 3. sono simili. In caso affermativo trovare la matrice invertibile che realizza la similitudine.