

Domande a risposta multipla.

1. Siano $A, B \in \text{Mat}(n, n)$ due matrici quadrate.

- (A) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- (B) $\det(AB) = \det(BA)$
- (C) $\det(3A) = 3 \det(A)$
- (D) $\det(A^3) = 3 \det(A)$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2x + y \\ kx + y \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (2, 0, 4)^\top$ appartiene all'immagine $\text{Im}(L_k)$?

- (A) $k = 2$
- (B) $k \neq 2$
- (C) $k = -2$
- (D) $k \neq -2$

3. Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e l'insieme di vettori $\mathcal{S} = \{(1, 2, 0)^\top, (1, 1, -1)^\top, (0, 1, 1)^\top\}$.

- (A) \mathcal{S} è una base di H
- (B) \mathcal{S} è un insieme di generatori di H ma non una base
- (C) \mathcal{S} è un insieme di vettori linearmente indipendenti ma non genera H
- (D) nessuna delle altre risposte

4. Trovare il più piccolo sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^4$ che contiene entrambi i sottospazi

$$H_1 = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5)) \quad \text{e} \quad H_2 = \text{Span}((0, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 7))$$

- (A) $H_1 = \text{Span}((1, 1, 1, 1))$
- (B) $H = \text{Span}((1, 4, 7, 10), (3, 6, 9, 12))$
- (C) $H = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (0, 2, 4, 6))$
- (D) $H = \mathbb{R}^4$

5. Quale delle seguenti matrici è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. I piani $\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\}$ e $\beta = (1, 1, 1)^\top + \text{Span}((1, 2, 1)^\top, (3, 0, -1)^\top)$

(A) sono coincidenti

(B) sono paralleli

(C) sono incidenti

(D) sono sghembi

7. Quale delle seguenti matrici M soddisfa $M^\top M = I_3$?

(A) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(C) $M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Sia $A \in \text{Mat}(n, n)$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico $\chi_A(x)$, e sia $k \in \mathbb{R}$ un numero reale.

(A) Se $\chi_A(k) = 0$ allora $\dim \ker(A) > 0$

(B) Se $\chi_A(k) \neq 0$ allora $\ker(A - kI_n) = \{\mathbf{0}\}$

(C) Se $\chi_A(0) = 0$ allora A è invertibile

(D) $\chi_A(k) = \dim \ker(A - kI_n)$

9. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2, -2, 2, -2)$ e $\mathbf{w} = (3, 3, -3, 3)$ in \mathbb{R}^4 .

(A) $\frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) $\frac{4\pi}{3}$

10. Quale delle seguenti applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è uguale a una proiezione ortogonale $\pi_H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, per un opportuno sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^3$?

(A) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

(B) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

(C) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z \\ z \end{pmatrix}$

(D) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}$

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Sia $V = \text{Mat}(2, 2)$ e sia $M \in V$ una matrice fissata. Considerare l'insieme

$$H = \{A \in \text{Mat}(2, 2) \mid AM = MA\} \subseteq V$$

formato da tutte la matrici che commutano con M .

- Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di V .
- Trovare un endomorfismo $L : V \rightarrow V$ tale che $\ker(L) = H$.
- Determinare una base di H nel caso in cui $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Considerare l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$L_k(p(t)) = \begin{pmatrix} p(k) - p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

- Determinare una base di $\text{Im}(L_k)$ e di $\ker(L_k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- Determinare i valori di k per cui L_k è iniettiva.
- Determinare la matrice rappresentativa di L_k rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{t - 1, t + 2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

SOLUZIONI

Domande a risposta multipla.

1. Siano $A, B \in \text{Mat}(n, n)$ due matrici quadrate.

- (A) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- (B) $\det(AB) = \det(BA)$ ✓
- (C) $\det(3A) = 3 \det(A)$
- (D) $\det(A^3) = 3 \det(A)$

Dal teorema di Binet abbiamo $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA)$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$L_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2x + y \\ kx + y \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v} = (2, 0, 4)^\top$ appartiene all'immagine $\text{Im}(L_k)$?

- (A) $k = 2$ ✓
- (B) $k \neq 2$
- (C) $k = -2$
- (D) $k \neq -2$

Abbiamo $\mathbf{v} \in \text{Im}(L_k)$ se e solo se esiste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tale che $L_k(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$, se e solo se

$A_k \mathbf{x} = \mathbf{v}$ ammette soluzioni, dove $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ rappresenta L_k rispetto alle basi

canoniche. Dato che $\text{rk}(A_k) = 2$ per ogni k (le prime due righe sono L.I.), dal teorema di Rouché-Capelli questo è equivalente a $\text{rk}(A_k|\mathbf{v}) = 2$, o ancora a $\det(A_k|\mathbf{v}) = 0$.

$$\det(A_k|\mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix} = -4 - 2k + 8 = 4 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

3. Considerare il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e l'insieme di vettori $\mathcal{S} = \{(1, 2, 0)^\top, (1, 1, -1)^\top, (0, 1, 1)^\top\}$.

- (A) \mathcal{S} è una base di H
- (B) \mathcal{S} è un insieme di generatori di H ma non una base
- (C) \mathcal{S} è un insieme di vettori linearmente indipendenti ma non genera H
- (D) nessuna delle altre risposte ✓

Si vede subito che $(1, 1, -1)^\top \notin H$, quindi \mathcal{S} non genera H . Inoltre i vettori sono L.D.:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0.$$

4. Trovare il più piccolo sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^4$ che contiene entrambi i sottospazi

$$H_1 = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5)) \quad \text{e} \quad H_2 = \text{Span}((0, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 7))$$

(A) $H_1 = \text{Span}((1, 1, 1, 1))$

(B) $H = \text{Span}((1, 4, 7, 10), (3, 6, 9, 12))$

(C) $H = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (0, 2, 4, 6)) \quad \checkmark$

(D) $H = \mathbb{R}^4$

Il sottospazio cercato è la somma $H_1 + H_2 = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (0, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 7))$.

Il quarto generatore è ridondante, in quanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Quale delle seguenti matrici è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

La matrice è simmetrica quindi diagonalizzabile. Gli autovalori sono le radici di

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (2-x) \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)((1-x)^2 - 1^2) = (2-x)(1-x-1)(1-x+1) = x(2-x)^2\end{aligned}$$

e quindi sono 0, 2, 2. Gli stessi calcoli mostrano che lo stesso è vero per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Pertanto, le matrici sono simili, in quanto entrambe sono simili a } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. I piani $\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\}$ e $\beta = (1, 1, 1)^\top + \text{Span}((1, 2, 1)^\top, (3, 0, -1)^\top)$

(A) sono coincidenti

(B) sono paralleli ✓

(C) sono incidenti

(D) sono sghembi

I piani non sono coincidenti in quanto $(1, 1, 1)^\top \notin \alpha$. La giacitura di α è il sottospazio $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. Dato che $(1, 2, 1)^\top, (3, 0, -1)^\top \in H$ e sono L.I. concludiamo che α e β hanno la stessa giacitura, e quindi sono paralleli.

7. Quale delle seguenti matrici M soddisfa $M^\top M = I_3$?

(A) $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(C) $M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(D) $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Una matrice M soddisfa $M^\top M = I_3$ se e solo se è ortogonale, cioè le sue colonne formano una base ortonormale di \mathbb{R}^3 . La matrice in (D) è evidentemente ortogonale.

8. Sia $A \in \text{Mat}(n, n)$ una matrice quadrata con polinomio caratteristico $\chi_A(x)$, e sia $k \in \mathbb{R}$ un numero reale.

- (A) Se $\chi_A(k) = 0$ allora $\dim \ker(A) > 0$
- (B) Se $\chi_A(k) \neq 0$ allora $\ker(A - kI_n) = \{\mathbf{0}\}$ ✓
- (C) Se $\chi_A(0) = 0$ allora A è invertibile
- (D) $\chi_A(k) = \dim \ker(A - kI_n)$

Se $\chi_A(k) \neq 0$ allora k non è un autovalore di A , quindi non esistono autovettori di A associati a 0 , cioè il sottospazio $\ker(A - kI_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene solo $\mathbf{0}$.

9. Calcolare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v} = (2, -2, 2, -2)$ e $\mathbf{w} = (3, 3, -3, 3)$ in \mathbb{R}^4 .

- (A) $\frac{2\pi}{3}$ ✓
- (B) $\frac{3\pi}{4}$
- (C) $\frac{3\pi}{2}$
- (D) $\frac{4\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{vw}}) &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{(2)(3) + (-2)(3) + (2)(-3) + (-2)(3)}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (2)^2 + (-2)^2} \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (3)^2}} \\ &= \frac{-12}{\sqrt{16}\sqrt{36}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\mathbf{vw}} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

10. Quale delle seguenti applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è uguale a una proiezione ortogonale $\pi_H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, per un opportuno sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^3$?

- (A) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ✓
- (B) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$
- (C) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z \\ z \end{pmatrix}$
- (D) $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}$

E' la proiezione ortogonale sul sottospazio $H = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, come si vede immediatamente utilizzando la base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ di H .

Domande a risposta aperta. Esercizio 1. Sia $V = \text{Mat}(2, 2)$ e sia $M \in V$ una matrice fissata. Considerare l'insieme

$$H = \{A \in \text{Mat}(2, 2) \mid AM = MA\} \subseteq V$$

formato da tutte la matrici che commutano con M .

- a) Dimostrare che H è un sottospazio vettoriale di V .
- b) Trovare un endomorfismo $L : V \rightarrow V$ tale che $\ker(L) = H$.
- c) Determinare una base di H nel caso in cui $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice nulla $O \in \text{Mat}(2, 2)$ soddisfa $AO = O = OA$, quindi $O \in H$.

Se $A_1, A_2 \in H$ allora

$$A_1M = MA_1, A_2M = MA_2 \Rightarrow A_1M + A_2M = MA_1 + MA_2 \Rightarrow (A_1 + A_2)M = M(A_1 + A_2)$$

quindi $A_1 + A_2 \in H$. Se $A \in H, c \in \mathbb{R}$ allora

$$AM = MA \Rightarrow cAM = cMA \Rightarrow (cA)M = M(cA)$$

quindi $cA \in H$. Concludiamo che H è un sottospazio vettoriale di $\text{Mat}(2, 2)$.

b) L'esempio naturale è $L : \text{Mat}(2, 2) \rightarrow \text{Mat}(2, 2)$ definita da $L(A) = AM - MA$. Verifichiamo che L è un'applicazione lineare: se $A_1, A_2 \in V, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} L(c_1A_1 + c_2A_2) &= (c_1A_1 + c_2A_2)M - M(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1A_1M + c_2A_2M - c_1MA_1 - c_2MA_2 \\ &= c_1A_1M - c_1MA_1 + c_2A_2M - c_2MA_2 = c_1(A_1M - MA_1) + c_2(A_2M - MA_2) = c_1L(A_1) + c_2L(A_2) \end{aligned}$$

E' ovvio che $\ker(L) = H$, per definizione di H .

c) Cerchiamo le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tali che

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

sia uguale a

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \Rightarrow H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

da cui, essendo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ due vettori linearmente indipendenti, una base di H è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Considerare l'applicazione lineare $L_k : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$L_k(p(t)) = \begin{pmatrix} p(k) - p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}$$

- a) Determinare una base di $\text{Im}(L_k)$ e di $\ker(L_k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- b) Determinare i valori di k per cui L_k è iniettiva.
- c) Determinare la matrice rappresentativa di L_k rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \{t - 1, t + 2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Abbiamo $\mathbb{R}[t]_{\leq 1} = \text{Span}(1, t)$ quindi

$$\text{Im}(L_k) = L_k(\mathbb{R}[t]_{\leq 1}) = L_k(\text{Span}(1, t)) = \text{Span}(L_k(1), L_k(t)) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Se $k \neq 0$, i vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $\text{Im}(L_k)$.

Dal teorema di nullità+rango, $\dim \ker(L_k) = \dim \mathbb{R}[t]_{\leq 1} - \dim \text{Im}(L_k) = 2 - 2 = 0$, quindi la base di $\ker(L_k)$ è l'insieme vuoto. In particolare, $\ker(L_k) = \{\mathbf{0}\}$, quindi L_k è iniettiva e una base di $\ker(L_k)$ è l'insieme vuoto. Se $k = 0$, i due vettori sono linearmente dipendenti, e una base di $\text{Im}(L_0)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Il nucleo di L_0 è

$$\ker(L_0) = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \mid p(-1) = 0\} = \{a + bt \mid a - b = 0\} = \text{Span}(1 + t)$$

e una base di $\ker(L_0)$ è $\{1 + t\}$. Essendo $\ker(L_0) \neq \{\mathbf{0}\}$, segue che L_0 non è iniettiva.

Calcoliamo le immagini dei vettori di \mathcal{B}

$$L_k(t - 1) = \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}, \quad L_k(t + 2) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le scriviamo come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{C}

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} &= c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k+8 \\ -2k-6 \end{pmatrix}$,
 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k-4 \\ -2k+3 \end{pmatrix}$, e infine

$$M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = ([t-1]_{\mathcal{C}}, [t+2]_{\mathcal{C}}) = \begin{pmatrix} 3k+8 & 3k-4 \\ -2k-6 & -2k+3 \end{pmatrix}.$$