Algebra Lineare 2025/26 – Scheda Esercizi 2

Alcuni esercizi contengono un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$. Discutere come varia la risposta al variare di λ.

1. Matrici a scala e rango

Esercizio 1. Ridurre le seguenti matrici a scala utilizzando l'algoritmo di Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare il rango delle seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3\lambda & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 4 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Sistemi lineari

Esercizio 3. Per ciascuno sistema lineare, scrivere la matrice completa e, applicando l'algoritmo di Gauss o l'algoritmo di Gauss-Jordan, determinare l'insieme delle soluzioni S. Scrivere il risultato nella forma $S = \left\{\mathbf{w} + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_p\mathbf{v}_p \,:\, t_i \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ dove $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$.

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 1 = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 4. Utilizzare il teorema di Rouché-Capelli per determinare se i seguenti sistemi lineari ammettono un'unica soluzione, infinite soluzioni, o nessuna soluzione. Nota: non è necessario determinare l'insieme delle soluzioni.

$$(a)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ y+\ \ z=0 \\ y-2z=1 \\ x-2y-3z=3 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\qquad\ \ =1 \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+x_3 \qquad =2 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=\lambda \\ \lambda x_1+\ \ x_2+2x_3=2 \\ x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=0 \end{cases} \qquad (d)\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=2 \\ x_2-3x_3 \qquad\quad =2 \\ 2x_1+x_2+5x_3+2x_4=\lambda^2-\lambda \end{cases}$$

3. Algebra delle matrici

Esercizio 5. Considerare le seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&0&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

(a) Quali coppie di matrici possono essere sommate? Quali possono essere moltiplicate?
(b) Calcolare: $A+C, AB, (EA)B, (BE)C, (AE)+D, EE^\intercal, AC^\intercal$.
(c) Per ciascuna delle seguenti coppie, determinare se è possibile calcolare entrambi i prodotti, e se il risultato è lo stesso (nota: non è necessario svolgere i prodotti).

$$(EA)B \text{ e } E(AB), \qquad AE \text{ e } EA, \qquad CD \text{ e } DC.$$

Esercizio 6. Per ciascuna coppia $A, \mathbf{b}$, trovare l'insieme S delel soluzioni del sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Poi determinare l'insieme $\ker(A)$, e confrontarlo con l'insieme S.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&-1&1&0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&3&1\\1&1&4\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$