

Algebra Lineare

Appello di gennaio – Parte B

19/01/2024

Docente: Alessio Sammartano

Cognome	
Nome	
Codice Persona	

Istruzioni

- 1) **Non aprire** il fascicolo del test finché non vi verrà detto di farlo.
- 2) La durata della Parte B è 60 minuti.
- 3) La Parte B contiene 2 esercizi, con un punteggio totale di 13 punti. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. Le risposte verranno valutate nella loro interezza; pertanto, è importante fornire una soluzione chiara e giustificare i passaggi.
- 4) Non è permesso usare dispositivi elettronici, quali calcolatrici, computer, tablet, cellulari, smartwatch, cuffie, auricolari. Non è permesso usare libri o appunti.

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 2, 2]

Considerare i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$H = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

- a) Determinare una base di H e una base di K .
- b) Determinare una forma cartesiana di H .
- c) Determinare una base di $H \cap K$ e la dimensione di $H + K$

Esercizio 2. [Punteggio: 1, 2, 2, 2]

Sia V uno spazio vettoriale con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, e $L : V \rightarrow V$ un endomorfismo tale che

$$L(\mathbf{b}_1) = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \quad L(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3, \quad L(\mathbf{b}_3) = -2\mathbf{b}_3,$$

- a) Determinare la matrice $A = M_L^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ che rappresenta L rispetto alla base \mathcal{B} .
- b) Determinare autovalori e autospazi della matrice A .
- c) Dedurre autovalori e autospazi dell'endomorfismo L (suggerimento: sfruttare il teorema di rappresentazione).
- d) Calcolare $A^{2024}\mathbf{v}$ dove $\mathbf{v} = (1, 0, 2)^\top$.

