Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Quarto Appello – 9 settembre 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ____________________

Codice Persona: ______________

NB: i fogli di protocollo servono da ausilio per la sola brutta e non vanno consegnati.

Parte A (10 punti)

1. In $\mathbb{R}^2$ considerare l'insieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} .$$

Allora

- [A] W non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$
- [B] $\dim(W) = 2$
- [C] $\dim(W) = 1$ e W è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [D] $\dim(W) = 1$ e W è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Span}\{(0,1,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$$

una forma cartesiana è data da

- [A] $y = z$
- [B] $x - y = z = 0$
- [C] $x = y = z$
- [D] nessuna delle precedenti

3. Il sistema

$$\begin{cases} 4x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

- [A] ammette infinite soluzioni
- [B] ammette due soluzioni
- [C] ammette un'unica soluzione
- [D] non ammette soluzioni

4. Considerare l'endomorfismo $T : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ definito da

$$T(A) = A^T .$$

Allora

- [A] T non è diagonalizzabile
- [B] gli autovalori di T sono 1 e -1
- [C] gli autovalori di T sono 0 e 1
- [D] T ha un unico autovalore

5. La matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- A è diagonalizzabile se $k = 1$
- B è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$
- C non è diagonalizzabile se $k = 2$
- D è sempre diagonalizzabile

6. L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

- A $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- B $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- C $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- D $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Sia $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matrice quadrata, dove C_1, C_2, C_3 sono vettori colonna. Sia $B = (C_1, C_2 + C_3, C_2)$, allora

- A $\det(B) = -\det(A)$
- B $\det(B) = \det(A)$
- C $\det(B) = 2\det(A)$
- D nessuna delle precedenti

8. Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (10, 4), \mathbf{v}_2 = (-6, 15)$ in $\mathbb{R}^2$. Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una isometria lineare, allora l'insieme $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2)\}$

- A non è una base di $\mathbb{R}^2$
- B è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$
- C è una base non ortogonale di $\mathbb{R}^2$
- D è una base ortogonale ma non ortonormale di $\mathbb{R}^2$

9. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita, e $L : V \to W$ un'applicazione lineare

- A se $\dim(V) = \dim(W)$ e L è iniettiva, allora è anche suriettiva
- B se $\dim(V) > \dim(W)$ e L è suriettiva, allora è anche iniettiva
- C se $\dim(V) > \dim(W)$, allora L è iniettiva
- D se $\ker(L) \neq \{\mathbf{0}\}$, allora $\dim(V) > \dim(W)$

10. Trovare la retta di $\mathbb{R}^3$ parallela ai piani

$$\pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_3 = 1\} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_2 = 2\}\,,$$

e passante per il punto $(0, 1, 0)$.

- [A] $(0, 1, 0) + \mathrm{Span}(1, 0, 1)$
- [B] $(1, 2, 0) + \mathrm{Span}(1, 1, 0)$
- [C] $(2, -1, -2) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$
- [D] $(0, 2, 1) + \mathrm{Span}(1, -1, -1)$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 3, 2, 2]
In $\mathbb{R}^4$ considerare i seguenti sottospazi vettoriali

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

1. Determinare una base e la dimensione di U e W.

2. Determinare una forma parametrica e cartesiana di $U + W$

3. Determinare la dimensione di $U \cap W$.

4. Rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$, determinare $U^\perp$ e $W^\perp$.

Esercizio 2. [Punteggio: 2, 3, 3, 3]

In $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ considerare l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \times \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\left(A^T B\right) .$$

1. Dimostrare che è un prodotto scalare in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$.
2. Determinare, rispetto a questo prodotto scalare, il complemento ortogonale di
$$H = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
3. Determinare una base ortonormale di $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ rispetto a questo prodotto scalare.
4. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ su H, Rispetto a questo prodotto scalare.