Politecnico di Milano – Ingegneria Fisica

Algebra Lineare, A.A. 2024-2025

Primo Appello – 29 gennaio 2025 – [Durata: 2 ore]

Cognome e Nome: ____________________

Codice Persona: ____________________

NB: i fogli protocollo servono da ausilio per la sola brutta e <u>non vanno consegnati</u>.

Parte A (10 punti)

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si considerino

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4k(k-1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3k(k-2) \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di k per cui il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni.

[A] $k \neq 0, 1$ [B] $k \neq 1$

[C] $k = 0$ [D] $k = 0, 1$

2. Calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[A] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [B] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[C] $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [D] $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Determinare la dimensione del nucleo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

[A] $\dim(\ker A) = 1$ [B] $\dim(\ker A) = 2$

[C] $\dim(\ker A) = 4$ [D] $\dim(\ker A) = 5$

4. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ dei vettori.

[A] Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim(V) \geq n$

[B] Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $\dim(V) \leq n$

[C] Se $\dim(V) \leq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V

[D] Se $\dim(V) \geq n$, allora $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V

5. Quali delle seguenti funzioni è un'applicazione lineare?

   A $L : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{v}^\intercal$

   B $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\intercal\mathbf{v}$

   C $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathrm{Mat}(2,2)$ definita da $L(A) = A^\intercal A$

   D $L : \mathrm{Mat}(2,2) \to \mathbb{R}^2$ definita da $L(A) = ((2,-3)A)^\intercal$

6. Sia $A = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ una matrice quadrata, dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono vettori colonna. Sia

$$B = (C_1 + C_4, C_2 + C_3, C_1, C_2)\,,$$

   allora

   A $\det(B) = -\det(A)$ B $\det(B) = \det(A)$

   C $\det(B) = 2\det(A)$ D nessuna delle precedenti

7. Siano $V = \mathrm{Mat}(3,3)$ e $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ allora

   A esiste un isomorfismo $L : V \to W$

   B esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$

   C non esiste un'applicazione lineare iniettiva $L : V \to W$

   D non esiste un'applicazione lineare suriettiva $L : V \to W$

8. Si consideri l'endomorfismo $L : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ definito da $L(p(t)) = p'(t)$. Allora

   A gli autovalori di L sono $1, 2$ B L è diagonalizzabile

   C L non è diagonalizzabile D nessuna delle precedenti

9. Siano $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $L_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ due applicazioni lineari tali che $\dim(\ker(L_1)) = 1$ e $\dim(\ker(L_2)) = 2$. Allora

   A $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 1$ B $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 2$

   C $\dim(\mathrm{Im}(L_1 \circ L_2)) = 3$ D $\dim(\mathrm{Im}(L_2 \circ L_1)) = 2$

10. La matrice rappresentativa dell'endomorfismo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deifnito da

$$L(x, y) = (3x + 2y, x + 2y)\;,$$

   rispetto alla base $\{(1,1), (2,1)\}$ è

   A $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   C $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Parte B (20 punti)

Esercizio 1. [Punteggio: 2, 2, 2, 2, 2]
Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e i sottospazi

$$H = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\}.$$

1. Trovare una forma parametrica di H.
2. Determinare $\dim(H \cap K)$ e $\dim(H + K)$.
3. Determinare le matrici che rappresentano le proiezioni ortogonali π_K e $\pi_{K^\perp}$, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare autovalori e autovettori di $\pi_{K^\perp}$.
5. Trovare un endomorfismo $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker(L) = K^\perp$.

Esercizio 2. [Punteggio: 2, 3, 2, 3]
Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro, e si consideri l'endomorfismo $L_k : V \to V$ definito da
$$L\big(p(t)\big) = p(t) + (kt-1)p'(t) + p''(t).$$
Determinare i valori di k per cui L_k è suriettivo.

2. Determinare i valori di k per cui L_k è diagonalizzabile.

3. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che
$$p(1) = 3,\ p(2) = 5,\ p(3) = 7.$$

4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ distinti, e siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Dimostrare che esiste un unico polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ tale che
$$p(a) = \alpha,\ p(b) = \beta,\ p(c) = \gamma.$$