Appunti di Algebra Lineare

Ingegneria Fisica 2023-24
Prof. Alessio Sammartano

Antonio Manuel Marulli

(*)Nota riguardo le dimostrazioni.

1 Capitolo I: Vettori, Matrici e Sistemi lineari

Un elemento appartenente a $\mathbb{R}^n$ si chiama vettore. Le operazioni sempre valide sui vettori in $\mathbb{R}^n$ sono la somma di vettori e la moltiplicazione per uno scalare.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

Forma parametrica e cartesiana della retta in $\mathbb{R}^2$

$$r = \{\underline{v} + t\underline{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$r = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Forma parametrica della retta e del piano in $\mathbb{R}^n$

Similmente possiamo ottenere la forma parametrica e cartesiana della retta e del piano in $\mathbb{R}^3$ e in generale in $\mathbb{R}^n$.

$$r = \{\underline{v} + t\underline{w} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\Pi = \{\underline{v} + t\underline{w_1} + s\underline{w_2} \mid t, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ w_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{pmatrix}$$

$$r = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \end{cases} \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\Pi = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

(*)Teoremi e proposizioni marcati con (*) sono stati dimostrati a lezione, ma tali dimostrazioni non sono riportate su questa dispensa per brevità

Proprietà delle operazioni tra vettori

- $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$ — associativa
- $\underline{v} + \underline{w} + \underline{u} = \underline{v} + \underline{u} + \underline{w}$ — commutativa
- $\exists\, \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \mid \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \qquad \forall \underline{v}$ — elemento neutro
- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \qquad \exists\, \underline{w} \mid \underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$ — elemento opposto

---

- $(cd)\underline{v} = c(d\underline{v})$ — associativa
- $1\ \underline{v} = \underline{v}$ — elemento neutro
- $c(\underline{v} + \underline{w}) = c\underline{v} + c\underline{w}$ — distributiva
- $(c + d)\underline{w} = c\underline{w} + d\underline{w}$ — distributiva

$\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in \mathbb{R}^n, \quad c, d \in \mathbb{R}$

1.1 Definizione: Combinazione lineari

Dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_m} \in \mathbb{R}^n$ e $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\underline{w} = c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ...c_n\underline{v_n} \in \mathbb{R}^m$$

è combinazione lineare di $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_m}$.

1.2 Definizione: Equazione lineare

Un'equazione lineare nelle variabili $x_1, x_2, ..., x_n$ è un equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$
$$\text{con } a_1, a_2, ..., a_n \text{numeri fissati}$$

Ogni equazione coinvolga variabili con esponente diverso da 1, prodotto di variabili, funzioni esponenziali o trigonometriche è un'equazione non lineare.

1.3 Definizione: Sistema lineare

Un sistema lineare è un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Dove m è il numero di equazioni e n è il numero di variabili. L'insieme S delle soluzioni sarà dunque:

$$S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid (1)\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

1.4 Definizione: Matrice

Una matrice $m \times n$ è una tabella di numeri di m righe e n colonne. Una matrice $m \times 1$ è un vettore colonna e una matrice $1 \times n$ è un vettore riga.
Dato un sistema lineare in forma standard (come (1)), possiamo associare una matrice $m \times (n+1)$ al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

1.5 Definizione: Matrice a scala

Una matrice è a scala se valgono le seguenti condizioni:

- ogni riga non nulla deve avere all'inizio più zeri della precedente;
- le righe nulle sono più in basso delle righe non nulle.

Se una matrice completa è a scala, allora il sistema lineare ad essa associato è a scala.

1.6 Algoritmo di Gauss

Le mosse di Gauss sono operazioni elementari sulle righe che trasformano un sistema lineare in un altro equivalente ad esso. Le operazioni eseguibili sono:

- scambiare due equazioni o righe:

$$Eq_i \leftrightarrow Eq_j \text{ oppure } R_i \leftrightarrow R_j$$

- moltiplicare un equazione o una riga per un numero $c \neq 0$:

$$cEq_i \text{ oppure } cR_i$$

- Aggiungere ad un equazione o ad una riga un'altra scalata di un fattore $c \neq 0$:

$$Eq_i + cEq_j,\ i \neq j \text{ oppure } R_i + cR_j,\ i \neq j$$

Usando le mosse di Gauss è possibile ridurre una matrice a una matrice a scala. In questo modo è possibile risolvere sistemi lineari lavorando sulle rispettive matrici associate.

1.7 Definizione: Pivot

Il primo elemento non nullo in ogni riga di una matrice a scala si dice pivot.Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{I pivot di } A \text{ sono 2 e 4.}$$

1.8 Teorema di Gauss-Jordan

Data una matrice A qualsiasi, è possibile utilizzare le mosse di Gauss e ottenere alla fine una matrice A' tale che:

- A' è a scala;
- tutti i pivot sono uguali a 1;
- ogni pivot è l'unico elemento non nullo della sua colonna.

1.9 Definizione: variabili pivot, variabili libere e equazione degenere

Le variabili corrispondenti alle colonne con pivot sono dette variabili pivot e possono essere espresse in funzione delle variabili rimanenti, dette variabili libere, attraverso l'algoritmo di Gauss-Jordan. Un equazione lineare con tutti i coefficienti nulli è detta equazione degenere.

1.10 Teorema: numero variabili libere e soluzioni

Sia dato un sistema lineare a scala

$$n = \#variabili \qquad r = \#pivot$$

- ha soluzioni $\iff$ non ci sono equazioni del tipo $0 = 1 \iff$ non ci sono pivot nell'ultima colonna (ossia nella colonna dei termini noti);
- l'insieme delle soluzioni sarà espresso in funzione di $n - r$ variabili libere;
- se $n = r$, allora il sistema avrà un'unica soluzione.

Algebra delle matrici

Denotiamo con $A = (a_{ij})$ una matrice $A \in Mat(i, j)$ e con $(A)_{ij}$ l'elemento a_{ij} della matrice A.

Le matrici possono essere sommate tra loro e moltiplicate per uno scalare allo stesso modo dei vettori. Valgono le stesse 8 proprietà di somma e prodotto viste in $\mathbb{R}^n$.

La trasposta di $A = (a_{ij}) \in Mat(i, j)$ è definita come $A^T = (a_{ji}) \in Mat(j, i)$ e vale $(A)_{ij} = (A^T)_{ji}$
La trasposizione gode delle seguenti proprietà:

Date $A, B \in Mat(m, n),\ c \in \mathbb{R}$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = cA^T$

Il prodotto tra matrici è definito come segue:

- Caso speciale: vettore riga $\times$ vettore colonna

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \in Mat(1, n) \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \in Mat(n, 1)$$

Definiamo $\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

- Caso generale: dati $m, n, p \in \mathbb{N}$

$$A = (a_{ij}) \in Mat(m,p), \quad B = (b_{ij}) \in Mat(p,n)$$

Definiamo $AB \in Mat(m,n)$ ponendo

$$(AB)_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

N.B. Il prodotto AB è definito solo se #colonne di A = #righe di B. Anche per questo motivo non vale la proprietà commutativa.

1.11 Definizione: Matrice identità

La matrice identità $n \times n$ è

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \in Mat(n,n)$$

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Sia $A \in Mat(m,n)$, allora

$$I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$$

1.12 Definizione: Matrice completa ed equazione vettoriale

Dato un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{Matrice di coefficienti}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{Vettore delle variabili} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{Vettore di termini noti}$$

La matrice completa è $(A|\underline{b}) \in Mat(m, n+1)$. Il sistema lineare si può scrivere come equazione vettoriale:

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

1.13 Definizione: Rango

Il rango di una matrice è $rk(A) =$ #pivot o #righe non nulle in una riduzione a scala di A. Esistono diverse riduzioni a scala di una matrice A, ma è possibili dimostrare che hanno tutte lo stesso numero di pivot, dunque le mosse di Gauss conservano il rango e vale, per $A \in Mat(m, n)$, $rk(A) \leq min(m, n)$

1.14 Teorema di Rouché-Capelli (*)

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con $A \in Mat(m, n)$, $\underline{b} = \mathbb{R}^m$.

- Il sistema ha soluzioni $\Longleftrightarrow rk(A) = rk(A|\underline{b})$;
- in questo caso esistono $\underline{w}, \underline{v_1}, ..., \underline{v_s} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$S = \{\underline{w} + t_1\underline{v_1} + t_2\underline{v_2} + ... + t_s\underline{v_s} \mid t_1, t_2, ..., t_s \in R\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

  dove $\underline{w}$ è una soluzione particolare del sistema e $s = n - rk(A)$;
- il sistema ha un'unica soluzione $\Longleftrightarrow rk(A) = rk(A|\underline{b}) = n$.

1.15 Definizione: Sistema omogeneo e Kernel

Sia $A \in Mat(m, n)$. Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ è detto sistema omogeneo associato a A. Il suo insieme delle soluzioni è detto kernel (o nucleo) di A.

$$\ker(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Un sistema omogeneo ha sempre almeno una soluzione in quanto vale $\underline{0} \in \ker(A)$.

1.16 Teorema: Traslazione della soluzione del sistema omogeneo (*)

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare. Supponiamo che l'insieme delle soluzioni S sia non vuoto, $S \neq \emptyset$, e sia $\underline{v} \in S$. Allora

$$S = \underline{v} + \ker(A) := \{\underline{v} + \underline{w} \mid \underline{w} \in \ker(A)\}$$

cioè:

$$\{\text{soluzioni di } A\underline{x} = \underline{b}\} \ = \ \text{traslazione delle soluzioni di } A\underline{x} = \underline{0}$$

1.17 Teorema dell'inverso di una matrice

Data una matrice $A \neq 0$, esiste B tale che $AB = I_n$.
Sia $A \in Mat(n, n)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $rk(A) = n$;
- $A\underline{x} = \underline{b}$ ha un'unica soluzione;
- $\exists S \mid SA = I_n$;
- $\exists D \mid AD = I_n$;

In questo caso segue che $S = D$: infatti

$$S = SI_n = S(AD) = (SA)D = I_nD = D$$

La matrice A è detta invertibile, $A^{-1} = S = D$ è detta matrice inversa:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Metodo di Gauss per l'inversa

Per trovare A^{-1} applico l'algoritmo di Gauss:

$$(A \,|I_n) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I_n \mid A^{-1})$$

Siano $A, B \in Mat(n,n)$ invertibili:

- AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- A^T è invertibile e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2 Capitolo II: Spazi Vettoriali

2.1 Definizione: Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale è un insieme V dotato di due operazioni interne a V:

- Somma: dati $\underline{v}$ e $\underline{w} \in V \Longrightarrow \underline{v} + \underline{w} \in V$.
  - Associativa: $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$
  - Commutativa: $\underline{v} + \underline{w} = \underline{v} + \underline{w}$
  - $\exists$ elemento neutro: $\underline{v} + \underline{o} = \underline{v} \qquad \forall \underline{v} \in V$
  - $\exists$ elemento opposto: $\forall \underline{v} \in V \; \exists (\underline{-v}) \in V \quad t.c. \quad \underline{v} + \underline{-v} = \underline{0}$
- Prodotto: dati $\underline{v} \in V, c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c\underline{v} \in V$.
  - Associativa: $(cd)\underline{v} = c(d\underline{v})$
  - $\exists$ elemento neutro: $1\underline{v} = \underline{v} \qquad \forall \underline{v} \in V$
  - Distributiva: $(c + d)\underline{v} = c\underline{v} + d\underline{v}$
  - Distributiva: $c(\underline{v} + \underline{w}) = c\underline{v} + c\underline{w}$

Gli elementi $\underline{v} \in V$ sono detti vettori.

Osservazione

L'algebra dei vettori riga e dei vettori colonna vale in generale in qualsiasi spazio vettoriale.

Esempi di spazi vettoriali

- $\mathbb{R}^n$
- $Mat(m, n)$
- Spazio di polinomi $\mathbb{R}[t]$
- Spazi di funzioni, $V = \{funzioni \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$
- ...

2.2 Definizione: Sottospazio vettoriale

Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme $W \subseteq V$ tale che W è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V. Equivalentemente:

- $\underline{0} \in W$ (da V deve appartenere anche a W)
- $\forall \underline{v}, \underline{w} \in W \Longrightarrow \underline{v} + \underline{w} \in W$ (chiuso rispetto alla somma)
- $\forall \underline{w} \in W, c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c\underline{v} \in W$ (chiuso rispetto al prodotto)

Dato un qualsiasi spazio vettoriale $V, \{\underline{0}\} \subseteq V$ e $V \subseteq V$ sono sottospazi banali di V.

2.3 Definizione: Span lineare

Sia V uno spazio vettoriale.
Dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$, il loro span lineare è l'insieme di tutte le combinazioni lineari:

$$span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}) = \{\underline{u} \in V \mid \underline{u} = c_1\underline{v_1}, c_2\underline{v_2}, ..., c_n\underline{v_n} \text{ per qualche } c_i \in \mathbb{R}\} = \{\sum_{i=1}^{n} c_i\underline{v_i} \mid c_i \in \mathbb{R}\} \subseteq V$$

Dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$, il loro span lineare è un sottospazio vettoriale di V.

2.4 Definizione: Generatori

Se $H = span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n})$ per qualche $v_i \in V$ diciamo che $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ sono generatori di H.

Kernel e sottospazi vettoriali (*)

Sia $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}, \quad A\underline{x} = \underline{b}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, allora S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n \iff \underline{b} = \underline{0}$ (in questo caso il sistema è omogeneo e $S = \ker(A)$).

2.5 Definizione: Linearmente indipendente e linearmente dipendente

Sia V uno spazio vettoriale, dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$, si dicono linearmente indipendenti (L.I.) se:

$$c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ...c_n\underline{v_n} = \underline{0} \iff c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

Se invece $\exists c_1, c_2, ..., c_n$ non tutti nulli tali che $c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ...c_n\underline{v_n} = \underline{0}$, i vettori si dicono linearmente dipendenti. In questo caso uno di essi è combinazione lineare degli altri due.

2.6 Lemma di scarto (*)

Dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$ vettori L.D., allora uno di essi può essere scaertato senza modificare il loro span.

2.7 Lemma di aggiunta (*)

Dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$ vettori L.I., ma non generatori di $V \implies \exists \underline{v_{n+1}} \in V t.c. \underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}, \underline{v_{n+1}}$ sono L.I.

Corollario dei lemmi di scarto e di aggiunta

Se vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$ sono generatori di V, e sono L.D., allora posso scartarne uno e rimarranno generatori di V.
Se i vettori sono L.I. ma non sono generatori, allora posso aggiungerne uno preservando l'indipendenza lineare.

2.8 Definizione: Base

Sia V uno spazio vettoriale. Una base di V è un insieme di vettori $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V\} \subseteq V$ tali che:

- $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ generano V
- $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ sono L.I.

$$\text{L'insieme } \mathcal{E} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix} \} = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, ..., \underline{e_n}\} \text{ è una base canonica di } \mathbb{R}^n$$

2.9 Lemma di Steinitz (*)

Sia $V = span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_m})$ uno spazio vettoriale.
Siano $\underline{w_1}, \underline{w_2}, ..., \underline{w_n}$. Se $n > m$ allora $\underline{w_1}, \underline{w_2}, ..., \underline{w_n}$ sono L.D.

Corollario su basi, generatori e dipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale con base $\{b_1, ..., b_n\}$. Siano $u_1, ..., u_m \in V$:

- se $u_1, ..., u_m$ sono L.I. $\implies m \leq n$
- se $u_1, ..., u_m$ sono generatori di $V \implies m \geq n$
- se $u_1, ..., u_m$ sono basi di $V \implies m = n$

(*) Sia $H \subseteq V$ un sottospazio, allora vale che la $dimH \leq dimV$ e $dimH = dimV \iff H = V$.

2.10 Definizione: Spazio associato ad una matrice

Sia $A \in Mat(m, n)$. Possiamo estrarre diversi sottospazi da A.

Scrivendo A come $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ ... \\ R_m \end{pmatrix}$, lo spazio delle righe è $row(A) = span(R_1, R_2, ..., R_m) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \implies row(A) = span(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^2$$

Per Gauss-Jordan sappiamo che le operazioni elementari sulle righe preservano lo spazio delle righe, dunque $row(A) = row(A') \subseteq \mathbb{R}^m$. Se A' è una matrice a scala, allora le righe non nulle formano una base di $row(A')$.

Corollario

$$dim\, row(A) = rk(A)$$

$$\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_m} \text{ sono L.I. } \iff dim\, span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_m}) = m \iff rk(\begin{pmatrix} \underline{v_1} \\ \underline{v_2} \\ ... \\ \underline{v_m} \end{pmatrix})$$

Similmente possiamo calcolare lo spazio delle colonne.

Sia $A \in Mat(m, n)$, allora $A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$.
$col(A) = span(c_1, c_2, ..., c_n) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Le operazioni sulle righe non preservano lo spazio delle colonne:

$$row(A) = row(A') \subseteq \mathbb{R}^m \qquad col(A) \neq col(A')$$

2.11 Teorema: Nullità + Rango (*)

Sia $A \in Mat(m, n)$, allora:

$$dim\ \ker(A) + rk(A) = n$$

Rappresentazioni di un sottospazio $H \subseteq \mathbb{R}^n$

- Forma cartesiana (ossia tramite equazioni):

$$H = \ker(A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$$

- Forma parametrica (ossia tramite parametri liberi):

$$H = span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}) = \{t_1\underline{v_1} + t_2\underline{v_2} + ... + t_n\underline{v_n}\},\ t_i \in \mathbb{R}$$

$$H = col(A) \text{ oppure } H = row(A)$$

Passaggio da parametrica a cartesiana e viceversa

$H = span(\underline{v_1}, ..., \underline{v_p}) \subseteq \mathbb{R}^n \in Mat(n, 1)$ ossia vettore colonna

- Calcolo A t.c. $kerA = H$
- Scrivo $A = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ ... \\ \underline{a_m} \end{pmatrix}$, con a_i i-esima riga
- $\forall j,\ \underline{v_j} \in kerA \implies A\underline{v_j} = \underline{0} \implies \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ ... \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \underline{v_j} = \underline{0} \implies \begin{cases} \underline{a_1}\underline{v_j} = 0 \\ \underline{a_2}\underline{v_j} = 0 \\ ... \\ \underline{a_m}\underline{v_j} = 0 \end{cases}$
- La risoluzione del sistema lineare ci permette di trovare H in forma parametrica.

Esempio:

$$H = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^5$$

Cerchiamo le righe $\underline{a} = (\underline{a_1}, \underline{a_2}, ..., \underline{a_5}) \subseteq \mathbb{R}^5 \quad t.c.\ \underline{a}\underline{v_1} + \underline{a}\underline{v_2} + \underline{a}\underline{v_3} = 0.$

$$\begin{cases} \underline{a}\underline{v_1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 + a_2 = 0 \\ \underline{a}\underline{v_2} = a_2 + a_4 = 0 \\ \underline{a}\underline{v_1} = a_3 + 2a_4 = 0 \end{cases}$$

risolvendo ottengo $(a_1, a_2, ..., a_5) = t_1(1, -1, -2, 1, 0) + t_2(0, 0, 0, 0, 1)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è risolto da $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$
Il numero di equazioni ottenute è uguale alla differenza tra la dimensione dello spazio di partenza e del sottospazio H

2.12 Operazioni tra sottospazi

Siano $H_1, H_2 \subseteq V$ sottospazi.
$H_1 \cap H_2 \subseteq V$ è un sottospazio (*).
$H_1 \cup H_2 \subseteq V$ in generale non è un sottospazio.
$H_1 + H_2 \subseteq V$ somma di sottospazi è un sottospazio. La somma di sottospazi è definita come $H_1 + H_2 := \{c_1\underline{v} + c_2\underline{w} \mid \underline{v} \in H_1, \underline{w} \in H_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Esempi:
Per $H_1 = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H_2 = span \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, il sottospazio somma $H_1 + H_2$ è uguale a tutto il piano $\mathbb{R}^2$.
Per $H_1 = span(\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $H_2 = span(\underline{w_1}, ..., \underline{w_n})$, vale $H_1 + H_2 = span(\underline{v_1}, ..., \underline{v_n}, \underline{w_1}, ..., \underline{w_n})$
Per $H_1 = kerA$ e $H_2 = kerB$, vale $H_1 \cap H_2 = \ker(\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix})$

Per calcolare $H_1 + H_2$ bisogna usare la forma parametrica. Per calcolare $H_1 \cap H_2$ bisogna usare la forma cartesiana.

2.13 Teorema: Formula di Grassmann

Sia $\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_p}\}$ base di $H_1 \cap H_2$.
Completiamola a $\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_p}, \underline{w_1}, ..., \underline{w_q}\}$ base di H_1 e $\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_p}, \underline{u_1}, ..., \underline{u_m}\}$ base di H_2,
allora $\{\underline{v_1}, ..., \underline{v_p}, \underline{w_1}, ..., \underline{w_q}, \underline{u_1}, ..., \underline{u_m}\}$ base di $H_1 + H_2$.

La formula di Grassmann ci permette di ottenere:

$$\dim(H_1 \cap H_2) = p \qquad \dim(H_1) = p + q \qquad \dim(H_2) = p + m$$

$$\dim(H_1 + H_2) = p + m + q = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

2.14 Definizione: Sottospazi affini

Un sottospazio S si dice affine se esiste un sottospazio vettoriale $H \subseteq V$ e un vettore $\underline{v_0} \in S$ t.c. $S = \underline{v_0} + H = \{\underline{v_0} + \underline{w} \mid \underline{w} \in H\} \subseteq V$.

Un sottospazio affine si ottiene con una traslazione di un sottospazio vettoriale.

Se $\underline{v_1} + H_1 = \underline{v_2} + H_2$ per qualche $\underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$ e $H_1, H_2 \subseteq V \implies H_1 = H_2$, dunque il sottospazio è unicamente determinato da S. H prende il nome di giacitura di S (la giacitura è ottenuta traslando S in modo che passi per l'origine).

$$\dim(S) = \dim(H)$$

Un sottospazio affine di dimensione 1 è una retta; un sottospazio affine di dimensione 2 è un piano.

Dato $S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{b}\}$, con $A \in Mat(m, n)$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, allora S è spazio affine se $S \neq \varnothing$.

Dati due sottospazi affini S_1 e S_2, allora $S_1 \cap S_2$ è un sottospazio affine $\iff S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

2.15 Definizione: Posizione reciproca tra due spazi affini

Posizione	$S_1 \cap S_2$	H_1, H_2
Coincidenti $S_1 = S_2$	$\neq \varnothing$	$=$
Inclusione $S_1 \subseteq S_2$	$S_1 \neq \varnothing$	$=$
Incidenti	$\neq \varnothing$	$H_1 \not\subseteq H_2$ e $H_2 \not\subseteq H_1$
Paralleli	$\varnothing$	$H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$
Sghembi	$\varnothing$	$H_1 \not\subseteq H_2$ e $H_2 \not\subseteq H_1$

3 Capitolo III: Applicazioni Lineari

3.1 Definizione: Applicazione lineare

Un applicazione lineare (o funzione/mappa/trasformazione lineare) è una funzione

$$L:\ V \longrightarrow W \qquad t.c$$

- $L(\underline{v_1}+\underline{v_2}) = L(\underline{v_1}) + L(\underline{v_2})$
- $L(c\underline{v_1}) = cL(\underline{v_1})$
- $\Longrightarrow L(\underline{0_v}) = L(\underline{0}\cdot\underline{0_v}) = 0L(\underline{0_v}) = \underline{0_w}$

(*) Sia $A \in Mat(m,n)$. La funzione

$$T_A:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definita da $T_A(\underline{v}) = A\underline{v}$ è un'applicazione lineare.

(*) Viceversa ogni applicazione lineare $L:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è della forma $L = T_A$ per un'unica matrice $A \in Mat(m,n)$.

3.1.1 Esempi

- $L_1\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $L_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ è lineare;
- $L_2\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $L_2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+1\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ non è lineare;
- $L_3\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $L_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^2\\x_1-x_2\end{pmatrix}$ non è lineare;

Le applicazioni lineari possono esprimere anche trasformazioni geometriche come la dilatazione (o omotetia), la rotazione, la proiezione su un'asse, la riflessione ed altre trasformazioni. Una traslazione non è un'applicazione lineare.

Possono essere applicazioni lineare anche trasposizioni, l'operazione di derivata e di integrale o la valutazione di un polinomio in un punto.

Applicazioni lineari e sottospazi (*)

Sia $L:\ V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.

- Se $H \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, allora la sua immagine $L(H) := \{L(\underline{v} \mid \underline{v} \in H)\} \subseteq W$ è sottospazio;
- Se $J \subseteq W$ è un sottospazio, allora la sua controimmagine $L^{-1}(J) := \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) \in J\} \subseteq V$ è un sottospazio.

3.2 Definizione: Immagine e kernel di un'applicazione lineare

Sia $L: \ V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare.

- L'immagine di L è l'immagine di tutto V:

$$Im(L) := L(V) = \{L(\underline{v} \mid \underline{v} \in V)\} \subseteq W$$

- Il kernel di L è la controimmagine di $\{\underline{0_w}\}$:

$$\ker(L) := L^{-1}(\underline{0_w}) = \underline{v} \in V \mid \{L(\underline{v}) = \underline{0_w}\} \subseteq V$$

Le immagini dei generatori sono generatori delle immagini:
Sia $H = span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}) = \{c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + ... + c_n\underline{v_n},\ c_i \in \mathbb{R}\} \subseteq V$.

$L(H) = \{L(c_1\underline{v_1}+c_2\underline{v_2}+...+c_n\underline{v_n})\} = \{c_1L(\underline{v_1})+c_2L(\underline{v_2})+...+c_nL(\underline{v_n})\} = span(L(\underline{v_1}), L(\underline{v_2}), ..., L(\underline{v_n}))$

3.3 Definizione: Iniettività

$L: \ V \longrightarrow W$ è iniettiva se

$$\underline{v_1} \neq \underline{v_2} \Longrightarrow L(\underline{v_1}) \neq L(\underline{v_2})$$

equivalentemente, se

$$L(\underline{v_1}) = L(\underline{v_2}) \Longrightarrow \underline{v_1} = \underline{v_2}$$

Iniettività e kernel (*)

$$L: \ V \longrightarrow W \text{ è iniettiva } \iff \ker(L) = \{\underline{0}_v\}$$

Corollario.
Sia $A \in Mat(m, n)$:

$$\begin{aligned} T_A: \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ è iniettiva } &\iff \ker(T_A) = \{\underline{0}\} \iff \ker(A) = \{\underline{0}\} \\ &\iff dim\ \ker(A) = 0 \iff rk\ A = n \text{ (Nullità + rango)} \end{aligned}$$

N.B.: Se $n > m \Longrightarrow T_A$ non è mai iniettiva.

Sia $L: \ V \longrightarrow W$ iniettiva:
Se $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$ L.I. $\Longrightarrow L(\underline{v_1}), L(\underline{v_2}), ..., L(\underline{v_n}) \in W$ L.I. (*)

Sia $L: \ V \longrightarrow W$ iniettiva, $H \subseteq V$ sottospazio, allora $dim\ L(H) = dim\ H$.

3.4 Definizione: Suriettività

$L: \ V \longrightarrow W$ è suriettiva se $Im(L) = W$

Sia $L: \ V \longrightarrow W$ suriettiva $\iff dim\ Im(L) = dim\ W$

Data $A \in Mat(m, n),\ T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,
T_A è suriettiva $\iff Im(T_A) = \mathbb{R}^m \iff col(A) = \mathbb{R}^m \iff dim\ col(A) = dim\ \mathbb{R}^m \iff rk\ A = m$

3.5 Definizione: Isomorfismo

Un'applicazione lineare $L: V \longrightarrow W$ è un isomorfismo se L è biunivoca, ossia iniettiva e suriettiva, dunque invertibile.

Data $A \in Mat(m,n)$, $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è un isomorfismo $\Longleftrightarrow n = m = rk\ A$.

Per $L: V \longrightarrow W$ isomorfismo, valgono le seguenti proprietà:

- $dim\ V = dim\ W$
- $\underline{v_1}, ..., \underline{v_n}$ sono L.I./generatori/basi di $V \Longleftrightarrow L(\underline{v_1}), ..., L(\underline{v_n})$ sono L.I./generatori/basi di W
- $dim\ H = dim\ L(H)$
- $L(H \cap K) = L(H) \cap L(K)$
- $L(H + K) = L(H) + L(K)$

3.6 Definizione: Funzioni composte

Siano $L : U \longrightarrow V,\ M : V \longrightarrow W$ applicazioni lineari.
La composizione $M \circ L: U \longrightarrow W$ è la funzione definita da $M \circ L(\underline{v}) = M(L(\underline{v}))$ ed è a sua volta è un'applicazione lineare.

Per come è definita la funzione composta, vale $T_B \circ T_A = T_{BA}$.

3.7 Definizione: Identità

L'identità di uno spazio vettoriale V è la funzione $id_V: V \longrightarrow V$ definita da $id_V(\underline{v}) = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$.
id_V è un isomorfismo

3.8 Definizione: Funzione inversa

$L: V \longrightarrow W$ è invertibile se esiste $M: W \longrightarrow V$ t.c.

$$M \circ L = id_V \qquad \text{e} \qquad L \circ M = id_W$$

M si chiama funzione inversa di L e si denota con L^{-1}.

3.9 Unicità della composizione di un vettore da una sua base (*)

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ una base di V spazio vettoriale.
Dato $\underline{v} \in V$, esiste un'unica scelta di $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \underline{b_i}$

3.10 Definizione: Vettore delle coordinate

Il vettore $[\underline{v}]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ si chiama vettore delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Fissata una base $\mathcal{B}$, la funzione $Q_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definita come

$$Q_{\mathcal{B}}(\underline{v}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

è un isomorfismo, detto isomorfismo delle coordinate.

3.11 Definizione: Mappa di parametrizzazione

Sia V uno spazio vettoriale, $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ base di V. La funzione $P_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$, definita da

$$P_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\underline{b_1} + c_2\underline{b_2} + ... + c_n\underline{b_n} = \underline{v} \in V$$

è detta mappa di parametrizzazione associata a $\mathcal{B}$.

Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ una base di V, allora

$$Q_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad P_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

sono invertibili e sono una l'inversa dell'altra.

$$Q_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{B}} = id_{\mathbb{R}^n} \qquad P_{\mathcal{B}} \circ Q_{\mathcal{B}} = id_V$$

3.12 Definizione: Matrice associata alle basi

Sia $L : V \longrightarrow W$ applicazione lineare, siano $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ base di V e $\mathcal{C} = \{\underline{c_1}, ..., \underline{c_n}\}$ base di W. La matrice associata a L rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è

$$M_L^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [L(\underline{b_1})]_{\mathcal{C}} & [L(\underline{b_2})]_{\mathcal{C}} & ... & [L(\underline{b_n})]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}$$

In cui l'i-esima colonna rappresenta il vettore delle coordinate di $L(\underline{b_i})$ rispetto alla base $\mathcal{C}$[1]

Ogni applicazione lineare $L : V \longrightarrow W$ si può tradurre in una $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ associata a $A = M_L^{\mathcal{B},\mathbb{C}} \in Mat(m,n)$ fissando le basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ di V, W

3.13 Teorema: Rappresentazione di un'applicazione lineare[2] (*)

[1]Esempio utile svolto a lezione e presente sugli appunti cartacei (pag. 52)

[2]Il teorema è in prevalenza una rappresentazione grafica delle commutazioni di funzioni, mappe e vettori, quindi, per semplicità, non sarà riportato su questa dispensa. Si trova a pagina 54 del quaderno con appunti

Corollario: Applicazioni lineari e matrici

1. $\ker(L) = P_{\mathcal{B}}(\ker(A))$
2. $Im(L) = P_{\mathcal{C}}(col(A))$
3. $\dim(\ker(L)) = n - rk(A)$
4. $\dim(Im(L)) = rk(A)$
5. Per il teorema di nullità + rango:
   $\dim(Im(L)) + \dim(\ker(L)) = \dim(V)$
6. L iniettiva $\iff rk(A) = n = \dim(V)$
7. L suriettiva $\iff rk(A) = \dim(W)$
8. L isomorfismo $\iff rk(A) = \dim(V) = \dim(W)$
9. $\dim(V) < \dim(W) \implies L$ non è suriettiva
10. $\dim(V) > \dim(W) \implies L$ non è iniettiva

4 Capitolo IV: Determinanti

4.1 Definizione: Determinante

Il determinante di una matrice quadrata $A \in Mat(n,n)$ è definito ricorsivamente.

- Caso $n=1$: $\quad A = (a_{11}) \Longrightarrow \det(A) = a_{11}$
- Caso $n>1$:
  Denotiamo con $\widehat{A}_{ij} \in Mat(n-1,n-1)$ la matrice ottenuta da A eliminando la riga i e la colonna j.
  $$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \qquad \widehat{A}_{32} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{pmatrix}$$
  Definiamo $\det(A)$ in diversi modi equivalenti:
  - scegliamo una riga i e sviluppiamo lungo la riga i:
    $$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\widehat{A}_{ij})$$
  - scegliamo j e sviluppiamo lungo la colonna j:
    $$\det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\widehat{A}_{ij})$$
- Caso $n=2$:
  Per semplicità il determinante di $A \in Mat(2,2)$ è calcolabile come differenza del prodotto delle due diagonali, ossia:
  $$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
- Caso $n=3$:
  Equivalentemente possiamo applicare la formula si Sarrus per ottenere il determinante di una matrice $A \in Mat(3,3)$ come somma del prodotto delle diagonali meno il prodotto delle antidiagonali:
  $$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

N.B.: Tutte le scelte diverse per calcolare $\det(A)$ danno lo stesso risultato.
La funzione $det: \ Mat(n,n) \longrightarrow \mathbb{R}$ non è un'applicazione lineare.

Proprietà dei determinanti

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Proprietà multilineare:
  Sia $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ ... \\ R_n \end{pmatrix} \in Mat(n,n)$, $\quad$ se $R_i = c\underline{v} + d\underline{w}$ $\quad$ con $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n, c, d \in \mathbb{R}$,
  allora
  $$\det(A) = det \begin{pmatrix} R_1 \\ ... \\ c\underline{v} + d\underline{w} \\ ... \\ R_n \end{pmatrix} = c\, det \begin{pmatrix} R_1 \\ ... \\ \underline{v} \\ ... \\ R_n \end{pmatrix} + d\, det \begin{pmatrix} R_1 \\ ... \\ \underline{w} \\ ... \\ R_n \end{pmatrix}$$

La stessa proprietà vale anche per le colonne, per cui:

$$\det(cA) = det \begin{pmatrix} cR_1 \\ cR_2 \end{pmatrix} = c^2 \, det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

- Proprietà alternante:

  Se B è ottenuta da A scambiando due righe/colonne diverse, allora:

  $$\det(A) = -\det(B), \qquad A, B \in Mat(n,n)$$

  Dunque se una matrice ha due righe/colonne uguali $\Longrightarrow \det(A) = 0$

4.2 Definizione: Matrice triangolare

$A = (a_{ij}) \in Mat(n,n)$ si dice:

- Triangolare superiore se $a_{ij} = 0 \qquad \forall i > j$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & ... \\ 0 & x_{22} & x_{23} & ... \\ 0 & 0 & x_{33} & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{pmatrix}$$

- Triangolare inferiore se $a_{ij} = 0 \qquad \forall j > i$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & ... \\ x_{21} & x_{22} & 0 & ... \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & ... \\ ... \end{pmatrix}$$

- Diagonale se $a_{ij} = 0 \qquad \forall j \neq i$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & ... \\ 0 & x_{22} & 0 & ... \\ 0 & 0 & x_{33} & ... \\ ... \end{pmatrix}$$

Sia $A = (a_{ij}) \in Mat(n,n)$ una matrice triangolare inferiore, superiore o diagonale, allora $\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$ (*)

Mosse di Gauss-Jordan e determinante (*)

Aggiungere ad una riga il multiplo di un'altra preserva il determinante:

$$A \xrightarrow{R_i + cR_j} A' \Longrightarrow \det(A') = \det(A) \quad (*)$$

Corollario: Rango e determinante (*)

Sia $A \in Mat(n,n)$. Allora $\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow rk(A) = n$

4.3 Teorema di Binet

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Se A è una matrice invertibile $\Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$:

$$\begin{aligned} AA^{-1} = I_n \Longrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 \\ \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \end{aligned}$$

5 Capitolo V: Endomorfismi

5.1 Definizione: Endomorfismo

Un endomorfismo è un'applicazione lineare

$$L:\ V \longrightarrow V$$

5.2 Definizione: Autovalore e autovettore

Sia $L:\ V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Se esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\underline{0} \neq \underline{v} \in V$ tali che $L(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, allora affermiamo che:

- λ è un autovalore di L;
- $\underline{v}$ è un autovettore di L associato all'autovalore.

N.B.: se $L = T_A$, con $A \in Mat(n,n)$, sono anche autovalori e autovettori di A.
In $L(\underline{0}) = \lambda \underline{0}$, $\underline{0}$ non è autovettore per definizione.

Come trovare gli autovalori

5.3 Definizione: Polinomio caratterizzante

Sia $A \in Mat(n,n)$. Il polinomio caratteristico di A è:

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$$

Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_A(x) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Gli autovalori sono: $-2; 3$

In generale il grado n del polinomio è uguale alla dimensione della matrice.

λ è un autovalore di $A \Longleftrightarrow \lambda$ è una radice di $\chi_A(x)$. (*)

Come trovare gli autovettori

$$\begin{aligned} L(\underline{v}) = \lambda \underline{v} &\Longleftrightarrow L(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = \underline{0} \\ &\Longleftrightarrow L(\underline{v}) - \lambda id_V(\underline{v}) = \underline{0} \\ &\Longleftrightarrow (L - \lambda id_V) = \underline{0} \\ &\Longleftrightarrow \underline{v} \in \ker(L - \lambda id_V) \end{aligned}$$

5.4 Definizione: Autospazio

L'autospazio di L associato a λ è

$$E_\lambda = \ker(L - \lambda id_V) = \{\text{autovettori di } L \text{ associati a } \lambda\} \cup \{\underline{0}\}$$

È a sua volta un sottospazio di V.

5.5 Definizione: Endomorfismo diagonalizzabile

Un endomorfismo $L: V \longrightarrow V$ si dice diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ è una matrice diagonale.
$A \in Mat(n, n)$ è diagonalizzabile se $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile[3].

5.6 I criterio di diagonalizzabilità

$L: V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base di V composta da autovettori di L.

In questo caso, $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$, dove $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori di L. (*)

5.7 Definizione: Similitudine

$A, B \in Mat(n, n)$ sono simili $\Longleftrightarrow \exists S \in Mat(n, n)$ invertibile, tale che $B = S^{-1}AS$.

Proprietà delle matrici simili (*)

1. A^k, B^k sono simili $\forall k$
2. A^T, B^T sono simili
3. $\det(A) = \det(B)$
4. $rk(A) = rk(B)$
5. $dim \ker(A) = dim \ker(B)$
6. $\chi_A(x) = \chi_B(x)$
7. A, B hanno gli stessi autovalori associati

5.8 Definizione: Matrice del cambio di base

Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$, $\mathcal{C} = \{\underline{c_1}, ..., \underline{c_n}\}$ basi di V.

$M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

$$M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [id_V(\underline{v})]_{\mathcal{C}} = [\underline{v}]_{\mathcal{C}}$$

cioè $M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ trasforma coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ in coordinate rispetto a $\mathcal{C}$

Dunque vale:

$$M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} = ([\underline{b_1}]_{\mathcal{C}} \mid [\underline{b_2}]_{\mathcal{C}} \mid ... \mid [\underline{b_n}]_{\mathcal{C}})$$

Ed essendo id_V un endomorfismo, quindi invertibile, anche $M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ sarà invertibile e $(M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1} = M_{id_V}^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$

[3] Esempio utile svolto a lezione e presente sugli appunti cartacei (pag. 64)

5.9 Formula del cambio di base

Sia $L: V \longrightarrow V$ un endomorfismo e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ basi di V: Per le matrici $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ e $M_L^{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ vale:

$$M_L^{\mathcal{C},\mathcal{C}} = M_{id_V}^{\mathcal{B},\mathcal{C}} M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} M_{id_V}^{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

dunque vale una correlazione del tipo $B = S^{-1}AS$. Si conclude che tutte le matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare L sono simili.

5.10 Definizione: Determinante di un'applicazione lineare

Sia $L: V \longrightarrow V$ definiamo

$$\begin{aligned} \det(L) &= \det(M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}) \\ \chi_L(x) &= \chi_{M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}}}(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Osservazione: Sia $A \in Mat(n,n)$, $T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} = \underline{e_1}, \underline{e_2}, ..., \underline{e_n}$, base di $\mathbb{R}^n$, allora:

$$\begin{aligned} M_{T_A}^{\mathcal{E},\mathcal{E}} &= A, \text{ in quanto} \\ M_{T_A}^{\mathcal{E},\mathcal{E}} &= ([T_A(\underline{e_1})]_{\mathcal{E}}, [T_A(\underline{e_2})]_{\mathcal{E}}, ..., [T_A(\underline{e_n})]_{\mathcal{E}}) = \\ &= ([A\underline{e_1}]_{\mathcal{E}}, [A\underline{e_2}]_{\mathcal{E}}, ..., [A\underline{e_n}]_{\mathcal{E}}) = \\ &= (A\underline{e_1}, A\underline{e_2}, ..., A\underline{e_n}) \end{aligned}$$

5.11 Formula del cambio di base per matrici (*)

$A \in Mat(n,n)$ è diagonalizzabile $\iff$ A è simile ad una matrice diagonale. In questo caso $D = S^{-1}AS$, dove D è una matrice diagonale con gli autovalori di A sulla diagonale e $S = (\underline{b_1}, \underline{b_2}, ..., \underline{b_n})$ è la base di autovettori di A.

Esempio di diagonalizzazione

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(2,2)$

1. Autovalori

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(A - I_n x) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}\right) \\ &= (1-x)^2 - 1 = x(x-2) \\ &\implies \text{ gli autovalori sono } \{2, 0\} \end{aligned}$$

2. Autovettori

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{basi di } \mathbb{R}^2 \text{ degli autovettori di } A$$

$$D = M_{T_A}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$D = S^{-1}AS$$
$$M_{T_A}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{id_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}} M_{T_A}^{\mathcal{B},\mathcal{B}} M_{id_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$$

5.12 Definizione: Molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori

Sia λ un autovalore di $L: V \longrightarrow V$

- a_λ: molteplicità algebrica di λ = molteplicità delle radici di λ in $\chi_L(x)$
- g_λ: molteplicità geometrica di $\lambda = \dim E_\lambda$ = dimensione autospazio di λ

Vale sempre la seguente disequazione:

$$1 \leq g_\lambda \leq a_\lambda$$

5.13 Teorema: II criterio di diagonalizzabilità

$\dim V = n$, $L: V \longrightarrow V$.

Allora L (con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ autovalori distinti) è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow \begin{cases} a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} & \forall i = 1, ..., r \\ \sum\limits_{i=1}^{r} a_{\lambda_i} = n \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{r} g_{\lambda_i} = n \end{cases}$

In questo caso vale, detta $\mathcal{B}_i$ una base di E_{λ_i} $\quad \forall i = 1, ..., r \Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_r = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, ..., \underline{b_n}\}$

è una base di V di autovettori di L, $M_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_r \end{pmatrix}$.

Nel caso particolare $A \in Mat(n, n)$

$$\Longrightarrow S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_r \end{pmatrix}$$
$S = M_{id_{\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = (\underline{b_1}, \underline{b_2}, ..., \underline{b_n})$ [(4)]

[(4)] Esempio utile svolto a lezione e presente sugli appunti cartacei (pag. 70)

6 Capitolo VI: Spazi Euclidei

6.1 Definizione: Prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale. Il prodotto scalare su V è un'operazione $< -, - >$: $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $< \underline{v}, \underline{w} > = < \underline{w}, \underline{v} > \qquad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
- $< c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2}, \underline{w} > = c_1 < \underline{v_1}, \underline{w} > + c_2 < \underline{v_2}, \underline{w} > \qquad \forall \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{w} \in V,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $< v, v > \geq 0 \forall \underline{v} \in V$
  $< \underline{v}, \underline{v} > = 0 \Longleftrightarrow \underline{v} = 0$

6.2 Definizione: Spazio euclideo

Uno spazio vettoriale V dotato di un prodotto scalare si chiama spazio euclideo.

Il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ è definito come:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

Indichiamo con $< \underline{a}, \underline{b} >$ l'arbitrario prodotto scalare in V, mentre con $\underline{a} \cdot \underline{b}$ il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

Se $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vettori colonna, allora

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T \underline{b}$$

Altri esempi di prodotti scalari

- in $V = \mathbb{R}^2$
  $< \underline{a}, \underline{b} > = < \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} > := 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1$
- $V = \mathbb{R}[t]$
  $< p(t), q(t) > := \int_0^1 p(t)q(t)dt$
- ecc...

6.3 Definizione: Norma

Sia V uno spazio euclideo, la norma di $\underline{v} \in V$ è $\|\underline{v}\| = \sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >}$

La distanza tra $\underline{v}, \underline{w} \in V$ è:

$$d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$$

Esempio in $\mathbb{R}^2$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \|\underline{a} - \underline{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$$

6.4 Proprietà di norma e prodotto vettoriale

1. $\|\underline{v}\| = 0 \Longrightarrow \underline{v} = 0$
2. $\|c\underline{v}\| = |c|\|\underline{v}\|$ (*)
3. $< \underline{0}, \underline{v} >= \underline{0}$ (*)
4. Disuguaglianza di Schwartz:
   $< \underline{a}, \underline{b} >\leq \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|$
5. Teorema di Carnot: (*)
   $\|\underline{a} + \underline{b}\|^2 = \|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 + 2 < \underline{a}, \underline{b} >$
6. Disuguaglianza triangolare: (*)
   $\|\underline{a} + \underline{b}\| \leq \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|$

6.5 Definizione: Angolo tra vettori

Conseguenza del teorema di Schwartz

$$\begin{aligned} < \underline{v}, \underline{w} >&\leq \|\underline{v}\|\|\underline{w}\| \\ \Longrightarrow \frac{| < \underline{v}, \underline{w} > |}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|} &\leq 1 \\ \Longrightarrow -1 \leq \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|} &\leq 1 \end{aligned}$$

Da cui si ottiene l'angolo tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$:

$$\widehat{\underline{v}\underline{w}} = \arccos \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|}$$

Da cui derivano le seguenti osservazioni:

- $0 \leq \widehat{\underline{v}\underline{w}} \leq \pi$
- $\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{<\underline{v},\underline{w}>}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|} \Longrightarrow < \underline{v}, \underline{w} >= \|\underline{v}\|\|\underline{w}\| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}$
- $\widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow < \underline{v}, \underline{w} >= 0$
  In questo caso, diciamo che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono ortogonali:
  $$\underline{v} \perp \underline{w}$$
- $\underline{0}$ è ortogonale a tutti $\underline{v} \in V$

Proposizione: ortogonalità e dipendenza lineare (*)

Sia V uno spazio euclideo. Se $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n} \in V$ sono non nulli e ortogonali a due a due ($\underline{v_i} \perp \underline{v_j}\ \forall i \neq j$) $\Longrightarrow \underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ sono L.I.

6.6 Definizione: Complemento ortogonale

Sia $H \subseteq V$ sottospazio. Il complemento ortogonale di H è $H^\perp := \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{w}\ \forall \underline{w} \in H\} \subseteq V$. $H^\perp$ è un sottospazio di V.

Sia $H = span(\underline{w_1}, \underline{w_2}, ..., \underline{w_d})$ allora $H^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{w_1}, \underline{v} \perp \underline{w_2}, ..., \underline{v} \perp \underline{w_d}\}$ (*).

6.7 Definizione: Base ortogonale e ortonormale

Sia V uno spazio euclideo e H un sottospazio. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_d}\}$ una base di H. Allora $\mathcal{B}$ è:

- ortogonale se $< \underline{b_i}, \underline{b_j} >= 0 \ \forall i \neq j$
- ortonormale se è ortogonale e $\|\underline{b_i}\| = 1 \ \forall i = 1, ..., d$, ossia $< \underline{b_i}, \underline{b_j} >= \begin{cases} 0 \ i \neq j \\ 1 \ i = j \end{cases}$

Dividendo ogni vettore di una base ortogonale per la sua norma, si ottiene una base ortonormale.

Coordinate rispetto a una base ortonormale (*)

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ base ortonormale di V.

Allora $[\underline{v}]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} < \underline{v}, \underline{b_1} > \\ ... \\ < \underline{v}, \underline{b_n} > \end{pmatrix} \qquad \forall \underline{v} \in V.$

6.8 Definizione: Proiezione ortogonale su H

Sia V uno spazio euclideo, $H \subseteq V$ un sottospazio e $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_d}\}$ una base ortonormale di H.
La funzione $\Pi_H : V \longrightarrow V$ definita da

$$\Pi_H(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{b_1} > \underline{b_1} + < \underline{v}, \underline{b_2} > \underline{b_2} + ... + < \underline{v}, \underline{b_d} > \underline{b_d}$$

si chiama proiezione ortogonale su H.

N.B.: Si verifica che tutte le scelte di base ortonormale di H diano la stessa $\Pi_H(\underline{v})$.

Proprietà della proiezione ortogonale (*)

1. $\Pi_H : V \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare e un endomorfismo
2. $\forall \underline{h} \in H \Longrightarrow \Pi_H(\underline{h}) = \underline{h}$
3. $Im(\Pi_H) = H$
4. $\Pi_H \circ \Pi_H = \Pi_H$, ossia è un'idenpotenza
5. $\ker(\Pi_H) = H^\perp$
6. $\forall \underline{v} \in V \Longrightarrow \underline{v} - \Pi_H(\underline{v}) \in H^\perp$

6.9 Corollario: Complemento ortogonale (*)

Sia V spazio euclideo e H sottospazio.

1. $\dim(H) + \dim(H^\perp) = \dim(V)$
2. $H + H^\perp = V$
3. $H \cap H^\perp = \{\underline{0}\}$
4. $H^{\perp\perp} = H$
5. $\forall \underline{v} \in V \Longrightarrow \underline{v} = \Pi_H(\underline{v}) + \Pi_{H^\perp}(\underline{v}) \Longrightarrow id_V = \Pi_H + \Pi_{H^\perp}$

Proprietà: Distanza minima (*)

Sia $\underline{v} \in V, H \subseteq V \Longrightarrow \Pi_H(\underline{v})$ è il vettore di H più vicino a $\underline{v}$, cioè $d(\underline{v}, \Pi_H(\underline{v})) \leq d(\underline{v}, \underline{h}), \quad \forall \underline{h} \in H$

6.10 Algoritmo di Gram-Schmidt

Dato un sottospazio $H \subseteq V$ con una base qualsiasi $\mathcal{C} = \{\underline{v_1}, ..., \underline{v_d}\}$ possiamo ottenere una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_d}\}$ di H.

1.
$$\underline{b_1} = \frac{\underline{v_1}}{\|\underline{v_1}\|}$$
Poniamo $H_1 = span(\underline{b_1}) = span(\underline{v_1}) \subseteq H$

2.
$$\underline{w_2} = \Pi_{H_1^\perp}(\underline{v_2}) = \underline{v_2} - \Pi_{H_1}(\underline{v_2})$$
$$H_2 = span(\underline{v_1}, \underline{v_2}) = span(\underline{b_1}, \underline{v_2}) = span(\underline{b_1}, \underline{b_2})$$
$$\underline{b_2} = \frac{1}{\|\underline{w_2}\|}\underline{w_2}$$

3.
$$\underline{w_3} = \Pi_{H_2^\perp}(\underline{v_3}) = \underline{v_3} - \Pi_{H_2}(\underline{v_3})$$
$$H_3 = span(\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}) = span(\underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3})$$
$$\underline{b_3} = \frac{1}{\|\underline{w_3}\|}\underline{w_3}$$

6.11 Definizione: Sottospazi affini perpendicolari

Sia V uno spazio euclideo e $S_1 = \underline{x_1} + H_1$, $S_2 = \underline{x_2} + H_2 \quad \subseteq V$ sottospazi affini si dicono perpendicolari se $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ e $H_1 \perp H_2$.

Esempio Per trovare la retta r perpendicolare al piano Π e passante per il punto P in $\mathbb{R}^3$ usiamo le seguenti informazioni:

- punto $P \in r$;
- giacitura di r =(giacitura di Π)$^\perp$

6.12 Definizione: Isometria lineare

Un endomorfismo $L: V \longrightarrow V$ è un isometria lineare se $< L(\underline{a}), L(\underline{b}) >=< \underline{a}, \underline{b} > \qquad \forall a, b \in V$.

Proprietà delle isometrie lineari

1. $\|L(\underline{v})\| = \|\underline{v}\|$
2. $d(\underline{v}, \underline{w}) = d(L(\underline{v}), L(\underline{w}))$
3. $\widehat{L(\underline{v})L(\underline{w})} = \widehat{\underline{v}\underline{w}}$
4. Sia $\{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ base ortonormale di $V \Longrightarrow \{L(\underline{b_1}), ..., L(\underline{b_n})\}$ è base ortonormale di V
5. L è un isomorfismo

6.13 Definizione: Matrice ortogonale

Una matrice $A \in Mat(n,n)$ è ortogonale se $A^T A = I_n$.

1. A ortogonale $\longleftrightarrow A^T = A^{-1}$
2. A ortogonale $\Longrightarrow A^T$ ortogonale
3. A, B ortogonali $\Longrightarrow AB$ ortogonale

Le seguenti condizioni sono equivalenti: (*)

1. A è ortogonale, cioè $A^T A = I_n$
2. le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$
3. le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$

$A \in Mat(n,n)$ è ortogonale $\Longleftrightarrow T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un isometria lineare. (*)

Esempi di matrici ortogonali e isometrie lineari

- Rotazione

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{rotazione di } \theta$$

$$\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \qquad \| \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \| = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow A \text{ ortogonale}$$

- Riflessione rispetto all'asse x $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Riflessione rispetto all'asse y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Riflessione rispetto all'origine $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Composizione di isometrie e prodotto di matrici ortogonali $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

6.14 Basi ortonormali e matrici ortogonali (*)

Se $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, ..., \underline{b_n}\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n \Longrightarrow M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}_{id_{\mathbb{R}^n}} = (\underline{b_1}, \underline{b_2}, ..., \underline{b_n})$ è una matrice ortogonale

Dunque, se $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è isometria lineare, date le basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ortonormali di $\mathbb{R}^n \Longrightarrow M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}_L$ è ortogonale.

6.15 Definizione: Matrice Simmetrica

Una matrice $A \in Mat(n,n)$ è simmetrica se $A^T = A$ (cioè $a_{ij} = a_{ji}$)

6.16 Teorema spettrale

Sia $A \in Mat(n,n)$, allora A è una matrice simmetrica $\iff \exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di A.

Osservazione: Se $\mathcal{B} = \{\underline{b_1}, ..., \underline{b_n}\}$ base ortonormale di autovettori, allora $S = M^{\mathcal{B},\mathcal{E}}_{id_{\mathbb{R}^n}}$ matrice ortogonale $\implies S^{-1} = S^T$
$\implies D = S^{-1}AS = S^TAS$. Diciamo che A è ortogonalmente diagonalizzabile.

Conseguenze

- Se A è simmetrica $\implies \chi_A(t)$ ha tutte le radici in $\mathbb{R}$.
- Se A è simmetrica $\implies$ autospazi diversi sono ortogonali a due a due ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$)