Analisi Matematica 1 e Geometria - Ingegneria Fisica
Prova in itinere novembre 2020

1. (punti 8) Si consideri la seguente funzione complessa di variabile complessa:

$$f(z) = 2 + |z|^2 - z^2 - 2\overline{z}.$$

(a) Determinare l'insieme A dei valori di $z \in \mathbb{C}$ per i quali $f(z)$ è immaginario, e rappresentare A nel piano complesso.

(b) Determinare geometricamente l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = (1+i)\frac{z}{\sqrt{2}} - i \text{ con } z \in A\}$, specificando le operazioni compiute.

(c) Stabilire se l'insieme $C := \{w \in \mathbb{C}, w = e^{-z} \text{ con } z \in A\}$ è limitato, cioè se esiste $M > 0$ tale che $|w| \le M$ per ogni $w \in C$.

Soluzione.

(a) Calcoliamo, posto $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(z) &= 2 + |z|^2 - z^2 - 2\overline{z} = 2 + x^2 + y^2 - (x+iy)^2 - 2(x - iy) \\ &= 2 + x^2 + y^2 - x^2 + y^2 - 2ixy - 2x + 2iy \\ &= 2 + 2y^2 - 2x + 2iy(1-x). \end{aligned}$$

Dunque $f(z)$ è immaginario se e solo se, posto come detto $z = x + iy$, vale $x = 1 + y^2$. Si tratta di una parabola con vertice nel punto $z = 1$, asse dato dall'asse reale, rivolta nel verso dei reali positivi.

(b) Si noti che $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Quindi moltiplicare $z \in \mathbb{C}$ per tale numero significa effettuare una rotazione centrata nell'origine, in senso antiorario, di ampiezza pari a $\pi/4$. Sottrarre poi i al risultato significa traslare lo stesso nella direzione dell'asse delle ordinate e verso il basso, di un'unità. Otterremo dunque una seconda parabola, con vertice in $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$ e asse parallelo alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

(c) Se $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ vale $e^{-z} = e^{-x}e^{-iy}$ e dunque $|e^{-z}| = e^{-x}$. Si noti che, se $z = x + iy \in A$, allora necessariamente si ha $x \ge 1$, dunque $|e^{-z}| = e^{-x} \le e^{-1}$ per ogni $z \in A$. Quindi A è limitato.

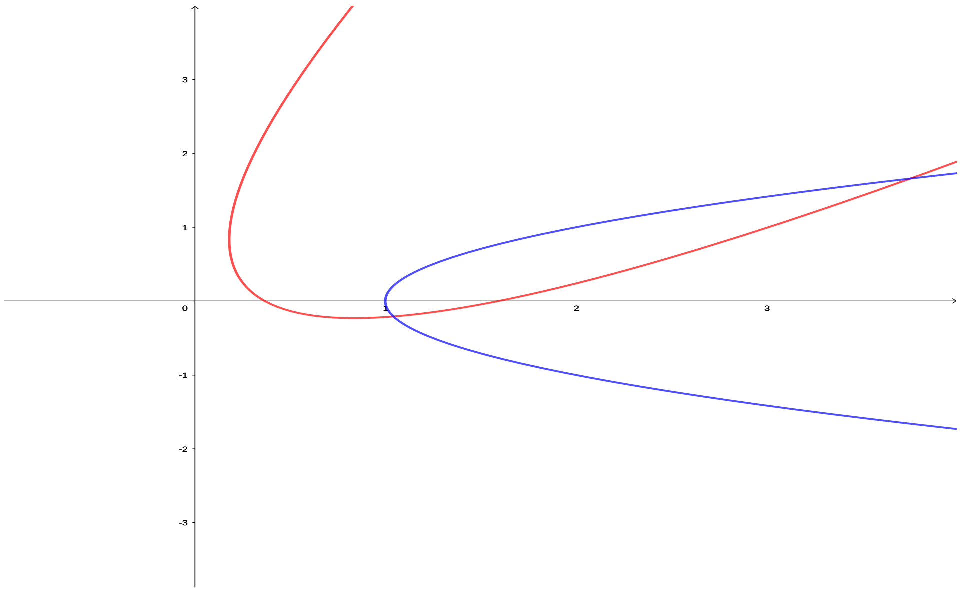


Figura 1: In blu la parabola di cui al punto a). In rosso la parabola di cui al punto b)

2. (punti 12) Sia k un parametro reale. Stabilire per quale valore di k i vettori

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-k \\ k-2 \\ k \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti.

Per tale valore di k si determini il nucleo della mappa lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{w}_1$, $f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{w}_2$, $f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{w}_3$.
Posto $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$ si determinino infine le controimmagini attraverso f del vettore $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)$.

Soluzione. Sia $A_k \in M_{43}$ la matrice che ha come colonne i vettori dati, cioè:

$$A_k := \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 0 & k-2 \\ 4 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha che $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ sono dipendenti se e solo se $\operatorname{rk}(A_k) \leq 2$. D'altronde $\operatorname{rk}(A_k) \geq 2$, poiché la sottomatrice individuata dalle prime due colonne e dalle ultime due righe ha determinante non nullo per ogni valore di k. Tale sottomatrice può essere orlata in soli due modi, ottenendo le seguenti matrici 3x3:

$$B_k := \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 0 & k-2 \\ 4 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad C_k := \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k-2 \\ 4 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha: $\det(B_k) = 3(k^2 - 4k + 3)$, che si annulla se e solo se $k = 1$ oppure $k = 3$, e $\det(B_k) = -k^2 + 5k + 6$, che si annulla se e solo se $k = 2$ oppure $k = 3$. Vale $\operatorname{rk}(A_k) = 2$ se e solo se entrambi tali due determinanti sono nulli, dunque se e solo se $k = 3$.

Per costruzione, la matrice rappresentativa di f nelle basi canoniche è A_k. Se $k = 3$ essa è:

$$A_3 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e sappiamo che $\operatorname{rk}(A_3) = 2$. Viene chiesto di risolvere il sistema omogeneo $A_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Essendo diverso da zero ad esempio il determinante della sottomatrice associata alle prime due colonne e alla seconda e terza riga (si tratta della sottomatrice estratta non singolare con il maggior numero possibile di zeri) è sufficiente considerare la seconda e la terza equazione e, scritto $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^\top$, notare che deve quindi essere $y = z$, $x = -z$ con $z \in \mathbb{R}$. Quindi $\ker f = \{(-z, z, z)^\top, z \in \mathbb{R}\}$.

Vale infine: $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{3i} - 6\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Non è importante scrivere esplicitamente $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2)$, ma notare che per costruzione $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im}(f)$ e $\overline{\boldsymbol{v}} := \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ è una controimmagine di $\boldsymbol{w}$. Ma allora l'insieme delle controimmagini di $\boldsymbol{w}$ è dato da vettori della forma $\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}_0$, dove $\boldsymbol{v}_0$ è un generico elemento del nucleo di f. Quindi l'insieme delle controimmagini di $\boldsymbol{w}$ è il seguente: $\{\boldsymbol{v} = (3 - z, -6 + z, -1 + z)^\top, z \in \mathbb{R}\}$.

3. (punti 12) Posto

$$A_h = \begin{pmatrix} h & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & h & 4 \\ -4 & 4 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Stabilire per quali valori dei parametri reali h e k il vettore $\boldsymbol{v}_k = (1, k, 0, 1)^\top$ è autovettore di A_h. Per il valore di h trovato stabilire se A_h è diagonalizzabile.

Soluzione. Affinché, per un opportuno λ, valga $A_h\boldsymbol{v}_k = \lambda\boldsymbol{v}_k$ deve valere:

$$\begin{pmatrix} h + 4k - 4 \\ 7k - 8 \\ 4 - 4k \\ h + 4k - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda k \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Ne segue subito (uguagliare le terze componenti) che $k = 1$. Deve allora valere:

$$\begin{pmatrix} h \\ -1 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

che implica $h = \lambda = -1$. Sia dunque $h = -1$. Avremo:

$$\begin{aligned}
\det(A_{-1} - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -1-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & -4 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
= (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & -4 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda \end{pmatrix} &= (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -4 \\ -4 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
= (-1-\lambda)^2 (3-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Dunque gli autovalori di A_{-1} sono $\lambda = -1$ (già noto dal punto precedente) e $\lambda = 3$, entrambi con molteplicità algebrica pari a due. Vale inoltre:

$$A_{-1} + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di tale matrice è due. Infatti una colonna è nulla, e l'ultima colonna è la somma delle prime due, cambiata di segno. Dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = -1$ è due, e l'autovalore è dunque regolare.

Si ha infine:

$$A_{-1} - 3I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tre righe della matrice sono uguali, la quarta non è proporzionale a queste. Dunque $\operatorname{rk}(A_{-1} - 3I_4) = 2$ e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è anch'essa uguale a due, quindi anche tale autovalore è regolare. Dunque la matrice A_{-1} è diagonalizzabile.

1. (punti 11) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ e per $|x|$ sufficientemente piccolo, la funzione:

$$f_a(x) = e^{2x^4-3x^6} + \log(1 - x^2 + ax^4) - 1 + x^2 - \left(\frac{3}{2} + a\right) x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 della funzione f_a, centrato nell'origine, per ogni $a \in \mathbb{R}$. Calcolare in particolare $f_a^{(k)}(0)$ per ogni $k = 1, \ldots 8$ *senza svolgere esplicitamente le derivate.*

(b) Stabilire, per ogni $a \in \mathbb{R}$, se il punto $x = 0$ è un estremo relativo per f_a, precisando in tal caso se di massimo o di minimo relativo.

(c) Sia $b > 0$ sufficientemente piccolo tale che la funzione f_a sia definita sull'intervallo $[0, b]$. Stabilire, per ogni $a \in \mathbb{R}$, se l'integrale generalizzato

$$\int_0^b \frac{(\sin x)^7}{f_a(x)}\,\mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Valgono, per $x \to 0$, i seguenti sviluppi:

$$e^{2x^4-3x^6} = 1 + 2x^4 - 3x^6 + \frac{1}{2}(2x^4 - 3x^6)^2 + o(x^8) = 1 + 2x^4 - 3x^6 + 2x^8 + o(x^8);$$

$$\begin{aligned}
\log(1 - x^2 + ax^4) &= -x^2 + ax^4 - \frac{1}{2}(-x^2 + ax^4)^2 + \frac{1}{3}(-x^2 + ax^4)^3 - \frac{1}{4}(-x^2 + ax^4)^4 + o(x^8) \\
&= -x^2 + ax^4 - \frac{1}{2}(x^4 - 2ax^6 + a^2x^8) + \frac{1}{3}(-x^6 + 3ax^8) - \frac{1}{4}x^8 + o(x^8) \\
&= -x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^4 + \left(a - \frac{1}{3}\right)x^6 + \left(a - \frac{1}{4} - \frac{a^2}{2}\right)x^8 + o(x^8).
\end{aligned}$$

Si ha dunque, sempre per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= 1 + 2x^4 - 3x^6 + 2x^8 - x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^4 + \left(a - \frac{1}{3}\right)x^6 + \left(a - \frac{1}{4} - \frac{a^2}{2}\right)x^8 \\
&\quad - 1 + x^2 - \left(\frac{3}{2} + a\right)x^4 + \frac{x^6}{3} + o(x^8) \\
&= (a-3)x^6 + \left(a + \frac{7}{4} - \frac{a^2}{2}\right)x^8 + o(x^8),
\end{aligned}$$

che è lo sviluppo cercato. In particolare $f^{(k)}(0) = 0$ per $k = 1, \ldots, 5$ e $k = 7$, $f^{(6)}(0) = (a-3)6!$, $f^{(8)}(0) = \left(a + \frac{7}{4} - \frac{a^2}{2}\right) 8!$.

Riguardo al punto b), notiamo in primo luogo che $f_a(0) = 0$ per ogni a. Poniamo dapprima $a \neq 3$. Allora, sempre per $x \to 0$:

$$f_a(x) - f_a(0) = f_a(x) = (a-3)x^6 + o(x^6) = (a-3)x^6\,[1 + o(1)]\,,$$

e il termine $1 + o(1)$ è evidentemente positivo in un intorno di zero, dunque il segno di $f_a(x) - f_a(0)$ coincide, in un intorno di zero, con quello di $(a-3)x^6$, cioè con quello di $a - 3$. Dunque $x = 0$ è punto di minimo relativo per f se $a > 3$ e punto di massimo relativo per f se $a < 3$. Alternativamente, si poteva notare che, come già detto, $f^{(6)}(0) = (a-3)6!$, dunque $f^{(6)}(0) > 0$ se $a > 3$ e $f^{(6)}(0) < 0$ se $a < 3$, cosicché quanto prima scritto segue da un noto teorema, in quanto $f^{(k)}(0) = 0$ per $k = 1, \ldots, 5$. Se infine $a = 3$ si ha, sempre per $x \to 0$,

$$f_3(x) - f_3(0) = f_3(x) = \left(3 + \frac{7}{4} - \frac{9}{2}\right)x^8 + o(x^8) = \frac{1}{4}x^8 + o(x^8).$$

Con considerazioni identiche alle precedenti segue allora che $x = 0$ è di minimo relativo per f.

Riguardo al punto c) notiamo che, se $a \neq 3$

$$\frac{(\sin x)^7}{f_a(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^7}{(a-3)x^6} = \frac{x}{a-3} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Quindi in tal caso l'integrando tende a zero per $x \to 0$ e, non essendoci altre singolarità nell'intervallo di integrazione, l'integrale proposto esiste finito se $a \neq 3$. Se invece $a = 3$ vale

$$\frac{(\sin x)^7}{f_a(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4x^7}{x^8} = \frac{4}{x}.$$

L'ultima quantità scritta non è integrabile in un intorno dell'origine e dunque, per il criterio del confronto asintotico (la funzione ha segno costante in un intorno destro di $x = 0$ dato che essa è ivi asintotica a $\frac{4}{x}$), l'integrale proposto non esiste se $a = 3$.

2. (punti 11) Studiare la funzione
$$f(x) = x^{4/5}(3-x)^{1/5}.$$

Soluzione. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essa si annulla per $x = 0$ e per $x = 3$, è positiva per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$, negativa per $x > 3$. Vale

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

Verifichiamo l'esistenza di possibili asintoti obliqui. Si ha:

$$f(x) = x^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} \left(\frac{3}{x} - 1\right)^{\frac{1}{5}} = -x\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{5}} = -x\left[1 - \frac{3}{5x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -x + \frac{3}{5} + o(1) \text{ per } x \to \pm\infty.$$

Quindi la retta $y = -x + \frac{3}{5}$ è asintoto obliquo per f per $x \to \pm\infty$.

La funzione è derivabile per $x \neq 0, x \neq 3$. Per tali x si ha:

$$f'(x) = \frac{4(3-x)^{\frac{1}{5}}}{5x^{\frac{1}{5}}} - \frac{x^{\frac{4}{5}}}{5(3-x)^{\frac{4}{5}}} = \frac{4(3-x) - x}{5x^{\frac{1}{5}}(3-x)^{\frac{4}{5}}} = \frac{12 - 5x}{5x^{\frac{1}{5}}(3-x)^{\frac{4}{5}}}.$$

Vale:

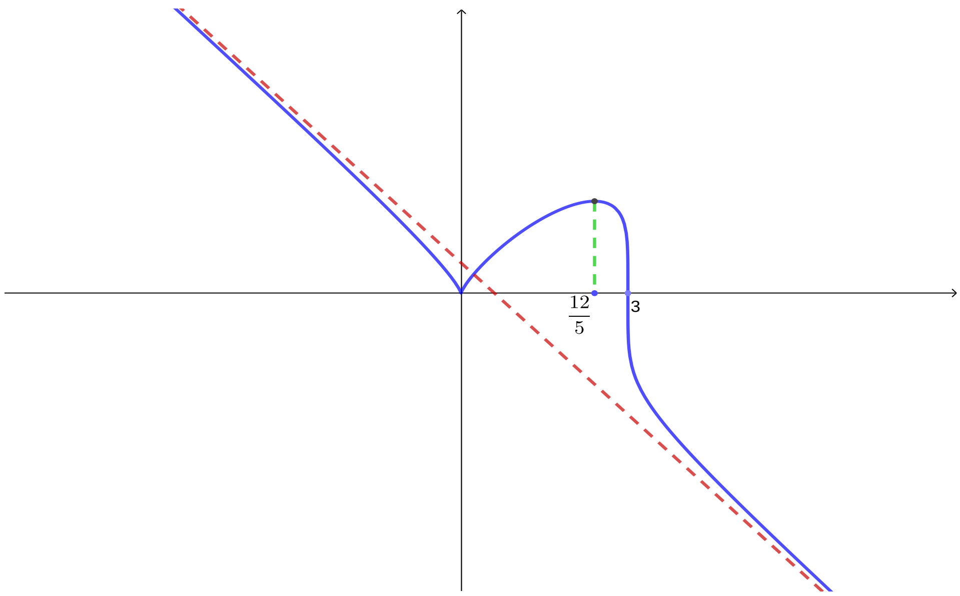
$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to 3} f'(x) = -\infty.$$

Il punto $x = 0$ è dunque una cuspide. Verificheremo successivamente che il punto $x = 3$ è un punto di flesso a tangente verticale. Vale inoltre $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \left(0, \frac{12}{5}\right)$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{12}{5}, 3\right) \cup (3, +\infty)$. Dunque il punto $x = 0$ è di minimo relativo per f mentre il punto $x = \frac{12}{5}$ è di massimo relativo per f. Non vi sono estremi assoluti, dati i limiti a $\pm\infty$ di f.

Calcoliamo infine, sempre per $x \neq 0, x \neq 3$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{1}{5x^{\frac{2}{5}}(3-x)^{\frac{8}{5}}}\left\{-5x^{\frac{1}{5}}(3-x)^{\frac{4}{5}} - (12-5x)\left[\frac{(3-x)^{\frac{4}{5}}}{5x^{\frac{4}{5}}} - \frac{4x^{\frac{1}{5}}}{5(3-x)^{\frac{1}{5}}}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{25\,x^{\frac{6}{5}}(3-x)^{\frac{9}{5}}}\left[-25x(3-x) - (12-5x)(3-x-4x)\right] \\
&= -\frac{36}{25\,x^{\frac{6}{5}}(3-x)^{\frac{9}{5}}}.
\end{aligned}$$

La derivata seconda, ove definita, ha dunque il segno di $-(3-x)^{\frac{9}{5}}$, cioè di $x-3$, quindi è positiva se $x > 3$, negativa se $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$. Ne segue che f è convessa su $[3, +\infty)$, concava separatamente su $(-\infty, 0]$ e su $[0, 3]$ (è peraltro indifferente considerare gli estremi finiti di tali intervalli). Il punto $x = 3$ è dunque, come anticipato, di flesso a tangente verticale. In conclusione, il grafico di f è il seguente:



3. (punti 10) Calcolare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1 + e^{6x}}{e^{4x} - 2e^{2x}}.$$

Successivamente, *senza far uso della primitiva prima calcolata*, determinare il dominio di definizione della funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soluzione. Poniamo $e^{2x} = t$. Si ha $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ e dunque:

$$\int \frac{1+e^{6x}}{e^{4x} - 2e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^3}{t^2-2t}\frac{\mathrm{d}t}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{1+t^3}{t^3-2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{2t^2+1}{t^3-2t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{2t^2+1}{t^3-2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Svolgiamo la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{2t^2+1}{t^3-2t^2} = \frac{2t^2+1}{t^2(t-2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} = \frac{At^2 + Bt(t-2) + C(t-2)}{t^3-2t^2} = \frac{(A+B)t^2 + (C-2B)t - 2C}{t^3-2t^2},$$

che fornisce $C = -\frac{1}{2}$ e quindi $B = -\frac{1}{4}$ e infine $A = \frac{9}{4}$. Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{2t^2+1}{t^3-2t^2}\,\mathrm{d}t &= \int \left(\frac{9}{4(t-2)} - \frac{1}{4t} - \frac{1}{2t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{9}{4}\log|t-2| - \frac{1}{4}\log|t| + \frac{1}{2t} + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Ne segue, tornando alla variabile originaria:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+e^{6x}}{e^{4x}-2e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{2t^2+1}{t^3-2t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{t}{2} + \frac{9}{8}\log|t-2| - \frac{1}{8}\log|t| + \frac{1}{4t} + c \\ &= \frac{e^{2x}}{2} + \frac{9}{8}\log|e^{2x}-2| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4e^{2x}} + c,\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $e^{2x} > 0$.

Circa il secondo punto, notiamo dapprima che il denominatore della funzione integranda ha un solo zero, vale a dire il punto $x_0 = \frac{\log 2}{2}$. Si noti inoltre che, indicando con $g(x)$ tale denominatore, cioè ponendo $g(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$, vale $g'(x) = 4e^{4x} - 4e^{2x}$ e quindi $g'\left(\frac{\log 2}{2}\right) = 8$. Ne segue, per la formula di Taylor con resto di Peano per g, centrata in $x_0 = \frac{\log 2}{2}$, che

$$g(x) \underset{x\to\frac{\log 2}{2}}{\sim} 8\left(x - \frac{\log 2}{2}\right).$$

Ma allora, dato che il numeratore di f vale, in $x = \frac{\log 2}{2}$, $1 + e^{6\frac{\log 2}{2}} = 9$:

$$f(x) \underset{x\to\frac{\log 2}{2}}{\sim} \frac{9}{8\left(x - \frac{\log 2}{2}\right)}.$$

Quest'ultima quantità non è integrabile in un intorno di $x_0 = \frac{\log 2}{2}$. Ne segue, per il criterio del confronto asintotico (la funzione ha chiaramente segno costante in un intorno sinistro di x_0 dato che essa è ivi asintotica a una funzione con tale proprietà) che la funzione $F(x)$ è definita se e solo se l'intervallo $[0,x]$ (o $[x,0]$ se $x < 0$) non include il punto $x_0 = \frac{\log 2}{2}$. Dunque F è definita per $x < \frac{\log 2}{2}$.

1. (punti 10) Posto:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & -2 \\ -1 & k & 1-k^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

- Determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema $A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_k$ al variare del parametro k.
- In uno dei casi in cui l'insieme delle soluzioni sia una retta, scriverne l'equazione parametrica.
- Stabilire se la matrice A_0 è diagonalizzabile.

Soluzione.

- Si determina il rango della matrice dei coefficienti. Valendo $\det A_k = k - k^3 = k(1-k)(1+k)$, segue che il rango di $A_k = 3$ se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$. Altrimenti, data la presenza di un minore non nullo di ordine due, ad esempio quello formato dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna, il rango vale 2.
  Quindi, se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$ il sistema ammette una sola soluzione.
  Sia $k = 0$. La matrice completa del sistema $(A_0|\boldsymbol{b}_0)$, avendo due righe tra loro opposte (la prima e la terza) ha ancora rango due. Dunque l'insieme delle soluzioni è monodimensionale.
  Sia $k = 1$. Anche in questo caso la matrice completa ha rango due: la colonna dei termini noti è identica alla seconda colonna. L'insieme delle soluzioni è monodimensionale.
  Sia $k = -1$. Si osserva che il determinante della matrice formata dalle ultime tre colonne di $(A_{-1}|\boldsymbol{b}_{-1})$ vale due. La presenza di un minore di ordine tre non nullo implica che il sistema non ha soluzioni.

- Mostriamo la soluzione in entrambi i casi essa sia monodimensionale.
  Caso $k = 0$.
  Si può omettere la terza riga perché ridondante.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II riga=II-I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

  Caso $k = 1$.
  Ancora si può omettere la terza riga perché ridondante.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II riga=II-I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Si cercano le soluzioni dell'equazione caratteristica. Otteniamo, sviluppando rispetto alla seconda colonna:

$$\det(A_0 - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

  La matrice ammette due autovalori: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica doppia e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica semplice.
  Occorre quindi analizzare la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda_1 = 0$ che coincide con la dimensione del nucleo dell'operatore A_0. Poichè il rango di A_0 vale due, per il teorema di nullità più rango, la dimensione del nucleo vale 3-2=1. In tal caso la moltiplicità geometrica non coincide con la molteplicità algebrica, quindi la matrice A_0 non è diagonlizzabile.

2. (punti 6) Risolvere la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$e^{iz^2-|z|} = e^{i\,(\mathrm{Re}\,z)^2}.$$

Stabilire inoltre se l'insieme A delle soluzioni trovate è limitato, cioè se $\exists M > 0$ t.c. $|z| \le M$ $\forall z \in A$.

Soluzione. Si scriva $z = x + iy$. Allora

$$iz^2 - |z| = i(x^2 - y^2 + 2ixy) - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = -2xy - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + i(x^2 - y^2).$$

L'equazione data diventa allora:

$$e^{-2xy-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+i(x^2-y^2)} = e^{ix^2}, \quad \text{cioè} \quad e^{-2xy-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-iy^2} = 1.$$

L'ultima formula si riscrive come

$$e^{-2xy-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-iy^2} = 1 = 1e^{i0}$$

che è soddisfatta se e solo se $e^{-2xy-(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 1$ e inoltre $y^2 = 2h\pi$ con $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (ovviamente y^2 deve essere maggiore o uguale a zero, dunque h deve essere un intero non negativo), cioè

$$-2xy - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad y = \pm\sqrt{2h\pi} \text{ con } h \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sostituendo la seconda identità nella prima si ottiene:

$$\pm 2x\sqrt{2h\pi} = -(x^2 + 2h\pi)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Tale identità è certamente verificata se $x = 0, h = 0$ e quindi $y = 0$. Dunque $z = 0$ è soluzione dell'equazione di partenza, cosa peraltro verificabile in modo diretto immediatamente. Se $x \neq 0$ l'equazione (1) può essere verificata se e solo se il primo membro è non positivo, occorre in particolare che x e y abbiano segno discorde. Deve allora valere:

$$2x\sqrt{2h\pi} = (x^2 + 2h\pi)^{\frac{1}{2}} \text{ se } x > 0 \text{ e } y = -\sqrt{2h\pi}, \quad 2x\sqrt{2h\pi} = -(x^2 + 2h\pi)^{\frac{1}{2}} \text{ se } x < 0 \text{ e } y = \sqrt{2h\pi}.$$

In entrambi i casi è possibile elevare al quadrato (entrambi i termini hanno lo stesso segno) ottenendo $8h\pi x^2 = x^2 + 2h\pi$ (si ricordi che $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), cioè $x^2(8h\pi - 1) = 2h\pi$, che ammette soluzioni $x \neq 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, tali soluzioni essendo date da (si noti che $8h\pi - 1 \neq 0$ $\forall h \in \mathbb{N}$):

$$x = \pm\left(\frac{2h\pi}{8h\pi - 1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h \in \mathbb{N}.$$

In conclusione le soluzioni dell'equazione di partenza sono $z = 0$ e gli infiniti numeri complessi dati da:

$$z = \pm\left(\frac{2h\pi}{8h\pi - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{2h\pi}, \quad h \in \mathbb{N}.$$

L'insieme delle soluzioni non è limitato. Infatti, il modulo dei numeri complessi appena scritti vale, per ogni $h \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{2h\pi}{8h\pi - 1} + 2h\pi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quest'ultima quantità tende a $+\infty$ per $h \to +\infty$.

3. (punti 6) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2}{x}\right]x^3$$

Successivamente, e più in generale, calcolare il seguente limite per ogni $k \in \mathbb{N}$ (il caso $k = 1$ corrisponde alla prima parte della domanda):

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \dots \frac{2}{(2k-1)x^{2k-1}}\right)\right]x^{2k+1}.$$

N.B. I limiti NON devono essere svolti usando la regola di de L'Hospital.

Soluzione. Sebbene basti ovviamente rispondere alla seconda domanda, svolgiamo per chiarezza separatamente i calcoli relativi alla prima domanda. Vale, essendo $1/x$ infinitesimo per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \log\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \log\left(1-\frac{1}{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3}\right) - \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\ &= \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2}{x}\right]x^3 &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{2}{x}\right]x^3\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]x^3 = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3} + o\,(1)\right]\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Nel caso generale, sviluppiamo di nuovo il logaritmo a un ordine $n \in \mathbb{N}$ che, data la richiesta dell'esercizio, sceglieremo essere *dispari*, scegliendo quindi $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\begin{aligned}&\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \log\left(1-\frac{1}{x}\right)\\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \ldots + \frac{(-1)^{2k+1+1}}{(2k+1)x^{2k+1}}\right) - \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \ldots - \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}\right) + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)\\ &= \frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \ldots + \frac{2}{(2k+1)x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right).\end{aligned}$$

Ne segue che, per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \ldots + \frac{2}{(2k-1)x^{2k-1}}\right) = \frac{2}{(2k+1)x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)$$

e quindi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{5x^5} + \ldots + \frac{2}{(2k-1)x^{2k-1}}\right)\right]x^{2k+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{(2k+1)x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)\right]x^{2k+1} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{2k+1} + o\,(1)\right]\\ &= \frac{2}{2k+1}.\end{aligned}$$

4. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right).$$

Soluzione. Affinché la funzione sia definita occorre che $x \neq -1$, che $\frac{x}{x+1} \geq 0$, il che ha luogo per $x \geq 0$ e per $x < -1$, e infine che $\sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq 1$ (ovviamente la radice è non negativa dove definita, quindi l'ulteriore condizione $\sqrt{\frac{x}{x+1}} \geq -1$ è a maggior ragione sempre vera), che equivale a $\frac{x}{x+1} \leq 1$, il che ha luogo per $x > -1$. In conclusione la funzione è quindi definita per $x \geq 0$. Essa è ivi continua.

Vale $f(0) = 0$. Inoltre $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dato che l'argomento dell'arcoseno è ivi positivo. Dunque $x = 0$ è punto di minimo assoluto per f. Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-,$$

in quanto $\sqrt{\frac{x}{x+1}} \to 1^-$ per $x \to +\infty$. La retta $y = \pi/2$ è dunque asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$.

La funzione è derivabile per $x > 0$. Per tali valori di x vale:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}}\,\frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \sqrt{x+1}\,\frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}. \end{aligned}$$

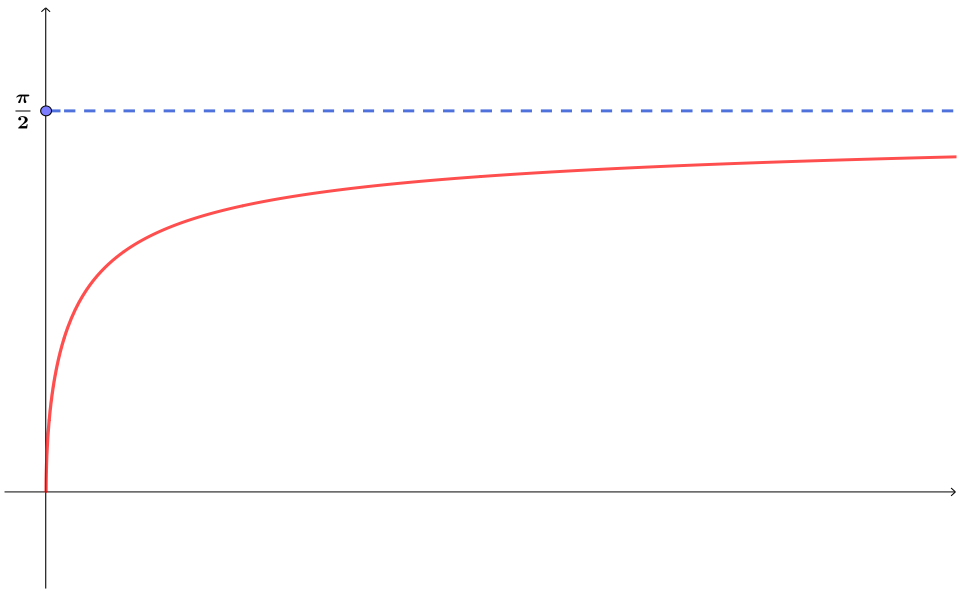
Chiaramente $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, dunque f è crescente in $[0, +\infty)$ (si ricordi che f è continua anche in $x = 0$). Inoltre, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, cosicché il grafico di f si avvicina all'origine con tangente che tende a diventare verticale in tale limite.

La funzione è infine due volte derivabile per $x > 0$, e abbiamo, per tali x:

$$f''(x) = -\frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}}{2x(x+1)^2} = -\frac{x+1+2x}{4x^{\frac{3}{2}}(x+1)^2} = -\frac{3x+1}{4x^{\frac{3}{2}}(x+1)^2}.$$

Chiaramente vale $f''(x) < 0$ per ogni $x < 0$, dunque f è concava in $[0, +\infty)$ (di nuovo si ricordi che f è continua anche in $x = 0$).

In conclusione il grafico di f è il seguente.



Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 5/2/2019**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^3$. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \\ &f(-\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}) = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k} \\ &f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

- Trovare la matrice A che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$.
- Determinare gli autovalori di A e di A^2. Tali matrici sono diagonalizzabili?

Soluzione.

- Siano $\boldsymbol{w}_1 = f(\boldsymbol{i})$, $\boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{j})$, $\boldsymbol{w}_3 = f(\boldsymbol{k})$ i vettori colonna della matrice A. Per la linearità di f segue:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \\ &\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_3 = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k} \\ &\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Da cui: $\boldsymbol{w}_1 = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{w}_2 = -1/2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Pertanto la matrice associata ad f è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si osservi che i vettori $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{k}$ sono autovettori della matrice A relativamente agli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$.
Si noti che $A^2\boldsymbol{v}_i = A(\lambda_i \boldsymbol{v}_i) = \lambda_i A(\lambda_i \boldsymbol{v}_i) = \lambda^2 A(\boldsymbol{v}_i)$, dunque i numeri $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 0$ sono autovalori di A^2, ed essendovi tre autovalori distinti non ve ne possono essere altri. Sia A che A^2 sono diagonalizzabili in quanto hanno entrambe autovalori semplici, quindi regolari.

2. (punti 6) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-1 + 3i\} \to \mathbb{C}$ data da:

$$f(z) = \frac{\overline{z} + 1 + i}{\overline{z} + 1 + 3i}.$$

- Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$;
- Determinare il luogo dei punti A per cui Re $f(z) = 0$, e disegnarlo nel piano complesso;

Soluzione. Posto $z = x + iy$, e per $z \neq -1 + 3i$, si ha:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x + 1 + i(1-y)}{x + 1 + i(3-y)} = \frac{[x + 1 + i(1-y)]\,[x + 1 - i(3-y)]}{(x+1)^2 + (3-y)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2 + (1-y)(3-y) + i[(1-y)(x+1) + (x+1)(y-3)]}{(x+1)^2 + (3-y)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 - i(2x+2)}{(x+1)^2 + (3-y)^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che, sempre per $z \neq -1+3i$:

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2+y^2+2x-4y+4}{(x+1)^2+(3-y)^2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = -\frac{2x+2}{(x+1)^2+(3-y)^2}.$$

Da quanto sopra, segue che $\operatorname{Re} f(z) = 0$ se e solo se $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, il che si riscrive come:

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = 1.$$

L'insieme A coincide dunque con circonferenza centrata in $z=-1+2i$ e di raggio 1. Si noti però che il punto $z=-1+3i$, che appartiene a tale circonferenza, va escluso a causa del dominio di definizione di f .

3. (punti 6) Mostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\log(1+\sin x)} + \frac{1}{2\log(\cos x)} - \frac{1}{2x}$$

ha limite finito per $x \to 0$, e calcolare tale limite.

Soluzione. Calcoliamo, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\log(1+\sin x) &= \log\left(1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) = x-\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\
&= x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3);\\
\log(\cos x) &= \log\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)} + \frac{1}{-x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^4)} - \frac{1}{2x}\\
&= \frac{1}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)} - \frac{1}{x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)} - \frac{1}{2x}\\
&= \frac{2x\left[x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]-2x\left[x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]-\left[x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]\left[x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]}{2x\left[x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]\left[x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\right]}\\
&= \frac{2x^3+\frac{x^5}{3}-2x^3+x^4-\frac{x^5}{3}-x^4+\frac{x^5}{2}+o(x^5)}{2x^5+o(x^5)} = \frac{\frac{x^5}{2}+o(x^5)}{2x^5+o(x^5)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Il limite cercato vale dunque $1/4$. In alternativa, gli ultimi passaggi possono essere svolti usando lo sviluppo, per $t \to 0$, di $1/(1+t)$ come segue:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)} - \frac{1}{x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} - \frac{1}{2x}\\
&= \frac{1}{x^2}\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)\right] - \frac{1}{x^2}\left[1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right] - \frac{1}{2x}\\
&= \frac{1}{x^2}\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right] - \frac{1}{x^2}\left[1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right] - \frac{1}{2x}\\
&= \frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{12}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2x}+o(1) = \frac{1}{4}+o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

4. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4-3x^2+2}}{x}.$$

Lo studio della derivata seconda va svolto solo qualitativamente.

Soluzione. La funzione è dispari, e non è definita per $x=0$. Studiamola quindi per $x>0$. Se, appunto, $x>0$, notando che $x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x^2-1)$ (dato che il polinomio t^2-3t+2 si annulla in $t=1$ e in $t=2$), si ha che f è definita se e solo se $x \in (0,1] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Evidentemente $f(1) = f(\sqrt{2}) = 0$, e f è positiva se $x \in (0,1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. Si ha inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per f. Per verificare la presenza di un possibile asintoto obliquo notiamo che, sempre per $x > 0$:

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = x\left(1 - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + o(1), \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Dunque la retta $y = x$ è asintoto obliquo per f quando $x \to +\infty$. La funzione è derivabile per $x \in (0,1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, e si ha con calcoli elementari, per tali x:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}.$$

Si ha quindi:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{2}^+} f'(x) = +\infty.$$

Dunque la tangente alla curva tende a diventare verticale in tali limiti. Il segno di f' coincide con quello di $x^4 - 2$, che è positivo se e solo $x > 2^{1/4}$, e quest'ultimo valore è minore di $\sqrt{2}$. Ricordando il dominio di f, ne segue che, se $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > \sqrt{2}, \quad f'(x) < 0 \text{ se } x \in (0,1).$$

Dunque f decresce su $(0,1]$, cresce su $[\sqrt{2}, +\infty)$, e i punti $x = 1$ e $x = \sqrt{2}$ sono di minimo relativo per f.

La funzione è due volte derivabile per $x \in (0,1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, e si ha con calcoli diretti, per tali x:

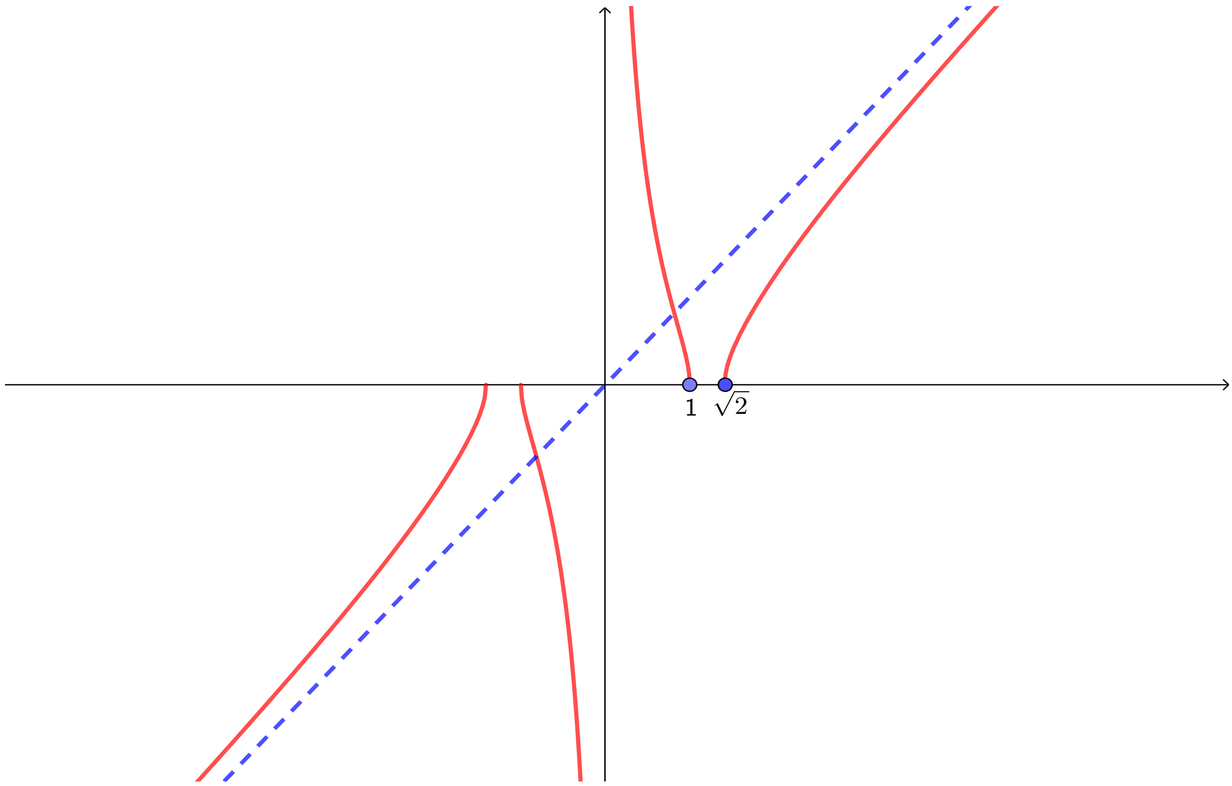
$$f''(x) = \frac{-3x^6 + 12x^4 - 18x^2 + 8}{x^3(x^4 - 3x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dunque per trovare il segno di f'' occorre trovare il segno del numeratore della quantità appena scritta, cioè, ponendo $t = x^2 > 0$, del polinomio $g(t) = -3t^3 + 12t^2 - 18t + 8$. Tale polinomio non ha zeri evidenti. Trattandosi di un polinomio di terzo grado, ha almeno uno zero. Notiamo che $g'(t) = -9t^2 + 24t - 18$, e che tale parabola è sempre negativa (delta minore di zero, concavità rivolta verso il basso). Dunque g è strettamente decrescente, dunque g ha esattamente uno zero. Notiamo che $g(0) = 8 > 0$, $g(1) = -1 < 0$. Dunque l'unico zero di g, indichiamolo con α^2 (si ricordi che $t = x^2$), è un punto compreso tra zero e uno, e f'' si annulla quindi precisamente nel punto $x = \alpha$. Dalle considerazioni precedenti si deduce inoltre che, per $x > 0$, $g(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \alpha)$. Dunque, sempre per $x > 0$:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (0, \alpha), \quad f''(x) < 0 \iff x \in (\alpha, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

Dunque f è convessa se $x \in (0, \alpha)$, f è concava se $x \in (\alpha, 1)$ e se $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = \alpha$ è di flesso.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



1
$\sqrt{2}$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 5/6/2021**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) SIa $L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare la cui matrice associata alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} -3 & k & 2 \\ k & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione di $\ker(L_k)$ e di $\mathrm{Im}(L_k)$. Successivamente, sempre al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base per per tali spazi.
- Sia $\mathcal{S}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ tali che $x_3 = 0$, $x_1 = -x_2 = x_4$. Posto $k = 1$, determinare $L_1^{-1}(\mathcal{S})$.

Soluzione.

- Il rango della matrice può essere al più tre e maggiore o uguale a due (sono presenti minori non nulli di ordine due). Calcolando il determinante delle matrici orlate del minore $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & k & 2 \\ k & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - k^2 \qquad \det \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 3k$$

  Dunque, tali minori si annullano entrambi solo per $k = 1$. Pertanto il rango della matrice vale tre se $k \neq 1$, vale due se $k = 1$.
  Sia $k \neq 1$. In questo caso la dimensione dello spazio immagine è tre, pertanto come base si può scegliere l'insieme dei tre vettori colonna della matrice, ed il nucleo è banale, ovvero formato solo dall'elemento nullo.
  Sia $k = 1$. Allora l'immagine è uno spazio bidimensionale, come base si può prendere una qualsiasi coppia dei vettori colonna della matrice. Per il teorema nullità più rango il nucleo risulta monodimensionale. Per trovare una base del nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo. Si noti che la seconda e terza riga della matrice sono indipendenti, pertanto è possibile omettere la prima e la quarta riga perché ridondanti.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Da cui facilmente si deduce che $x = y = z$. Come base del nucleo è possibile scegliere il vettore $(1, 1, 1)^t$.
- Esplicitando l'azione di L_1 su un generico vettore $(x, y, z)^t$ si ottiene:

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = x_1 \\ x - y = x_2 \\ -x + z = x_3 \\ 2x + y - 3z = x_4 \end{cases}$$

  Il sottospazio $\mathcal{S}$ è monodimensionale e formato dai vettori

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Imponendo queste condizioni sul sistema, si ottiene:

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = \alpha \\ x - y = -\alpha \\ -x + z = 0 \\ 2x + y - 3z = \alpha \end{cases}$$

da cui segue facilmente che $x = z$ e $y - x = \alpha$. La controimmagine di $\mathcal{S}$ è pertanto bidimensionale e una sua parametrizzazione può essere $x = t$, $y = t'$, $z = t$ (dove si è posto $t' = t + \alpha$) con $t, t' \in \mathbb{R}$.

2. (punti 6) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{1}{(\overline{z})^6}, \quad z \neq 0.$$

- Determinare le soluzioni dell'equazione $f(z) = i$;
- Determinare le soluzioni z della disequazione $|f(z)| < 1$.

Soluzione. Posto $w := 1/\overline{z}$ dobbiamo risolvere l'equazione $w^6 = i = e^{i\pi/2}$. Per le note formule sulle radici di un numero complesso avremo che le soluzioni sono date da $w_k = e^{i\vartheta_k}$ con $\vartheta_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)/6$, $k = 0, \ldots, 5$. Poiché si ha $z = 1/\overline{w}$, le soluzioni z_k saranno date da $z_k = 1/\overline{w_k} = 1/\left[\overline{e^{i\vartheta_k}}\right] = 1/e^{-i\vartheta_k} = e^{i\vartheta_k} = w_k$. Esso sono dunque i seguenti numeri complessi:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}, \ z_1 = e^{\frac{5}{12}i\pi}, \ z_2 = e^{\frac{9}{12}i\pi}, \ z_3 = e^{\frac{13}{12}i\pi}, \ z_4 = e^{\frac{17}{12}i\pi}, \ z_5 = e^{\frac{21}{12}i\pi}.$$

Circa la seconda parte basta notare che $|f(z)| = \frac{1}{|(\overline{z})^6|} = \frac{1}{|\overline{z}|^6} = \frac{1}{|z|^6}$. Ma allora

$$|f(z)| < 1 \iff \frac{1}{|z|^6} < 1 \iff |z|^6 > 1 \iff |z| > 1.$$

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Si suggerisce di effettuare in primo luogo lo studio della funzione ausiliaria $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Soluzione. La funzione è dispari, dunque la studieremo solo per $x > 0$. Per determinarne il dominio, studiamo dapprima rapidamente la funzione ausiliaria $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Essa è ovunque definita, dispari, positiva per $x > 0$, tende a zero per $x \to +\infty$, ha derivata data da $f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ la quale, per $x > 0$, si annulla solo per $x = 1$, che è punto di massimo assoluto per f. In particolare, sempre per $x > 0$, vale $0 < f(x) \leq f(1) = \frac{1}{2}$. Ne segue in particolare che l'argomento della tangente è, per $x > 0$, sempre compreso tra 0 e $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, e dunque la tangente è sempre definita. Dunque f è ovunque definita.

Studiamo, sempre per $x > 0$, il segno di f. Si noti dapprima che, per ogni $x > 0$, essendo come detto $\frac{x}{x^2+1} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, vale $\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) > 0$, $\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) > 0$. Quindi, vale $f(x) > 0$ se e solo se:

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) > \tan\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} \iff 1 > \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} \iff \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) > 1,$$

il che è ovviamente sempre falso. Dunque $f(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Evidentemente $f(0) = 0$. È inoltre immediato verificare che vale inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

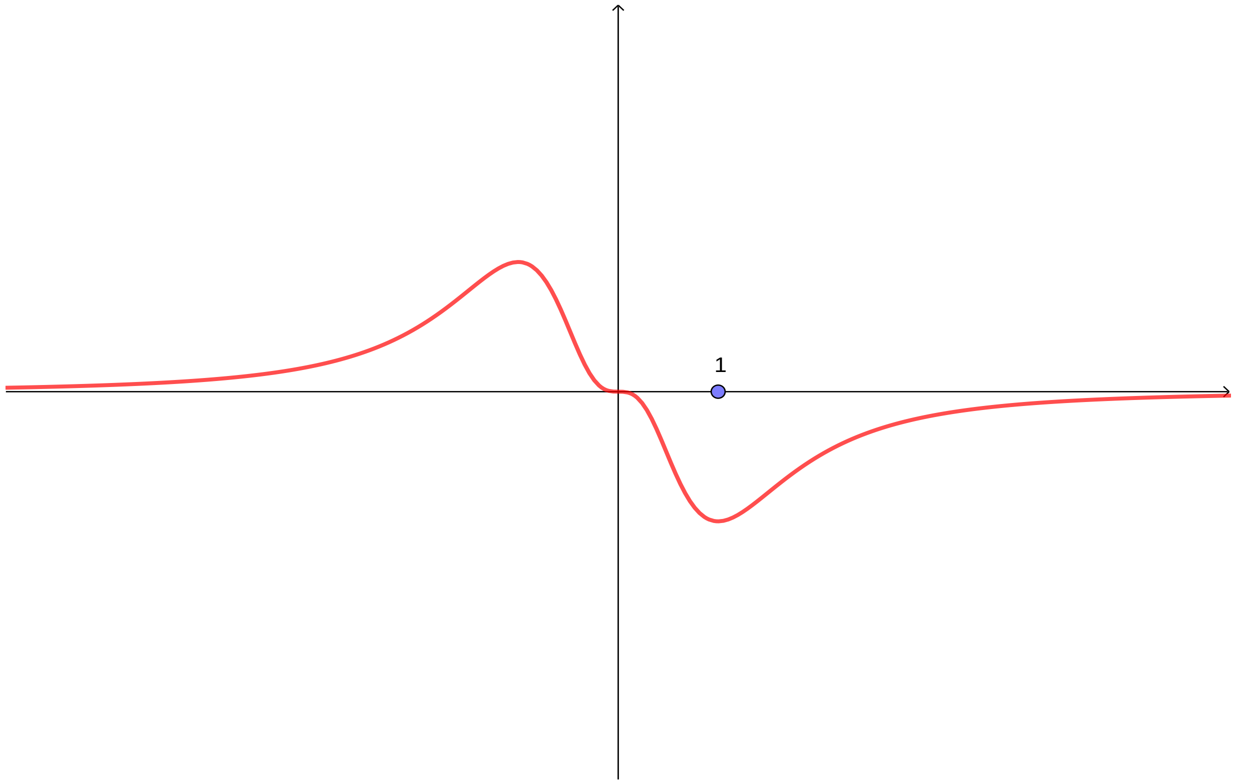
quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$. Calcoliamo infine la derivata, per ogni $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\left[\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}\right] = \frac{1-x^2}{(1+x^2)} \frac{\cos^3\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - 1}{\cos^2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}.$$

Tale derivata prima si annulla, per $x \geq 0$ se $x = 1$ ed eventualmente se $\cos^3\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 1$, cioè se $\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = 1$. Ciò accade, essendo come detto $\frac{x}{x^2+1} \in [0, 1/2]$ per $x \geq 0$, se e solo se $\frac{x}{x^2+1} = 0$, cioè se e solo se $x = 0$.

Ovviamente $\cos^3\left(\frac{x}{x^2+1}\right)-1<0$ se $x>0$, quindi il segno di f' coincide con quello di x^2-1, dunque f decresce se $x\in(0,1)$, cresce per $x>1$, e il punto $x=1$ è un punto di minimo (assoluto). Si noti che $x=0$ è punto stazionario di f, e prolungando per simmetria rispetto all'origine f se ne deduce che $x=0$ è punto di flesso a tangente orizzontale (se si adotta la definizione di flesso come punto in cui la funzione attraversa la propria tangente: se altrimenti ci si volesse riferire al cambio di concavità occorrerebbe studiare la derivata seconda, non richiesta).

In conclusione, il grafico di f è il seguente:



fis.pdf

4. (punti 6) Calcolare le primitive della funzione

$$\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

Soluzione. Poniamo $\sqrt[6]{x}=s$, cioè $x=s^6$, cosicché

$$\int\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=6\int\frac{1+s^2}{1+s^3}s^5\,\mathrm{d}s.$$

Effettuando la divisione di polinomi si ottiene:

$$\frac{s^5+s^7}{1+s^3}=s^4+s^2-s-\frac{s^2-s}{1+s^3},$$

Dunque dobbiamo calcolare $\int\frac{s^2-s}{1+s^3}\,\mathrm{d}s$. Scomponiamo in fratti semplici, notando che $1+s^3=(1+s)(s^2-s+1)$. Cerchiamo $A,B,C\in\mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{s^2-s}{1+s^3}=\frac{A}{1+s}+\frac{Bs+C}{s^2-s+1}.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $A=2/3, B=1/3, C=-2/3$. L'unico integrale non ovvio da calcolare è dunque il seguente:

$$\begin{aligned}\int\frac{s-2}{s^2-s+1}\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{2}\int\frac{2s-1}{s^2-s+1}\,\mathrm{d}s-\frac{3}{2}\int\frac{1}{s^2-s+1}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\log(s^2-s+1)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\log(s^2-s+1)-2\int\frac{1}{\frac{4}{3}\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{2}\log(s^2-s+1)-\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]+c\end{aligned}$$

con c costante reale arbitraria, dove si è usato il fatto che $s^2 - s + 1 > 0$ per ogni s. In conclusione:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 6\int \frac{1+s^2}{1+s^3}s^5\,\mathrm{d}s = 6\int \left(s^4 + s^2 - s - \frac{s^2-s}{1+s^3}\right)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{6}{5}s^5 + 2s^3 - 3s^2 - 6\int \frac{s^2-s}{1+s^3}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{6}{5}s^5 + 2s^3 - 3s^2 - 2\int \left(\frac{2}{1+s} + \frac{s-2}{s^2-s+1}\right)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{6}{5}s^5 + 2s^3 - 3s^2 - 4\log|1+s| - \log(s^2-s+1) + 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(s-\frac{1}{2}\right)\right] + c \\
&= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 4\log(1+x^{\frac{1}{6}}) - \log(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + 1) + 2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{2}\right)\right] + c,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $1 + x^{\frac{1}{6}} > 0$ per ogni x.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 30/8/2021**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 10) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

- Determinare i valori del parametro reale h affinchè A sia invertibile.
- Determinare l'inversa della matrice A nel caso $h = 2$.
- Stabilire se A sia diagonalizzabile nel caso $h = 1$.

Soluzione.

- La matrice A è invertibile solo se $\det A \neq 0$. Quindi se $(h-1)^2 \neq 0$, vale a dire $h \neq 1$.
- Posto $h = 2$, per trovare l'inversa di A si può utilizzare il metodo dei complementi algebrici o l'algoritmo di Gauss.
  La matrice dei complementi algebrici risulta essere la seguente:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

  Da cui, valendo $\det A = 1$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

  Alternativamente, con il metodo di Gauss si può procedere nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II-III]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[I-2\times II/III-II]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[III-2\times I]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[II\to I\to III]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

- posto $h = 1$, l'equazione caratteristica della matrice A risulta (nel secondo passaggio sottrarre la terza colonna alla prima):

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + \lambda(-1+\lambda) = \lambda^2(3-\lambda) = 0$$

  Da cui risulta che lo spettro di A è formato dagli autovalori $\lambda_1 = 0$ (con molteplicità algebrica doppia) e $\lambda_2 = 3$ (semplice). Poichè il rango di A vale 2 (sono presenti minori di ordine due non nulli), segue che il nucleo di A, ovvero l'autospazio relativo all'autovalore zero è monodimensionale. Pertanto la dimensione geometrica relativa all'autovalore $\lambda_1 = 0$ non coincide con la dimensione algebrica e di conseguenza la matrice non è diagonalizzabile.

2. (punti 6) Si consideri, al variare dei parametri $\alpha, \beta > 0$, la funzione

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \left[1 + \log(1 + x^2)\right]^\alpha + 2(\cos x)^\beta - 3.$$

- Determinare, al variare dei parametri α, β *escludendo il caso* $\alpha = \beta = \frac{14}{9}$, il termine principale per $x \to 0$ dello sviluppo di Taylor di $f_{\alpha,\beta}$.
- Determinare, al variare dei parametri α, β *e sempre escludendo il caso* $\alpha = \beta = \frac{14}{9}$, il segno di $f_{\alpha,\beta}$ in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine.

Soluzione. Calcoliamo, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \log(1 + x^2)\right]^\alpha = \left[1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right]^\alpha = 1 + \alpha\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \alpha\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^4 + o(x^4) = 1 + \alpha x^2 + \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{\alpha}{2}\right]x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \alpha x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
&(\cos x)^\beta = \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]^\beta = 1 + \beta\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \beta\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\beta(\beta-1)}{8}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{\beta}{2}x^2 + \left[\frac{\beta}{24} + \frac{\beta(\beta-1)}{8}\right]x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\beta(3\beta-2)}{24}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Notiamo in primo luogo che, data l'espressione di $f_{\alpha,\beta}$, i termini in x^2 non si cancellano se $\alpha \neq \beta$. In tal caso, per $x \to 0$ vale semplicemente:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (\alpha - \beta)x^2 + o(x^2).$$

Inoltre, si ha chiaramente che se $\alpha > \beta > 0$ allora $f_{\alpha,\beta}$ è positiva in un opportuno intorno dell'origine privato dell'origine stessa, mentre se $0 < \alpha < \beta$ allora $f_{\alpha,\beta}$ è negativa in un opportuno intorno dell'origine privato dell'origine stessa.

Sia invece $\alpha = \beta$. Allora, ancora per $x \to 0$:

$$f_{\alpha,\alpha} = \frac{\alpha(9\alpha - 14)}{12}x^4 + o(x^4).$$

Si noti che tale termine non è nullo poichè per ipotesi il caso $\alpha = \beta = \frac{14}{9}$ non va considerato. Si vede inoltre che se $\alpha = \beta > \frac{14}{9}$ la funzione è positiva in un opportuno intorno dell'origine privato dell'origine stessa, mentre per $\alpha = \beta < \frac{14}{9}$ la funzione è negativa in un opportuno intorno dell'origine privato dell'origine stessa.

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left[1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right].$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. Va in primo luogo posto $x \neq -1$. Inoltre dev'essere definita la quantità $\log\left(\frac{x}{1+x}\right)$. Ciò accade se $\frac{x}{1+x} > 0$, che è verificato se $x > 0$ e se $x < -1$. Deve valere poi $\log\left(\frac{x}{1+x}\right) > -1$, cioè $\frac{x}{1+x} > e^{-1}$, che è verificato se $x < -1$ e se $x > \frac{1}{e-1}$. Il dominio di definizione di f è dunque l'insieme $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{e-1}, +\infty\right)$. Ovviamente non vi sono simmetrie evidenti dato il dominio.

Calcoliamo i limiti di f alla frontiera del dominio di f. Se $x \to \pm\infty$, $\frac{x}{1+x} \to 1$, quindi $\log\left(\frac{x}{1+x}\right) \to 0$, quindi $\log\left[1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right] \to \log(1+0) = 0$. Dunque

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Se $x \to \left(\frac{1}{e-1}\right)^+$, allora $\frac{x}{1+x} \to \left(\frac{1}{e}\right)^-$. Quindi $1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right) \to 0^+$ in tale limite. Ne segue che

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{e-1}\right)^+} = -\infty.$$

Infine, se $x \to (-1)^-$ si ha che $\frac{x}{1+x} \to +\infty$, e quindi

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty.$$

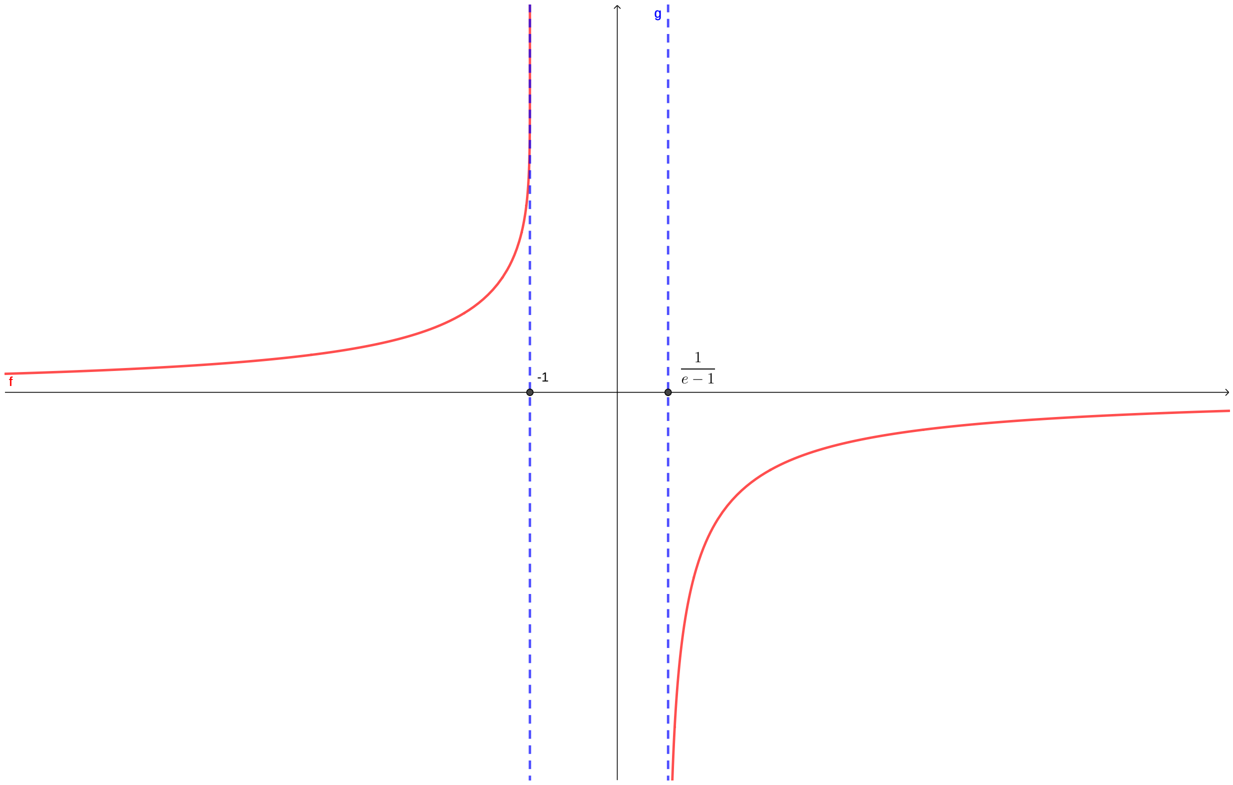
Studiamo il segno di f . Si ha che $f(x) > 0$ se e solo se $1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right) > 1$, cioè se e solo se $\log\left(\frac{x}{1+x}\right) > 0$, cioè se e solo se $\frac{x}{1+x} > 1$. Quest'ultima disequazione è soddisfatta, per x nel dominio di f , se e solo se $x < -1$. f è invece negativa per $x > \frac{1}{e-1}$ Non vi sono punti in cui f si annulla.

La funzione è derivabile per ogni x nel suo dominio. Per tali x si ha immediatamente:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right)} \frac{x+1}{x} \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{x(x+1)\left[1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]}.$$

È chiaro che, per costruzione, $1 + \log\left(\frac{x}{1+x}\right) > 0$ per ogni x nel dominio di f . Quindi il segno di f' coincide con quello di $x(x+1)$. Dunque $f'(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f . Quindi f è crescente separatamente in $(-\infty, -1)$ e in $\left(\frac{1}{e-1}, +\infty\right)$. Non vi sono estremanti, né relativi né tantomeno assoluti.

In conclusione, il grafico di f è il seguente;



4. (punti 6) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+3}+1}.$$

(a) Calcolare le primitive di f .

(b) Stabilire, *senza far uso della primitiva calcolata*, per quali valori di x è definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soluzione. Poniamo $\sqrt[3]{x+3} = t$. Quindi $x + 3 = t^3$, $x = t^3 - 3$, $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$. Si ha:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+3}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3-2}{t+1} 3t^2\,\mathrm{d}t.$$

Effettuando la divisione di polinomi abbiamo:

$$\frac{3t^5-6t^2}{t+1}=3t^4-3t^3+3t^2-9t+9-\frac{9}{t+1}.$$

Ne segue che

$$\int\frac{t^3-2}{t+1}\,3t^2\,\mathrm{d}t=\frac{3}{5}t^5-\frac{3}{4}t^4+t^3-\frac{9}{2}t^2+9t-9\log|t+1|+c$$

con $c\in\mathbb{R}$ arbitrario. Dunque:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x+3}+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}(x+3)^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}(x+3)^{\frac{4}{3}}+x-\frac{9}{2}(x+3)^{\frac{2}{3}}+9(x+3)^{\frac{1}{3}}-9\log|(x+3)^{\frac{1}{3}}+1|+c$$

Si noti che uno degli addendi risulta essere t^3, cioè $x+3$, ma il $+3$ può essere riassorbito nella costante additiva c.

Per rispondere alla seconda domanda, si noti che $\sqrt[3]{x+3}+1=0$ se e solo se $x=-4$. Dunque va discussa in primo luogo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{-4}^{0}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Sia $g(t)=\sqrt[3]{t+3}+1$ il denominatore di $f(t)$. Allora come detto $g(-4)=0$. Si vede immediatamente che $g'(-4)=\frac{1}{3}\neq 0$. Quindi, per la formula di Taylor con resto di Peano, vale $g(t)=\frac{1}{3}(t+4)+o(t+4)$ per $t\to -4$. Ne segue che, dato che il numeratore di $f(t)$ vale -3 per $t=-4$:

$$f(t)\underset{t\to-4}{\sim}-\frac{9}{t+4}.$$

Tale singolarità non è integrabile in senso generalizzato in un intorno di -4. Dunque l'integrale improprio in (1) non esiste finito. Ne segue che il dominio di F è l'intervallo $(-4,+\infty)$.