Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 14 punti

Risolvere

$$e^{z^2-|z^2|} = e^{\mathrm{Im}(z^2)}$$

Soluzione dell'esercizio 1

Poiché $e^z = e^w$ se e solo se $z = w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, l'equazione è equivalente a

$$z^2 - |z^2| = \mathrm{Im}(z^2) + 2k\pi i\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

ossia, se $z = x + iy$,

$$x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 + y^2) = 2xy + 2k\pi i\,.$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2y^2 = 2xy\,, \\ 2xy = 2k\pi\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $(x, 0)$ è soluzione con $k = 0$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ e non ci sono soluzioni per $k > 0$. Quando $k < 0$ abbiamo $x = k\pi/y$ e $-y^2 = k\pi$, quindi

$$y = \pm\sqrt{-k\pi}\,, \quad x = -y\,.$$

Le soluzioni sono

$$z = x\,, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } z = \pm(1-i)\sqrt{k\pi}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Esercizio 2 18 punti

Sia, assegnato $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$f_a(x) = \frac{e^{\sin(ax^2)} - \cos(ax)}{\log(\cos x)}.$$

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} f_a(x).$$

Successivamente, calcolare al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_a(x) - b}{x^2}$$

stabilendo infine se esistano valori di $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ per cui esso sia nullo (non è richiesto il calcolo esplicito di tali valori)

Soluzione dell'esercizio 2

Vale, qui e in seguito per $x \to 0$:

$$\sin(ax^2) = ax^2 + o(x^5), \quad e^{\sin(ax^2)} = e^{ax^2 + o(x^5)} = 1 + ax^2 + o(x^3), \quad \cos(ax) = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^3)$$

e quindi:

$$e^{\sin(ax^2)} - \cos(ax) = \left(a + \frac{a^2}{2}\right) x^2 + o(x^3) = \frac{a}{2}(2+a)x^2 + o(x^3).$$

Inoltre:

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Dunque:

$$f_a(x) = \frac{\frac{a}{2}(2+a)x^2 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -a(2+a).$$

Per rispondere alla seconda domanda occorre sviluppare f_a a un ordine superiore. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
e^{\sin(ax^2)} &= e^{ax^2 + o(x^5)} = 1 + ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + o(x^5),\\
\cos(ax) &= 1 - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
e^{\sin(ax^2)} - \cos(ax) &= ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
&= \left(a + \frac{a^2}{2}\right) x^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right) x^4 + o(x^5),\\
\log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{\left(a + \frac{a^2}{2}\right) + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right) x^2 + o(x^3)}{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} = -\frac{(2a + a^2) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right) x^2 + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\\
&= -\left[(2a + a^2) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right) x^2 + o(x^3)\right] \left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right]\\
&= -\left(2a + a^2\right) + \left[\frac{2a + a^2}{6} - a^2 + \frac{a^4}{12}\right] x^2 + o(x^3)\\
&= -\left(2a + a^2\right) + \frac{a}{12}\left[4 - 10a + a^3\right] x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Quindi

$$f_a(x) - b = -b - \left(2a + a^2\right) + \frac{a}{12}\left[4 - 10a + a^3\right] x^2 + o(x^3),$$

e da ciò segue che il limite richiesto vale $+\infty$ se $b < -(2a + a^2)$ e che esso vale $-\infty$ se $b > -(2a + a^2)$. Se, infine, $b = -(2a + a^2)$ si ha:

$$\frac{f_a(x) + 2a + a^2}{x^2} = \frac{\frac{a}{12}\left[4 - 10a + a^3\right] x^2 + o(x^3)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{a}{12}\left(4 - 10a + a^3\right)$$

Infine, il polinomio $p(a) = 4 - 10a + a^3$ ha chiaramente tre zeri, in quanto è positivo se $a = 0$, negativo ad esempio se $a = 1$, positivo per a positivo e sufficientemente grande, negativo per a negativo e sufficientemente grande in modulo. Per tali tre valori, ed esattamente per essi, il termine appena calcolato è nullo.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 14 punti

Risolvere

$$e^{|z^2|-\mathrm{Im}(z^2)} = e^{z^2}$$

Soluzione dell'esercizio 1

Poiché $e^z = e^w$ se e solo se $z = w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, l'equazione è equivalente a

$$|z^2| - \mathrm{Im}(z^2) = z^2 + 2k\pi i\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

ossia, se $z = x + iy$,

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x^2 - y^2 + 2ixy) + 2k\pi i\,.$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2y^2 = 2xy\,, \\ 2xy = -2k\pi\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $(x, 0)$ è soluzione con $k = 0$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ e non ci sono soluzioni per $k > 0$. Quando $k < 0$ abbiamo $x = -k\pi/y$ e $y^2 = -k\pi$, quindi

$$x = y = \pm\sqrt{-k\pi}\,.$$

Le soluzioni sono

$$z = x\,, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } z = \pm(1+i)\sqrt{k\pi}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Esercizio 2 18 punti

Sia, assegnato $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$f_a(x) = \frac{e^{-\sin(ax^2)} - \cos(ax)}{\log(\cos x)}.$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} f_a(x).$$

Successivamente, calcolare al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - b}{x^2}$$

stabilendo infine se esistano valori di $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ per cui esso sia nullo (non è richiesto il calcolo esplicito di tali valori)

Soluzione dell'esercizio 2

Vale, qui e in seguito per $x \to 0$:

$$\sin(ax^2) = ax^2 + o(x^5), \quad e^{-\sin(ax^2)} = e^{-ax^2+o(x^5)} = 1 - ax^2 + o(x^3), \quad \cos(ax) = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^3)$$

e quindi:

$$e^{-\sin(ax^2)} - \cos(ax) = \left(\frac{a^2}{2} - a\right)x^2 + o(x^3) = \frac{a}{2}(a-2)x^2 + o(x^3).$$

Inoltre:

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Dunque:

$$f_a(x) = \frac{\frac{a}{2}(a-2)x^2 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \xrightarrow[x\to 0]{} a(2-a).$$

Per rispondere alla seconda domanda occorre sviluppare f_a a un ordine superiore. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
e^{-\sin(ax^2)} &= e^{-ax^2+o(x^5)} = 1 - ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + o(x^5),\\
\cos(ax) &= 1 - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
e^{-\sin(ax^2)} - \cos(ax) &= -ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
&= \left(\frac{a^2}{2} - a\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right)x^4 + o(x^5),\\
\log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{\left(\frac{a^2}{2} - a\right) + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right)x^2 + o(x^3)}{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} = -\frac{(a^2-2a) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right)x^2 + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\\
&= -\left[(a^2-2a) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right)x^2 + o(x^3)\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right]\\
&= (2a - a^2) + \left[\frac{a^2-2a}{6} - a^2 + \frac{a^4}{12}\right]x^2 + o(x^3)\\
&= (2a - a^2) + \frac{a}{12}\left[a^3 - 10a - 4\right]x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Quindi

$$f_a(x) - b = -b + 2a - a^2 + \frac{a}{12}\left[a^3 - 10a - 4\right] x^2 + o(x^3),$$

e da ciò segue che il limite richiesto vale $+\infty$ se $b < 2a - a^2$ e che esso vale $-\infty$ se $b > 2a - a^2$. Se, infine, $b = 2a - a^2$ si ha:

$$\frac{f_a(x) - 2a + a^2}{x^2} = \frac{\frac{a}{12}\left[a^3 - 10a - 4\right] x^2 + o(x^3)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{a}{12}\left(a^3 - 10a - 4\right)$$

Infine, il polinomio $p(a) = a^3 - 10a - 4$ ha chiaramente tre zeri, in quanto è positivo ad esempio se $a = -2$, negativo ad esempio se $a = 2$, positivo per a positivo e sufficientemente grande, negativo per a negativo e sufficientemente grande in modulo. Per tali tre valori, ed esattamente per essi, il termine appena calcolato è nullo.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere l'equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 + 2\overline{z}^2 + 1 = 0.$$

Determinare inoltre le soluzioni di massimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Scritto $z = x + iy$, calcoliamo esplicitamente le potenze ottenendo:

$$\begin{aligned} 0 &= (x+iy)^4 + 2(x-iy)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 2ixy)^2 + 2(x^2 - y^2 - 2ixy) + 1 \\ &= x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 2x^2y^2 + 4ix^3y - 4ixy^3 + 2x^2 - 2y^2 - 4ixy + 1 \\ &= x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1 + 4ixy(x^2 - y^2 - 1). \end{aligned}$$

La parte immaginaria dell'ultima espressione scritta si annulla se $x = 0$, o se $y = 0$, o se $x^2 = y^2 + 1$. Verifichiamo quando si annulla anche la parte reale dell'ultima espressione scritta, in ciascuno di tali tre casi. Se $x = 0$ deve valere $y^4 - 2y^2 + 1 = 0$, cioè $y^2 = 1$, cioè $y = \pm 1$. Si ottengono le radici $z = \pm i$. Se $y = 0$ deve valere $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, che non ha soluzioni reali. Se infine $x^2 = y^2 + 1$ deve valere:

$$0 = (y^2+1)^2 + y^4 - 6(y^2+1)y^2 + 2(y^2+1) - 2y^2 + 1 = -4y^4 - 4y^2 + 4,$$

cioè $y^4 + y^2 - 1 = 0$, cioè $y^2 = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. È accettabile la sola radice positiva, e si ha dunque $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. In corrispondenza a ciò si ottiene $x^2 = y^2 + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e quindi $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. Risultano quindi le ulteriori quattro soluzioni seguenti:

$$z = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

dove si intende che tutte e quattro le possibili combinazioni dei segni sono possibili. Vi sono dunque sei soluzioni. Le prime due identificate hanno modulo uno. Le ultime quattro hanno modulo dato da:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt[4]{5}.$$

Le radici di massimo modulo sono dunque le ultime quattro determinate.

Esercizio 2 8 punti

Mostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\log(1+x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

esiste in senso improprio e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 2

La funzione integranda è continua e limitata in $[0,+\infty)$, quindi si deve verificare il comportamento a $+\infty$. Per $x \to +\infty$

$$\log(1+x) \sim \log x, \quad (1+x^2)^2 \sim x^4 \Rightarrow \frac{x\log(1+x)}{(1+x^2)^2} \sim \frac{\log x}{x^3}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^3} dx$ converge (confronto con $\frac{1}{x^{5/2}}$), quindi l'integrale converge in senso improprio. Poniamo $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\log(1+x)}{(1+x^2)^2}\, dx$. Integriamo per parti:

$$u = \log(1+x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x}dx, \quad dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2(1+x^2)}\,,$$

quindi

$$I = uv\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v \cdot du = \left[\log(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x^2)(1+x)}\, dx$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \log(1+x)\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) = 0\,,$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\, dx$$

$$I = \frac{1}{4}\left[\log(1+x) + \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{8}.$$

Per giustificare l'ultima conclusione, notiamo che occorre in realtà calcolare

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{4}\left[\log(1+x) + \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{b} \\
&= \frac{1}{4}\left[\log(1+b) + \arctan(b) - \frac{1}{2}\ln(1+b^2)\right] = \frac{\pi}{8} + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\log\left(\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{8},
\end{aligned}$$

in quanto $\log\left(\frac{1+b}{\sqrt{1+b^2}}\right) \to 0$ se $b \to +\infty$.

Esercizio 3 10 punti

Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x-3|}{1+|x|}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita se

$$\frac{|x-3|}{1+|x|} > 0\,,$$

ossia per ogni $x \neq 3$.
Dividiamo il dominio in tre parti:
Se $x > 3$, allora $|x-3| = x-3$ e $|x| = x$, quindi $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{1+x}\right)$ e $f'(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)}$.
Se $0 \le x < 3$, allora $|x-3| = 3-x$ e $|x| = x$, quindi $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{1+x}\right)$ e $f'(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)}$.
Se $x < 0$, allora $|x-3| = 3-x$ e $|x| = -x$, quindi $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{1-x}\right)$ e $f'(x) = \frac{2}{(x-3)(x-1)}$.
Osserviamo che $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$ e $x = 3$, e altrove la derivata non è mai nulla.

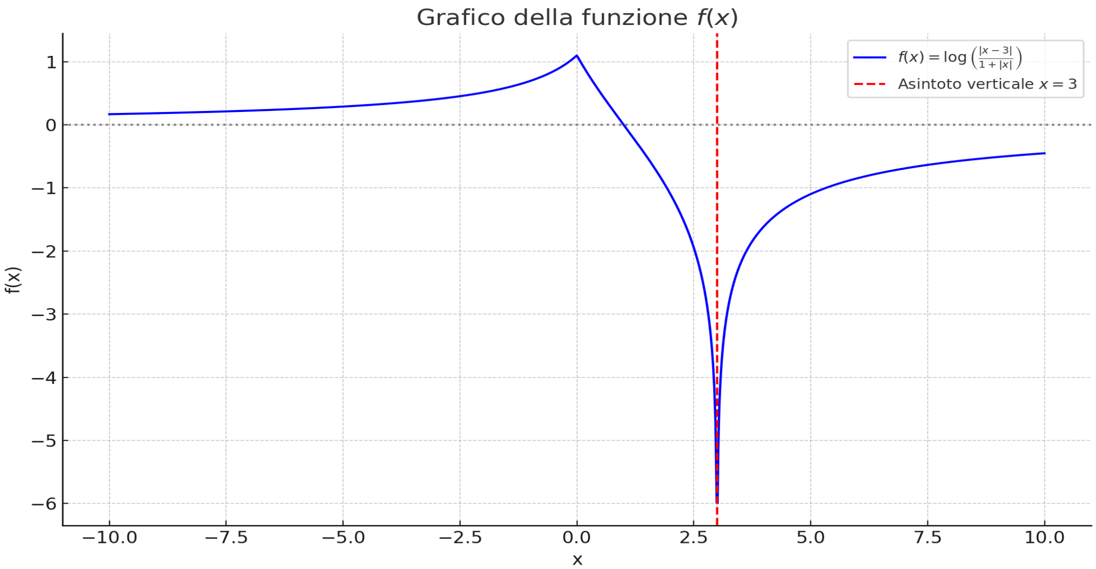
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \log\left(\frac{3-x}{1+x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \log\left(\frac{x-3}{1+x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{x-3}{1+x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{3-x}{1-x}\right) = 0$$

La funzione non è né pari né dispari.
$f(x) \geq 0$ se $\frac{|x-3|}{1+|x|} \geq 1$, ossia $|x-3| \geq 1+|x|$ e quindi $x \leq 1$.
La funzione ha un asintoto verticale in $x = 3$, tende a 0 all'infinito.



Esercizio 4 7 punti

Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a$$

converge. Successivamente determinare, sempre al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a}{(x-3)^n},$$

dove $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 3$, e non è richiesto di studiare il caso $x = 2$.

Soluzione dell'esercizio 4

Notiamo in primo luogo che, per $n \to +\infty$, vale:

$$2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1 = 2n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 2n - 1 = 2n\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2n - 1$$
$$= -\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quindi,

$$\left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a = -\frac{1}{4} n^{a-1} + o\left(n^{a-1}\right).$$

La serie numerica proposta è dunque a termini almeno asintoticamente di segno costante, e per il criterio del confronto converge allora se e solo se $a < 0$.

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che, posto $a_n = \left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a$, si ottiene dai calcoli precedenti, per $n \to +\infty$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \left(\frac{1}{4} n^{a-1}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1,$$

per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, dove si è usato il fatto che $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ per $n \to +\infty$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza pari a uno per ogni a (se si preferisce, si arriva alla stessa conclusione col criterio del rapporto). Dunque, sempre per ogni a, la seconda serie assegnata converge se $\frac{1}{|x-3|} < 1$, cioè se $|x-3| > 1$, cioè se $x > 4$ oppure $x < 2$, non converge se $x \in (2,3) \cup (3,4)$. Se $x = 4$, si ritrova la prima serie studiata, che converge se e solo se $a < 0$. Il caso $x = 2$ non è richiesto (si mostra comunque che la serie converge per $x = 2$ se e solo se $a < 1$).

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$e^{2z} - 5e^z + 4 = 0;$$

sia A l'insieme delle soluzioni dell'equazione. Determinare nel campo complesso l'insieme

$$B := \{t \in \mathbb{C} \,|\, t = iz,\, z \in A\}\,;$$

tracciare l'insieme B nel piano complesso. Determinare il punto nell'insieme A di minimo modulo e, se esiste, il punto di massimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Poniamo $w = e^z$, con $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'equazione diventa:

$$w^2 - 5w + 4 = 0\,,$$

le soluzioni sono $w = 4$ e $w = 1$.
Ora $z = \log w$ nel senso del logaritmo complesso:

$$w = 1 \Rightarrow z = \log 1 = 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$w = 4 \Rightarrow z = \log 4 + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi:

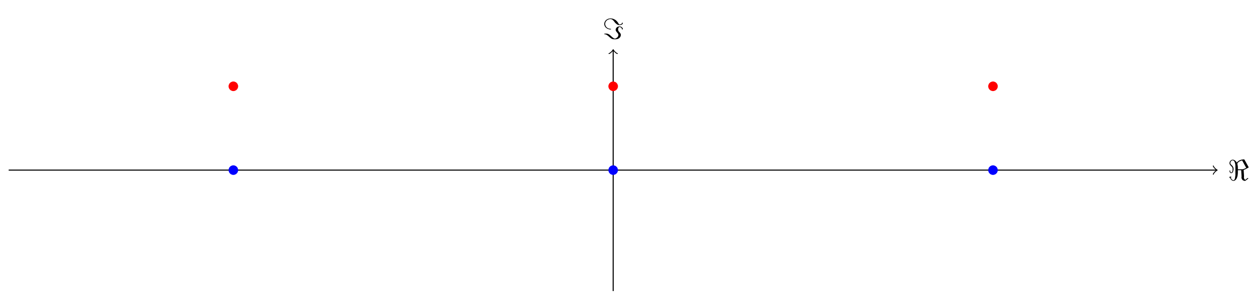
$$A = \{2\pi ik, \quad \log 4 + 2\pi ik \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Ora calcoliamo:

$$B = \{t = iz \mid z \in A\} \Rightarrow t = iz = \begin{cases} i \cdot 2\pi ik = -2\pi k & \text{(reale)} \\ i(\log 4 + 2\pi ik) = i\log 4 - 2\pi k & \text{(complesso)} \end{cases}$$

Quindi l'insieme B è costituito da:

- Una successione di numeri reali: $-2\pi k$
- Una successione di punti sul piano complesso: $i\log 4 - 2\pi k$



La soluzione di minimo modulo è $z = 0$. L'insieme A è illimitato, quindi non esiste la soluzione di massimo modulo.

Esercizio 2 8 punti

Calcolare le primitive di

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}-1)}\,.$$

Successivamente, stabilire senza far uso della primitiva calcolata, se esistono i seguenti integrali impropri:

$$\int_1^2 f(x)\,dx, \qquad \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

Soluzione dell'esercizio 2

Poniamo:

$$t = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^4 \quad \Rightarrow \quad dx = 4t^3\,dt$$

Sostituendo, l'integrale diventa:

$$\int \frac{t}{(1+t)(t^2-1)} \cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^4}{(1+t)(t^2-1)}\,dt = 4\int \frac{t^4}{(1+t)^2(t-1)}\,dt$$

Effettuando la divisione di polinomi abbiamo:

$$\frac{t^4}{(1+t)^2(t-1)} = t-1+\frac{2t^2-1}{(1+t)^2(t-1)}$$

Con alcuni calcoli, la scomposizione in fratti semplici dell'ultima funzione scritta risulta:

$$\frac{2t^2+1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{4(t-1)} + \frac{7}{4(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2}.$$

L'integrazione è ora immediata:

$$\begin{aligned} &4\int \left(t-1+\frac{1}{4(t-1)} + \frac{7}{4(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2}\right)dt \\ &= 2t^2 - 4t + \log|t-1| + 7\log|1+t| + \frac{2}{1+t} + C \end{aligned}$$

Tornando alla variabile originaria si ha:

$$2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \log\left|\sqrt[4]{x}-1\right| + 7\log(\sqrt[4]{x}+1) + \frac{2}{1+\sqrt[4]{x}} + C,$$

con C costante arbitraria.

Per rispondere alla domanda successiva, notiamo che $\sqrt[4]{x}-1 = \frac{x-1}{4} + o(x-1)$ per $x \to 1$ (sviluppare in un intorno di $x=1$), e dunque il primo integrale improprio non esiste. Inoltre $f(x) \sim x^{-1/2}$ per $x \to +\infty$, quindi neppure il secondo integrale improprio esiste.

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{x-1}}{x-2},$$

e disegnarne un grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni sul numero di eventuali flessi elementarmente deducibili dal resto dello studio.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita se $x \in [1,2) \cup (2,+\infty)$. Si ha:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

Dunque, $x = 2$ è asintoto verticale bilatero. Non vi sono asintoti obliqui dato che la crescita della funzione è esponenziale. Si vede con calcoli elementari che, per $x \in (1,2) \cup (2,+\infty)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(2x^2-7x+4)}{2(x-2)^2\sqrt{x-1}}.$$

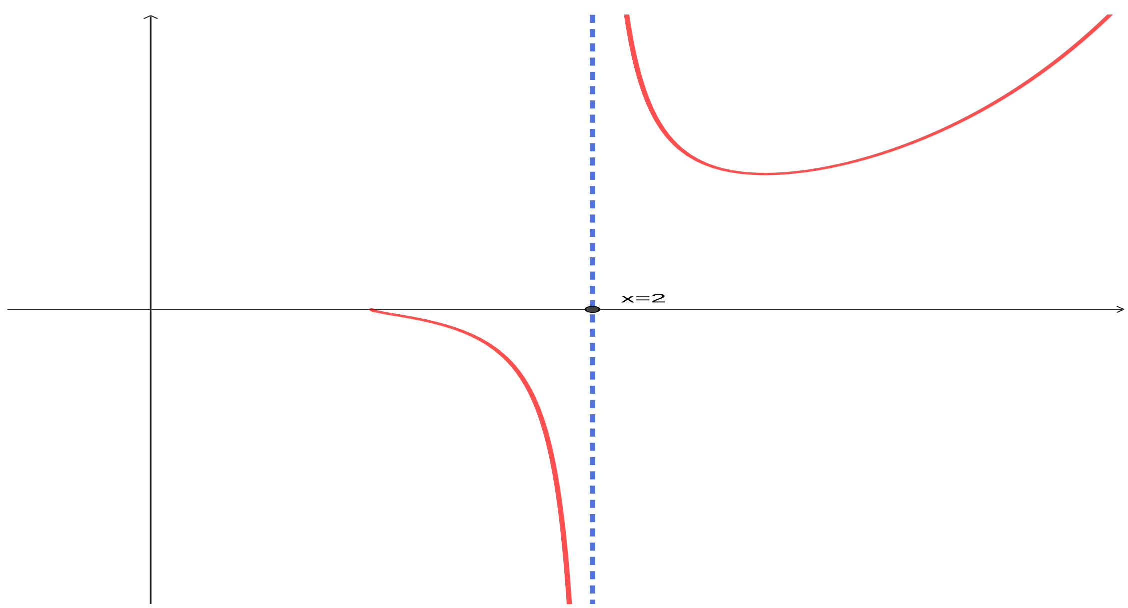
La funzione non ammette derivata destra in $x = 1$ e vale

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = -\infty.$$

Dunque, la tangente alla curva tende a diventare verticale per $x \to 1^+$. Il segno e gli zeri di f' coincidono con quelli di $2x^2 - 7x + 4$. Tale polinomio si annulla per $x \in (7 \pm \sqrt{17})/4$. Chiaramente, $(7 - \sqrt{17})/4 < 1$ e quindi tale zero non è accettabile. Si ha quindi:

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > \frac{7+\sqrt{17}}{4}, \quad f'(x) < 0 \text{ se } x \in (1,2) \cup \left(2, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right).$$

La funzione è decrescente se $x \in (1,2)$ e se $x \in \left(2, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$, crescente se $x > \frac{7+\sqrt{17}}{4}$. Il punto $x = \frac{7+\sqrt{17}}{4}$ è di minimo relativo. Non vi sono estremi assoluti. Lo studio svolto, in particolare il calcolo di $\lim_{x\to1^+} f'(x)$, mostra che vi è almeno un flesso in $(1,2)$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 4 7 punti

Determinare la funzione limite per la successione di funzioni

$$f_n(x) = nx\left(x - n\log\left(\frac{n+x}{n}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

e determinare se la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$.

Soluzione dell'esercizio 4

Fissato $x \in \mathbb{R}$, studiamo il limite per $n \to +\infty$ di

$$f_n(x) = nx\left(x - n\log\left(\frac{n+x}{n}\right)\right) = nx^2 - n^2 x\log\left(\frac{n+x}{n}\right)$$

Lo sviluppo di Taylor di $\log\left(\frac{n+x}{n}\right) = \log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ è

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)$$

quindi

$$n^2 x\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = n^2 x\left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = nx^2 - \frac{x^3}{2} + o(1)$$

e

$$f_n(x) = nx^2 - n^2 x\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = nx^2 - \left(nx^2 - \frac{x^3}{2} + o(1)\right) = \frac{x^3}{2} + o(1)\,.$$

Ne segue che, per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{x^3}{2}\,.$$

Poiché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| nx^2 - n^2 x\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x^3}{2}\right| = +\infty\,,$$

in quanto la quantità sotto modulo è illimitata per $x \to \pm\infty$, la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 6 punti

Risolvere l'equazione

$$e^{2z} - (2+i)e^z + 1 + i = 0.$$

Soluzione dell'esercizio 1

Ponendo $w = e^z$ si ottiene l'equazione $w^2 - (2+i)w + 1 + i = 0$, che ha soluzioni $w = 1$ e $w = 1 + i$.

$e^z = 1$ se e solo se $z = 2k\pi i$.

Per risolvere $e^z = 1+i$, sia $z = x+iy$. Poiché $|1+i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1+i) = \pi/4$, allora l'equazione si può scrivere come $e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, quindi $x = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2$, mentre $y = \pi/4 + 2k\pi$, quindi $z = \frac{1}{2}\log 2 + i\pi/4 + 2k\pi i$.

Esercizio 2 10 punti

Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(|x-1|+1) - \log(|x+1|+1).$$

Soluzione dell'esercizio 2

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile per ogni $x \neq \pm 1$. I punti $x = \pm 1$ vanno studiati a parte. Osserviamo che $f(-x) = \log(|-x-1|+1) - \log(|-x+1|+1) = \log(|x+1|+1) - \log(|x-1|+1) = -f(x)$, ossia la funzione è dispari. La studiamo allora per $x \in [0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \log(2-x) - \log(x+2) \text{ se } x < 1 \\ \log(x) - \log(x+2) \text{ se } x \geq 1\,, \end{cases}$$

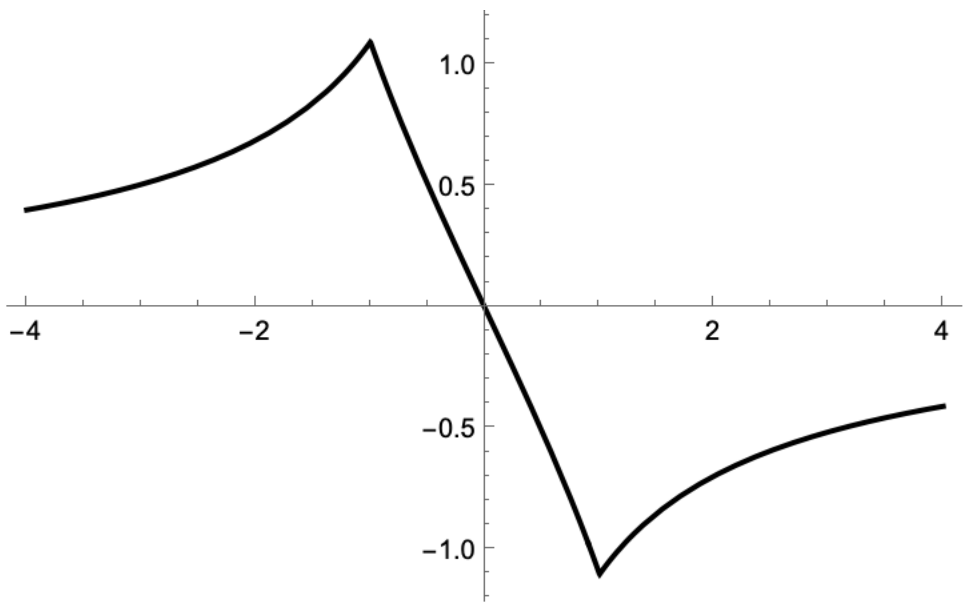
quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4} \text{ se } x < 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)} \text{ se } x > 1\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $f'(x) < 0$ per $x \in [0,1)$ e $f'(x) > 0$ per $x > 1$, inoltre $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -4/3$ e $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2/3$, quindi $x = 1$ è un punto angoloso.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{8x}{(x^2-4)^2} \text{ se } x < 1 \\ -\frac{2(2x+2)}{(x^2+2x)^2} \text{ se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $f''(x) < 0$ per $x \in [0,1)$ e $x > 1$, quindi la funzione è concava in $(0,1)$ e in $(1,+\infty)$. Essendo dispari, segue che $x = 0$ è un punto di flesso. Poiché $f(x) = \log \frac{x}{x+2}$ quando $x > 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



Esercizio 3 8 punti

Stabilire se la seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[ne^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}-\left(n+1-\frac{1}{2n}\right)\right].$$

converge, diverge o è indeterminata. Successivamente stabilire per quali $x \neq 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[ne^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}-\left(n+1-\frac{1}{2n}\right)\right]\frac{1}{(2x)^n}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Vale, qui e in seguito per $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
e^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} &= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\
&= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{5}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

Detto a_n il termine generale della prima serie data, si ha:

$$\begin{aligned}
a_n &= n\left[1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{5}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-\left(n+1-\frac{1}{2n}\right)\\
&= -\frac{5}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ciò mostra in particolare che il termine generale della serie è definitivamente negativo. Per il criterio del confronto asintotico, e per il fatto che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, la prima serie assegnata converge. Vale inoltre, dai calcoli precedenti, $a_n \sim -\frac{5}{6n^2}$ per $n \to +\infty$. Usando, a propria scelta, o il criterio della radice o quello del rapporto (si ricordi in quest'ultimo caso che $n^{1/n} \to 1$ se $n \to +\infty$), vale allora

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1, \text{ (o anche } \lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=1),$$

e quindi, posto $w=\frac{1}{2x}$, che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nw^n$ ha raggio di convergenza $R=1$. Dunque la seconda serie assegnata converge se $\left|\frac{1}{2x}\right|<1$, ovvero se $|x|>\frac{1}{2}$. Essa non converge se $\left|\frac{1}{2x}\right|>1$, ovvero se $|x|<\frac{1}{2}$. Se $x=\frac{1}{2}$ oppure $x=-\frac{1}{2}$ la serie coincide con

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n,$$

rispettivamente. Entrambe le serie convergono, in quanto per il primo punto svolto $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge anche assolutamente.

Esercizio 4 8 punti

Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x^3 - x)\sqrt{x^2-4}}{1+\sqrt{x^2-4}}.$$

Successivamente, senza far uso della formula esplicita per la primitiva, calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{(t^3-t)\sqrt{t^2-4}}{1+\sqrt{t^2-4}}\,\mathrm{d}t$$

Soluzione dell'esercizio 4

Poniamo $\sqrt{x^2-4} = t$. Allora $x^2 - 4 = t^2$, $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Quindi:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{1+\sqrt{x^2-4}}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2+3)t}{1+t}\,t\mathrm{d}t.$$

Svolgendo la divisione otteniamo:

$$\frac{t^4+3t^2}{1+t} = t^3 - t^2 + 4t - 4 + \frac{4}{1+t}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(t^2+3)t}{1+t}\,t\mathrm{d}t = \int \left(t^3 - t^2 + 4t - 4 + \frac{4}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 4t + 4\log|t+1| + c \\
&= \frac{1}{4}(x^2-4)^2 - \frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}} + 2(x^2-4) - 4\sqrt{x^2-4} + 4\log(1+\sqrt{x^2-4}) + c \\
&= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2x^2 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2-4}\,(x^2-4+12) + 4\log(1+\sqrt{x^2-4}) + c \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2-4}\,(x^2+8) + 4\log(1+\sqrt{x^2-4}) + c,
\end{aligned}$$

dove abbiamo notato che $1+\sqrt{x^2-4} > 0$ nel dominio opportuno e abbiamo riassorbito i termini costanti nella costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$.

Circa la seconda domanda basta notare che

$$\frac{(t^3-t)\sqrt{t^2-4}}{1+\sqrt{t^2-4}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

cosicché la funzione integranda è maggiore di uno per t abbastanza grande, e dunque per il criterio del confronto il limite richiesto è $+\infty$.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 6 punti

Risolvere l'equazione

$$e^{2z} - (2-i)e^z + 1 - i = 0.$$

Soluzione dell'esercizio 1

Ponendo $w = e^z$ si ottiene l'equazione $w^2 - (2-i)w + 1 - i = 0$, che ha soluzioni $w = 1$ e $w = 1 - i$.

$e^z = 1$ se e solo se $z = 2k\pi i$.

Per risolvere $e^z = 1 - i$, sia $z = x + iy$. Poiché $|1 - i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1 - i) = -\pi/4$, allora l'equazione si può scrivere come $e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, quindi $x = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2$, mentre $y = -\pi/4 + 2k\pi$, quindi $z = \frac{1}{2}\log 2 - i\pi/4 + 2k\pi i$.

Esercizio 2   10 punti

Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(|x-1|+1) + \log(|x+1|+1).$$

Soluzione dell'esercizio 2

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile per ogni $x \neq \pm 1$. I punti $x = \pm 1$ vanno studiati a parte. Osserviamo che $f(-x) = \log(|-x-1|+1)+\log(|-x+1|+1) = \log(|x+1|+1)+\log(|x-1|+1) = f(x)$, ossia la funzione è pari. La studiamo allora per $x \in [0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \log(2-x) + \log(x+2) \text{ se } x < 1 \\ \log(x) + \log(x+2) \text{ se } x \geq 1\,, \end{cases}$$

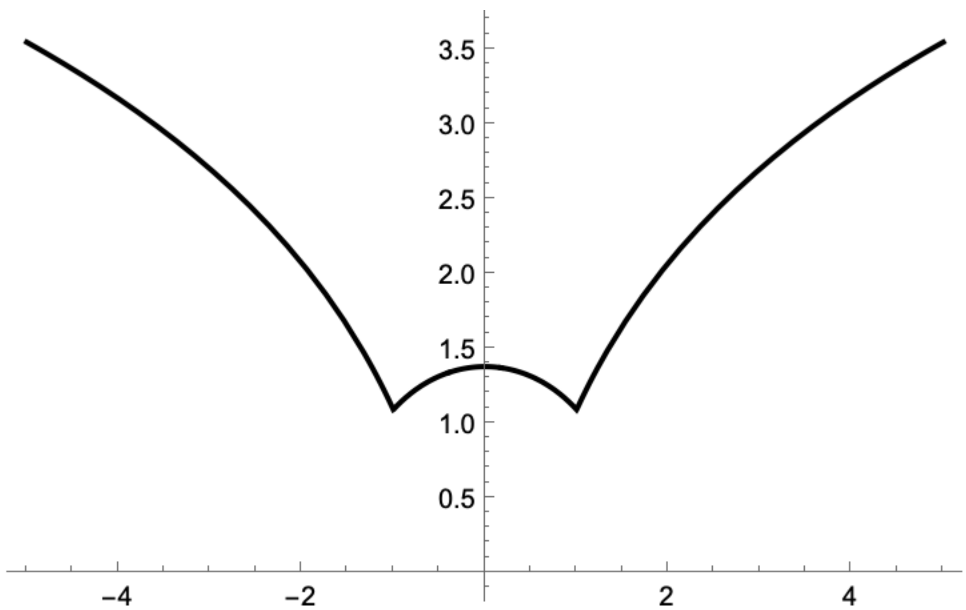
quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4} \text{ se } x < 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x+2}{x(x+2)} \text{ se } x > 1\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $f'(x) < 0$ per $x \in [0,1)$ e $f'(x) > 0$ per $x > 1$, inoltre $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2/3$ e $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 4/3$, quindi $x = 1$ è un punto angoloso.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2(4+x^2)}{(x-2)^2(x+2)^2} \text{ se } x < 1 \\ -\frac{2(x^2+2x+2)}{x^2(2+x)^2} \text{ se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $f''(x) < 0$ per $x \in [0,1)$ e $x > 1$, quindi la funzione è concava in $(0,1)$ e in $(1,+\infty)$. Essendo dispari, segue che $x = 0$ è un punto di flesso. Poiché $f(x) = \log(x(x+2))$ quando $x > 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Esercizio 3 8 punti

Stabilire se la seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n e^{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)} - \left(n - 1 + \frac{3}{2n}\right)\right].$$

converge, diverge o è indeterminata. Successivamente stabilire per quali $x \neq 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n e^{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)} - \left(n - 1 + \frac{3}{2n}\right)\right] \frac{1}{(2x)^n}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Vale, qui e in seguito per $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)} &= 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - \frac{7}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Detto a_n il termine generale della prima serie data, si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= n\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - \frac{7}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - \left(n - 1 + \frac{3}{2n}\right) \\ &= -\frac{7}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ciò mostra in particolare che il termine generale della serie è definitivamente negativo. Per il criterio del confronto asintotico, e per il fatto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la prima serie assegnata converge. Vale inoltre, dai calcoli precedenti, $a_n \sim -\frac{7}{6n^2}$ per $n \to +\infty$. Usando, a propria scelta, o il criterio della radice o quello del rapporto (si ricordi in quest'ultimo caso che $n^{1/n} \to 1$ se $n \to +\infty$), vale allora

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1, \text{ (o anche } \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1),$$

e quindi, posto $w = \frac{1}{2x}$, che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Dunque la seconda serie assegnata converge se $\left|\frac{1}{2x}\right| < 1$, ovvero se $|x| > \frac{1}{2}$. Essa non converge se $\left|\frac{1}{2x}\right| > 1$, ovvero se $|x| < \frac{1}{2}$. Se $x = \frac{1}{2}$ oppure $x = -\frac{1}{2}$ la serie coincide con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

rispettivamente. Entrambe le serie convergono, in quanto per il primo punto svolto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge anche assolutamente.

Esercizio 4 8 punti

Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x)\sqrt{x^2-4}}{1+\sqrt{x^2-4}}.$$

Successivamente, senza far uso della formula esplicita per la primitiva, calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{(t^3-2t)\sqrt{t^2-4}}{1+\sqrt{t^2-4}}\,\mathrm{d}t$$

Soluzione dell'esercizio 4

Poniamo $\sqrt{x^2-4} = t$. Allora $x^2 - 4 = t^2$, $x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Quindi:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-2)\sqrt{x^2-4}}{1+\sqrt{x^2-4}}\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2+2)t}{1+t}\,t\mathrm{d}t.$$

Svolgendo la divisione otteniamo:

$$\frac{t^4+2t^2}{1+t} = t^3 - t^2 + 3t - 3 + \frac{3}{1+t}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(t^2+2)t}{1+t}\,t\mathrm{d}t = \int \left(t^3 - t^2 + 3t - 3 + \frac{3}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 3t + 3\log|t+1| + c \\
&= \frac{1}{4}(x^2-4)^2 - \frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(x^2-4) - 3\sqrt{x^2-4} + 3\log(1+\sqrt{x^2-4}) + c \\
&= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2-4}\,(x^2-4+9) + 3\log(1+\sqrt{x^2-4}) + c \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2-4}\,(x^2+5) + 3\log(1+\sqrt{x^2-4}) + c,
\end{aligned}$$

dove abbiamo notato che $1+\sqrt{x^2-4} > 0$ nel dominio opportuno e abbiamo riassorbito i termini costanti nella costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$.

Circa la seconda domanda basta notare che

$$\frac{(t^3-2t)\sqrt{t^2-4}}{1+\sqrt{t^2-4}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty,$$

cosicché la funzione integranda è maggiore di uno per t abbastanza grande, e dunque per il criterio del confronto il limite richiesto è $+\infty$.

Analisi Matematica I - 6 febbraio 2025

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere la seguente disequazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \geq 0.$$

Determinare infine la soluzione di minimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Sia $z = x + iy$, con $z \neq i$. Si ha:

$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \frac{(x-1+iy)(x+i(1-y))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{(x-1)x+y(y-1)+i(xy+(x-1)(1-y))}{x^2+(y-1)^2}$$

e quindi, sempre per $z \neq i$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{(x-1)x+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2-x-y \geq 0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

L'insieme richiesto è dunque l'esterno del cerchio di centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, incluso il bordo. Chiaramente, la soluzione di minimo modulo è $z = 0$, come era già evidente dal fatto che $z = 0$ soddisfa la condizione di partenza, e come può essere visto dalla soluzione generale sopra determinata, in quanto la circonferenza prima scritta passa per l'origine.

Esercizio 2 8 punti

Mostrare che

$$\int_0^2 x \log((1-x)^2)\, dx$$

esiste in senso improprio e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 2

Poiché $\lim_{x\to 1} x\log((1-x)^2) = -\infty$, l'integrale è improprio. Converge perché l'andamento dell'infinito è logaritmico. Osserviamo che $x\log((1-x)^2) = 2x\log|1-x|$, e calcoliamo

$$\int_0^1 x\log(1-x)\, dx \text{ e } \int_1^2 x\log(x-1)\, dx$$

Una primitiva di $x\log(1-x)$ è $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2-1)\log(1-x) - \frac{x}{2}$, mentre una primitiva di $x\log(x-1)$ è $g(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x-1) - \frac{x}{2}$, quindi

$$\int_0^2 x\log((1-x)^2)\, dx = 2\left(\lim_{x\to 1^-} f(x) - f(0) + g(2) - \lim_{x\to 1^+} g(x)\right) = -4\,.$$

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{x+4}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni qualitative sul numero e sulla localizzazione di eventuali punti di flesso desumibili dal resto dello studio.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita per $x \neq -3, x \neq -4$. Si ha:

$$\lim_{x\to(-4)^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to(-3)^+} f(x) = 0,, \quad \lim_{x\to(-3)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

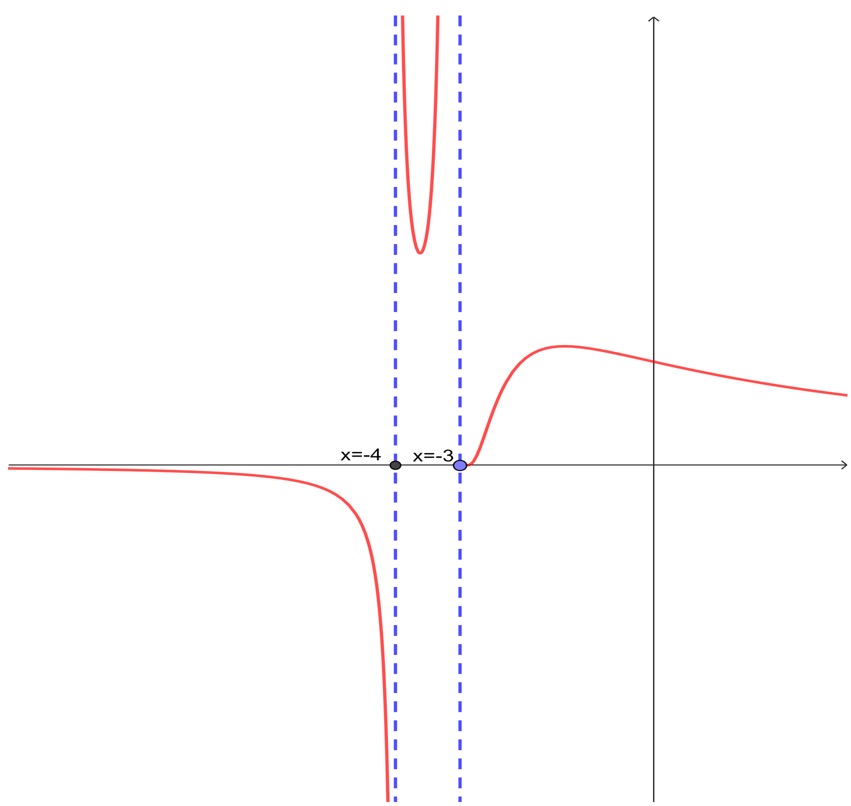
Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, $x = -4$ è asintoto verticale bilatero, $x = -3$ è asintoto verticale sinistro. La funzione è positiva se $x > -4$, $x \neq -3$, negativa se $x < -4$. Calcoliamo la derivata, per $x \neq -3, x \neq -4$:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(x+4)^2}\left[\frac{x+4}{(x+3)^2} - 1\right] = \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(x+4)^2}\left[\frac{x+4-(x+3)^2)}{(x+3)^2}\right] = -\frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(x+4)^2}\left[\frac{x^2+5x+5}{(x+3)^2}\right].$$

Il segno della derivata, dove definita, è l'opposto di quello di $x^2 + 5x + 5$. Tale polinomio ha zeri in $x = (-5 \pm \sqrt{25-20})/2 = (-5 \pm \sqrt{5})/2$. Si noti che $x_1 = (-5-\sqrt{5})/2 \in (-4, -3)$ e che $x_2 = (-5+\sqrt{5})/2 \in (-3, 0)$. La derivata è positiva se $x \in (x_1, -3) \cup (-3, x_2)$, dunque crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, negativa se $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, dunque decrescente separatamente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = x_1$ è di minimo relativo, il punto $x = x_2$ è di massimo relativo. Dati i limiti alla frontiera del dominio non vi sono estremi assoluti. Si noti infine che

$$\lim_{x\to(-3)^+} f'(x) = 0,$$

così che il grafico di f si avvicina da destra al punto $(-3, 0)$ con tangente che tende a diventare orizzontale. Se ne deduce che vi sono almeno due flessi: il primo per un opportuno $x_3 \in (-3, x_2)$, il secondo per un opportuno $x_4 > x_2$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 4 7 punti

Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^n .$$

Stabilire su quali insiemi la convergenza è uniforme.

Soluzione dell'esercizio 4

Le funzioni f_n sono definite per $x \neq 1$.

$f_n(x) \to 0$ se e solo se $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| < 1$, ossia per $x < -1$.

$f_n(x) \to 1$ se e solo se $\frac{x+3}{x-1} = 1$ (per nessun valore di x).

$f_n(x) = (-1)^n$ e solo se $\frac{x+3}{1-x} = 1$, ossia $x = -1$.

$|f_n(x)| \to +\infty$ se e solo se $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| > 1$, ossia $x > -1$.

Dunque $f_n(x) \to 0$ se $x < -1$, non converge per $x \geq -1$. La convergenza non può essere uniforme in un intervallo $[a, -1)$, per nessun valore di $a < -1$ perché per il teorema del doppio limite dovrebbe essere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-1) = 0.$$

Si noti però che la funzione $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ è decrescente nell'intervallo $[a, -1]$, $g(a) < 1$ e $g(-1) = -1$, quindi

$$\max_{x\in[a,-1-\epsilon]} |g(x)| = \max(|g(a)|, |g(1-\epsilon)|) < 1$$

e allora

$$\max_{x\in[a,-1-\epsilon]} |f_n(x)| \to 0,$$

ossia la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[a, -1-\epsilon]$ con $a < -1$ e ϵ sufficientemente piccolo. La convergenza non è uniforme in $(-\infty, -1-\epsilon)$ perché $\sup_{(-\infty,-1-\epsilon)} |f_n(x)| = 1$.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere la seguente disequazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z+i}\right) \geq 0.$$

Determinare infine la soluzione di minimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Sia $z = x + iy$, con $z \neq -i$. Si ha:

$$\frac{z+1}{z+i} = \frac{x+1+iy}{x+i(y+1)} = \frac{(x+1+iy)(x-i(1+y))}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x+1)x+y(y+1)+i(xy-(x+1)(1+y))}{x^2+(y+1)^2}$$

e quindi, sempre per $z \neq -i$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z+i}\right) = \frac{(x+1)x+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \geq 0 \iff x^2+y^2+x+y \geq 0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

L'insieme richiesto è dunque l'esterno del cerchio di centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, incluso il bordo. Chiaramente, la soluzione di minimo modulo è $z = 0$, come era già evidente dal fatto che $z = 0$ soddisfa la condizione di partenza, e come può essere visto dalla soluzione generale sopra determinata, in quanto la circonferenza prima scritta passa per l'origine.

Esercizio 2 8 punti

Mostrare che

$$\int_0^4 x \log((2-x)^2)\, dx$$

esiste in senso improprio e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 2

Poiché $\lim_{x\to 2} x\log((2-x)^2) = -\infty$, l'integrale è improprio. Converge perché l'andamento dell'infinito è logaritmico. Osserviamo che $x\log((2-x)^2) = 2x\log|2-x|$, e calcoliamo

$$\int_0^2 x\log(2-x)\, dx \text{ e } \int_2^4 x\log(x-2)\, dx$$

Una primitiva di $x\log(2-x)$ è $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2\log(2-x) - x - 2\log(2-x)$, mentre una primitiva di $x\log(x-2)$ è $g(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2\log(x-2) - x - 2\log(x-2)$, quindi

$$\int_0^4 x\log((2-x)^2)\, dx = 2\left(\lim_{x\to 2^-} g(x) - g(0) + g(4) - \lim_{x\to 2^+} g(x)\right) = -16 + 4\log 16\,.$$

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{4-x}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni qualitative sul numero e sulla localizzazione di eventuali punti di flesso desumibili dal resto dello studio.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita per $x \neq -3, x \neq -4$. Si ha:

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x\to 3^{-}} f(x) = 0,, \quad \lim_{x\to 3^{+}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0.$$

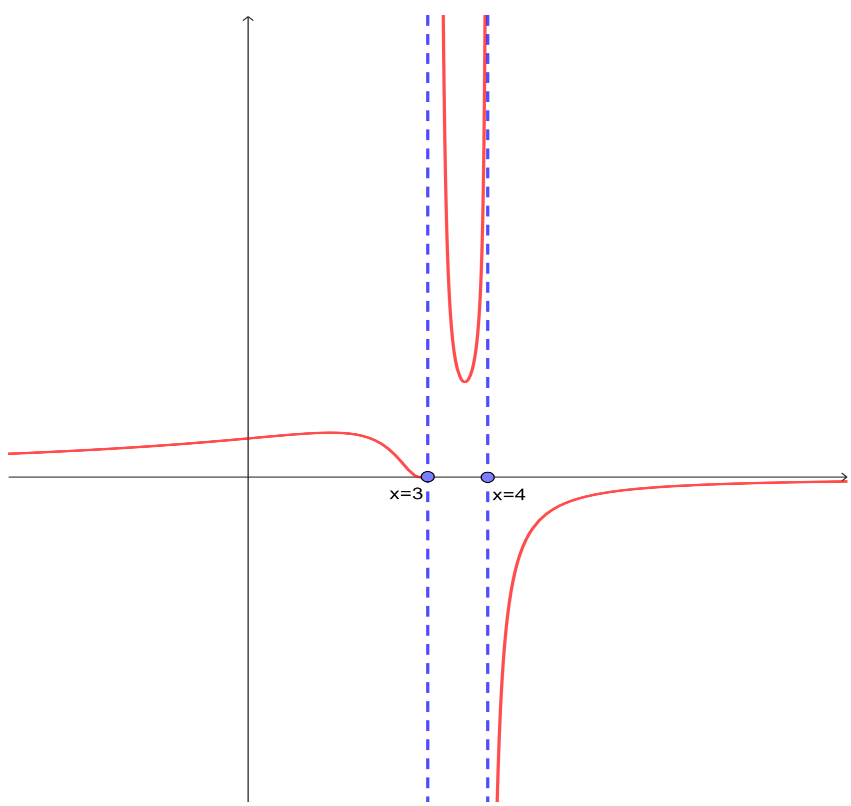
Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, $x = -4$ è asintoto verticale bilatero, $x = -3$ è asintoto verticale sinistro. La funzione è positiva se $x < 4$, $x \neq 3$, negativa se $x > 4$. Calcoliamo la derivata, per $x \neq 3, x \neq 4$:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(4-x)^2}\left[\frac{x-4}{(x-3)^2}+1\right] = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(4-x)^2}\left[\frac{x-4+(x-3)^2)}{(x-3)^2}\right] = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(4-x)^2}\left[\frac{x^2-5x+5}{(x-3)^2}\right].$$

Il segno della derivata, dove definita, è quello di $x^2 - 5x + 5$. Tale polinomio ha zeri in $x = (5 \pm \sqrt{25-20})/2 = (5 \pm \sqrt{5})/2$. Si noti che $x_1 = (5+\sqrt{5})/2 \in (3,4)$ e che $x_2 = (5-\sqrt{5})/2 \in (0,3)$. La derivata è negativa se $x \in (x_2, 3) \cup (3, x_1)$, dunque decrescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, positiva se $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, 4) \cup (4, +\infty)$, dunque crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = x_1$ è di minimo relativo, il punto $x = x_2$ è di massimo relativo. Dati i limiti alla frontiera del dominio non vi sono estremi assoluti. Si noti infine che

$$\lim_{x\to 3^{-}} f'(x) = 0,$$

così che il grafico di f si avvicina da sinistra al punto $(3, 0)$ con tangente che tende a diventare orizzontale. Se ne deduce che vi sono almeno due flessi: il primo per un opportuno $x_3 \in (x_2, 3)$, il secondo per un opportuno $x_4 < x_2$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 4   7 punti

Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n.$$

Stabilire su quali insiemi la convergenza è uniforme.

Soluzione dell'esercizio 4

Le funzioni f_n sono definite per $x \neq 2$.

$f_n(x) \to 0$ se e solo se $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| < 1$, ossia per $x < 0$.

$f_n(x) \to 1$ se e solo se $\frac{x+2}{x-2} = 1$ (per nessun valore di x).

$f_n(x) = (-1)^n$ e solo se $\frac{x+2}{2-x} = 1$, ossia $x = 0$.

$|f_n(x)| \to +\infty$ se e solo se $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| > 1$, ossia $x > 0$.

Dunque $f_n(x) \to 0$ se $x < 0$, non converge per $x \geq 0$. La convergenza non può essere uniforme in un intervallo $[a, 0)$, per nessun valore di $a < 0$ perché per il teorema del doppio limite dovrebbe essere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

Si noti però che la funzione $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ è decrescente nell'intervallo $[a, 0]$, $g(a) < 1$ e $g(0) = -1$, quindi

$$\max_{x\in[a,-\epsilon]} |g(x)| = \max(|g(a)|, |g(-\epsilon)|) < 1$$

e allora

$$\max_{x\in[a,-\epsilon]} |f_n(x)| \to 0,$$

ossia la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[a, -\epsilon]$ con $a < 0$ e ϵ sufficientemente piccolo. La convergenza non è uniforme in $(-\infty, -\epsilon)$ perché $\sup_{(-\infty,-\epsilon)} |f_n(x)| = 1$.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:
$$f(z) = e^{z^2}.$$

- Determinare, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)|, \operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)$.
- Risolvere, al variare di $c > 0$, l'equazione $|f(z)| = c$, e disegnare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso.
- Risolvere l'equazione $f(z) = i$.

Soluzione dell'esercizio 1

- Sia $z = x + iy$. Vale allora $e^{z^2} = e^{x^2-y^2+2ixy}$ e quindi:
$$|f(z)| = e^{x^2-y^2}, \quad \operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy), \quad \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$
- Se $c = 1$, si ha $|f(z)| = 1$ se e solo se $e^{x^2-y^2} = 1$, cioè $x^2 - y^2 = 0$, dunque deve essere $y = \pm x$. Si tratta delle bisettrici dei quadranti cartesiani. Se invece $c \neq 1$, deve valere $e^{x^2-y^2} = c$, cioè $x^2 - y^2 = \log c$. Si tratta, per ogni $c > 0$, $c \neq 1$, di una iperbole con asintoti $y = \pm x$, se $c > 1$ non intersecante l'asse y, se $c \in (0, 1)$ non intersecante l'asse x.
- Vale $i = e^{i\pi/2}$. L'equazione $e^z = i$ si riscrive quindi come:
$$e^{x^2-y^2} e^{2ixy} = e^{i\pi/2},$$
e dunque deve valere
$$e^{x^2-y^2} = 1, \quad 2xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$
per un $k \in \mathbb{Z}$. Dalla prima equazione si ottiene, come sopra, $y = \pm x$. Dalla seconda allora si ottiene $x^2 = \pm \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Se $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, ciò significa
$$x = \pm\sqrt{\tfrac{\pi}{4} + k\pi}, \quad y = \pm\sqrt{\tfrac{\pi}{4} + k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \; k \geq 0,$$
dove si intende che tutte e quattro le possibili combinazioni di segni sono accettabili. Se $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ si ha, scritto $k = -h$ con $h \in \mathbb{N}$, $x^2 = \pm \left(\frac{\pi}{4} - h\pi\right)$, cioè $x^2 = h\pi - \frac{\pi}{4}$, cioè
$$x = \pm\sqrt{h\pi - \tfrac{\pi}{4}}, \quad y = \pm\sqrt{h\pi - \tfrac{\pi}{4}}, \quad h \in \mathbb{N},$$
dove si intende che tutte e quattro le possibili combinazioni di segni sono accettabili.

Esercizio 2 8 punti

Calcolare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, lo sviluppo di Taylor all'ordine quattro della funzione

$$f_a(x) = e^{-\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)} - \cos\left(x\sqrt{1+ax^2}\right).$$

Stabilire in particolare per quale valore di a il termine principale dello sviluppo di f_a è di grado strettamente maggiore di quattro

Soluzione dell'esercizio 2

Sviluppiamo i vari termini. Vale, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{x^2}{2} + o(x^5) \\
e^{-\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)} &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^5) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5). \\
x\sqrt{1+ax^2} &= x\left(1 + \frac{ax^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4) \\
\cos\left(x\sqrt{1+ax^2}\right) &= \cos\left(x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4)\right)^4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}(1 - 12a) + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ne segue che:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}(1-12a) + o(x^5)\right] = \frac{1+6a}{12}x^4 + o(x^5).$$

Il polinomio di Taylor cercato è quindi, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1+6a}{12}x^4$. Tale polinomio è identicamente nullo, e quindi il termine principale dello sviluppo è di grado strettamente maggiore di quattro, se e solo se $a = -\frac{1}{6}$.

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione
$$f(x) = (x-1)e^{1/x}\,.$$

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita per $x \neq 0$. $f(x) \gtrless 0$ se $x \gtrless 1$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

Per $x \to \pm\infty$ abbiamo $e^{1/x} = 1 + 1/x + o(1/x)$, quindi

$$f(x) = (x-1) + (x-1)/x + o(1) = x + o(1)\,,$$

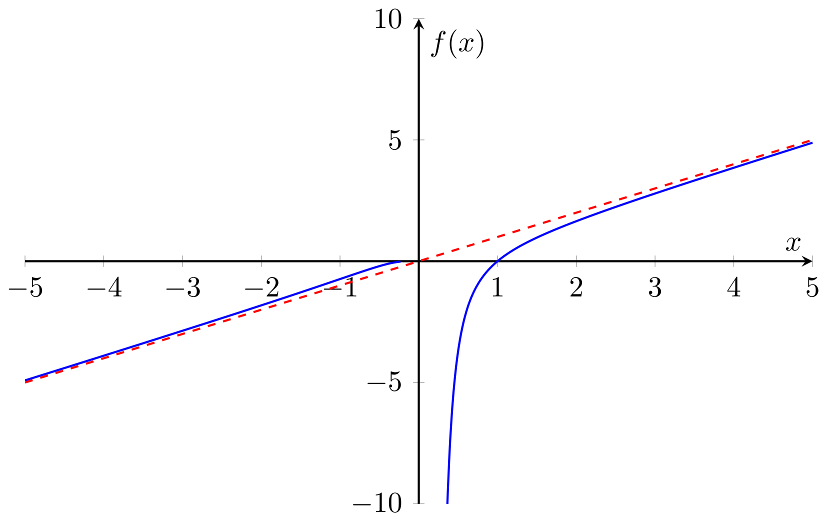
dunque $y = x$ è asintoto obliquo. Vale, per ogni $x \neq 1$,

$$f'(x) = e^{1/x}\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\,,$$

quindi $f'(x) > 0$ per ogni x nel dominio. Inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. Vale inoltre, sempre per $x \neq 1$:

$$f''(x) = -e^{1/x}\frac{1+x}{x^4}\,,$$

quindi la funzione è convessa in $(-\infty,-1)$ e concava in $(-1,0)$ e separatamente in $(0,+\infty)$. Il punto $x = -1$ è di flesso.



Esercizio 4 7 punti

Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = (x^2 - 1)\arctan(x)\,.$$

Calcolare

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,,$$

determinare se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

esiste in senso improprio, e nel caso calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 4

Si integra per parti come segue:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 - 3x}{1 + x^2}\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan(x) - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{4x}{1 + x^2}\right)\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\log(1 + x^2)\,.\end{aligned}$$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ perché $f(x)$ è dispari e il dominio di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Naturalmente si può arrivare alla stessa conclusione utilizzando la primitiva.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste perché l'integranda diverge per $x \to \pm\infty$.