Marco Contedini

LEZIONE 6

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

22 ottobre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Funzioni lineari

1. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f_k} \begin{pmatrix} x + kz \\ 2x + ky + (1-k)z \\ 3x + ky + z \\ -kx - z \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determinare le componenti della matrice A_k associata all'applicazione lineare f_k.

   (b) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k, fornendo una base per il nucleo in almeno un caso in cui esso non sia banale.

   (c) Sia $k = 2$. Determinare le eventuali controimmagini di $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0, 0)^T$.

2. Sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

   dove:

$$\begin{cases} x_1' = k^2 x_1 + x_3 - x_4 \\ x_2' = 2x_1 + (k-1)x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3' = 3x_1 + (k-1)x_2 + 3x_3 + (k^2 - 4)x_4 \end{cases}$$

   (a) Determinare le dimensioni di $\mathrm{Ker}(f_k)$ e $\mathrm{Im}(f_k)$ al variare del parametro k.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (2, 1, 1)$, $P_2 = (0, 1, 3)$ e $P_3 = (-1, -1, -2)$. Si verifichi che π è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

   (c) Posto $k = -1$, determinare l'insieme delle controimmagini di π attraverso f_{-1}.

2 Autovalori e autovettori

3. (a) Provare che gli autovalori di una matrice triangolare, sono gli elementi che si trovano sulla diagonale principale.

   (b) Si provi che $\lambda = 0$ è autovalore di A se e solo se A è singolare.

   (c) Provare che, se A è invertibile, allora

$$Sp(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in Sp(A) \right\}$$

   (d) Si provi che, se 0 è autovalore di A^2 allora 0 è anche autovalore di A.

(e) Si provi che, se λ è autovalore di A, allora λ^2 è autovalore di A^2.

(f) Si provi che, se $\lambda > 0$ è autovalore di A^2, allora $\lambda = \alpha^2$, dove α è un autovalore di A.

(g) Provare che, se λ è autovalore di A, allora λ^k è autovalore di A^k, con $k \in \mathbb{N}$.

3 Diagonalizzabilità

4. Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici e calcolare la matrice S di passaggio:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -7 & 24 & 0 \\ 0 & 24 & 7 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Stabilire per quali valori del parametro α le seguenti matrici sono diagonalizzabili
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1-\alpha & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Posto
$$A = \begin{pmatrix} h & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & h & 4 \\ -4 & 4 & 0 & h \end{pmatrix}$$
Stabilire per quali valori dei parametri reali h e k il vettore $\boldsymbol{v} = (1, k, 0, 1)$ è autovettore di A
Per il valore di h trovato stabilire se A è diagonalizzabile.

7. Sia $\boldsymbol{w} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$ e $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ (proiettore sulla direzione $\boldsymbol{w}$).
   - Determinare la matrice $A_{\boldsymbol{w}}$ associata a $f_{\boldsymbol{w}}$.
   - Determinare autovalori e autospazi di $A_{\boldsymbol{w}}$.

8. Siano A e B due matrici di dimensione 3x3 tali che $B^2 - A \cdot B + \mathbb{I} = \mathbb{O}$ (con i simboli $\mathbb{I}$ e $\mathbb{O}$ si indicano rispettivamente la matrice identitá e la matrice

nulla).
Posto:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

determinare la matrice A.
Quale relazione sussiste tra gli autovalori della matrice A e quelli della matrice B?
La matrice A è diagonalizzabile?

4 Esercizi proposti

1. Data l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$f_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \text{ dove: } \begin{cases} x_1' = x_1 + kx_4 \\ x_2' = 2x_1 + (k-1)x_3 + 2x_4 \\ x_3' = 3x_1 + (k^2 - 3k + 2)x_2 + (k-1)x_3 + (2+k)x_4 \end{cases}$$

   (a) Stabilire al variare del parametro k le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k, specificandone una base.

   (b) Sia $\overline{k}$ il valore di k per cui la dimensione dell'immagine di $f_{\overline{k}}$ vale 2. Per $k = \overline{k}$ determinare il versore normale al sottospazio immagine $\mathrm{Im}\, f_{\overline{k}}$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano parallelo a $\mathrm{Im}\, f_{\overline{k}}$ e passante per il punto $P = (5, 2, -4)$.

   (c) Stabilire per quale (o quali) valore (valori) di k il vettore $\mathbf{v} = (1, 3, 4)^{\mathrm{t}}$ non appartiene all'immagine di f_k.

2. Sia $\boldsymbol{w}$ un versore nello spazio $\mathbb{R}^3$. Dopo aver verificato che $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ (proiettore sulla direzione $\boldsymbol{w}$), determinare la matrice $A_{\boldsymbol{w}}$ associata a $f_{\boldsymbol{w}}$.

3. Data la funzione lineare $f(k) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro reale k così definita:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - ky + (k-1)z \\ kx + (k-1)z \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

   - Determinare per quali valori di k $f(k)$ è invertibile.
   - Qualora $f(k)$ non fosse invertibile determinare dimensioni e basi dei sottospazi $\ker(f)$ e $Im(f)$.
   - Trovare, se possibile, la controimmagine di $\boldsymbol{v} = (1, 1, 5)^T$

4. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^3$. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f_\alpha(\mathbf{i}) = 2\alpha\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$$
$$f_\alpha(\mathbf{j}) = -\alpha\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$
$$f_\alpha(\mathbf{k}) = 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$$

   (a) Trovare la matrice che rappresenta f_α nella base base $\mathcal{B}$.

   (b) Determinare le dimensioni di $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$ e $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ al variare del parametro α. Determinare una base di $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$ in almeno un caso in cui esso non sia banale.

   (c) Posto $\mathbf{w} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}$, determinare per quali valori di α l'equazione $f_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ ammette una soluzione $\mathbf{v}$.

5. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $L_a : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare rappresentato, nelle basi canoniche, dalla matrice A_a così definita:

$$A_a = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare, al variare del parametro a, quali siano le dimensioni di $\mathrm{Im}(L_a)$, $\mathrm{Ker}(L_a)$. Determinare inoltre una base per tali spazi.

   (b) Stabilire se esistono valori del parametro a per i quali A_a non ha rango massimo e per i quali il vettore $\mathbf{v}$ di componenti $(2, -1, 1)^{\mathrm{t}}$ (nella base canonica) appartiene a $\mathrm{Im}\,(L_a)$. In caso di risposta affermativa, calcolare per tali valori di a la controimmagine di $\mathbf{v}$.

6. Determinare per quali valori del parametro k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

ammette come autovettore $\boldsymbol{v} = (1, 2, 1)^T$. Per tale valore di k verificare che la matrice è diagonalizzabile e trovare una base ortonormale di autovettori.

7. Determinare la matrice di passaggio che realizza la similitudine tra le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sia

$$A_h = \begin{pmatrix} -5 & h-3 & 3 \\ 0 & h & 0 \\ -6 & 2h-4 & 4 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quale valore di h la matrice A_h non è diagonalizzabile.
- Stabilire per quale valore di h il vettore $\boldsymbol{v}_h = (1, h, 3)^T$ è autovettore di A_h.

9. Data la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -3-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 4+2\alpha & 3+2\alpha & 0 \\ -6 & -5-\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Stabilire per quale valore del parametro reale α essa è diagonalizzabile.

   (b) Per tale valore di α determinare gli autospazi di A_α.

10. Sia A_h la matrice così definita:

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1-h & -1 & h & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare gli autovalori di A_h.

   (b) Determinare per quale valore del parametro h la matrice è diagonalizzabile.

   (c) Nel caso in cui A_h sia diagonalizzabile, determinare una base per i suoi autospazi.

5 Soluzioni

1. (a) La matrice A_k associata all'aplicazione lineare è:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Poichè la dimensione dell'immagine di f_k coincide con il rango di A_k, occorre determinare il rango di A_k.
   Sappiamo che $1 \leq \mathrm{Rk}(A_k) \leq 3$ (matrice non identicamente nulla).
   Partiamo, per esempio, dal minore $M = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & k \end{pmatrix}$ che ha determinante non nullo se $k \neq 0$. Orlando M si ottengono due minori di ordine tre, i cui determinanti sono:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k; \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix} = k - k^3 = k(1+k)(1-k)$$

   Quindi, se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$, si ha: $\mathrm{Rk}(A_k) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(f_k)) = 3$, inoltre per il teorema "nullità più rango": $\mathrm{Ker}(f_k) = \mathbf{0}$.

Negli altri casi le matrici A_0, A_1 e A_{-1} presentano minori di ordine due con determinante non nullo, pertanto: Se $k = -1 \vee k = 0 \vee k = 1$: $\mathrm{Rk}(A_k) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}((f_k)) = 2$ e $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f_k)) = 1$. Sia ora, per esempio $k = 0$.
Per trovare la base del nucleo di f_0 si deve risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui: $x = z = 0$ e y qualsiasi. Come base di $\mathrm{Ker}(f_0)$ si può scegliere il vettore $(0, 1, 0)^T$.
Negli altri casi, posto $(x, y, z)^T$ il generico vettore di $\mathrm{Ker}(f_k)$, si ha:

$$k = -1 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$k = 1 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Occorre verificare se esitono soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è A_2 di cui sappiamo che il rango vale 3.
La matrice completa del sistema è:

$$A_2|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Si ha: $\det(A_2|b) = 6$, pertanto $4 = \mathrm{Rk}(A_2|b) > \mathrm{Rk}(A_2) = 3$. Il sistema non ha soluzioni.

2. • La matrice che rappresenta la funzione è la seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & k-1 & 2 & -2 \\ 3 & k-1 & 3 & k^2-4 \end{pmatrix}$$

Le colonne indipendenti di A_k formano una base dell'immagine di f_k ed il loro numero coincide con il rango della matrice. Per determinare il rango di A_k analizziamo, per esempio, il determinante formato dalle prime tre colonne:

$$\det\begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 3 & k-1 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k^2 & 0 & 1 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (k-1)(k^2-1) = (k-1)^2(k+1)$$

Per semplificare i calcoli si è sottratto la seconda riga dalla terza. Il rango di A_k è tre se $k \neq 1$ e $k \neq -1$.
Se $k = 1$, la matrice diventa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Tutte le righe (colonne) sono uguali e/o proporzionali, pertanto il rango vale 1.
Se $k = -1$, la matrice diventa:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Nelle prime due colonne esiste un minore di ordine due con determinante diverso da zero, mentre la terza e la quarta colonna sono proporzionali alla prima. In questo caso il rango vale 2.
Per il teorema *nullità più rango* la dimensione del nucleo vale $4 - Rk(A_k)$.
Ricapitolando:

$$\begin{array}{lcl} k \neq \pm 1 & \Longrightarrow & \text{Dim } (\text{Im } (f_k)) = 3, \quad \text{Dim } (\text{Ker } (f_k)) = 1 \\ k = -1 & \Longrightarrow & \text{Dim } (\text{Im } (f_{-1})) = 2, \quad \text{Dim } (\text{Ker } (f_{-1})) = 2 \\ k = +1 & \Longrightarrow & \text{Dim } (\text{Im } (f_1)) = 1, \quad \text{Dim } (\text{Ker } (f_1)) = 3 \end{array}$$

- L'equazione cartesiana di un piano passante per i punti P_1, P_2 e P_3 (non allineati) è:

$$(\boldsymbol{P_1P_2} \times \boldsymbol{P_1P_3}) \cdot \boldsymbol{PP_1} = 0.$$

Posto $P = (x, y, z)$ si ha:

$$\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P_1P_2} \times \boldsymbol{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

L'equazione del piano π è quindi: $x - 3y + z = 0$. Poiché il piano contiene l'origine, esso è necessariamente un autospazio.

- Occorre trovare le soluzioni x_1, x_2, x_3 e x_4 del sistema:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

con il vincolo: $x_1' - 3x_2' + x_3' = 0$. Pertanto deve valere:

$$x_1 + x_3 - x_4 - 3(2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4) + 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0$$

che implica: $x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4$, avendo scelto x_2, x_3 e x_4 parametri liberi della soluzione.
L'insieme delle controimmagini è un sottospazio tridimensionale generato dai vettori:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

.

3. (a) L'equazione caratteristica di una matrice triangolare $a_{i,j}$ di ordine n è:

$$(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{n,n} - \lambda) = 0$$

le cui soluzioni sono $\lambda_i = a_{i,i}$ $i = 1, \ldots, n$.

(b) L'equazione agli autovalori è $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$.
Sia $\lambda = 0$. Allora $\det A = 0$ quindi A è singolare.
Viceversa, sia A singolare, esiste un vettore $\boldsymbol{v}$ non nullo tale che $A\boldsymbol{v} = 0$, ovvero $A\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v}$, quindi 0 è autovalore di A.

(c) Sia A invertibile e sia λ un generico autovalore di A. Allora: $\lambda \neq 0$, altrimenti λ sarebbe singolare.
Si ha:

$$A^{-1}(A\boldsymbol{v}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{v})$$

da cui:

$$\boldsymbol{v} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{v}$$

ovvero:

$$\lambda^{-1}\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}.$$

Pertanto λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

(d) Se 0 è autovalore di A^2, allora: $A^2\boldsymbol{v} = 0$ per qualche $\boldsymbol{v}$ non nullo, ovvero A^2 è singolare, ovvero: $\det(A^2) = 0$.
Dalla formula di Binet: $\det(A^2) = (\det A)^2 = 0 \Rightarrow \det A = 0$, 0 è autovalore di A.

(e) Sia λ un autovalore di A. Allora esiste un vettore $\boldsymbol{v}$ non nullo per cui: $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.
Si ha:

$$A(A\boldsymbol{v}) = A(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}.$$

Quindi λ^2 è autovalore di A.
Non è detto che A^2 abbia autovalori necessariamente positivi, come si evince dal seguente esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A^2 ha come autovalore solo -1.

(f) sia $\lambda > 0$ autovalore di A^2. Si ha:

$$0 = \det(A^2 - \lambda\mathbb{I}) = \det\left[(A - \sqrt{\lambda}\mathbb{I})(A + \sqrt{\lambda}\mathbb{I})\right] = \det(A - \sqrt{\lambda}\mathbb{I})\det(A + \sqrt{\lambda}\mathbb{I}).$$

Quindi almeno uno tra $\sqrt{\lambda}$ e $-\sqrt{\lambda}$ è autovalore di A.

(g) Dimostrazione per induzione.
La tesi è vera per $k = 1$. Sia vera per k, vale a dire λ^k sia autovalore di A^k. Dimostriamo che λ^{k+1} è autovalore di A^{k+1}.
Si ha, per qualche $\boldsymbol{v}$ non nullo:

$$A^{k+1}\boldsymbol{v} = A(A^k\boldsymbol{v}) = A(\lambda^k\boldsymbol{v}) = \lambda^k A\boldsymbol{v} = \lambda^{k+1}\boldsymbol{v}.$$

C.v.d.

4. • Si determina innanzitutto il polinomio caratteristico:
$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$.
Gli autovalori sono -1,1 e 2, hanno tutti molteplicità algebrica 1 e pertanto la matrice A è diagonalizzabile.
Calcolo gli autovettori per $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases},$$

per $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

e per $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}.$$

Una possibile scelta della matrice S di passaggio è:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è (svolgere i calcoli!):

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si potrebbe anche verificare direttamente che:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Il polinomio caratteristico di B è $(2-\lambda)^2(3-\lambda)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica 1. Calcolo gli autovettori per $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

e per $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}.$$

L'autospazio associato a $\lambda_1 = 2$ è generato dal solo autovettore $\boldsymbol{v} = (0,1,0)^T$. La molteplicità geometrica non coincide con quella algebrica, quindi B non è diagonalizzabile.

- Il polinomio caratteristico di Cv è $(2-\lambda)^2(-1-\lambda)$
Anche in questo caso esiste un autovalore $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 ed un autovalore $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica 1.
Calcolo degli autovettori.

$$\lambda_1 = 2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -1, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

In questo caso la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda_1 = 2$ è uguale alla molteplicità geometrica, infatti l'autospazio relativo ha dimensione 2, dunque la matrice C è diagonalizzabile. Una base dell'autospazio bidimensionale può essere scelta attribuendo i valori $t = 1$, $s = 0$ e poi $t = 0$, $s = 1$: otteniamo i vettori $(1,0,2)^T$ e $(0,1,0)^T$.
Una possibile scelta della matrice di passaggio S è la seguente:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo l'inversa di S mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

nel primo passaggio si è sottratta alla terza riga il doppio della prima riga e nel secondo passaggio si è sottratto alla seconda riga la terza riga.

Si può verificare direttamente la seguente legge di trasformazione dalla matrice B alla matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- D, essendo simmetrica, è diagonalizzabile ed i suoi autovettori possono essere sempre scelti ortogonali tra loro.
  Il polinomio caratteristico è:

$$\begin{aligned}\det(D-\lambda I) = {} & \left(\frac{7}{25}-\lambda\right)\left(-\frac{7}{25}-\lambda\right)\left[\left(-\frac{7}{25}-\lambda\right)\left(\frac{7}{25}-\lambda\right)-\left(\frac{24}{25}\right)^2\right]- \\ & -\left(\frac{24}{25}\right)^2\left[\left(-\frac{7}{25}-\lambda\right)\left(\frac{7}{25}-\lambda\right)-\left(\frac{24}{25}\right)^2\right]= \\ & =\left(\lambda^2-\frac{49}{625}\right)\left[\lambda^2-\frac{49}{625}-\frac{576}{625}\right]-\frac{576}{625}\left[\lambda^2-\frac{49}{625}-\frac{576}{625}\right]= \\ & =\left(\lambda^2-\frac{49}{625}-\frac{576}{625}\right)\left[\lambda^2-1\right]= \\ & =(\lambda^2-1)^2\end{aligned}$$

  Ci sono due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica uguale a 2.
  Determino gli autospazi:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -18 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -32 & 24 & 0 \\ 0 & 24 & -18 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = 3s \\ x_3 = 4s \\ x_4 = 3t \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -1, \qquad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 18 & 24 & 0 \\ 0 & 24 & 32 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3t \\ x_2 = -4s \\ x_3 = 3s \\ x_4 = 4t \end{cases}$$

  Un'opportuna scelta della matrice di passaggio è:

$$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  Si osservi che $\frac{1}{5}$ davanti alla matrice rende S ortogonale (gli autovettori devono essere presi ortonormali!).
  La matrice inversa di S coincide con la sua trasposta:

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si potrebbe verificare direttamente la trasformazione dalla matrice D alla matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & 0 & 0 & \frac{24}{25} \\ 0 & -\frac{7}{5} & \frac{24}{25} & 0 \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} & 0 \\ \frac{24}{25} & 0 & 0 & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice E è simmetrica, quindi diagonalizzabile.
  L'equazione caratteristica è:

$$\det(E - \lambda I) = (5 - \lambda)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Da cui si ricavano gli autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 5$.
L'autospazio relativo all'autovalore -1 si ricava dal sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vale a dire:

$$x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 5 si ricava dal sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vale a dire:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una possibile scelta della matrice di passaggio è:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si potrebbe infine verificare che:

$$S^{-1} \cdot E \cdot S = \Lambda$$

dove:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. • A è triangolare inferiore, ha un solo autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 2.
La ricerca degli autovettori conduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\alpha)x = 0 \\ y = t \end{cases} .$$

Se $\alpha \neq 1$ l'autospazio è monodimensionale generato dal solo vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pertanto A non è diaonalizzabile (la molteplicità algebrica è diversa dalla molteplicità geometrica).
Se $\alpha = 1$ l'autospazio coincide con tutto $\mathbb{R}^2$, la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica, pertanto A è diagonalizzabile.

• B è triangolare inferiore ed ha come autovalori: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$.
Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$ gli autovalori sono tutti semplici, pertanto B è diagonalizzabile.
Se $\alpha = 3$ abbiamo un autovalore con molteplicità 2. Cerco la dimensione dell'autospazio corrispondente:

$$\alpha = 3, \quad \lambda_1 = 3, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = s \end{cases}$$

La molteplicità algebrica coincide con quella geometrica e la matrice è diagonalizzabile.
Se $\alpha = 1$ è l'autovalore λ_1 che ha molteplicità 2. L'autospazio relativo è monodimensionale, infatti:

$$\alpha = 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} .$$

In questo caso la molteplicità algebrica differisce da quella geometrica e la matrice B non è diagonalizzabile.

6. L'equazione $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ implica:

$$\begin{cases} h + 4k - 4 = \lambda \\ -4 + 7k - 4 = \lambda k \\ -4k + 4 = 0 \\ -4 + 4k + h = \lambda \end{cases} ,$$

da cui: $k = 1$, $h = -1$ e $\lambda = -1$.

L'equazione caratteristica per $h = -1$ è la seguente:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 7-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -1-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2(\lambda-3)^2.$$

Pertanto la matrice A ammette due autovalori, -1 e 3 entrambi con molteplicità algebrica doppia. Per stabilire se la matrice sia diagonalizzabile, si deve detrminare la dimensione di entrambi gli autospazi

Sia $\lambda = -1$:
La dimensione dell'autospazio è legata al rango dell'operatore

$$A - (-1)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che la terza riga è l'opposto della prima, mentre la quarta riga risulta essere uguale alla somma della seconda riga con la terza. La dimensione dell'autospazio vale $n - \mathrm{Rk}(A + \mathbb{I}) = 2$. Dunque, per $\lambda = -1$ la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

Sia $\lambda = 3$:

$$A - 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ci sono solo due righe indipendenti (tre righe sono uguali), quindi ancora: $Rk(A - 3\mathbb{I}) = 2$. Anche per $\lambda = 3$ la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.
Dunque, per $h = -1$ la matrice A è diagonalizzabile.

7. (a) Determiniamo $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{i})$, $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{j})$ e $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k})$:

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{w} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{w} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{w} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$A_{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Si osservi che $A_{\boldsymbol{w}}$ è simmetrica, formata da tre righe proporzionali tra loro, quindi ha rango 1, pertanto ammette autovalore nullo con molteplicità algebrica doppia.
Calcoliamo gli autovalori di $A_{\boldsymbol{w}}$:

$$0 = \det(A_{\boldsymbol{w}} - \lambda\mathbb{I}) = \frac{1}{9^3}\det\begin{pmatrix} 4-9\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 1-9\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 4-9\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda^3$$

Da cui: $\mathrm{sp}(A_{\boldsymbol{w}}) = \{0^2, 1\}$.
Determiniamo l'autospazio bidimensionale relativo all'autovalore 0.

$$\lambda_1 = 0, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y + 2z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t' \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Determiniamo l'autospazio monodimensionale relativo all'autovalore 1.

$$\lambda_1 = 0, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 2y + 4z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})$ è un proiettore e l'azione sugli autospazi (*perpendicolari* per il teorema spettrale) può essere verificata direttamente: $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ se $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ e $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$.

8. Risposta:

$$A = B + B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_A = \lambda_B + \frac{1}{\lambda_B}$
Spettro di A: $\{5/2, 2^2\}$
Diagonalizzabile

6 Soluzione degli esercizi proposti

1. La matrice che rappresenta f_k nelle basi canoniche è la seguente:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 2 & 0 & k-1 & 2 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 & k+2 \end{pmatrix}$$

(a) Determiniamo il rango di A_kSe si considera il minore relativo alla sottomatrice estratta individuata dalle prime tre colonne si ottiene:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & k-1 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 \end{pmatrix} = -(k-1)^2(k-2)$$

e tale minore è diverso da zero se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 2$.

Consideriamo quindi in primo luogo il caso in cui k è diverso sia da uno che da due. In questo caso la matrice contiene un minore di ordine tre, quindi $\operatorname{Rk} f_k = 3$, $\dim \operatorname{Im} f_k = 3$, $\dim \operatorname{Ker} f_k = 1$. Per trovare una base di $\operatorname{Im} f_k$ in tal caso, basta considerare che lo spazio immagine coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^3$. La base piè semplice che si possa considerare è quindi la base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Il nucleo di f_k è lo spazio dei vettori le cui componenti risolvono il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 2 & 0 & k-1 & 2 \\ 3 & (k-1)(k-2) & k-1 & k+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per k diverso da uno e da due tale spazio è, come detto, monodimensionale, e si vede facilmente che si puè scegliere x_4 come variabile libera, ottenendo:

$$\begin{cases} x_1 = -kt \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Una possibile vettore di base per $\operatorname{Ker} f_k$ se $k \neq 1, k \neq 2$ è dunque: $(-k, 0, 2, 1)^{\mathrm{t}}$.

Veniamo al caso $k = 1$.In questo caso la matrice di rappresentazione è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

poiché due colonne sono nulle e due sono identiche, il rango vale 1, pertanto $\dim \operatorname{Im} f_1 = 1$, $\dim \operatorname{Ker} f_1 = 3$. Può essere scelto come base per $\operatorname{Im} f_1$ l'unico vettore colonna indipendente, cioè $(1, 2, 3)^{\mathrm{t}}$,

Il nucleo di f_k è lo spazio tridimensionale formato dai vettori soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scegliendo x_4 come variabile libera, (x_2 e x_3 lo sono necessariamente), si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -t'' \\ x_2 = t \\ x_3 = t' \\ x_4 = t'' \end{cases} \qquad t, t', t'' \in \mathbb{R}.$$

Una possibile base è la seguente:

$$\text{Base di } \operatorname{Ker} f_1 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Discutiamo infine il caso $k = 2$. Per tale valore del parametro la matrice di rappresentazione è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2 dato che la terza riga è la somma delle prime due, tra loro non proporzionali. Pertanto $\dim \operatorname{Im} f_2 = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f_2 = 2$.

Di tre colonne non nulle due saranno indipendenti e formeranno una base per $\operatorname{Im} f_1$. Scegliendo, per esempio la prima e la terza colonna:

$$\text{Base di } \operatorname{Im} f_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Il nucleo di f_k è lo spazio bidimensionale formato dai vettori soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo x_4 come variabile libera, (x_2 lo è necessariamente), si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 = -2s \\ x_2 = t \\ x_3 = 2s \\ x_4 = s \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Una possibile base è la seguente:

$$\text{Base di } \operatorname{Ker} f_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) L'immagine è bidimensionale se e solo se $k = 2$. Due vettori indipendenti di $\operatorname{Im} f_2$ sono i vettori della base determinata precedentemente. Un vettore ortogonale $\mathbf{v}$ a questi vettori è il loro prodotto vettoriale:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

il cui modulo è $\sqrt{3}$ (si ricordi che il determinante appena scritto è un oggetto *formale* e si riferisce soltanto alla corrispondente regola di calcolo ottenuta sviluppando rispetto alla prima riga). Un versore è quindi:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il piano parallelo a $\operatorname{Im} f_2$ e passante per il punto $P = (5, 2, -4)$ è individuato dai vettori $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{t}}$ che soddisfano alla relazione $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{OP}) = 0$ (dove O indica l'origine degli assi), vale a dire:

$$-1(x - 5) - 1(y - 2) + 1(z + 4) = 0,$$

ovvero:

$$x + y - z = 11.$$

(c) Se $k \neq 1$ e $k \neq 2$, $\operatorname{Im} f_k = \mathbb{R}^3$, quindi tutti i vettori, compreso $\mathbf{v} = (1, 3, 4)^{\mathrm{t}}$ appartengono a $\operatorname{Im} f_k$. Restano da discutere solo i casi $k = 1$ e $k = 2$. Occorre in particolare verificare se $\mathbf{v}$ è generato da i vettori della base di $\operatorname{Im} f_k$.

Sia $k = 2$. Consideriamo la matrice B formata da $\mathbf{v}$ e dai due vettori prima determinati della base $\operatorname{Im} f_2$. poiché:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

risulta che $\operatorname{Rk} B = 2$, quindi $\mathbf{v}$ è combinazione lineare dei vettori della base di $\operatorname{Im} f_2$, pertanto $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} f_2$.

Consideriamo ora il caso $k = 1$. Chiaramente $\mathbf{v} \notin \operatorname{Im} f_1$ perché esso non è proporzionale all'unico vettore della base, cioè $(1, 2, 3)^{\mathrm{t}}$.

2. $f_{\boldsymbol{w}}$ è lineare perchè è lineare il prodotto scalare tra due vettori. Infatti:

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{w}}(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{w} \cdot (\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2))\, \boldsymbol{w} = \\ &= (\alpha \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_2)\, \boldsymbol{w} = \\ &= \alpha (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{w} + \beta (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_2) \boldsymbol{w} = \\ &= \alpha f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}_1) + \beta f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

Per trovare $A_{\boldsymbol{w}}$, dobbiamo determinare l'azione di $f_{\boldsymbol{w}}$ sui vettori della base canonica:

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{i}) \boldsymbol{w} = w_x \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_x w_x \\ w_x w_y \\ w_x w_z \end{pmatrix}$$

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{j}) \boldsymbol{w} = w_y \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_y w_x \\ w_y w_y \\ w_y w_z \end{pmatrix}$$

$$f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{k}) \boldsymbol{w} = w_z \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_z w_x \\ w_z w_y \\ w_z w_z \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$A_{\boldsymbol{w}} = [f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{i}), f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{j}), f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{k})] = \begin{pmatrix} w_x w_x & w_y w_x & w_z w_x \\ w_x w_y & w_y w_y & w_z w_y \\ w_x w_z & w_y w_z & w_z w_z \end{pmatrix}$$

Si osservi che:

- $A_{\boldsymbol{w}}$ è simmetrica ($A_{\boldsymbol{w}} = A^t_{\boldsymbol{w}}$).
- Sia $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ quindi: $\ker f_{\boldsymbol{w}} = \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}\}$.
- $\det A_{\boldsymbol{w}} = 0$, $tr(A_{\boldsymbol{w}}) = ||\boldsymbol{w}||^2$.
- $f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$.

3. La matrice associata ad f è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & k-1 \\ k & 0 & k-1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Affinchè la matrice sia invertibile $\det A \neq 0$. $\det A = k^2 - 3k + 2$. Quindi anche la funzione è invertibile se $k \neq 1$ e $k \neq 2$.
- Sia $k = 1$. La matrice A associata ad f diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha: $rk(A) = 2$, Dim $Im(f) = 2$ e Dim $ker(f) = 1$. Per trovare il nucleo si risolve:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Una base del nucleo è formata dal vettore $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{k}$.
Una base dell'immagine è formata dalle (prime) due colonne indipendenti di A: $\boldsymbol{w}_1 = (1, 1, 1)^T$ e $\boldsymbol{w}_2 = (-1, 0, 2)^T$.

- Sia $k = 2$. La matrice A associata ad f diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le prime due righe sono indipendenti, la terza è uguale alla seconda meno la prima, quindi: $rk(A) = 2$. Ancora: Dim $Im(f) = 2$ e Dim $ker(f) = 1$. Per trovare il nucleo si risolve il sistema omogeneo (la terza equazione è ridondante):

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = \frac{z}{4} x = -\frac{z}{2} \\ z = 4t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

Una base del nucleo è formata dal vettore $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1, 4)^T$.
Una base dell'immagine è formata dalle (prime) due colonne indipendenti di A: $\boldsymbol{w}_1 = (1, 2, 1)^T$ e $\boldsymbol{w}_2 = (-2, 0, 2)^T$.

- Per $k \neq 1$ e $k \neq 2$ l'immagine di f coincide con tutto $\mathbb{R}^3$, pertanto è sempre possibile trovare la controimmagine di un vettore.
La controimmagine di $\boldsymbol{v} = (1, 1, 5)^T$ è la soluzione del sistema non omogeneo:
$$\begin{cases} x - ky + (k-1)z = 1 \\ kx + (k-1)z = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$
La soluzione si può ottenere con la regola di Cramer:
$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -k & k-1 \\ 1 & 0 & k-1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{-5k(k-1)}{(k-1)(k-2)} = \frac{5k}{2-k}$$
$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 1 & k-1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{5(k-1)^2}{(k-1)(k-2)} = \frac{5(k-1)}{k-2}$$
$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{5k^2 + k - 2}{(k-1)(k-2)}$$
Sia $k = 1$.
Ricordiamo il teorema di Rouchè-Capelli: un sistema $Ax = b$ ha almeno una soluzione se $rk(A) = rk(A|b)$.
La matrice completa del sistema è:
$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right).$$
Come già sappiamo: $rk(A) = 2$. Invece $rk(A|b) = 3$, infatti il determinante del minore formato dalla prima, seconda e quarta colonna è diverso da zero.
Il sistema è impossibile e non esiste la controimmagine del vettore $\boldsymbol{v}$.
Sia $k = 2$.
La matrice completa del sistema è:
$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right).$$
Ancora: $rk(A) = 2$ e $rk(A|b) = 3$ (il determinante del minore formato dalla seconda, terza e quarta colonna è diverso da zero).
In definitiva, non esistono controimmagini di $\boldsymbol{v}$ se $k = 1$ o $k = 2$.

4. (a) Ricordiamo che la matrice A_k associata alla funzione f_k è formata da tre vettori colonna: $f_\alpha(\mathbf{i})$, $f_\alpha(\mathbf{j})$, $f_\alpha(\mathbf{k})$. Pertanto:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 3 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Analizziamo il rango della matrice A_α:

$$\det \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \\ 3 & -2 & -\alpha \end{pmatrix} = 2\alpha - 2\alpha^3 = 2\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)$$

Il determinante si annulla se $\alpha = 0$, $\alpha = \pm 1$. In questi casi esiste sempre un minore di ordine due diverso da zero. Quindi, per il Teorema di nullità più rango:

se $\alpha \neq 0, \pm 1$: $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}((f_\alpha)) = 3$ e $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f_\alpha)) = 0$.

se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \pm 1$: $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}((f_\alpha)) = 2$ e $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f_\alpha)) = 1$.

Determiniamo ad esempio $\mathrm{Ker}(f_0)$. La richiesta $f_0(\mathbf{u}) = 0$, con $\mathbf{u} = (x, y, z)^{\mathrm{t}}$, fornisce le condizioni $z = 0$. $3x = 2y$. In accordo con il Teorema di nullità più rango si ha come già detto che $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}((f_\alpha)) = 1$, e una base del nucleo è data ad esempio dal vettore $(2, 3, 0)^{\mathrm{t}}$.

(c) Chiedersi se esiste una soluzione all'equazione $f_\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ equivale a determinare l'esistenza di una controimmagine di $\mathbf{w}$ attraverso f_α. Occorre analizzare il rango della matrice *completa*:

$$(A_\alpha|\mathbf{w}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\alpha & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -\alpha & 0 \end{array}\right)$$

La sottomatrice estratta $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -\alpha \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero per ogni α. Al fine di trovare il rango della matrice completa basta considerare il determinante della sottomatrice estratta di ordine 3 formato dalla prima, dalla terza e dalla quarta colonna, che è uguale a $6\alpha^2 - 6$. Pertanto:

se $\alpha \neq 0, \pm 1$: $\mathrm{Rk}(A_\alpha|\mathbf{w}) = \mathrm{Rk}(A_\alpha) = 3$, esiste un'unica controimmagine di $\mathbf{w}$.

se $\alpha = \pm 1$: $\mathrm{Rk}(A_\alpha|\mathbf{w}) = \mathrm{Rk}(A_\alpha) = 2$, esistono ∞^1 controimmagini di $\mathbf{w}$.

se $\alpha = 0$: $\mathrm{Rk}(A_\alpha|\mathbf{w}) = 3$, $\mathrm{Rk}(A_\alpha) = 2$, non esistono controimmagini di $\mathbf{w}$.

5. Il rango della matrice non può essere inferiore a due (vi sono, per ogni a, sottomatrici 2 x 2 a determinante non nullo) né può essere superiore a tre (il numero di righe è pari a tre).

   Orlando nei vari modi possibili una delle sottomatrici 2 x 2 a determinante non nullo, si vede facilmente che esiste una sottomatrice 3x3 a determinante non nullo salvo che per $a = 0$ e $a = 1$. Per tali valori di a il rango è dunque pari a due, per $a \neq 0, a \neq 1$ invece il rango è pari a tre.

Quindi, se $a \neq 0, a \neq 1$ l'immagine di L_a coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^3$ e dunque si può prendere come base dell'immagine, ad esempio, la base canonica. Per il Teorema di nullità più rango il nucleo di L_a ha in tal caso dimensione uno e, risolvendo esplicitamente per $a \neq 0, a \neq 1$ il sistema $A_a\mathbf{v} = 0$, si ottiene lo spazio monodimensionale generato dal vettore $(1, 0, 0, 2 - a)^{\mathrm{t}}$.

Se $a = 0$ o $a = 1$ una base dell'immagine è data ad esempio dalle prime due colonne della matrice (nessuno dei due vettori è identicamente nullo per tali valori di a, e tali due colonne non sono proporzionali). Per $a = 0$ si ottiene, risolvendo esplicitamente il sistema corrispondente, che una base del nucleo è data ad esempio dai vettori $(1, 0, 0, 2)^{\mathrm{t}}$, $(0, 1, 1, 0)^{\mathrm{t}}$. Per $a = 1$ si ottengono invece, ad esempio, i due vettori $(1, 0, 0, 1)^{\mathrm{t}}$, $(0, 1, -1, 0)^{\mathrm{t}}$.

Circa il secondo punto, abbiamo visto come i valori di a per i quali A_a non ha rango massimo sono $a = 0$ e $a = 1$. Per $a = 1$ si vede che il vettore assegnato non sta nell'immagine di L_1. Per $a = 0$ il corrispondente sistema è invece risolubile e fornisce come controimmagini i vettori $(x, y, y + 1, 2 + 2x)^{\mathrm{t}}$.

6. Se $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A allora deve valere che $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} k + 1 = \lambda \\ 4 = 2\lambda \\ 1 + k = \lambda \end{cases}$$

da cui: $\lambda = 2$ e $k = 1$.

La matrice A diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con polinomio caratteristico: $-\lambda(2 - \lambda)^2$.

Calcolo autovettori:

$$\lambda_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

È opportuno scegliere la matrice di passaggio S ortogonale, normalizzando gli autovettori:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oltre a essere ortogonale, S è simmetrica, quindi $S^{-1} = S^T = S$.
Si può infine verificare che:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. A e B sono simili se esiste una matrice invertibile (si dice: di passaggio) S tale che $A = S^{-1}BS$. Se A e B sono simili allora hanno stesso determinante, stessi autovalori e stessa traccia. Ma tutto ciò non è sufficiente per stabilire se due matrici siano simili. Se però le matrici sono diagonalizzabili e hanno gli stessi autovalori, allora sono simili.
Verifichiamo queste ipotesi.

Gli autovalori (da verificare!) per entrambe le matrici sono 1^2 e 2^1 (l'esponente indica la molteplicità algebrica). Lascio verificare anche che l'autospazio della matrice A relativo all'autovalore 1 è generato dai vettori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore 2 è generato dal vettore $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$. Le molteplicità algebriche e geometriche coincidono, A è diagonalizzabile mediante la matrice di passaggio M, tale che $M^{-1}AM = D$ con:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Relativamente alla matrice B si trova che due autovettori che generano l'autospazio relativo all'autovalore 1 sono $\boldsymbol{i}$ e $-\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ e l'autovettore relativo all'autovalore 2 è $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Anche la matrice B è diagonalizzabile mediante la matrice di passaggio N che realizza: $N^{-1}BN = D$ con:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi: $N^{-1}BN = M^{-1}AM \Rightarrow B = (NM^{-1})A(MN^{-1})$.
La matrice di passaggio S è quindi:

$$S = MN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre la sua inversa è:

$$S^{-1} = NM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.
   - Si determinano gli autovalori della matrice A_h ponendo uguale a zero il polinomio caretteristico:

     $$0 = \det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (h-\lambda)\left[(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18\right] = (h-\lambda)\left[\lambda^2 + \lambda - 2\right] = (h-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1)$$

     da cui si ricava che gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = h$.
     Se $h \neq -2 \wedge h \neq 1$ gli autovalori sono tutti semplici pertanto la matrice è diagonalizzabile.

Se $h = 1$ esiste un autovettore ($\lambda_2 = 1$) con molteplicità algebrica uguale a due. In questo caso:

$$A_1 - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango uno, quindi la moltiplicità geometrica è uguale a due e coincide con la molteplicità algebrica. Dunque per $h = 1$ la matrice è ancora diagonalizzabile.
Se $h = -2$ esiste ancora un autovettore ($\lambda_1 = -2$) con molteplicità algebrica uguale a due. In questo caso:

$$A_{-2} + 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

In questo caso le righe non nulle non sono proporzionali, quindi la matrice ha rango due. la moltiplicità geometrica è uguale a uno ed è diversa dalla molteplicità algebrica. Pertanto per $h = -2$ la matrice non è diagonalizzabile.

- Deve valere, per qualche valore $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -5 & h-3 & 3 \\ 0 & h & 0 \\ -6 & 2h-4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 3 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{cases} -5 + h(h-3) + 9 = \lambda \\ h^2 = h\lambda \\ -6 + h(2h-4) + 12 = 3\lambda \end{cases}$$

Se $h = 0$ dalla prima equazione segue $\lambda = 4$ ma dalla terza: $\lambda = 2$ pertanto il sistema è impossibile.
Se $h \neq 0$ dalla seconda equazione si ricava $h = \lambda$. La prima equazione diventa: $h^2 - 4h + 4 = 0$, dalla quale si ottiene $h = 2$, valore che soddisfa anche la terza equazione.
Quindi il vettore $\boldsymbol{v}_h$ è autovettore della matrice A_h (relativo all'autovalore $\lambda = 2$) se e solo se $h = 2$.

9. (a) L'equazione caratteristica è: $\det(A_\alpha - \lambda\mathbb{I}) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \alpha\lambda - \alpha - 1) = 0$, da cui si calcolano gli autovalori: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = \alpha + 1$.

L'autovalore $\lambda_1 = -1$ ha molteplicità algebrica non minore di 2. Determiniamo la dimensione dell'autospazio relativo. Il rango della matrice

$$A - \mathbb{I}\lambda_1 = A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2-\alpha & -2-\alpha & 0 \\ 4+2\alpha & 4+2\alpha & 0 \\ -6 & -5-\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

è 2 se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$. In questi casi la matrice non è diagonalizzabile, infatti la molteplicità geometrica dell'autospazio è 1, mentre la molteplicità algebrica dell'autovalore è 2.
Se $\alpha = -2$ allora la dimensione algebrica dell'autovalore -1 è 3 e la dimensione geometrica dell'autospazio relativo è 2, quindi la matrice non è diagonalizzabile.
Se $\alpha = 1$ la dimensione algebrica dell'autovalore -1 è 2, uguale alla dimensione geometrica dell'autospazio, pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Possiamo concludere che solo la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile ed il suo spettro è $\mathrm{Sp}(A_1) = \{-1^2, 2\}$.

(b) Determiniamo l'autospazio bidimensionale relativo all'autovalore -1.

$$\lambda = -1, \quad \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Determiniamo l'autospazio monodimensionale relativo all'autovalore 2.

$$\lambda = 2, \quad \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

10. (a) Le matrici A_h e $A_h - \lambda\mathbb{I}$, sebbene non siano triangolari superiori, hanno come determinante il prodotto degli elementi sulla diagonale principale. L'equazione caratteristica di A_k è:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda)^2 = 0$$

Gli autovalori della matrice, indipendentemente dal parametro h, sono: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, entrambi con molteplicità algebrica uguale a due.

(b) Per verificare se A_h è diagonalizzabile occorre determinare la dimensione degli autospazi relativi a λ_1 e λ_2. Affinchè la matrice sia diagonalizzabile, tali dimensioni (moltiplicità geometriche) devono coincidere con le molteplicità algebriche degli autovalori.
Caso $\lambda_1 = 2$:
La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo $(A_h - 2\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ è:

$$A_h - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1-h & -1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione dello spazio delle soluzioni $\mathbf{v}$ è: $4 - \text{Rk}(A_h - 2\mathbb{I})$ (teorema di Rouchè-Capelli). Analizziamo il minore formato dalle tre righe e tre colonne non nulle:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1-h & -1 & h \end{pmatrix} = h^2 - 2h + 1 = (h-1)^2$$

Si evince che $\text{Rk}(A_h - 2\mathbb{I}) = 3$ se $h \neq 1$, $\text{Rk}(A_h - 2\mathbb{I}) = 2$ se $h = 1$.
Soltanto se $h = 1$ la dimensione dell'autospazio relativo a λ_1 è due e coincide con la molteplicità algebrica dell'autovalore.
Caso $\lambda_2 = 3$:
La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo $(A_h - 3\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ è:

$$A_h - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1-h & -1 & h & -1 \end{pmatrix}$$

In questo caso si intuisce che $\text{Rk}(A_h - 3\mathbb{I}) = 2$ $f\forall h \in \mathbb{R}$: le prime tre righe della matrice sono tra loro proporzionali o nulle, mentre l'ultima è linearmente indipendente.
La molteplicità geometrica dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ coincide sempre con la sua moltiplicità algebrica $\forall h \in \mathbb{R}$.

La matrice A_h risulta diagonalizzabile solo per $h = 1$.

(c) Occorre risolvere i sistemi omogenei $(A_1 - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per $\lambda = 2, 3$.

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$