Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 06/11/2021**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 9) Risolvere la seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$i\left[z^2 + (\overline{z})^2\right] = 2\,(z - \overline{z}) + i\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} + i.$$

Soluzione. Vale, posto $z = x + iy$, quanto segue:

$$\begin{aligned}
&z^2 + (\overline{z})^2 = x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy = 2(x^2 - y^2);\\
&2\,(z - \overline{z}) = 4iy;\\
&\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} = \frac{x^3}{x + iy} = \frac{x^3(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^4 - ix^3y}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Dunque deve valere:

$$2i(x^2 - y^2) = 4iy + i\frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^3y}{x^2 + y^2} + i$$

ovvero:

$$\frac{x^3y}{x^2 + y^2} + i\left[4y + \frac{x^4}{x^2 + y^2} + 1 - 2(x^2 - y^2)\right] = 0.$$

Affinché la parte reale dell'ultima quantità scritta si annulli occorre che valga $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $x = 0$ anche la parte immaginaria si annulla se e solo se $2y^2 + 4y + 1 = 0$, cioè se e solo se $y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se invece $y = 0$ dovrà valere $x^2 + 1 - 2x^2 = 0$, cioè $x = \pm 1$. In conclusione le soluzioni sono le seguenti:

$$z_1 = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\ z_2 = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\ z_3 = 1, z_4 = -1.$$

2. (punti 16) Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare così definita: posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$

$$f_k(\boldsymbol{v}) = A_k\boldsymbol{v}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k^2 - k \\ -k & -k & -2k \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & k - 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k .
- Determinare una base del nucleo nel caso in cui esso sia monodimensionale.
- Sia π il piano di equazione $x - y + 2z = 0$. Fornire una base di $f_k(\pi)$ per $k = 3$.

Soluzione.

- Per determinare le dimensioni dell'immagine di f_k occorre calcolare il rango della matrice A_k . Il minore di ordine due formato dagli elementi delle ultime due righe e delle prime due colonne è diverso da zero se $k \neq 2$. Sia dunque $k \neq 2$, allora $2 \leq \operatorname{rk}(A_k) \leq 3$. Gli orlati di ordine tre sono i seguenti:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k^2 - k \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & k - 1 & k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k^2 - k \\ 0 & 0 & 6 + 3k - 3k^2 \\ 1 & k - 1 & k \end{pmatrix} = 3(k - 2)^2(k + 1)$$

$$\det\begin{pmatrix}-k & -k & -2k\\ 3 & 3 & 6\\ 1 & k-1 & k\end{pmatrix} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Pertanto, se $k \neq -1 \wedge k \neq 2$, si ha: $\mathrm{rk}(A_k) = 3$. Se $k = 2$ le tre colonne della matrice sono proporzionali, pertanto $\mathrm{rk}(A_2) = 1$. Se $k = -1$, la presenza di almeno un minore di ordine due non nullo implica che $\mathrm{rk}(A_{-1}) = 2$. Quindi:

(a) se $k \neq -1 \wedge k \neq 2$: $\dim \mathrm{Im}(f_k) = 3$, $\dim \mathrm{Ker}(f_k) = 0$;
(b) se $k = -1$: $\dim \mathrm{Im}(f_{-1}) = 2$, $\dim \mathrm{Ker}(f_{-1}) = 1$;
(c) se $k = 2$: $\dim \mathrm{Im}(f_2) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}(f_2) = 2$.

- Per il punto precedente occorre porre $k = -1$ e poi risolvere il sistema omogeneo $A_{-1}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Poichè ad esempio la seconda e la terza riga sono ridondanti, si ha:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Sottraendo la prima riga alla seconda si ottiene:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Da cui, posto $z = t$, segue: $y = -t$, $x = -t$, dove $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo si può scegliere il vettore $(-1; -1; 1)^t$.

- Siano $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ i tre vettori colonna della matrice A_3. Essi risultano linearmente indipendenti per quanto visto precedentemente.
L'immagine del vettore $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$ attraverso f_3 è: $x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + z\boldsymbol{w}_3$. Ogni vettore dell'immagine del piano π può essere scritto come: $(y - 2z)\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + z\boldsymbol{w}_3$, ovvero: $y(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) + z(\boldsymbol{w}_3 - 2\boldsymbol{w}_1)$. I vettori

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}2\\ -6\\ 6\\ 3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_3 - 2\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}4\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano l'immagine del piano π. Essi dunque formano una base di $f_3(\pi)$.

3. (punti 7) Sia $h \in \mathbb{R}$. Data la matrice:

$$A_h = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & h-3 & h-1\end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori del parametro h essa è diagonalizzabile.

Soluzione. Occorre calcolare gli autovalori della matrice A_h:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & h-3 & h-1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - (2+h)\lambda + 2h) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-h)$$

Gli autovalori sono tutti semplici se $h \neq 1 \wedge h \neq 2$. Pertanto, se $h \neq 1 \wedge h \neq 2$ la matrice è diagonalizzabile.
Sia $h = 1$. In questo caso l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica pari a due. Si ha:

$$\mathrm{rk}(A_1 - \mathbb{I}) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} = 2.$$

Pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore è $3 - 2 = 1 \neq 2$, dunque la matrice non è diagonalizzabile.
Sia $h = 2$. In questo caso è l'autovalore $\lambda = 2$ ad avere molteplicità algebrica pari a due. Anche in questo caso questo autovalore non è regolare, infatti:

$$\mathrm{rk}(A_2 - 2\mathbb{I}) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} = 2$$

e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se e solo se $h \neq 1 \wedge h \neq 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 06/11/2021
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 9) Risolvere la seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$i\left[z^2 + (\overline{z})^2\right] = 4(z - \overline{z}) + i\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} + 4i.$$

Soluzione. Vale, posto $z = x + iy$, quanto segue:

$$\begin{aligned} &z^2 + (\overline{z})^2 = x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy = 2(x^2 - y^2);\\ &4\,(z - \overline{z}) = 8iy;\\ &\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} = \frac{x^3}{x + iy} = \frac{x^3(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^4 - ix^3 y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dunque deve valere:

$$2i(x^2 - y^2) = 8iy + i\frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + 4i$$

ovvero:

$$\frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + i\left[8y + \frac{x^4}{x^2 + y^2} + 4 - 2(x^2 - y^2)\right] = 0.$$

Affinché la parte reale dell'ultima quantità scritta si annulli occorre che valga $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $x = 0$ anche la parte immaginaria si annulla se e solo se $2y^2 + 8y + 4 = 0$, cioè se e solo se $y = -2 \pm \sqrt{2}$. Se invece $y = 0$ dovrà valere $x^2 + 4 - 2x^2 = 0$, cioè $x = \pm 2$. In conclusione le soluzioni sono le seguenti:

$$z_1 = \left(-2 + \sqrt{2}\right) i,\ \ z_2 = \left(-2 - \sqrt{2}\right) i,\ \ z_3 = 2, z_4 = -2.$$

2. (punti 16) Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare così definita: posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$

$$f_k(\boldsymbol{v}) = A_k \boldsymbol{v}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ k & k & 2k \\ 1 & k^2 - 3k + 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k .
- Determinare una base del nucleo nel caso in cui esso sia monodimensionale.
- Sia π il piano di equazione $2x - y + z = 0$. Fornire una base di $f_k(\pi)$ per $k = 2$.

Soluzione.

- Per determinare le dimensioni dell'immagine di f_k occorre calcolare il rango della matrice A_k . Il minore di ordine due formato dagli elementi delle prime due righe e delle prime due colonne è diverso da zero se $k \neq 3$. Sia dunque $k \neq 3$, allora $2 \leq \operatorname{rk}(A_k) \leq 3$. Gli orlati di ordine tre sono i seguenti:

$$\det \begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ k & k & 2k \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & k^2-3k+1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & k^2-3k & 0 \end{pmatrix} = -2k(k-3)^2$$

Pertanto, se $k \neq 0 \wedge k \neq 3$, si ha: $\mathrm{rk}(A_k) = 3$. Se $k = 3$ le tre colonne della matrice sono proporzionali, pertanto $\mathrm{rk}(A_3) = 1$. Se $k = 0$, la presenza di almeno un minore di ordine due non nullo implica che $\mathrm{rk}(A_0) = 2$. Quindi:

(a) se $k \neq 0 \wedge k \neq 3$: $\dim \mathrm{Im}(f_k) = 3$, $\dim \mathrm{Ker}(f_k) = 0$;
(b) se $k = 0$: $\dim \mathrm{Im}(f_0) = 2$, $\dim \mathrm{Ker}(f_0) = 1$;
(c) se $k = 3$: $\dim \mathrm{Im}(f_3) = 1$, $\dim \mathrm{Ker}(f_3) = 2$.

- Per il punto precedente occorre porre $k = 0$, e poi risolvere il sistema omogeneo $A_0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Poichè ad esempio la seconda e la terza riga sono ridondanti, si ha:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sommando alla prima riga il doppio della seconda e scambiando le righe, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui, posto $z = t$, segue: $y = -t$, $x = -t$, dove $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo si può scegliere il vettore $(-1; -1; 1)^t$.

- Siano $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ i tre vettori colonna della matrice A_2. Essi risultano linearmente indipendenti per quanto visto precedentemente.
L'immagine del vettore $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$ attraverso f_2 è: $x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + z\boldsymbol{w}_3$. Ogni vettore dell'immagine del piano π può essere scritto come: $x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + (y-2x)\boldsymbol{w}_3$, ovvero: $x(\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_3) + y(\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3)$. I vettori

$$\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano l'immagine del piano π. Essi dunque formano una base di $f_2(\pi)$.

3. (punti 7) Sia $h \in \mathbb{R}$. Data la matrice:

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & h-2 & h-3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori del parametro h essa è diagonalizzabile.

Soluzione. Occorre calcolare gli autovalori della matrice A_h:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & h-2-\lambda & h-3 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - (h+1)\lambda + h) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-h)$$

Gli autovalori sono tutti semplici se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$. Pertanto, se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$ la matrice è diagonalizzabile.
Sia $h = 1$. In questo caso l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica pari a due. Si ha:

$$\mathrm{rk}(A_1 - \mathbb{I}) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore è $3 - 2 = 1 \neq 2$, dunque la matrice non è diagonalizzabile.
Sia $h = 3$. In questo caso è l'autovalore $\lambda = 3$ ad avere molteplicità algebrica pari a due. Anche in questo caso questo autovalore non è regolare, infatti:

$$\mathrm{rk}(A_3 - 3\mathbb{I}) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se e solo se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$.