Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		**prova del 6/6/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Risolvere la seguente equazione, nella variabile complessa z :

$$e^{z^4-i}=i,$$

rappresentando qualitativamente l'insieme delle soluzioni ottenuto nel piano complesso.

Soluzione. Riscriviamo l'equazione come

$$e^{z^4-i}=e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z^4-i=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \iff z^4=i\left(\frac{\pi}{2}+1+2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Occorre quindi estrarre le radici quarte del membro di destra. Se $k\ge 0$, si ha $\frac{\pi}{2}+1+2k\pi>0$. Quindi le radici quarte cercate hanno modulo pari a $\left(\frac{\pi}{2}+1+2k\pi\right)^{\frac14}$, e argomenti dati da $\frac14\left(\frac{\pi}{2}+2h\pi\right)$, $h=0,1,2,3$, cioè $\frac{\pi}{8}$, $\frac58\pi$, $\frac98\pi$, $\frac{13}{8}\pi$. Se invece $k<0$, si ha $\frac{\pi}{2}+1+2k\pi<0$, quindi deve valere $z^4=-i\left[-\left(\frac{\pi}{2}+1+2k\pi\right)\right]$, le radici hanno quindi modulo pari a $\left[-\left(\frac{\pi}{2}+1+2k\pi\right)\right]^{\frac14}$ e argomenti dati da $\frac14\left(-\frac{\pi}{2}+2h\pi\right)$, $h=0,1,2,3$, cioè $\frac38\pi$, $\frac78\pi$, $\frac{11}{8}\pi$, $\frac{15}{8}\pi$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x)=\log\left[\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)\right].$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. Determiniamo il dominio di f . Deve valere $x\ne-\frac12$ e inoltre $\frac{x^2}{2x+1}>0$, ma affinché il logaritmo più esterno sia ben definito occorre anche che $\frac{x^2}{2x+1}>1$. Risolviamo quest'ultima disequazione. Essa è chiaramente falsa se $x<-\frac12$, mentre se $x>-\frac12$ essa equivale a $x^2-2x-1>0$ che è soddisfatta se $x>1+\sqrt2$ e se $x<1-\sqrt2$. Osservando che $-\frac12<1-\sqrt2$ si ottiene che la funzione è definita su $\left(-\frac12,1-\sqrt2\right)\cup(1+\sqrt2,+\infty)$. Calcoliamo ora i limiti alla frontiera del dominio di definizione. Ovviamente vale

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

e non vi sono asintoti obliqui in tale limite in quanto la crescita della funzione è sublineare. Inoltre:

$$\lim_{x\to(1+\sqrt2)^+}=-\infty, \qquad \lim_{x\to(1-\sqrt2)^-}=-\infty, \qquad \lim_{x\to\left(\frac12\right)^+}=+\infty.$$

Infatti, nei primi due limiti scritti la quantità $\frac{x^2}{2x+1}$ tende per costruzione a uno (per eccesso), quindi $\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ tende a zero (sempre per eccesso), mentre se $x\to-\left(\frac12\right)^+$ chiaramente $\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ tende a $+\infty$.

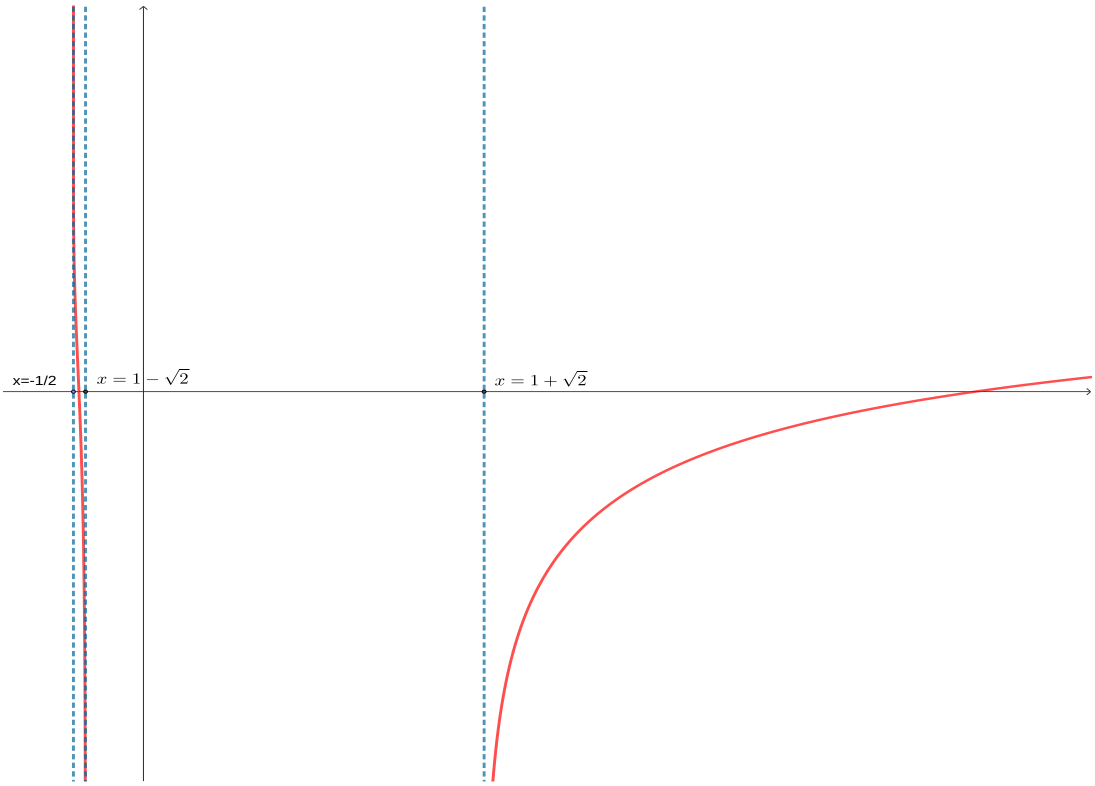
Studiamo ora il segno della funzione. Vale $f(x)>0$ se e solo se $\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)>1$, che ha luogo se e solo se $\frac{x^2}{2x+1}>e$. Nel dominio di definizione di f , ciò equivale a $x^2-2ex-e>0$. Il polinomio $x^2-2ex-e$ si annulla per $x=e\pm\sqrt{e^2+e}$, è positivo per $x>e+\sqrt{e^2+e}$ e per $x<e-\sqrt{e^2+e}$, negativo altrimenti. La radice $x_1=e+\sqrt{e^2+e}$ è maggiore di $1+\sqrt2$ in quanto è chiaro che $x_1>2e$. Dunque, per quanto riguarda il ramo della funzione che corrisponde a $x>1+\sqrt2$, si ha $f(x)>0$ se $x>x_1$, mentre $f(x)<0$ se $x\in(1+\sqrt2,x_1)$. Inoltre $f(x_1)=0$. Per quanto riguarda la radice $x_2=e-\sqrt{e^2+e}$ essa è chiaramente negativa ma non è ovvio a priori, a meno di verificarlo con una calcolatrice, che $x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$. Tuttavia, i limiti sopra calcolati, il fatto che f è evidentemente continua dove definita, e il teorema degli zeri, mostrano f deve avere almeno uno zero in $\left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$. Dato che non vi sono altri possibili zeri di f come conseguenza dei calcoli precedenti, ne segue che effettivamente $x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$. Quindi, nel ramo della funzione che corrisponde a $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$, $f(x) < 0$ se $x \in \left(x_2, 1-\sqrt{2}\right)$ mentre $f(x) > 0$ se $x \in \left(-\frac{1}{2}, x_2\right)$.

La funzione è derivabile ove definita. Calcoliamo quindi, nel dominio di f:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 \log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)} \frac{2x(2x+1)-2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{x^2(2x+1)\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)} = 2\frac{x+1}{x(2x+1)\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)}.$$

Dunque f' non si annulla nell'insieme di definizione di f. Si noti che i fattori $(x+1), (2x+1), \log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ sono tutti strettamente positivi per costruzione nel dominio di f. Quindi il segno di f' coincide con quello di x, quindi $f'(x) > 0$ se $x > 1+\sqrt{2}$, e f è quindi crescente in tale intervallo, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$, e f è quindi decrescente in tale intervallo.

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione:

$$f_a(x) = \frac{\sin\left[a(x-\sin x) - x^3\right]}{1+\log(\cos x)}.$$

Stabilire se esistono valori di a per i quali il termine principale dello sviluppo di Taylor centrato nell'origine di f_a è di grado strettamente superiore a tre, e in caso affermativo determinare tali valori e i primi due termini non nulli dello sviluppo.

Soluzione. Si ha chiaramente, qui e in seguito per $x \to 0$:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad a(x-\sin x) - x^3 = \left(\frac{a}{6} - 1\right)x^3 - \frac{ax^5}{120} + o(x^5).$$

Dunque:

$$\sin\left[a(x-\sin x) - x^3\right] = \sin\left[\left(\frac{a}{6}-1\right)x^3 - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right] = \left(\frac{a}{6}-1\right)x^3 - \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

in quanto i termini successivi al primo nello sviluppo dell'ultimo seno scritto sono chiaramente di ordine strettamente superiore a cinque (partono da x^9). Poichè, anche senza svolgere lo sviluppo in dettaglio come sarà fatto tra poco, è chiaro che

$$\frac{1}{1+\log(\cos x)} = 1 + o(1),$$

ne segue che il primo termine dello sviluppo di f è di grado strettamente maggiore di tre se e solo se $a = 6$. Poniamo quindi $a = 6$ e riscriviamo quanto sopra, per tale valore del parametro, e tenendo conto anche del termine successivo dello sviluppo, come:

$$\begin{aligned}\sin\left[6(x-\sin x)-x^3\right] &= \sin\left[6\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{7!}+o(x^7)\right)-x^3\right] = \sin\left[-\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{840}+o(x^7)\right]\\ &= -\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{840}+o(x^7).\end{aligned}$$

Vale inoltre:

$$\frac{1}{1+\log(\cos x)} = \frac{1}{1+\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Si ha quindi infine:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left[6(x-\sin x)-x^3\right]}{1+\log(\cos x)} &= \left[-\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{840}+o(x^7)\right]\left[1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right] = -\frac{x^5}{20}+\left(\frac{1}{840}-\frac{1}{40}\right)x^7+o(x^7)\\ &= -\frac{x^5}{20}-\frac{x^7}{42}+o(x^7)\end{aligned}$$

4. (punti 6) Studiare, per ogni $\alpha > 0$ fissato, la convergenza puntuale della seguente successione di funzioni:

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{n}{x^\alpha}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right), \quad x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Successivamente, studiare la convergenza uniforme nel caso $\alpha \in (0,2]$.

Soluzione. Fissati x, α, la quantità x^2/n tende a zero per $n \to +\infty$. Dunque, per ogni x, α fissati vale:

$$f_{\alpha,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{2-\alpha}.$$

Dunque, fissato $\alpha > 0$, la successione $f_{\alpha,n}$ converge puntualmente a $f_\alpha(x) = x^{2-\alpha}$, $x > 0$. Si noti inoltre che, fissati α ed n, vale $f_{\alpha,n}(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Quindi, non vi può essere convergenza uniforme di $f_{\alpha,n}$ a f_α su $[0,+\infty)$ se $\alpha \in (0,2]$, in quanto in tal caso f_α non tende a zero all'infinito e dunque

$$\sup_{x>0}|f_{\alpha,n}(x) - x^{2-\alpha}| = +\infty, \quad \forall \alpha \in (0,2].$$