

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ e calcolarne, se converge, la somma

La serie è a termini positivi; condizione necessaria $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n+1)n(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)!} = 0$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{(n+1)!}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+1)!} \frac{(n+1)!}{n} \right) =$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = 0 \quad \text{converge}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(n+1)}{(n+1)n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ e calcolarne, se converge, la somma

La serie è a termini positivi; condizione necessaria $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 0$

Poiché se $n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$ essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata converge

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n} = \frac{An+Bn+2B}{n(n+2)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \right) = \frac{3}{4} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ e calcolarne, se converge, la somma

La serie è a termini negativi consideriamo la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} -\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$; condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln(1) = 0$$

Se $n \rightarrow +\infty$ $-\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2}$ essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} -\ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge e quindi la serie assegnata converge

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \right) = 1 -$$

$$\ln \frac{3}{2} - \ln 2 + \ln \frac{4}{3} - \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{5}{4} - \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} = \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} - \ln 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} - \ln 2 \right) = -\ln 2 \rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln 2$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ e calcolarne, se converge, la somma

La serie è a termini positivi; condizione necessaria $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \right) =$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = 0$$

Poiché se $n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n^{1.5}}$ essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{1.5}}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico la serie assegnata converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$

$$\text{Condizione necessaria } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{-2n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n e^{-2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e^2}\right)^n = 0$$

$$\text{Applicando il criterio del rapporto si ottiene } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^{n+1} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} \right) = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{n^2}} \right) =$$

$$3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{-2(n+1)}}{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{-2n}} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e)^{-2(n+1)}}{(e)^{-2n}} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e)^{-2n}(e)^{-2}}{(e)^{-2n}} = \frac{3}{e^2} \quad \text{converge}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{n!^n}$

Ricordando la formula di Stirling $n \rightarrow +\infty \quad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, applicando il criterio della radice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3e)^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0 \quad \text{converge}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$

$$n \rightarrow +\infty \quad \sin^2 n \leq 1 \rightarrow \frac{\sin^2 n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} \quad \text{poiché } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{converge}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}}$

$$\binom{4n}{3n} = \frac{(4n)!}{(3n)!n!} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!n!}{(4n)!}$$

$$\text{Utilizzando il criterio del rapporto } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+3)!(n+1)!}{(4n+4)!} \frac{(4n)!}{(3n)!n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(n+1)n!}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!} \frac{(4n)!}{(3n)!n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = \frac{27}{256} \quad \text{converge}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^k n}, k > 0$

La serie è a termini positivi; la funzione $f(x) = \frac{1}{x \ln^k x}$ è continua e positiva in $[2, +\infty)$, è inoltre

decrescente nell'intervallo per il criterio di convergenza integrale $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^k n}$ e

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^k x} dx$ hanno lo stesso comportamento o entrambi convergono o entrambi divergono.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^k x} dx \quad \text{posto } \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \rightarrow \int_{\ln 2}^{+\infty} t^{-k} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^p t^{-k} dt =$$

$$\text{Se } k = 1, \quad \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^p \frac{1}{t} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\ln|p| - \ln(\ln 2)) = +\infty \quad \text{l'integrale è divergente}$$

$$\text{Se } k \neq 1, \quad \int_{\ln 2}^{+\infty} t^{-k} dt = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^p t^{-k} dt = \frac{1}{1-k} \lim_{p \rightarrow +\infty} (p^{1-k} - (\ln 2)^{1-k}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } k < 1 \\ \frac{(\ln 2)^{1-k}}{k-1} & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Di conseguenza la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^k n}$, converge se $k > 1$, diverge se $0 < k \leq 1$.

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

La serie è a termini positivi; applicando il criterio della radice $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\ln n} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{n} \ln(n)} - 1) = 1 - 1 = 0$ **converge**

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\binom{3n+2}{3n}}$

La serie è a termini positivi. $\binom{3n+2}{3n} = \frac{(3n+2)!}{(3n)!2!} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\binom{3n+2}{3n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{(3n)!2}{(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(3n+2)(3n+1)} , x \rightarrow +\infty \quad \frac{4}{(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{4}{9n^2}$, poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, converge, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\binom{3n+2}{3n}}$ **converge**

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ e calcolarne, se converge, la somma.

La serie è a termini positivi; $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{5^n} + \frac{3^n}{5^n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n$ essendo entrambe serie geometriche con ragione minore di uno le serie **convergono**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n}{2n-1} \right)^n$

La serie è a termini positivi; se $n \rightarrow +\infty$ $\left(\frac{1+n}{2n-1} \right)^n \sim \left(\frac{1}{2} \right)^n$ essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ una serie geometriche convergente le serie assegnata **converge**

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

La serie è a termini positivi; utilizzando il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$ **diverge**

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)^n}$ in funzione del parametro reale k e calcolarne, se converge, la somma.

La serie è a termini positivi; $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k} \right)^n$ essendo una serie geometriche la serie converge se in modulo la ragione è minore di uno: $\left| \frac{1}{1+k} \right| < 1 \rightarrow |1+k| > 1 \rightarrow 1+k < -1 \text{ o } 1+k > 1 \rightarrow k < -2 \text{ o } k > 0$
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+k} \right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{1+k}} - 1 = \frac{1+k}{1+k-1} - 1 = \frac{1+k}{k} - 1 = \frac{1}{k} + 1 - 1 = \frac{1}{k}$

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\ln(n)}} \right)$

Applicando il criterio del rapporto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\ln(n)}}{2^{\ln(n+1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\ln(n)-\ln(1+n)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\ln(\frac{n}{n+1})} = 2^{\ln 1} = 1$
il criterio è inefficace

$2^{\ln(n)} = e^{\ln 2^{\ln(n)}} = e^{\ln(n)\ln 2} = (e^{\ln(n)})^{\ln 2} = n^{\ln 2} \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\ln(n)}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\ln 2}} \right)$ serie armonica generalizzata con esponente minore di uno la serie **diverge**

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\ln(n!)}} \right)$

Applicando il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\ln(n!)}}{2^{\ln((n+1)!)}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\ln(n!) - \ln((n+1)!)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\ln\left(\frac{n!}{(n+1)n!}\right)} = 2^{\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)} = 2^{\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)} = 2^{-\ln(n+1)} = 0$ **converge**

Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)$

Considerando la condizione necessaria $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\ln \sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^0} = 1$ **non converge ed essendo una serie a termini positivi non potendo essere indeterminata diverge**