Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere la seguente disequazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \geq 0.$$

Determinare infine la soluzione di minimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Sia $z = x + iy$, con $z \neq i$. Si ha:

$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \frac{(x-1+iy)(x+i(1-y))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{(x-1)x+y(y-1)+i(xy+(x-1)(1-y))}{x^2+(y-1)^2}$$

e quindi, sempre per $z \neq i$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{(x-1)x+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2-x-y \geq 0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

L'insieme richiesto è dunque l'esterno del cerchio di centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, incluso il bordo. Chiaramente, la soluzione di minimo modulo è $z = 0$, come era già evidente dal fatto che $z = 0$ soddisfa la condizione di partenza, e come può essere visto dalla soluzione generale sopra determinata, in quanto la circonferenza prima scritta passa per l'origine.

Esercizio 2 8 punti

Mostrare che

$$\int_0^2 x \log((1-x)^2)\, dx$$

esiste in senso improprio e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 2

Poiché $\lim_{x\to 1} x\log((1-x)^2) = -\infty$, l'integrale è improprio. Converge perché l'andamento dell'infinito è logaritmico. Osserviamo che $x\log((1-x)^2) = 2x\log|1-x|$, e calcoliamo

$$\int_0^1 x\log(1-x)\, dx \text{ e } \int_1^2 x\log(x-1)\, dx$$

Una primitiva di $x\log(1-x)$ è $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2-1)\log(1-x) - \frac{x}{2}$, mentre una primitiva di $x\log(x-1)$ è $g(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x-1) - \frac{x}{2}$, quindi

$$\int_0^2 x\log((1-x)^2)\, dx = 2\left(\lim_{x\to 1^-} f(x) - f(0) + g(2) - \lim_{x\to 1^+} g(x)\right) = -4\,.$$

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{x+4}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni qualitative sul numero e sulla localizzazione di eventuali punti di flesso desumibili dal resto dello studio.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita per $x\neq -3, x\neq -4$. Si ha:

$$\lim_{x\to(-4)^{\pm}} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to(-3)^{+}} f(x)=0,,\quad \lim_{x\to(-3)^{-}} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0.$$

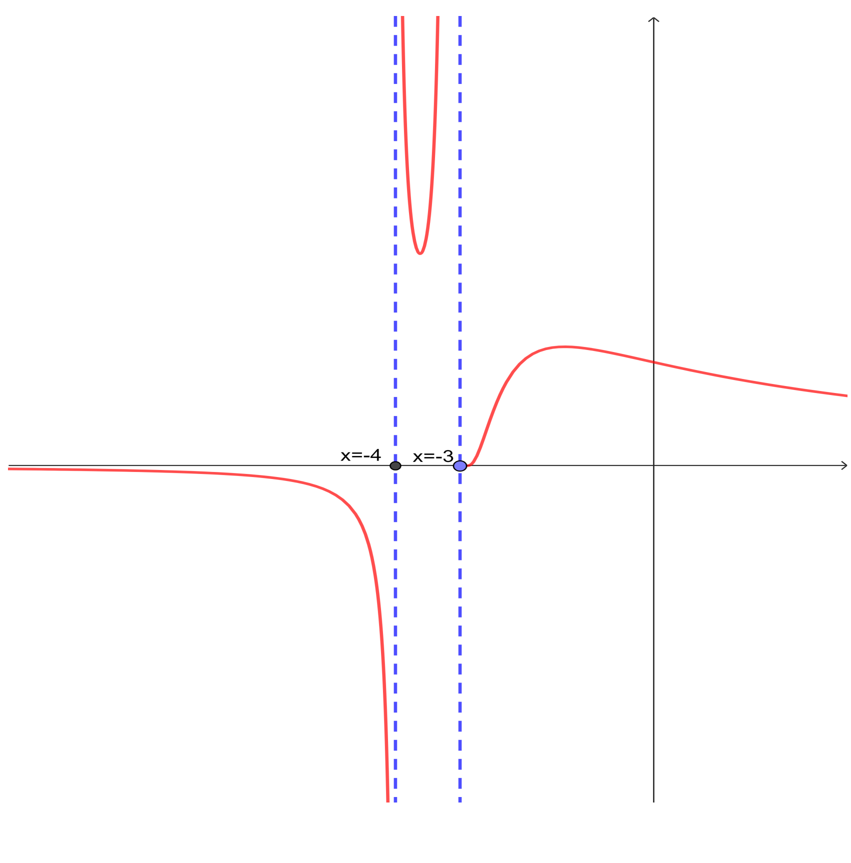
Dunque $y=0$ è asintoto orizzontale per $x\to\pm\infty$, $x=-4$ è asintoto verticale bilatero, $x=-3$ è asintoto verticale sinistro. La funzione è positiva se $x>-4$, $x\neq -3$, negativa se $x<-4$. Calcoliamo la derivata, per $x\neq -3, x\neq -4$:

$$f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(x+4)^2}\left[\frac{x+4}{(x+3)^2}-1\right]=\frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(x+4)^2}\left[\frac{x+4-(x+3)^2)}{(x+3)^2}\right]=-\frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(x+4)^2}\left[\frac{x^2+5x+5}{(x+3)^2}\right].$$

Il segno della derivata, dove definita, è l'opposto di quello di x^2+5x+5. Tale polinomio ha zeri in $x=(-5\pm\sqrt{25-20})/2=(-5\pm\sqrt{5})/2$. Si noti che $x_1=(-5-\sqrt{5})/2\in(-4,-3)$ e che $x_2=(-5+\sqrt{5})/2\in(-3,0)$. La derivata è positiva se $x\in(x_1,-3)\cup(-3,x_2)$, dunque crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, negativa se $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,x_1)\cup(x_2,+\infty)$, dunque decrescente separatamente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x=x_1$ è di minimo relativo, il punto $x=x_2$ è di massimo relativo. Dati i limiti alla frontiera del dominio non vi sono estremi assoluti. Si noti infine che

$$\lim_{x\to(-3)^{+}} f'(x)=0,$$

così che il grafico di f si avvicina da destra al punto $(-3,0)$ con tangente che tende a diventare orizzontale. Se ne deduce che vi sono almeno due flessi: il primo per un opportuno $x_3\in(-3,x_2)$, il secondo per un opportuno $x_4>x_2$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 4 7 punti

Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^n.$$

Stabilire su quali insiemi la convergenza è uniforme.

Soluzione dell'esercizio 4

Le funzioni f_n sono definite per $x \neq 1$.

$f_n(x) \to 0$ se e solo se $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| < 1$, ossia per $x < -1$.

$f_n(x) \to 1$ se e solo se $\frac{x+3}{x-1} = 1$ (per nessun valore di x).

$f_n(x) = (-1)^n$ e solo se $\frac{x+3}{1-x} = 1$, ossia $x = -1$.

$|f_n(x)| \to +\infty$ se e solo se $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| > 1$, ossia $x > -1$.

Dunque $f_n(x) \to 0$ se $x < -1$, non converge per $x \geq -1$. La convergenza non può essere uniforme in un intervallo $[a, -1)$, per nessun valore di $a < -1$ perché per il teorema del doppio limite dovrebbe essere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(-1) = 0.$$

Si noti però che la funzione $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ è decrescente nell'intervallo $[a, -1]$, $g(a) < 1$ e $g(-1) = -1$, quindi

$$\max_{x\in[a,-1-\epsilon]} |g(x)| = \max(|g(a)|, |g(1-\epsilon)|) < 1$$

e allora

$$\max_{x\in[a,-1-\epsilon]} |f_n(x)| \to 0,$$

ossia la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[a, -1-\epsilon]$ con $a < -1$ e ϵ sufficientemente piccolo. La convergenza non è uniforme in $(-\infty, -1-\epsilon)$ perché $\sup_{(-\infty,-1-\epsilon)} |f_n(x)| = 1$.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere la seguente disequazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z+i}\right) \geq 0.$$

Determinare infine la soluzione di minimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Sia $z = x + iy$, con $z \neq -i$. Si ha:

$$\frac{z+1}{z+i} = \frac{x+1+iy}{x+i(y+1)} = \frac{(x+1+iy)(x-i(1+y))}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x+1)x+y(y+1)+i(xy-(x+1)(1+y))}{x^2+(y+1)^2}$$

e quindi, sempre per $z \neq -i$:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z+i}\right) = \frac{(x+1)x+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2+x+y \geq 0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}.$$

L'insieme richiesto è dunque l'esterno del cerchio di centro $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, incluso il bordo. Chiaramente, la soluzione di minimo modulo è $z = 0$, come era già evidente dal fatto che $z = 0$ soddisfa la condizione di partenza, e come può essere visto dalla soluzione generale sopra determinata, in quanto la circonferenza prima scritta passa per l'origine.

Esercizio 2 8 punti

Mostrare che

$$\int_0^4 x \log((2-x)^2)\, dx$$

esiste in senso improprio e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 2

Poiché $\lim_{x\to 2} x \log((2-x)^2) = -\infty$, l'integrale è improprio. Converge perché l'andamento dell'infinito è logaritmico. Osserviamo che $x \log((2-x)^2) = 2x \log|2-x|$, e calcoliamo

$$\int_0^2 x \log(2-x)\, dx \text{ e } \int_2^4 x \log(x-2)\, dx$$

Una primitiva di $x\log(2-x)$ è $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2 \log(2-x) - x - 2\log(2-x)$, mentre una primitiva di $x\log(x-2)$ è $g(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2 \log(x-2) - x - 2\log(x-2)$, quindi

$$\int_0^4 x \log((2-x)^2)\, dx = 2 \left(\lim_{x\to 2^-} g(x) - g(0) + g(4) - \lim_{x\to 2^+} g(x) \right) = -16 + 4\log 16\,.$$

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{4-x}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni qualitative sul numero e sulla localizzazione di eventuali punti di flesso desumibili dal resto dello studio.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita per $x \neq -3, x \neq -4$. Si ha:

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x\to 3^{-}} f(x) = 0,, \quad \lim_{x\to 3^{+}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0.$$

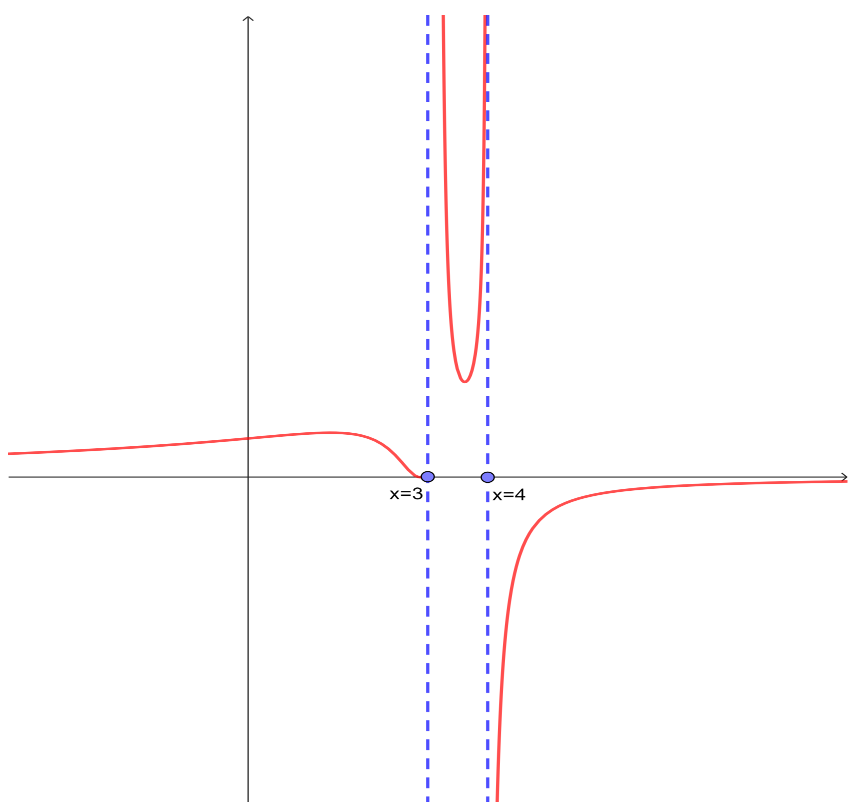
Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, $x = -4$ è asintoto verticale bilatero, $x = -3$ è asintoto verticale sinistro. La funzione è positiva se $x < 4$, $x \neq 3$, negativa se $x > 4$. Calcoliamo la derivata, per $x \neq 3, x \neq 4$:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(4-x)^2}\left[\frac{x-4}{(x-3)^2} + 1\right] = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(4-x)^2}\left[\frac{x-4+(x-3)^2)}{(x-3)^2}\right] = \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(4-x)^2}\left[\frac{x^2-5x+5}{(x-3)^2}\right].$$

Il segno della derivata, dove definita, è quello di $x^2 - 5x + 5$. Tale polinomio ha zeri in $x = (5 \pm \sqrt{25-20})/2 = (5 \pm \sqrt{5})/2$. Si noti che $x_1 = (5+\sqrt{5})/2 \in (3,4)$ e che $x_2 = (5-\sqrt{5})/2 \in (0,3)$. La derivata è negativa se $x \in (x_2, 3) \cup (3, x_1)$, dunque decrescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, positiva se $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, 4) \cup (4, +\infty)$, dunque crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = x_1$ è di minimo relativo, il punto $x = x_2$ è di massimo relativo. Dati i limiti alla frontiera del dominio non vi sono estremi assoluti. Si noti infine che

$$\lim_{x\to 3^{-}} f'(x) = 0,$$

così che il grafico di f si avvicina da sinistra al punto $(3,0)$ con tangente che tende a diventare orizzontale. Se ne deduce che vi sono almeno due flessi: il primo per un opportuno $x_3 \in (x_2, 3)$, il secondo per un opportuno $x_4 < x_2$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 4 7 punti

Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^n.$$

Stabilire su quali insiemi la convergenza è uniforme.

Soluzione dell'esercizio 4

Le funzioni f_n sono definite per $x \neq 2$.

$f_n(x) \to 0$ se e solo se $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| < 1$, ossia per $x < 0$.

$f_n(x) \to 1$ se e solo se $\frac{x+2}{x-2} = 1$ (per nessun valore di x).

$f_n(x) = (-1)^n$ e solo se $\frac{x+2}{2-x} = 1$, ossia $x = 0$.

$|f_n(x)| \to +\infty$ se e solo se $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| > 1$, ossia $x > 0$.

Dunque $f_n(x) \to 0$ se $x < 0$, non converge per $x \geq 0$. La convergenza non può essere uniforme in un intervallo $[a, 0)$, per nessun valore di $a < 0$ perché per il teorema del doppio limite dovrebbe essere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

Si noti però che la funzione $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ è decrescente nell'intervallo $[a, 0]$, $g(a) < 1$ e $g(0) = -1$, quindi

$$\max_{x\in[a,-\epsilon]} |g(x)| = \max(|g(a)|, |g(-\epsilon)|) < 1$$

e allora

$$\max_{x\in[a,-\epsilon]} |f_n(x)| \to 0,$$

ossia la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[a, -\epsilon]$ con $a < 0$ e ϵ sufficientemente piccolo. La convergenza non è uniforme in $(-\infty, -\epsilon)$ perché $\sup_{(-\infty,-\epsilon)} |f_n(x)| = 1$.