

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| | | | | |

| | | |
|----------------------|-------|---------------------|
| Analisi Matematica 1 | | prova del 12/7/2024 |
| Cognome: | Nome: | Codice persona: |

- Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 6) Si consideri la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + i},$$

determinandone il dominio di definizione. Determinarne parte reale e parte immaginaria. Successivamente, stabilire se la funzione assegnata è limitata sul proprio dominio di definizione, cioè se esiste $k > 0$ tale che $|f(z)| \leq k$ per ogni z nel dominio di f .

Soluzione. La funzione è definita se $z^2 \neq -i = e^{3\pi/2}$, cioè se $z \neq e^{3\pi i/4}$, $z \neq e^{-\pi i/4}$. Per tali z , e posto $z = x + iy$, si ha:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x + iy}{(x + iy)^2 + i} = \frac{x + iy}{x^2 - y^2 + i(1 + 2xy)} = \frac{(x + iy)[x^2 - y^2 - i(1 + 2xy)]}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2} \\ &= \frac{x(x^2 - y^2) + y(1 + 2xy) + i[y(x^2 - y^2)^2 - x(1 + 2xy)]}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2}. \end{aligned}$$

Quindi, sempre per $z \neq e^{3\pi i/4}$, $z \neq e^{-\pi i/4}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= \frac{x(x^2 - y^2) + y(1 + 2xy)}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2} = \frac{x^3 + y + xy^2}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2}, \\ \operatorname{Im} f(z) &= \frac{y(x^2 - y^2)^2 - x(1 + 2xy)}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2} = -\frac{y^3 + x + yx^2}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2}. \end{aligned}$$

Per rispondere alla domanda successiva, è sufficiente notare che

$$|f(z)|^2 = [\operatorname{Re} f(z)]^2 + [\operatorname{Im} f(z)]^2,$$

e che sia $\operatorname{Re} f(z)$ che $\operatorname{Im} f(z)$ sono, in valore assoluto, grandi a piacere se $z = x + iy$ è sufficientemente vicino a $e^{3\pi i/4}$ oppure a $e^{-\pi i/4}$. La funzione non è quindi limitata sul proprio dominio di definizione.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = (e^x - e^{2x} - e^{3x})^{\frac{1}{3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo le eventuali informazioni qualitative su concavità, convessità e flessi deducibili dal resto dello studio.

Soluzione. La funzione è definita ovunque. Studiamone i limiti. Vale chiaramente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

in quanto per $x \rightarrow +\infty$ il termine dominante è $[-e^{3x}]^{1/3} = -e^x$, mentre per $x \rightarrow -\infty$ tutti gli addendi sotto radice tendono a zero. Chiaramente non vi sono asintoti obliqui per $x \rightarrow +\infty$ in quanto la crescita di f è esponenziale in tale limite.

Studiamo il segno di f . Esso coincide col segno di $e^x - e^{2x} - e^{3x}$ cioè, posto $t = e^x > 0$, col segno di $t - t^2 - t^3 = t(t - 1 - t^2)$, dunque col segno di $1 - t - t^2$. Tale polinomio si annulla per $t = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, solo la radice

positiva è accettabile, dunque la funzione è negativa se $e^x > (\sqrt{5} - 1)/2$, cioè se $x > \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$, positiva se $x < \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$. La funzione si annulla solo se $x = \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$.

Studiamo ora la derivata prima, per $x \neq \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$, punto nel quale la funzione non è derivabile. Vale, per ogni tale x :

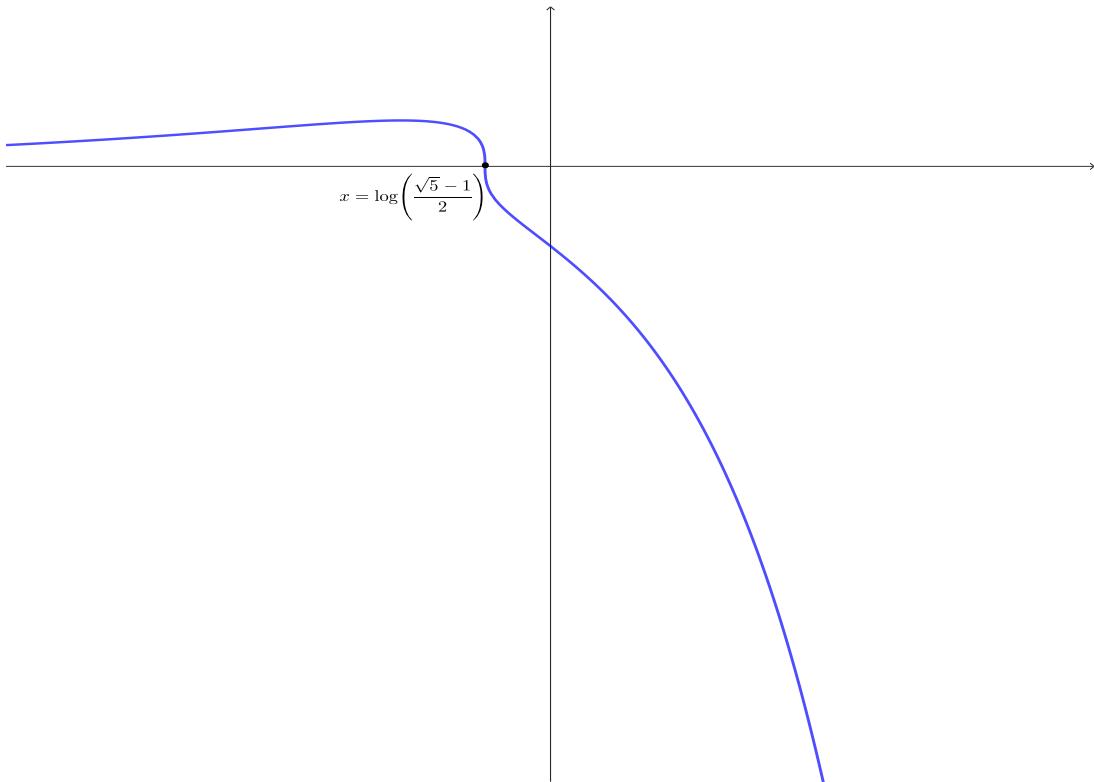
$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x} - 3e^{3x}}{3(e^x - e^{2x} - e^{3x})^{2/3}}.$$

Il denominatore è sempre strettamente maggiore di zero nell'insieme di derivabilità di f . Quanto al numeratore, posto di nuovo $t = e^x > 0$, esso si riscrive com $t(1 - 2t - 3t^2)$. Tale polinomio si annulla, per $t > 0$, se e solo se $t = 1/3$. Dunque la derivata prima si annulla se e solo se $x = -\log 3$. È facile vedere che tale valore di x è strettamente minore dello zero di f , $x = \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$. Quanto al segno della derivata, per quanto detto sopra esso coincide con il segno di $1 - 2t - 3t^2$ con $t = e^x$, dunque $f'(x) > 0$ se $x < -\log 3$, così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ se $x > -\log 3$, così che f è decrescente in tale intervallo, mentre il punto $x = -\log 3$ è di massimo relativo per f . Il fatto che esso sia l'unico massimo relativo di f e che f sia definita ovunque implica che tale punto è anche di massimo assoluto. Si noti infine che:

$$\lim_{x \rightarrow \log[(\sqrt{5}-1)/2]} = -\infty.$$

Dunque il punto $x = \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$ è un flesso a tangente verticale di f . Le informazioni ottenute permettono inoltre di stabilire che esiste almeno un flesso per $x < \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$, in quanto la concavità di f deve passare dall'essere rivolta verso l'alto all'essere rivolta verso il basso almeno una volta in tale intervallo, e almeno un flesso per $x > \log[(\sqrt{5} - 1)/2]$, in quanto analogamente la concavità di f deve passare dall'essere rivolta verso l'alto all'essere rivolta verso il basso almeno una volta in tale intervallo.

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + (\sin x)^4 + (\cos x)^4}.$$

Soluzione. Scriviamo, dapprima con la sostituzione $\sin x = t$ e poi con quella $t^2 = u$:

$$\begin{aligned}
\int f(x) dx &= 2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^4 + (\cos x)^4} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^4 + (1 - (\sin x)^2)^2} dx \\
&= \int \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^4 - (\sin x)^2} dx = \int \frac{t}{1 + t^4 - t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + u^2 - u} du \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(u - \frac{1}{2})\right]^2 + 1} du \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(u - \frac{1}{2} \right) \right] + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(u - \frac{1}{2} \right) \right] + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t^2 - \frac{1}{2} \right) \right] + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left((\sin x)^2 - \frac{1}{2} \right) \right] + c,
\end{aligned}$$

con c costante arbitraria reale. Ovviamente, era possibile procedere più brevemente con la singola sostituzione $(\sin x)^2 = u$, ma è stato svolto il calcolo in due passaggi, più immediato.

4. (punti 6) Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \arctan(x + n), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Determinare se la successione converge puntualmente, e in tal caso determinarne il limite puntuale, se essa converge uniformemente su \mathbb{R} , e in caso negativo in quali sottoinsiemi di \mathbb{R} essa converge uniformemente.

Soluzione. Chiaramente si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x + n) = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque è immediato osservare che la successione di funzioni data converge puntualmente alla funzione costante $f(x) = \frac{\pi}{2}$ su tutto \mathbb{R} . Studiamo la convergenza uniforme, in primo luogo su tutto \mathbb{R} . Dobbiamo calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \arctan(x + n) - \frac{\pi}{2} \right|.$$

È chiaro che, per $x \rightarrow -\infty$ ed n fissato, $\arctan(x + n) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Ne segue dunque che:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \arctan(x + n) - \frac{\pi}{2} \right| = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che ovviamente non tende a zero per $n \rightarrow +\infty$. Dunque non vi è convergenza uniforme di f_n a f su \mathbb{R} . Lo stesso evidentemente vale su ogni sottoinsieme di \mathbb{R} illimitato dal basso. Verifichiamo allora se la convergenza uniforme ha luogo sugli intervalli del tipo $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$. In analogia a quanto detto prima, e usando il fatto che \arctan è crescente, si ha:

$$\sup_{x \geq a} \left| \arctan(x + n) - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \arctan(a + n) - \frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ fissato. Dunque vi è convergenza uniforme su ogni intervallo $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$, e quindi ovviamente in ogni sottoinsieme di un tale intervallo.