Marco Contedini

LEZIONE 09

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

20 novembre 2020

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Formula di Taylor

1. Stabilire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^a \left[4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}\right]$$
esiste finito e diverso da zero, e per tale valore di a calcolarlo.

2. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ affinchè
$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$
sia infinitesimo del massimo ordine possibile rispetto ad x per $x \to 0$.

3. Si consideri, al variare del parametro reale b, la funzione
$$f_b(x) = \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}\log(1+2x) - x}.$$
Determinarne il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$

4. Si consideri la funzione:
$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x - \sqrt[5]{1+5x}}}{xe^x}, \qquad x > 0.$$
   (a) Mostrare che essa è ben definita per $x > 0$ sufficientemente piccolo.
   (b) Determinare i primi due termini non nulli dello sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$.

5. Stabilire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e diverso da zero e, per tale valore, calcolarlo:
$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\log(1+\cos x) - \cos x}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}$$

2 Continuità

6. quale delle seguenti funzioni ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$?
$$(a) \quad \frac{|x-1|}{x-1} \qquad\qquad (b) \quad e^{\frac{1}{1-x}}$$
$$(c) \quad (x-1)\left(\mathrm{Th}\,\frac{1}{x-1}\right) \qquad\qquad (d) \quad \frac{1}{(1-x)^4}$$

7. Stabilire se la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2|1-x|\sin\frac{\pi}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0\ . \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.

3 Derivate

8. Sia $f(x)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Mostrare che $f(x)$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

9. Determinare un polinomio $P(x)$, tale che la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1, \\ x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

sia di classe $\mathcal{C}^1$.

10. Determinare per quale valore del parametro k l'equazione

$$2\sqrt{x} - \log(x^2) - k = 0$$

ammette una sola soluzione. Qual è la soluzione?

4 Esercizi proposti

1. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine quattro, centrato in $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = \left[e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x-1)\right]\left(1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)}\right).$$

2. Determinare il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in $x_0 \to 0$, della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Successivamente calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il primo termine dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$g(x) = f(x) - \log(1 - \alpha x^2) - 1$$

3. Deteminare i primi 4 termini non nulli dello sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 1$ della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

4. Determinare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il termine principale dello sviluppo di McLaurin della funzione:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = 2(\cos x)^{\alpha} - \left[1 - \sin\left(x^2\right)\right]^{\beta} - x^5 - 1$$

5. Calcolare, al variare del parametro $a > 0$, il limite per $x \to 0^+$ della seguente funzione:
$$f(x) = \frac{1}{x^a}\left[\frac{\sin(2x)}{1+\sin(x^2)} - \frac{2x}{\cos x}\right].$$

6. Trovare un polinomio $P(x)$ per cui la seguente funzione:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty), \\ P(x) & \text{se } x \in (-2, -1) \cup (1, 2). \\ 1 & \text{se } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$
risulti continua su tutto $\mathbb{R}$.

7. Stabilire per quali valori dei parametri a e b la seguente funzione è continua
$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{se } x \le -\frac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{se } x \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

8. Determinare per quali valori di α e β la seguente funzione
$$f(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2 + 1, & \text{se } x \ge 0, \\ \beta(\cos x + x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
sia continua e derivabile in $x = 0$.

9. Determinare, al variare del parametro k, il numero di radici reali della seguente funzione:
$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + k.$$

5 Soluzioni

1. Consideriamo dapprima la funzione $4 + x^2\cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ e, posto $t = 1/x$ (dunque $t \to 0^+$) studiamo il comportamento nell'intorno dell'origine della funzione
$$g(t) := 4 + \frac{\cos(3t)}{t^2} + \frac{t-1}{t^2}\,e^t.$$
Si ha, per $t \to 0$:
$$\begin{aligned} g(t) &= 4 + \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{9}{2}t^2 + o(t^3)\right) + \frac{t-1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \\ &= \frac{t}{3} + o(t). \end{aligned}$$
Tornando alla variabile originaria abbiamo quindi, per $x \to +\infty$:
$$x^a\left[4 + x^2\cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}\right] = x^a\left[\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$
Quindi il limite assegnato esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 1$, e in tal caso tale limite vale $\frac{1}{3}$.

2. Scrivendo i primi due termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $f(x)$ centrato in zero:
$$f(x) = \left(b - a - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(ab - b^2 + \frac{1}{24}\right) x^4 + o(x^4)$$
si evince che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore al quarto rispetto ad x soltanto se:
$$\begin{cases} b - a - \frac{1}{2} = 0 \\ ab - b^2 + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$
vale a dire se $a = -\frac{5}{12}$ e $b = \frac{1}{12}$.

3. Valgono le seguenti formule:
$$\begin{aligned}
1 - x + \frac{1}{2}\log(1+2x) &= 1 - x + \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3)\right) \\
&= 1 - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \\
\sqrt[3]{1 - x + \frac{1}{2}\log(1+2x)} &= \sqrt[3]{1 - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \\
&= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3); \\
\cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= 1 - 2x^2 + o(x^3); \\
f_b(x) &= 1 - 2x^2 - 2 + bx^2 + 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3) \\
&= \left(b - \frac{7}{3}\right) x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$
Quindi il primo termine non nullo nello sviluppo richiesto è $\left(b - \frac{7}{3}\right) x^2$ se $b \neq \frac{7}{3}$, mentre esso è $\frac{4}{9}x^3$ se $b = \frac{7}{3}$.

4. (a) Si noti che, per $x \to 0$,
$$\sqrt[5]{1+5x} = 1 + \frac{1}{5}(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\frac{(5x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + x - 2x^2 + o(x^2).$$
Quindi, sempre per$x \to 0$, $1 + x - \sqrt[5]{1+5x} = 2x^2 + o(x^2)$, il che mostra la positività del membro di sinistra per x sufficientemente piccolo.

   (b) Sviluppando come sopra, ma fino al terzo ordine si ottiene, per $x \to 0$,
$$\sqrt[5]{1+5x} = 1 + x - 2x^2 + 6x^3 + o(x^3)$$
Quindi, per $x \to 0$,
$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 6x^3 + o(x^3)}}{xe^x} &= \sqrt{2}\sqrt{1 - 3x + o(x)}e^{-x} \\
&= \sqrt{2}\left[1 - \frac{3}{2}x + o(x)\right][1 - x + o(x)] \\
&= \sqrt{2}\left(1 - \frac{5}{2}x\right) + o(x)
\end{aligned}$$
Il polinomio di grado uno cercato è quindi $P(x) = \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}x$.

5. Si noti che, per esempio usando le formule di somma per il coseno,

$$\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Posto allora $x + \frac{\pi}{2} =: t$ il limite cercato coincide con

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\log(1 + \sin t) - \sin t}{t^\alpha}.$$

Sviluppiamo il numeratore. Si ha, per $t \to 0$ (si noti che è inutile, sebbene ovviamente non scorretto, sviluppare il seno fino al terzo ordine);

$$\log(1+\sin t)-\sin t = \log(1+t+o(t^2))-t+o(t^2) = t-\frac{t^2}{2}-t+o(t^2) = -\frac{t^2}{2}+o(t^2).$$

Quindi il limite cercato esiste finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = 2$, e in tal caso esso vale $-1/2$.

Ovviamente il limite poteva essere svolto usando lo sviluppo di $\cos x$ centrato in $x_0 = -\pi/2$, che in base alla formula di Taylor generale vale $\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + o\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ per $x \to -\frac{\pi}{2}$.

6. (a) La funzione è discontinua in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

(b) La funzione è discontinua in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} = 0^+ \qquad \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$$

(c) Si ricorda che $\mathrm{Th}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Th}\ x = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{Th}\ x = -1$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 1^+} (x-1)\left(\mathrm{Th}\ \frac{1}{x-1}\right) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^-} (x-1)\left(\mathrm{Th}\ \frac{1}{x-1}\right) = 0$$

La funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$.

(d) La funzione è discontinua in $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(1-x)^4} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1-x)^4} = +\infty$$

7. La funzione $f(x) = x^2|1-x|\sin\frac{\pi}{x}$ è continua su tutto $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ in quanto prodotto di funzioni continue.
Verifichiamo la continuità di $f(x)$ nell'origine.
Si ha: $-2x^2 < f(x) < 2x^2$ per $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.
Quindi, per il criterio del confronto:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0.$$

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ in quanto continua anche nell'origine.

8. la funzione è continua nell'origine: poichè $-x \leq f(x) \leq x$ per $x \neq 0$, allora, per il criterio del confronto: $f(x) \to 0$ se $x \to 0$. Dalla definizione diretta di derivata:
$$\lim_{h \to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} = \lim_{t \to \infty} \sin t.$$
Poichè tale limite non esiste, $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

9. $P(x)$ deve essere tale che: $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$.
Sia dunque P un polinomio di terzo grado: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Si ha:
$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases}$$
da cui: $a = -1$ e $b = 2$, ovvero: $P(x) = -x^3 + 2x^2$.

10. La funzione è continua sul suo insieme di definizione $\mathcal{D} = (0, +\infty)$.
Abbiamo che: $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$.
Calcoliamo la derivata:
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}.$$
La derivata si annulla solo per $x = 4$, è positiva se $x > 4$, negativa se $x < 4$.
$f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione soltanto se $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$. Infatti, in tal caso, solo $\bar{x}$ è uno zero di $f(x)$. Per $x < \bar{x}$ la funzione è monotona decrescente e per $x > \bar{x}$ la funzione è monotona crescente.
Allora:
$$f(4) = 4 - \log 16 - k = 0$$
da cui: $k = 4(1 - \log 2)$.

6 soluzione degli esercizi proposti

1. Sviluppiamo separatamente le singole funzioni che appaiono nell'espressione di f. Si ha, posto $t = x - 1$, cosicché $t \to 0$ se $x \to 1$:

$$\begin{aligned}
\sin(\log x) &= \sin[\log(1 + (x - 1))] = \sin[\log(1 + t)] = \sin\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) \\
&= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)\right)^3 + o(t^4) \\
&= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3) - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \\
&= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3). \\
e^{(x-1)\sin(\log x)} &= e^{t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)} \\
&= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4) + \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)\right)^2 + o(t^4) \\
&= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{t^4}{2} + o(t^4) \\
&= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + o(t^4).
\end{aligned}$$

Quindi, essendo $\cos(x - 1) = \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$, si ha che, per $x \to 1$, cioè per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x - 1) &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4\right) + o(t^4) \\
&= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{8}t^4 + o(t^4).
\end{aligned}$$

Si noti quindi che basterà ora sviluppare il fattore $1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)}$ al secondo ordine. Si ha, sempre per $x \to 1$, cioè per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{1 + \sin(x - 1)} &= 1 - \frac{1}{1 + \sin t} = 1 - \frac{1}{1 + t + o(t^2)} \\
&= 1 - \left[1 - (t + o(t^2)) + \left(t + o(t^2)\right)^2 + o(t^2)\right] \\
&= t - t^2 + o(t^2).
\end{aligned}$$

A posteriori, questo mostra che sarebbe bastato sviluppare all'ordine tre il primo fattore che compare nell'espressione di f, ma abbiamo preferito per maggior chiarezza procedere senza far uso di considerazioni non immediatamente evidenti. In conclusione:

$$\begin{aligned}
\left[e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x - 1)\right]\left(1 - \frac{1}{1 + \sin(x - 1)}\right) &= \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3)\right)\left(t - t^2 + o(t^2)\right) \\
&= \frac{3}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^4 + o(t^4) \\
&= \frac{3}{2}t^3 - 2t^4 + o(t^4).
\end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor cercato è dunque, tornando alla variabile originaria x, $P_4(x) = \frac{3}{2}(x-1)^3 - 2(x-1)^4$.

2. Vale, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Il polinomio richiesto è quindi $P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$. Si ha allora, sempre per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) - \left(-\alpha x^2 - \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4)\right) - 1 \\
&= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{5}{24} + \frac{\alpha^2}{2}\right)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Ne segue che, per $\alpha \neq -1/2$ il termine dominante nello sviluppo di g per $x \to 0$ è $-(\alpha + \frac{1}{2})x^2$. Se invece $\alpha = -1/2$ il termine di grado due si annulla e il termine dominante è il successivo, cioè $\frac{1}{3}x^4$.

3. Ponendo $x = h + 1$, si ha: $f(x) = e^{g(h)}$ con $g(h) = \frac{1}{1+h}$. Per sviluppare una funzione composta $f(g(h))$ conviene partire dall'interno: scrivere la formula di Taylor prima per g e poi scrivere lo sviluppo di f centato in $g(x)$:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+h}} &= \exp\left[1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right] \\
&= e \cdot \exp\left[-h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right] \\
&= e\left[1 + \left(-h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right)^2\right] \\
&+ e\left[\frac{1}{6}\left(-h + h^2 - h^3 + o(h^3)\right)^3 + o(x^3)\right] \\
&= e\left[1 - h + \frac{3}{2}h^2 - \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)\right]
\end{aligned}$$

4. Si noti che la funzione è ben definita in un intorno dell'origine per ogni valore di α e β.
La presenza del termine $-x^5$ e la parità dei primi due termini suggerisce di arrestare lo sviluppo di McLaurin al quinto ordine.

$$\begin{aligned}
(\cos x)^\alpha &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^\alpha \\
&= 1 + \alpha\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{24}x^4 + o(x^5)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(1-\sin x^2)^\beta &= \left(1-x^2+o(x^5)\right)^\beta \\
&= 1+\beta\left(-x^2+o(x^5)\right)+\frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(-x^2+o(x^5)\right)^2+o(x^5) \\
&= 1-\beta x^2+\frac{\beta(\beta-1)}{2}x^4+o(x^5).
\end{aligned}
$$

Lo sviluppo di McLaurin della funzione arrestato al quinto ordine è il seguente:

$$
f_{\alpha,\beta}(x)=(\beta-\alpha)x^2+\left(\frac{3\alpha^2-2\alpha}{12}-\frac{\beta(\beta-1)}{2}\right)x^4-x^5+o(x^5).
$$

Se $\alpha\neq\beta$ il termine principale della funzione è dell'ordine x^2.
Se invece $\alpha=\beta$ il termine principale è almeno del quarto ordine:

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha,\alpha}(x) &= \left(\frac{3\alpha^2-2\alpha}{12}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right)x^4-x^5+o(x^5) \\
&= \left(-\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha\right)x^4-x^5+o(x^5).
\end{aligned}
$$

Il termine del quarto ordine si annulla se $\alpha=0$ oppure $\alpha=\frac{4}{3}$.
Pertanto, se $\alpha=\beta\neq 0$ e $\alpha=\beta\neq\frac{4}{3}$, il termine principale della funzione è dell'ordine x^4.
Se $\alpha=\beta=0$ oppure $\alpha=\beta=\frac{4}{3}$, il termine principale della funzione è dell'ordine x^5.

5. Si noti che, per $x\to 0^+$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(2x)}{1+\sin(x^2)}-\frac{2x}{\cos x} &= \frac{\cos x\sin(2x)-2x[1+\sin(x^2)]}{[1+\sin(x^2)]\cos x} \\
&= \frac{\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right]-2x\left[1+x^2+o(x^2)\right]}{[1+\sin(x^2)]\cos x} \\
&= \frac{-\frac{13}{3}x^3+o(x^3)}{[1+\sin(x^2)]\cos x}\sim-\frac{13}{3}x^3\quad\text{per } x\to 0^+.
\end{aligned}
$$

Dunque il limite cercato vale zero se $a\in(0,3)$, vale $-\infty$ se $a>3$ e vale $-13/3$ se $a=3$.

6. Scelgo $P(x)$ pari e tale che $P(1)=1$ e $P(2)=0$.
Il fatto che $P(x)$ sia pari ci garantisce che anche $P(-1)=1$ e $P(-2)=0$.
Avendo soltanto due condizioni, scelgo un polinomio di secondo grado a due parametri arbitrari: $P(x)=ax^2+c$.
Deve valere:

$$
\begin{cases} a+c=1 \\ 4a+c=0 \end{cases}
$$

Da cui: $a=-\frac{1}{3}$ e $c=\frac{4}{3}$.
Una possibile scelta del polinomio è quindi: $P(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}$.

7. Abbiamo: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
Deve quindi valere:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -a+b = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = a+b = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Le condizioni sono entrambe verificate se: $a = -1$ e $b = 1$. Per tali valori $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

8. Condizione di continuità:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \beta = \alpha^2 + 1$$

Condizione di derivabilità:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x), \qquad \beta = -2\alpha$$

$\alpha = -1$ e $\beta = 2$.

9. L'esercizio è un'applicazione del teorema degli zeri. La funzione in questione è infatti continua. Determiniamo i punti estremanti:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Si deduce che la funzione ha un punto di massimo relativo in $(1, 4+k)$ e un minimo relativo in $(3, k)$.
Per $k < -4$ oppure $k > 0$ $f(x)$ ha una sola radice reale.
Per $-4 < x < 0$ $f(x)$ ha tre radici reali.
Per $k = -4$ oppure $k = 0$ $f(x)$ ha due radici reali.