• Spazio vettoriale

• Sia V un insieme. Dico che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ se sono definite una somma e un prodotto

• Combinazione Vettori

Data una combinazione $\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

-> Dipendenti se $\exists\, \lambda_1, \dots \lambda_n$ $\boxed{\text{non nulli}}$ t.c $\underline{v} = 0$

-> Indipendenti se $\underline{v} = 0 \iff \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n = 0$

• Base:

Dico $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_n$ sono una base di V se:

1) $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_n$ sono indipendenti

2) $\forall \underline{v} \in V$ $\exists\, \lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots \lambda_n \underline{v}_n$

• Spazio Vettoriale con Prodotto Scalare:

Uno spazio vettoriale V viene detto con prodotto scalare se è definita un'operazione $\underline{v} \cdot \underline{u} \in \mathbb{R}$ che associa due vettori a un numero reale.

Valgono le seguenti proprietà:

1) $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$

2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} + \underline{w}$

3) $\lambda \underline{v} \cdot \underline{w} = \lambda(\underline{v} \cdot \underline{w})$

4) $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$

• Modulo di vettore $:= |\underline{v}|$

Definisco il modulo di un vettore $\underline{v} \in V$ ove V indica uno SV con il prodotto scalare. Valgono le seguenti proprietà:

1) $|\underline{v}| \geq 0$

2) $|\lambda \underline{v}| = |\lambda| |\underline{v}|$

3) $|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}| |\underline{v}|$ ~> Dis. CS

4) $|\underline{u} + \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$ ~> Dis. Tr.

• Basi Ortonormali

Sia V uno SV con pr. Una base ortonormale è costituita da $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ t.c $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$ t.c $i \neq j$ e $|\underline{v}_i| = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$

- Applicazione Lineare fra Spazi Vettoriali

Siano V_1, V_2 sv sul medesimo campo $\mathbb{K}$. Sia $L: V_1 \to V_2$. L è detto lineare se $L(\alpha \underline{w}_1 + \mu \underline{w}_2) = \alpha L(w_1) + \mu L(w_2)$ $\forall \alpha, \mu \in \mathbb{R}$ e $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in V_1$

- Matrici

Una matrice è una collezione di numeri reali o complessi ordinate per righe e colonne. Indichiamo con M_{mn}, m = righe, n = colonne.

Somma := $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$ $\forall i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$ $\in M_{mn}$

Prodotto := $M_{mn} \times M_{nk} = AB \in M_{mk}$ ove gli elementi $c_{ij} := \sum_{r=1}^{n} a_{ir} + b_{rj}$ $\quad i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$

Proprietà =>
1) $A(BC) = (AB)C$
2) $A(B+C) = AB + AC$
3) $A I_n = I_n A = A \quad \forall A \in M_{nn}$

- Matrice Trasposta

Definisco $A^T := \in M_{nm}$ la matrice che ottengo scambiando righe e colonne in A. => Vale $(AB)^T = B^T A^T$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

- Teorema della Rappresentazione Matriciale. *

Siano V_n e V_m sv di dim n e m, sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

Sia $L: V_n \to V_m$ un'app lineare

Siano fissate due basi $|\underline{u}_1 \dots \underline{u}_n|$ (di V_n) e $|\underline{w}_1 \dots \underline{w}_m|$ (di V_m). Allora $\exists! A \in M_{mn}$ con elementi in $\mathbb{K}$ che rappresenta L così:

$\underline{x} = x_1 \underline{u}_1 + \dots x_n \underline{u}_n \qquad L(\underline{x}) = y_1 \underline{w}_1 + \dots y_m \underline{w}_m$

$\Rightarrow A \underline{x} = \underline{y}$

- Determinante:

Definisco:
- M_{ij} il minore complementare di un elemento a_{ij}
- $A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$

Il determinante è definito come $\det A := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (o $j=1$) ove $A \in M_{nn}$

- Teorema di Laplace

Sia $A \in M_{nn}$. Il det A non dipende dalla riga o colonne scelte

- **Teorema del determinante** (*)

Sia $A \in M_{nn}$ Allora:
1) Se A ha una colonna o riga di 0 $\det A = 0$
2) Scambiando tra loro 2 righe/colonne $\det A = -\det A'$
3) Se A ha 2 righe uguali $\det A = 0$
4) Il $\det A$ è lineare in ciascuna riga o colonna
5) Se a una riga si aggiunge una comb. lineare delle altre righe il $\det A$ non cambia
6) Se le righe/colonne sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \det = 0$

- **Proprietà Determinante:**
  - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
  - $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ → Binet

- **Determinante e proprietà vettori:**
  - n vettori sono indipendenti $\Leftrightarrow$ la matrice ha $\det \neq 0$ $(A \in M_{nn})$
  - Se ho $A \in M_{rn}$ $r < n$ e $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_r$ vettori riga. Esse sono indipendenti $\Leftrightarrow$ $\exists \det B \neq 0$ ove $B \in M_{rr}$, sottomatrice di A.

- **Rango**

Sia $A \in M_{nm}$. Definisco B_i come sottomatrici estratti da A. Il rango della matrice A è definito come la dimensione massima di B_i t.c $\det B_i \neq 0$.

- **Teorema di Kronecker:**

Una matrice ha rango K $\Leftrightarrow$ $\exists$ un minore di ordine K non nullo t.c tutti i minori di ordine $K+1$ ottenuti orlando la matrice $K \times K$ siano nulli. Il rango sarà l'ordine di tale minore.

- **Matrice Inversa** *

Sia $A \in M_{nn}$. A ammette inversa $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. In tal caso la matrice inversa, indicata con A^{-1} è data da $A^{-1} := \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T$ A_{ij} sono i complementi algebrici

- **TEOREMA SU MATRICE INVERSE**

Siano $A, B \in M_{nn}$ matrici invertibili, allora AB è invertibile e vale $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

• Sistemi Lineari

Sia $A \in M_{mn}$ rappresentante di $A\underline{x}=\underline{b}$

Possiamo scrivere che A rappresenta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n1} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m1}$$

$a_{ij} \in A$

• Sistema $\begin{cases} \text{Omogeneo: } & b_i = 0 \ \forall i \ (\text{aka } A\underline{x}=\underline{0}) \\ \text{Non Omogeneo: } & b_i \text{ non tutti nulli } (A\underline{x} \neq \underline{0}) \end{cases}$

• Teorema di Cramer

Sia $A \in M_{nn}$ t.c $\det A \neq 0$. Il sistema ha ! soluzione $\underline{x} = A^{-1}b$

Sia $B_i := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Allora le componenti i-esime $x_i = \dfrac{\det(B_i)}{\det(A)}$ $i = 1 \dots n$

• Teorema delle soluzioni per $\det A = 0$

Sia $A \in M_{nn}$ una matrice t.c $\det A = 0$ allora il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha ∞ soluzioni.

Per $A\underline{x} = \underline{b}$, potrebbero non esserci soluzioni. Se $\exists\, \underline{x}_1$ soluzione allora $A\underline{x}_1 = \underline{b}_1$.

Allora se $\det A = 0$ vi sono infinite soluzioni $\underline{x}_1 + \underline{x}_0$ dove $\underline{x}_0$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$.

$$A(\underline{x}_0 + \underline{x}_1) = A(\underline{x}_0) + A(\underline{x}_1) = 0 + \underline{b}_1 = \underline{b}_1 \quad \forall\, \underline{x}_0$$

• Immagine e Ker

Siano V_n e V_m in $\mathbb{K}$ e $L(\underline{u}) = \underline{w}$ e $A\underline{x} = \underline{b}$

$$Im(L) := \{ \underline{w} \in V_m \text{ t.c } \exists\, \underline{u} \in V_n \text{ con } L(\underline{u}) = \underline{w} \}$$

$$Ker(L) := \{ \underline{u} \in V_n \text{ t.c } L(\underline{u}) = \underline{0} \}$$

Im e Ker sono sottospazi di V_n e V_m e

$\dim[Im(L)] = rk A$ $\qquad$ $\dim[Ker(L)] = null(A)$

- Teorema di nullità più rango *

Sia $L: V_n \to V_m$. Allora $\dim[Im(L)] + \dim[Ker(L)] = n$

- Proprietà L

Dato $L: V_n \to V_m$. Dico che L è:

- surriettiva se $Im(L) = V_m$
- iniettiva se $Ker(L) = \{0\}$

- Teorema Rouché - Capelli

Sia $A \in M_{mn}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzioni $\iff$
$rk A = rk A|b$

- Diagonalizzabilità

- Dico che $A \in M_{nn}$ con elementi su $\mathbb{K}$ è diagonalizzabile se $\exists$ 2 matrici Λ diagonale, S invertibile $\Lambda, S \in M_{nn}$ t.c.

$$\boxed{S^{-1} A S = \Lambda}$$

* Sia $A \in M_{nn}$. Essa è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ $\iff$ $\mathbb{K}^n$ possiede una base di autovettori di A. Chiamiamo i vettori di tale base $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ e $\lambda_1 \dots \lambda_n$ i corrispondenti autovalori

$$S := (\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n) \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} A S = \Lambda$$

- Autovalori e Autovettori

Sia $A \in M_{nn}$, su $\mathbb{K}$. Siano $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$.
Dico che $\underline{v}$ è autovettore di A relativo all'autovalore λ se vale

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

- Polinomio Caratterizzante

Per trovare gli auto vettori e gli autovalori di una data matrice, deve valere, per un opportuno $\underline{v} \neq \underline{0}$,

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow A\underline{v} = \lambda I_n \underline{v} \Rightarrow \underline{v}(A - \lambda I_n) = \underline{0}$$

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

- Molteplicità Algebrica e Geometrica.

- m_A: Sia $A \in M_{nn}$ e $P_n(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico. Dico che λ_i ha molteplicità K se $P_n(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - \lambda_i)^K$ e non per $(\lambda - \lambda_i)^{K+1}$

- m_g: Sia $A \in M_{nn}$ e λ_0 un suo autovalore. La molteplicità geometrica di λ_0 è definita come la $\dim[\operatorname{Im}(A - \lambda_0 I_n)]$.

Teoremi sulle m_A e m_G

Sia $A \in M_{nn}$.
- Autovettori di autovalori distinti sono indip.
- $m_g \leq m_A$

Teorema diagonalizzabilità su m_A e m_g

Sia $A \in M_{nn}$. Dico che A è diagonaliz. $\Leftrightarrow$ $m_A = m_g$ $\forall$ autovalore.
Se A ha n autovalori $\Rightarrow$ A è diagon.

- MATRICE ORTOGONALE

Sia $A \in M_{nn}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Dico che A è ortogonale $\Leftrightarrow$ $AA^T = A^TA = I_n$

- TEOREMA delle matrici ortogonali

1) Se A è una matrice ortogonale $\Rightarrow$ le sue righe/colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
2) Se A è ortogonale, $\det A = \pm 1$
3) Se B è ortogonale, anche AB è ortogonale

4) Sia A ortogonale e siano $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora $A\underline{x} \cdot A\underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{y}$

Se $x = y$ $|Ax|^2 = |x|^2$

• Matrici Simmetriche e TEOREMA SPETTRALE

Sia $A \in M_{nn}$ simmetrica $(A = A^T)$. Allora A è diagonalizzabile con matrice di passaggio ortogonale, ovvero $\exists\ \Lambda$ diagonale, O ortogonale t.c

$$\underbrace{O^T}_{=O^{-1}} A\, O = \Lambda$$

In particolare $\exists$ una base ortonormale di autovettori

• ANALISI: Definizioni Topologia

1) $B_R(\underline{x}_0) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n, |\underline{x} - \underline{x}_0| < R \}$ per $R > 0$ => Palla

2) $S_R(\underline{x}_0) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n, |\underline{x} - \underline{x}_0| = R \}$ $R > 0$ => Sfera

3) Un intorno di x_0 è un qualunque insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ t.c $\exists R > 0$ per cui $A \supset B_R(x_0)$

4) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.
- interno se $\exists B_R(\underline{x}_0) \subset A$
- esterno se x_0 interno a A^c
- frontiera se no int/est.

5) Pt di accumulazione: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è pt di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^n$ se $\forall$ intorno B di x_0 $\exists\, \underline{x} \in B$ t.c $\underline{x} \in A$ $\underline{x} \neq \underline{x}_0$

6) Dico che A è:
- Aperto: $\forall x \in A$ esso è interno ad A
- Chiuso: A^c è aperto

Teorema delle famiglie di insiemi

• Sia F famiglia di insiemi APERTI: $\cup$ degli insiemi è aperto

F finito, allora $\cap$ è aperto

• Sia F famiglia di insiemi CHIUSI: $\cap$ degli insiemi è chiuso

F finito, allora $\cup$ è chiuso

• TEOREMA DELLA CHIUSURA DI UN INSIEME

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. A è chiuso <=> i punti di frontiera appartengono ad A <=> l'insieme dei punti di accumulazione appartiene ad A.

• Teorema di Bolzano Weierstrass: (*)

• Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Dico che A è limitato se $\exists\, \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ t.c $A \subset B_\varepsilon(x_0)$.

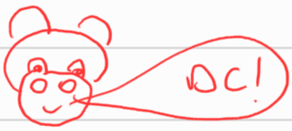
• Se A è limitato e infinito. Allora A ammette almeno un punto di accumulazione

• Insiemi Compatti:

• Dico che una famiglia F di insiemi è una copertura aperta di A se $A \subset \bigcup_{B \in F}$.

• Dico che $A \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se da una sua copertura F è possibile estrarre una sottofamiglia finita (o sottocopertura) che sia ancora una copertura

(*)



• TEOREMA DI HEINE - BOREL

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, allora A è compatto <=> A è chiuso e limitato

• Limiti:

• Def:

- Definitivamente: Una proprietà vale per $x \to x_0$ se $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c $\forall x \in U$ abbia tale proprietà

- Intorni di $\pm\infty$: Intervalli del tipo $[a, +\infty]$ $[-\infty, a]$ $(a, +\infty)$ $(-\infty, a)$

- $\pm\infty$ è punto di accumulazione se $\forall M > 0 \;\; \exists\, x > M$

• Def limite generale:

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e $\underline{x}_0$ un punto di accumulazione $\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se $\forall V$ intorno di ℓ $\exists$ un intorno U di x_0 t.c $f(x) \in V$ e $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

- Def per casi di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$:

1) x_0 e ℓ finiti :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c } |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ e se } x \in X \ \ 0 < |x - x_0| < \delta}$$

2) x_0 finito $\ell = \pm\infty$:

$$\boxed{\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c } f(x) \overset{< -M}{> M} \text{ se } x \in X \text{ e } 0 < |x - x_0| < \delta}$$

3) $x_0 = \pm\infty$ e ℓ finito :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 \text{ t.c } |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ e se } x \in X \ \ x \overset{< -K}{> K}}$$

4) $x_0 = \pm\infty$ ed $\ell = \pm\infty$:

$$\boxed{\forall M > 0 \ \exists K > 0 \text{ t.c } f(x) \overset{< -M}{> M} \text{ e se } x \in X \ \ x \overset{< -K}{> K}}$$

- Teoremi Limiti

- Permanenza del segno: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ t.c $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$. Allora def $f(x) > 0$ per $x \to x_0$

- Confronto: Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per X

Si assuma
1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$
2) def per $x \to x_0$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

- Algebra dei Limiti:

Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ t.c $\exists$ finiti $\ell_1 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ ed $\ell_2 := \lim_{x \to x_0} g(x)$

Allora:
1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2$

3) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ con $\boxed{\ell_2 \neq 0}$ $\rightsquigarrow$ Permanenza del segno

- Limiti di funzioni composte

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ $g: B \to A$. $\boxed{f \circ g : B \to \mathbb{R}}$

Sia x_0 punto di accum. in B.

Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{y \to \ell} f(y) = m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Dunque vale $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = m$

- o-piccolo

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$.

- Dico che f è asintotico a g per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f(x) \sim g(x)$

- Dico che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) = o(g(x))$

- Successione di numeri reali

Una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ viene detta successione di numeri reali. L'unico punto di accumulazione è $+\infty$. Essa viene indicata con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e poiché $\pm\infty$ è punto di accumulazione: $\exists \lim_{n \to +\infty} f(n)$ e valgono tutti i teoremi sul limite

- 4° Teorema sul limite di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente (o decrescente) allora $\{a_n\}$ ammette limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm \inf\}$ e $\ell = \sup(a_n)$ (o $\inf(a_n)$)

- Il numero "e" (*)

Sia $a_n := (1 + \frac{1}{n})$. Allora $\{a_n\}$ è crescente e limitata, dunque ammette limite finito.

Tale limite viene definito così:

$$\lim_{n \to +\infty} \{a_n\} \to e$$

- Limite definito con successioni

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di X. Allora vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ $\forall$ successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \neq x_0$ def e inoltre $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

• Successioni di Cauchy

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Dico che è di Cauchy se $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$ t.c $|a_n - a_m| \le \varepsilon$ se $n, m \ge n_0$

• Una successione è convergente $\iff$ è di Cauchy

• Funzioni Continue

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di X. Dico che f è continua in x se vale una delle seguenti proprietà:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta$ t.c $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ se $|x - x_0| \le \delta$

3) $\forall$ intorno U di $f(x_0)$ $\exists$ intorno V di x_0 t.c
$f(x) \in U$ e $x \in V \cap X$

4) $\forall$ successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c $x_n \in X$ de f e t.c $x_n \to x_0$ vale
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Algebra delle funzioni continue

Siano $f, g: X \to \mathbb{R}$ continue in x_0.

Allora saranno continue su x_0:
- $\alpha f + \beta g \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- fg
- $f/g \quad g(x_0) \neq 0$
- $f \circ g$ se f continua su $g(x_0)$

• Teorema degli zeri *

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$. Se $f(b)\cdot f(a) < 0$, allora $\exists c \in (a,b)$ t.c $f(c) = 0$.

• Teorema dei valori medi:

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Definisco $\delta := \inf\{f(x) \text{ in } [a,b]\}$
↳ continua
$\mu := \sup\{f(x) \text{ in } [a,b]\}$

Sia $t \in (\delta, \mu)$, allora $\exists c$ t.c $f(c) = t$.

+ T. Weierstrass

- Funzione invertibile

Sia $f: X \to \mathbb{R}$. Essa è invertibile se f è surriettiva ed iniettiva.

↳ ogni y è raggiunto da almeno un x

↳ ogni x punta a un solo elemento, diverso dagli altri.

NB: Una inversa di una f continua e invertibile non è per forza continua. Per f su intervalli discreti non vale.

- Successioni a valori in $\mathbb{R}^N$

Una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$ è definita successione a valori in $\mathbb{R}^N$. Tale successione si indica con $\{\underline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dico che $\underline{x}_n$ converge $\xrightarrow[n \to +\infty]{} \underline{x} \in \mathbb{R}^N$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|\underline{x}_n - \underline{x}| \leq \varepsilon$ se $n \geq n_0$

- Sottosuccessione

Sia $\{\underline{x}_n\}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^N$. Sia $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di valori interi, strettamente crescente.
La successione $\{\underline{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ viene detta sottosuccessione estratta da $\{\underline{x}_n\}$ e relativa agli indici $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

- Insieme compatto per successioni

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Dico che K è compatto per successioni (o seq. compatto) se da ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{\underline{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto $\underline{x} \in K$

$$\underline{x}_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underline{x} \in K$$

- Teorema compattezza

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora K è compatto $\Leftrightarrow$ K è sequenzialmente compatto.

- Funzioni continue su un compatto.

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $\underline{x}_0$ punto di accumulazione di A.
Dico che f è continua in $\underline{x}_0$ se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$, cioè

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \leq \varepsilon$ e $|\underline{x} - \underline{x}_0| \leq \delta$

- **Teorema compattezza di una funzione**

Sia $f: K \to \mathbb{R}$ con $K \subset \mathbb{R}^N$, K compatto.
Si assuma f continua su K. Allora $f(K) := \{ y \in \mathbb{R}$ t.c $y = f(\underline{x})$ per $\underline{x} \in K \}$ è compatto. (ovvero, limitato e chiuso)

↳ Corollario di Weierstrass.
$\exists$ max e min su K

- **Funzioni Uniformemente**

Sia $f: K \to \mathbb{R}$ ove $K \subset \mathbb{R}^N$. Dico che f è uniformemente continua se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c, presi } x_1, x_2 \in K, \text{ vale } |f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2)| \leq \varepsilon \text{ e } |\underline{x}_1 - \underline{x}_2| \leq \delta.}$$

↳ δ dipende solo da ε

- **Teorema di Heine - Cantor** (*)

Sia $f: Z \to \mathbb{R}$, $Z \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto ove f è continua su Z. Allora f è anche uniformemente continua

- **Derivate e calcolo differenziale**

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. La funzione si dice derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se $\exists$ finito:

$$\left. f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right] \to \text{Rapporto Incrementale}$$

- **Retta Tangente**

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$. La retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- Derivabilità e Continuità

Sia $f:(a,b)$, derivabilità in $x_0 \in (a,b)$. Allora f è continua in x_0.

- Algebra delle derivate:

1) $\lambda f + \mu g$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vale $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$
2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
3) Se $g(x_0) \neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f'(x_0)}{g(x_0)^2}$

- Differenziabilità

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Dico che f è differenziabile in x_0 se $f(x_0+h) - f(x_0) = Lh + \sigma(h)$ per un opportuno $L \in \mathbb{R}$

- Teorema sulla differenziabilità

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow$ f è differenziabile in x_0 (così $L = f'(x_0)$).

- Teorema derivata di una funzione composta (*)

Siano $f:(a,b) \to (c,d)$ e $g\ (c,d) \to \mathbb{R}$. Si assuma f derivabile in x_0 e g derivabile su $f(x_0)$. Allora la funzione $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

- Derivata Funzione Inversa

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona. Si assume f derivabile in $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $g := f^{-1}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

- Calcolo Differenziale

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Dico che x_0 è punto di massimo o minimo locale se $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \geq f(x)$ $|x - x_0| \leq \delta$

- Teorema di Fermat

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in $x_0\in(a,b)$. Si assume che $f(x_0)$ sia un punto di massimo o minimo locale. Allora $f'(x_0)=0$

- Teorema di Lagrange

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Applicazioni Teorema di Lagrange:

1) Test Monotonia: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. f crescente $\iff f'(x)\geq 0$
2) Derivate F. costante: f è costante $\iff f'(x)=0 \ \forall x\in(a,b)$
3) Valori medi per le derivate: Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$. f' può assumere tutti i valori compresi tra $f'(x_1)$ e $f'(x_2)$. Una derivata non può avere discontinuità a salto.
4) Derivata da destra: Sia $f:[a,b)$, continua in $x=a$ e si supponga che $\lim_{x\to a^+} f'(x)=m$. Allora f è derivabile da destra

- Teorema de l'Hopital

Siano f e g due funzioni da $[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabili in (a,b) con $g, g'\neq 0$. Se valgono:

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ o $\pm\infty$ $\boxed{\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}}$

2) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

$\Rightarrow$ Allora $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

- Formula di Taylor

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile in $x_0\in(a,b)$. Dico che f è differenziabile, ovvero che:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$\Rightarrow$ Sia $r(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Vale allora $r(x_0)=f(x_0)$ e $r'(x_0)=f'(x_0)$. In questo caso r e f hanno un contatto di ordine 1.

=> Se una funzione $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in x_0, allora $\exists!\ P_n$ t.c f e P abbiano un contatto di ordine n.

$$P_n(x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)\,(x-x_0)^k}{k!}$$

- Lemma su derivate su Taylor

Sia $P_{n,f}$ il polinomio di Taylor per una funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ su x_0.
$(P_{n,f})' = P_{n-1,f'}$

- Formula di Taylor con resto di Peano

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$. Sia P_n il polinomio di Taylor di f, ordine n, centrato in x_0. Allora vale

$$f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

- Formula di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a,b). Sia $x, x_0 \in (a,b)$. Allora $\exists c$ compreso tra (x_0, x) t.c $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

- Applicazioni Formula di Taylor:

- Punti Stazionari: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n (≥ 2) volte in $x_0 \in (a,b)$ t.c $f(x_0) = f'(x_0) \dots = f^{n-1}(x_0) = 0$ $f^{n}(x_0) \neq 0$.
  Allora se n: - Pari, $f(x_0)$ è punto di max/min
  - Dispari, $f(x_0)$ non è punto d'estremo

- Calcolo Approssimato: $\sqrt[n]{e}$ con $E < \frac{1}{100}$. $E = \frac{e^{(c)}}{4^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{4^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{100}$
  per $n=2$

- Serie di Taylor: $E = \frac{f^{n+1}(c)\,(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ per $n \to +\infty$ $E \to 0$. Dunque per $n \to +\infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{k}(x_0)\,(x-x_0)^k}{k!}$$

- Esponenziale Complesso: Sia $z \in \mathbb{C}$ $z := iy$ $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{y^{2h}}{(2h)!}}_{\cos y} + i \underbrace{\sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}}_{\sin y}$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

- Irrazionalità di e: Guardatelo se ti interessa. Se lo chiede mi sparo

- Concavità e Convessità
  - Definizioni:
    - Insieme Convesso: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, dico che A è convesso se $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2$ il segmento congiungente $(\underline{P} = \underline{x}_1 + t(\underline{x}_2 - \underline{x}_1))$ è compreso in A $t \in [0,1]$
    - Epigrafico: $epi(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n, x \in Dom(f), y \geq f(x)\}$
    - Funzione Convessa: $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa se l'$epi(f)$ è un insieme convesso

- Teorema Convessità

Sia $f: I \to \mathbb{R}$. f è convessa $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge i due punti sul grafico non ha punti strettamente sotto il grafico.

- Proprietà Convessità

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ convessa. 1) f è continua su (a,b)
2) $\forall x_0 \in (a,b)$ $\exists$ la derivata $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

- Teorema Inutile

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Se f è convessa o concava la retta sta non strettamente sopra o sotto il grafico

- Convessità con derivate

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$.

1) Se f è derivabile in (a,b), f convessa $\iff$ f' crescente
2) Se f è due volte derivabile su (a,b), f è convessa $\iff$ $f''(x) > 0$

- Flesso

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$, f derivabile in x_0 (considero anche $f'(x) = \pm\infty$). Dico che x_0 è punto di flesso se $\exists$ un intorno destro in cui è strettamente convesso (o conc) e un intorno sinistro in cui è strettamente concavo (o convesso).

- Integrale di Riemann

- Definizioni:
  - Partizioni: Dato un intervallo $[a,b]$ definisco P come insieme di n punti $x_1 \dots x_n \in [a,b]$ ove $x_i < x_{i+1}$
  - Finezza: Dico che P_1 è più fine di P_2 se $P_2 \subset P_1$
  - m_i e M_i: $m_i := \inf[f(x)]$ $x \in [x_i, x_{i+1}]$

    $M_i := \sup[f(x)]$ $x \in [x_i, x_{i+1}]$
  - Somme: $s(P,f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_i - x_{i+1})$

    $S(P,f) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_i - x_{i+1})$

- Proprietà Partizioni e Somme

- Date 2 partizioni P_1 e P_2 di $[a,b]$, P_2 più fine di P_1.

$$s(P_1, f) \leq s(P_2, f)$$
$$S(P_1, f) \geq S(P_2, f)$$

- Data una P_ε $\inf S(P_\varepsilon, f) \geq \sup s(P_\varepsilon, f)$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{N}$

Teorema: Funzione Integrabile

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Dico che f è integrabile secondo Riemann se $\sup s(P,f) = \inf (P,f) \implies \int_a^b f(x)\,dx$

Lemma su integrabilità

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile su $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon$ di $[a,b]$ t.c $\boxed{S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) \leq \varepsilon}$

- Altre Definizioni

  - Ampiezza: $|P| := \max(x_{i+1} - x_i)$ $\forall i = 0 \dots n-1$

  - SI: Definisco μ_i come numero reale $\in [m_i, M_i]$.
    La quantità $\sigma(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i (x_{i+1} - x_i)$ = Somma Integrale

  - Limite: Definisco ℓ reale come il limite di $\sigma(P,f)$ quando $|P| \to 0$ e scrivo: $\lim_{|P| \to 0} \sigma(P,f) = \ell$

    se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c $|\sigma(P,f) - \ell| \leq \varepsilon$ e $|P| \leq \delta$, per qualsiasi scelta di μ_i

- Teorema integrale - somma integrale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. f è integrabile $\Leftrightarrow$ $\exists$ finito ℓ.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} \sigma(P,f)$$

- Classi di funzioni integrabili

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile in $[a,b]$ (*)
- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è integrabile in $[a,b]$
- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata con un numero finito di punti di discontinuità.

Proprietà:

Presa $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,b]$. Valgono le seguenti proprietà

1) Linearità: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda f + \mu g$ è integrabile $\Rightarrow \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x)$
2) Ordinamento: Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)$
3) Modulo: $|f|$ è integrabile e vale $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

4) Teorema della media Integrale: $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ $\quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$

Allora $$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

5) Sia $c \in (a,b)$. Allora f è integrabile su $[a,c]$ e $[c,b]$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

• 1° Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile su $[a,b]$ e sia $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ una sua primitiva, derivabile su (a,b) t.c $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x\in(a,b)$

Si assume $\quad F(a^+) := \lim_{x\to a^+} F(x) \qquad F(b^-) := \lim_{x\to b^-} F(x) \quad \exists$ finiti

Vale allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b^-) - F(a^+)$$

• 2° Teorema F.

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$. Sia $c\in(a,b)$ e si definisce la funzione integrale:
$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$$
Valgono le seguenti proprietà:

1) F è continua su $[a,b]$
2) Se f è continua in un certo punto $x_0 \in (a,b)$, allora F è derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$

In particolare, se f è continua su (a,b) allora F è una primitiva di f in $[a,b]$

Integrali Impropri

- Sia $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ t.c f sia integrabile su $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$
Dico che f è integrabile in senso generalizzato quando

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \exists \text{ finito}$$

In tal caso tale limite viene definito integrale improprio di f su $(a,b]$ e indicato con $\int_a^b f(x)dx$

- Sia $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, f integrabile su $[a,b]$ $\forall b > a$. Dico che f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ se

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad \exists \text{ finito}.$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Criteri di convergenza:

- Confronto: 1) Siano $f, g: (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$.

$\int_a^b f(x)dx$

Si assume che $\exists x_0 \in (a,b]$ t.c $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a, x_0]$
Allora
  - se g integrabile $\Rightarrow$ f lo sarà
  - se f non lo è $\Rightarrow$ anche g non lo è

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$

2) Siano $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, integrabili in $[a,b]$ $\forall b > a$
Si assume che $\exists x_0 \geq a$ t.c $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in x > x_0$.
  - se g int. $\Rightarrow$ f too
  - se f not int $\Rightarrow$ g neither.

- Asintotico 1) Siano $f, g: (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili non negative in $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ suff. piccolo e si assume $f(x) \sim g(x)$ $x \to a^+$
  - f integrabile $\Leftrightarrow$ g lo è

2) Siano $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabili non negative, in $[a,b]$ $\forall b > a$.
Se $f(x) \sim g(x)$ $x \to +\infty$ • f int $\Leftrightarrow$ g lo è

• Serie Numerica

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione assegnata. Si dice serie di termine generale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ove:

$$\boxed{S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \dots + a_n}$$

La serie si dice: posto $\lim_{n\to+\infty} S_n$

CONVERGENTE: limite $\exists$ finito

DIVERGENTE: limite $\exists$ infinito

INDETERMINATA: limite $\nexists$

• Condizione necessaria per la convergenza

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la serie associata. Se tale serie converge $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ $n\to+\infty$

• Serie a termini non negativi

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione def non negativa. Allora essa ammette limite e dunque converge o diverge

• Criteri di convergenza

• Confronto: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni def non negative e t.c $0 \le a_n \le b_n$ definitivamente.

Allora
- Se S_{b_n} converge $\Rightarrow$ anche S_{a_n} lo fa
- Se S_{a_n} diverge $\Rightarrow$ " S_{b_n} " "

• Asintotico: Siano $\{a_n\},\{b_n\}$ due successioni def non negative e t.c

$$a_n \sim b_n \quad n\to+\infty$$

Allora S_{a_n} e S_{b_n} convergono o divergono (hanno lo stesso CARATTERE)

- Radice: Sia $\{a_n\}$ def non negativa, e si assuma che $\exists\, l \in [0,1)$ t.c:
  1) $\sqrt[n]{a_n} \leq l$ def $\Rightarrow$ Allora $\sum a_n$ converge
  2) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ def $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

- Rapporto: Sia $\{a_n\}$ def non negativa. Si assuma che $\exists\, l \in [0,1)$ t.c
  1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l$ definitivamente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
  2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge

- Leibniz: Sia $\{a_n\}$ def non negativa. Si assuma che:
  1) $a_n \to 0$
  2) a_n def decrescente

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ converge}$$

Serie a termini di segno qualunque.

Sia $\{a_n\}$ una successione. Dico che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge ASSOLUTAMENTE se converge $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Se una serie converge assolutamente, allora converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.