Integrale Generalizzato (o IMPROPRIO)

Def.

Sia $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. f sia integrabile su $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ suff. piccolo.

$($ ~~$[\quad]$~~ $]$ b

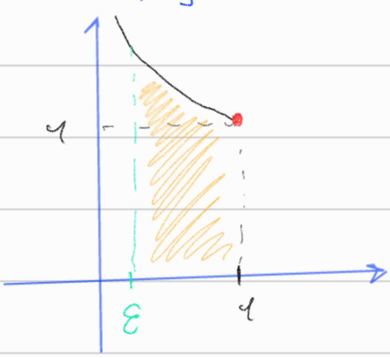
$a \quad a+\varepsilon$

Dico che f è **INTEGRABILE IN SENSO GENERALIZZATO** (o IMPROPRIO), quando

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \exists \text{ finito}$$

In tal caso tale limite verrà detto integrale generalizzato (o improprio) di f su $(a,b]$ e verrà ancora indicato con $\int_a^b f(x)\,dx$

Es $\quad f: (0,1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x^a}, \; a > 0$



per $\varepsilon \to 0^+$

per $a = 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^a}\,dx = -\log \varepsilon = \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty$$

$\hookrightarrow$ Non integrabile su $(0,1]$

Se $a \neq 1$

$1-a > 0$ se $a < 1$

$1-a < 0$ se $a > 1$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} = \frac{1}{1-a}\left[1 - \varepsilon^{1-a}\right] \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \begin{cases} a > 1 & +\infty \\ a < 1 & \frac{1}{1-a} \end{cases}$$

Dunque $f(x)$ è integrabile in senso improprio $\iff$ $a < 1$ $\qquad \int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{1-a}$

OSS

Una simile oss. si dà per funzioni f che stanno $[a,b) \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b-\varepsilon]$ per ε suff. piccolo e $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

se tale limite $\exists$ finito.

Def

Sia $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, f integrabile su $[a,b]$ $\forall b > a$. Dico che f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty]$ se $\lim_{b\to +\infty} \int_a^b f\,dx$ $\exists$ finito. Tal limite si indica con
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

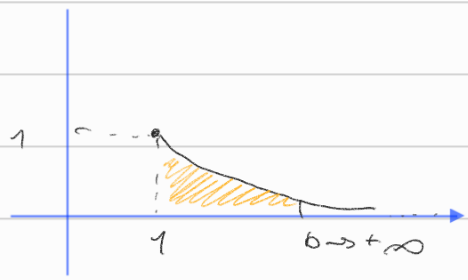
Es. Sia $f(x) = \frac{1}{x^a}$, $x \geq 1$

$a=1$ $\quad \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\log(x)\right]_1^b = \log b \underset{b\to+\infty}{\to} +\infty$ $\quad \frac{1}{x}$ non è integrabile

$a \neq 1$ $\quad \int_1^b \frac{1}{x^a}\,dx = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_1^b = \left[b^{\boxed{1-a}} - 1\right]\frac{1}{1-a} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} a<1 & +\infty \\ a>1 & \frac{1}{a-1}\end{cases}$

>0 se $a<1$
<0 se $a>1$

Dunque f è integrabile in senso improprio se $a > 1$.



Criteri di Convergenza

Teorema (Criterio del confronto per integrali impropri)

1) Siano $f,g: (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ suff. piccolo. Si assume che $\exists\, x_0 \in (a,b]$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a, x_0]$

Allora se g è integrabile in senso improprio in $[a,b]$ anche f lo è. Se invece f non è integrabile in senso improprio nemmeno g lo sarà

2) Siano $f,g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, integrabili in $[a,b]$ $\forall b > a$ e t.c. $\exists\, x_0 \geq a$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq x_0$

Allora se g è integrabile in senso improprio in $[a,+\infty)$ anche f lo è, mentre se f non è int. in senso improprio, allora nemmeno g lo sarà

In tal caso tale limite si indica con

$$\int_a^{\infty^+} f(x)\,dx$$

come simile def. si dà a $f: (-\infty, a] \to \mathbb{R}$

Es. $f(x) = \dfrac{2+\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\underbrace{3x^2+4x^3}_{\geq 7}}$ $\quad x \geq 1$

$$0 < \dfrac{2+\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{\underbrace{3x^2+4x^3}_{\geq 4x^3}} < \boxed{\dfrac{3}{4x^3}} \to \text{è integrabile in } [1,+\infty)$$

TEOREMA (del confronto asintotico degli integrali)

1) Siano $f,g: (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili non negative in $[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon > 0$ suff piccolo e si assume

$f(x) \sim g(x) \quad x \to a^+$

Allore f è integrabile in senso improprio in $[a,b] \Leftrightarrow g$ lo è

2) Siano $f,g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrabili, non negative, in $[a,b]$ $\forall b > a$. Si assume

$f(x) \sim g(x) \quad x \to +\infty$

Allora f è integrabile in senso improprio in $[a,+\infty) \Leftrightarrow g$ lo è

Es. Stabilire se $\exists$ finito il seg. integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^2+2x+3}\left[e^{-\frac{1}{x}}\log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{x}{x+1}\right] dx$$

La funzione integranda è definita solo su $(0,+\infty)$ e continua

Studio $f(x)$ per $x \to 0^+$

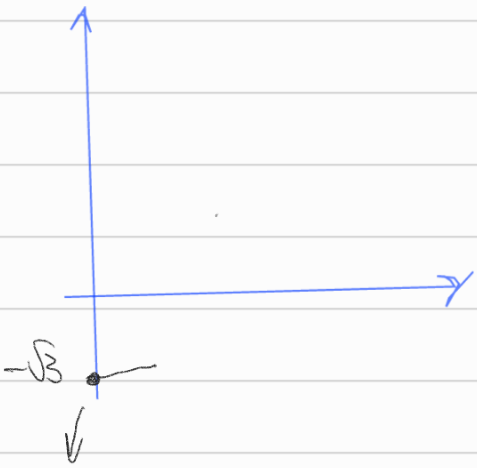
- $\sqrt{x^2+2x+3} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sqrt{3}$; $\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$; $\frac{x}{x+1} \to 0$

$\underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0} \underbrace{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty}$ vince sempre $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$\Rightarrow$, detta $f(x)$ la funzione integranda:

$f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\sqrt{3}$, cioè f è prolungabile per continuità a $[0, +\infty)$

$\Rightarrow$ f è integrabile in un intorno destro dell'origine.



discontinuità eliminabile

Taylor

$$e^{-\frac{1}{x}} \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{3x^3}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + \frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \cos\left(\frac{x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}\right) = \cos\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) \qquad t = \frac{1}{x}$$

$$\cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right) = \cos\left(t\left(1-t^2+o(t^2)\right)\right) \qquad t \to 0^+$$

$$\cos\left(t - t^3 + o(t^3)\right) = 1 - \frac{(t-t^3+o(t^3))^2}{2} + o(t^3) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2 2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{\cancel{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cancel{x}} \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{3}{2x^2}} + \frac{4}{3x^3} - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2x^2}} + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$f(x) = x \underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \cdot \left[\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$\sim \frac{1}{3x^2} \qquad \Rightarrow \left(f(x) \text{ è } > 0 \text{ perché } \sim \frac{1}{3x^2} \right)$$

Inoltre $\frac{1}{3x^2}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è anche integrabile in modo improprio

#Confronto Asintotico