Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2013-2014

PRIMA PROVA IN ITINERE (VERSIONE A)

1. (a) (4 punti) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che la quantità
$$\frac{z-5+7i}{z+1+i}$$
sia puramente immaginaria (abbia cioè parte reale nulla), disegnando nel piano complesso il luogo A dei punti trovato.

   (b) (2 punti) Individuare geometricamente l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = -i + e^{-i\pi/4}z, z \in A\}$, dove A è l'insieme individuato nel punto precedente, e disegnarlo nel piano complesso.

2. (4 punti) Stabilire se la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+\sin n)(n!)^2}{(n+1)^2(2n)!}$$
converge e se essa converge assolutamente.

3. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f_k} \begin{pmatrix} x+kz \\ 2x+ky+(1-k)z \\ 3x+ky+z \\ -kx-z \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

   (a) (1 punto) Determinare le componenti della matrice A_k associata all'applicazione lineare f_k.

   (b) (4 punti) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k, fornendo una base per il nucleo in almeno un caso in cui esso non sia banale.

   (c) (2 punti) Sia $k = 2$. Si stabilisca se l'equazione $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette soluzione.

4. Sia A_h la matrice così definita:
$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1-h & -1 & h & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2 punti) Calcolare gli autovalori di A_h.

   (b) (4 punti) Determinare per quale valore del parametro h la matrice è diagonalizzabile.

   (c) (1 punto) Nel caso in cui A_h sia diagonalizzabile, determinare una base per i suoi autospazi.

5. (4 punti) Mostrare che la successione $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ammette limite finito.

6. (5 punti) Dare la definizione di spazio vettoriale. Dare poi la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di un insieme di vettori in uno spazio vettoriale, e quindi le definizioni di base e di dimensione di uno spazio vettoriale. Infine, dare la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare, ed enunciare le principali proprietà di tali spazi.

Cognome:	Nome:	Matricola:

Analisi Matematica I e Geometria - Ingegneria Fisica - a.a. 2012-2013

PRIMA PROVA IN ITINERE (VERSIONE B)

1. (a) (4 punti) Determinare l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che la quantità
$$\frac{7i - 5 - z}{1 + i - z}$$
sia puramente immaginaria (abbia cioè parte reale nulla), disegnando nel piano complesso il luogo A dei punti trovato.

   (b) (2 punti) Individuare geometricamente l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C} : w = i + e^{i\pi/4}z, z \in A\}$, dove A è l'insieme individuato nel punto precedente, e disegnarlo nel piano complesso.

2. (4 punti) Stabilire se la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n + 2\sin n)(n!)^2}{(n+1)^3(2n)!}$$
converge e se essa converge assolutamente.

3. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f_k} \begin{pmatrix} x + ky \\ 3x + y + 2kz \\ 2x + (1-k)y + 2kz \\ -kx - y \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

   (a) (1 punto) determinare le componenti della matrice A_k associata all'applicazione lineare f_k.

   (b) (4 punti) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k, fornendo una base per il nucleo in almeno un caso in cui esso non sia banale.

   (c) (2 punti) Sia $k = 2$. Si stabilisca se l'equazione $f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ammette soluzione.

4. Sia A_h la matrice così definita:
$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & h & 3 & h+3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2 punti) Calcolare gli autovalori di A_h.

   (b) (4 punti) Determinare per quale valore del parametro h la matrice è diagonalizzabile.

   (c) (1 punto) Nel caso in cui A_h sia diagonalizzabile, determinare una base per i suoi autospazi.

5. (4 punti) Mostrare che la successione $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ammette limite finito.

6. (5 punti) Dare la definizione di spazio vettoriale. Dare poi la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di un insieme di vettori in uno spazio vettoriale, e quindi le definizioni di base e di dimensione di uno spazio vettoriale. Infine, dare la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare, ed enunciare le principali proprietà di tali spazi.

Soluzioni - Versione A

1. (a) Il campo di esistenza dell'equazione è $z \neq -1-i$.
Si ha, posto $z = x+iy$:

$$\begin{aligned}\frac{z-5+7i}{z+1+i} &= \frac{x-5+i(y+7)}{x+1+i(y+1)} = \frac{[x-5+i(y+7)][x+1-i(y+1)]}{(x+1)^2+(y+1)^2} \\ &= \frac{(x-5)(x+1)+(y+7)(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2} + i\frac{(y+7)(x+1)-(x-5)(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\end{aligned}$$

Dunque

$$\operatorname{Re}\frac{z-5+7i}{z+1+i} = \frac{(x-5)(x+1)+(y+7)(y+1)}{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

e tale parte reale si annulla se e solo se

$$0 = (x-5)(x+1)+(y+7)(y+1) = x^2-4x+y^2+8y+2 = (x-2)^2+(y+4)^2-18,$$

cioè se e solo se

$$x^2-4x+y^2+8y+2 = (x-2)^2+(y+4)^2-18 = 0 \quad x \neq -1 \wedge y \neq -1$$

Tale curva è la circonferenza centrata in $z_0 = 2-4i$ e di raggio $\sqrt{18}$ privata del punto $x=-1$, $y=-1$.

(b) Moltiplicare un numero complesso per $e^{-i\pi/4}$ equivale a effettuare una rotazione rispetto all'origine, in senso orario, di angolo $\pi/4$. Dunque il trasformato di A sotto la moltiplicazione per $e^{-i\pi/4}$ è ancora una circonferenza con lo stesso raggio della precedente e con centro $(2-4i)e^{-i\pi/4} = (2-4i)(1-i)/\sqrt{2} = -(2+6i)/\sqrt{2}$. Sommare a un numero complesso la quantità $-i$ equivale a effettuare una traslazione lungo l'asse immaginario, diretta verso il basso e di ampiezza unitaria, dunque l'insieme B richiesto è la circonferenza di raggio $\sqrt{18}$ centrata nel punto $-[2+(6+\sqrt{2})i]/\sqrt{2}$, privata del punto $(-1-i)(1-i)/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

2. La serie considerata converge assolutamente. In effetti, notando che $|a_n| = \frac{(n+\sin n)(n!)^2}{(n+1)^2(2n)!}$, mostriamo che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\sin n)(n!)^2}{(n+1)^2(2n)!}$ converge, usando il criterio del rapporto. Si ha infatti, per ogni $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{[n+1+\sin(n+1)][(n+1)!]^2}{(n+2)^2(2n+2)!}\frac{(n+1)^2(2n)!}{(n+\sin n)(n!)^2} \\ &= \frac{[n+1+\sin(n+1)]}{n+\sin n}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2} \\ &= \frac{[n+1+\sin(n+1)]}{n+\sin n}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}(n+1)^2.\end{aligned}$$

È immediato notare che $\frac{[n+1+\sin(n+1)]}{n+\sin n}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \to 1$ per $n \to +\infty$, e che $\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4}$ per $n \to +\infty$ (considerare i termini dominanti in ciascuna frazione). Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{4}$$

e, per il criterio del rapporto, la serie assegnata converge assolutamente, quindi anche semplicemente.

3. (a) La matrice A_k associata all'applicazione lineare è:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Poichè la dimensione dell'immagine di f_k coincide con il rango di A_k, occorre determinare il rango di A_k. Sappiamo che $1 \leq \text{Rk}(A_k) \leq 3$ (matrice non identicamente nulla).

Partiamo, per esempio, dal minore $M = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & k \end{pmatrix}$ che ha determinante non nullo se $k \neq 0$. Orlando M si ottengono due minori di ordine tre, i cui determinanti sono:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k; \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & k & 1-k \\ 3 & k & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{pmatrix} = k - k^3 = k(1+k)(1-k)$$

Quindi, se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$, si ha: $\text{Rk}(A_k) = \text{Dim}(\text{Im}(f_k)) = 3$, inoltre per il teorema di nullità più rango $\text{Ker}(f_k) = \mathbf{0}$.

Se $k = 0$ la matrice ha una colonna nulla, e le due colonne rimanenti non sono né nulle né proporzionali: dunque il rango di A_0 è due. Le matrici A_1 e A_{-1} presentano minori di ordine due con determinante non nullo, pertanto se $k = \pm 1$ oppure $k = 0$ si ha $\text{Rk}\,(A_k) = \text{Dim}(\text{Im}((f_k)) = 2$ e $\text{Dim}(\text{Ker}(f_k)) = 1$. Sia ora, per esempio $k = 0$.

Per trovare la base del nucleo di f_0 si deve risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui: $x = z = 0$ e y qualsiasi. Come base di $\text{Ker}\,(f_0)$ si può scegliere il vettore $(0, 1, 0)^T$. Negli altri casi, posto $(x, y, z)^T$ il generico vettore di $\text{Ker}(f_k)$, si ha:

$$k = -1 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$k = 1 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Occorre verificare se esistono soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti è A_2, il cui rango vale 3.
La matrice completa del sistema è:

$$A_2|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Si ha: $\det(A_2|b) = 6$, pertanto $4 = \text{Rk}(A_2|b) > \text{Rk}(A_2) = 3$. Il sistema non ha soluzioni.

4. (a) Le matrici A_h e $A_h - \lambda\mathbb{I}$, sebbene non siano triangolari superiori, hanno come determinante il prodotto degli elementi sulla diagonale principale. L'equazione caratteristica di A_k è:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = (3-\lambda)^2(2-\lambda)^2 = 0$$

Gli autovalori della matrice, indipendentemente dal parametro h, sono: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, entrambi con molteplicità algebrica uguale a due.

(b) Per verificare se A_h è diagonalizzabile occorre determinare la dimensione degli autospazi relativi a λ_1 e λ_2. Affinchè la matrice sia diagonalizzabile, tali dimensioni (molteplicità

geometriche) devono coincidere con le molteplicità algebriche degli autovalori.
Caso $\lambda_1 = 2$:
La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo $(A_h - 2\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ è:

$$A_h - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1-h & -1 & h & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione dello spazio delle soluzioni $\mathbf{v}$ è: $4 - \mathrm{Rk}(A_h - 2\mathbb{I})$ (teorema di Rouchè-Capelli).
Analizziamo il minore formato dalle tre righe e tre colonne non nulle:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1-h & -1 & h \end{pmatrix} = h^2 - 2h + 1 = (h-1)^2$$

Si evince che $\mathrm{Rk}(A_h - 2\mathbb{I}) = 3$ se $h \neq 1$, $\mathrm{Rk}(A_h - 2\mathbb{I}) = 2$ se $h = 1$.
Soltanto se $h = 1$ la dimensione dell'autospazio relativo a λ_1 è due e coincide con la molteplicità algebrica dell'autovalore.
Caso $\lambda_2 = 3$. La matrice dei coefficienti del sistema omogeneo $(A_h - 3\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ è:

$$A_h - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1-h & -1 & h & -1 \end{pmatrix}$$

In questo caso $\mathrm{Rk}(A_h - 3\mathbb{I}) = 2$ $\forall h \in \mathbb{R}$: le prime tre righe della matrice sono tra loro proporzionali o nulle, mentre l'ultima è linearmente indipendente dalle altre.
La molteplicità geometrica dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ coincide sempre con la sua moltiplicità algebrica $\forall h \in \mathbb{R}$.

La matrice A_h risulta diagonalizzabile solo per $h = 1$.

(c) Occorre risolvere i sistemi omogenei $(A_1 - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per $\lambda = 2, 3$.

$\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova in itinere, 7/2/2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Calcolare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\beta} \left[\frac{1}{\cos(2\sqrt{x})} + \log(1 - \beta x) - 1 \right].$$

Soluzione. Si ha, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(2\sqrt{x})} &= \frac{1}{1 - \left(2x - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right)} \\
&= 1 + 2x - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2) + \left(2x - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right)^2 \\
&= 1 + 2x - \frac{2}{3}x^2 + 4x^2 + o(x^2) \\
&= 1 + 2x + \frac{10}{3}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Inoltre, $\log(1 - \beta x) = -\beta x - \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^2)$. Quindi

$$\frac{1}{\cos(2\sqrt{x})} + \log(1 - \beta x) - 1 = (2 - \beta)\, x + \left(\frac{10}{3} - \frac{\beta^2}{2}\right) x^2 + o(x^2).$$

Sia dunque $\beta \neq 2$. Allora, detta f_β la funzione il cui limite si chiede di calcolare, si ha

$$f_\beta(x) = (2 - \beta)\, x^{1-\beta} + o(x^{1-\beta}) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{se } \beta > 2 \\ +\infty & \text{se } \beta \in (1, 2) \\ 1 & \text{se } \beta = 1 \\ 0 & \text{se } \beta < 1. \end{cases}$$

Se $\beta = 2$, lo sviluppo sopra calcolato mostra che $f_2(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 4/3$.

2. (punti 9) Studiare la funzione

$$f(x) = (1-x)e^{\arctan\frac{1}{x-1}}$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata agli estremi del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione.
Dominio: $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Intersezione asse y: se $x = 0$ allora $y = e^{-\pi/4}$.
Non ci sono intersezioni con l'asse x (f non è definita in $x = 1$).
Segno:
$f(x) > 0$ se $x < 1$.
$f(x) < 0$ se $x > 1$.
Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

In particolare f è prolungabile per continuità, ponendo $f(1) := 0$, all'intera retta reale. La funzione ammette asintoto obliquo $y = -x$, infatti, per $x \to \pm\infty$, si ha:

$$(1-x)e^{\arctan\frac{1}{x-1}} = (1-x)e^{\frac{1}{x-1}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = (1-x)\left[1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -x + o(1)$$

Studio della derivata prima. Si calcola

$$f'(x) = -\frac{x^2-3x+3}{x^2-2x+2}e^{\arctan\frac{1}{x-1}}$$

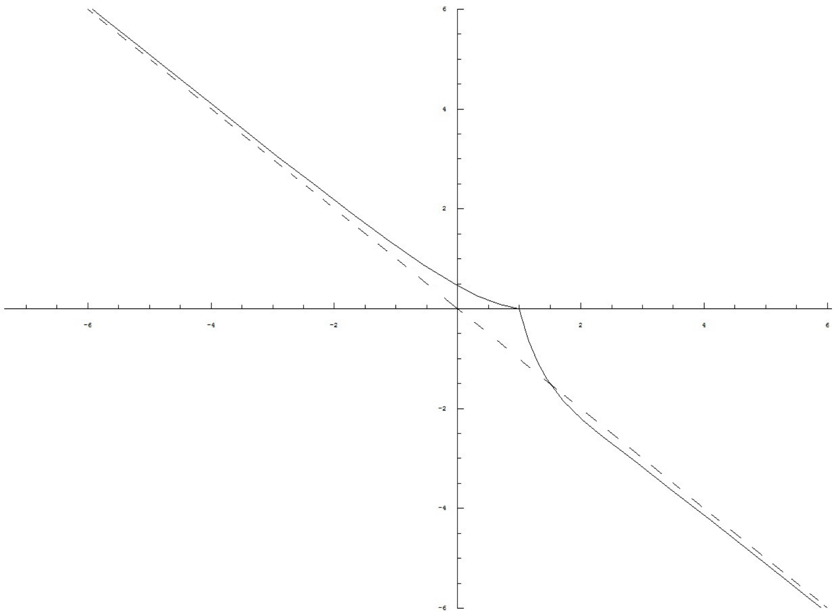
con $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$.
$f'(x) < 0 \ \ \forall x \in \mathcal{D}_f$ (funzione monotona decrescente: si ricordi che f si puè estendere per continuità sull'intera retta reale).
Il grafico presenta un punto angoloso in $x = 1$, infatti:

$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = -e^{\pm\frac{\pi}{2}}$$

Studio della derivata seconda. Si calcola

$$f''(x) = \frac{3-x}{(x^2-2x+2)^2}e^{\arctan\frac{1}{x-1}}$$

$\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f$.
$f''(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3)$, dunque f è convessa in ciascuno di tali due intervalli.
$f''(x) = 0$ se $x = 3$ (punto di flesso).
$f''(x) < 0$ se $x > 3$, dunque f è concava in tale intervallo.



3. (punti 5) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{x^{2/3}(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Soluzione. Si noti che è necessario supporre $x > 0$ affinché la funzione integranda sia ben definita. Poniamo $x^{1/6} = t$. Si ha $\mathrm{d}x = 6t^5 \mathrm{d}t$ e dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 + 2\sqrt{x}}{x^{2/3}(1 + \sqrt[3]{x})} \, \mathrm{d}x &= 6 \int \frac{1 + 2t^3}{t^4(1 + t^2)} t^5 \, \mathrm{d}t = 6 \int \frac{2t^4 + t}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 6 \int \left(2t^2 - 2 + \frac{t + 2}{1 + t^2} \right) \, \mathrm{d}t \\
&= 4t^3 - 12t + 3 \log(1 + t^2) + 12 \arctan t \\
&= 4x^{1/2} - 12x^{1/6} + 3 \log(1 + x^{1/3}) + 12 \arctan(x^{1/6}),
\end{aligned}$$

dove si ricordi che si è posto $x > 0$ e inoltre si è scelta uguale a zero la costante additiva .

4. punti 4) Discutere la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left[e^{\frac{x}{x^3+1}} - 1 - \frac{x}{x^3+1}\right] \log\left[\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] \mathrm{d}x.$$

Soluzione. La funzione è continua per ogni $x > 0$. Ciò segue dal fatto che $1/(x^2+1) \in (0,1)$ per ogni $x > 0$, dal che si ha che $\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \in (\cos 1, 1)$ per ogni $x > 0$, e chiaramente $\cos 1 > 0$: dunque il logaritmo è sempre ben definito. Occorre quindi esaminare il comportamento asintotico della funzione integranda f per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$. E' facile vedere che $f(x) \to 0$ se $x \to 0$: infatti, utilizzando lo sviluppo di McLaurin dell'esponenziale per $x \to 0$.

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2 \log(\cos 1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\log(\cos 1)}{2} x.$$

Dunque la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ e dunque in particolare risulta integrabile in un intorno di tale punto. Inoltre, di nuovo utilizzando lo sviluppo dell'esponenziale e successivamente quello del logaritmo (si noti che le quantità $x/(x^3+1), 1/(x^2+1)$ tendono a zero se $x \to +\infty$) si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^3+1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \log\left[1 - \frac{1}{2(x^2+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]\left[-\frac{1}{2(x^2+1)^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \\ &\underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{4x^9}. \end{aligned}$$

Dunque la funzione risulta integrabile in senso generalizzato a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotico (si noti che f ha segno costante per x sufficientemente grande).

Si noti che il calcolo precedente, svolto in dettaglio per completezza, poteva essere semplificato consentendo egualmente di giustificare l'integrabilità di f. Infatti, sviluppando il solo esponenziale e notando che, per $x \to +\infty$ il termine logaritmico che appare in f tende evidentemente a zero, si sarebbe potuto scrivere $f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] o(1) = o\left(\frac{1}{x^5}\right)$ per $x \to +\infty$. Tale stima, pur più grossolana, implica egualmente l'integrabilità di f.

5.
- (punti 4) Enunciare e dimostrare il Teorema di valutazione per l'integrale di Cauchy.
- (punti 4) Dare le due definizioni equivalenti di funzione continua, e discutere le principali proprietà delle funzioni continue.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova in itinere, 7/2/2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Calcolare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\beta}\left[\frac{1}{\cos\left(\sqrt{x}\right)} + \log(1+\beta x) - 1\right].$$

Soluzione. Si ha, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(\sqrt{x})} &= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)}\\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2)+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)^2\\ &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\\ &= 1+\frac{x}{2}+\frac{5}{24}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

Inoltre, $\log(1+\beta x) = \beta x - \frac{\beta^2}{2}x^2 + o(x^2)$. Quindi

$$\frac{1}{\cos\left(\sqrt{x}\right)} + \log(1+\beta x) - 1 = \left(\frac{1}{2}+\beta\right)x + \left(\frac{5}{24}-\frac{\beta^2}{2}\right)x^2 + o(x^2).$$

Sia dunque $\beta \neq -1/2$. Allora, detta f_β la funzione il cui limite si chiede di calcolare, si ha

$$f_\beta(x) = \left(\frac{1}{2}+\beta\right)x^{1-\beta} + o(x^{1-\beta}) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > 1 \\ \frac{3}{2} & \text{se } \beta = 1 \\ 0 & \text{se } \beta < 1, \beta \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se $\beta = -1/2$, lo sviluppo sopra calcolato mostra che $f_{-1/2}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{5/2}/12 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

2. (punti 9) Studiare la funzione

$$f(x) = (x-2)e^{\arctan \frac{1}{2-x}}$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata agli estremi del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione.

Dominio: $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Intersezione asse y : se $x = 0$ allora $y = -2e^{\arctan 1/2}$.

Non ci sono intersezioni con l'asse x (f non è definita in $x = 2$).

Segno:

$f(x) > 0$ se $x > 2$.

$f(x) < 0$ se $x < 2$.

Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 0$$

In particolare f è prolungabile per continuità, ponendo $f(2) := 0$, all'intera retta reale. La funzione ammette asintoto obliquo $y = x - 3$, infatti, per $x \to \pm\infty$, si ha:

$$(x-2)e^{\arctan \frac{1}{2-x}} = (1-x)e^{\frac{1}{2-x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} = (x-2)\left[1 + \frac{1}{2-x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x - 2 - 1 + o(1)$$

Studio della derivata prima. Si calcola:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4x + 5}e^{\arctan \frac{1}{2-x}}$$

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$.

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f$ (funzione monotona crescente: si ricordi che f si puè estendere per continuità sull'intera retta reale).

Il grafico presenta un punto angoloso in $x = 2$, infatti:

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} f'(x) = e^{\mp \frac{\pi}{2}}$$

Studio della derivata seconda. Si calcola:

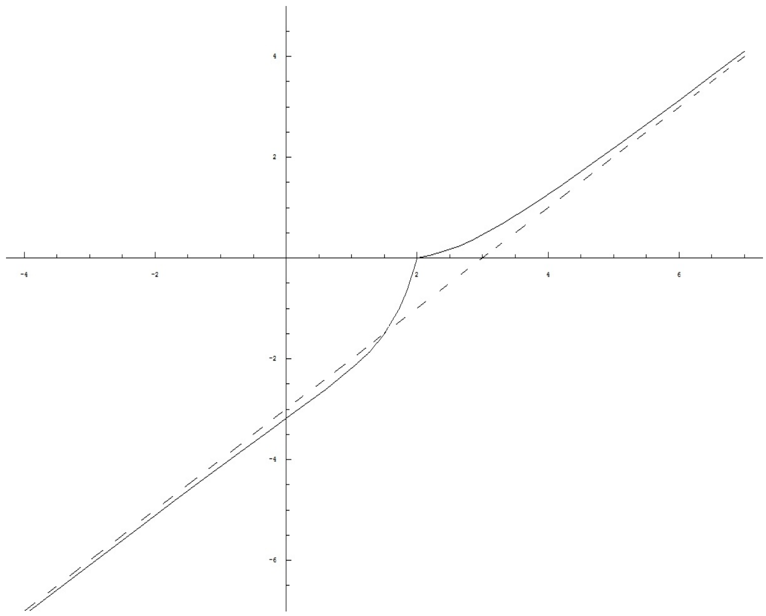
$$f''(x) = \frac{x}{(x^2 - 4x + 5)^2}e^{\arctan \frac{1}{2-x}}$$

$\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f$.

$f''(x) > 0$ se $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$, dunque f è convessa in ciascuno di tali due intervalli.

$f''(x) = 0$ se $x = 0$ (punto di flesso).

$f''(x) < 0$ se $x < 0$, dunque f è concava in tale intervallo.



3. (punti 5) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{x^{2/3}(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Soluzione. Si noti che è necessario supporre $x > 0$ affinché la funzione integranda sia ben definita. Poniamo $x^{1/6} = t$. Si ha $\mathrm{d}x = 6t^5 \mathrm{d}t$ e dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - 2\sqrt{x}}{x^{2/3}(1 + \sqrt[3]{x})}\, \mathrm{d}x &= 6 \int \frac{1 - 2t^3}{t^4(1 + t^2)} t^5 \, \mathrm{d}t = 6 \int \frac{t - 2t^4}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 6 \int \left(-2t^2 + 2 + \frac{t - 2}{1 + t^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= -4t^3 + 12t + 3\log(1 + t^2) - 12 \arctan t \\
&= -4x^{1/2} + 12x^{1/6} + 3\log(1 + x^{1/3}) - 12 \arctan(x^{1/6}),
\end{aligned}$$

dove si ricordi che si è posto $x > 0$ e inoltre si è scelta uguale a zero la costante additiva.

4. punti 4) Discutere la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left[e^{\frac{x}{x^3+2}} - 1 - \frac{x}{x^3+2}\right] \log\left[\cos\left(\frac{1}{x^2+2}\right)\right] \, \mathrm{d}x.$$

Soluzione. La funzione è continua per ogni $x > 0$. Ciò segue dal fatto che $1/(x^2+2) \in (0, 1/2)$ per ogni $x > 0$, dal che si ha che $\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \in (\cos(1/2), 1)$ per ogni $x > 0$, e chiaramente $\cos(1/2) > 0$: dunque il logaritmo è sempre ben definito. Occorre quindi esaminare il comportamento asintotico della funzione integranda f per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$. E' facile vedere che $f(x) \to 0$ se $x \to 0$: infatti, utilizzando lo sviluppo di McLaurin dell'esponenziale per $x \to 0$.

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\,\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^3+2}\right)^2 \log(\cos 1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\log(\cos 1)}{2} x.$$

Dunque la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ e dunque in particolare risulta integrabile in un intorno di tale punto. Inoltre, di nuovo utilizzando lo sviluppo dell'esponenziale e successivamente quello del logaritmo (si noti che le quantità $x/(x^3+2), 1/(x^2+2)$ tendono a zero se $x \to +\infty$) si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^3+2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \log\left[1 - \frac{1}{2(x^2+2)^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]\left[-\frac{1}{2(x^2+2)^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] \\ &\underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{4x^9}. \end{aligned}$$

Dunque la funzione risulta integrabile in senso generalizzato a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotico (si noti che f ha segno costante per x sufficientemente grande).

Si noti che il calcolo precedente, svolto in dettaglio per completezza, poteva essere semplificato consentendo egualmente di giustificare l'integrabilità di f. Infatti, sviluppando il solo esponenziale e notando che, per $x \to +\infty$ il termine logaritmico che appare in f tende evidentemente a zero, si sarebbe potuto scrivere $f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] o(1) = o\left(\frac{1}{x^5}\right)$ per $x \to +\infty$. Tale stima, pur più grossolana, implica egualmente l'integrabilità di f.

5.

- (punti 4) Enunciare e dimostrare il Teorema di valutazione per l'integrale di Cauchy.
- (punti 4) Dare le due definizioni equivalenti di funzione continua, e discutere le principali proprietà delle funzioni continue.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 27/2/2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 4+2) Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} y + z = -k \\ (1-k)x + (1+k)y + 2kz = 0 \\ (1-k^2)x + 3ky + 3kz = -3 \end{cases}$$

- stabilire, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione dell'insieme delle soluzioni;
- determinare l'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia una retta.

Soluzione.

- Indichiamo con A_k la matrice dei coefficienti del sistema e con $A_k|b$ la sua matrice completa. Si ha:

$$0 = \det A_k = k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

se $k = 1$ e $k = -1$.
In questi casi abbiamo che:

$$A_1|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right), \qquad A_{-1}|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Si osservi che:
Il rango di A_1 vale 1 (tre righe proporzionali) ed il rango di $A_1|b$ vale 2 perché, ad esempio, il minore formato dalle prime due righe e ultime due colonne ha determinante diverso da zero.
Il rango di A_{-1} vale 2 (prima e terza riga proporzionali tra loro, e presenza di un minore di ordine due con determinante non nullo) ed il rango di $A_{-1}|b$ vale ancora due (il vettore dei termini noti è uguale alla seconda colonna della matrice dei coefficienti).
Il rango di A_k vale 3 ed è uguale al rango di $A_k|b$ per $k \neq \pm 1$.

Dal teorema di Rouché-Capelli:

$k = 1$	:	Rk $(A_1|b) = 2$	Rk $(A_1) = 1$	il sistema è impossibile
$k = -1$	:	Rk $(A_{-1}|b) = 2$	Rk $(A_{-1}) = 2$	il sistema ammette ∞^1 soluzioni
$k \neq \pm 1$	:	Rk $(A_k|b) = 3$	Rk $(A_k) = 3$	esiste un'unica soluzione

- Sia dunque $k = -1$. La terza equazione è ridondante (è equivalente alla prima). Scelto, ad esempio, $y = t$, come parametro libero del sistema, si ricava:

$$z = 1 - t, \quad x = z = 1 - t$$

Pertanto, l'insieme soluzione del sistema, per $k = -1$ è la retta di equazione:

$$r := \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. (punti 6) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{z^2-4\pi i} = i.$$

Soluzione.

L'equazione si riscrive, posto $w = z^2$, come $e^w = ie^{4\pi i} = i$. Sia $w = x + iy$. Deve essere allora $e^x e^{iy} = i = e^{i\pi/2}$. Ció accade se e solo se $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tornando alla variabile z, occorre dunque risolvere, fissato $k \in \mathbb{Z}$, l'equazione $z^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$.

Occorre ora distinguere due casi. Se $k \in \mathbb{N}$ allora $\frac{\pi}{2} + 2k\pi > 0$ e l'ultima equazione si scrive $z^2 = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) e^{i\pi/2}$. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ si deve quindi avere $\varrho = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{1/2}$, e l'angolo ϑ può essere o $\pi/4$ o $5\pi/4$. Si noti che tali due angoli individuano, congiuntamente, la retta $y = x$. In conclusione si trovano i punti che appartengono alla retta $y = x$ (cioè della forma $z = x + ix$) il cui modulo vale $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{1/2}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Se invece $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, allora $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 0$ e si deve dunque avere $z^2 = \left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) e^{-i\pi/2}$. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ si deve quindi avere $\varrho = \left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right)^{1/2}$, e l'angolo ϑ può essere o $-\pi/4$ o $3\pi/4$. Si noti che tali due angoli individuano, congiuntamente, la retta $y = -x$. In conclusione si trovano i punti che appartengono alla retta $y = -x$ (cioè della forma $z = x - ix$) il cui modulo vale $\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right)^{1/2}$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

In alternativa, l'equazione $e^{z^2} = i$ può essere risolta come segue. Si ponga $z = a + ib$ così che $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. L'equazione data è allora $e^{a^2-b^2} e^{2iab} = e^{i\pi/2}$. Deve quindi essere $a^2 - b^2 = 0$, cioè $b = \pm a$, e $2ab = \frac{\pi}{2} + 2x\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $b = a$ brevi calcoli portano alle soluzioni precedentemente trovate sulla retta $y = x$, mentre se $b = -a$ si riscoprono le soluzioni precedentemente trovate sulla retta $y = -x$

3. (punti 8) Studiare la funzione

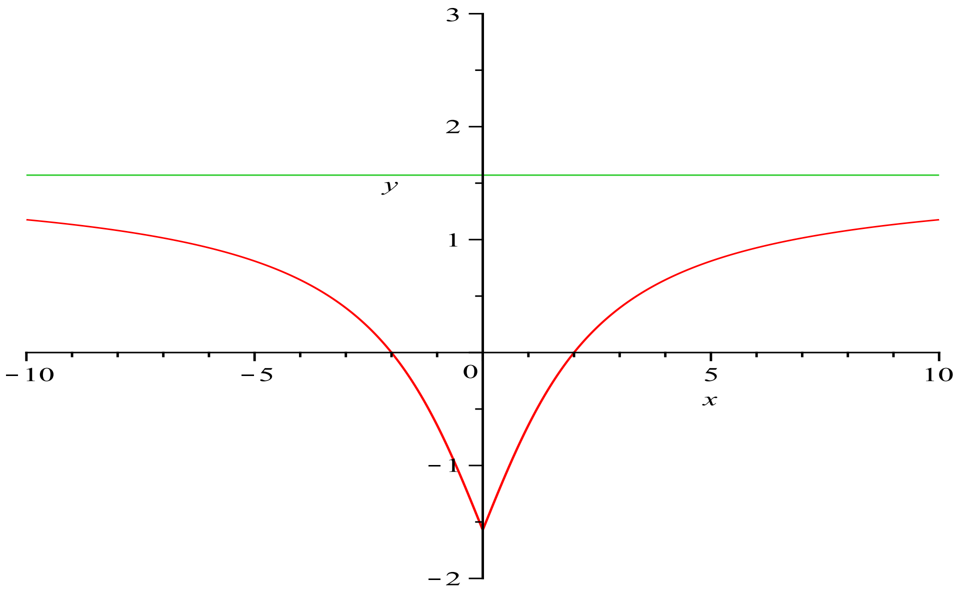
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata agli estremi del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. Affinché la funzione sia definita, occorre che $\frac{x^2-4}{x^2+4} \in [-1,1]$. È immediato verificare che ciò accade per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che f è ovunque continua. La funzione è pari, dunque essa verrà studiata per $x > 0$ e poi prolungata per simmetria. Si noti che $f(0) = -\pi/2$. La funzione è positiva se $x > 2$, negativa se $x \in [0,2)$, e $f(2) = 0$. Si ha $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} = \pi/2$. Quindi la retta $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to +\infty$. La funzione è certamente derivabile quando $\frac{x^2-4}{x^2+4} \neq \pm 1$, cioè quando $x \neq 0$. Calcoli elementari mostrano che

$$f'(x) = \frac{4}{x^2+4} \quad \forall x > 0.$$

Si ha $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ e dunque, essendo f pari, la funzione non è derivabile in $x = 0$: il punto $x = 0$ è un punto angoloso per f. Infine si ha, sempre per $x > 0$, $f''(x) = -\frac{8x}{(x^2+4)^2}$. Non vi sono dunque punti di flesso e f è concava in $[0,+\infty)$. In conclusione il grafico della funzione è il seguente.



4. (punti 4+1) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Stabilire poi se esiste finito

$$\int_0^1 \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione.

Per prima cosa notiamo che $\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$. Possiamo quindi integrare per parti ottenendo

$$\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{e^{2x}-1} - \int \sqrt{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x.$$

Per calcolare l'ultimo integrale scritto poniamo $\sqrt{e^{2x}-1} = t$, cioè $x = \frac{1}{2}\log(1+t^2)$. Si ha quindi $\mathrm{d}x = \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Quindi

$$\int \sqrt{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \arctan t = \sqrt{e^{2x}-1} - \arctan\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right),$$

dove si è posta uguale a zero la costante additiva. In conclusione una primitiva è data da

$$(x-1)\sqrt{e^{2x}-1} + \arctan\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right).$$

Circa il secondo punto basta notare che $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, dunque la funzione integranda è prolungabile per continuità in $x = 0$ e l'integrale dato converge.

5.

- (punti 4) Dimostrare che una serie assolutamente convergente è convergente.
- (punti 4) Discutere il concetto di integrale inferiore e i principali risultati relativi.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 27/2/2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 4+2) Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y = k \\ 2kx + (1-3k)y + (1-k)z = 4 \\ 3kx - 3ky + (1-k^2)z = 3 \end{cases}$$

- stabilire, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione dell'insieme delle soluzioni;
- determinare l'insieme delle soluzioni nel caso in cui esso sia una retta.

Soluzione.

- Indichiamo con A_k la matrice dei coefficienti del sistema e con $A_k|b$ la sua matrice completa. Si ha:

$$0 = \det A_k = k^3 - k^2 - k + 1 = (k-1)^2(k+1)$$

se $k = 1$ e $k = -1$.
In questi casi abbiamo che:

$$A_1|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right), \qquad A_{-1}|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Si osservi che:
Il rango di A_1 vale 1 (tre righe proporzionali) ed il rango di $A_1|b$ vale 2 perché, ad esempio, il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero.
Il rango di A_{-1} vale 2 (prima e terza riga proporzionali tra loro, e presenza di un minore di ordine due con determinante non nullo) ed il rango di $A_{-1}|b$ vale ancora due (il vettore dei termini noti è uguale alla seconda colonna della matrice dei coefficienti).
Il rango di A_k vale 3 ed è uguale al rango di $A_k|b$ per $k \neq \pm 1$.

Dal teorema di Rouché-Capelli:

$k = 1$	:	Rk $(A_1\|b) = 2$	Rk $(A_1) = 1$	il sistema è impossibile
$k = -1$	:	Rk $(A_{-1}\|b) = 2$	Rk $(A_{-1}) = 2$	il sistema ammette ∞^1 soluzioni
$k \neq \pm 1$	:	Rk $(A_k\|b) = 3$	Rk $(A_k) = 3$	esiste un'unica soluzione

- Sia dunque $k = -1$. Si noti che la terza equazione è ridondante (è equivalente alla prima). Scelto, ad esempio, $y = t$, come parametro libero del sistema, si ricava:

$$x = -1 + t, \quad z = 1 - t$$

Pertanto, l'insieme soluzione del sistema, per $k = -1$ è la retta di equazione:

$$r := \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. (punti 6) Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{z^2-3\pi i} = i.$$

Soluzione.

L'equazione si riscrive, posto $w = z^2$, come $e^w = ie^{3\pi i} = -i$. Sia $w = x + iy$. Deve essere allora $e^x e^{iy} = -i = e^{-i\pi/2}$. Ció accade se e solo se $x = 0$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tornando alla variabile z, occorre dunque risolvere, fissato $k \in \mathbb{Z}$, l'equazione $z^2 = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$.

Occorre ora distinguere due casi. Se $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ allora $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi > 0$ e l'ultima equazione si scrive $z^2 = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) e^{i\pi/2}$. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ si deve quindi avere $\varrho = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{1/2}$, e l'angolo ϑ può essere o $\pi/4$ o $5\pi/4$. Si noti che tali due angoli individuano, congiuntamente, la retta $y = x$. In conclusione si trovano i punti che appartengono alla retta $y = x$ (cioè della forma $z = x + ix$) il cui modulo vale $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{1/2}$, con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Se invece k è un interno non positivo, allora $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 0$ e si deve dunque avere $z^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right) e^{-i\pi/2}$. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ si deve quindi avere $\varrho = \left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right)^{1/2}$, e l'angolo ϑ può essere o $-\pi/4$ o $3\pi/4$. Si noti che tali due angoli individuano, congiuntamente, la retta $y = -x$. In conclusione si trovano i punti che appartengono alla retta $y = -x$ (cioè della forma $z = x - ix$) il cui modulo vale $\left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right)^{1/2}$, con k intero non positivo.

In alternativa, l'equazione $e^{z^2} = -i$ può essere risolta come segue. Si ponga $z = a + ib$ così che $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$. L'equazione data è allora $e^{a^2-b^2}e^{2iab} = e^{-i\pi/2}$. Deve quindi essere $a^2 - b^2 = 0$, cioè $b = \pm a$, e $2ab = -\frac{\pi}{2} + 2x\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Se $b = a$ brevi calcoli portano alle soluzioni precedentemente trovate sulla retta $y = x$, mentre se $b = -a$ si riscoprono le soluzioni precedentemente trovate sulla retta $y = -x$

3. (punti 8) Studiare la funzione

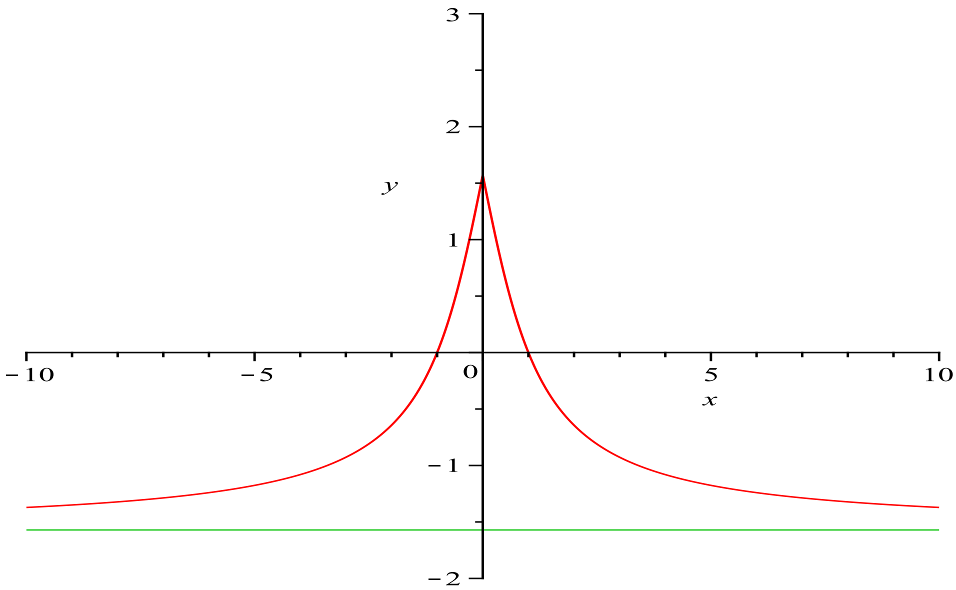
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, segno, eventuali simmetrie e intersezioni con gli assi, limiti alla frontiera del dominio, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata agli estremi del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali estremanti locali e globali, derivata seconda, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Disegnare infine un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. Affinché la funzione sia definita, occorre che $\frac{1-x^2}{x^2+1} \in [-1,1]$. È immediato verificare che ciò accade per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che f è ovunque continua. La funzione è pari, dunque essa verrà studiata per $x > 0$ e poi prolungata per simmetria. Si noti che $f(0) = \pi/2$. La funzione è positiva se $x \in [0,1)$, negativa se $x > 1$, e $f(1) = 0$. Si ha $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} = -\pi/2$. Quindi la retta $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale per f quando $x \to +\infty$. La funzione è certamente derivabile quando $\frac{1-x^2}{x^2+1} \neq \pm 1$, cioè quando $x \neq 0$. Calcoli elementari mostrano che

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2+1} \quad \forall x > 0.$$

Si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2$ e dunque, essendo f pari, la funzione non è derivabile in $x = 0$: il punto $x = 0$ è un punto angoloso per f. Infine si ha, sempre per $x > 0$, $f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. Non vi sono dunque punti di flesso e f è convessa in $[0, +\infty)$. In conclusione il grafico della funzione è il seguente.



4. (punti 4+1) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-2}}.$$

Stabilire poi se esiste finito

$$\int_1^{+\infty} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione.

Per prima cosa notiamo che $\left(\sqrt{e^{2x}-2}\right)' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-2}}$. Possiamo quindi integrare per parti ottenendo

$$\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{e^{2x}-2} - \int \sqrt{e^{2x}-2}\,\mathrm{d}x.$$

Per calcolare l'ultimo integrale scritto poniamo $\sqrt{e^{2x}-2} = t$, cioè $x = \frac{1}{2}\log(2+t^2)$. Si ha quindi $\mathrm{d}x = \frac{t}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$. Quindi

$$\int \sqrt{e^{2x}-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{e^{2x}-2} - \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{e^{2x}-2}{2}}\right),$$

dove si è posta uguale a zero la costante additiva. In conclusione una primitiva è data da

$$(x-1)\sqrt{e^{2x}-2} + \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{e^{2x}-2}{2}}\right).$$

Circa il secondo punto basta notare che $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, e dunque l'integrale dato diverge.

5.

- (punti 4) Dimostrare che una serie assolutamente convergente è convergente.
- (punti 4) Discutere il concetto di integrale inferiore e i principali risultati relativi.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 04/07/2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 3+3) Sia la funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla relazione matriciale: $f(\vec{v}) = A\vec{v}$, dove:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Esibire una base per il nucleo di f.
- Verificare la diagonalizzabilità della matrice A.

Soluzione.

- Poichè $\det A = 0$ e vi è almeno un minore 2x2 non nullo, la dimensione dell'immagine di f è 2 e, per il teorema di *nullità più rango* la dimensione del nucleo di f è 1.
  Per detetrminare la base del nucleo di f si risolve il sistema omogeneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se si osserva che la prima equazione è ridondante, tale sistema si riduce a:

  $$\begin{cases} 4x + 5y + 2z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

  le cui soluzioni possono essere scritte nella forma:

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \\ -t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

  Pertanto si può scegliere come vettore base per il nucleo di f: $\mathbf{v} = (3, -2, -1)^T$.
- Si cercano dapprima gli autovalori della matrice A, sappiamo già che uno di essi è nullo in quanto il nucleo di f è non banale. Ponendo il polinomio caratteristico uguale a zero:

  $$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

  si trova: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$.
  L'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica 1, quindi è regolare.
  L'autovalore $\lambda = -1$ ha molteplicità algebrica 2, per verificare che è regolare, osserviamo che la matrice:

  $$A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  ha tre righe (e tre colonne) proporzionali tra di loro, pertanto ha rango 1, di conseguenza la dimensione dell'autospazio è 2 (molteplicità geometrica).
  La regolarità di entrambi gli autovalori implica che la matrice A è diagonalizzabile.

2. (punti 5) Determinare se esistono $a \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + e^{e^{x^2}-1} - 2\cos(\sin x)}{x^a}$$

esista finito, e in caso affermativo calcolare sia tali valori di a che i corrispondenti limiti.

Soluzione. Consideriamo il numeratore. Si ha, per $x \to 0^+$:

$$
\begin{aligned}
1 + e^{e^{x^2}-1} - 2\cos(\sin x) &= 1 + e^{1+x^2+o(x^2)-1} - 2\cos(x + o(x)) \\
&= 2 + x^2 + o(x^2) - 2\left(1 - \frac{1}{2}(x + o(x))^2 + o(x^2)\right) \\
&= 2 + x^2 + o(x^2) - 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}
$$

Dunque il limite cercato vale 2 se $a = 2$, 0 se $a < 2$ e $+\infty$ se $a > 2$.

3. (punti 8) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x\, e^{\frac{1-x}{x}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di defonizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

È possibile che esistano asintoti obliqui. In effetti, per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{e}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{x}{e}\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{e} + \frac{1}{e} + o(1).$$

Dunque la retta $y = (x+1)/e$ è asintoto obliquo per f quando $x \to \pm\infty$. f è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$. Inoltre, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{x}}\left(1 + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^{\frac{1-x}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

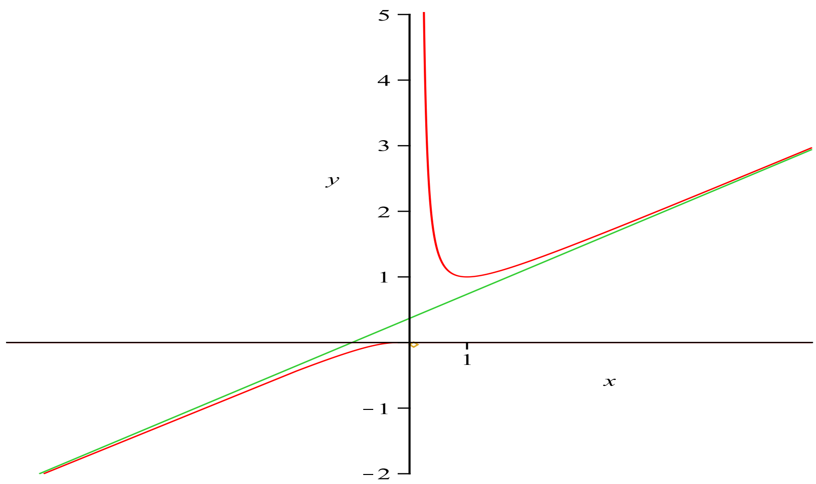
Quindi f è crescente per $x \in (-\infty, 0)$ e per $x > 1$, decrescente per $x \in (0,1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo relativo. Vale inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0,$$

Dunque il grafico di f si avvicina al punto (0,0) da sinistra con tangente che tende a diventare orizzontale. Infine, sempre per $x \neq 0$,

$$f''(x) = e^{\frac{1-x}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{1-x}{x}}}{x^3}.$$

Dunque f è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$. Non vi sono flessi. In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. (punti 4+2)

- Fissato $a > 0$, stabilire se converge e, in caso affermativo, calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+e^{2(a-x)}} e^{a-x}\,\mathrm{d}x.$$

- Fissato $a > 0$ stabilire per quali valori di $\lambda > 0$ è convergente

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+e^{2\lambda(a-x)}} e^{a-x}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. La funzione integranda $f(x)$ non ha singolarità al finito. Inoltre f è sempre positiva e vale

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{x-a}.$$

Per confronto asintotico, l'integrale dunque converge per ogni a. Inoltre una primitiva della funzione integranda si calcola immediatamente:

$$\int \frac{1}{1+e^{2(a-x)}} e^{a-x}\,\mathrm{d}x = -\arctan\left(e^{a-x}\right) + c$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{1+e^{2(a-x)}} e^{a-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to-\infty}\left[-\arctan\left(e^{a-x}\right)\right]_M^a = \frac{\pi}{2} - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Circa la seconda parte, basta notare che di nuovo la funzione integranda non ha singolarità al finito ed è sempre positiva. Vale inoltre

$$\frac{1}{1+e^{2\lambda(a-x)}} e^{a-x} \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{(2\lambda-1)(x-a)}.$$

Di nuovo per confronto asintotico, l'integrale converge se $\lambda > 1/2$ e diverge altrimenti.

5. (punti 4) Discutere il concetto di diagonalizzabilità di una matrice, enunciando i principali risultati relativi.

6. (punti 4) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 04/07/2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 3+3) Sia la funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla relazione matriciale: $f(\vec{v}) = A\vec{v}$, dove:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Esibire una base per il nucleo di f.
- Verificare la diagonalizzabilità della matrice A.

Soluzione.

- Poichè $\det A = 0$ e vi è almeno un minore 2x2 non nullo, la dimensione dell'immagine di f è 2 e, per il teorema di *nullità più rango*, la dimensione del nucleo di f è 1.
  Per detetrminare la base del nucleo di f si risolve il sistema omogeneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se si osserva che la seconda equazione è ridondante, tale sistema si riduce a:

  $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

  le cui soluzioni possono essere scritte nella forma:

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

  Pertanto si può scegliere come vettore base per il nucleo di f: $\mathbf{v} = (1, 1, -1)^T$.
- Si cercano dapprima gli autovalori della matrice A, sappiamo già che uno di essi è nullo in quanto il nucleo di f è non banale. Ponendo il polinomio caratteristico uguale a zero:

  $$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$$

  si trova: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 3$.
  L'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica 1, quindi è regolare.
  L'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2, per verificare che è regolare, osserviamo che la matrice:

  $$A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

  ha due righe uguali e un'altra di segno opposto, pertanto ha rango 1, di conseguenza la dimensione dell'autospazio è 2 (molteplicità geometrica).
  La regolarità di entrambi gli autovalori implica che la matrice A è diagonalizzabile.

2. (punti 5) Determinare se esistono $a \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + e^{e^{4x^2}-1} - 2\cos(\sin(2x))}{x^a}$$

esista finito, e in caso affermativo calcolare sia tali valori di a che i corrispondenti limiti.

Soluzione. Consideriamo il numeratore. Si ha, per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned} 1 + e^{e^{4x^2}-1} - 2\cos(\sin(2x)) &= 1 + e^{1+4x^2+o(x^2)-1} - 2\cos(2x + o(x)) \\ &= 2 + 4x^2 + o(x^2) - 2\left(1 - \frac{1}{2}(2x + o(x))^2 + o(x^2)\right) \\ &= 2 + 4x^2 + o(x^2) - 2\left(1 - 2x^2 + o(x^2)\right) = 8x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Dunque il limite cercato vale 8 se $a = 2$, 0 se $a < 2$ e $+\infty$ se $a > 2$.

3. (punti 8) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x\, e^{-\frac{1+x}{x}}.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di defonizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

È possibile che esistano asintoti obliqui. In effetti, per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x}{e}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x}{e}\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{e} - \frac{1}{e} + o(1).$$

Dunque la retta $y = (x-1)/e$ è asintoto obliquo per f quando $x \to \pm\infty$. f è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$. Inoltre, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1+x}{x}}\left(1 + x\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = e^{-\frac{1+x}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

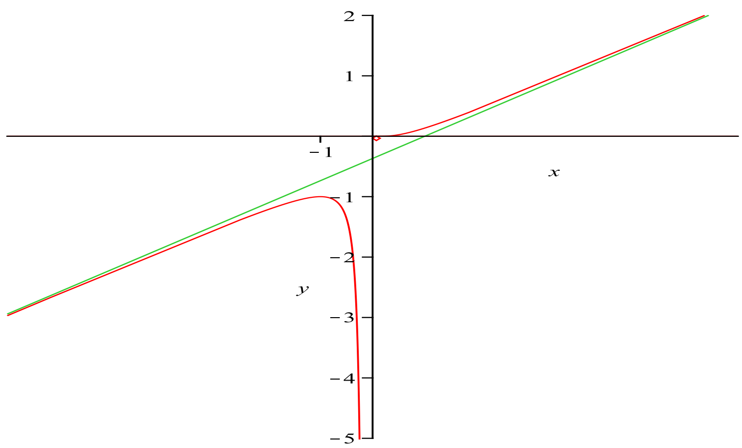
Quindi f è crescente per $x \in (-\infty, -1)$ e per $x > 0$, decrescente per $x \in (-1, 0)$. Il punto $x = -1$ è di massimo relativo. Vale inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

Dunque il grafico di f si avvicina al punto (0,0) da destra con tangente che tende a diventare orizzontale. Infine, sempre per $x \neq 0$,

$$f''(x) = e^{-\frac{1+x}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{-\frac{1+x}{x}}}{x^3}.$$

Dunque f è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$. Non vi sono flessi. In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. (punti 4+2)

- Fissato $a > 0$, stabilire se converge e, in caso affermativo, calcolare il seguente integrale:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+e^{2(x-a)}} e^{x-a} \, \mathrm{d}x.$$

- Fissato $a > 0$ stabilire per quali valori di $\lambda > 0$ è convergente

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+e^{2\lambda(x-a)}} e^{x-a} \, \mathrm{d}x.$$

Soluzione. La funzione integranda $f(x)$ non ha singolarità al finito. Inoltre f è sempre positiva e vale

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{a-x}.$$

Per confronto asintotico, l'integrale dunque converge per ogni a. Inoltre una primitiva della funzione integranda si calcola immediatamente:

$$\int \frac{1}{1+e^{2(x-a)}} e^{x-a} \, \mathrm{d}x = \arctan\left(e^{x-a}\right) + c$$

Quindi

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+e^{2(x-a)}} e^{x-a} \, \mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty} \left[\arctan\left(e^{x-a}\right)\right]_a^M = \frac{\pi}{2} - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Circa la seconda parte, basta notare che di nuovo la funzione integranda non ha singolarità al finito ed è sempre positiva. Vale inoltre

$$\frac{1}{1+e^{2\lambda(x-a)}} e^{x-a} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{(2\lambda-1)(a-x)}.$$

Di nuovo per confronto asintotico, l'integrale converge se $\lambda > 1/2$ e diverge altrimenti.

5. (punti 4) Discutere il concetto di diagonalizzabilità di una matrice, enunciando i principali risultati relativi.

6. (punti 4) Enunciare e dimostrare il teorema di derivazione della funzione composta.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 08/09/2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 3+3) Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, funzioni lineari così definite: $f(\vec{v}) = A\vec{v}$, $g(\vec{v}) = B\vec{v}$, dove:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quali vettori $\vec{v}$ vale: $\frac{1}{3}(f-g)(\vec{v}) = \vec{v}$.
- Mostrare che f e g sono invertibili e determinare per quali vettori $\vec{w}$ vale: $f^{-1}(\vec{w}) = g^{-1}(\vec{w})$.

Soluzione.

- Se $\left(\frac{f-g}{3}\right)(\vec{v}) = \vec{v}$, allora: $(f - g - 3\mathbb{I})(\vec{v}) = \mathbf{0}$.
Si risolve il sistema omogeneo:
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La cui soluzione è:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

- I determinanti di A, B sono diversi da zero, dunque entrambe le matrici sono invertibili. L'equazione $f^{-1}(\vec{w}) = g^{-1}(\vec{w})$ ha luogo se e solo se, posto $\vec{v} := f^{-1}(\vec{w})$, si ha $f(\vec{v}) = g(\vec{v}) = \vec{w}$, ovvero $(f-g)(\vec{v}) = \mathbf{0}$.
Si determina $\vec{v}$ risolvendo il sistema omogeneo:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La cui soluzione è:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$
Per determinare $\vec{w}$ basta calcolare $A\vec{v}$.
Si ottiene:
$$\vec{w} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ -2t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. (punti 5) Determimare l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{2z} - e^{z}(2+2i) + 4i = 0.$$

Successivamente determinare quale degli z sopra trovati ha modulo minimo.

Soluzione. Si tratta di un'equazione di secondo grado in e^z, le cio soluzioni sono $e^z = 2$, $e^z = 2i$. Estraendo i logaritmi complessi se ne deduce che le soluzioni cercate sono

$$z_{1,k} = \log 2 + 2k\pi i, \quad z_{2,k} = \log 2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tra queste soluzioni è chiaro che quella di minor modulo (cioè quella più vicina all'origine) è $z_{1,0} = \log 2$.

3. (punti 8) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right).$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è dispari, dunque è sufficiente studiarla per $x \geq 0$. In tale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ la funzione è definita per $x \neq 1$. Si ha inoltre che

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = 1 \pm \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Ovviamente $f(0) = 0$. Discuteremo successivamente il segno di f. Si noti che $f(x) = x + o(1)$ per $x \to +\infty$, dunque $y = x$ è asintoto obliquo in tale limite. La funzione è derivabile ove definita. Calcoli elementari mostrano che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-2)}{x^4-x^2+1}.$$

Dunque, sempre nell'insieme considerato, f è crescente per $x \in [\sqrt{2}, \infty)$, decrescente per $x \in [0,1)$ e per $x \in (1, \sqrt{2}]$. Il punto $x = \sqrt{2}$ è di minimo relativo. Si noti che $f(x) > x$ per ogni $x > 1$, dunque f è sempre positiva in tale intervallo (e il suo grafico è sopra quello dell'asintoto obliquo). Inoltre l'informazione appena ottenuta sulla derivata mostra che $f(x) < 0$ per ogni $x \in (0,1)$. Si noti inoltre che

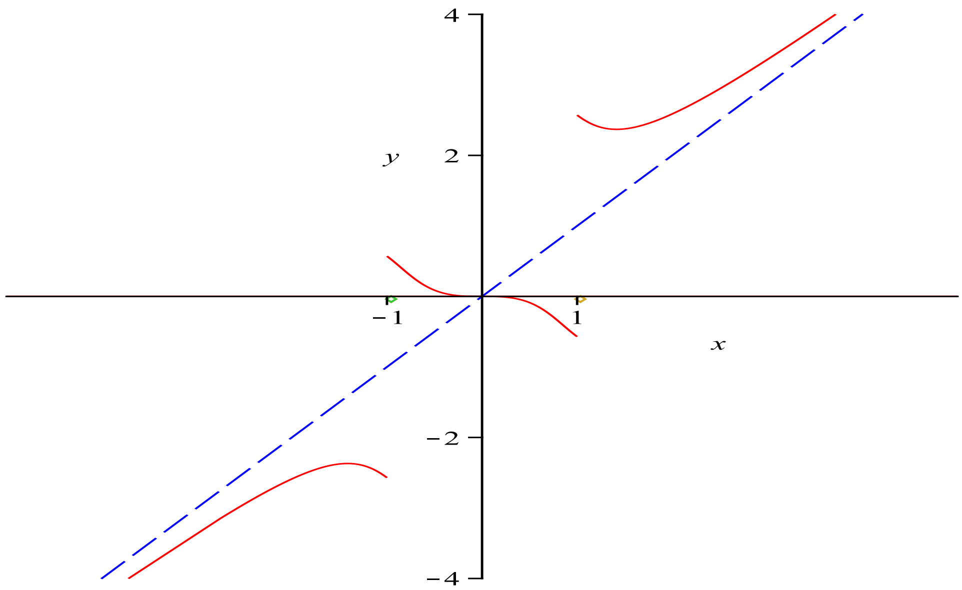
$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = -1.$$

Si noti infine che $f'(0) = 0$. La natura dell'origine sarà studiata a breve.

La derivata seconda risulta essere, sempre per $x \neq 1$:

$$f''(x) = \frac{2x(x^4+2x^2-2)}{(x^4-x^2+1)^2}.$$

Ne segue che $f''(x)$ si annulla in $x = 0$ e, sempre nel dominio considerato, in $x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$. Essa è positiva per $x \in (\sqrt{\sqrt{3}-1}, 1)$ e per $x > 1$, dunque in ciascuno di tali intervalli la funzione è convessa, mentre la derivata seconda è negativa per $x \in (0, \sqrt{\sqrt{3}-1})$, e in tale intervallo la funzione è concava. Il punto $x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$ (che appartiene all'intervallo (0,1)) è di flesso per f. Lo studio appena svolto e la simmetria del grafico di f implicano inoltre che il punto $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale per f. In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. (punti 4+2)

- Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 1]}.$$

- Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 1]}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Il cambio di variabile $\log x = t$ mostra che

$$\int \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 1]}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale. È immediato notare che

$$\frac{t}{t^4 - 1} = \frac{t}{2(t^2 - 1)} - \frac{t}{2(t^2 + 1)}.$$

L'integrale può dunque essere calcolato immediatamente:

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{t}{2(t^2 - 1)} - \frac{t}{2(t^2 + 1)} \right) \mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\log\left|t^2 - 1\right| - \frac{1}{4}\log(t^2 + 1) \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right|.\end{aligned}$$

Quindi, tornando alla variabile originaria:

$$\int \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 1]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\log\left|\frac{(\log x)^2 - 1}{(\log x)^2 + 1}\right|$$

avendo posto ad esempio uguale a zero la costante additiva.
Circa la seconda domanda, si noti che la funzione integranda $f(x)$ soddisfa

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x(\log x)^3} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Ciò implica che f è integrabile in senso generalizzato all'infinito. Quindi in particolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Essendo f positiva in un intorno dell'infinito, ciò implica immediatamente che anche il limite richiesto vale zero.

5. (punti 4) Discutere il concetto di convergenza di una serie numerica e i principali risultati relativi.

6. (punti 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 08/09/2014
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 3+3) Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, funzioni lineari così definite: $f(\vec{v}) = A\vec{v}$, $g(\vec{v}) = B\vec{v}$, dove:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quali vettori $\vec{v}$ vale: $\frac{1}{2}(f-g)(\vec{v}) = \vec{v}$.
- Mostrare che f e g sono invertibili e determinare per quali vettori $\vec{w}$ vale: $f^{-1}(\vec{w}) = g^{-1}(\vec{w})$.

Soluzione accennata.

- Se $\left(\frac{f-g}{2}\right)(\vec{v}) = \vec{v}$, allora: $(f - g - 2\mathbb{I})(\vec{v}) = \mathbf{0}$.
  Si risolve il sistema omogeneo:
  $$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  La cui soluzione è:
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$
- I determinanti di A, B sono diversi da zero, dunque entrambe le matrici sono invertibili. L'equazione $f^{-1}(\vec{w}) = g^{-1}(\vec{w})$ ha luogo se e solo se, posto $\vec{v} := f^{-1}(\vec{w})$, si ha $f(\vec{v}) = g(\vec{v}) = \vec{w}$, ovvero $(f-g)(\vec{v}) = \mathbf{0}$.
  Si determina $\vec{v}$ risolvendo il sistema omogeneo:
  $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  La cui soluzione è:
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ -2t \\ 3t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$
  Per determinare $\vec{w}$ basta calcolare $A\vec{v}$.
  Si ottiene:
  $$\vec{w} = \begin{pmatrix} -3t \\ -5t \\ -5t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. (punti 5) Determimare l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$e^{2z} + e^{z}(2i - 2) - 4i = 0.$$

Successivamente determinare quale degli z sopra trovati ha modulo minimo.

Soluzione. Si tratta di un'equazione di secondo grado in e^z, le cio soluzioni sono $e^z = 2$, $e^z = -2i$. Estraendo i logaritmi complessi se ne deduce che le soluzioni cercate sono

$$z_{1,k} = \log 2 + 2k\pi i, \quad z_{2,k} = \log 2 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Tra queste soluzioni è chiaro che quella di minor modulo (cioè quella più vicina all'origine) è $z_{1,0} = \log 2$.

3. (punti 8) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right) - x.$$

Determinarne in particolare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. La funzione è dispari, dunque è sufficiente studiarla per $x \geq 0$. In tale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ la funzione è definita per $x \neq 1$. Si ha inoltre che

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = -1 \mp \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Ovviamente $f(0) = 0$. Discuteremo successivamente il segno di f. Si noti che $f(x) = -x + o(1)$ per $x \to +\infty$, dunque $y = -x$ è asintoto obliquo in tale limite. La funzione è derivabile ove definita. Calcoli elementari mostrano che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \frac{x^2(2-x^2)}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Dunque, sempre nell'insieme considerato, f è decrescente per $x \in [\sqrt{2}, \infty)$, crescente per $x \in [0,1)$ e per $x \in (1, \sqrt{2}]$. Il punto $x = \sqrt{2}$ è di massimo relativo. Si noti che $f(x) < -x$ per ogni $x > 1$, dunque f è sempre negativa in tale intervallo (e il suo grafico è sotto quello dell'asintoto obliquo). Inoltre l'informazione appena ottenuta sulla derivata mostra che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$. Si noti inoltre che

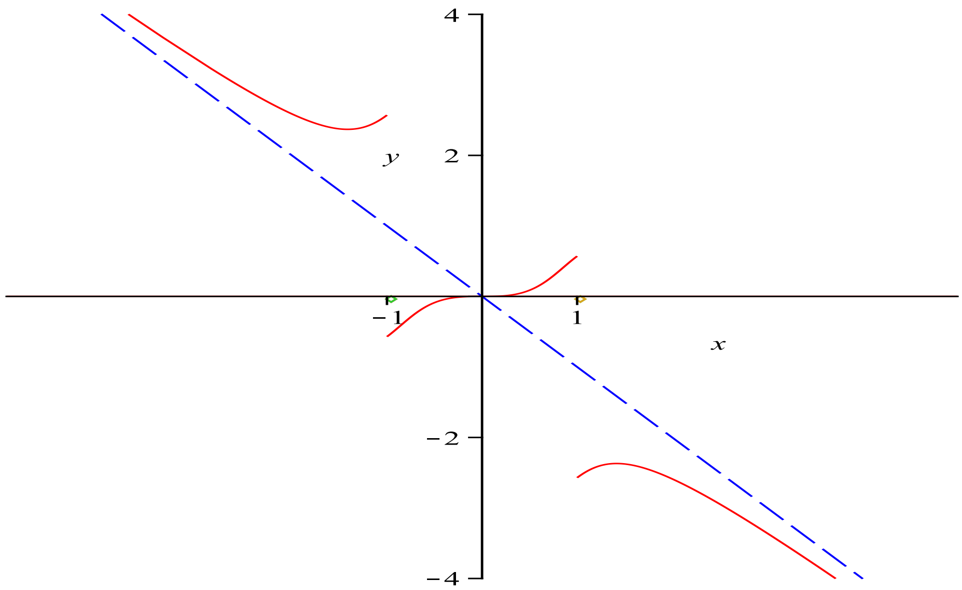
$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = 1.$$

Si noti infine che $f'(0) = 0$. La natura dell'origine sarà studiata a breve.

La derivata seconda risulta essere, sempre per $x \neq 1$:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^4 + 2x^2 - 2)}{(x^4 - x^2 + 1)^2}.$$

Ne segue che $f''(x)$ si annulla in $x = 0$ e, sempre nel dominio considerato, in $x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$. Essa è negativa per $x \in (\sqrt{\sqrt{3}-1}, 1)$ e per $x > 1$, dunque in ciascuno di tali intervalli la funzione è concava, mentre la derivata seconda è positiva per $x \in (0, \sqrt{\sqrt{3}-1})$, e in tale intervallo la funzione è convessa. Il punto $x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$ (che appartiene all'intervallo (0,1)) è di flesso per f. Lo studio appena svolto e la simmetria del grafico di f implicano inoltre che il punto $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale per f. In conclusione il grafico di f è il seguente:



4. (punti 4+2)

- Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}.$$

- Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Il cambio di variabile $\log x = t$ mostra che

$$\int \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^4 - 16}\,\mathrm{d}t.$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale. Calcoli elementari mostrano che vale la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{t}{t^4 - 16} = \frac{t}{8(t^2 - 4)} - \frac{t}{8(t^2 + 4)}.$$

L'integrale può dunque essere calcolato immediatamente:

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t &= \int \left(\frac{t}{8(t^2 - 4)} - \frac{t}{8(t^2 + 4)} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{16} \log \left| t^2 - 4 \right| - \frac{1}{16} \log(t^2 + 4) \\ &= \frac{1}{16} \log \left| \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4} \right|. \end{aligned}$$

Quindi, tornando alla variabile originaria:

$$\int \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16} \log \left| \frac{(\log x)^2 - 4}{(\log x)^2 + 4} \right|$$

avendo posto ad esempio uguale a zero la costante additiva.

Circa la seconda domanda, si noti che la funzione integranda $f(x)$ soddisfa

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x(\log x)^3} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Ciò implica che f è integrabile in senso generalizzato all'infinito. Quindi in particolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Essendo f positiva in un intorno dell'infinito, ciò implica immediatamente che anche il limite richiesto vale zero.

5. (punti 4) Discutere il concetto di convergenza di una serie numerica e i principali risultati relativi.

6. (punti 4) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.