| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A | | Prova scritta del 03/11/2023 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 14)

- Risolvere l'equazione, nella variabile $w \in \mathbb{C}$ e al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, $w^3 + aw^2 - aw - 1 = 0$. Stabilire in particolare per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni sono reali e per quali $a$ vi sono soluzioni che non sono reali.
- Si consideri ora la seguente equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$: $e^{3z} - 2e^{2z} + 2e^z - 1 = 0$. Risolvere tale equazione, rappresentare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso, e stabilire se esistono soluzioni, diverse da $z = 0$, di massimo o di minimo modulo, in caso affermativo determinandole.

**Soluzione**. Si noti che $w^3 + aw^2 - aw - 1 = (w-1)(w^2 + (a+1)w + 1)$. Vi è dunque la radice $w_1 = 1$ e inoltre le radici $w = (-1 - a + \sqrt{a^2 + 1 + 2a - 4})/2 = (-1 - a + \sqrt{a^2 + 2a - 3})/2$, dove la radice è intesa in senso complesso. Vale $a^2 + 2a - 3 \geq 0$ se e solo se $a \geq 1$ o $a \leq -3$. In tal caso le radici sono reali e, oltre a $w_1 = 1$, sono $w_{2,3} = (-1 - a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3})/2$ (tali radici sono coincidenti se $a = -3$ oppure $a = 1$), dove ora la radice è intesa in senso reale. Se invece $a \in (-3, 1)$ le radici, sempre oltre a $w_1 = 1$, sono $w_{2,3} = (-1 - a \pm i\sqrt{3 - a^2 - 2a})/2$, dove di nuovo la radice è intesa in senso reale.

Circa la seconda parte, si noti che occorre solamente porre $a = -2$, nel qual caso le radici della prima equazione sono $w_1 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$, $w_2 = (1 + i\sqrt{3})/2 = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $w_3 = (1 - i\sqrt{3})/2 = e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Occorre ora trovare i logaritmi complessi di tali tre numeri complessi. I possibili valori di $z$ sono quindi i seguenti:

$$\begin{aligned}
z_{1,k} &:= \log 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}; \\
z_{2,k} &:= \log 1 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} i(1 + 6k\pi), \ k \in \mathbb{Z}; \\
z_{3,k} &:= \log 1 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} i\,(6k\pi - 1), \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Chiaramente non vi sono soluzioni di massimo modulo. Le soluzioni di minimo modulo, eccettuata $z = 0$, sono chiaramente $\pm\frac{\pi}{3}i$.

**2.** (punti 18) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_a(x) = \left[1 + \sinh(x^2)\right]^{2a} - e^{a[1-\cos(2x)]} + \frac{1}{3}x^4.$$

- Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di $f_a$, centrato nell'origine.
- Utilizzare il punto precedente per determinare il segno di $f_a$ in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, motivando il risultato.
- Sia $f_a^{(2)} = f_a \circ f_a$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il grado dello primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di $f_a^{(2)}$, centrato nell'origine.

**Soluzione**. Valgono i seguenti sviluppi, sempre per $x \to 0$:

$$\sinh(x^2) = x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6);$$

$$\begin{aligned}
\left[1 + \sinh(x^2)\right]^{2a} &= \left[1 + x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]^{2a} = 1 + 2a\left[x^2 + \frac{x^6}{6}\right] + \frac{2a(2a-1)}{2}x^4 + \frac{2a(2a-1)(2a-2)}{6}x^6 + o(x^6) \\
&= 1 + 2ax^2 + a(2a-1)x^4 + \left(\frac{4a^3}{3} - 2a^2 + a\right)x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$1-\cos(2x) = 1-\left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}-\frac{64x^6}{720}+o(x^6)\right) = 2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6);$$

$$\begin{aligned} e^{a[1-\cos(2x)]} &= e^{a\left(2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6)\right)} = 1+a\left(2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6\right)+\frac{a^2}{2}\left(4x^4-\frac{8}{3}x^6\right)+\frac{a^3}{6}8x^6+o(x^6) \\ &= 1+2ax^2+\left(2a^2-\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6+o(x^6). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+2ax^2+a(2a-1)x^4+\left(\frac{4a^3}{3}-2a^2+a\right)x^6+ \\ &\quad -\left[1+2ax^2+\left(2a^2-\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6\right]+\frac{1}{3}x^4+o(x^6) \\ &= \frac{1-a}{3}x^4+\left(\frac{41}{45}a-\frac{2}{3}a^2\right)x^6+o(x^6). \end{aligned}$$

Ne segue che, per $a \neq 1$, il termine principale dello sviluppo di $f$ è $\frac{1-a}{3}x^4$, mentre se $a=1$ esso è $\frac{11}{45}x^6$.
Riguardo alla seconda domanda, si noti che se $f(x) = x^k + o(x^k)$ per $x \to 0$ e per qualche $k \geq 0$, allora evidentemente $f(x) = x^k(1+o(1))$, e ovviamente $1+o(1)$ è positivo in un opportuno intorno di $x=0$. Quindi $f$ ha il segno di $x^k$, sempre in un opportuno intorno di $x=0$. Ne segue, nel caso in questione, che:

- Se $a<1$, allora $f$ è positiva in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a>1$, allora $f$ è negativa in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a=1$, allora $f$ è positiva in un opportuno intorno di $x=0$.

Riguardo all'ultima domanda, si noti che, per quanto visto nel primo punto:

$$f_a^{(2)}(x) = (f_a \circ f_a)(x) = f_a\left(\frac{1-a}{3}x^4+\left(\frac{41}{45}a-\frac{2}{3}a^2\right)x^6+o(x^6)\right).$$

Ma allora, se $a \neq 1$, varrà sempre per quanto sopra che $f_a^{(2)}(x) \sim \frac{(1-a)^5}{3^5}x^{16}$ per $x \to 0$, dunque il grado richiesto è 16, mentre se $a=1$ allora $f_a^{(2)}(x) \sim \left(\frac{11}{45}\right)^7 x^{36}$ per $x \to 0$, dunque il grado richiesto è 36 (i coefficienti sono stati scritti per completezza, ma non erano richiesti).

| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B | | Prova scritta del 03/11/2023 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Codice persona: |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 14)

- Risolvere l'equazione, nella variabile $w \in \mathbb{C}$ e al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, $w^3 - aw^2 - aw + 1 = 0$. Stabilire in particolare per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni sono reali e per quali $a$ vi sono soluzioni che non sono reali.
- Si consideri ora la seguente equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$: $e^{3z}+2e^{2z}+2e^{z}+1 = 0$. Risolvere tale equazione, rappresentare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso, e stabilire se esistono soluzioni di massimo o di minimo modulo, in caso affermativo determinandole.

**Soluzione**. Si noti che $w^3 - aw^2 - aw - 1 = (w+1)(w^2 - (a+1)w + 1)$. Vi è dunque la radice $w_1 = -1$ e inoltre le radici $w = (1+a+\sqrt{a^2+1+2a-4})/2 = (1+a+\sqrt{a^2+2a-3})/2$, dove la radice è intesa in senso complesso. Vale $a^2+2a-3 \geq 0$ se e solo se $a \geq 1$ o $a \leq -3$. In tal caso le radici sono reali e, oltre a $w_1 = -1$, sono $w_{2,3} = (1+a \pm \sqrt{a^2+2a-3})/2$ (tali radici sono coincidenti se $a = -3$ oppure $a = 1$), dove ora la radice è intesa in senso reale. Se invece $a \in (-3, 1)$ le radici, sempre oltre a $w_1 = -1$, sono $w_{2,3} = (1+a \pm i\sqrt{3-a^2-2a})/2$, dove di nuovo la radice è intesa in senso reale.

Circa la seconda parte, si noti che occorre solamente porre $a = -2$, nel qual caso le radici della prima equazione sono $w_1 = -1 = e^{i\pi}$, $w_2 = (-1+i\sqrt{3})/2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $w_3 = (-1-i\sqrt{3})/2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Occorre ora trovare i logaritmi complessi di tali tre numeri complessi. I possibili valori di $z$ sono quindi i seguenti:

$$z_{1,k} := \log 1 + i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$z_{2,k} := \log 1 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{2}{3}\pi i(1+3k),\ k \in \mathbb{Z};$$
$$z_{3,k} := \log 1 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{2}{3}\pi i\,(3k-1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Chiaramente non vi sono soluzioni di massimo modulo. Le soluzioni di minimo modulo sono chiaramente $\pm\frac{2}{3}\pi i$.

**2.** (punti 18) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_a(x) = \left[1 + \sin\left(x^2\right)\right]^{2a} - e^{a[\cosh(2x)-1]} + \frac{5}{3}x^4.$$

- Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di $f_a$, centrato nell'origine.
- Utilizzare il punto precedente per determinare il segno di $f_a$ in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, motivando il risultato.
- Sia $f_a^{(2)} = f_a \circ f_a$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il grado dello primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di $f_a^{(2)}$, centrato nell'origine.

**Soluzione**. Valgono i seguenti sviluppi, sempre per $x \to 0$:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6);$$
$$\left[1+\sin(x^2)\right]^{2a} = \left[1 + x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]^{2a} = 1 + 2a\left[x^2 - \frac{x^6}{6}\right] + \frac{2a(2a-1)}{2}x^4 + \frac{2a(2a-1)(2a-2)}{6}x^6 + o(x^6)$$
$$= 1 + 2ax^2 + a(2a-1)x^4 + \left(\frac{4a^3}{3} - 2a^2 + \frac{a}{3}\right)x^6 + o(x^6).$$

Inoltre:

$$\cosh(2x)-1=\left(1+\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}+\frac{64x^6}{720}+o(x^6)\right)-1=2x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6);$$

$$\begin{aligned}e^{a[\cosh(2x)-1]}&=e^{a\left(2x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6)\right)}=1+a\left(2x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6\right)+\frac{a^2}{2}\left(4x^4+\frac{8}{3}x^6\right)+\frac{a^3}{6}8x^6+o(x^6)\\&=1+2ax^2+\left(2a^2+\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3+\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}f(x)&=1+2ax^2+a(2a-1)x^4+\left(\frac{4a^3}{3}-2a^2+\frac{a}{3}\right)x^6+\\&\quad-\left[1+2ax^2+\left(2a^2+\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3+\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6\right]+\frac{5}{3}x^4+o(x^6)\\&=\frac{5}{3}(1-a)x^4+\left(\frac{11}{45}a-\frac{10}{3}a^2\right)x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

Ne segue che, per $a\neq 1$, il termine principale dello sviluppo di $f$ è $\frac{5}{3}(1-a)x^4$, mentre se $a=1$ esso è $-\frac{139}{45}x^6$.
Riguardo alla seconda domanda, si noti che se $f(x)=x^k+o(x^k)$ per $x\to 0$ e per qualche $k\geq 0$, allora evidentemente $f(x)=x^k(1+o(1))$, e ovviamente $1+o(1)$ è positivo in un opportuno intorno di $x=0$. Quindi $f$ ha il segno di $x^k$, sempre in un opportuno intorno di $x=0$. Ne segue, nel caso in questione, che:

- Se $a>1$, allora $f$ è negativa in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a<1$, allora $f$ è positiva in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a=1$, allora $f$ è negativa in un opportuno intorno di $x=0$.

Riguardo all'ultima domanda, si noti che, per quanto visto nel primo punto:

$$f_a^{(2)}(x)=(f_a\circ f_a)(x)=f_a\left(\frac{5}{3}(1-a)x^4+\left(\frac{11}{45}a-\frac{10}{3}a^2\right)x^6+o(x^6)\right).$$

Ma allora, se $a\neq 1$, varrà sempre per quanto sopra che $f_a^{(2)}(x)\sim\left(\frac{5}{3}\right)^5(1-a)^5x^{16}$ per $x\to 0$, dunque il grado richiesto è 16, mentre se $a=1$ allora $f_a^{(2)}(x)\sim\left(\frac{139}{45}\right)^7x^{36}$ per $x\to 0$, dunque il grado richiesto è 36 (i coefficienti sono stati scritti per completezza, ma non erano richiesti).