Analisi Matematica I - 30 giugno 2025

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$e^{2z} - 5e^z + 4 = 0;$$

sia A l'insieme delle soluzioni dell'equazione. Determinare nel campo complesso l'insieme

$$B := \{t \in \mathbb{C} \,|\, t = iz,\, z \in A\}\,;$$

tracciare l'insieme B nel piano complesso. Determinare il punto nell'insieme A di minimo modulo e, se esiste, il punto di massimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Poniamo $w = e^z$, con $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'equazione diventa:

$$w^2 - 5w + 4 = 0\,,$$

le soluzioni sono $w = 4$ e $w = 1$.
Ora $z = \log w$ nel senso del logaritmo complesso:

$$w = 1 \Rightarrow z = \log 1 = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$w = 4 \Rightarrow z = \log 4 + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi:

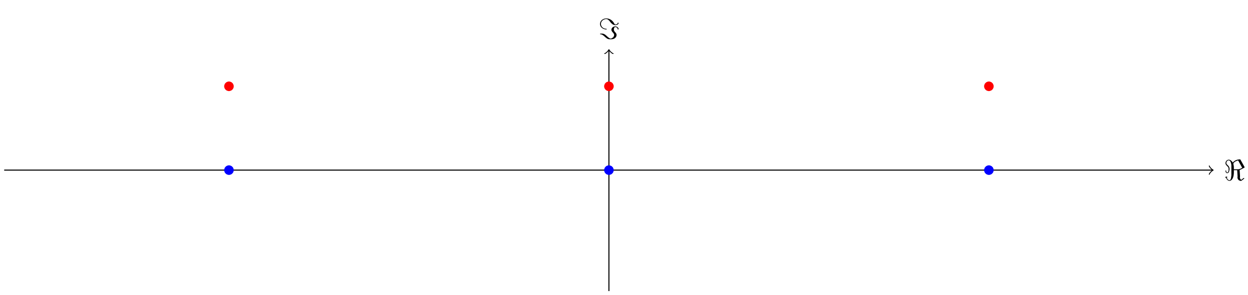
$$A = \{2\pi i k, \quad \log 4 + 2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Ora calcoliamo:

$$B = \{t = iz \mid z \in A\} \Rightarrow t = iz = \begin{cases} i \cdot 2\pi i k = -2\pi k & \text{(reale)} \\ i(\log 4 + 2\pi i k) = i \log 4 - 2\pi k & \text{(complesso)} \end{cases}$$

Quindi l'insieme B è costituito da:

- Una successione di numeri reali: $-2\pi k$
- Una successione di punti sul piano complesso: $i \log 4 - 2\pi k$



La soluzione di minimo modulo è $z = 0$. L'insieme A è illimitato, quindi non esiste la soluzione di massimo modulo.

Esercizio 2 8 punti

Calcolare le primitive di
$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}-1)}\,.$$
Successivamente, stabilire senza far uso della primitiva calcolata, se esistono i seguenti integrali impropri:
$$\int_1^2 f(x)\,dx, \qquad \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

Soluzione dell'esercizio 2

Poniamo:
$$t = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow \quad x = t^4 \quad \Rightarrow \quad dx = 4t^3\,dt$$
Sostituendo, l'integrale diventa:
$$\int \frac{t}{(1+t)(t^2-1)} \cdot 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^4}{(1+t)(t^2-1)}\,dt = 4\int \frac{t^4}{(1+t)^2(t-1)}\,dt$$
Effettuando la divisione di polinomi abbiamo:
$$\frac{t^4}{(1+t)^2(t-1)} = t-1+\frac{2t^2-1}{(1+t)^2(t-1)}$$
Con alcuni calcoli, la scomposizione in fratti semplici dell'ultima funzione scritta risulta:
$$\frac{2t^2+1}{(1+t)^2(t-1)} = \frac{1}{4(t-1)} + \frac{7}{4(1+t)} - \frac{1}{2(1+t)^2}.$$
L'integrazione è ora immediata:
$$\begin{aligned} &4\int \left(t-1+\frac{1}{4(t-1)}+\frac{7}{4(1+t)}-\frac{1}{2(1+t)^2}\right)dt \\ &= 2t^2-4t+\log|t-1|+7\log|1+t|+\frac{2}{1+t}+C \end{aligned}$$
Tornando alla variabile originaria si ha:
$$2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+\log\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+7\log(\sqrt[4]{x}+1)+\frac{2}{1+\sqrt[4]{x}}+C,$$
con C costante arbitraria.

Per rispondere alla domanda successiva, notiamo che $\sqrt[4]{x}-1 = \frac{x-1}{4}+o(x-1)$ per $x \to 1$ (sviluppare in un intorno di $x=1$), e dunque il primo integrale improprio non esiste. Inoltre $f(x) \sim x^{-1/2}$ per $x \to +\infty$, quindi neppure il secondo integrale improprio esiste.

Esercizio 3 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x-1}}{x-2},$$

e disegnarne un grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni sul numero di eventuali flessi elementarmente deducibili dal resto dello studio.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita se $x \in [1,2) \cup (2,+\infty)$. Si ha:

$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} = +\infty.$$

Dunque, $x = 2$ è asintoto verticale bilatero. Non vi sono asintoti obliqui dato che la crescita della funzione è esponenziale. Si vede con calcoli elementari che, per $x \in (1,2) \cup (2,+\infty)$:

$$f'(x) = \frac{e^x(2x^2 - 7x + 4)}{2(x-2)^2\sqrt{x-1}}.$$

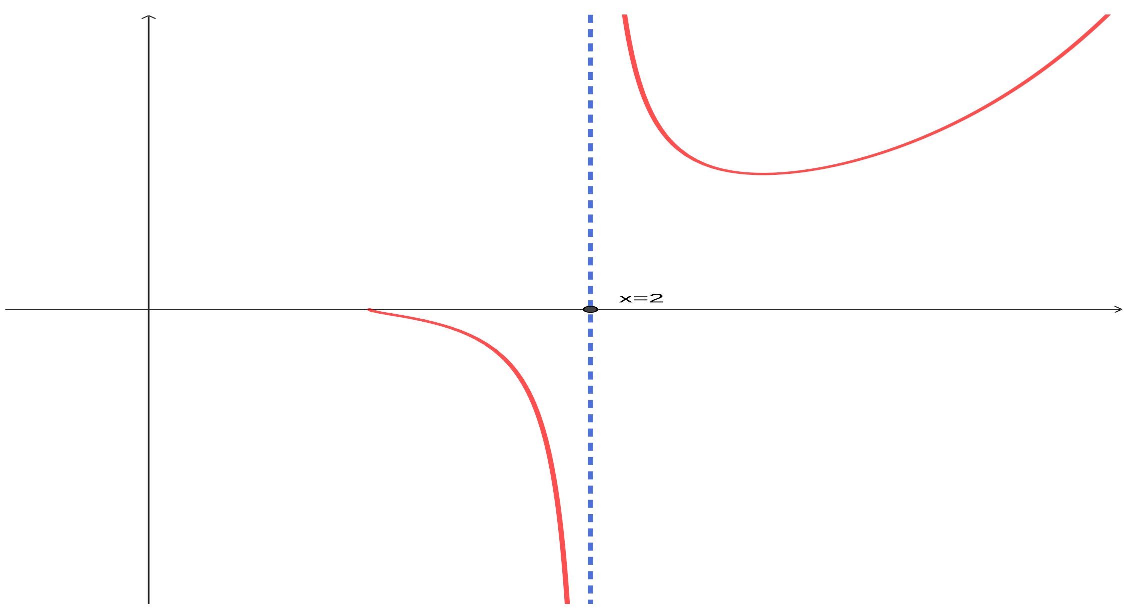
La funzione non ammette derivata destra in $x = 1$ e vale

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty.$$

Dunque, la tangente alla curva tende a diventare verticale per $x \to 1^+$. Il segno e gli zeri di f' coincidono con quelli di $2x^2 - 7x + 4$. Tale polinomio si annulla per $x \in (7 \pm \sqrt{17})/4$. Chiaramente, $(7 - \sqrt{17})/4 < 1$ e quindi tale zero non è accettabile. Si ha quindi:

$$f'(x) > 0 \text{ se } x > \frac{7+\sqrt{17}}{4}, \quad f'(x) < 0 \text{ se } x \in (1,2) \cup \left(2, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right).$$

La funzione è decrescente se $x \in (1,2)$ e se $x \in \left(2, \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)$, crescente se $x > \frac{7+\sqrt{17}}{4}$. Il punto $x = \frac{7+\sqrt{17}}{4}$ è di minimo relativo. Non vi sono estremi assoluti. Lo studio svolto, in particolare il calcolo di $\lim_{x\to 1^+} f'(x)$, mostra che vi è almeno un flesso in $(1,2)$. Il grafico è il seguente:



Esercizio 4 7 punti

Determinare la funzione limite per la successione di funzioni

$$f_n(x) = nx\left(x - n\log\left(\frac{n+x}{n}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

e determinare se la convergenza è uniforme su $\mathbb{R}$.

Soluzione dell'esercizio 4

Fissato $x \in \mathbb{R}$, studiamo il limite per $n \to +\infty$ di

$$f_n(x) = nx\left(x - n\log\left(\frac{n+x}{n}\right)\right) = nx^2 - n^2 x\log\left(\frac{n+x}{n}\right)$$

Lo sviluppo di Taylor di $\log\left(\frac{n+x}{n}\right) = \log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ è

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x}{n}\right)^3\right)$$

quindi

$$n^2 x\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = n^2 x\left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = nx^2 - \frac{x^3}{2} + o(1)$$

e

$$f_n(x) = nx^2 - n^2 x\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = nx^2 - \left(nx^2 - \frac{x^3}{2} + o(1)\right) = \frac{x^3}{2} + o(1)\,.$$

Ne segue che, per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{x^3}{2}\,.$$

Poiché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| nx^2 - n^2 x\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x^3}{2}\right| = +\infty\,,$$

la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$.