

Cognome:

Nome:

Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 6 punti

Risolvere l'equazione

$$e^{2z} - (2+i)e^z + 1+i = 0.$$

Soluzione dell'esercizio 1

Ponendo $w = e^z$ si ottiene l'equazione $w^2 - (2+i)w + 1+i = 0$, che ha soluzioni $w = 1$ e $w = 1+i$.
 $e^z = 1$ se e solo se $z = 2k\pi i$.

Per risolvere $e^z = 1+i$, sia $z = x+iy$. Poiché $|1+i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1+i) = \pi/4$, allora l'equazione si può scrivere come $e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, quindi $x = \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2$, mentre $y = \pi/4 + 2k\pi$, quindi $z = \frac{1}{2} \log 2 + i\pi/4 + 2k\pi i$.

Esercizio 2 10 punti

Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(|x - 1| + 1) - \log(|x + 1| + 1).$$

Soluzione dell'esercizio 2

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile per ogni $x \neq \pm 1$. I punti $x = \pm 1$ vanno studiati a parte. Osserviamo che $f(-x) = \log(|-x - 1| + 1) - \log(|-x + 1| + 1) = \log(|x + 1| + 1) - \log(|x - 1| + 1) = -f(x)$, ossia la funzione è dispari. La studiamo allora per $x \in [0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \log(2 - x) - \log(x + 2) & \text{se } x < 1 \\ \log(x) - \log(x + 2) & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

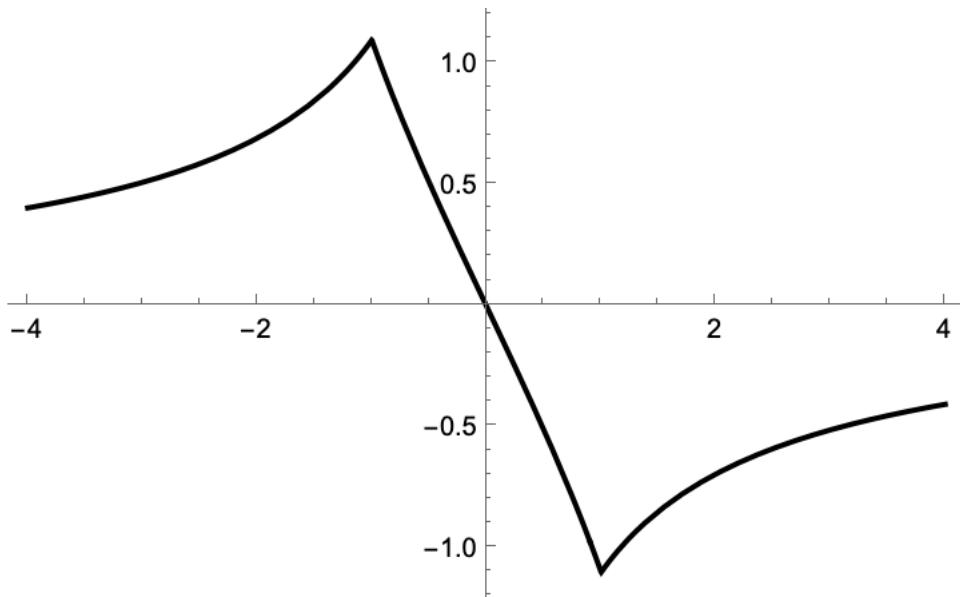
quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $f'(x) < 0$ per $x \in [0, 1)$ e $f'(x) > 0$ per $x > 1$, inoltre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -4/3$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2/3$, quindi $x = 1$ è un punto angoloso.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{8x}{(x^2-4)^2} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{2(2x+2)}{(x^2+2x)^2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $f''(x) < 0$ per $x \in [0, 1)$ e $x > 1$, quindi la funzione è concava in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Essendo dispari, segue che $x = 0$ è un punto di flesso. Poiché $f(x) = \log \frac{x}{x+2}$ quando $x > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.



Esercizio 3 8 punti

Stabilire se la seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} - \left(n + 1 - \frac{1}{2n} \right) \right].$$

converge, diverge o è indeterminata. Successivamente stabilire per quali $x \neq 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} - \left(n + 1 - \frac{1}{2n} \right) \right] \frac{1}{(2x)^n}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Vale, qui e in seguito per $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{5}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Detto a_n il termine generale della prima serie data, si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= n \left[1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{5}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] - \left(n + 1 - \frac{1}{2n} \right) \\ &= -\frac{5}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ciò mostra in particolare che il termine generale della serie è definitivamente negativo. Per il criterio del confronto asintotico, e per il fatto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la prima serie assegnata converge. Vale inoltre, dai calcoli precedenti, $a_n \sim -\frac{5}{6n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$. Usando, a propria scelta, o il criterio della radice o quello del rapporto (si ricordi in quest'ultimo caso che $n^{1/n} \rightarrow 1$ se $n \rightarrow +\infty$), vale allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \quad (\text{o anche } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1),$$

e quindi, posto $w = \frac{1}{2x}$, che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Dunque la seconda serie assegnata converge se $|\frac{1}{2x}| < 1$, ovvero se $|x| > \frac{1}{2}$. Essa non converge se $|\frac{1}{2x}| > 1$, ovvero se $|x| < \frac{1}{2}$. Se $x = \frac{1}{2}$ oppure $x = -\frac{1}{2}$ la serie coincide con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

rispettivamente. Entrambe le serie convergono, in quanto per il primo punto svolto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge anche assolutamente.

Esercizio 4 8 punti

Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x^3 - x)\sqrt{x^2 - 4}}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}.$$

Successivamente, senza far uso della formula esplicita per la primitiva, calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \frac{(t^3 - t)\sqrt{t^2 - 4}}{1 + \sqrt{t^2 - 4}} dt$$

Soluzione dell'esercizio 4

Poniamo $\sqrt{x^2 - 4} = t$. Allora $x^2 - 4 = t^2$, $x dx = t dt$. Quindi:

$$\int f(x) dx = \int \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{1 + \sqrt{x^2 - 4}} x dx = \int \frac{(t^2 + 3)t}{1 + t} t dt.$$

Svolgendo la divisione otteniamo:

$$\frac{t^4 + 3t^2}{1 + t} = t^3 - t^2 + 4t - 4 + \frac{4}{1 + t}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{(t^2 + 3)t}{1 + t} t dt = \int \left(t^3 - t^2 + 4t - 4 + \frac{4}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 4t + 4 \log|t+1| + c \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 4)^2 - \frac{1}{3}(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} + 2(x^2 - 4) - 4\sqrt{x^2 - 4} + 4 \log(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + c \\ &= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2x^2 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 4}(x^2 - 4 + 12) + 4 \log(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + c \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 4}(x^2 + 8) + 4 \log(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + c, \end{aligned}$$

dove abbiamo notato che $1 + \sqrt{x^2 - 4} > 0$ nel dominio opportuno e abbiamo riassorbito i termini costanti nella costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$.

Circa la seconda domanda basta notare che

$$\frac{(t^3 - t)\sqrt{t^2 - 4}}{1 + \sqrt{t^2 - 4}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

cosicché la funzione integranda è maggiore di uno per t abbastanza grande, e dunque per il criterio del confronto il limite richiesto è $+\infty$.

Cognome:

Nome:

Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 6 punti

Risolvere l'equazione

$$e^{2z} - (2 - i)e^z + 1 - i = 0.$$

Soluzione dell'esercizio 1

Ponendo $w = e^z$ si ottiene l'equazione $w^2 - (2 - i)w + 1 - i = 0$, che ha soluzioni $w = 1$ e $w = 1 - i$.
 $e^z = 1$ se e solo se $z = 2k\pi i$.

Per risolvere $e^z = 1 - i$, sia $z = x + iy$. Poiché $|1 - i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1 - i) = -\pi/4$, allora l'equazione si può scrivere come $e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$, quindi $x = \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2$, mentre $y = -\pi/4 + 2k\pi$, quindi $z = \frac{1}{2} \log 2 - i\pi/4 + 2k\pi i$.

Esercizio 2 10 punti

Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(|x - 1| + 1) + \log(|x + 1| + 1).$$

Soluzione dell'esercizio 2

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è derivabile per ogni $x \neq \pm 1$. I punti $x = \pm 1$ vanno studiati a parte. Osserviamo che $f(-x) = \log(|-x - 1| + 1) + \log(|-x + 1| + 1) = \log(|x + 1| + 1) + \log(|x - 1| + 1) = f(x)$, ossia la funzione è pari. La studiamo allora per $x \in [0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \log(2 - x) + \log(x + 2) & \text{se } x < 1 \\ \log(x) + \log(x + 2) & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

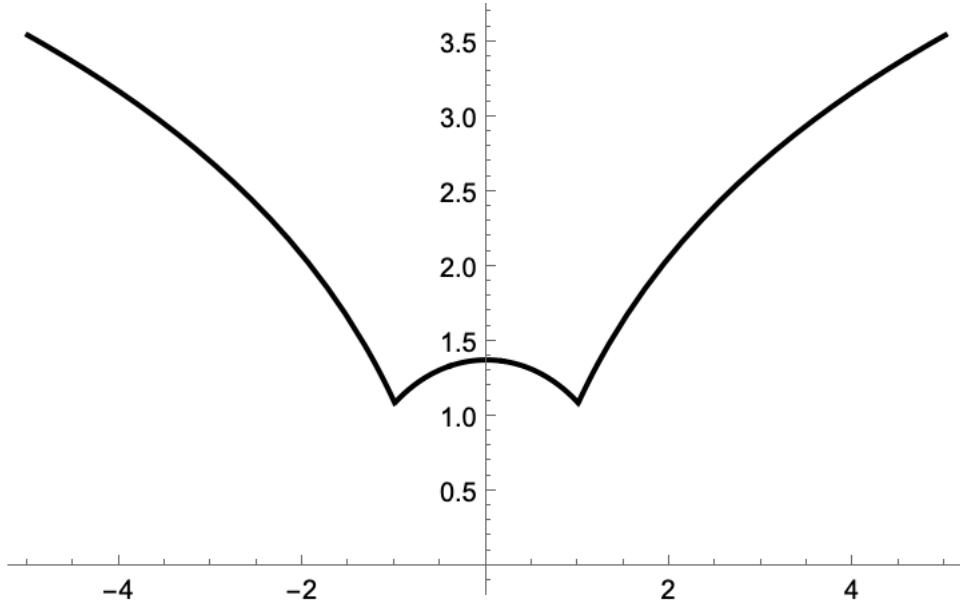
quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{2x+2}{x(x+2)} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $f'(x) < 0$ per $x \in [0, 1)$ e $f'(x) > 0$ per $x > 1$, inoltre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2/3$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 4/3$, quindi $x = 1$ è un punto angoloso.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2(4+x^2)}{(x-2)^2(x+2)^2} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{2(x^2+2x+2)}{x^2(2+x)^2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $f''(x) < 0$ per $x \in [0, 1)$ e $x > 1$, quindi la funzione è concava in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Essendo dispari, segue che $x = 0$ è un punto di flesso. Poiché $f(x) = \log(x(x+2))$ quando $x > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



Esercizio 3 8 punti

Stabilire se la seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n e^{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)} - \left(n - 1 + \frac{3}{2n}\right) \right].$$

converge, diverge o è indeterminata. Successivamente stabilire per quali $x \neq 0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n e^{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)} - \left(n - 1 + \frac{3}{2n}\right) \right] \frac{1}{(2x)^n}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Vale, qui e in seguito per $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} e^{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)} &= 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - \frac{7}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Detto a_n il termine generale della prima serie data, si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= n \left[1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - \frac{7}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] - \left(n - 1 + \frac{3}{2n}\right) \\ &= -\frac{7}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ciò mostra in particolare che il termine generale della serie è definitivamente negativo. Per il criterio del confronto asintotico, e per il fatto che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la prima serie assegnata converge. Vale inoltre, dai calcoli precedenti, $a_n \sim -\frac{7}{6n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$. Usando, a propria scelta, o il criterio della radice o quello del rapporto (si ricordi in quest'ultimo caso che $n^{1/n} \rightarrow 1$ se $n \rightarrow +\infty$), vale allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \quad (\text{o anche } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1),$$

e quindi, posto $w = \frac{1}{2x}$, che la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Dunque la seconda serie assegnata converge se $|\frac{1}{2x}| < 1$, ovvero se $|x| > \frac{1}{2}$. Essa non converge se $|\frac{1}{2x}| > 1$, ovvero se $|x| < \frac{1}{2}$. Se $x = \frac{1}{2}$ oppure $x = -\frac{1}{2}$ la serie coincide con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

rispettivamente. Entrambe le serie convergono, in quanto per il primo punto svolto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge anche assolutamente.

Esercizio 4 8 punti

Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x)\sqrt{x^2 - 4}}{1 + \sqrt{x^2 - 4}}.$$

Successivamente, senza far uso della formula esplicita per la primitiva, calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \frac{(t^3 - 2t)\sqrt{t^2 - 4}}{1 + \sqrt{t^2 - 4}} dt$$

Soluzione dell'esercizio 4

Poniamo $\sqrt{x^2 - 4} = t$. Allora $x^2 - 4 = t^2$, $x dx = t dt$. Quindi:

$$\int f(x) dx = \int \frac{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 4}}{1 + \sqrt{x^2 - 4}} x dx = \int \frac{(t^2 + 2)t}{1 + t} t dt.$$

Svolgendo la divisione otteniamo:

$$\frac{t^4 + 2t^2}{1 + t} = t^3 - t^2 + 3t - 3 + \frac{3}{1 + t}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{(t^2 + 2)t}{1 + t} t dt = \int \left(t^3 - t^2 + 3t - 3 + \frac{3}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} - 3t + 3 \log|t+1| + c \\ &= \frac{1}{4}(x^2 - 4)^2 - \frac{1}{3}(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(x^2 - 4) - 3\sqrt{x^2 - 4} + 3 \log(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + c \\ &= \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 4}(x^2 - 4 + 9) + 3 \log(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + c \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 4}(x^2 + 5) + 3 \log(1 + \sqrt{x^2 - 4}) + c, \end{aligned}$$

dove abbiamo notato che $1 + \sqrt{x^2 - 4} > 0$ nel dominio opportuno e abbiamo riassorbito i termini costanti nella costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$.

Circa la seconda domanda basta notare che

$$\frac{(t^3 - 2t)\sqrt{t^2 - 4}}{1 + \sqrt{t^2 - 4}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

cosicché la funzione integranda è maggiore di uno per t abbastanza grande, e dunque per il criterio del confronto il limite richiesto è $+\infty$.