Marco Contedini

LEZIONE 1

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

17 settembre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Sommatorie

1. Dimostrare:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & \text{se } q = 1, \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1. \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \tag{4}$$

2 Binomio di Newton

2. Determinare il coefficiente del monomio di ottavo grado nello sviluppo di

$$\left(2x^2 + \frac{1}{3x}\right)^{10}$$

3. Provare che:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \tag{5}$$

3 Principio di induzione

4. Dimostrare che:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^+$

   $$\sum_{k=n}^{2n} k \quad \text{è multiplo di 3}$$

   (b) Per $\alpha \geq -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}^+$, si ha:

   $$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \tag{6}$$

4 Numeri Complessi

5. Semplificare le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{ll} a) & (1+2i)^5 + (2-i)^2(1+2i)^3 = \\ b) & \dfrac{3+2i}{3+i} = \end{array}$$

6. Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$$\frac{2-2i}{3}, \qquad \sqrt{3}+i, \qquad 1-i\sqrt{3}.$$

7. Calcolare:

$$a) \qquad \frac{1}{(1+i)^{15}}$$

$$b) \qquad \left\{\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2i}\right\}^{-5}$$

5 Esercizi consigliati

1. Calcolare:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{7}$$

2. Calcolare:

$$a) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$b) \qquad \sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1}$$

$$c) \qquad \sum_{k=1}^{n} (2k-3)^2$$

$$d) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4-k^3-3k^2-k+1}{k^2+k}$$

3. Determinare i coefficienti di x^{-6} ed il termine noto di

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{x}\right)^9$$

4. Provare per induzione che 19^n+8 è multiplo di 9 $\forall n \in \mathbb{N}$.

5. Verificare per induzione che:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{8}$$

6. Verificare la seguente disuguaglianza per induzione:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 1+(a_1+a_2+\dots+a_n) \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad a_i \geq 0 \tag{9}$$

7. Calcolare:

$$a) \qquad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \qquad\qquad b) \qquad (\sqrt{3}-i)^{10}$$

6 Soluzioni

1. **Sommatorie:**

1) La (1) è chiamata **sommatoria della progressione geometrica di ragione** q.
Dimostrazione diretta:
Dal prodotto notevole:

$$(1-q)(1+q+q^2+...+q^n) = 1-q^{n+1},$$

dividendo per $1-q$ entrambi i membri segue l'asserto.
Dimostrazione per induzione:
L'identità (1) è vera per $n=0$. Sia, per ipotesi, (1) vera per n, allora:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q},$$

vale a dire che l'identità (1) è vera anche per $n+1$.
2) Dimostrazione diretta: Possiamo scrivere, con un opportuno riordinamento dei termini:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n+$$
$$+n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1$$

Sommando i termini in colonna si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} 1+n=n+1 \\ 2+(n-1)=n+1 \\ 3+(n-2)=n+1 \\ .... \\ (n-1)+2=n+1 \\ n+1=n+1 \end{array}\right\} \quad n \text{ addizioni con il medesimo risultato}$$

quindi:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$$

da cui, dividendo per 2 entrambi i membri si ottiene l'asserto.
Dimostrazione per induzione:
L'identità (2) è vera per $n=0$.
Posta vera per n, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

3) Dimostrazione diretta:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}k-n=n(n+1)-n=n^2$$

Dimostrazione per induzione:
L'identità (3) è vera per $n=1$.
Posta vera per n, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

4) Dimostrazione diretta:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Dimostrazione per induzione:
La (4) è nota come **sommatoria di Mengoli** ed è banalmente vera per $n=1$.
Posta vera per n, si ha:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

2. **Binomio di Newton**

2. Per determinare i coefficienti di x^8 ed il termine noto, occorre applicare la formula di Newton per lo sviluppo della potenza n-esima del binomio:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}. \tag{10}$$

Si ricorda che il coefficiente binomiale è così definito:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Applichiamo la formula di Newton con $a = 2x^2$ e $b = \frac{1}{3x}$. Si ha:

$$\begin{aligned}\left(2x^2 + \frac{1}{3x}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2x^2)^k \left(\frac{1}{3x}\right)^{10-k} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{3k-10} 2^k 3^{k-10}\end{aligned}$$

Poichè $3k - 10 = 8$ solo se $k = 6$, segue che il termine di ottavo grado nella variabile x è dato da:

$$\binom{10}{6} 2^6 \cdot 3^{-4} x^8 = \frac{4480}{27} x^8$$

3. Ponendo $a = 1$ e $b = 1$ nella formula di Newton (10) segue subito l'asserto. Esplicitando i coefficienti binoiali a secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

3. **Principio di induzione:**

(a) Per $n = 1$ la proprietà è banalmente verificata.
Sia vero per ipotesi che:

$$\sum_{k=n}^{2n} k = 3p$$

per un valore $p \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\sum_{k=n+1}^{2(n+1)} k = \sum_{k=n}^{2n} k - n + (2n+1) + (2n+2) = 3(p+n+1)$$

Pertanto la tesi è provata per induzione.

(b) Se $n = 1$ La disuguaglianza si riduce alla banale identità $1 + \alpha = 1 + \alpha$.
Sia ora la disuguaglianza vera per n generico.

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{n+1} &= (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geq \quad \text{se } \alpha \geq -1 \\ &\geq (1+\alpha)(1+n\alpha) = \\ &= 1 + \alpha + n\alpha + n\alpha^2 \geq \\ &\geq 1 + (n+1)\alpha\end{aligned}$$

Si può dimostrare che la disuguaglianza vale per ogni α se n è pari.

4. **Numeri complessi**

5. Espressioni numeriche:

$a)$
$$\begin{aligned}(1+2i)^5+(2-i)^2(1+2i)^3 &= 1+5\cdot 2i+10\cdot(2i)^2+10\cdot(2i)^3+5\cdot(2i)^4+(2i)^5+\\ &+(4-4i-1)(1+6i-12-8i)=\\ &=1+10i-40-80i+80+32i+(3-4i)(-11-2i)\\ &=41-38i-33-6i+44i-8=\\ &=0.\end{aligned}$$

Altrimenti si può raccogliere $(1+2i)^3$:

$$\begin{aligned}(1+2i)^5+(2-i)^2(1+2i)^3 &= (1+2i)^3\left[(1+2i)^2+(2-i)^2\right]\\ &=(1+2i)^3\,[1-4+4i+4-1-4i]=0\end{aligned}$$

$b)$
$$\frac{3+2i}{3+i}=\frac{(3+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{9-3i+6i+2}{9+1}=\frac{11+3i}{10}$$

6. Occorre determinare modulo e fase. Sia $z=x+iy$, per calcolare il modulo si utilizza la formula: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ per determinare l'angolo θ occorre invertire le formule $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\sin\theta$.

$$z=\frac{2-2i}{3}\quad\rightarrow\quad |z|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad \theta=\frac{7}{4}\pi\quad z=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{7}{4}\pi}$$

$$z=\sqrt{3}+i\quad\rightarrow\quad |z|=2\quad \theta=\frac{\pi}{6}\quad z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z=1-i\sqrt{3}\quad\rightarrow\quad |z|=2\quad \theta=\frac{5}{3}\pi\quad z=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=2e^{i\frac{5}{3}\pi}$$

7. D'ora in poi, per semplicità, si preferisce usare la rappresentazione esponenziale, anzichè trigonometrica: si prenda come definizione di esponenziale la relazione: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

$a)$
$$\begin{aligned}(1+i)^{-15} &= 2^{-15/2}\exp\left(\frac{1}{4}\pi i\right)^{-15}=2^{-15/2}\exp\left(-\frac{15}{4}\pi i\right)=2^{-15/2}\exp\left(\frac{1}{4}\pi i-4\pi i\right)=\\ &=2^{-15/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{-15/2}2^{-1/2}(1+i)=\frac{1+i}{256}\end{aligned}$$

b) Siano: $z=\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2i}$, $z_1=1-i=\sqrt{2}e^{i\pi 7/4}$, $z_2=1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}$ e $z_3=2i=2e^{i\pi/2}$. Allora:

$$z=\frac{\sqrt{2}e^{i\pi 7/4}\cdot 2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/2}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\pi}=\sqrt{2}e^{i\frac{19}{12}\pi}$$

Allora, dato che $\frac{95}{12}\pi=8\pi-\frac{1}{12}\pi$:

$$z^{-5}=2^{-\frac{5}{2}}e^{-\frac{95}{12}i\pi}=\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{i\pi/12}$$

7 Soluzioni degli esercizi consigliati

1. Dimostrazione diretta:
   Siano:
   $$I_1 = \sum_{k=1}^{n} k \qquad I_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad I_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$
   Si ha:
   $$I_3 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - (n+1)^3 + 1 = I_3 + 3I_2 + 3I_1 + \sum_{k=1}^{n} 1 - (n+1)^3 + 1$$
   Quindi:
   $$\begin{aligned} 3I_2 &= -3I_2 - n + (n+1)^3 - 1 = \\ &= -3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) + (n+1)^3 = \\ &= (n+1)\frac{2(n+1)^2 - 3n - 2}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \end{aligned}$$
   Dividendo per 3 il primo e l'ultimo membro si ottiene l'asserto.
   Dimostrazione per induzione:
   La (7) è banalmente vera per $n = 1$.
   Posta vera per n, si ha:
   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

2. (a) La sommatoria è una variante della nota serie di Mengoli:
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$
   (b) Utilizzando la (1):
   $$\sum_{k=1}^{n} 3^{2k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 9^k = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} 9^k - 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1\right) = \frac{3}{8}\left(9^n - 1\right).$$
   (c) Sviluppando il quadrato del binomio:
   $$\sum_{k=1}^{n} (2k-3)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(4k^2 - 12k + 9\right) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 12\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 9$$

ed utilizzando le (2) e (7), si ha:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-3)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 6n(n+1) + 9n = \frac{n(4n^2-12n+11)}{3}$$

(d) Operando la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{rr|l} k^4 - k^3 - 3k^2 - k & +1 & k^2+k \\ \cline{3-3} \dots & & k^2-2k-1 \\ & +1 & \end{array}$$

possiamo quindi scrivere che:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4-k^3-3k^2-k+1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2+k} + k^2 - 2k - 1\right).$$

Applicando le formule (2), (7) e (4) si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k} + \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1 &= \frac{n}{n+1} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) - n \\ &= \frac{n(2n^3-n^2-14n-5)}{6(n+1)} \end{aligned}$$

3. Per determinare i coefficienti di x^{-6} ed il termine noto, occorre applicare la formula di Newton per lo sviluppo della potenza n-esima del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

Si ricorda che il coefficiente binomiale è così definito:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x}\right)^9 &= \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^k\left(-\frac{1}{x}\right)^{9-k} \\ &= \sum_{k=0}^{9}(-1)^{9-k}\binom{9}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k x^{\frac{k}{2}}x^{k-9} \\ &= \sum_{k=0}^{9}(-1)^{9-k}\binom{9}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k x^{\frac{3}{2}k-9} \end{aligned}$$

Il termine noto è il coefficiente di grado zero nella variabile x, quindi: $\frac{3}{2}k - 9 = 0 \Rightarrow k = 6$. Si ha

$$(-1)^{9-6}\binom{9}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = -\frac{21}{16}$$

Il coefficiente di x^{-6} implica $\frac{3}{2}k - 9 = -6 \Rightarrow k = 2$. Si ha

$$(-1)^{9-2}\binom{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-6} = -9x^{-6}$$

4. È diretto verificare che l'identità è vera per $n = 0$.
   Posta vera l'identità anche per n generico, ossia, supponendo che esista un numero naturale p (non nullo) tale che:

$$19^n + 8 = 9p$$

   Allora:

$$\begin{aligned} 19^{n+1} + 8 &= 19 \cdot 19^n + 8 = \\ &= 19(19^n + 8 - 8) + 8 = \\ &= 19(9p - 8) + 8 = \\ &= 9 \cdot 19 \cdot p - 8(19 - 1) \\ &= 9(19p - 16) \end{aligned}$$

   poichè $19p - 16$ è un numero naturale la tesi è dimostrata.

5. Sia $n = 1$. Allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos x &= \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \\ \frac{1}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - \sin^3\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \\ \frac{3 - 4\sin^2\frac{x}{2}}{2} &= \frac{3\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{2} \\ \frac{3 - 4\sin^2\frac{x}{2}}{2} &= \frac{3 - 4\sin^2\frac{x}{2}}{2} \end{aligned}$$

   Posta vera per n e ricordando che $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ (nota come prima formula di Werner), abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1}\cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx + \cos(n+1)x &= \\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} + \cos(n+1)x = \\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + 2\sin\frac{x}{2}\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(\frac{1}{2}+n+1)x + \sin(\frac{1}{2}-n-1)x}{2\sin\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(n+\frac{3}{2})x - \sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin(n+\frac{3}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

ovvero la tesi di induzione.

6. La disuguaglianza (9) è una generalizzazione della (6).
Dimostrazione per induzione:
Se $n = 1$ la (9) è verificata come uguaglianza. Posta vera per n,

$$\begin{aligned}(1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq (1+a_1+\ldots+a_n)(1+a_{n+1})\\ &= 1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_1a_{n+1}+\ldots+a_na_{n+1}\\ &\geq 1+a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}.\end{aligned}$$

7. a)
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right]^4 = \left[\frac{-2i}{2}\right]^4 = [-i]^4 = 1$$

b)

$$(\sqrt{3}-i)^{10} = 2^{10}\exp\left(\frac{11}{6}\pi i\right)^{10} = 2^{10}\exp\left(\frac{55}{3}\pi i\right) = 2^{10}\exp\left(\frac{1}{3}\pi i + 18\pi i\right) =$$
$$= 2^{10}\exp\left(\frac{1}{3}\pi i\right) = 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^9(1+i\sqrt{3})$$