Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 03/11/2023
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 14)

- Risolvere l'equazione, nella variabile $w \in \mathbb{C}$ e al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, $w^3 + aw^2 - aw - 1 = 0$. Stabilire in particolare per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni sono reali e per quali a vi sono soluzioni che non sono reali.
- Si consideri ora la seguente equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$: $e^{3z} - 2e^{2z} + 2e^z - 1 = 0$. Risolvere tale equazione, rappresentare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso, e stabilire se esistono soluzioni, diverse da $z = 0$, di massimo o di minimo modulo, in caso affermativo determinandole.

Soluzione. Si noti che $w^3 + aw^2 - aw - 1 = (w-1)(w^2 + (a+1)w + 1)$. Vi è dunque la radice $w_1 = 1$ e inoltre le radici $w = (-1 - a + \sqrt{a^2 + 1 + 2a - 4})/2 = (-1 - a + \sqrt{a^2 + 2a - 3})/2$, dove la radice è intesa in senso complesso. Vale $a^2 + 2a - 3 \geq 0$ se e solo se $a \geq 1$ o $a \leq -3$. In tal caso le radici sono reali e, oltre a $w_1 = 1$, sono $w_{2,3} = (-1 - a \pm \sqrt{a^2 + 2a - 3})/2$ (tali radici sono coincidenti se $a = -3$ oppure $a = 1$), dove ora la radice è intesa in senso reale. Se invece $a \in (-3, 1)$ le radici, sempre oltre a $w_1 = 1$, sono $w_{2,3} = (-1 - a \pm i\sqrt{3 - a^2 - 2a})/2$, dove di nuovo la radice è intesa in senso reale.

Circa la seconda parte, si noti che occorre solamente porre $a = -2$, nel qual caso le radici della prima equazione sono $w_1 = 1 = 1 \cdot e^{i0}$, $w_2 = (1 + i\sqrt{3})/2 = e^{\frac{\pi i}{3}}$, $w_3 = (1 - i\sqrt{3})/2 = e^{-\frac{\pi i}{3}}$. Occorre ora trovare i logaritmi complessi di tali tre numeri complessi. I possibili valori di z sono quindi i seguenti:

$$\begin{aligned} z_{1,k} &:= \log 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}; \\ z_{2,k} &:= \log 1 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} i(1 + 6k\pi), \ k \in \mathbb{Z}; \\ z_{3,k} &:= \log 1 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} i\,(6k\pi - 1), \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chiaramente non vi sono soluzioni di massimo modulo. Le soluzioni di minimo modulo, eccettuata $z = 0$, sono chiaramente $\pm\frac{\pi}{3} i$.

2. (punti 18) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_a(x) = \left[1 + \sinh(x^2)\right]^{2a} - e^{a[1-\cos(2x)]} + \frac{1}{3}x^4.$$

- Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di f_a, centrato nell'origine.
- Utilizzare il punto precedente per determinare il segno di f_a in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, motivando il risultato.
- Sia $f_a^{(2)} = f_a \circ f_a$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il grado dello primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di $f_a^{(2)}$, centrato nell'origine.

Soluzione. Valgono i seguenti sviluppi, sempre per $x \to 0$:

$$\sinh(x^2) = x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6);$$

$$\begin{aligned} \left[1 + \sinh(x^2)\right]^{2a} &= \left[1 + x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]^{2a} = 1 + 2a\left[x^2 + \frac{x^6}{6}\right] + \frac{2a(2a-1)}{2}x^4 + \frac{2a(2a-1)(2a-2)}{6}x^6 + o(x^6) \\ &= 1 + 2ax^2 + a(2a-1)x^4 + \left(\frac{4a^3}{3} - 2a^2 + a\right)x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

Inoltre:

$$1-\cos(2x) = 1-\left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}-\frac{64x^6}{720}+o(x^6)\right) = 2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6);$$

$$\begin{aligned} e^{a[1-\cos(2x)]} &= e^{a\left(2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6)\right)} = 1+a\left(2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6\right)+\frac{a^2}{2}\left(4x^4-\frac{8}{3}x^6\right)+\frac{a^3}{6}8x^6+o(x^6) \\ &= 1+2ax^2+\left(2a^2-\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6+o(x^6). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+2ax^2+a(2a-1)x^4+\left(\frac{4a^3}{3}-2a^2+a\right)x^6+ \\ &\quad -\left[1+2ax^2+\left(2a^2-\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6\right]+\frac{1}{3}x^4+o(x^6) \\ &= \frac{1-a}{3}x^4+\left(\frac{41}{45}a-\frac{2}{3}a^2\right)x^6+o(x^6). \end{aligned}$$

Ne segue che, per $a \neq 1$, il termine principale dello sviluppo di f è $\frac{1-a}{3}x^4$, mentre se $a=1$ esso è $\frac{11}{45}x^6$.

Riguardo alla seconda domanda, si noti che se $f(x) = x^k + o(x^k)$ per $x \to 0$ e per qualche $k \geq 0$, allora evidentemente $f(x) = x^k(1+o(1))$, e ovviamente $1+o(1)$ è positivo in un opportuno intorno di $x=0$. Quindi f ha il segno di x^k, sempre in un opportuno intorno di $x=0$. Ne segue, nel caso in questione, che:

- Se $a<1$, allora f è positiva in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a>1$, allora f è negativa in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a=1$, allora f è positiva in un opportuno intorno di $x=0$.

Riguardo all'ultima domanda, si noti che, per quanto visto nel primo punto:

$$f_a^{(2)}(x) = (f_a \circ f_a)(x) = f_a\left(\frac{1-a}{3}x^4+\left(\frac{41}{45}a-\frac{2}{3}a^2\right)x^6+o(x^6)\right).$$

Ma allora, se $a \neq 1$, varrà sempre per quanto sopra che $f_a^{(2)}(x) \sim \frac{(1-a)^5}{3^5}x^{16}$ per $x \to 0$, dunque il grado richiesto è 16, mentre se $a=1$ allora $f_a^{(2)}(x) \sim \left(\frac{11}{45}\right)^7 x^{36}$ per $x \to 0$, dunque il grado richiesto è 36 (i coefficienti sono stati scritti per completezza, ma non erano richiesti).

Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 03/11/2023**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 14)

- Risolvere l'equazione, nella variabile $w \in \mathbb{C}$ e al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, $w^3 - aw^2 - aw + 1 = 0$. Stabilire in particolare per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni sono reali e per quali a vi sono soluzioni che non sono reali.
- Si consideri ora la seguente equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$: $e^{3z}+2e^{2z}+2e^z+1 = 0$. Risolvere tale equazione, rappresentare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso, e stabilire se esistono soluzioni di massimo o di minimo modulo, in caso affermativo determinandole.

Soluzione. Si noti che $w^3 - aw^2 - aw - 1 = (w+1)(w^2 - (a+1)w + 1)$. Vi è dunque la radice $w_1 = -1$ e inoltre le radici $w = (1+a+\sqrt{a^2+1+2a-4})/2 = (1+a+\sqrt{a^2+2a-3})/2$, dove la radice è intesa in senso complesso. Vale $a^2 + 2a - 3 \geq 0$ se e solo se $a \geq 1$ o $a \leq -3$. In tal caso le radici sono reali e, oltre a $w_1 = -1$, sono $w_{2,3} = (1+a \pm \sqrt{a^2+2a-3})/2$ (tali radici sono coincidenti se $a = -3$ oppure $a = 1$), dove ora la radice è intesa in senso reale. Se invece $a \in (-3, 1)$ le radici, sempre oltre a $w_1 = -1$, sono $w_{2,3} = (1 + a \pm i\sqrt{3 - a^2 - 2a})/2$, dove di nuovo la radice è intesa in senso reale.

Circa la seconda parte, si noti che occorre solamente porre $a = -2$, nel qual caso le radici della prima equazione sono $w_1 = -1 = e^{i\pi}$, $w_2 = (-1+i\sqrt{3})/2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $w_3 = (-1-i\sqrt{3})/2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}$. Occorre ora trovare i logaritmi complessi di tali tre numeri complessi. I possibili valori di z sono quindi i seguenti:

$$z_{1,k} := \log 1 + i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$z_{2,k} := \log 1 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{2}{3}\pi i(1+3k),\ k \in \mathbb{Z};$$

$$z_{3,k} := \log 1 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{2}{3}\pi i\,(3k-1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Chiaramente non vi sono soluzioni di massimo modulo. Le soluzioni di minimo modulo sono chiaramente $\pm\frac{2}{3}\pi i$.

2. (punti 18) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_a(x) = \left[1 + \sin\left(x^2\right)\right]^{2a} - e^{a[\cosh(2x)-1]} + \frac{5}{3}x^4.$$

- Determinare il primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di f_a, centrato nell'origine.
- Utilizzare il punto precedente per determinare il segno di f_a in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, motivando il risultato.
- Sia $f_a^{(2)} = f_a \circ f_a$, dove $\circ$ indica la composizione di funzioni. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il grado dello primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di $f_a^{(2)}$, centrato nell'origine.

Soluzione. Valgono i seguenti sviluppi, sempre per $x \to 0$:

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6);$$

$$\left[1+\sin(x^2)\right]^{2a} = \left[1 + x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right]^{2a} = 1 + 2a\left[x^2 - \frac{x^6}{6}\right] + \frac{2a(2a-1)}{2}x^4 + \frac{2a(2a-1)(2a-2)}{6}x^6 + o(x^6)$$

$$= 1 + 2ax^2 + a(2a-1)x^4 + \left(\frac{4a^3}{3} - 2a^2 + \frac{a}{3}\right)x^6 + o(x^6).$$

Inoltre:

$$\cosh(2x)-1=\left(1+\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}+\frac{64x^6}{720}+o(x^6)\right)-1=2x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6);$$

$$\begin{aligned}e^{a[\cosh(2x)-1]}&=e^{a\left(2x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6)\right)}=1+a\left(2x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6\right)+\frac{a^2}{2}\left(4x^4+\frac{8}{3}x^6\right)+\frac{a^3}{6}8x^6+o(x^6)\\&=1+2ax^2+\left(2a^2+\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3+\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}f(x)&=1+2ax^2+a(2a-1)x^4+\left(\frac{4a^3}{3}-2a^2+\frac{a}{3}\right)x^6+\\&-\left[1+2ax^2+\left(2a^2+\frac{2}{3}a\right)x^4+\left(\frac{4}{3}a^3+\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{45}a\right)x^6\right]+\frac{5}{3}x^4+o(x^6)\\&=\frac{5}{3}(1-a)x^4+\left(\frac{11}{45}a-\frac{10}{3}a^2\right)x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

Ne segue che, per $a\neq 1$, il termine principale dello sviluppo di f è $\frac{5}{3}(1-a)x^4$, mentre se $a=1$ esso è $-\frac{139}{45}x^6$.
Riguardo alla seconda domanda, si noti che se $f(x)=x^k+o(x^k)$ per $x\to 0$ e per qualche $k\geq 0$, allora evidentemente $f(x)=x^k(1+o(1))$, e ovviamente $1+o(1)$ è positivo in un opportuno intorno di $x=0$. Quindi f ha il segno di x^k, sempre in un opportuno intorno di $x=0$. Ne segue, nel caso in questione, che:

- Se $a>1$, allora f è negativa in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a<1$, allora f è positiva in un opportuno intorno di $x=0$;
- Se $a=1$, allora f è negativa in un opportuno intorno di $x=0$.

Riguardo all'ultima domanda, si noti che, per quanto visto nel primo punto:

$$f_a^{(2)}(x)=(f_a\circ f_a)(x)=f_a\left(\frac{5}{3}(1-a)x^4+\left(\frac{11}{45}a-\frac{10}{3}a^2\right)x^6+o(x^6)\right).$$

Ma allora, se $a\neq 1$, varrà sempre per quanto sopra che $f_a^{(2)}(x)\sim\left(\frac{5}{3}\right)^5(1-a)^5x^{16}$ per $x\to 0$, dunque il grado richiesto è 16, mentre se $a=1$ allora $f_a^{(2)}(x)\sim\left(\frac{139}{45}\right)^7x^{36}$ per $x\to 0$, dunque il grado richiesto è 36 (i coefficienti sono stati scritti per completezza, ma non erano richiesti).

Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		**Recupero prima prova intermedia, 12/1/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 14) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f(x) = e^{z^2} - e^{-z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(a) Stabire per quali $z \in \mathbb{C}$ vale $f(z) = 0$, rappresentando le soluzioni nel piano complesso.

(b) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$ in termini delle coordinate cartesiane di z. Successivamente, stabilire per quali z f è reale e per quali z f è immaginaria, rappresentando i corrispondenti insiemi nel piano complesso.

Soluzione. Per quanto riguarda il primo punto, notiamo che $f(z) = 0$ se e solo se $e^{2z^2} = 1$. A sua volta, ciò accade se e solo se $2z^2 = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Se $k = 0$ ciò ha luogo se e solo se $z = 0$. Altrimenti, si noti che $k\pi i = k\pi e^{\frac{\pi}{2}i}$ se $k \in \mathbb{N}$, mentre $k\pi i = -k\pi e^{\frac{3\pi}{2}i}$ se $-k \in \mathbb{N}$. Dunque, se $k \in \mathbb{N}$, le soluzioni sono $z_1 = \sqrt{k\pi}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1+i)$, $z_2 = \sqrt{k\pi}e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1+i)$. Se invece $-k \in \mathbb{N}$, le soluzioni sono $z_3 = \sqrt{-k\pi}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\sqrt{\frac{-k\pi}{2}}(1-i)$, $z_4 = \sqrt{-k\pi}e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{\frac{-k\pi}{2}}(1-i)$. In conclusioni, le soluzioni sono:

$$z = 0, \quad z = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1+i) \text{ con } k \in \mathbb{N}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1-i) \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Si tratta dell'origine e dei punti che si trovano sulle bisettrici del primo e terzo quadrante, e del secondo e quarto quadrante, di modulo $\sqrt{k\pi}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Circa il secondo punto, posto $z = x + iy$ vale $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Quindi:

$$\begin{aligned}
f(z) = e^{z^2} - e^{-z^2} &= e^{x^2-y^2+2ixy} - e^{-[x^2-y^2+2ixy]} \\
&= e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy) + i\sin(2xy)\right] - e^{-(x^2-y^2)}\left[\cos(2xy) - i\sin(2xy)\right] \\
&= \cos(2xy)\left[e^{x^2-y^2} - e^{-(x^2-y^2)}\right] + i\sin(2xy)\left[e^{x^2-y^2} + e^{-(x^2-y^2)}\right] \\
&= 2\cos(2xy)\sinh(x^2-y^2) + 2i\sin(2xy)\cosh(x^2-y^2).
\end{aligned}$$

In particolare:

$$\operatorname{Re} f(z) = 2\cos(2xy)\sinh(x^2-y^2), \quad \operatorname{Im} f(z) = 2\sin(2xy)\cosh(x^2-y^2).$$

Ne segue che $f(z)$ è reale se e solo se $\sin(2xy) = 0$, dato che il coseno iperbolico non si annulla mai, cioè se e solo se $2xy = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta degli assi cartesiani $x = 0$ e $y = 0$ e di infinite iperboli equilatere. $f(z)$ è invece immaginaria se $x^2 - y^2 = 0$, ovvero se $|x| = |y|$, cioè sulle bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto quadrante, oppure se $2xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Anche tali ultime curve sono iperboli del tipo precedente (ma ovviamente diverse da esse).

2. (punti 18) Calcolare il primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine della funzione:

$$f(x) = \frac{e^{\left(e^{-\sin x}-1\right)} - 1}{1 + \sin\left(e^{-x} - 1\right)} + x$$

Successivamente, si consideri, al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{N}$, la seguente funzione:

$$f_{h,k}(x) := \{\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x)\}^k,$$

e se ne calcoli il grado del primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine.

Soluzione. Vale, sempre per $x \to 0$:

$$
\begin{aligned}
e^{-\sin x} - 1 &= e^{-x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)} - 1 = -x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right];\\
e^{\left(e^{-\sin x}-1\right)} - 1 &= e^{-x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} - 1 = \left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] + \frac{1}{2}\left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^2 + \frac{1}{6}\left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^3 + o(x^3)\\
&= -x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[x^2 - x^3\right] - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&= -x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4);\\
\sin\left(e^{-x}-1\right) &= \sin\left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left[-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]^3 + o(x^3)\\
&= -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&= -x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);\\
\frac{1}{1+\sin\left(e^{-x}-1\right)} &= \frac{1}{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}\\
&= 1 - \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 - \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\\
&= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 - x^3 + x^3 + o(x^3)\\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);
\end{aligned}
$$

Quindi, in conclusione:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{\left(e^{-\sin x}-1\right)} - 1}{1+\sin\left(e^{-x}-1\right)} + x = \left[-x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right] \times \left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right] + x\\
&= -x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) + x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}
$$

Il termine dominante dello sviluppo è quindi $-x^3/6$.

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che per quanto svolto si ha, sempre per $x \to 0$, e in quanto $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, quindi $f(f(x)) \to 0$ per $x \to 0$, e così via:

$$
\begin{aligned}
[f \circ f](x) = f(f(x)) &= f\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = \frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9);\\
[f \circ f \circ f](x) = f(f(f(x))) &= f\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right)^3 = -\frac{1}{6^{13}}x^{27} + o(x^{27}),
\end{aligned}
$$

e iterando il procedimento si ottiene, per $x \to 0$ e per un'opportuna costante $c_h \neq 0$:

$$
\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x) = c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right).
$$

Quindi

$$
f_{h,k}(x) = \left[c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right)\right]^k = c_h^k x^{k3^h} + o\left(x^{k3^h}\right).
$$

Dunque il grado cercato è $k3^h$.

Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi Matematica 1, Versione B		Recupero prima prova intermedia, 12/1/2024
Cognome:	Nome:	Codice persona:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 14) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f(x) = e^{z^2} + e^{-z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(a) Stabire per quali $z \in \mathbb{C}$ vale $f(z) = 0$, rappresentando le soluzioni nel piano complesso.

(b) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$ in termini delle coordinate cartesiane di z. Successivamente, stabilire per quali z f è reale e per quali z f è immaginaria, rappresentando i corrispondenti insiemi nel piano complesso.

Soluzione. Per quanto riguarda il primo punto, notiamo che $f(z) = 0$ se e solo se $e^{2z^2} = -1$. A sua volta, ciò accade se e solo se $2z^2 = (2k+1)\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Si noti che $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi e^{\frac{\pi}{2}i}$ se $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, mentre $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i = -\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi e^{\frac{3\pi}{2}i}$ se $-k \in \mathbb{N}$. Dunque, se $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, le soluzioni sono $z_1 = \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}(1+i)$, $z_2 = \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}(1+i)$. Se invece $-k \in \mathbb{N}$, le soluzioni sono $z_3 = \sqrt{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\sqrt{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}(1-i)$, $z_4 = \sqrt{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}(1-i)$. In conclusioni, le soluzioni sono:

$$z = \pm\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}(1+i) \text{ con } k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad z = \pm\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}(1-i) \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Si tratta dell'origine e dei punti che si trovano sulle bisettrici del primo e terzo quadrante, e del secondo e quarto quadrante, di modulo $\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Circa il secondo punto, posto $z = x+iy$ vale $z^2 = x^2-y^2+2ixy$. Quindi:

$$\begin{aligned} f(z) = e^{z^2} - e^{-z^2} &= e^{x^2-y^2+2ixy} + e^{-[x^2-y^2+2ixy]} \\ &= e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy) + i\sin(2xy)\right] + e^{-(x^2-y^2)}\left[\cos(2xy) - i\sin(2xy)\right] \\ &= \cos(2xy)\left[e^{x^2-y^2} + e^{-(x^2-y^2)}\right] + i\sin(2xy)\left[e^{x^2-y^2} - e^{-(x^2-y^2)}\right] \\ &= 2\cos(2xy)\cosh(x^2-y^2) + 2i\sin(2xy)\sinh(x^2-y^2). \end{aligned}$$

In particolare:

$$\operatorname{Re} f(z) = 2\cos(2xy)\cosh(x^2-y^2), \quad \operatorname{Im} f(z) = 2\sin(2xy)\sinh(x^2-y^2).$$

Ne segue che $f(z)$ è immaginario se e solo se $\cos(2xy) = 0$, dato che il coseno iperbolico non si annulla mai, cioè se e solo se $2xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di infinite iperboli equilatere. $f(z)$ è invece reale se $x^2 - y^2 = 0$, ovvero se $|x| = |y|$, cioè sulle bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto quadrante, oppure se $2xy = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Anche tali ultime curve sono iperboli del tipo precedente (ma ovviamente diverse da esse), oltre agli assi cartesiani $x = 0$ e $y = 0$.

2. (punti 18) Calcolare il primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine della funzione:

$$f(x) = \frac{e^{\left(e^{\sin x}-1\right)} - 1}{1 + \sin\left(e^x - 1\right)} - x$$

Successivamente, si consideri, al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{N}$, la seguente funzione:

$$f_{h,k}(x) := \{\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x)\}^k,$$

e se ne calcoli il grado del primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine.

Soluzione. Vale, sempre per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} - 1 &= e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} - 1 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right];\\
e^{\left(e^{\sin x} - 1\right)} - 1 &= e^{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} - 1 = \left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] + \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^2 + \frac{1}{6}\left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^3 + o(x^3)\\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[x^2 + x^3\right] + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4);\\
\sin\left(e^x - 1\right) &= \sin\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]^3 + o(x^3)\\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);\\
\frac{1}{1 + \sin\left(e^x - 1\right)} &= \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}\\
&= 1 - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\\
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 + x^3 - x^3 + o(x^3)\\
&= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);
\end{aligned}$$

Quindi, in conclusione:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{\left(e^{\sin x} - 1\right)} - 1}{1 + \sin\left(e^x - 1\right)} - x = \left[x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right] \times \left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right] - x\\
&= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Il termine dominante dello sviluppo è quindi $x^3/6$.

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che per quanto svolto si ha, sempre per $x \to 0$, e in quanto $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, quindi $f(f(x)) \to 0$ per $x \to 0$, e così via:

$$\begin{aligned}
[f \circ f](x) = f(f(x)) &= f\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = \frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9);\\
[f \circ f \circ f](x) = f(f(f(x))) &= f\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right)^3 = \frac{1}{6^{13}}x^{27} + o(x^{27}),
\end{aligned}$$

e iterando il procedimento si ottiene, per $x \to 0$ e per un'opportuna costante $c_h > 0$:

$$\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x) = c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right).$$

Quindi

$$f_{h,k}(x) = \left[c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right)\right]^k = c_h^k x^{k3^h} + o\left(x^{k3^h}\right).$$

Dunque il grado cercato è $k3^h$.

Soluzione.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		**Seconda prova in intermedia, 12/1/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 15) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x-1)^2}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni sul numero minimo di flessi della funzione elementarmente deducibili dal resto dello studio.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq \pm 1$. Essa è chiaramente sempre strettamente positiva sul proprio dominio di definizione. Non vi sono simmetrie evidenti. Vale:

$$\lim_{x\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 0.$$

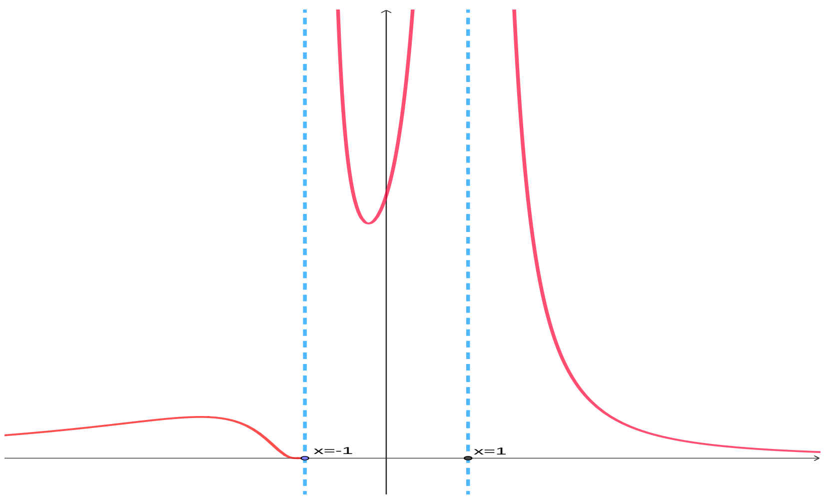
La retta $x = 0$ è quindi asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Calcoliamo la derivata prima. Vale, se $x \neq \pm 1$:

$$f'(x) = \frac{-\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}(x-1)^2 - 2(x-1)e^{\frac{1}{x+1}}}{(x-1)^4} = -\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x-1)^3(x+1)^2}[x-1+2(x+1)^2]$$
$$= -\frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x-1)^3(x+1)^2}(2x^2+5x+1).$$

Il polinomio di secondo grado a numeratore si annulla se e solo se $x = (-5 \pm \sqrt{17})/4$. Si noti che $x_1 = (-5 - \sqrt{17})/4 < -1$ e che $x_2 = (-5 + \sqrt{17})/4 \in (-1, 0)$. Il segno di f' è determinato dal segno di $-\frac{2x^2+5x+1}{(x-1)^3}$, che calcoli elementari mostrano essere positivo se $x < x_1$ e se $x \in (x_2, 1)$, così che f è crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (x_1, x_2)$ e se $x > 1$ così che f è decrescente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = x_1$ è di massimo relativo, il punto $x = x_2$ è di minimo relativo. Non vi sono massimi né minimi assoluti di f. Si noti infine che

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = 0,$$

così che la tangente al grafico di f tende a diventare orizzontale in tale limite. Quanto alla concavità e convessità di f, quanto svolto mostra che esistono senz'altro almeno due flessi di f, entrambi nell'intervallo $(-\infty, -1)$. Il grafico della funzione è il seguente:



2. (punti 10) Calcolare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}.$$

Successivamente, *senza far uso della primitiva calcolata*, determinare il dominio della funzione

$$F(x) = \int_2^x \frac{2+\sqrt{t}}{t\left(\sqrt[3]{t}-1\right)}\,\mathrm{d}t,$$

e se i limiti di F agli estremi del proprio dominio di definizione sono finiti o infiniti.

Soluzione. Poniamo $x^{1/6} = t$, così che $x = t^6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$. Dunque:

$$\int \frac{2+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2+t^3}{t^6\left(t^2-1\right)}6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{2+t^3}{t\left(t^2-1\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Chiaramente

$$\frac{t^3+2}{t^3-t} = \frac{t^3-t+t+2}{t^3-t} = 1+\frac{t+2}{t^3-t},$$

come poteva essere verificato anche effettuando esplicitamente la divisione di polinomi. Inoltre, con calcoli elementari si ottiene il seguente sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{t+2}{t^3-t} = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{3}{2(t-1)} - \frac{2}{t}.$$

Dunque:

$$\int \frac{2+t^3}{t\left(t^2-1\right)}\,\mathrm{d}t = \int \left(1+\frac{1}{2(t+1)}+\frac{3}{2(t-1)}-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = t+\frac{1}{2}\log(t+1)+\frac{3}{2}\log|t-1|-2\log t+c,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria e si è osservato che, per costruzione, $t \geq 0$. Dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{2+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}\,\mathrm{d}x &= 6\int \frac{2+t^3}{t\left(t^2-1\right)}\,\mathrm{d}t = 6t+3\log(t+1)+9\log|t-1|-12\log t+c \\ &= 6\sqrt[6]{x}+3\log(\sqrt[6]{x}+1)+9\log|\sqrt[6]{x}-1|-12\log\sqrt[6]{x}+c \\ &= 6\sqrt[6]{x}+3\log(\sqrt[6]{x}+1)+9\log|\sqrt[6]{x}-1|-2\log x+c.\end{aligned}$$

Circa il secondo punto, occorre prima di tutto stabilire in quali punti al finito la funzione integranda ha singolarità, e se queste ultimi sono o meno integrabili in senso improprio. Le singolarità si trovano in $t = 0$ e in $t = 1$. Dato che l'intervallo di integrazione ha $x_0 = 2$ come uno degli estremi, occorre considerare in primo luogo $t = 1$. Chiaramente, $t^{1/3}-1 \sim c(t-1)$ se $t \to 1$, per un opportuna costante non nulla c. Ciò può essere visto o con lo sviluppo di Taylor $t^{1/3}-1 = \frac{1}{3}(t-1)+o(t-1)$ se $t \to 1$, che è valido perché $g(t) := t^{1/3}-1$ soddisfa $g(1) = 0$, $g'(1) = \frac{1}{3}$, oppure notando che $t^{1/3}-1 = \frac{t-1}{t^{2/3}+t^{1/3}+1}$. Ne risulta che la singolarità della funzione integranda in $t = 1$ non è integrabile. Quindi il dominio di definizione di F è $(1, +\infty)$, non è in particolare necessario studiare la singolarità dell'integranda nell'origine. Notiamo inoltre che $F'(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)} > 0$ per ogni $x > 1$, quindi F è crescente ed esistono sia $\lim_{x\to1^+} F(x)$ che $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Quanto appena detto, il fatto che l'integranda sia sempre positiva se $t \in (1, +\infty)$, e l'orientamento dell'intervallo di integrazione, implicano che

$$\lim_{x\to1^+} F(x) = -\infty.$$

Inoltre, è chiaro che

$$\frac{2+\sqrt{t}}{t\left(\sqrt[3]{t}-1\right)} \sim \frac{1}{t^{\frac{5}{6}}} \quad \text{se } t \to +\infty.$$

Dunque la funzione integranda non è integrabile in un intorno di $+\infty$, e considerazioni di segno e orientazione portano analogamente a quanto svolto in precedenza a dedurre che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

3. (punti 7) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt[3]{n}}(3-x)^n,$$

converge, precisando se la convergenza è solo puntuale o anche assoluta.

Soluzione. Sia $a_n = \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$. Vale:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{1+\sqrt[3]{n+1}} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{\log n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 1/1 = 1$, e quindi la serie converge, puntualmente e assolutamente, nell'intervallo $(2, 4)$, non converge se $x > 4$ oppure $x < 2$. Se $x = 4$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{1+\sqrt[3]{n}}.$$

Chiaramente quest'ultima serie non converge assolutamente. Converge invece semplicemente, in quanto la funzione $g(t) = \frac{\log t}{1+\sqrt[3]{t}}$ tende a zero, è positiva ed è definitivamente decrescente, in quanto

$$g'(t) = \frac{\frac{1+\sqrt[3]{t}}{t} - \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}} \log t}{(1+\sqrt[3]{t})^2} = \frac{3(1+\sqrt[3]{t}) - \sqrt[3]{t} \log t}{3t(1+\sqrt[3]{t})^2},$$

che è chiaramente negativa per t sufficientemente grande, e quindi è applicabile il criterio di Leibniz. Se invece $x = 2$ avremo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt[3]{n}},$$

serie a termini positivi, divergente. Quindi, in conclusione, la serie converge semplicemente se e solo se $x \in (2, 4]$, mentre converge assolutamente se e solo se $x \in (2, 4)$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1, Versione B		**Seconda prova in intermedia, 12/1/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 15) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(x+1)^2}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo informazioni sul numero minimo di flessi della funzione elementarmente deducibili dal resto dello studio.

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq \pm 1$. Essa è chiaramente sempre strettamente positiva sul proprio dominio di definizione. Non vi sono simmetrie evidenti. Vale:

$$\lim_{x \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1} f(x) = +\infty.$$

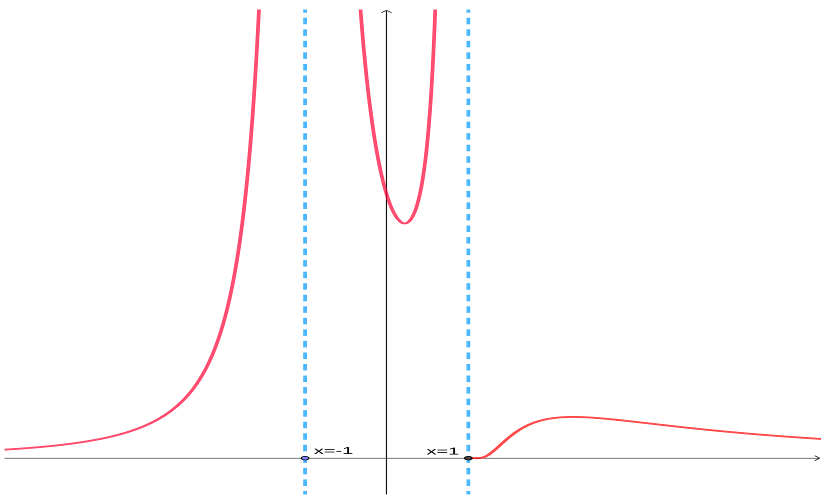
La retta $x = 0$ è quindi asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$. Calcoliamo la derivata prima. Vale, se $x \neq \pm 1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}(x+1)^2 - 2(x+1)e^{\frac{1}{1-x}}}{(x+1)^4} = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(x+1)^3(1-x)^2}[x+1-2(1-x)^2]$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(x+1)^3(1-x)^2}(-2x^2+5x-1).$$

Il polinomio di secondo grado a numeratore si annulla se e solo se $x = (5 \pm \sqrt{17})/4$. Si noti che $x_1 = (5-\sqrt{17})/4 \in (0,1)$ e che $x_2 = (5+\sqrt{17})/4 > 1$. Il segno di f' è determinato dal segno di $\frac{-2x^2+5x-1}{(x-1)^3}$, che calcoli elementari mostrano essere positivo se $x < -1$ e se $x \in (x_1, 1)$, così che f è crescente separatamente in ciascuno di tali intervalli, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (-1, x_1)$ e se $x > x_2$ così che f è decrescente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x = x_1$ è di minimo relativo, il punto $x = x_2$ è di massimo relativo. Non vi sono massimi né minimi assoluti di f. Si noti infine che

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0,$$

così che la tangente al grafico di f tende a diventare orizzontale in tale limite. Quanto alla concavità e convessità di f, quanto svolto mostra che esistono senz'altro almeno due flessi di f, entrambi nell'intervallo $(1, +\infty)$. Il grafico della funzione è il seguente:



2. (punti 10) Calcolare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{3+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}.$$

Successivamente, *senza far uso della primitiva calcolata*, determinare il dominio della funzione

$$F(x) = \int_2^x \frac{3+\sqrt{t}}{t\left(\sqrt[3]{t}-1\right)}\,\mathrm{d}t,$$

e se i limiti di F agli estremi del proprio dominio di definizione sono finiti o infiniti.

Soluzione. Poniamo $x^{1/6} = t$, così che $x = t^6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$. Dunque:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3+t^3}{t^6\,(t^2-1)}6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{3+t^3}{t\,(t^2-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Chiaramente

$$\frac{t^3+3}{t^3-t} = \frac{t^3-t+t+3}{t^3-t} = 1+\frac{t+3}{t^3-t},$$

come poteva essere verificato anche effettuando esplicitamente la divisione di polinomi. Inoltre, con calcoli elementari si ottiene il seguente sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{t+3}{t^3-t} = \frac{1}{t+1}+\frac{2}{t-1}-\frac{3}{t}.$$

Dunque:

$$\int \frac{3+t^3}{t\,(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \int \left(1+\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t-1}-\frac{3}{t}\right)\,\mathrm{d}t = t+\log(t+1)+2\log|t-1|-3\log t+c,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria e si è osservato che, per costruzione, $t \geq 0$. Dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{3+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}\,\mathrm{d}x &= 6\int \frac{3+t^3}{t\,(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = 6t+6\log(t+1)+12\log|t-1|-18\log t+c\\ &= 6\sqrt[6]{x}+6\log(\sqrt[6]{x}+1)+12\log|\sqrt[6]{x}-1|-18\log\sqrt[6]{x}+c\\ &= 6\sqrt[6]{x}+6\log(\sqrt[6]{x}+1)+12\log|\sqrt[6]{x}-1|-3\log x+c.\end{aligned}$$

Circa il secondo punto, occorre prima di tutto stabilire in quali punti al finito la funzione integranda ha singolarità, e se queste ultimi sono o meno integrabili in senso improprio. Le singolarità si trovano in $t=0$ e in $t=1$. Dato che l'intervallo di integrazione ha $x_0 = 2$ come uno degli estremi, occorre considerare in primo luogo $t=1$. Chiaramente, $t^{1/3}-1 \sim c(t-1)$ se $t \to 1$, per un opportuna costante non nulla c. Ciò può essere visto o con lo sviluppo di Taylor $t^{1/3}-1 = \frac{1}{3}(t-1)+o(t-1)$ se $t \to 1$, che è valido perché $g(t) := t^{1/3}-1$ soddisfa $g(1)=0$, $g'(1) = \frac{1}{3}$, oppure notando che $t^{1/3}-1 = \frac{t-1}{t^{2/3}+t^{1/3}+1}$. Ne risulta che la singolarità della funzione integranda in $t=1$ non è integrabile. Quindi il dominio di definizione di F è $(1,+\infty)$, non è in particolare necessario studiare la singolarità dell'integranda nell'origine. Notiamo inoltre che $F'(x) = \frac{3+\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}-1\right)} > 0$ per ogni $x > 1$, quindi F è crescente ed esistono sia $\lim_{x\to1^+} F(x)$ che $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Quanto appena detto, il fatto che l'integranda sia sempre positiva se $t \in (1,+\infty)$, e l'orientamento dell'intervallo di integrazione, implicano che

$$\lim_{x\to1^+} F(x) = -\infty.$$

Inoltre, è chiaro che

$$\frac{3+\sqrt{t}}{t\left(\sqrt[3]{t}-1\right)} \sim \frac{1}{t^{\frac{5}{6}}} \quad \text{se } t \to +\infty.$$

Dunque la funzione integranda non è integrabile in un intorno di $+\infty$, e considerazioni di segno e orientazione portano analogamente a quanto svolto in precedenza a dedurre che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

3. (punti 7) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}(2-x)^n,$$

converge, precisando se la convergenza è solo puntuale o anche assoluta.

Soluzione. Sia $a_n = \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}$. Vale:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{1+\sqrt{n+1}} \frac{1+\sqrt{n}}{\log n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 1/1 = 1$, e quindi la serie converge, puntualmente e assolutamente, nell'intervallo $(1,3)$, non converge se $x > 3$ oppure $x < 1$. Se $x = 3$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{1+\sqrt{n}}.$$

Chiaramente quest'ultima serie non converge assolutamente. Converge invece semplicemente, in quanto la funzione $g(t) = \frac{\log t}{1+\sqrt{t}}$ tende a zero, è positiva ed è definitivamente decrescente, in quanto

$$g'(t) = \frac{\frac{1+\sqrt{t}}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \log t}{(1+\sqrt{t})^2} = \frac{2(1+\sqrt{t}) - \sqrt{t}\log t}{2t(1+\sqrt{t})^2},$$

che è chiaramente negativa per t sufficientemente grande, e quindi è applicabile il criterio di Leibniz. Se invece $x = 1$ avremo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{1+\sqrt{n}},$$

serie a termini positivi, divergente. Quindi, in conclusione, la serie converge semplicemente se e solo se $x \in (1,3]$, mentre converge assolutamente se e solo se $x \in (1,3)$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		**prova del 2/2/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Risolvere la seguente disequazione, nella variabile complessa z, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} < k,$$

rappresentando qualitativamente, al variare di k, l'insieme delle soluzioni ottenuto.

Soluzione. Scriviamo, posto $z = x + iy$ e richiesto che $z \neq -i$:

$$\frac{z-1}{z+i} = \frac{x-1+iy}{x+i(y+1)} = \frac{(x-1+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x-1)x+y(y+1)+i[xy-(x-1)(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)x+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{1+y-x}{x^2+(y+1)^2}.$$

In particolare:

$$\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} = \frac{1+y-x}{x^2+(y+1)^2}.$$

Dobbiamo quindi risolvere, posto $z \neq -i$, la disequazione

$$1 + y - x < kx^2 + k(y+1)^2.$$

Se $k = 0$, ciò equivale a $y < x - 1$, cioè alla regione di piano che sta strettamente sotto la retta $y = x - 1$ (si noti che il punto $z = -i$ sta proprio su tale retta). Se invece $k \neq 0$ ciò equivale a: $kx^2 + x + k(y+1)^2 - (y+1) > 0$. Assumiamo dapprima $k > 0$. Deve allora valere:

$$x^2 + \frac{x}{k} + (y+1)^2 - \frac{y+1}{k} > 0 \iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} + \left(y + 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} > 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y + 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 > \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta dunque del *complementare* del cerchio (chiuso) di centro $z_0 = -\frac{1}{2k} + i\left(\frac{1}{2k} - 1\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}k}$. Si noti che il punto $z = -i$ giace sulla circonferenza per ogni k. Sia ora invece $k < 0$. Calcoli analoghi ai precedenti forniscono che deve valere (attenzione al cambio di verso nella disequazione dividendo per $k < 0$:

$$\left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y + 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 < \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta del cerchio aperto centrato nel punto z_0 sopra scritto e di raggio $\frac{1}{-\sqrt{2}k}$.

2. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x - 1}.$$

(la derivata seconda non è facile perché si deve fare una stima sul numeratore per vedere che è >0. Tuttavia io la terrei e direi ai ragazzi che se non riescono lascino stare, tanto la conterò poco).

Soluzione. La funzione è definita se e solo se $e^x \neq 1+\sqrt{2}$, cioè se e solo se $x \neq \log(1+\sqrt{2})$ (si noti che ovviamente l'equazione $e^x = 1-\sqrt{2}$ non ha soluzioni). Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(\log(1+\sqrt{2}))^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

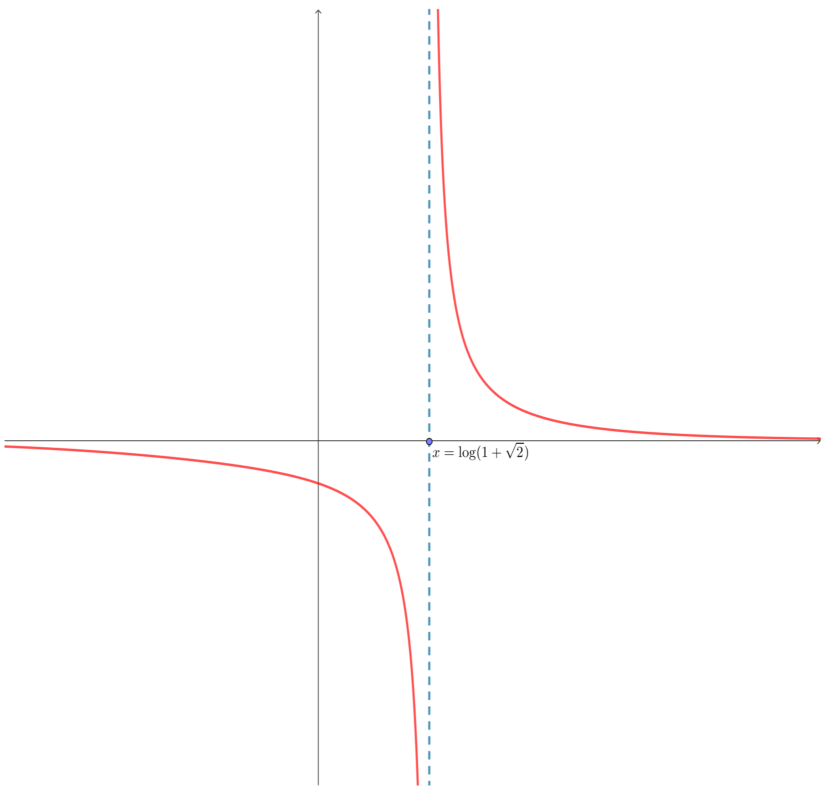
Infatti, per $x \to +\infty$ vale $f(x) \sim e^{-x} \to 0$, per $x \to -\infty$ vale, essendo $e^x, e^{2x} \to 0$ se $x \to -\infty$, $f(x) \sim e^x \to 0$. Inoltre, il denominatore di f è positivo se e solo se $x > \log(1+\sqrt{2})$, mentre esso è negativo altrimenti. Quest'ultima considerazione permette anche di stabilire che f è positiva se e solo se $x > \log(1+\sqrt{2})$, mentre essa è negativa se e solo se $x < \log(1+\sqrt{2})$. Si noti inoltre che la retta $x = \log(1+\sqrt{2})$ è asintoto verticale bilatero per f, mentre la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f se $x \to \pm\infty$. Si noti che $\log(1+\sqrt{2}) > 0$. Calcoliamo ora, per $x \neq \log(1+\sqrt{2})$, la derivata prima. Vale, per tali x:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}-2e^x-1) - e^x(2e^{2x}-2e^x)}{(e^{2x}-2e^x-1)^2} = -e^x \frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}-2e^x-1)^2}$$

Chiaramente $f'(x) < 0$ sul proprio dominio di definizione. Quindi f è decrescente separamente per $x < \log(1+\sqrt{2})$ e per $x > \log(1+\sqrt{2})$ (ovviamente *non* è decrescente sul proprio intero dominio). Calcoliamo infine la derivata seconda. Vale, con alcuni calcoli elementari, sempre per $x \neq \log(1+\sqrt{2})$:

$$f''(x) = e^x \frac{e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} + 2e^x + 1}{(e^{2x}-2e^x-1)^3}.$$

Si noti ora che vale $e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} = e^{2x}(e^{2x} - 2e^x + 6) = e^{2x}(5 + (e^x-1)^2) > 0$ per ogni x. Ne segue che la derivata seconda ha il segno del denominatore. Dunque f è convessa per $x > \log(1+\sqrt{2})$ e concava per $x < \log(1+\sqrt{2})$. Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{3x} + e^{-x}}{e^{2x} - 16e^{-2x}}.$$

Successivamente, stabilire se l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} [e^{-t} f(t) - 1]\,\mathrm{d}t$$

esiste finito.

Soluzione. Vale, ponendo $e^x = t$, così che $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-16e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-16}e^x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^4+1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t = \int \left(1+\frac{17}{t^4-16}\right)\mathrm{d}t = t + 17\int \frac{1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t.$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{t^4-16} = \frac{1}{(t^2-4)(t^2+4)} = \frac{1}{(t-2)(t+2)(t^2+4)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} + \frac{Ct+D}{t^2+4}.$$

Calcoli elementari forniscono: $A = \frac{1}{32}$, $B = -A$, $C = 0$ (ovvio in quanto la funzione a sinistra è pari, e se $C \neq 0$ il membro di destra non sarebbe pari), $D = -\frac{1}{8}$. Dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t &= \int\left(\frac{1}{32(t-2)} - \frac{1}{32(t+2)} - \frac{1}{8(t^2+4)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2} - \frac{1}{32}\int \frac{1}{\frac{t^2}{4}+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2} - \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, dove si è notato che $t > 0$ per costruzione. Tornando alla variabile originaria:

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-16e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = e^x + \frac{17}{32}\log\frac{|e^x-2|}{e^x+2} - \frac{17}{16}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + c.$$

Circa la seconda domanda, si noti che l'integranda è singolare solo per $e^{4x} = 16$, cioè se $e^x = 2$, cioè se $x = \log 2$. Dunque non vi sono singolarità all'interno o al bordo del dominio di integrazione, e occorre verificare il comportamento di f solo all'infinito. Si ha:

$$e^{-t}f(t) - 1 = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}} - 1 = \frac{17e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 18e^{-4t}.$$

Il decadimento dell'integranda è quindi esponenziale all'infinito, e dunque l'integrale improprio proposto esiste finito.

4. (punti 7) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+\sqrt{n})}{n^2+1}x^n$$

Soluzione. Calcoliamo il raggio di convergenza. Vale, per $n \geq 1$:

$$\frac{2^{n+1}(n+1+\sqrt{n+1})}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{2^n(n+\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Il raggio di convergenza è dunque $R = \frac{1}{2}$. In particolare la serie converge puntualmente e assolutamente se $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Valutiamo la convergenza agli estremi. Se $x = 1/2$ la serie è a termini positivi e il suo termine generale è

$$\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

e dunque per il criterio del confronto asintotico la serie non converge neppure semplicemente. Se $x = -\frac{1}{2}$ la serie è a segni alterni e il suo termine generale è

$$(-1)^n\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

Sia $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1}$. Chiaramente $a_n > 0$ per ogni n e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Verifichiamo la decrescenza. Posto $f(x) := \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1+2\sqrt{x}-3x^2-2x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2},$$

che è chiaramente negativo per x abbastanza grande. Quindi a_n è definitivamente decrescente. Valgono le condizioni del criterio di Leibnitz, e quindi la serie data converge in $x = -\frac{1}{2}$. Per quanto già visto, in tale punto la serie non converge assolutamente. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, risultati noti permettono di concludere che essa ha luogo in tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$, per ogni $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (in realtà, un risultato da noi non svolto a lezione mostrerebbe che la convergenza uniforme ha luogo anche negli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1, Versione B		**prova del 2/2/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Risolvere la seguente disequazione, nella variabile complessa z, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Im} \frac{z+1}{i-z} > k,$$

rappresentando qualitativamente, al variare di k, l'insieme delle soluzioni ottenuto.

Soluzione. Scriviamo, posto $z = x + iy$ e richiesto che $z \neq i$:

$$\frac{z+1}{i-z} = \frac{x+1+iy}{-x+i(1-y)} = \frac{(x+1+iy)(-x+i(y-1))}{x^2+(1-y)^2} = \frac{-(x+1)x - y(y-1) + i[(x+1)(y-1)-xy]}{x^2+(1-y)^2}$$
$$= \frac{y(1-y)-x(x+1)}{x^2+(1-y)^2} + i\frac{y-x-1}{x^2+(1-y)^2}.$$

In particolare:

$$\operatorname{Im} \frac{z+1}{i-z} = \frac{y-x-1}{x^2+(1-y)^2}.$$

Dobbiamo quindi risolvere, posto $z \neq -i$, la disequazione

$$y - x - 1 > kx^2 + k(1-y)^2.$$

Se $k = 0$, ciò equivale a $y > x+1$, cioè alla regione di piano che sta strettamente sopra la retta $y = x+1$ (si noti che il punto $z = i$ sta proprio su tale retta). Se invece $k \neq 0$ ciò equivale a: $kx^2 + x + k(y-1)^2 - (y-1) < 0$. Assumiamo dapprima $k > 0$. Deve allora valere:

$$x^2 + \frac{x}{k} + (y-1)^2 - \frac{y-1}{k} < 0 \iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} + \left(y - 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} < 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 < \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta dunque del cerchio (aperto) di centro $z_0 = -\frac{1}{2k} + i\left(\frac{1}{2k} + 1\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}k}$. Si noti che il punto $z = -i$ giace sulla circonferenza per ogni k. Sia ora invece $k < 0$. Calcoli analoghi ai precedenti forniscono che deve valere (attenzione al cambio di verso nella disequazione dividendo per $k < 0$:

$$\left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 > \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta del *complementare* del cerchio chiuso centrato nel punto z_0 sopra scritto e di raggio $\frac{1}{-\sqrt{2}k}$.

2. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - 2e^x - e^{2x}}.$$

Soluzione. La funzione è definita se e solo se $e^x \neq -1 + \sqrt{2}$, cioè se e solo se $x \neq \log(-1+\sqrt{2})$ (si noti che ovviamente l'equazione $e^x = -1 - \sqrt{2}$ non ha soluzioni). Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to(\log(-1+\sqrt{2}))^\pm} f(x) = \mp\infty.$$

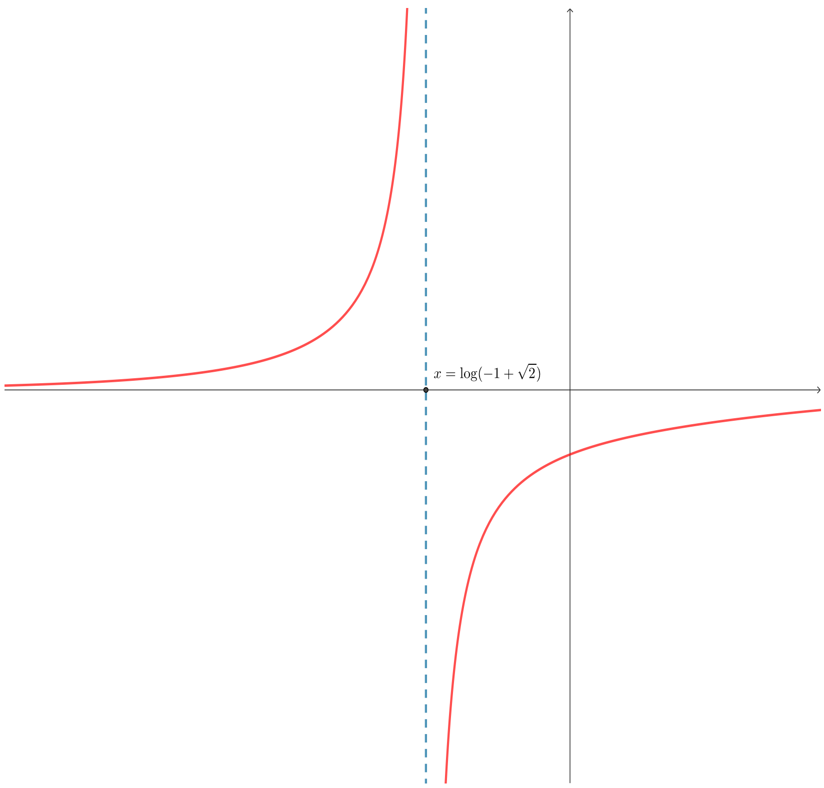
Infatti, per $x \to +\infty$ vale $f(x) \sim -e^{-x} \to 0$, per $x \to -\infty$ vale, essendo $e^x, e^{2x} \to 0$ se $x \to -\infty$, $f(x) \sim e^x \to 0$. Inoltre, il denominatore di f è positivo se e solo se $x < \log(-1+\sqrt{2})$, mentre esso è negativo altrimenti. Quest'ultima considerazione permette anche di stabilire che f è positiva se e solo se $x < \log(-1+\sqrt{2})$, mentre essa è negativa se e solo se $x > \log(-1+\sqrt{2})$. Si noti inoltre che la retta $x = \log(-1+\sqrt{2})$ è asintoto verticale bilatero per f, mentre la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f se $x \to \pm\infty$. Si noti che $\log(-1+\sqrt{2}) < 0$. Calcoliamo ora, per $x \neq \log(-1+\sqrt{2})$, la derivata prima. Vale, per tali x:

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^x-e^{2x}) + e^x(2e^x+2e^{2x})}{(1-2e^x-e^{2x})^2} = e^x \frac{e^{2x}+1}{(1-2e^x-e^{2x})^2}$$

Chiaramente $f'(x) > 0$ sul proprio dominio di definizione. Quindi f è crescente separamente per $x < \log(-1+\sqrt{2})$ e per $x > \log(-1+\sqrt{2})$ (ovviamente *non* è crescente sul proprio intero dominio). Calcoliamo infine la derivata seconda. Vale, con alcuni calcoli elementari, sempre per $x \neq \log(1+\sqrt{2})$:

$$f''(x) = e^x \frac{e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} + 2e^x + 1}{(1-2e^x-e^{2x})^3}.$$

Si noti ora che vale $e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} = e^{2x}(e^{2x} - 2e^x + 6) = e^{2x}(5 + (e^x - 1)^2) > 0$ per ogni x. Ne segue che la derivata seconda ha il segno del denominatore. Dunque f è convessa per $x < \log(1+\sqrt{2})$ e concava per $x > \log(1+\sqrt{2})$. Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - 16e^{-2x}}.$$

Successivamente, stabilire se l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} [e^{-t} f(t) - 1] \, \mathrm{d}t$$

esiste finito.

Soluzione. Vale, ponendo $e^x = t$, così che $e^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

$$\int \frac{e^{3x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - 16e^{-2x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{e^{4x} + 2}{e^{4x} - 16} e^x \, \mathrm{d}x = \int \frac{t^4 + 2}{t^4 - 16} \, \mathrm{d}t = \int \left(1 + \frac{18}{t^4 - 16}\right) \mathrm{d}t = t + 18 \int \frac{1}{t^4 - 16} \, \mathrm{d}t.$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{t^4-16}=\frac{1}{(t^2-4)(t^2+4)}=\frac{1}{(t-2)(t+2)(t^2+4)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+2}+\frac{Ct+D}{t^2+4}.$$

Calcoli elementari forniscono: $A=\frac{1}{32}$, $B=-A$, $C=0$ (ovvio in quanto la funzione a sinistra è pari, e se $C\neq 0$ il membro di destra non sarebbe pari), $D=-\frac{1}{8}$. Dunque:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t&=\int\left(\frac{1}{32(t-2)}-\frac{1}{32(t+2)}-\frac{1}{8(t^2+4)}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2}-\frac{1}{32}\int\frac{1}{\frac{t^2}{4}+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2}-\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)+c,\end{aligned}$$

con $c\in\mathbb{R}$ costante arbitraria, dove si è notato che $t>0$ per costruzione. Tornando alla variabile originaria:

$$\int\frac{e^{3x}+2e^{-x}}{e^{2x}-16e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=e^x+\frac{9}{16}\log\frac{|e^x-2|}{e^x+2}-\frac{9}{8}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)+c.$$

Circa la seconda domanda, si noti che l'integranda è singolare solo per $e^{4x}=16$, cioè se $e^x=2$, cioè se $x=\log 2$. Dunque non vi sono singolarità all'interno o al bordo del dominio di integrazione, e occorre verificare il comportamento di f solo all'infinito. Si ha:

$$e^{-t}f(t)-1=\frac{e^{2t}+2e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}}-1=\frac{18e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}}\underset{t\to+\infty}{\sim}18e^{-4t}.$$

Il decadimento dell'integranda è quindi esponenziale all'infinito, e dunque l'integrale improprio proposto esiste finito.

4. (punti 7) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n(n-\sqrt{n})}{n^2+2}x^n$$

Soluzione. Calcoliamo il raggio di convergenza. Vale, per $n\geq 2$:

$$\frac{3^{n+1}(n+1-\sqrt{n+1})}{(n+1)^2+2}\,\frac{n^2+2}{3^n(n-\sqrt{n})}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}3$$

Il raggio di convergenza è dunque $R=\frac{1}{3}$. In particolare la serie converge puntualmente e assolutamente se $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Valutiamo la convergenza agli estremi. Se $x=1/3$ la serie è a termini positivi e il suo termine generale è

$$\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n},$$

e dunque per il criterio del confronto asintotico la serie non converge neppure semplicemente. Se $x=-\frac{1}{3}$ la serie è a segni alterni e il suo termine generale è

$$(-1)^n\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+2}.$$

Sia $a_n=\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+2}$. Chiaramente $a_n\geq 0$ per ogni n e $a_n\to 0$ per $n\to+\infty$. Verifichiamo la decrescenza. Posto $f(x):=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+2}$, si ha

$$f'(x)=\frac{-2+4\sqrt{x}+3x^2-2x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{x}(x^2+2)^2},$$

che è chiaramente negativo per x abbastanza grande. Quindi a_n è definitivamente decrescente. Valgono le condizioni del criterio di Leibnitz, e quindi la serie data converge in $x=-\frac{1}{3}$. Per quanto già visto, in tale punto la serie non converge assolutamente. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, risultati noti permettono di concludere che essa ha luogo in tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{1}{3}-\varepsilon\right]$, per ogni $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (in realtà, un risultato da noi non svolto a lezione mostrerebbe che la convergenza uniforme ha luogo anche negli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\varepsilon\right]$).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		prova del 6/6/2024
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Risolvere la seguente equazione, nella variabile complessa z:

$$e^{z^4-i} = i,$$

rappresentando qualitativamente l'insieme delle soluzioni ottenuto nel piano complesso.

Soluzione. Riscriviamo l'equazione come

$$e^{z^4-i} = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff z^4 - i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \iff z^4 = i\left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Occorre quindi estrarre le radici quarte del membro di destra. Se $k \geq 0$, si ha $\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi > 0$. Quindi le radici quarte cercate hanno modulo pari a $\left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi\right)^{\frac{1}{4}}$, e argomenti dati da $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + 2h\pi\right)$, $h = 0, 1, 2, 3$, cioè $\frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi$. Se invece $k < 0$, si ha $\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi < 0$, quindi deve valere $z^4 = -i\left[-\left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi\right)\right]$, le radici hanno quindi modulo pari a $\left[-\left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2k\pi\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ e argomenti dati da $\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{2} + 2h\pi\right)$, $h = 0, 1, 2, 3$, cioè $\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left[\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)\right].$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. Determiniamo il dominio di f. Deve valere $x \neq -\frac{1}{2}$ e inoltre $\frac{x^2}{2x+1} > 0$, ma affinché il logaritmo più esterno sia ben definito occorre anche che $\frac{x^2}{2x+1} > 1$. Risolviamo quest'ultima disequazione. Essa è chiaramente falsa se $x < -\frac{1}{2}$, mentre se $x > -\frac{1}{2}$ essa equivale a $x^2 - 2x - 1 > 0$ che è soddisfatta se $x > 1 + \sqrt{2}$ e se $x < 1 - \sqrt{2}$. Osservando che $-\frac{1}{2} < 1 - \sqrt{2}$ si ottiene che la funzione è definita su $\left(-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Calcoliamo ora i limiti alla frontiera del dominio di definizione. Ovviamente vale

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

e non vi sono asintoti obliqui in tale limite in quanto la crescita della funzione è sublineare. Inoltre:

$$\lim_{x \to (1+\sqrt{2})^+} = -\infty, \qquad \lim_{x \to (1-\sqrt{2})^-} = -\infty, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} = +\infty.$$

Infatti, nei primi due limiti scritti la quantità $\frac{x^2}{2x+1}$ tende per costruzione a uno (per eccesso), quindi $\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ tende a zero (sempre per eccesso), mentre se $x \to -\left(\frac{1}{2}\right)^+$ chiaramente $\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ tende a $+\infty$.

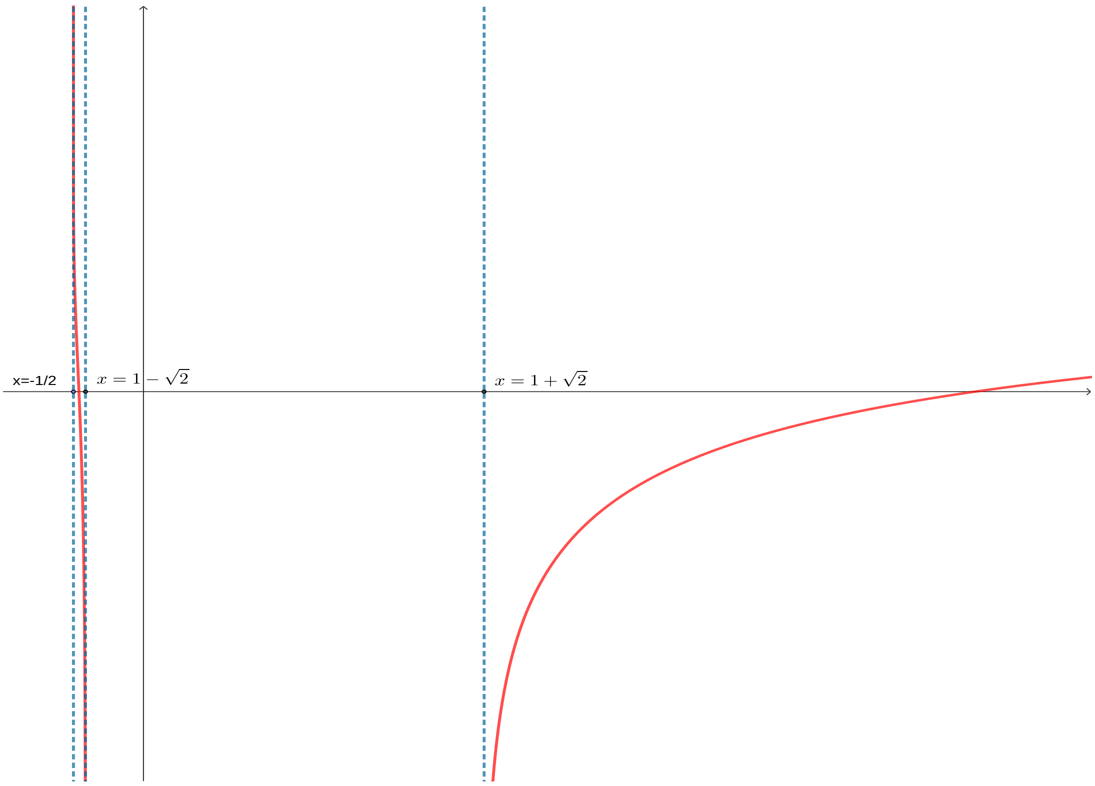
Studiamo ora il segno della funzione. Vale $f(x) > 0$ se e solo se $\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right) > 1$, che ha luogo se e solo se $\frac{x^2}{2x+1} > e$. Nel dominio di definizione di f, ciò equivale a $x^2 - 2ex - e > 0$. Il polinomio $x^2 - 2ex - e$ si annulla per $x = e \pm \sqrt{e^2 + e}$, è positivo per $x > e + \sqrt{e^2 + e}$ e per $x < e - \sqrt{e^2 + e}$, negativo altrimenti. La radice $x_1 = e + \sqrt{e^2 + e}$ è maggiore di $1 + \sqrt{2}$ in quanto è chiaro che $x_1 > 2e$. Dunque, per quanto riguarda il ramo della funzione che corrisponde a $x > 1 + \sqrt{2}$, si ha $f(x) > 0$ se $x > x_1$, mentre $f(x) < 0$ se $x \in (1 + \sqrt{2}, x_1)$. Inoltre $f(x_1) = 0$. Per quanto riguarda la radice $x_2 = e - \sqrt{e^2 + e}$ essa è chiaramente negativa ma non è ovvio a priori, a meno di verificarlo con una calcolatrice, che $x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$. Tuttavia, i limiti sopra calcolati, il fatto che f è evidentemente continua dove definita, e il teorema degli zeri, mostrano f deve avere almeno uno zero in $\left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$. Dato che non vi sono altri possibili zeri di f come conseguenza dei calcoli precedenti, ne segue che effettivamente $x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$. Quindi, nel ramo della funzione che corrisponde a $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$, $f(x) < 0$ se $x \in \left(x_2, 1-\sqrt{2}\right)$ mentre $f(x) > 0$ se $x \in \left(-\frac{1}{2}, x_2\right)$.

La funzione è derivabile ove definita. Calcoliamo quindi, nel dominio di f:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 \log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)} \frac{2x(2x+1)-2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{x^2(2x+1)\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)} = 2\frac{x+1}{x(2x+1)\log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)}.$$

Dunque f' non si annulla nell'insieme di definizione di f. Si noti che i fattori $(x+1), (2x+1), \log\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)$ sono tutti strettamente positivi per costruzione nel dominio di f. Quindi il segno di f' coincide con quello di x, quindi $f'(x) > 0$ se $x > 1+\sqrt{2}$, e f è quindi crescente in tale intervallo, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$, e f è quindi decrescente in tale intervallo.

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione:

$$f_a(x) = \frac{\sin\left[a(x-\sin x) - x^3\right]}{1+\log(\cos x)}.$$

Stabilire se esistono valori di a per i quali il termine principale dello sviluppo di Taylor centrato nell'origine di f_a è di grado strettamente superiore a tre, e in caso affermativo determinare tali valori e i primi due termini non nulli dello sviluppo.

Soluzione. Si ha chiaramente, qui e in seguito per $x \to 0$:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad a(x-\sin x) - x^3 = \left(\frac{a}{6} - 1\right)x^3 - \frac{ax^5}{120} + o(x^5).$$

Dunque:

$$\sin\left[a(x-\sin x) - x^3\right] = \sin\left[\left(\frac{a}{6}-1\right)x^3 - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right] = \left(\frac{a}{6}-1\right)x^3 - \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

in quanto i termini successivi al primo nello sviluppo dell'ultimo seno scritto sono chiaramente di ordine strettamente superiore a cinque (partono da x^9). Poichè, anche senza svolgere lo sviluppo in dettaglio come sarà fatto tra poco, è chiaro che

$$\frac{1}{1+\log(\cos x)} = 1 + o(1),$$

ne segue che il primo termine dello sviluppo di f è di grado strettamente maggiore di tre se e solo se $a = 6$. Poniamo quindi $a = 6$ e riscriviamo quanto sopra, per tale valore del parametro, e tenendo conto anche del termine successivo dello sviluppo, come:

$$\begin{aligned}\sin\left[6(x-\sin x)-x^3\right] &= \sin\left[6\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{7!}+o(x^7)\right)-x^3\right] = \sin\left[-\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{840}+o(x^7)\right]\\ &= -\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{840}+o(x^7).\end{aligned}$$

Vale inoltre:

$$\frac{1}{1+\log(\cos x)} = \frac{1}{1+\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Si ha quindi infine:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left[6(x-\sin x)-x^3\right]}{1+\log(\cos x)} &= \left[-\frac{x^5}{20}+\frac{x^7}{840}+o(x^7)\right]\left[1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right] = -\frac{x^5}{20}+\left(\frac{1}{840}-\frac{1}{40}\right)x^7+o(x^7)\\ &= -\frac{x^5}{20}-\frac{x^7}{42}+o(x^7)\end{aligned}$$

4. (punti 6) Studiare, per ogni $\alpha > 0$ fissato, la convergenza puntuale della seguente successione di funzioni:

$$f_{\alpha,n}(x) = \frac{n}{x^\alpha}\log\left(1+\frac{x^2}{n}\right), \quad x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Successivamente, studiare la convergenza uniforme nel caso $\alpha \in (0,2]$.

Soluzione. Fissati x, α, la quantità x^2/n tende a zero per $n \to +\infty$. Dunque, per ogni x, α fissati vale:

$$f_{\alpha,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{2-\alpha}.$$

Dunque, fissato $\alpha > 0$, la successione $f_{\alpha,n}$ converge puntualmente a $f_\alpha(x) = x^{2-\alpha}$, $x > 0$. Si noti inoltre che, fissati α ed n, vale $f_{\alpha,n}(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Quindi, non vi può essere convergenza uniforme di $f_{\alpha,n}$ a f_α su $[0,+\infty)$ se $\alpha \in (0,2]$, in quanto in tal caso f_α non tende a zero all'infinito e dunque

$$\sup_{x>0}|f_{\alpha,n}(x) - x^{2-\alpha}| = +\infty, \quad \forall \alpha \in (0,2].$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1		**prova del 12/7/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Si consideri la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + i},$$

determinandone il dominio di definizione. Determinarne parte reale e parte immaginaria. Successivamente, stabilire se la funzione assegnata è limitata sul proprio dominio di definizione, cioè se esiste $k > 0$ tale che $|f(z)| \le k$ per ogni z nel dominio di f.

Soluzione. La funzione è definita se $z^2 \neq -i = e^{3\pi/2}$, cioè se $z \neq e^{3\pi i/4}$, $z \neq e^{-\pi i/4}$. Per tali z, e posto $z = x + iy$, si ha:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x+iy}{(x+iy)^2 + i} = \frac{x+iy}{x^2 - y^2 + i(1+2xy)} = \frac{(x+iy)\,[x^2 - y^2 - i(1+2xy)]}{(x^2-y^2)^2 + (1+2xy)^2} \\ &= \frac{x(x^2-y^2) + y(1+2xy) + i[y(x^2-y^2)^2 - x(1+2xy)]}{(x^2-y^2) + (1+2xy)^2}. \end{aligned}$$

Quindi, sempre per $z \neq e^{3\pi i/4}$, $z \neq e^{-\pi i/4}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= \frac{x(x^2-y^2) + y(1+2xy)}{(x^2-y^2)^2 + (1+2xy)^2} = \frac{x^3 + y + xy^2}{(x^2-y^2)^2 + (1+2xy)^2}; \\ \operatorname{Im} f(z) &= \frac{y(x^2-y^2)^2 - x(1+2xy)}{(x^2-y^2)^2 + (1+2xy)^2} = -\frac{y^3 + x + yx^2}{(x^2-y^2)^2 + (1+2xy)^2}. \end{aligned}$$

Per rispondere alla domanda successiva, è sufficiente notare che

$$|f(z)|^2 = [\operatorname{Re} f(z)]^2 + [\operatorname{Im} f(z)]^2,$$

e che sia $\operatorname{Re} f(z)$ che $\operatorname{Im} f(z)$ sono, in valore assoluto, grandi a piacere se $z = x + iy$ è sufficientemente vicino a $e^{3\pi i/4}$ oppure a $e^{-\pi i/4}$. La funzione non è quindi limitata sul proprio dominio di definizione.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \left(e^x - e^{2x} - e^{3x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo le eventuali informazioni qualitative su concavità, convessità e flessi deducibili dal resto dello studio.

Soluzione. La funzione è definita ovunque. Studiamone i limiti. Vale chiaramente:

$$\lim_{x + \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x - \infty} f(x) = 0$$

in quanto per $x \to +\infty$ il termine dominante è $[-e^{3x}]^{1/3} = -e^x$, mentre per $x \to -\infty$ tutti gli addendi sotto radice tendono a zero. Chiaramente non vi sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ in quanto la crescita di f è esponenziale in tale limite.

Studiamo il segno di f. Esso coincide col segno di $e^x - e^{2x} - e^{3x}$ cioè, posto $t = e^x > 0$, col segno di $t - t^2 - t^3 = t(1 - t - t^2)$, dunque col segno di $1 - t - t^2$. Tale polinomio si annulla per $t = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, solo la radice positiva è accettabile, dunque la funzione è negativa se $e^x > (\sqrt{5}-1)/2$, cioè se $x > \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$, positiva se $x < \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$. La funzione si annulla solo se $x = \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$.

Studiamo ora la derivata prima, per $x \neq \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$, punto nel quale la funzione non è derivabile. Vale, per ogni tale x:

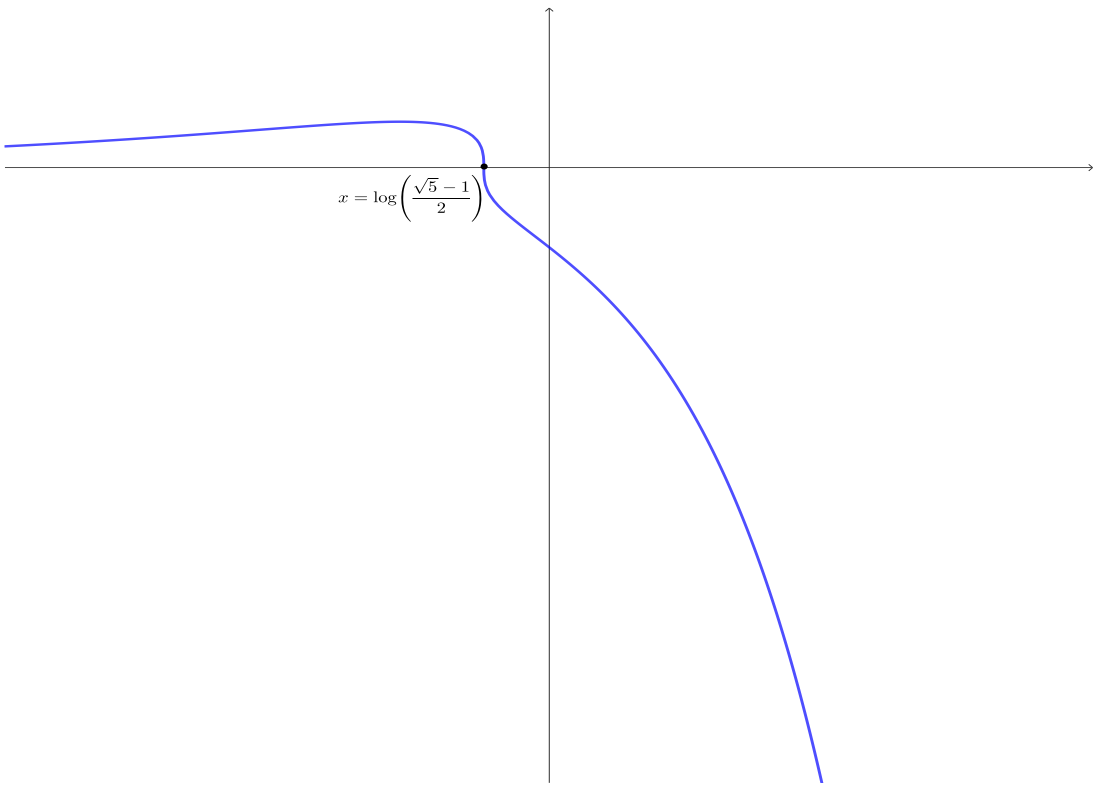
$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x} - 3e^{3x}}{3\left(e^x - e^{2x} - e^{3x}\right)^{2/3}}.$$

Il denominatore è sempre strettamente maggiore di zero nell'insieme di derivabilità di f. Quanto al numeratore, posto di nuovo $t = e^x > 0$, esso si riscrive com $t(1-2t-3t^2)$. Tale polinomio si annulla, per $t > 0$, se e solo se $t = 1/3$. Dunque la derivata prima si annulla se e solo se $x = -\log 3$. È facile vedere che tale valore di x è strettamente minore dello zero di f, $x = \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$. Quanto al segno della derivata, per quanto detto sopra esso coincide con il segno di $1-2t-3t^2$ con $t = e^x$, dunque $f'(x) > 0$ se $x < -\log 3$, così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ se $x > -\log 3$, così che f è decrescente in tale intervallo, mentre il punto $x = -\log 3$ è di massimo relativo per f. Il fatto che esso sia l'unico massimo relativo di f e che f sia definita ovunque implica che tale punto è anche di massimo assoluto. Si noti infine che:

$$\lim_{x \to \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]} = -\infty.$$

Dunque il punto $x = \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$ è un flesso a tangente verticale di f. Le informazioni ottenute permettono inoltre di stabilire che esiste almeno un flesso per $x < \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$, in quanto la concavità di f deve passare dall'essere rivolta verso l'alto all'essere rivolta verso il basso almeno una volta in tale intervallo, e almeno un flesso per $x > \log\left[(\sqrt{5}-1)/2\right]$, in quanto analogamente la concavità di f deve passare dall'essere rivolta verso l'alto all'essere rivolta verso il basso almeno una volta in tale intervallo.

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + (\sin x)^4 + (\cos x)^4}.$$

Soluzione. Scriviamo, dapprima con la sostituzione $\sin x = t$ e poi con quella $t^2 = u$:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\int \frac{\sin x \cos x}{1+(\sin x)^4+(\cos x)^4}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\sin x\cos x}{1+(\sin x)^4+(1-(\sin x)^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin x\cos x}{1+(\sin x)^4-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t^4-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\frac{1}{2}\right)\right]+c = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\frac{1}{2}\right)\right]+c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t^2-\frac{1}{2}\right)\right]+c = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left((\sin x)^2-\frac{1}{2}\right)\right]+c,
\end{aligned}$$

con c costante arbitraria reale. Ovviamente, era possibile procedere più brevemente con la singola sostituzione $(\sin x)^2 = u$, ma è stato svolto il calcolo in due passaggi, più immediato.

4. (punti 6) Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \arctan(x+n), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Determinare se la successione converge puntualmente, e in tal caso determinarne il limite puntuale, se essa converge uniformemente su $\mathbb{R}$, e in caso negativo in quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ essa converge uniformemente.

Soluzione. Chiaramente si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato:

$$\lim_{n\to+\infty} \arctan(x+n) = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque è immediato osservare che la successioni di funzioni data converge puntualmente alla funzione costante $f(x) = \frac{\pi}{2}$ su tutto $\mathbb{R}$. Studiamo la convergenza uniforme, in primo luogo su tutto $\mathbb{R}$. Dobbiamo calcolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\arctan(x+n) - \frac{\pi}{2}\right|.$$

È chiaro che, per $x \to -\infty$ ed n fissato, $\arctan(x+n) \to -\frac{\pi}{2}$. Ne segue dunque che:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\arctan(x+n) - \frac{\pi}{2}\right| = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che ovviamente non tende a zero per $n \to +\infty$. Dunque non vi è convergenza uniforme di f_n a f su $\mathbb{R}$. Lo stesso evidentemente vale su ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ illimitato dal basso. Verifichiamo allora se la convergenza uniforme ha luogo sugli intervalli del tipo $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$. In analogia a quanto detto prima, e usando il fatto che $\arctan$ è crescente, si ha:

$$\sup_{x\geq a} \left|\arctan(x+n) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\arctan(a+n) - \frac{\pi}{2}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$ fissato. Dunque vi è convergenza uniforme su ogni intervallo $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$, e quindi ovviamente in ogni sottoinsieme di un tale intervallo.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1		**prova del 28/8/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Determinare, al variare del parametro *reale* α, le soluzioni della seguente equazione nella variabile *complessa* z:

$$z + z|z|^2 = \alpha\overline{z}.$$

Soluzione. Posto $z = x + iy$ l'equazione si riscrive come:

$$x + iy + (x+iy)(x^2+y^2) = \alpha(x - iy) \iff x + x(x^2+y^2) - \alpha x + i\left[y + y(x^2+y^2) + \alpha y\right] = 0$$
$$\iff x\left(1 - \alpha + x^2 + y^2\right) + iy\left(1 + \alpha + x^2 + y^2\right) = 0.$$

Ciò accade se e solo se vale uno dei seguenti casi:

- $x = 0, y = 0$, cioè $z = 0$;
- $x = 0$, $y^2 = -1 - \alpha$, nel caso $\alpha < -1$, cioè $z = \pm i\sqrt{-1-\alpha}$ appunto se $\alpha < -1$;
- $y = 0$, $x^2 = \alpha - 1$ nel caso $\alpha > 1$, cioè $z = \pm\sqrt{\alpha - 1}$ appunto se $\alpha > 1$.

Si noti infatti che non è possibile che valga simultaneamente $x^2 + y^2 = \alpha - 1$ e $x^2 + y^2 = -1 - \alpha$. Dunque le soluzioni sono: per $\alpha < -1$, $z = 0$ e $z = \pm i\sqrt{-1-\alpha}$. Se $\alpha \in [-1, 1]$ il solo punto $z = 0$, se $\alpha > 1$, $z = 0$ e $z = \pm\sqrt{\alpha - 1}$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left[1 + \log(1 + e^{-x})\right].$$

Soluzione. La funzione è ovunque definita. Infatti per ogni x vale chiaramente $1+e^{-x} > 1$ e quindi $\log(1+e^{-x}) > 0$, così che entrambi i logaritmi che compaiono nella funzione sono ben definiti per ogni x. Inoltre, essendo $1 + \log(1 + e^{-x}) > 1$, si ha anche che $f(x) > 0$ per ogni x. Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$. Vale:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Vi è dunque un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Non vi è alcun asintoto obliquo per $x \to -\infty$ in quanto $f(x) \sim \log(-x)$ in tale limite. Calcoliamo la derivata prima. Vale, per ogni x:

$$f'(x) = -\frac{1}{e^x\left[1 + \log(1+e^{-x})\right](1 + e^{-x})} = -\frac{1}{\left[1 + \log(1+e^{-x})\right](1 + e^{x})},$$

il denominatore essendo, per quanto detto sopra, sempre diverso da zero. Sempre per quanto sopra, si ha chiaramente che il denominatore è sempre strettamente positivo, e quindi che $f'(x) < 0$ per ogni x. Dunque la funzione è monotona strettamente decrescente su $\mathbb{R}$. Resta da calcolare la derivata seconda. Si ha, per ogni x:

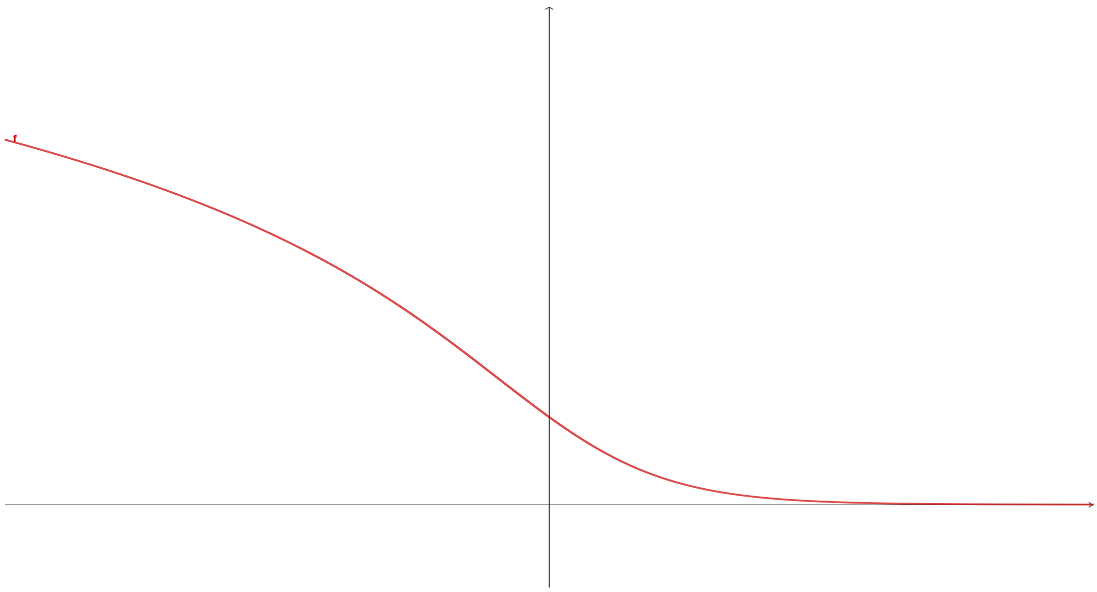
$$f''(x) = \frac{-\frac{e^{-x}(1+e^x)}{1+e^{-x}} + e^x\left[1 + \log(1+e^{-x})\right]}{\left[1 + \log(1+e^{-x})\right]^2(1+e^x)^2} = \frac{e^x\left[1 + \log(1+e^{-x})\right] - 1}{\left[1 + \log(1+e^{-x})\right]^2(1+e^x)^2}.$$

Il denominatore è ovviamente sempre strettamente positivo. Quanto al numeratore, esso si riscrive come:

$$e^x\left[1 + \log(1+e^{-x})\right] - 1 = e^x\left[1 + \log(1+e^{-x}) - e^{-x}\right],$$

che ha il segno di $1 + \log(1+e^{-x}) - e^{-x}$. Posto $t = e^{-x} > 0$ l'ultima quantità scritta diventa $1 + \log(1+t) - t$. Tale quantità è, ad esempio, positiva se e solo se $\log(1+t) > t - 1$. Lo studio grafico di tale disequazione è immediato e mostra che esiste un solo $t_0 > 0$ (in realtà $t_0 > 1$) tale che $\log(1+t) > t - 1$ se e solo se $t \in (0, t_0)$, cioè se e solo se $x \in (x_0, +\infty)$, con $t_0 = e^{-x_0}$ cioè $x_0 = -\log t_0 < 0$. Dunque f è convessa per $x \in (x_0, +\infty)$, per un opportuno $x_0 < 0$, e convessa in $(-\infty, x_0)$. Il grafico di f è il seguente:

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

(suggerimento: è opportuno razionalizzare l'integrando). Successivamente, e senza far uso della primitiva calcolata, stabilire se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Seguendo il suggerimento scriviamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{1+x-(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integriamo separatamente i due addendi. Vale, con la sostituzione $\sqrt{1+x}=t$, così che $1+x=t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^2-1}2t\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = 2\int \left(1+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t + \log|t-1| - \log|t+1| + c = 2\sqrt{1+x} + \log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + c$$

con c costante arbitraria. Analogamente, posto $\sqrt{1-x}=t$, così che $1-x=t^2$ e $\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t}{1-t^2}2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t,$$

che è l'integrale precedente, e dunque:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1-x} + \log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + c,$$

con c costante arbitraria. In conclusione:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + c,$$

con c costante arbitraria.

Circa la seconda domanda, si noti che $\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}$ se e solo se $x=0$. Dunque l'integrando ha una singolarità solo per $=0$. Si ha, in tale limite:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \sim 1+\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{2}x+o(x) = x+o(x).$$

Dunque l'integranda è asintontica a $\frac{1}{x}$ per $x\to 0$, e dunque l'integrale improprio proposto non converge.

4. (punti 6) Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_n(x) = \frac{\log(1 + x^n)}{\log(1 + (2x)^n)}, \quad x > 0, n \in \mathbb{N}$$

Mostrare che la successione di funzioni data converge puntualmente su $(0, +\infty)$ determinandone il limite. Successivamente, mostrare che la convergenza è uniforme sull'intervallo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Soluzione. Si assuma dapprima che $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Si ha allora:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{(2x)^n} = \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x = \frac{1}{2}$ vale:

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\log 2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ vale:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n\log(2x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x = 1$ vale

$$f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\log 2}{n\log(2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Infine, se $x > 1$ vale:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\log(x^n)}{\log[(2x)^n]} = \frac{\log x}{\log(2x)}.$$

Dunque la successione di funzioni assegnata converge puntualmente, per $n \to +\infty$, alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1] \\ \frac{\log x}{\log(2x)} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Riguardo alla seconda richiesta, dobbiamo verificare se è vero che

$$\sup_{x\in\left[\frac{2}{3},1\right]} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

in quanto il limite puntuale di f_n nell'intervallo indicato è zero. A tal fine, notiamo in primo luogo che $f_n(x) > 0$ per ogni x, e inoltre che:

$$0 < f_n(x) \leq \frac{\log 2}{\log\left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n\right]} \qquad \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

dunque

$$\sup_{x\in\left[\frac{2}{3},1\right]} |f_n(x)| \leq \frac{\log 2}{\log\left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n\right]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dunque la successione converge uniformemente a zero nell'intervallo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.