| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Prova scritta del 05/11/2022** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 12) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \mapsto \mathbb{C}$ così definita:

$$f(z) = \frac{z-i}{1-iz}, \quad z \neq -i.$$

- Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$. Per quali $z$ si ha $f(z) \in \mathbb{R}$? Per quali $z$ $f(z)$ è immaginario? Identificare nel piano complesso i due insiemi così ottenuti.
- Risolvere la disequazione $|f(z)| < 2$, individuando nel piano complesso l'insieme delle soluzioni (suggerimento: si ricordi che $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$).
- Determinare l'immagine di $f$, cioè l'insieme dei $w \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = w$ per qualche $z \neq -i$. Detta $B$ tale immagine stabilire se $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \mapsto B$ è invertibile e, in caso affermativo, determinare esplicitamente la sua inversa.

**Soluzione**.

- Posto $z = x + iy$ si ha, per $z \neq -i$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-i}{1-iz} = \frac{x+i(y-1)}{1+y-ix} = \frac{[x+i(y-1)]\,[1+y+ix]}{(1+y)^2+x^2} \\ &= \frac{x(1+y)-x(y-1)+i(y^2-1+x^2)}{(1+y)^2+x^2} = \frac{2x+i(x^2+y^2-1)}{(1+y)^2+x^2} \\ &= \frac{2x}{(1+y)^2+x^2} + i\frac{x^2+y^2-1}{(1+y)^2+x^2}. \end{aligned}$$

  Dunque sempre per $z \neq -i$:

$$\mathrm{Re}\,[f(z)] = \frac{2x}{(1+y)^2+x^2}, \quad \mathrm{Im}\,[f(z)] = \frac{x^2+y^2-1}{(1+y)^2+x^2}.$$

  Dunque $f(z)$ è reale se e solo se $x^2+y^2=1$, ovvero se $z$ appartiene alla circonferenza unitaria centrata nell'origine, che va privata del punto $z=-i$ in quanto non appartenente al dominio, mentre $f(z)$ è immaginaria se e solo se $x=0$, ovvero se $z$ è anch'esso immaginario.
- La disequazione data equivale a:

$$|z-i|^2 < 4|1-iz|^2 \iff |(x+i(y-1)|^2 < 4|1+y-ix|^2 \iff x^2+(y-1)^2 < 4[(1+y)^2+x^2]$$

$$x^2+y^2+1-2y < 4x^2+4y^2+4+8y \iff x^2+y^2+1+\frac{10}{3}y > 0 \iff x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} > 0$$

$$\iff x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2 > \frac{16}{9}.$$

  Si tratta quindi del complementare della circonferenza di raggio $4/3$ centrata in $-5i/3$.
- Sia $w \in \mathbb{C}$. Si ha:

$$f(z) = w \iff z-i = w(1-iz) \iff z(1+iw) = w+i.$$

  L'ultima equazione scritta ammette soluzione se e solo se $w \neq i$ e in tal caso la soluzione è unica e vale

$$z = \frac{w+i}{1+wi}.$$

  Dunque $B = \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \mapsto B$ è invertibile e si ha $f^{-1}(w) = \frac{w+i}{1+wi}$ per ogni $w \in B$.

**2.** (punti 20) Sia $h \in \mathbb{R}$, sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica dello spazio $\mathbb{R}^3$ e sia $L_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita dalla sua azione sui vettori di $\mathcal{B}$:

$L_h(\boldsymbol{i}) = (1, h, 3)^t$
$L_h(\boldsymbol{j}) = (-h, h, -1)^t$
$L_h(\boldsymbol{k}) = (1, -h, h)^t$

- Determinare la matrice associata ad $L_h$ rispetto alla base canonica.
- Determinare i valori di $h$ per cui $L_h$ non è suriettiva.
- Determinare per quali valori di $h$ esistono le controimmagini attraverso $L_h$ del vettore $\boldsymbol{w} = (-1, 3, 1)^t$.
- Esibire una base del nucleo di $L_h$ nel caso $h = -5$.
- Sia $\pi$ il piano di equazione $x - y - 2z = 0$, fornire una base dell'immagine di $\pi$ attraverso $L_h$ per $h = 0$.
- Sia $h = 1$, stabilire se la matrice associata ad $L_h$ sia diagonalizzabile.

**Soluzione**.

- Detta $A_h$ la matrice associata a $L_h$ rispetto alla base canonica, si ha:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -h & 1 \\ h & h & -h \\ 3 & -1 & h \end{pmatrix}$$

- $0 = \det A = h^3 + 4h^2 - 5h = h(h+5)(h-1)$. La matrice non è suriettiva se $h = -5 \vee h = 0 \vee h = 1$.
- Sia $h = -5$. Consideriamo la matrice completa $A_{-5}|\boldsymbol{w}$:

$$A_{-5}|\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

Si noti che $\mathrm{Rk}(A_{-5}) = 2$ (determinante nullo, presenza di minori di ordine due non nulli) mentre $\mathrm{Rk}[A_{-5}|\boldsymbol{w}] = 3$. Infatti, ad esempio, il minore di ordine tre formato da prima, seconda e quarta colonna è diverso da zero. Pertanto, non esistono controimmagini di $\boldsymbol{w}$ attraverso $A_{-5}$.
Sia $h = 0$. Anche in questo caso non esistono controimmagini di $\boldsymbol{w}$ attraverso $A_0$, infatti la seconda riga si riduce a $0 = 3$.
Sia $h = 1$. La matrice completa diventa:

$$A_1|\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

In questo caso $\mathrm{Rk}(A_1) = 2$ (determinante nullo, presenza di minori di ordine due non nulli) e $\mathrm{Rk}[A_1|\boldsymbol{w}] = 2$. Per verificarlo, si noti che il minore di ordine due formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo, mentre sono nulli i determinanti degli orlati che si ottengono aggiungendo o la terza colonna o la quarta colonna. Pertanto esistono $\infty^1$ controimmagini di $\boldsymbol{w}$ attraverso $A_1$.
- Occorre risolvere il sistema omogeneo $A_{-5}\boldsymbol{v} = 0$. Escludendo la terza riga perchè ridondante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(II+5I)/10]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui, scelto $y = t$, segue: $z = -2t$, $x = -3t$.
Dunque, i vettori appartenenti al nucleo di $A_{-5}$ sono della forma $t(-3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$, con $t \in \mathbb{R}$.
- Sia $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ appartenente al piano $\pi$. Allora deve valere che: $x = y + 2z$.
L'azione di $A_0$ su $\boldsymbol{v}$ è la seguente:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 0 \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+3z \\ 0 \\ 2y+6z \end{pmatrix} = (y+3z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Dunque, i vettori appartenenti a $L_0(\pi)$ sono della forma $t(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k})$, con $t \in \mathbb{R}$.

- Si risolve l'equazione caratteristica: $\det(A_1 - \lambda)\mathbb{I} = 0$ , che risulta essere $-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$ . Da cui $\mathrm{Sp}(A_1) = \{0^2, 3\}$ . Studiamo la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 0$ . L'operatore

$$A_1 - 0\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

presenta due colonne tra loro opposte e almeno un minore di ordine due non nullo, pertanto $\mathrm{Rk}(A_1) = 2$ La dimensione dell'autospazio è $3 - 2 = 1$ . Dunque $m_g \neq m_a$ , quindi la matrice non è diagonalizzabile.

| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B | | Prova scritta del 05/11/2022 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 12) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto \mathbb{C}$ così definita:

$$f(z) = \frac{z+i}{1+iz}, \quad z \neq i.$$

- Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$. Per quali $z$ si ha $f(z) \in \mathbb{R}$? Per quali $z$ $f(z)$ è immaginario? Identificare nel piano complesso i due insiemi così ottenuti.
- Risolvere la disequazione $|f(z)| < 2$, individuando nel piano complesso l'insieme delle soluzioni (suggerimento: si ricordi che $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$).
- Determinare l'immagine di $f$, cioè l'insieme dei $w \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = w$ per qualche $z \neq i$. Detta $B$ tale immagine stabilire se $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto B$ è invertibile e, in caso affermativo, determinare esplicitamente la sua inversa.

**Soluzione**.

- Posto $z = x + iy$ si ha, per $z \neq i$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+i}{1+iz} = \frac{x+i(y+1)}{1-y+ix} = \frac{[x+i(y+1)]\,[1-y-ix]}{(1-y)^2+x^2} \\ &= \frac{x(1-y)+x(y+1)+i(1-y^2-x^2)}{(1+y)^2+x^2} = \frac{2x+i(1-x^2-y^2)}{(1-y)^2+x^2} \\ &= \frac{2x}{(1-y)^2+x^2} + i\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}. \end{aligned}$$

Dunque sempre per $z \neq i$:

$$\mathrm{Re}\,[f(z)] = \frac{2x}{(1-y)^2+x^2}, \quad \mathrm{Im}\,[f(z)] = \frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}.$$

Dunque $f(z)$ è reale se e solo se $x^2 + y^2 = 1$, ovvero se $z$ appartiene alla circonferenza unitaria centrata nell'origine, che va privata del punto $z = i$ in quanto non appartenente al dominio, mentre $f(z)$ è immaginaria se e solo se $x = 0$, ovvero se $z$ è anch'esso immaginario.

- La disequazione data equivale a:

$$|z+i|^2 < 4|1+iz|^2 \iff |(x+i(y+1)|^2 < 4|1-y-ix|^2 \iff x^2+(y+1)^2 < 4[(1-y)^2+x^2]$$

$$x^2+y^2+1+2y < 4x^2+4y^2+4-8y \iff x^2+y^2+1-\frac{10}{3}y > 0 \iff x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} > 0$$

$$\iff x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2 > \frac{16}{9}.$$

Si tratta quindi del complementare della circonferenza di raggio 4/3 centrata in $5i/3$.

- Sia $w \in \mathbb{C}$. Si ha:

$$f(z) = w \iff z+i = w(1+iz) \iff z(1-iw) = w-i.$$

L'ultima equazione scritta ammette soluzione se e solo se $w \neq -i$ e in tal caso la soluzione è unica e vale

$$z = \frac{w-i}{1-wi}.$$

Dunque $B = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto B$ è invertibile e si ha $f^{-1}(w) = \frac{w-i}{1-wi}$ per ogni $w \in B$.

**2.** (punti 20) Sia $h \in \mathbb{R}$, sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canonica dello spazio $\mathbb{R}^3$ e sia $L_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita dalla sua azione sui vettori di $\mathcal{B}$:

$$L_h(\boldsymbol{i}) = (-h, h, 1)^t$$
$$L_h(\boldsymbol{j}) = (1, -h, h)^t$$
$$L_h(\boldsymbol{k}) = (3, h, 1)^t$$

- Determinare la matrice associata ad $L_h$ rispetto alla base canonica.
- Determinare i valori di $h$ per cui $L_h$ non è suriettiva.
- Determinare per quali valori di $h$ esistono le controimmagini attraverso $L_h$ del vettore $\boldsymbol{w} = (1, -3, 3)^t$.
- Esibire una base del nucleo di $L_h$ nel caso $h = -3$.
- Sia $\pi$ il piano di equazione $x + y + 4z = 0$, fornire una base dell'immagine di $\pi$ attraverso $L_h$ per $h = 0$.
- Sia $h = -1$, stabilire se la matrice associata ad $L_h$ sia diagonalizzabile.

**Soluzione**.

- Detta $A_h$ la matrice associata a $L_h$ rispetto alla base canonica, si ha:

$$A_h = \begin{pmatrix} -h & 1 & 3 \\ h & -h & h \\ 1 & h & 1 \end{pmatrix}$$

- $0 = \det A = h^3 + 4h^2 + 3h = h(h+3)(h+1)$. La matrice non è suriettiva se $h = -3 \vee h = -1 \vee h = 0$.
- Sia $h = -3$. Consideriamo la matrice completa $A_{-3}|\boldsymbol{w}$:

$$A_{-3}|\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Si noti che $\mathrm{Rk}(A_{-3}) = 2$ (determinante nullo, presenza di minori di ordine due non nulli) mentre $\mathrm{Rk}[A_{-3}|\boldsymbol{w}] = 3$. Infatti, ad esempio, il minore di ordine tre formato da prima, seconda e quarta colonna è diverso da zero. Pertanto, non esistono controimmagini di $\boldsymbol{w}$ attraverso $A_{-3}$.
Sia $h = 0$. Anche in questo caso non esistono controimmagini di $\boldsymbol{w}$ attraverso $A_0$, infatti la seconda riga si riduce a $0 = -3$.
Sia $h = -1$. La matrice completa diventa:

$$A_{-1}|\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

In questo caso $\mathrm{Rk}(A_{-1}) = 2$ (determinante nullo, presenza di minori di ordine due non nulli) e $\mathrm{Rk}[A_{-1}|\boldsymbol{w}] = 2$. Per verificarlo, si noti che il minore di ordine due formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne è non nullo, mentre sono nulli i determinanti degli orlati che si ottengono aggiungendo o la terza colonna o la quarta colonna. Pertanto esistono $\infty^1$ controimmagini di $\boldsymbol{w}$ attraverso $A_{-1}$.
- Occorre risolvere il sistema omogeneo $A_{-3}\boldsymbol{v} = 0$. Escludendo la seconda perchè ridondante:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(II-3I)/10]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui, $y = 0$ e scelto $x = t$, segue: $z = -t$.
Dunque, i vettori appartenenti al nucleo di $A_{-3}$ sono della forma $t(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$, con $t \in \mathbb{R}$.
- Sia $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ appartenente al piano $\pi$. Allora deve valere che: $x = -y - 4z$.
L'azione di $A_0$ su $\boldsymbol{v}$ è la seguente:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 3z \\ 0 \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 3z \\ 0 \\ -y - 3z \end{pmatrix} = (y + 3z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Dunque, i vettori appartenenti a $L_0(\pi)$ sono della forma $t(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$, con $t \in \mathbb{R}$.

- Si risolve l'equazione caratteristica: $\det(A_{-1} - \lambda)\mathbb{I} = 0$ , che risulta essere $-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$ . Da cui $\mathrm{Sp}(A_{-1}) = \{0^2, 3\}$ . Studiamo la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 0$ . L'operatore

$$A_{-1} - 0\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

presenta due righe tra loro opposte e almeno un minore di ordine due non nullo, pertanto $\mathrm{Rk}(A_{-1}) = 2$ La dimensione dell'autospazio è $3 - 2 = 1$ . Dunque $m_g \neq m_a$ , quindi la matrice non è diagonalizzabile.

| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Recupero prima prova intermedia, 14/1/2023** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 12) Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

- Scrivere parte reale e immaginaria di $f(z)$ in termini delle coordinate cartesiane di $z$;
- Risolvere la disequazione $|\operatorname{Re} f(z)| < 1$, individuando in $\mathbb{C}$ il luogo dei punti trovati;
- Risolvere l'equazione $[f(z)]^3 = i$.

**Soluzione**. Calcoliamo, posto $z = x + iy$ e per $z \neq 1$:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{(1-x)^2+y^2}.$$

Dunque, sempre per $z \neq 1$, si ha:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2}.$$

Circa il secondo punto, occorre quindi risolvere la disequazione:

$$\frac{\left|1-x^2-y^2\right|}{(1-x)^2+y^2} < 1.$$

Supponiamo che $1-x^2-y^2 \geq 0$, ovvero che $z \in \overline{B_1(0)}$, cerchio (incluso il bordo) di raggio uno centrato nell'origine, e che $z \neq 1$. Deve allora valere:

$$\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} < 1 \iff 1-x^2-y^2 < (1-x)^2+y^2 \iff 1-x^2-y^2 < 1+x^2-2x+y^2$$

$$\iff x^2+y^2-x > 0 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}.$$

Dunque, se $z \in \overline{B_1(0)}$ e $z \neq 1$, la condizione richiesta è $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$, ovvero che $z \notin \overline{B_{1/2}(1/2)}$, cerchio (incluso il bordo) di raggio $1/2$ centrato in $z = 1/2$. Se invece $1-x^2-y^2 < 0$, cioè se $z$ è esterno al cerchio (incluso il bordo) di raggio uno centrato nell'origine, deve valere:

$$\frac{x^2+y^2-1}{(1-x)^2+y^2} < 1 \iff x^2+y^2-1 < x^2-2x+1+y^2 \iff x < 1.$$

In conclusione l'insieme cercato, sia esso $A$, è il seguente: $A = \{z = x+iy \in \mathbb{C}, x < 1, z \notin \overline{B_{1/2}(1/2)}\}$.

Circa l'ultimo punto, notiamo in primo luogo che le radici cubiche di $i$ sono $w_1 = e^{i\pi/6} = (i+\sqrt{3})/2$, $w_2 = e^{5i\pi/6} = (i-\sqrt{3})/2$, $w_1 = e^{3i\pi/2} = -i$. Vanno dunque risolte le equazioni $f(z) = w_i$ con $i = 1, 2, 3$. Calcoli elementari mostrano che tali soluzioni sono, rispettivamente, $z_1 = i(2-\sqrt{3})$, $z_2 = i(2+\sqrt{3})$, $z_3 = -i$.

**2.** (punti 20) Provare che l'insieme di vettori $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0)^t$ , $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,1)^t$ , $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,-1)^t$ forma una base nello spazio $\mathbb{R}^3$ . Sia inoltre $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare definita dall'azione sui vettori $\boldsymbol{v}_i$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\
&f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3 \\
&f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

- Calcolare l'azione di $f$ sui vettori $\boldsymbol{i}$ , $\boldsymbol{j}$ , $\boldsymbol{k}$ della base canonica e, di conseguenza, determinare la matrice $A$ associata ad $f$ rispetto alla base canonica.
- Determinare il nucleo di $f$ . Esibire inoltre una base del sottospazio formato da tutti i vettori ortogonali al nucleo di $f$ .
- Determinare gli autovalori di $A$ .
- Stabilire se $A$ sia diagonalizzabile.

**Soluzione**. La terna di vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ forma una base, infatti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

- Dalla linearità di $f$ , segue:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= f(\boldsymbol{i}) + 2f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= f(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3 \\
f(\boldsymbol{v}_3) &= f(\boldsymbol{j}) - f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

  Sottraendo dalla prima equazione la somma della seconda e terza equazione, segue: $f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}$ . Quindi: $f(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ e $f(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ .
  Pertanto, esprimendo tali vettori nella base canonica, si ha:

$$f(\boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Tali vettori risultano essere le colonne della matrice associata ad $f$ in relazione alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Osservando che $f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}$ e che il rango di $A$ vale palesemente due, segue: $\ker(f) = \alpha \boldsymbol{j}$ , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
  Il sottospazio ortogonale a $\ker(f)$ è l'insieme dei vettori $\beta \boldsymbol{i} + \gamma \boldsymbol{k}$ , $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Come base di tale sottospazio si può scegliere la coppia di vettori $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}\}$ .
- Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ , si ottiene: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica uno e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica due. Vale a dire: $\mathrm{Sp}\ (A) = \{0, 1^2\}$ .
- Relativamente a $\lambda_2 = 1$ , l'operatore $A - \lambda \mathbb{I}$ diventa:

$$A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Essendo $\mathrm{Rk}\ (A - \mathbb{I}) = 2$ , la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2 = 1$ è $3 - 2 = 1$ , diversa dalla sua molteplicità algebrica, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B** | | **Recupero prima prova intermedia, 14/1/2023** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 12) Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f(z) = \frac{2+z}{2-z}.$$

- Scrivere parte reale e immaginaria di $f(z)$ in termini delle coordinate cartesiane di $z$;
- Risolvere la disequazione $|\mathrm{Re}\, f(z)| < 1$, individuando in $\mathbb{C}$ il luogo dei punti trovati;
- Risolvere l'equazione $[f(z)]^3 = i$.

**Soluzione**. Calcoliamo, posto $z = x + iy$ e per $z \neq 2$:

$$\frac{2+z}{2-z} = \frac{2+x+iy}{2-x-iy} = \frac{(2+x+iy)(2-x+iy)}{(2-x)^2+y^2} = \frac{4-x^2-y^2+4iy}{(2-x)^2+y^2}.$$

Dunque, sempre per $z \neq 2$, si ha:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2+z}{2-z}\right) = \frac{4-x^2-y^2}{(2-x)^2+y^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{2+z}{2-z}\right) = \frac{4y}{(2-x)^2+y^2}.$$

Circa il secondo punto, occorre quindi risolvere la disequazione:

$$\frac{\left|4-x^2-y^2\right|}{(2-x)^2+y^2} < 1.$$

Supponiamo che $4-x^2-y^2 \geq 0$, ovvero che $z \in \overline{B_2(0)}$, cerchio (incluso il bordo) di raggio due centrato nell'origine, e che $z \neq 2$. Deve allora valere:

$$\begin{aligned}&\frac{4-x^2-y^2}{(2-x)^2+y^2} < 1 \iff 4-x^2-y^2 < (2-x)^2+y^2 \iff 4-x^2-y^2 < 4+x^2-4x+y^2\\ &\iff x^2+y^2-2x > 0 \iff (x-1)^2+y^2 > 1.\end{aligned}$$

Dunque, se $z \in \overline{B_2(0)}$ e $z \neq 2$, la condizione richiesta è $(x-1)^2+y^2 > 1$, ovvero che $z \notin \overline{B_1(1)}$, cerchio (incluso il bordo) di raggio uno centrato in $z = 1$. Se invece $4-x^2-y^2 < 0$, cioè se $z$ è esterno al cerchio (incluso il bordo) di raggio due centrato nell'origine, deve valere:

$$\frac{x^2+y^2-4}{(2-x)^2+y^2} < 1 \iff x^2+y^2-4 < x^2-4x+4+y^2 \iff x < 2.$$

In conclusione l'insieme cercato, sia esso $A$, è il seguente: $A = \{z = x+iy \in \mathbb{C}, x < 2, z \notin \overline{B_1(1)}\}$.

Circa l'ultimo punto, notiamo in primo luogo che le radici cubiche di $i$ sono $w_1 = e^{i\pi/6} = (i+\sqrt{3})/2$, $w_2 = e^{5i\pi/6} = (i-\sqrt{3})/2$, $w_1 = e^{3i\pi/2} = -i$. Vanno dunque risolte le equazioni $f(z) = w_i$ con $i = 1,2,3$. Calcoli elementari mostrano che tali soluzioni sono, rispettivamente, $z_1 = 2i(2-\sqrt{3})$, $z_2 = 2i(2+\sqrt{3})$, $z_3 = -2i$.

**2.** (punti 20) Provare che l'insieme di vettori $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,2)^t$ , $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,0)^t$ , $\boldsymbol{v}_3 = (-1,0,1)^t$ forma una base nello spazio $\mathbb{R}^3$ . Sia inoltre $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare definita dall'azione sui vettori $\boldsymbol{v}_i$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3 \\
f(\boldsymbol{v}_3) &= \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

- Calcolare l'azione di $f$ sui vettori $\boldsymbol{i}$ , $\boldsymbol{j}$ , $\boldsymbol{k}$ della base canonica e, di conseguenza, determinare la matrice $A$ associata ad $f$ rispetto alla base canonica.
- Determinare il nucleo di $f$ . Esibire inoltre una base del sottospazio formato da tutti i vettori ortogonali al nucleo di $f$ .
- Determinare gli autovalori di $A$ .
- Stabilire se $A$ sia diagonalizzabile.

**Soluzione**. La terna di vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ forma una base, infatti:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- Dalla linearità di $f$ , segue:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= f(\boldsymbol{j}) + 2f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= f(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3 \\
f(\boldsymbol{v}_3) &= -f(\boldsymbol{i}) + f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

  Sottraendo dalla prima equazione la somma della seconda e terza equazione, segue: $f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}$ . Quindi: $f(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ e $f(\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ .
  Pertanto, esprimendo tali vettori nella base canonica, si ha:

$$f(\boldsymbol{i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{j}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Tali vettori risultano essere le colonne della matrice associata ad $f$ in relazione alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Osservando che $f(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}$ e che il rango di $A$ vale palesemente due, segue: $\ker(f) = \alpha \boldsymbol{k}$ , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .
  Il sottospazio ortogonale a $\ker(f)$ è l'insieme dei vettori $\beta \boldsymbol{i} + \gamma \boldsymbol{j}$ , $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Come base di tale sottospazio si può scegliere la coppia di vettori $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ .
- Risolvendo l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ , si ottiene: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica uno e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica due. Vale a dire: $\mathrm{Sp}\ (A) = \{0, 1^2\}$ .
- Relativamente a $\lambda_2 = 1$ , l'operatore $A - \lambda \mathbb{I}$ diventa:

$$A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

  Essendo $\mathrm{Rk}\ (A - \mathbb{I}) = 2$ , la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2 = 1$ è $3 - 2 = 1$ , diversa dalla sua molteplicità algebrica, dunque la matrice non è diagonalizzabile.

| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Seconda prova in itinere del 14/1/2023** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 20) Studiare la funzione:

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

**Soluzione**. La funzione è definita per $x \neq 0$. Infatti l'argomento della radice, $x^2+2x+4$, è sempre positivo. La funzione è chiaramente ovunque strettamente positiva. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+.$$

Verifichiamo l'esistenza di possibili asintoti obliqui. Vale, per $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}\, e^{\frac{1}{x}} &= |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = |x|\left[1+\frac{1}{2}\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= |x|\left[1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \begin{cases} x+2+o(1) & \text{se } x\to+\infty \\ -x-2+o(1) & \text{se } x\to-\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque le rette $y = x+2$ e $y = -x-2$ sono asintoti obliqui per f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ rispettivamente.

Calcoliamo la derivata prima, sempre per $x \neq 0$. Si ha:

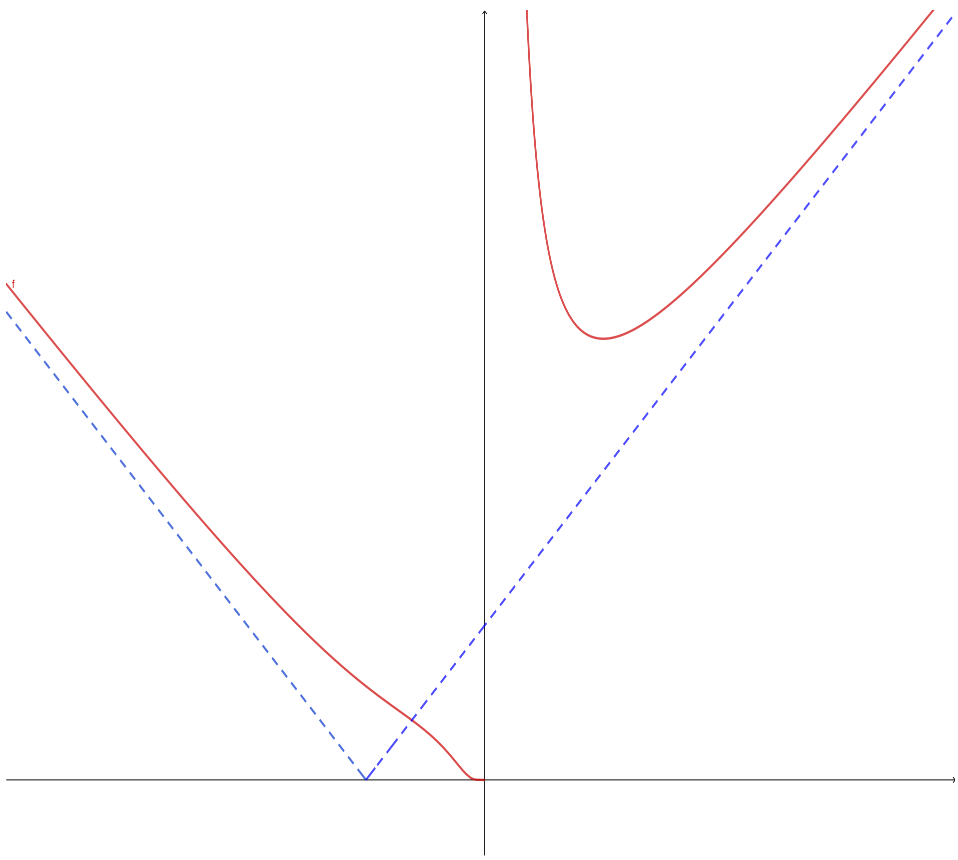
$$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}\, e^{\frac{1}{x}} - \frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^3+x^2-(x^2+2x+4)}{x^2\sqrt{x^2+2x+4}}\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^3-2x-4}{x^2\sqrt{x^2+2x+4}}\, e^{\frac{1}{x}} \quad \forall x \neq 0.$$

Si noti che $x^3-2x-4 = (x-2)(x^2+2x+2)$, e che $x^2+2x+2 > 0$ per ogni $x$. Dunque, essendo tutti gli altri fattori che appaiono nell'espressione di $f'(x)$ positivi, il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $x-2$. In particolare, $f$ è crescente per $x > 2$, $f$ è decrescente per $x < 0$ e, separatamente, per $x \in (0,2]$. Il punto $x = 2$ è quindi di minimo relativo. Ovviamente non vi sono massimi assoluti (la funzione è illimitata dall'alto) né minimi assoluti, in quanto la funzione tende a zero per $x \to 0^-$, ma $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$.

Va infine notato che, poiché l'esponenziale prevale su ogni potenza,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0,$$

dunque la tangente alla curva tende a diventare orizzontale in tale limite. In conclusione, il grafico di $f$ è il seguente:



**2.** (punti 12) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione:

$$f_a(x) = e^{\frac{e^{-x}}{1-\sin(\sin x)} - 1 + ax} - ax - a^2x^2.$$

(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di $f_a$ di ordine 3 centrato in $x = 0$;

(b) Stabilire, al variare di $a$, se il punto $x = 0$ è di massimo, di minimo, o non è né di massimo né di minimo per $f_a$.

**Soluzione**. Si ha, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}\left[x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right]^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\sin(\sin x)} &= \frac{1}{1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{1 - \left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]}\\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^2 + \left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + x^2 + x^3 + o(x^3)\\ &= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{-x}}{1-\sin(\sin x)} &= \left[1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\left[1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right] \\
&= 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3 - x(1+x+x^2)+\frac{x^2}{2}(1+x)-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\
&= 1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3 - x - x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3) \\
\frac{e^{-x}}{1-\sin(\sin x)} - 1 + ax &= ax + \frac{x^2}{2}+o(x^3); \\
e^{\frac{e^{-x}}{1-\sin(\sin x)}-1+ax} &= e^{ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 1+ax+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left[ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]^2+\frac{1}{6}\left[ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]^3+o(x^3) \\
&= 1+ax+\frac{1}{2}x^2+\frac{a^2}{2}x^2+\frac{a}{2}x^3+\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3) \\
&= 1+ax+\frac{1}{2}(a^2+1)x^2+\frac{a}{6}(3+a^2)x^3+o(x^3); \\
e^{\frac{e^{-x}}{1-\sin(\sin x)}-1+ax} - ax - a^2x^2 &= 1+\frac{1}{2}(1-a^2)x^2+\frac{a}{6}(3+a^2)x^3+o(x^3).
\end{aligned}
$$

Ne segue, per un noto teorema, che $x=0$ è punto di minimo relativo per $f$ se $1-a^2>0$, cioè se $|a|<1$, di massimo relativo per $f$ se $1-a^2<0$, cioè se $|a|>1$, mentre se $a=\pm 1$ non è nè di massimo nè di minimo (il coefficiente di $x^2$ in tal caso è nullo, mentre quello di $x^3$ non lo è).

| Es. 1 | Es. 2 | Totale |
|---|---|---|
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B** | | **Seconda prova in itinere del 14/01/2023** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 20) Studiare la funzione:
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

**Soluzione**. La funzione è definita per $x \neq 0$. Infatti l'argomento della radice, $x^2 - 2x + 4$, è sempre positivo. La funzione è chiaramente ovunque strettamente positiva. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+.$$

Verifichiamo l'esistenza di possibili asintoti obliqui. Vale, per $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - 2x + 4}\, e^{-\frac{1}{x}} = |x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}\left[1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = |x|\left[1 - \frac{1}{2}\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= |x|\left[1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \begin{cases} x - 2 + o(1) & \text{se } x \to +\infty \\ -x + 2 + o(1) & \text{se } x \to -\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque le rette $y = x - 2$ e $y = -x + 2$ sono asintoti obliqui per f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ rispettivamente.

Calcoliamo la derivata prima, sempre per $x \neq 0$. Si ha:

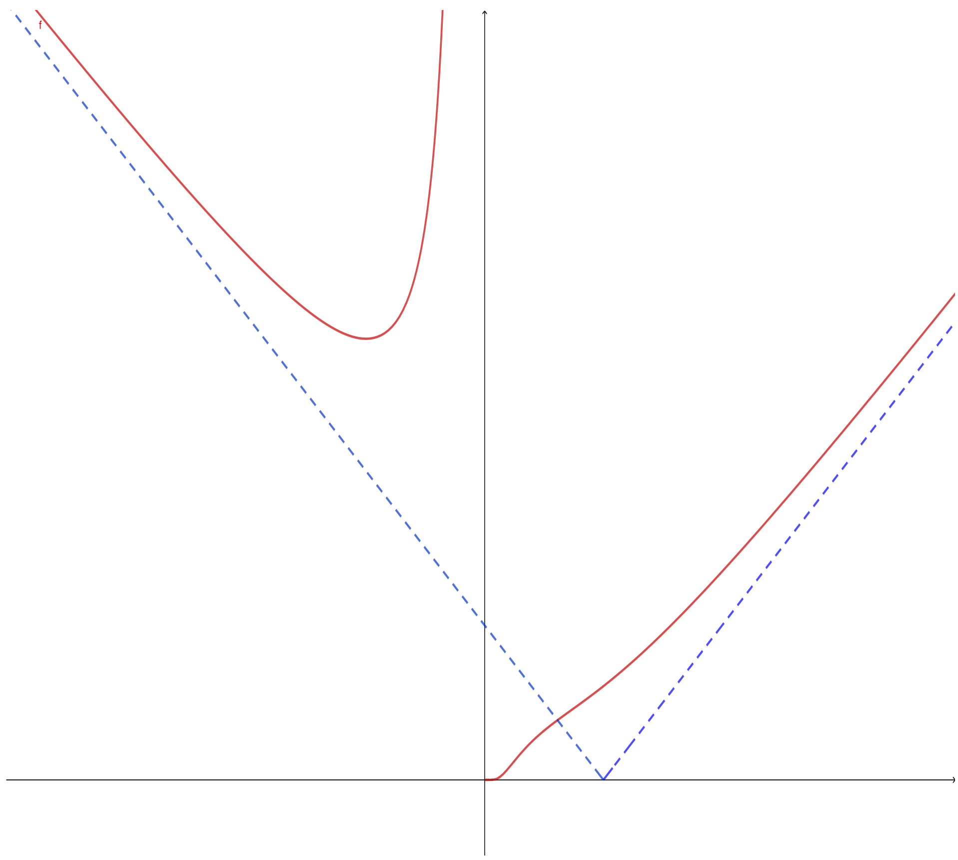
$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}}\, e^{-\frac{1}{x}} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^3 - x^2 + (x^2 - 2x + 4)}{x^2\sqrt{x^2 - 2x + 4}}\, e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^3 - 2x + 4}{x^2\sqrt{x^2 - 2x + 4}}\, e^{-\frac{1}{x}} \quad \forall x \neq 0.$$

Si noti che $x^3 - 2x + 4 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, e che $x^2 - 2x + 2 > 0$ per ogni $x$. Dunque, essendo tutti gli altri fattori che appaiono nell'espressione di $f'(x)$ positivi, il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $x + 2$. In particolare, $f$ è crescente per $x \in [-2, 0)$ e, separatamente, per $x > 0$, mentre $f$ è decrescente per $x < -2$. Il punto $x = -2$ è quindi di minimo relativo. Ovviamente non vi sono massimi assoluti (la funzione è illimitata dall'alto) né minimi assoluti, in quanto la funzione tende a zero per $x \to 0^+$, ma $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq 0$.

Va infine notato che, poiché l'esponenziale prevale su ogni potenza,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

dunque la tangente alla curva tende a diventare orizzontale in tale limite. In conclusione, il grafico di $f$ è il seguente:



**2.** (punti 12) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la seguente funzione:

$$f_a(x) = e^{\frac{e^x}{1+\sin(\sin x)}-1-ax} + ax - a^2x^2.$$

(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di $f_a$ di ordine 3 centrato in $x = 0$;

(b) Stabilire, al variare di $a$, se il punto $x = 0$ è di massimo, di minimo, o non è né di massimo né di minimo per $f_a$.

**Soluzione**. Si ha, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{6}\left[x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right]^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin(\sin x)} &= \frac{1}{1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \frac{1}{1-\left[\frac{x^3}{3}-x+o(x^3)\right]}\\ &= 1 - x + \frac{x^3}{3} + \left[-x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^2 + \left[-x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]^3 + o(x^3) = 1 - x + \frac{x^3}{3} + x^2 - x^3 + o(x^3)\\ &= 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x}{1+\sin(\sin x)} &= \left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\left[1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right] \\
&= 1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+x(1-x+x^2)+\frac{x^2}{2}(1-x)+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\
&= 1-x+x^2-\frac{2}{3}x^3+x-x^2+x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3) \\
\frac{e^x}{1+\sin(\sin x)}-1-ax &= -ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3); \\
e^{\frac{e^x}{1+\sin(\sin x)}-1-ax} &= e^{-ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\
&= 1-ax+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left[-ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]^2+\frac{1}{6}\left[-ax+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]^3+o(x^3) \\
&= 1-ax+\frac{1}{2}x^2+\frac{a^2}{2}x^2-\frac{a}{2}x^3-\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3) \\
&= 1-ax+\frac{1}{2}(a^2+1)x^2-\frac{a}{6}(3+a^2)x^3+o(x^3); \\
e^{\frac{e^{-x}}{1-\sin(\sin x)}-1+ax}+ax-a^2x^2 &= 1+\frac{1}{2}(1-a^2)x^2-\frac{a}{6}(3+a^2)x^3+o(x^3).
\end{aligned}
$$

Ne segue, per un noto teorema, che $x=0$ è punto di minimo relativo per $f$ se $1-a^2>0$, cioè se $|a|<1$, di massimo relativo per $f$ se $1-a^2<0$, cioè se $|a|>1$, mentre se $a=\pm 1$ non è nè di massimo nè di minimo (il coefficiente di $x^2$ in tal caso è nullo, mentre quello di $x^3$ non lo è).

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Prova scritta del 4/2/2023** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 6) Risolvere la seguente equazione, nella variabile complessa $z$:

$$e^{3z} - e^{2z} + 4e^z - 4 = 0.$$

**Soluzione**. Si ponga $e^z = w$. L'equazione da risolvere si riscrive quindi come segue: $w^3 - w^2 + 4w - 4 = 0$. Fattorizzando si ha: $w^3 - w^2 + 4w - 4 = (w-1)(w^2+4)$. Dunque le soluzioni cercate sono $w = 1$, $w = \pm 2i$. Torniamo alla variabile originaria, e risolviamo dapprima l'equazione $e^z = 1$. Posto $z = x + iy$ ciò equivale a risolvere $e^x e^{iy} = 1 = e^0 e^{i0}$, che è soddisfatta se e solo se $x = 0$ e $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Similmente, la validità dell'equazione $e^z = 2i = 2e^{i\pi/2}$ impone le condizioni $x = \log 2$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e la validità dell'equazione $e^z = -2i = 2e^{-i\pi/2}$ impone le condizioni $x = \log 2$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(-\frac{1}{2} + 2k\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In conclusione, gli $z$ cercati sono i seguenti:

$$z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}, \quad z_h = \log 2 + \left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right) i, h \in \mathbb{Z}.$$

Tali punti si trovano sulle rette $x = 0$ e $x = \log 2$, con parte immaginaria pari a $2k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi$ rispettivamente, con $k, h \in \mathbb{Z}$.

**2.** Sia $k$ un parametro reale. Data la funzione lineare $L_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ così definita:

$$L_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + (k+1)x_4 \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + (k+1)x_4 \end{pmatrix}$$

- Determinare il nucleo di $L_k$, fornendone una base qualora esso non sia banale.
- Determinare una base ortonormale dell'immagine di $L_k$ nel caso in cui il nucleo non sia banale.
- Trovare la controimmagine del vettore $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, 1, -1)^t$ nel caso $k = 0$.

**Soluzione**.

- La matrice associata a $L_k$ è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & k+1 \\ -1 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Vale, sottraendo l'ultima riga alla prima, che:

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = (k+1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & k-1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(k+1)^2 = 0$$

se e solo se $k = -1$. In tal caso il rango vale due (seconda riga uguale alla quarta e opposta alla prima) ed il nucleo è non banale e di dimensione due. Invece, se $k \neq -1$, il nucleo è formato dal solo vettore nullo.

Per $k=-1$, il nucleo si trova risolvendo il sistema omogeneo $A_{-1}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Tralasciando le righe ridondanti, si ha:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

La cui soluzione, scegliendo $x_3$ e $x_4$ parametri liberi, può essere scritta: $\boldsymbol{x}=(2\beta,-\frac{1}{2}\beta,\beta,\alpha)^t$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\beta\in\mathbb{R}$. Per base del nucleo si può scegliere la coppia di vettori $\{(4,-1,2,0)^t,(0,0,0,1)^t\}$ corrispondenti alla scelte rispettivamente $\alpha=0\wedge\beta=2$ e $\alpha=1\wedge\beta=0$.

- Come base dell'insieme immagine di $L_{-1}$ si possono scegliere i vettori colonna l.i. della matrice $A_{-1}$, ad esempio i vettori $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{c}_3$. Come primo vettore di una base ortonormale è dunque possibile scegliere $\boldsymbol{v}_1:=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-1,0,-1)^t$, che corrisponde al vettore colonna $\boldsymbol{c}_1$ normalizzato. Per trovare un secondo vettore $\boldsymbol{v}_2$ appartenente all'immagine e perpendicolare a $\boldsymbol{v}_1$ si chiede quanto segue: $(\alpha\boldsymbol{c}_1+\beta\boldsymbol{c}_2)\cdot\boldsymbol{v}_1=0$. Conti elementari conducono a $\alpha-\beta=0$. La scelta $\alpha=\beta=1$ determina il versore $\boldsymbol{v}_2=(0,0,1,0)^t$. Dunque la coppia di vettori $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ è una base ortonormale di Im $(L_{-1})$.

- Occorre risolvere il sistema lineare $A_0\boldsymbol{x}=(-1,0,1,-1)^t$. Sebbene esistano svariati metodi, qui si propone l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}(\mathrm{IV}+\mathrm{I})]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{I}-\mathrm{IV}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}-2\mathrm{II}+\mathrm{III}-\mathrm{IV}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Pertanto, $L_0^{-1}\boldsymbol{v}_3=(1,0,1,-1)^t$.

**3.** (punti 10) Studiare la seguente funzione:

$$f(x)=(x\log|x|-x)^2.$$

**Soluzione**. La funzione è definita per $x\neq 0$, ed è pari. Studiamola quindi per $x>0$, dove si scrive $f(x)=(x\log x-x)^2$. Vale:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

La funzione non ammette asintoti obliqui in quanto il termine dominante di $f$ per $x\to+\infty$ è $x^2(\log x)^2$, che è più che lineare.

La funzione è sempre non negativa, e si annulla se e solo se $\log x=1$, cioè $x=e$. La funzione è derivabile sul suo dominio, e vale:

$$f'(x)=2(x\log x-x)(\log x+1-1)=2(\log x-1)x\log x \quad \forall x>0.$$

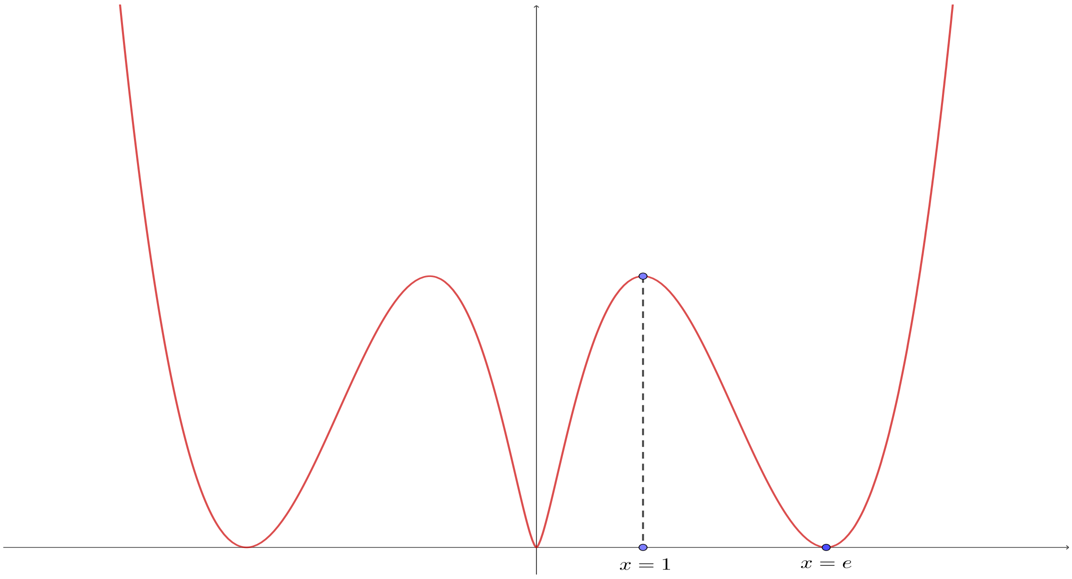
Dunque $f'(x)$ si annulla solo per $x=1$ e per $x=e$, è positiva per $x\in(0,1)\cup(e,+\infty)$, negativa per $x\in(1,e)$. Dunque $f$ cresce in $(0,1)$ e separamente in $(e,+\infty)$, decresce in $(1,e)$, ha un massimo relativo in $x=1$ e un minimo assoluto in $x=e$. Chiaramente non vi sono massimi assoluti. Infine, $\lim_{x\to 0+} f'(x)=0$, quindi la tangente al grafico di $f(x)$ tende a diventare orizzontale in tale limite.

Si ha infine, sempre per $x>0$:

$$f''(x)=2\left[\log x+\log x(\log x-1)+\log x-1\right]=2\left[(\log x)^2+\log x-1\right].$$

Il polinomio $p(t)=t^2+t-1$ si annulla se e solo se $t=[-1\pm\sqrt{5}]/2$. Quindi gli zeri di $f''(x)$ sono $x_1=\exp\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$, $x_2=\exp\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Si ha inoltre $f''(x)>0$ se $x\in(0,x_1)$ e se $x\in(x_2,+\infty)$, così che $f$ è convessa in ciascuno di tali intervalli, mentre $f''(x)<0$ se $x\in(x_1,x_2)$, così che $f$ è concava in tale intervallo. I punti $x_1,x_2$ sono di flesso. Si noti, per completare il grafico, che $x_1\in(0,1)$ in quanto $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$, e che $x_2\in(1,e)$, in quanto $0<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$.

Il grafico di $f$, esteso a $x<0$ per simmetria rispetto all'asse $y$, è il seguente. Si noti che $f$ non è definita in $x=0$ ma può essere estesa per continuità in tale punto ponendo $f(0):=0$.




**4.** Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Successivamente, senza far uso della primitiva calcolata, stabilire per quali valori di $x$ è ben definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t.$$

**Soluzione**. Poniamo

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t \text{ (con } t > 0), \text{ cioè } \frac{1+x}{1-x} = t^2, \text{ cioè } x = \frac{t^2-1}{t^2+1}.$$

Ne segue che

$$\mathrm{d}x = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \int t\,\frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \underset{\text{per parti}}{=} -t\frac{2}{t^2+1} + \int \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2t}{t^2+1} + 2\arctan t + c = -2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}+1} + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + c \\ &= -2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1-x}{2} + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + c \\ &= -\sqrt{1-x^2} + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

Riguardo alla seconda domanda notiamo che $f$ è definita e continua sull'intervallo $[-1,1)$. Quindi $F$ è definita al più sull'intervallo $[-1,1]$. Non vi è alcun problema di integrabilità se $x = -1$, in quanto come detto la funzione integranda è definita e continua nell'intero intervallo di integrazione. Se $x \to 1^-$, la funzione è ovviamente positiva (così da rendere applicabile il criterio del confronto asintotico) e vale

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

Come ben noto il membro destro dell'ultima equazione scritta è integrabile in senso improprio in un intorno di $x = 1$, dunque effettivamente il dominio di $F$ è l'intero intervallo $[-1,1]$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B** | | **Prova scritta del 4/2/2023** |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 6) Risolvere la seguente equazione, nella variabile complessa $z$:

$$4e^{3z} - 4e^{2z} + e^z - 1 = 0.$$

**Soluzione**. Si ponga $e^z = w$. L'equazione da risolvere si riscrive quindi come segue: $4w^3 - 4w^2 + w - 1 = 0$. Fattorizzando si ha: $4w^3 - 4w^2 + w - 1 = (w-1)(4w^2+1)$. Dunque le soluzioni cercate sono $w = 1$, $w = \pm\frac{i}{2}$. Torniamo alla variabile originaria, e risolviamo dapprima l'equazione $e^z = 1$. Posto $z = x + iy$ ciò equivale a risolvere $e^x e^{iy} = 1 = e^0 e^{i0}$, che è soddisfatta se e solo se $x = 0$ e $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Similmente, la validità dell'equazione $e^z = \frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$ impone le condizioni $x = -\log 2$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e la validità dell'equazione $e^z = -\frac{i}{2} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/2}$ impone le condizioni $x = -\log 2$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(-\frac{1}{2} + 2k\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In conclusione, gli $z$ cercati sono i seguenti:

$$z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}, \quad z_h = -\log 2 + \left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right) i, h \in \mathbb{Z}.$$

Tali punti si trovano sulle rette $x = 0$ e $x = -\log 2$, con parte immaginaria pari a $2k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi$ rispettivamente, con $k, h \in \mathbb{Z}$.

**2.** (punti 10) Sia $k$ un parametro reale. Data la funzione lineare $L_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ così definita:

$$L_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-k)x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_2 - (k+1)x_3 - x_4 \\ (1-k)x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

- Determinare il nucleo di $L_k$, fornendone una base qualora esso non sia banale.
- Determinare una base ortonormale dell'immagine di $L_k$ nel caso in cui il nucleo non sia banale.
- Trovare la controimmagine del vettore $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 0, -1)^t$ nel caso $k = 0$.

**Soluzione**.

- La matrice associata a $L_k$ è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-k & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -k-1 & -1 \\ 1-k & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vale, sottraendo l'ultima riga alla prima, che:

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -k-1 & -1 \\ 1-k & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = (k-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -k-1 & -1 \end{pmatrix} = -2(k-1)^2 = 0$$

se e solo se $k = 1$. In tal caso il rango vale due (terza riga uguale alla quarta e opposta alla prima) ed il nucleo è non banale e di dimensione due. Invece, se $k \neq 1$, il nucleo è formato dal solo vettore nullo.

Per $k = 1$, il nucleo si trova risolvendo il sistema omogeneo $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Tralasciando le righe ridondanti, si ha:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione, scegliendo $x_1$ e $x_2$ parametri liberi, può essere scritta: $\boldsymbol{x} = (\alpha, \beta, -\frac{1}{2}\beta, 2\beta)^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Per base del nucleo si può scegliere la coppia di vettori $\{(1,0,0,0)^t, (0,2,-1,4)^t\}$ corrispondenti alla scelte rispettivamente $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$ e $\alpha = 0 \wedge \beta = 2$.

- Come base dell'insieme immagine di $L_1$ si possono scegliere i vettori colonna l.i. della matrice $A_1$, ad esempio i vettori $\boldsymbol{c}_2$ e $\boldsymbol{c}_4$. Come vettore di una base ortonormale è dunque possibile scegliere $\boldsymbol{v}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,-1)^t$, che corrisponde al vettore colonna $\boldsymbol{c}_4$ normalizzato. Per trovare un secondo vettore $\boldsymbol{v}_2$ appartenente all'immagine e perpendicolare a $\boldsymbol{v}_1$ si chiede quanto segue: $(\alpha\boldsymbol{c}_2 + \beta\boldsymbol{c}_4) \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$. Conti elementari conducono a $-3\alpha + 3\beta = 0$. La scelta $\alpha = \beta = 1$ determina il versore $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,0,0)^t$. Dunque la coppia di vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ è una base ortonormale di $\operatorname{Im}(L_1)$.

- Occorre risolvere il sistema lineare $A_0\boldsymbol{x} = (-1,1,0,-1)^t$. Sebbene esistano svariati metodi, qui si propone l'algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}(\mathrm{IV}+\mathrm{I})]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}+\mathrm{I}-\mathrm{IV}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}-2\mathrm{III}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}+\mathrm{II}-2\mathrm{III}-\mathrm{IV}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pertanto, $L_0^{-1}\boldsymbol{v}_3 = (-1,1,0,1)^t$.

**3.** (punti 10) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = (x \log|x| - 2x)^2.$$

**Soluzione**. La funzione è definita per $x \neq 0$, ed è pari. Studiamola quindi per $x > 0$, dove si scrive $f(x) = (x\log x - 2x)^2$. Vale:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

La funzione non ammette asintoti obliqui in quanto il termine dominante di $f$ per $x \to +\infty$ è $x^2(\log x)^2$, che è più che lineare.

La funzione è sempre non negativa, e si annulla se e solo se $\log x = 2$, cioè $x = e^2$. La funzione è derivabile sul suo dominio, e vale:

$$f'(x) = 2(x\log x - 2x)(\log x + 1 - 2) = 2x(\log x - 1)(\log x - 2) \quad \forall x > 0.$$

Dunque $f'(x)$ si annulla solo per $x = e$ e per $x = e^2$, è positiva per $x \in (0,e)\cup(e^2,+\infty)$, negativa per $x \in (e,e^2)$. Dunque $f$ cresce in $(0,e)$ e separamente in $(e^2,+\infty)$, decresce in $(e,e^2)$, ha un massimo relativo in $x = e$ e un minimo assoluto in $x = e^2$. Chiaramente non vi sono massimi assoluti. Infine, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, quindi la tangente al grafico di $f(x)$ tende a diventare orizzontale in tale limite.

Si ha infine, sempre per $x > 0$:

$$f''(x) = 2\left[(\log x - 1)(\log x - 2) + \log x - 2 + \log x - 1\right] = 2\left[(\log x)^2 - \log x - 1\right].$$

Il polinomio $p(t) = t^2 - t - 1$ si annulla se e solo se $t = [1\pm\sqrt{5}]/2$. Quindi gli zeri di $f''(x)$ sono $x_1 = \exp\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$, $x_2 = \exp\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Si ha inoltre $f''(x) > 0$ se $x \in (0,x_1)$ e se $x \in (x_2,+\infty)$, così che $f$ è convessa in ciascuno di tali intervalli, mentre $f''(x) < 0$ se $x \in (x_1,x_2)$, così che $f$ è concava in tale intervallo. I punti $x_1, x_2$ sono di flesso. Si noti, per completare il grafico, che $x_1 \in (0,e)$ in quanto $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, e che $x_2 \in (e,e^2)$, in quanto $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$.

Il grafico di $f$, esteso a $x < 0$ per simmetria rispetto all'asse $y$, è simile a quello della funzione studiata nella versione A, con la localizzazione dei punti stazionari e di flesso qui indicata. Si noti che $f$ non è definita in $x = 0$ ma può essere estesa per continuità in tale punto ponendo $f(0) := 0$.

**4.** Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Successivamente, senza far uso della primitiva calcolata, stabilire per quali valori di $x$ è ben definita la funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t.$$

**Soluzione**. Poniamo

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t \text{ (con } t > 0), \text{ cioè } \frac{1-x}{1+x} = t^2, \text{ cioè } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ne segue che

$$\mathrm{d}x = -\frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= -\int t\,\frac{4t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \underset{\text{per parti}}{=} t\frac{2}{t^2+1} - \int \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2t}{t^2+1} - 2\arctan t + c = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}+1} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c \\
&= 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1+x}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c \\
&= \sqrt{1-x^2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c,
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

Riguardo alla seconda domanda notiamo che $f$ è definita e continua sull'intervallo $(-1,1]$. Quindi $F$ è definita al più sull'intervallo $[-1,1]$. Non vi è alcun problema di integrabilità se $x = 1$, in quanto come detto la funzione integranda è definita e continua nell'intero intervallo di integrazione. Se $x \to (-1)^-$, la funzione è ovviamente positiva (così da rendere applicabile il criterio del confronto asintotico) e vale

$$f(x) \underset{x\to(-1)^-}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}.$$

Come ben noto il membro destro dell'ultima equazione scritta è integrabile in senso improprio in un intorno di $x = -1$, dunque effettivamente il dominio di $F$ è l'intero intervallo $[-1,1]$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A | | Prova scritta del 07/06/2023 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 6) Risolvere la seguente equazione nella variabile complessa $z$:

$$z^2 + i\bar{z} + \frac{1}{4} = 0.$$

Determinare inoltre la soluzione di minimo modulo.

**Soluzione**. Scritto $z = x + iy$ deve valere:

$$0 = x^2 - y^2 + 2ixy + i(x - iy) + \frac{1}{4} = \left(x^2 - y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + ix(2y + 1).$$

La parte immaginaria dell'ultima espressione scritta si annulla se e solo se $x = 0$ oppure $y = -\frac{1}{2}$. Se $x = 0$ la parte reale dell'ultima espressione scritta è $-y^2 + y + \frac{1}{4}$, che si annulla se e solo se $y = (1 \pm \sqrt{2})/2$. Dunque l'equazione data ammette le soluzioni $z_{1,2} = i(1 \pm \sqrt{2})/2$. Se invece $y = -\frac{1}{2}$ la parte reale dell'ultima espressione scritta è $x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = x^2 - \frac{1}{2}$, e tale quantità si annulla se e solo se $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, dunque l'equazione data ammette le soluzioni $z_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{2}$. L'equazione assegnata ha dunque quattro soluzioni, e tra queste quella di minimo modulo è chiaramente $z = i(1 - \sqrt{2})/2$.

**2.** (punti 10) Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, funzioni lineari così definite: $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $g(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$, dove:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determinare per quali $\mathbf{v}$ vale: $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$.
- Stabilire se le matrici $A$ e $B$ sono diagonalizzabili.

**Soluzione**.

- Se $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$, allora: $(f - g)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$. Pertanto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$ deve essere soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Si ha: $\det(A - B) = 0$, dunque esistono soluzioni non banali. Scegliendo $y$ come parametro libero, la soluzione può essere scritta: $x = -2t$, $y = t$, $z = 2t$. Pertanto i vettori $\boldsymbol{v}$ per cui vale $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})$, sono della forma $(-2t, t, 2t)^t$ con $t \in \mathbb{R}$.

- Essendo la matrice $A$ triangolare inferiore, gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale, vale a dire: $\mathrm{Sp}(A) = \{-1^2, 2\}$. La presenza di un autovalore non semplice induce a calcolare la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = -1$.
  Essendo il rango dell'operatore

$$A - \lambda\mathbb{I} = A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

uguale a due (presenza di minori di ordine due non nulli), segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = -1$ è uguale a uno, diversa dalla molteplicità algebrica. Pertanto la matrice $A$ non è diagonalizzabile. Relativamente alla matrice $B$, l'equazione caratteristica è:

$$\begin{aligned} 0 = \det(B - \lambda \mathbb{I}) &= -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) + 2(\lambda + 2) \\ &= -\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 1) + 2(\lambda + 2) \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Gli autovalori sono tutti semplici, pertanto la matrice è diagonalizzabile.

**3.** (punti 10). Studiare la funzione:

$$f(x) = e^{-x} \sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda. Si determini tuttavia il numero minimo di flessi che deve avere $f$.

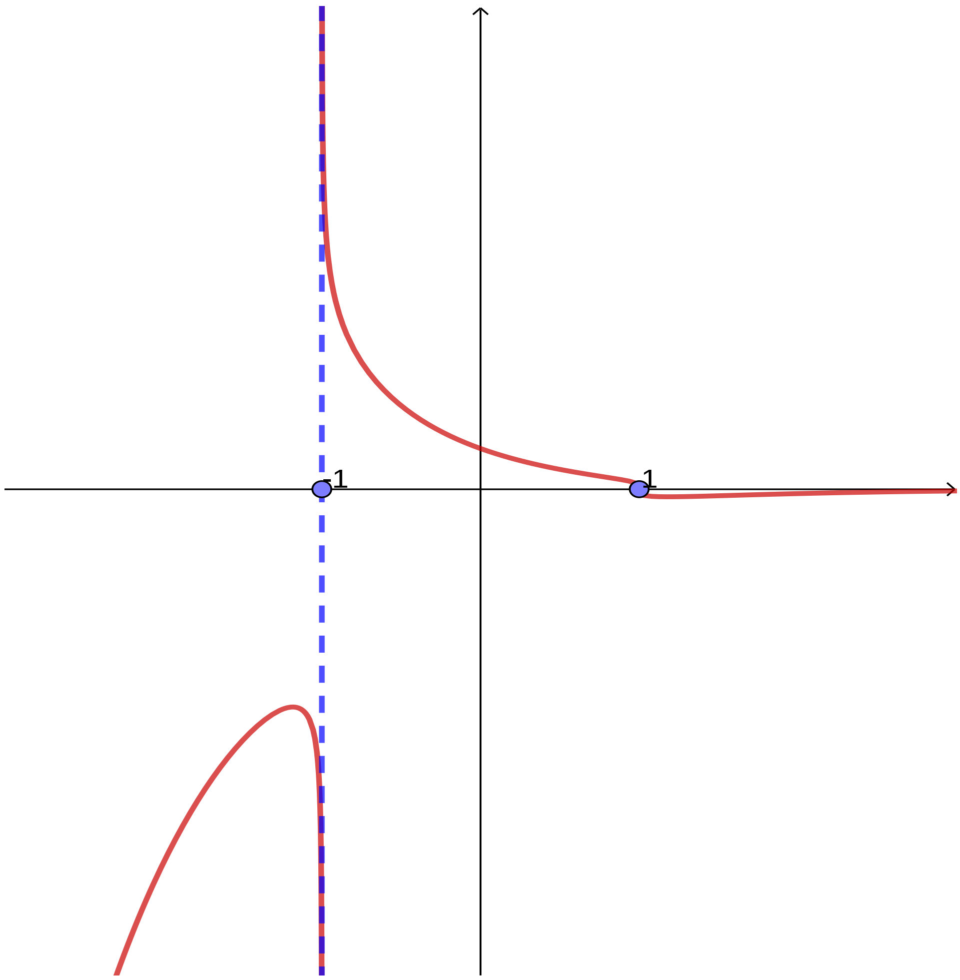
**Soluzione**. La funzione è definita per $x \neq -1$. Il segno della funzione è quello della quantità $\frac{1-x}{1+x}$, dunque $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-1, 1)$, $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$ oppure $x > 1$, $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Si ha inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to (-1)^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Dunque, la retta $x = -1$ è asintoto verticale bilatero per $f$, e la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $f$ quando $x \to +\infty$. Non vi sono asintoti obliqui per $x \to -\infty$ in quanto la crescita della funzione è esponenziale. La funzione è derivabile nel proprio dominio di definizione, salvo che nel punto $x = 1$. Per $x \neq \pm 1$ si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \left[ -\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{5} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{-\frac{4}{5}} \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \right] \\ &= e^{-x} \left[ -\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{2}{5} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{4}{5}} \frac{1}{(1+x)^2} \right] \\ &= e^{-x} \left[ -\sqrt[5]{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{2}{5(1-x)^{\frac{4}{5}}(1+x)^{\frac{6}{5}}} \right] = -e^{-x} \frac{5(1-x)(1+x) + 2}{5(1-x)^{\frac{4}{5}}(1+x)^{\frac{6}{5}}} \\ &= e^{-x} \frac{5x^2 - 7}{5(1-x)^{\frac{4}{5}}(1+x)^{\frac{6}{5}}}. \end{aligned}$$

Chiaramente il segno della derivata prima coincide con quello della quantità $5x^2 - 7$, in quanto il denominatore della frazione e l'esponenziale a moltiplicare sono sempre positivi. Dunque $f'(x) > 0$, così che $f$ è crescente, separatamente negli intervalli $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{7}{5}}, +\infty\right)$, mentre $f'(x) < 0$, così che $f$ è crescente, separatamente negli intervalli $\left(-\sqrt{\frac{7}{5}}, -1\right)$ e $\left(1, \sqrt{\frac{7}{5}}\right)$. Il punto $x = -\sqrt{\frac{7}{5}}$ è punto di massimo relativo per $f$, il punto $x = \sqrt{\frac{7}{5}}$ è di minimo per $f$. Si noti infine che $\lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = -\infty$, così che la tangente al grafico di $f$ tende a diventare verticale in tale limite, e il punto $x = 1$ è di flesso a tangente verticale per $f$. Le considerazioni sul grafico ottenute mostrano inoltre che vi devono essere almeno due altri punti di flesso per $f$ negli intervalli $(0, 1)$ e $\left(\sqrt{\frac{7}{5}}, +\infty\right)$. Il grafico di $f$ è il seguente:




**4.** (punti 6). Calcolare:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Determinare inoltre, *senza far uso della primitiva calcolata*, il dominio di definizione della seguente funzione:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{4-t^2}}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

**Soluzione**. Poniamo $\sqrt{4-x^2} = t$, così che $4 - x^2 = t^2$, $x^2 = 4 - t^2$, $x\,\mathrm{d}x = -t\,\mathrm{d}t$. Ne segue che:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t^2}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Integriamo ora per parti, ottenendo:

$$\begin{aligned}
-\int \frac{t^2}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\int t\,\frac{t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= -t\,\frac{1}{2(4-t^2)} + \int \frac{1}{2(4-t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{t}{2(4-t^2)} + \int \left(\frac{1}{8(2-t)} + \frac{1}{8(2+t)}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{t}{2(4-t^2)} + \frac{1}{8}\log\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c,
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Tornando alla variabile originaria abbiamo:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}\right) + c.$$

Si noti che il modulo nell'argomento del logaritmo non è necessario in quanto tale argomento non può essere negativo ove definito.

Circa la seconda domanda, è ovviamente necessario che valga $x \leq 2$ affinché l'integrale abbia senso in $(1, x)$. Inoltre, notando che l'integrando ha una sola singolarità, non integrabile, in $x = 0$, si deduce immediatamente che il dominio di $F$ è l'intervallo $(0, 2]$.

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria** | | **prova del 3 luglio 2023** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Codice persona:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 5) Risolvere la seguente equazione nella variabile complessa $z$ :

$$\overline{z}^3 = 4z\frac{e^i}{i}.$$

**Soluzione**. Chiaramente vi è la soluzione $z = 0$ . Se $z \neq 0$ si deve avere, posto $z = \varrho e^{i\vartheta}$ con $\varrho > 0, \vartheta \in [0, 2\pi)$ :

$$\varrho^2 e^{-3i\vartheta} = 4\varrho e^{i\vartheta} e^i e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Ciò accade se e solo se $\varrho^2 = 4$ , cioè $\varrho = 2$ (essendo $\varrho$ per costruzione positivo) e $4\vartheta = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ , cioè $\vartheta = \vartheta_k := \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right]$ . Si noti che $\vartheta_k \in [0, 2\pi)$ se e solo se $k = 0, 1, 2, 3$ . Le soluzioni cercate sono dunque $z_k = 2e^{i\vartheta_k}$ con $k = 0, 1, 2, 3$ , e l'origine.

**2.** Sia $k$ un parametro reale e $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare associata alla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} k & 5 & -2 & 3 \\ 0 & k+1 & -1 & k \\ -2k & 5 & -1 & 2k \end{pmatrix}$$

- Stabilire per quale valore del parametro $k$ il nucleo di $f_k$ è bidimensionale.
- Per tale valore di $k$ esibire una base per il nucleo e una base per l'immagine di $f_k$ .
- Determinare per quali valori del parametro reale $h$ esistono controimmagini del vettore $\boldsymbol{v}_h = (2h, 3, h)^t$ .

**Soluzione**.

- La matrice presenta un minore di ordine due, $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ , diverso da zero.
  I minori orlati di ordine tre sono ripettivamente:

  $$\det \begin{pmatrix} k & 5 & -2 \\ 0 & k+1 & -1 \\ -2k & 5 & -1 \end{pmatrix} = -5k^2 + 10k$$

  e

  $$\det \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ k+1 & -1 & k \\ 5 & -1 & 2k \end{pmatrix} = 4k^2 - 14k + 12$$

  Il primo minore si annulla solo per $k = 0$ e per $k = 2$ . Il secondo si annulla per $k = 2$ e per $k = 3/2$ . Dunque, per $k \neq 2$ la matrice ha rango tre, mentre per $k = 2$ la matrice ha rango due. Pertanto, se $k = 2$ il nucleo della funzione è bidimensionale.
- Come base dell'immagine di $f_2$ si può scegliere una qualsiasi coppia di vettori colonna della matrice. Per determinare una base del nucleo occorre risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice

  $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  dove si è scelto di eliminare la terza riga perchè ridondante.
  Posto $x_3 = \alpha$ e $x_4 = \beta$ , segue da conti elementari che: $x_1 = \frac{\alpha+\beta}{6}$ e $x_2 = \frac{\alpha-2\beta}{3}$ . Quindi il nucleo della funzione è formato dai vettori del tipo $(\frac{\alpha+\beta}{6}, \frac{\alpha-2\beta}{3}, \alpha, \beta)^t$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\beta \in \mathbb{R}$ . Come base del sottospazio si può scegliere la coppia di vettori $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 6, 0)^t$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1, -4, 0, 6)^t$ .

- Se $k \neq 2$ L'immagine di $f_k$ coincide con l'intero spazio $\mathbb{R}^3$, pertanto $\boldsymbol{v}_h \in \operatorname{Im} f_k \quad \forall h \in \mathbb{R}$.
  Se $k = 2$, $\boldsymbol{v}_h \in \operatorname{Im} f_k$ se risulta c. l. dei vettori-base dell'immagine di $f_2$, ovvero, scelti i primi vettori-colonna della matrice, se:
$$0 = \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2h \\ 0 & 3 & 3 \\ -4 & 5 & h \end{pmatrix} = 30h - 90,$$
  Quindi per $h = 3$.

**3.** (punti 7) Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la funzione
$$f_a(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} - \log(\cos x) - [\cosh(ax^2)]^2.$$
Stabilire se esistono valori del parametro $a$ tali che $f_a(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$, e in caso affermativo determinarli.

**Soluzione**. Sviluppiamo separatamente le varie quantità che appaiono in $f_a$, sempre per $x \to 0$. La domanda del testo ci suggerisce di procedere fino al quarto ordine per ciascun addendo. Si ha:
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{4}} &= \left[\left(1+x^2\right)\left(1+x^2+x^4+o(x^4)\right)\right]^{-\frac{1}{4}} = \left[1+2x^2+2x^4+o(x^4)\right]^{-\frac{1}{4}} \\
&= 1 - \frac{1}{4}\left[2x^2+2x^4+o(x^4)\right] + \frac{5}{32}\left[2x^2+2x^4+o(x^4)\right]^2 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{8}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4); \\
\log(\cos x) &= \log\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right] = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right]^2 + o(x^4) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4); \\
[\cosh(ax^2)]^2 &= \left[1 + \frac{a^2}{2}x^4 + o(x^4)\right]^2 = 1 + a^2x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$
Dunque, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e sempre per $x \to 0$:
$$f_a(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - 1 - a^2x^4 + o(x^4) = \left[\frac{5}{24} - a^2\right]x^4 + o(x^4).$$
Ne segue che $f_a(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$ se e solo se $a = \pm\sqrt{\frac{5}{24}}$.

**4.** (punti 10) Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = x\left[2\log x - (\log x)^3\right].$$

**Soluzione**. La funzione è definita per $x > 0$. Il suo segno è determinato da quello della quantità
$$2\log x - (\log x)^3 = (\log x)\left(2 - (\log x)^2\right) = (\log x)(\sqrt{2} - \log x)(\sqrt{2} + \log x).$$
Si vede quindi facilmente che $f(x) > 0$ se $x \in \left(0, e^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(1, e^{\sqrt{2}}\right)$, che $f(x) < 0$ per $x \in \left(e^{-\sqrt{2}}, 1\right) \cup \left(e^{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, e che $f$ si annulla in $x = x_1 := e^{-\sqrt{2}}, x = x_2 := 1, x = x_3 := e^{\sqrt{2}}$.
Vale inoltre:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty,$$
in quanto la potenza prevale sul logaritmo (primo limite) e il termine dominante a $+\infty$ è $-x(\log x)^3$ (secondo limite). L'ultima considerazione mostra anche ovviamente che non vi è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Calcoliamo la derivata prima, che esiste su tutto il dominio di $f$. Si ha, per $x > 0$:
$$f'(x) = 2\log x - (\log x)^3 + x\left[\frac{2}{x} - \frac{3(\log x)^2}{x}\right] = 2\log x - (\log x)^3 + 2 - 3(\log x)^2.$$
Si noti ora che il polinomio $p(t) := -t^3 - 3t^2 + 2t + 2$ ha la radice $t = 1$ e, usando Ruffini, si scrive; $p(t) = -(t-1)(t^2 + 4t + 2)$. Dunque:
$$f'(x) = -(\log x)^3 - 3(\log x)^2 + 2\log x + 2 = -[(\log x) - 1]\left[(\log x)^2 + 4(\log x) + 2\right]. \tag{1}$$

Il polinomio di secondo grado $t^2+4t+2$ si annulla se e solo se $t=-2\pm\sqrt{2}$. Dunque $f'$ si annulla se e solo se $\log x=1$ oppure $\log x=-2\pm\sqrt{2}$, cioè se e solo se $x=e$ oppure $x=e^{-2\pm\sqrt{2}}$. Si noti che i punti stazionari trovati si trovano dove segue rispetto agli zeri di $f$ trovati in precedenza: $x_4:=e^{-2-\sqrt{2}}\in\left(0,e^{-\sqrt{2}}\right)$, $x_5:=e^{-2+\sqrt{2}}\in\left(e^{-\sqrt{2}},1\right)$. $x_6:=e\in(1,e^{\sqrt{2}})$. Per quanto riguarda il segno di $f'$, la scomposizione (1) mostra che $f$ è crescente separatamente in ciascuno degli intervalli $\left(0,e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ e $\left(e^{-2+\sqrt{2}},e\right)$, mentre $f$ è decrescente separatamente in ciascuno degli intervalli $\left(e^{-2-\sqrt{2}},e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ e $(e,+\infty)$. I punti $x=e^{-2-\sqrt{2}}$, $x=e$ sono punti di massimo relativo, il punto $x=e^{-2+\sqrt{2}}$ è di minimo relativo. È possibile mostrare con un calcolo esplicito che il punto di massimo assoluto per $f$ è $x=e^{-2+\sqrt{2}}$, Ovviamente non vi sono minimi assoluti. Si noti infine che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$$

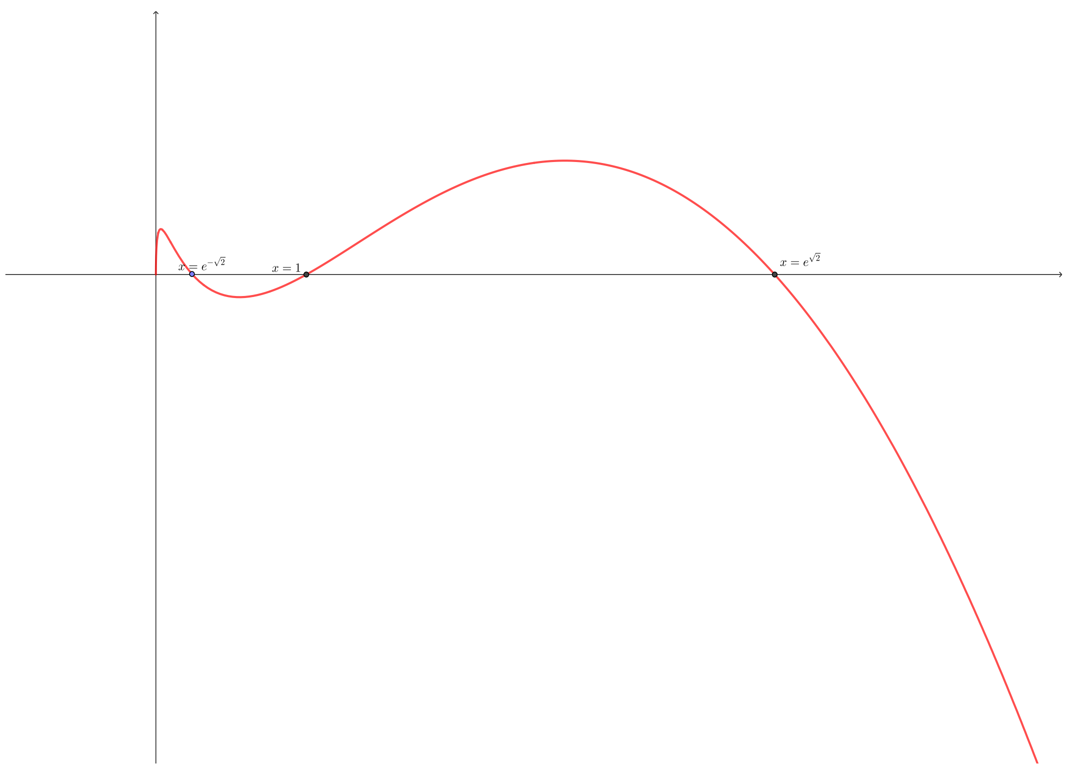
in quanto il termine dominante di $f'$ in tale limite è $-(\log x)^3$. La tangente al grafico tende quindi a diventare verticale in tale limite.

Calcoliamo infine la derivata seconda, sempre sull'intero dominio di $f$. Si ha, per $x>0$:

$$f''(x)=-\frac{1}{x}\left[3(\log x)^2+6(\log x)-2\right].$$

Si vede immediatamente che la derivata seconda si annulla se e solo se $\log x=-1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$, cioè se e solo se $x=e^{-1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}}$. La derivata seconda è positiva nell'intervallo $\left(e^{-1-\sqrt{\frac{5}{3}}},e^{-1+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$, dunque la funzione è convessa in tale intervallo, mentre la derivata seconda è negativa in $\left(0,e^{-1-\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)$ e in $\left(e^{-1+\sqrt{\frac{5}{3}}},+\infty\right)$, dunque la funzione è concava separatamente in ciascuno di tali intervalli. I punti $x=e^{-1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}}$ sono di flesso. È possibile notare, sebbene non strettamente necessario, che $e^{-1+\sqrt{\frac{5}{3}}}\in(1,e)$, e che $e^{-1-\sqrt{\frac{5}{3}}}\in\left(e^{-2-\sqrt{2}},e^{-\sqrt{2}}\right)$.

Il grafico della funzione è il seguente:



| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Totale |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A** | | **Prova scritta del 7/9/2023** |
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

**1.** (punti 5) Risolvere la seguente equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$|z-i| + |z+i| = 4,$$

individuando geometricamente il luogo dei punti trovati e disegnandolo nel piano complesso. Determinare infine gli elementi dell'insieme delle soluzioni che hanno, rispettivamente, massimo e minimo modulo.

**Soluzione**. Si tratta chiaramente di un ellisse con fuochi nei punti $\pm i$ e con gli assi cartesiani come assi. Determiniamo l'equazione analitica dell'ellisse. Deve valere:

$$\begin{aligned}&\left(x^2+(y-1)^2\right)^{\frac12} + \left(x^2+(y+1)^2\right)^{\frac12} = 4 \Longleftrightarrow \left(x^2+(y-1)^2\right)^{\frac12} = 4 - \left(x^2+(y+1)^2\right)^{\frac12} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\\ &x^2+(y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\left(x^2+(y+1)^2\right)^{\frac12} \Longleftrightarrow 2\left(x^2+(y+1)^2\right)^{\frac12} = 4+y \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}\\ &4x^2 + 4(y^2+2y+1) = 16 + y^2 + 8y \Longleftrightarrow 4x^2+3y^2 = 12,\end{aligned}$$

dove il passaggio (1) è valido sotto la condizione $4 \geq \left(x^2+(y+1)^2\right)^{\frac12}$, cioè all'interno della palla chiusa di centro $-i$ e raggio 4, e il passaggio (2) è valido sotto la condizione $y \geq -4$. È facile controllare, come peraltro ovvio per costruzione, che tali condizioni sono verificate per i punti dell'ellisse $4x^2+3y^2=12$, che è dunque il luogo dei punti cercato.

Per rispondere alla seconda domanda notiamo dapprima che, per i punti dell'ellisse $E$ appena determinata, vale $y^2 = 4 - \frac43 x^2$, e inoltre che $E$ interseca l'asse reale nei punti $x = \pm\sqrt3$, l'asse immaginario nei punti $\pm 2i$. Ma allora, se $z \in E$ si ha, usando sempre le coordinate cartesiane di $z$:

$$|z|^2 = x^2+y^2 = x^2 + 4 - \frac43 x^2 = 4 - \frac{x^2}{3}.$$

Come già detto, la parte reale $x$ di $z$ varia, per i punti di $E$, nell'intervallo $[-\sqrt3, \sqrt3]$. Il modulo al quadrato di $z$ per $z \in E$ è dunque massimo se $x=0$, cioè se $z = \pm 2i$, e minimo se $x = \pm\sqrt3$, cioè se $z = \pm\sqrt3$. Lo stessa conclusione vale ovviamente per il modulo (non elevato al quadrato).

**2.** (punti 10) Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = k \\ (2-h)x + (2+h)y + z = 0 \\ (2-h)x + 2hy + z = 2 \end{cases}$$

- Discutere, al variare dei parametri reali $h$ e $k$, l'esistenza delle soluzioni.
- Determinare le soluzioni nel caso in cui esse siano infinite.

**Soluzione**.

- Il determinante della matrice dei coefficienti si annulla solo per $h=0$ e per $h=2$. Infatti:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2-h & 2+h & 1 \\ 2-h & 2h & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2-h & 2+h & 1 \\ 0 & h-2 & 0 \end{pmatrix} = -h(h-2)$$

Dunque se $h = 0 \vee h = 2$ il rango della matrice dei coefficienti vale due (presenza di minori di ordine due non nulli), mentre se $h \neq 0 \wedge h \neq 2$ il rango della matrice dei coefficienti vale tre.

Sia $h = 0$.
La matrice completa diventa: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.
Orlando il minore $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con la prima colonna si ottiene la matrice dei coefficienti, il cui determinante è zero. Orlando con la colonna dei termini noti, si ha:

$$\det \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = 2k - 6.$$

Quindi, se $k = 3$, si ha: $\operatorname{rk} A|b = \operatorname{rk} A = 2$, dunque esistono $\infty^1$ soluzioni. Invece, se $k \neq 3$, si ha: $\operatorname{rk} A|b = 3$, dunque il sistema è impossibile.

Sia $h = 2$.
La matrice completa diventa: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & k \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$.
Il sistema è impossibile $\forall k \in \mathbb{R}$ poichè la seconda e la terza equazione sono in contraddizione.

Ricapitolando:
- se $h \neq 0 \wedge h \neq 2$ esiste una sola soluzione $\forall k \in \mathbb{R}$
- se $h = 2$ non esistono soluzioni $\forall k \in \mathbb{R}$
- se $h = 0 \wedge k \neq 3$ non esistono soluzioni
- se $h = 0 \wedge k = 3$ esistono $\infty^1$ soluzioni.

- Sia $h = 0$ e $k = 3$. La matrice completa diventa: $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

  Escludendo la prima riga in quanto ridondante, e sottraendo la terza riga alla seconda, segue che $y = -1$, da cui, scegliendo $x$ come parametro libero, $z = 2 - 2t$. L'insieme $S$ è quindi la retta di equazione:

$$s := \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

**3.** (punti 10). Studiare la funzione:

$$f(x) = (1 + x) \log [1 + \log(1 + x)].$$

**Soluzione**. Affinchè $f$ sia definita occorre che valga $x > -1$ e inoltre che $\log(1+x) > -1$, cioè che $1+x > e^{-1}$, cioè che $x > e^{-1} - 1$. Chiaramente la condizione più forte è quest'ultima, e dunque il dominio di definizione di $f$ è $(e^{-1} - 1, +\infty)$.
Vale chiaramente, essendo $e^{-1} - 1 < 0$,

$$\lim_{(e^{-1}-1)^+} f(x) = -\infty,$$

dunque vi è un asintoto verticale destro per $f$ in tale limite. Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, e non vi sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Riguardo al segno di $f$, si noti che $1 + x > 0$ su tutto il dominio di $f$, dunque il segno di $f$ coincide con quello di $\log[1 + \log(1 + x)]$. Esso è positivo se e solo se $1 + \log(1 + x) > 1$, cioè se e solo se $\log(1 + x) > 0$, cioè se e solo se $x > 0$. Similmente, $f$ è negativa se e solo se $x \in \big(e^{-1} - 1, 0\big)$, e vale $f(0) = 0$.
Calcoliamo la derivata prima. Vale, per ogni $x$ nel dominio di $f$:

$$f'(x) = \log[1 + \log(1 + x)] + (1 + x)\frac{1}{(1 + x)[1 + \log(1 + x)]} = \log[1 + \log(1 + x)] + \frac{1}{[1 + \log(1 + x)]}$$

L'ultima espressione scritta è sempre positiva nel dominio di $f$. Infatti, ponendo $t = 1 + \log(1 + x)$, così che $t \in (0, +\infty)$, ciò equivale a verificare che $g(t) = \log t + \frac{1}{t} > 0$. Si vede immediatamente che $g$ ha un minimo assoluto in $t = 1$, e che $g(1) = 1 > 0$. Quindi, $f$ è monotona strettamente crescente sul proprio dominio. Si può peraltro prescindere da tali considerazioni e rimandare lo studio della monotonia a dopo quello della concavità, vedi il seguito.

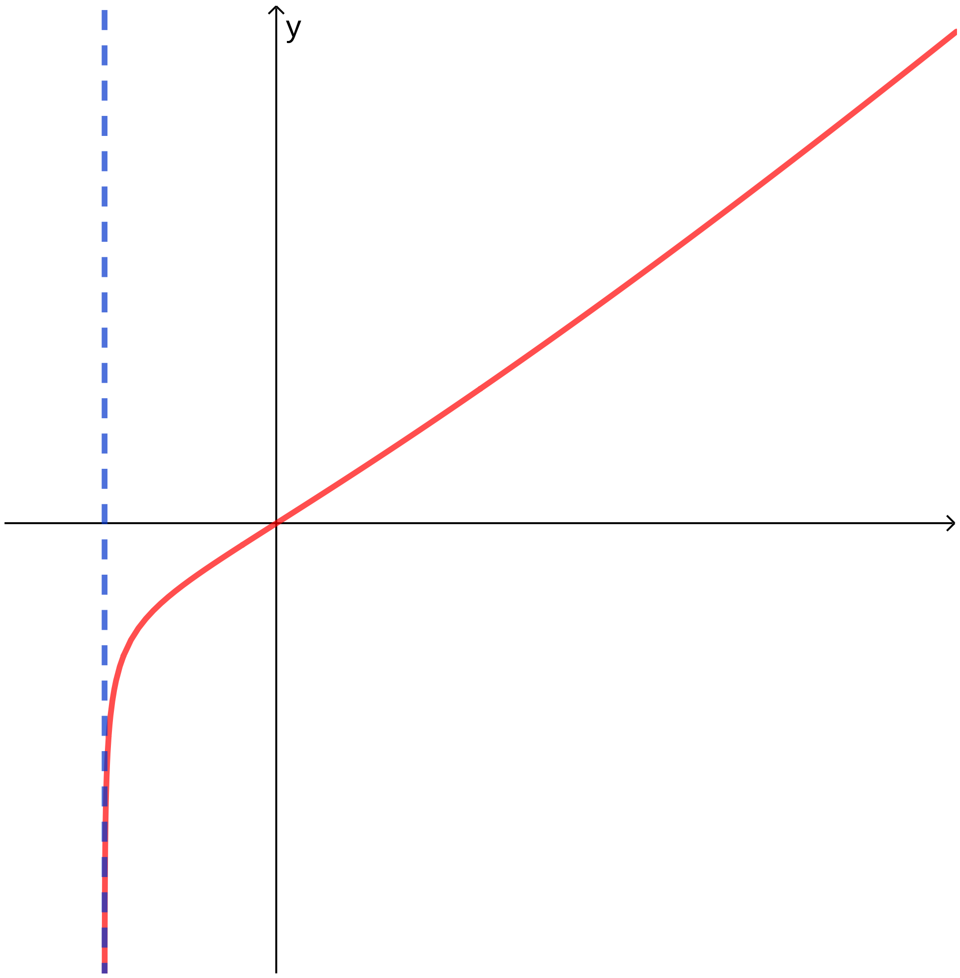
Calcoliamo infine la derivata seconda. Vale, sempre sul dominio di $f$:

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)[1+\log(1+x)]} - \frac{1}{(1+x)[1+\log(1+x)]^2} = \frac{1+\log(1+x)-1}{(1+x)[1+\log(1+x)]^2} = \frac{\log(1+x)}{(1+x)[1+\log(1+x)]^2},$$

sempre sul dominio di $f$. È chiaro che il denominatore dell'ultima espressione scritta è sempre positivo sul dominio di $f$. Quindi il segno della derivata seconda è determinato da quello del numeratore, e dunque $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, quindi $f$ è convessa in tale insieme, mentre $f''(x) < 0$ se e solo se $x \in \left(e^{-1} - 1, 0\right)$, quindi $f$ è concava in tale insieme. Il punto $x = 0$ è di flesso.

Se non si fosse svolto lo studio dettagliato della monotonia in precedenza, le considerazioni sul segno, sui limiti e sulla concavità di $f$ svolte permetterebbero comunque di concludere che $f$ è monotona sul suo dominio. Infatti, $f$ è certamente crescente in un intorno destro di $\frac{1}{e} - 1$ (si veda l'asintotica di $f'$ per $x \to \left(\frac{1}{e} - 1\right)^+$), è negativa in $\left(\frac{1}{e} - 1, 0\right)$, e dunque se avesse estremi relativi in tale intervallo essi sarebbero in numero pari. Ma allora $f$ avrebbe almeno un flesso in tale intervallo, cosa che non ha luogo. Si procede analogamente nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:




**4.** (punti 7). Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin\left[x^4 - (\sinh x)^4\right]}{1 - x^2}.$$

- Determinare i primi due termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $f$ centrato in $x = 0$.
- Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, stabilire usando il punto precedente se $g_k(x) := f(x) - k(x^6 + x^8)$ ha un punto di massimo relativo, o di minimo relativo, in $x = 0$.

**Soluzione**. I seguenti sviluppi si intenderanno sempre per $x \to 0$. Si ha dapprima:

$$\begin{aligned}
(\sinh x)^4 &= \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^4 = x^4 \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^4 \\
&= x^4 \left[1 + 4\left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right) + 6\left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\right] \\
&= x^4 \left[1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{x^4}{30} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right] = x^4 \left[1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{x^4}{5} + o(x^5)\right] \\
&= x^4 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{x^8}{5} + o(x^9); \\
x^4 - (\sinh x)^4 &= -\frac{2}{3}x^6 - \frac{x^8}{5} + o(x^9); \\
\sin\left(x^4 - (\sinh x)^4\right) &= \sin\left(-\frac{2}{3}x^6 - \frac{x^8}{5} + o(x^9)\right) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{x^8}{5} + o(x^9),
\end{aligned}$$

in quanto nell'ultimo formula scritta i termini successivi nello sviluppo del seno sono trascurabili rispetto a quello del primo ordine. Si noti che ovviamente nel primo passaggio scritto la potenza quarta poteva anche essere svolta direttamente. Si ha infine:

$$f(x) = \left(-\frac{2}{3}x^6 - \frac{x^8}{5} + o(x^9)\right)(1 + x^2 + o(x^3)) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{x^8}{5} - \frac{2}{3}x^8 + o(x^9) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{13}{15}x^8 + o(x^9),$$

che fornisce quanto richiesto nel primo punto. Riguardo il secondo, si noti che da quanto svolto si ha:

$$g_k(x) := f(x) - k(x^6 + x^8) = -\left(k + \frac{2}{3}\right)x^6 - \left(k + \frac{13}{15}\right)x^8 + o(x^9).$$

Quindi se $k > -\frac{2}{3}$, per un noto teorema si ha che $x = 0$ è punto di massimo relativo per $f$, $k < -\frac{2}{3}$, che $x = 0$ è punto di minimo relativo per $f$, mentre se $k = -\frac{2}{3}$ vale $g_{-\frac{2}{3}}(x) = -\frac{3}{15}x^8 + o(x^9)$, e quindi per il medesimo teorema si ha che $x = 0$ è punto di massimo relativo in tal caso.