Marco Contedini

LEZIONE 12

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

10 dicembre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Integrali indefiniti

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(a)\quad \int e^x \sin x\,dx \qquad (b)\quad \int \arctan x dx$$

$$(c)\quad \int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} \qquad (d)\quad \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}dx$$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sin x} \qquad (b)\ \int x^2 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx \qquad (c)\ \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$(d)\ \int \frac{1-(2x)^{\frac{1}{3}}}{(2x)^{\frac{1}{2}}}dx \qquad (e)\ \int \sqrt{R^2-x^2}\,dx \qquad (f)\ \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

2 Integrali definiti

3. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(a)\quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3-x| \arctan x\,dx$$

$$(b)\quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3-x) \arctan x\,dx$$

3 Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(a)\quad \int \frac{1}{(x^2+1)^3}dx \qquad (b)\quad \int xe^x \cos x\,dx$$

$$(c)\quad \int \sin^4 x dx \qquad (d)\quad \int x^2 \log(x^2+1)dx$$

$$(e)\quad \int \sin x \sinh x dx \qquad (f)\quad \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

$$(g)\quad \int \frac{dx}{\sin x} \qquad (h)\quad \int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx$$

$$(i)\quad \int \frac{dx}{\sinh x} \qquad (j)\quad \int \frac{2+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1-x}dx$$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(a) \quad \int \cos\sqrt{x}dx \qquad\qquad (b) \quad \int \arcsin\sqrt{x}dx$$

$$(c) \quad \int \frac{1}{\sinh^2 x + \cosh^2 x}dx \qquad\qquad (d) \quad \int \frac{x+2}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$$

$$(e) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \qquad\qquad (f) \quad \int \sqrt{x^2+a}\,dx$$

$$(g) \quad \int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx \qquad\qquad (h) \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,dx$$

4 Soluzioni

1. Integrali indefiniti

   (a) Si procede integrando per parti due volte (in entrambi i casi: $f'(x) = e^x$):

   $$\begin{aligned} I := \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \\ &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - I + C \end{aligned}$$

   Da cui:

   $$I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

   (b) Si procede integrando per parti:

   $$\begin{aligned} \int (1 \cdot \arctan x) dx &= x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log |1+t| + C \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C \end{aligned}$$

   (c) L'integranda è una funzione del tipo $f(e^x)$. È possibile razionalizzarla moltiplicando per e^x numeratore e denominatore, successivamente operando la sostituzione: $t = e^x$, $dt = e^x dx$.
   In questo caso si ha:

   $$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{e^x dx}{e^{3x} + e^{2x} - 2e^x} = \int \frac{dt}{t^3 + t^2 - 2t} = \int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)}$$

   Infine, si ottiene il risultato finale mediante una scomposizione in fratti semplici:

   $$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t(t-1)(t+2)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t+2} = \\ &= -\frac{1}{2} \log t + \frac{1}{3} \log |t-1| + \frac{1}{6} \log(t+2) + C = \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \log |e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2) + C \end{aligned}$$

   (d) Dall'identità fondamentale trigonometrica e dalla formula di duplicazione del seno si ha:

   $$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 + 1} dx$$

Posto $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$:

$$\int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + (1-\sin^2 x)^2 + 1} dx = \int \frac{2t}{t^4 + (1-t^2)^2 + 1} dt$$

Operiamo un altro cambio di variabile: $z = t^2$, $dz = 2tdt$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t}{t^4 + (1-t^2)^2 + 1} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^2 - z + 1} dz \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dz \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sin^2 x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

Metodo alternativo:
Si può riscrivere l'integranda nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1} &= \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + 1} \\
&= \frac{\sin 2x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 1} \\
&= \frac{\sin 2x}{2 - 2\sin^2 x \cos^2 x} \\
&= \frac{2\sin 2x}{4 - \sin^2 2x} \\
&= \frac{2\sin 2x}{3 + \cos^2 2x}
\end{aligned}$$

Posto $t = \cos 2x$, $dt = -2\sin 2x dx$, l'integrale diventa:

$$\int \frac{2\sin 2x}{3+\cos^2 2x} dx = -\int \frac{dt}{3+t^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Tornando alla variabile x:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1} dx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\cos 2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Ricordando che $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ e che l'arcotangente è una funzione dispari, vale l'uguaglianza delle primitive ottenute con i due diversi metodi.

2. Integrali indefiniti

(a) il modo più semplice per risolvere questo integrale è il seguente:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

Ponendo $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{t^2-1}dt &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C\end{aligned}$$

Metodo alternativo, formule parametriche (funzionano sempre se si vuole trasformare un'integranda razionale trigonometrica in una razionale algebrica):

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad t = \tan\frac{x}{2} \quad x = 2\arctan t \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}dx &= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt \\ &= \log|t| + C \\ &= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

Altro metodo alternativo. Formule di duplicazione:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}dx &= \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)} \\ &= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} \\ &= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

dove, per brevità, si è scritto $\frac{dx}{2\cos^2 x/2} = d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$, evitando un cambio di variabile.

Verificare per esercizio che:

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

(b) Si presume che: $-1 < x < 1$, al fine di ritenere ben definita la funzione integranda.
Integrando per parti ($f'(x) = x^2$):

$$I := \int x^2 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{x^3}{3}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{3}\int x^3 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{2}{(1-x)^2}\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{(1+x)(1-x)}\,dx$$

Calcoliamo l'integrale razionale all'ultimo membro:

$$\int \frac{x^3}{1-x^2}\,dx = \int \frac{x^3 - x + x}{1-x^2}\,dx =$$
$$= \int \left(-x + \frac{x}{1-x^2}\right) dx =$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1-x)(1+x) + C$$

Pertanto:

$$I = \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{3}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{3}\log(1-x)(1+x) + C$$

(c) La funzione integranda è del tipo: $f(x) = f(\sqrt[3]{x})$.
Essa può essere razionalizzata mediante la sostituzione: $\sqrt[3]{x} = t$, per cui: $dx = 3t^2 dt$. Si ha:

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})^2}dx = \int \frac{3t^2}{(t^2+t)^2}dt = 3\int \frac{1}{(t+1)^2}dt = -\frac{3}{t+1} + C =$$
$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1} + C$$

(d) Si suppone $x > 0$, altimenti la funzione integranda non sarebbe definita.
Si pone: $2x = t^6$, quindi: $dx = 3t^5 dt$. Si ha:

$$\int \frac{1-(2x)^{\frac{1}{3}}}{(2x)^{\frac{1}{2}}}dx = 3\int \frac{t^5(1-t^2)}{t^3}dt = 3\int t^2\,dt - 3\int t^4\,dt = t^3 - \frac{3}{5}t^5 + C$$

Ritornando alla variabile x:

$$\int \frac{1-(2x)^{\frac{1}{3}}}{(2x)^{\frac{1}{2}}}dx = (2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}(2x)^{\frac{5}{6}} + C$$

(e) Raccogliendo R e operando la sostituzione $x/|R| = t$, si ha:

$$I := \int \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = |R|\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\,dx = R^2\int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

Posto $t = \sin z$, $dt = \cos z\, dz$, si ha:

$$\int \sqrt{1-t^2}\, dt = \int \sqrt{1-\sin^2 z}\, \cos z\, dz = \int \cos^2 z\, dz$$

Per l'ultimo integrale si può procedere utilizzando la note formule di duplicazione del coseno:

$$\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}$$

da cui:

$$\int \cos^2 z dz = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}\sin 2z + C = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sin z \cos z + C$$

Pertanto:

$$I = R^2\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sin z\cos z\right) + C = \frac{1}{2}\left[R^2 \arcsin\left(\frac{x}{|R|}\right) + x\sqrt{R^2-x^2}\right] + C$$

(f) Raccogliendo a e operando la sostituzione $x/|a| = t$, si ha:

$$I := \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx = |a| \int \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\, dx = a^2 \int \sqrt{t^2-1}\, dt$$

Posto $t = \cosh z$, $dt = \sinh z\, dz$, ricordando l'identità fondamentale delle funzioni iperboliche: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, si ha:

$$\int \sqrt{t^2-1}\, dt = \int \sqrt{\cosh^2 z - 1}\, \sinh z\, dz = \int \sinh^2 z\, dz$$

Per l'ultimo integrale si può procedere per parti:

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 z dz &= \cosh z \sinh z - \int \cosh^2 z dz = \\ &= \cosh z \sinh z - \int (1+\sinh^2 z) dz = \\ &= \cosh z \sinh z - z - \int \sinh^2 z dz\end{aligned}$$

Ossia:

$$\int \sinh^2 z dz = \frac{1}{2}\left(\cosh z \sinh z - z\right) + C$$

Pertanto, essendo noto che:

$$\text{arccosh}\ z = \log(z + \sqrt{z^2-1}),$$

è possibile scrivere la primitiva cercata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}I = \frac{a^2}{2}(\cosh z \sinh z - z) + C &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{|a|}\right)\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\log\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)\right] + C'\end{aligned}$$

3. Integrali definiti

(a) Risulta:
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3 - x| \arctan x \, dx = 0$$
Infatti, l'integranda è una funzione dispari, in quanto è prodotto di una funzione pari (il modulo di una funzione dispari è una funzione pari) per una funzione dispari ($\arctan x$).
Dimostriamo che:
$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0 \quad \text{se } f(-x) = -f(x), \quad [-a, a] \subseteq \mathcal{D}_f$$
Dim.
Operando la sostituzione $t = -x$:
$$\int_0^a f(x) \, dx = -\int_0^{-a} f(-t) \, dt = \int_0^{-a} f(t) \, dt = -\int_{-a}^{0} f(t) \, dt$$
Quindi:
$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = \int_{-a}^{0} f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx = 0$$

(b) L'integranda è una funzione pari. Analogamente a quanto provato nell'esercizio precedente, si ha:
$$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2\int_0^a f(x) \, dx \quad \text{se } f(-x) = f(x), \quad [-a, a] \subseteq \mathcal{D}_f$$
Calcoliamo una primitiva della funzione integranda, dapprima integrando per parti:
$$\int (x^3 - x) \arctan x \, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \int \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x^2+1} dx$$
L'integrale del secondo membro è razionale e può essere calcolato utilizzando il trinomio notevole $x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2+1)(x^2-3)$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \frac{x^4 - 2x^2}{x^2+1} dx &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^2+1} dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+1} dx = 1 \\ &= \frac{1}{4}\int (x^2 - 3) dx + \frac{3}{4}\arctan x + C = \\ &= \frac{x^3}{12} - \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}\arctan x + C\end{aligned}$$
Quindi:
$$F(x) := \int (x^3 - x) \arctan x \, dx = -\frac{x^3}{12} + \frac{3x}{4} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\right) \arctan x + C$$
L'integrale definito risulta:
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3 - x) \arctan x \, dx = 2F(\sqrt{3}) - 2F(0) = \sqrt{3}$$
.

5 Soluzioni degli esercizi proposti

1. Integrali indefiniti

   (a) la funzione integranda è una funzione razionale del tipo:

   $$\frac{P(x)}{(Q(x))^n}$$

   dove $Q(x)$ è un polinomio irriducibile di secondo grado, $P(x)$ un polinomio di grado inferiore a $2n$.
   Il caso di radici complesse multiple si tratta come quello di radici semplici, aggiungendo termini del tipo:

   $$\sum_{h=1}^{n-1} \frac{d}{dx}\frac{R_h(x)}{(Q(x))^h}$$

   dove $R_h(x)$ sono generici polinomi di primo grado.
   In questo caso la scomposizione in fratti semplici è la seguente:

   $$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^3} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{-Cx^2-2Dx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{-3Ex^2-4Fx+E}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{Ax^5+(B-C)x^4+(2A-2D)x^3+(2B-3E)x^2}{(x^2+1)^3} + \\ &+ \frac{(A-2D-4F)x+B+C+E}{(x^2+1)^3}\end{aligned}$$

   che implica:

   $$\begin{cases} A=0 \\ B-C=0 \\ 2A-2D=0 \\ 2B-3E=0 \\ A-2D-4F=0 \\ B+C+E=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=3/8 \\ C=3/8 \\ D=0 \\ E=1/4 \\ F=0 \end{cases}$$

   Quindi:

   $$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} &= \frac{3}{8}\int \frac{dx}{(x^2+1)} + \frac{3}{8}\int \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)dx + \frac{1}{4}\int \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx = \\ &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + C\end{aligned}$$

   (b) Integrando per parti ($f'(x) = \cos x$) e ricordando che:

   $$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

$$
\begin{aligned}
I := \int x e^x \cos x\,dx &= x e^x \sin x - \int (e^x + x e^x) \sin x\,dx = \\
&= x e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx - \int x e^x \sin x\,dx = \\
&= x e^x \sin x - \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) - \int x e^x \sin x\,dx
\end{aligned}
$$

L'ultimo integrale può essere calcolato ancora integrando per parti:

$$
\begin{aligned}
\int x e^x \sin x\,dx &= -x e^x \cos x + \int (e^x + x e^x) \cos x\,dx = \\
&= -x e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx + I
\end{aligned}
$$

Operando come nell'esercizio precedente si giunge al seguente risultato:

$$
\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C
$$

Quindi:

$$
I = x e^x \sin x - \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) - \left[-x e^x \cos x + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + I \right] + C
$$

Infine:

$$
I = \frac{e^x \left[x(\sin x + \cos x) - \sin x \right]}{2} + C
$$

(c) Integrando per parti:

$$
\begin{aligned}
\int (\sin x \cdot \sin^3 x) dx &= -\cos x \sin^3 x + 3 \int (\cos^2 x \sin^2 x) dx \\
&= -\cos x \sin^3 x + 3 \int (\sin^2 x) dx - 3 \int (\sin^4 x) dx.
\end{aligned}
$$

$$
4I = -\cos x \sin^3 x + 3 \int (\sin^2 x) dx \qquad I := \int (\sin^4 x) dx
$$

Calcoliamo $\int (\sin^2 x) dx$.
Procedendo sempre per parti:

$$
\int (\sin x \sin x) dx = -\cos x \sin x + \int (\cos^2 x) dx = -\cos x \sin x + \int dx - \int (\sin^2 x) dx
$$

$$
2J = -\cos x \sin x + x + C \qquad J := \int (\sin^2 x) dx
$$

da cui:

$$
\int (\sin^2 x) dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + C
$$

Quindi:

$$
\int (\sin^4 x) dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}(x - \cos x \sin x) + C.
$$

Procedendo in modo analogo si può ricavare una legge di ricorrenza per integrali del tipo $\int \sin^n x\,dx$

$$\begin{aligned}
I_n := \int \sin^n x\,dx &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx = \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx = \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$I_n := \int \sin^n x\,dx = \frac{-\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}}{n}$$

Allo stesso modo si ottiene:

$$J_n := \int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x\sin x + (n-1)J_{n-2}}{n}$$

Sapendo che: $I_0 = x$, $I_1 = -\cos x$, $J_0 = x$, $J_1 = \sin x$, è possibile ricavare per ricorrenza la primitiva di $\sin^n x$ ($\cos^n x$) per n generico.

(d) Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\int x^2\log(x^2+1)dx &= \frac{x^3}{3}\log(x^2+1) - \int \frac{x^3}{3}\frac{2x}{x^2+1}dx \\
&= \frac{x^3}{3}\log(x^2+1) - \frac{2}{3}\int \frac{x^4}{x^2+1}dx \\
&= \frac{x^3}{3}\log(x^2+1) - \frac{2}{3}\int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx \\
&= \frac{x^3}{3}\log(x^2+1) - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{2}{3}\int (x^2-1)dx \\
&= \frac{x^3}{3}\log(x^2+1) - \frac{2}{3}\arctan x - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x + C
\end{aligned}$$

(e) Usando la definizione di seno iperbolico, si ha:

$$\int (\sin x\sinh x)dx = \frac{1}{2}\int (e^x\sin x)dx - \frac{1}{2}\int (e^{-x}\sin x)dx$$

I due integrali al secondo membro si risolvono procedendo per parti due volte:

$$\int (e^x\sin x)dx = e^x\sin x - \int (e^x\cos x)dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int (e^x\sin x)dx$$

da cui:

$$\int (e^x\sin x)dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_1$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\int (e^{-x}\sin x)dx &= -e^{-x}\sin x + \int (e^{-x}\cos x)dx \\ &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int (e^{-x}\sin x)dx\end{aligned}$$

da cui:

$$\int (e^{-x}\sin x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C_2$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int (\sin x \sinh x)dx &= \frac{1}{4}\left[e^{x}(\sin x - \cos x) + e^{-x}(\sin x + \cos x)\right] + C \\ &= \frac{1}{2}(\sin x \cosh x - \cos x \sinh x) + C\end{aligned}$$

Al medesimo risultato si poteva pervenire conoscendo le formule di derivazione del seno e del coseno iperbolico.
Procedendo sempre con una doppia integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int (\sin x \sinh x)dx &= \sin x \cosh x - \int (\cos x \cosh x)dx \\ &= \sin x \cosh x - \cos x \sinh x - \int (\sin x \sinh x)dx\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int (\sin x \sinh x)dx = \frac{1}{2}(\sin x \cosh x - \cos x \sinh x) + C$$

(f) La presenza di $\sin^2$ al denominatore suggerisce di riscrivere l'integrale in termini della tangente di x e operare un cambio di variabile.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{1+2\tan^2 x}dx$$

Posto $t = \tan x$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, si ha:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+2t^2}$$

Posto $z = \sqrt{2}t$, $z^2 = t^2$, $dz = \sqrt{2}dt$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan z + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C\end{aligned}$$

(g) il modo più semplice per risolvere questo integrale è il seguente:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Ponendo $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{t^2 - 1} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
&= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C
\end{aligned}$$

Metodo alternativo, formule parametriche (funzionano sempre se si vuole trasformare un'integranda razionale trigonometrica in una razionale algebrica):

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \qquad t = \tan \frac{x}{2} \qquad x = 2 \arctan t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{1}{t} dt \\
&= \log |t| + C \\
&= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C
\end{aligned}$$

Altro metodo alternativo. Formule di duplicazione:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right)} \\
&= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{dx}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{d \left(\tan \frac{x}{2} \right)}{\tan \frac{x}{2}} \\
&= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C
\end{aligned}$$

dove, per brevità, si è scritto $\frac{dx}{2 \cos^2 x/2} = d \left(\tan \frac{x}{2} \right)$, evitando un cambio di variabile.

Verificare per esercizio che:

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| .$$

(h) L'integranda è una funzione razionale nella variabile e^x. Per operare il cambio di variabile $t = e^x$ conviene raccogliere il fattore e^x al numeratore in modo che facilmente si possa sostituire $e^x dx$ con dt. Alternativamente si può moltiplicare numeratore e denominatore per e^x. in ogni caso si ottiene:

$$\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{1+2e^x}{e^{3x}-e^x}e^x dx = \int \frac{1+2t}{t^3-t}dt$$

Ci siamo ricondotti al caso di un'integranda razionale con tre radici reali semplici.
Posto:

$$\frac{2t+1}{t^3-t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}$$

si ottiene: $A = -1$, $B = \frac{3}{2}$ e $C = -\frac{1}{2}$.
Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx &= -\int \frac{1}{t}dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt \\ &= -\log|e^x| + \frac{3}{2}\log|e^x-1| - \frac{1}{2}\log|e^x+1| + C \\ &= -x + \frac{3}{2}\log|e^x-1| - \frac{1}{2}\log(e^x+1) + C\end{aligned}$$

(i) Metodo "diretto": usando la definizione del seno iperbolico e moltiplicando numeratore e denominatore per e^x si ottiene:

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{2dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{2e^x dx}{e^{2x}-1}$$

Ponendo $t = e^x$ $dt = e^x dx$, si ha:

$$\int \frac{2e^x dx}{e^{2x}-1} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C$$

Metodo alternativo:

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \int \frac{\sinh x}{\sinh^2 x}dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh^2 x - 1}dx$$

Ponendo $\cosh x = t$, $\sinh x dx = dt$:

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh^2 x - 1}dx = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}\right| + C$$

Dimostrare, sempre per esercizio, che:

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}\right| = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$$

(j) Poichè x deve essere maggiore o uguale di zero, posto $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$, si ha:

$$\int \frac{2+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1-x}dx = -2\int \frac{t^3+t^2+2t}{t^2-t+1}dt$$

L'integranda è una funzione razionale con il grado del numeratore maggiore del denominatore. Occorre operare una divisione (con resto) tra polinomi per potere riscrivere l'integranda come:

$$\begin{aligned}\frac{t^3+t^2+2t}{t^2-t+1} &= t+2+\frac{3t-2}{t^2-t+1}\\ &= t+2+\frac{3}{2}\frac{2t-1-\frac{1}{3}}{t^2-t+1}\\ &= t+2+\frac{3}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}-2\int\frac{t^3+t^2+2t}{t^2-t+1}dt &= -2\int(t+2)dt-3\int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\int\frac{1}{t^2-t+1}dt\\ &= -t^2-4t-3\log|t^2-t+1|+\int\frac{1}{t^2-t+1}dt\end{aligned}$$

Per risolvere l'ultimo integrale ci accorgiamo innanzitutto che il polinomio al denominatore ha due radici complesse, quindi la soluzione sarà «tipo arcotangente». Riscriviamo l'integranda come:

$$\frac{1}{t^2-t+1}=\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$$

Operando il cambio di variabile $z=\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t=\frac{\sqrt{3}z+1}{2}$, $dt=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{t^2-t+1} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{1+z^2}dz\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan z+C\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C\end{aligned}$$

Quindi, tornando alla variabile x, si ha:

$$\int\frac{2+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1-x}dx=-x-4\sqrt{x}-3\log(x-\sqrt{x}+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

2. Integrali indefiniti

   (a) Posto $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx=2tdt$, si ha:

   $$\int(\cos\sqrt{x})dx=2\int(t\cos t)dt$$

   Procedendo per parti:

   $$2\int(t\cos t)dt=2t\sin t-2\int(\sin t)dt=2t\sin t+2\cos t+C$$

   ritornando alla variabile x:

   $$\int(\cos\sqrt{x})dx=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}+C$$

(b) Analogamente all'esercizio precedente, posto $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$, ricordando che $0 \le x \le 1$:

$$\begin{aligned}\int(\arcsin\sqrt{x})dx = 2\int(t\arcsin t)dt &= t^2\arcsin t - \int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ &= t^2\arcsin t + \int\frac{-1+1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ &= t^2\arcsin t - \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int\sqrt{1-t^2}dt\\ &= t^2\arcsin t - \arcsin t + \int\sqrt{1-t^2}dt\end{aligned}$$

Per valutare l'ultimo integrale operiamo una nuova sostituzione: $t = \sin z$, $z = \arcsin t$ e $dt = \cos z dz$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-t^2}dt = \int(\cos^2 z)dz &= \sin z\cos z + \int(\sin^2 z)dz\\ &= \sin z\cos z + \int(1-\cos^2 z)dz\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\int(\cos^2 z)dz = \frac{1}{2}(\sin z\cos z + z) + C$$

e tornando nella variabile t:

$$\int\sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right) + C$$

Infine, riscrivendo il risultato nella variabile x:

$$\begin{aligned}\int(\arcsin\sqrt{x})dx &= x\arcsin\sqrt{x} - \arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}(2x-1)\arcsin\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x-x^2}}{2} + C\end{aligned}$$

(c) Conviene agire nel modo seguente.
Ponendo $t = \tanh x$, $dt = \frac{1}{\cosh^2 x}$:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sinh^2 x + \cosh^2 x}dx &= \int\frac{1}{\left(\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} + 1\right)\cosh^2 x}dx\\ &= \int\frac{1}{(\tanh^2 x + 1)\cosh^2 x}dx\\ &= \int\frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \arctan t + C' = \arctan(\tanh x) + C'\end{aligned}$$

Non è banale (ma divertente!) dimostrare che:

$$\arctan(\tanh x) + C' = \arctan(e^{2x}) + C.$$

(d) Si razionalizza la funzione integranda ponendo: $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t$.
Inoltre:

$$t^2 = \frac{x+1}{x} \qquad x = \frac{1}{t^2-1} \qquad dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$$

Sostituendo, si ricava:

$$\int \frac{x+2}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int \frac{2t^2-4t^4}{(t^2-1)^2}dt$$

Il processo di riduzione ai fratti semplici è standard. Dapprima ci si riduce ad avere il numeratore di grado inferiore al denominatore: questo può essere ottenuto facilmente considerando che:

$$-4t^4 + 2t^2 = -4(t^2-1)^2 - 6t^2 + 4$$

Quindi:

$$\frac{2t^2-4t^4}{(t^2-1)^2} = -4 + \frac{4-6t^2}{(t^2-1)^2}$$

Cerchiamo quattro costanti A, B, C e D, tali che, $\forall x \in \mathbb{R}$, risulti:

$$\frac{4-6t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{(t+1)^2}$$

Dal principio di identità dei polinomi segue:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C+D=-6 \\ -A-B+2C-2D=0 \\ A-B+C+D=4 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono: $A = \frac{5}{2}$, $B = -\frac{5}{2}$, $C = D = \frac{1}{2}$.
Pertanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{2t^2-4t^4}{(t^2-1)^2}dt &= -4\int dt + \frac{5}{2}\left(\int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{1}{t-1}dt\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{(t-1)^2}dt + \int \frac{1}{(t+1)^2}dt\right) = \\ &= -4t + \frac{5}{2}(\log|t+1| - \log|t-1|) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right) + C = \\ &= \frac{5}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{t}{t^2-1} - 4t + C = \\ &= \frac{5}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{1-4x}{x}\right)\sqrt{\frac{x+1}{x}} + C\end{aligned}$$

(e) Sia $a > 0$.

$$I_a := \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}}$$

Posto $x/\sqrt{a} = t$, abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{a}+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \operatorname{arcsinh} t + C$$

L'ultima uguaglianza è nota dalle tavole di integrazione ma può essere dedotta operando la sostituzione:

$$t = \sinh z \qquad dt = \cosh z \qquad \sqrt{1+t^2} = \cosh z$$

Ricordando che:

$$\operatorname{arcsinh} t = \log(t + \sqrt{t^2+1})$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} I_a = \log\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right) + C &= \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{a}}\right) + C \\ &= \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C' \end{aligned}$$

Sia $a < 0$. Poniamo $b = -a$.
Operando la sostituzione $x/\sqrt{b} = t$, abbiamo:

$$I_b := \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{arccosh} t + C$$

Ricordando che:

$$\operatorname{arccosh} t = \log(t + \sqrt{t^2-1})$$

possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} I_b = \log\left(\frac{x}{\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{x^2}{b}-1}\right) + C &= \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-b}}{\sqrt{b}}\right) + C \\ &= \log\left(x + \sqrt{x^2-b}\right) + C' \\ &= \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C' \end{aligned}$$

(f) Sia $a > 0$ (se a fosse negativo il procedimento sarebbe analogo, vedi esercizio precedente).
Utilizzando le formule di trasformazione iperboliche:

$$x = \sqrt{a}\sinh t \quad t = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{\sqrt{a}} = \log\left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{x^2}{a}+1}\right)$$

$$dx = \sqrt{a}\cosh t dt$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a+x^2}dx &= a\int \cosh^2 t dt \\ &= \frac{a}{4}\int \left(e^{2t}+e^{-2t}+2\right)dt \\ &= \frac{a}{4}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+2t\right)+C \\ &= \frac{a}{4}(\sinh 2t+2t)+C \\ &= \frac{a}{2}\sinh t\cosh t+\frac{a}{2}t+C\end{aligned}$$

dove si è utilizzata la formula di duplicazione del seno iperbolico:

$$\sinh 2t = 2\sinh t\cosh t$$

Ritornando alla variabile x si ha, infine:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a+x^2}dx &= \frac{x}{2}\sqrt{a+x^2}+\frac{a}{2}\text{arcsinh}\frac{x}{\sqrt{a}}+C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a+x^2}+\frac{a}{2}\log\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+C'\end{aligned}$$

(g) Occorre utilizzare le formule parametriche:

$$t=\tan\frac{x}{2} \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dt=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Operando la sostituzione $x\to t$, si razionalizza la funzione integranda:

$$I:=\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\int\frac{2t}{2-t}+\frac{1}{4}\int\frac{2t}{2+t}=\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C$$

Infine, tornando alla variabile x:

$$I=\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+\tan x/2}{2-\tan x/2}\right|+C$$

(h) Moltiplicando per e^{-x} numeratore e denominatore, si ottiene:

$$I:=\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}dx=\int\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-x}+e^{-2x}}}dx$$

Operando la sostituzione: $t=e^{-x}$ $(dt=-e^{-x}dx)$, si ha:

$$I=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}$$

Operando la sostituzione $z=\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $dt=\frac{\sqrt{3}}{2}dz$, si ha:

$$I=-\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

Ci siamo così ricondotti ad un integrale come quello dell'esercizio (e). Pertanto, la primitiva risulta essere:

$$\begin{aligned}
I &= -\log\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)+C= \\
&= -\log\left(2t+1+\sqrt{(2t+1)^2+3}\right)+C'= \\
&= -\log\left(1+2e^{-x}+2\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}\right)+C'= \\
&= -\log\left[e^{-x}\left(e^{x}+2+2\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}\right)\right]+C'= \\
&= x-\log\left(e^{x}+2+2\sqrt{1+e^{x}+e^{2x}}\right)+C'
\end{aligned}$$