Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Risolvere l'equazione, nella variabile $z \in \mathbb{C}$,

$$z^4 + 2\overline{z}^2 + 1 = 0.$$

Determinare inoltre le soluzioni di massimo modulo.

Soluzione dell'esercizio 1

Scritto $z = x + iy$, calcoliamo esplicitamente le potenze ottenendo:

$$\begin{aligned} 0 &= (x+iy)^4 + 2(x-iy)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 2ixy)^2 + 2(x^2 - y^2 - 2ixy) + 1 \\ &= x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 2x^2y^2 + 4ix^3y - 4ixy^3 + 2x^2 - 2y^2 - 4ixy + 1 \\ &= x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2 + 1 + 4ixy(x^2 - y^2 - 1). \end{aligned}$$

La parte immaginaria dell'ultima espressione scritta si annulla se $x = 0$, o se $y = 0$, o se $x^2 = y^2 + 1$. Verifichiamo quando si annulla anche la parte reale dell'ultima espressione scritta, in ciascuno di tali tre casi. Se $x = 0$ deve valere $y^4 - 2y^2 + 1 = 0$, cioè $y^2 = 1$, cioè $y = \pm 1$. Si ottengono le radici $z = \pm i$. Se $y = 0$ deve valere $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$, che non ha soluzioni reali. Se infine $x^2 = y^2 + 1$ deve valere:

$$0 = (y^2+1)^2 + y^4 - 6(y^2+1)y^2 + 2(y^2+1) - 2y^2 + 1 = -4y^4 - 4y^2 + 4,$$

cioè $y^4 + y^2 - 1 = 0$, cioè $y^2 = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. È accettabile la sola radice positiva, e si ha dunque $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. In corrispondenza a ciò si ottiene $x^2 = y^2 + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e quindi $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. Risultano quindi le ulteriori quattro soluzioni seguenti:

$$z = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

dove si intende che tutte e quattro le possibili combinazioni dei segni sono possibili. Vi sono dunque sei soluzioni. Le prime due identificate hanno modulo uno. Le ultime quattro hanno modulo dato da:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt[4]{5}.$$

Le radici di massimo modulo sono dunque le ultime quattro determinate.

Esercizio 2 8 punti

Mostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\log(1+x)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

esiste in senso improprio e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 2

La funzione integranda è continua e limitata in $[0,+\infty)$, quindi si deve verificare il comportamento a $+\infty$. Per $x \to +\infty$

$$\log(1+x) \sim \log x, \quad (1+x^2)^2 \sim x^4 \Rightarrow \frac{x\log(1+x)}{(1+x^2)^2} \sim \frac{\log x}{x^3}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^3} dx$ converge (confronto con $\frac{1}{x^{5/2}}$), quindi l'integrale converge in senso improprio. Poniamo $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\log(1+x)}{(1+x^2)^2}\,dx$. Integriamo per parti:

$$u = \log(1+x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x}dx, \quad dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2(1+x^2)}\,,$$

quindi

$$I = uv\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v\cdot du = \left[\log(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x^2)(1+x)}\,dx$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \log(1+x)\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right) = 0\,,$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}\left[\log(1+x) + \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} dx = \frac{\pi}{8}$$

Esercizio 3 10 punti

Studiare il grafico della funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{|x-3|}{1+|x|}\right).$$
Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita se
$$\frac{|x-3|}{1+|x|} > 0\,,$$
ossia per ogni $x \neq 3$.
Dividiamo il dominio in tre parti:
Se $x > 3$, allora $|x-3| = x-3$ e $|x| = x$, quindi $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{1+x}\right)$ e $f'(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)}$.
Se $0 \leq x < 3$, allora $|x-3| = 3-x$ e $|x| = x$, quindi $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{1+x}\right)$ e $f'(x) = \frac{4}{(x-3)(x+1)}$.
Se $x < 0$, allora $|x-3| = 3-x$ e $|x| = -x$, quindi $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{1-x}\right)$ e $f'(x) = \frac{2}{(x-3)(x-1)}$.
Osserviamo che $f(x)$ non è derivabile in $x=0$ e $x=3$, e altrove la derivata non è mai nulla.

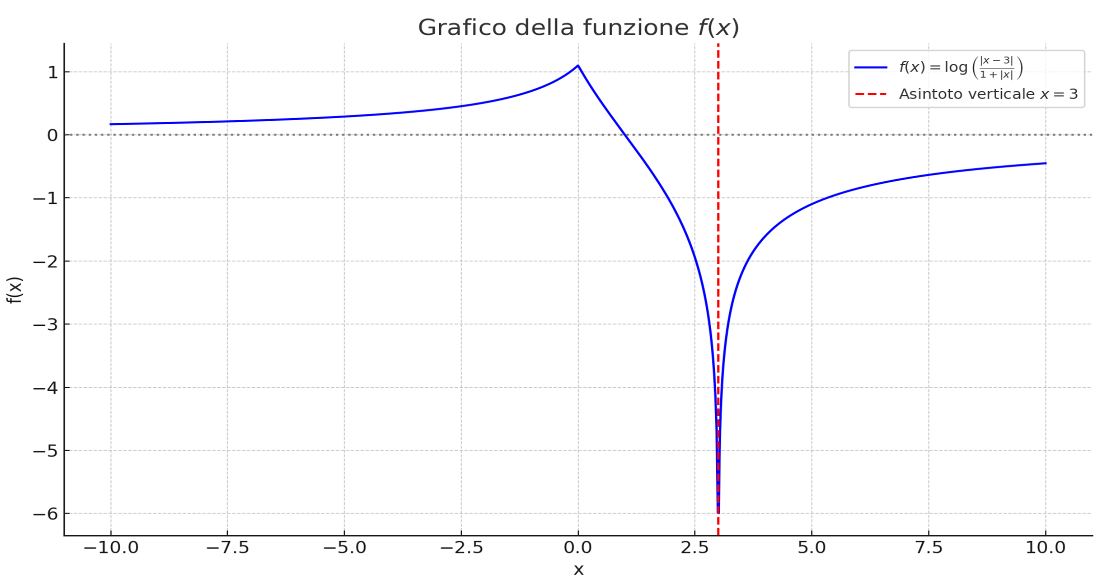
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \log\left(\frac{3-x}{1+x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \log\left(\frac{x-3}{1+x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{x-3}{1+x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{3-x}{1-x}\right) = 0$$

La funzione non è né pari né dispari.
$f(x) \geq 0$ se $\frac{|x-3|}{1+|x|} \geq 1$, ossia $|x-3| \geq 1+|x|$ e quindi $x \leq 1$.
La funzione ha un asintoto verticale in $x=3$, tende a 0 all'infinito.



Esercizio 4 7 punti

Stabilire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a$$

converge. Successivamente determinare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a}{(x-3)^n},$$

dove $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Non è richiesto di studiare il caso $x = 2$.

Soluzione dell'esercizio 4

Notiamo in primo luogo che, per $n \to +\infty$, vale:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1 &= 2n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 2n - 1 = 2n\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2n - 1 \\ &= -\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Quindi,

$$\left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a = -\frac{1}{4} n^{a-1} + o\left(n^{a-1}\right).$$

La serie numerica proposta è dunque a termini almeno asintoticamente di segno costante, e per il criterio del confronto converge se e solo se $a < 0$.

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che, posto $a_n = \left(2\sqrt{n^2+n} - 2n - 1\right) n^a$, si ottiene dai calcoli precedenti, per $n \to +\infty$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \sim \left(\frac{1}{4} n^{a-1}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1,$$

per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, dove si è usato il fatto che $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ per $n \to +\infty$. Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ ha raggio di convergenza pari a uno per ogni a (se si preferisce, si arriva alla stessa conclusione col criterio del rapporto). Dunque, sempre per ogni a, la seconda serie assegnata converge se $\frac{1}{|x-3|} < 1$, cioè se $|x-3| > 1$, cioè se $x > 4$ oppure $x < 2$, non converge se $x \in (2,3) \cup (3,4)$. Se $x = 4$, si ritrova la prima serie studiata, che converge se e solo se $a < 0$. Il caso $x = 2$ non è richiesto (si mostra comunque che la serie converge per $x = 2$ se e solo se $a < 1$).