I VOLUMI DELLA COLLANA ESAMI

1 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI. Esercizi
43 esercizi risolti e discussi forniscono un'efficace guida pratica alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Vengono affrontati 17 sistemi non omogenei fondamentali, 8 sistemi omogenei fondamentali, 10 sistemi parametrici. Compendiano gli argomenti trattati 8 temi d'esame risolti.

2 INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLE FUNZIONI
Guida alla conoscenza degli argomenti basilari per lo studio sistematico delle funzioni: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radice, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc. Gli argomenti sono corredati di esempi esplicativi nei quali alle considerazioni algebriche è abbinata l'interpretazione grafica.

3 FUNZIONI DA ESAME
57 funzioni scelte per dare un'opportuna preparazione all'esame scritto di ANALISI I. Ognuna di esse è svolta integralmente in modo da risultare facilmente comprensibile ed ogni operazione difficile (limiti, derivate, ...) è eseguita. Tutti I grafici sono stati realizzati con l'ausilio di un calcolatore.

4 LIMITI. Esercizi
400 esempi ed esercizi scelti in modo da condurre lo studente ad un agevole calcolo dl limiti dl funzioni comunque complicate e di qualsiasi tipo: funzioni razionali e irrazionali, funzioni logaritmiche ed esponenziali, funzioni circolari dirette ed inverse, funzioni iperboliche dirette e inverse.

5 DERIVATE. Esercizi
252 esercizi di derivazione di funzioni in coordinate cartesiane ortogonali, in coordinate parametriche e polari. Derivazione di funzioni esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Derivate successive. Differenziali. L'applicazione della derivata a problemi tecnici fondamentali ha lo scopo di rendere meno difficoltoso lo studio delle scienze applicate.

6 INTEGRALI. Esercizi
274 integrali completamente svolti, preceduti da una parte introduttiva comprendente richiami di algebra e di trigonometria circolare e iperbolica.

7 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume primo
176 esercizi per spiegare organicamente le leggi che governano l'algebra delle matrici; interpretazione vettoriale delle matrici; proprietà dei determinanti; ricerca del rango di una matrice; applicazioni dei determinanti alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

8 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume secondo
149 esempi ed esercizi per illustrare in modo efficace gli spazi vettoriali, le trasformazioni lineari, la ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice, le matrici simili e i procedimenti per triangolarizzare e per diagonalizzare una matrice; applicazioni a coniche e quadriche.

9 L'ALGEBRA DELLE MATRICI E LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI
60 sistemi omogenei, non omogenei, parametrici, trigonometrici affrontati con il metodo dl Gauss-Jordan, il più efficace nella risoluzione dei problemi tecnici.

10 NUMERI COMPLESSI
100 esercizi sufficienti per acquisire la pratica necessaria sui numeri complessi nelle loro quattro forme e per meglio fissare i concetti teorici espressi nel modo più elementare possibile. 22 temi d'esame risolti.

11 CORSO PROPEDEUTICO DI MATEMATICA PER GLI STUDENTI DEL PRIMO ANNO DI UNIVERSITÀ
294 esempi ed esercizi: dai polinomi alle disequazioni, dai logaritmi alle funzioni trigonometriche: i fondamenti della matematica necessari per affrontare in modo sicuro gli studi universitari.

12 LO STUDIO DELLA FUNZIONE
36 funzioni di vario tipo, precedute da una parte introduttiva avente la funzione di traccia per lo studio di qualsiasi funzione. Corredati di numerosi esempi ed esercizi, sono trattati: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radici, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc.

13 IL LIMITE
337 esercizi scelti per condurre lo studente ad un'agevole ricerca dei limiti di funzioni di qualunque tipo e comunque complicate.

14 LA DERIVATA
215 esercizi di derivazione di funzioni vario tipo, esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Differenziali, derivate successive. Significato ed applicazioni della derivata.

15 L'INTEGRALE
250 esercizi di integrazione di funzioni di vario tipo: hanno lo scopo di condurre gradualmente lo studente ad una rapida familiarizzazione con l'operatore integrale.

16 CIRCUITI TRIFASE
36 esercizi concernenti l'analisi di reti trifase in regime sinusoidale: reti simmetriche equilibrate e non equilibrate; sistemi trifase simmetrici con neutro. Misura di potenze attive, reattive, apparenti nei sistemi trifase.

17 CAMPI E CIRCUITI MAGNETICI
46 esercizi completamente svolti, concernenti campi e circuiti magnetici, induttori mutuamente accoppiati, azioni meccaniche generate dalle correnti elettriche, elettromagneti.

18 EQUAZIONI DIFFERENZIALI
273 esercizi per acquisire la tecnica necessaria ad affrontare le equazioni differenziali nelle loro più svariate forme.

19 GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO
173 esercizi svolti concernenti la retta nelle sue varie forme e le sue proprietà; fasci di rette a centro proprio ed a centro improprio; traslazione e rotazione degli assi di riferimento; luoghi geometrici; circonferenza e sue proprietà; coniche in forma canonica: ellisse, parabola, iperbole; funzione omografica.

continua in seconda di copertina

ISBN 88-85255-04-3
9 788885 255043

€ 7,00

4 LIMITI

Collana Esami

Gioacchino ORECCHIA
Salvatore SPATARO

LIMITI

ESERCIZI

400 esempi ed esercizi scelti in modo da condurre lo studente ad un agevole calcolo di limiti di funzioni comunque complicate e di qualsiasi tipo: funzioni razionali ed irrazionali, funzioni logaritmiche ed esponenziali, funzioni circolari dirette ed inverse, funzioni iperboliche dirette ed inverse

© COPYRIGHT 1990 - EDIZIONI TECNOS s.r.l.
TERZA EDIZIONE
Prima edizione: © 1974
Seconda edizione: © 1980

Stampa della EDIZIONI TECNOS s.r.l. - Milano
Via Rucellai, 23 - Tel. (02) 25 71 634
E-mail: edizioni.tecnos@freepass.it

INDICE

6. LIMITI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

7. CALCOLO DI LIMITI MEDIANTE SVILUPPI IN SERIE

8. LIMITI DI FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

9. LIMITI DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

APPENDICE

1 - INTRODUZIONE

Si voglia calcolare l'area del cerchio di raggio r e centro O, partendo dall'area del poligono regolare, ad esso circoscritto, avente n lati.

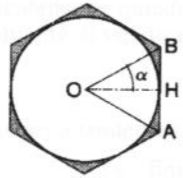


Fig. 1.1

Se si assumesse come area del cerchio quella del poligono di fig. 1.1 (esagono regolare), si commetterebbe un errore, per eccesso, costituito dall'area della zona punteggiata.

Certamente tale errore diminuisce tanto più, quanto più aumenta il numero dei lati del poligono che si considera (vedi fig. 1.2).

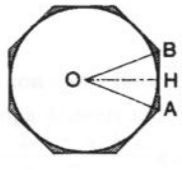


Fig. 1.2

Tale errore diventa praticamente nullo quando si considera un poligono avente un numero di lati infinitamente grande.

Vediamo allora come si può esprimere l'area di un poligono avente n lati. Si consideri, ad esempio, il poligono di fig. 1.1. La sua area è data da n volte l'area S_T del triangolo isoscele AOB. Si ha:

$$S_T = \frac{AB \cdot OH}{2} \quad \text{con} \quad OH = r\,, \quad AB = 2HB$$

Dalla trigonometria, per definizione, è:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{HB}{OH} \quad \rightarrow \quad HB = OH \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Dato che la misura dell'angolo giro, in radianti, è 2π, è anche:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}$$

Pertanto:

$$HB = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

e quindi:

$$S_T = \frac{2 \cdot HB \cdot OH}{2} = \frac{2r \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \cdot r}{2} = r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

L'area del poligono di n lati è allora: $\quad S_P = nr^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \qquad$ [1.1]

L'area S_C del cerchio cercata è il valore assunto dall'espressione [1.1] quando n diventa indefinitamente grande (si suol dire: quando n tende all'infinito). Simbolicamente si scrive:

$$S_C = \lim_{x \to +\infty} nr^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

Tutto sta, quindi, nel saper risolvere questa espressione. Quando saremo in grado di farlo, si vedrà che:

$$\lim_{n\to+\infty} nr^2\cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{n} = \pi r^2$$

Cioè l'area del cerchio di raggio r è πr^2, come è noto dalla geometria elementare.

Si è voluto far vedere un esempio di applicazione del concetto di limite alla geometria. Sarebbe possibile fare vedere applicazioni in altri campi della scienza, ma pensiamo che l'esempio scelto renda l'idea dell'importanza che ha l'operatore limite, il quale è alla base del calcolo infinitesimale.

2 - SIGNIFICATO DEL LIMITE

L'importanza del concetto di limite risiede nel fatto che esso è alla base del calcolo differenziale ed integrale.

Indipendentemente quindi dal calcolo vero e proprio, cerchiamo di esprimere, con una certa gradualità, il significato dell'espressione:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \qquad [2.1]$$

(si legge: limite per x tendente a c di $f(x)$ uguale ad l).

Nella [2.1] può essere: $\begin{cases} c & \text{finito o infinito} \\ l & \text{finito o infinito} \end{cases}$

2.1. - Il limite con c ed l finiti

Si supponga di avere una funzione $y = f(x)$ (¹) reale della variabile reale x. Per esempio, $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$ è una funzione di questo tipo, perché ad ogni valore reale della x (eccettuato $x = 2$ (²)), corrisponde un determinato valore reale della y. Si supponga, inoltre, di avere un numero reale, ad esempio $l = 3$, e di fissare arbitrariamente un numero piccolissimo positivo ϵ (epsilon), ad esempio $\epsilon = 10^{-9}$ (un miliardesimo). Ci proponiamo di risolvere e di interpretare la disuguaglianza:

$$|f(x) - l| < \epsilon \qquad [2.1.1]$$

che nel caso particolare della funzione data sarà:

$$\left|\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} - 3\right| < 10^{-9} \qquad [2.1.2]$$

È chiaro che, risolvere una diseguaglianza, vuol dire trovare, se esiste, un insieme di valori da dare ad x, che sostituiti nella [2.1.1] (o nella [2.1.2]) rendono il primo membro minore del secondo membro. Supponiamo che la [2.1.1] abbia soluzioni. Allora risolvendola può capitare che sia soddisfatta per:

1) i valori di x appartenenti ad un intorno sinistro di un certo $x = c$:

$$c - \delta < x < c$$

2) i valori di x appartenenti ad un intorno destro di un certo $x = c$:

$$c < x < c + \delta$$

3) i valori di x appartenenti ad un intorno completo di un certo $x = c$:

$$c - \delta < x < c + \delta$$

(¹) Per le funzioni e loro campo di esistenza si veda: P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §§ 1.1, 1.2, 1.3, 1.7.

(²) Per $x = 2$ diventa $y = \dfrac{0}{0}$, rapporto che in algebra elementare è indeterminato.

1) Ebbene, non tenendo conto di ciò che avviene alla $f(x)$ in $x = c$, nel primo caso scriviamo:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l$$

intendendo con ciò che, prefissato un $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, la diseguaglianza $|f(x) - l| < \epsilon$ è verificata per i valori di x compresi fra $c - \delta$ e c, escluso $x = c$.

2) Nel secondo caso scriviamo:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$$

intendendo con ciò che, prefissato un $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, la disuguaglianza $|f(x) - l| < \epsilon$ è verificata per i valori di x compresi fra c e $c + \delta$, escluso $x = c$.

3) Nel terzo caso scriviamo:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

intendendo con ciò che, prefissato un $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, la disuguaglianza $|f(x) - l| < \epsilon$ è verificata per i valori di x compresi fra $c - \delta$ e $c + \delta$, escluso $x = c$.

Esempio.

1. Sia data la funzione $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$ ed il numero $l = 3$. Fissiamo un $\epsilon > 0$ molto piccolo. Risolviamo la disequazione:

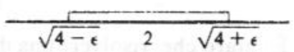
$$\left| \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} - 3 \right| < \epsilon \qquad [2.1.3]$$

Poiché $x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1)$, la [2.1.3] si può scrivere:

$$\left| \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{x - 2} - 3 \right| < \epsilon \rightarrow [^1] \rightarrow |x^2 - 1 - 3| < \epsilon \rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon \rightarrow$$

$$\rightarrow -\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon \rightarrow 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon \rightarrow$$

$$\rightarrow [\text{supposto } x > 0] \rightarrow \sqrt{4 - \epsilon} < x < \sqrt{4 + \epsilon}$$



La diseguaglianza [2.1.3] è verificata per tutti i valori di x in un intorno completo di $x = 2$ (3° caso), escluso $x = 2$, per il quale valore la funzione non è stata considerata (vedi nota). Allora si può scrivere:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3$$

In altre parole, data una funzione $f(x)$ ed un numero l, la scrittura:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

(1) Si è diviso numeratore e denominatore della funzione per $x - 2$. Tale semplificazione si può eseguire per tutti gli $x \neq 2$; per $x = 2$ non è lecita. Quando, infatti, si semplifica una frazione si vuole sostituire l'unità al rapporto dei due valori semplificati, es.: $\frac{20}{12} = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 3} = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$. Nel nostro caso invece, cioè quando $x = 2$, con tale semplificazione si attribuisce il valore 1 al rapporto 0/0, il che non è lecito. Per evitare ciò, si stabilisce di considerare la funzione y data, per ogni valore di x eccettuato $x = 2$. Stabilito ciò, la semplificazione è possibile.

sintetizza la seguente proposizione: prefissato un numero $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, è possibile determinare un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$ e dipendente da ϵ, tale che, per tutti i valori di x compresi in questo intorno, al più escluso $x = c$, la funzione $f(x)$ differisca da l, in valore assoluto, ancor meno di ϵ. Cioè:

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

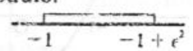
Esempio.

2. Sia data la funzione $y = \sqrt{x + 1}$ ed il numero $l = 0$. Fissiamo $\epsilon > 0$ molto piccolo. Risolviamo la disequazione:

$$|\sqrt{x + 1} - 0| < \epsilon \rightarrow |\sqrt{x + 1}| < \epsilon \qquad [2.1.4]$$

Per $x \geqslant -1$ il radicale è reale e positivo, quindi si sopprime il modulo:

$$\sqrt{x + 1} < \epsilon \rightarrow x + 1 < \epsilon^2 \rightarrow x < -1 + \epsilon^2$$



La diseguaglianza [2.1.4] è verificata per tutti i valori di x in un intorno destro di $x = -1$ (caso 2°).

Tutto ciò si può sintetizzare con la scrittura:

$$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{x + 1} = 0$$

(Il + apposto sul -1, sta ad indicare, appunto, che x può assumere valori superiori a -1).

Si presti attenzione al fatto che nell'esempio 1 si è escluso $x = 2$, mentre nell'esempio 2 non è stato necessario escludere $x = -1$. Ciò non comporta alcuna variazione nei discorsi fatti, poiché, anche ad escludere $x = -1$, l'esempio 2 conduce alle stesse conclusioni. Ciò perché la scrittura $\lim_{x \to c} f(x) = l$ è un modo sintetico per dire che la disequazione $|f(x) - l| < \epsilon$ è verificata in un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$, eventualmente escluso $x = c$. Escluso come nell'esempio 1, non escluso come nell'esempio 2.

Al fine di vedere, numericamente, come si arriva all'intorno di 2 e al limite 3, e per visualizzare meglio il concetto sintetizzato nell'espressione:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3$$

riprendiamo la funzione dell'esempio 1:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} \qquad [2.1.5]$$

Scomponendo e semplificando si ottiene la funzione:

$$y_1 = x^2 - 1 \qquad [2.1.6]$$

Per ogni $x \neq 2$ le due funzioni hanno lo stesso valore, cioè, le ordinate corrispondenti ad ogni $x \neq 2$ sono uguali. Esse hanno perciò diagrammi che differiscono solo nel punto P di ascissa $x = 2$, perché mentre in tale punto la y è indeterminata ($y = \frac{0}{0}$), la [2.1.6] dà: $y_1(2) = 4 - 1 = 3$.

Senza perdere d'occhio la fig. 2.1.1, si calcoli l'ordinata corrispondente ai valori di x molto prossimi a 2 (per difetto), per esempio $x = 1{,}9$; $x = 1{,}99$; $x = 1{,}999$ ..., e molto prossimi a 2 (per eccesso), per esempio $x = 2{,}1$; $x = 2{,}01$; $x = 2{,}001$ ... Si riuniscano nelle tabelle 2-I e 2-II i valori di x ed i corrispondenti di y.

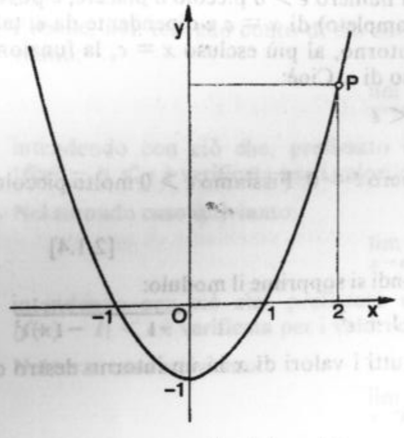


Fig. 2.1.1: $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$

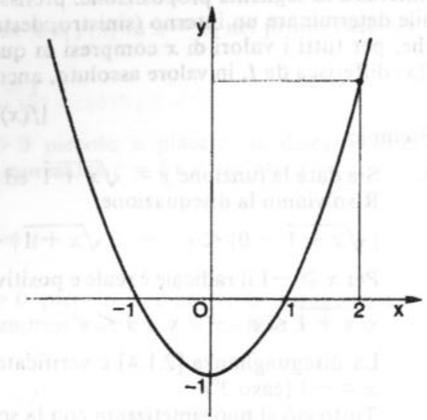


Fig. 2.1.2: $y_1 = x^2 - 1$

TAB. 2-I

$x \to 2^-$	y
1,9	2,61
1,99	2,9601
1,999	2,996001
1,9999	2,99960001
1,99999	2,9999600001
1,999999	2,999996000001

TAB. 2-II

$x \to 2^+$	y
2,1	3,41
2,01	3,0401
2,001	3,004001
2,0001	3,00040001
2,00001	3,0000400001
2,000001	3,000004000001

Si notino tre fatti importanti:

a) Ad x non viene mai dato il valore 2, perché la funzione y, per $x = 2$ è indeterminata, ma ci si approssima sempre più a 2, sia per difetto (2^-) che per eccesso (2^+)

b) L'ordinata y (cfr. tabelle 2-I e 2-II) non raggiunge mai il valore $y = 3$, ma si approssima tanto più a 3, quanto più la x si approssima a 2, tanto per difetto quanto per eccesso.

c) Sia attraverso i numeri della TAB. 2-I che attraverso i numeri della TAB. 2-II, la differenza $|y - 3|$ (1) va sempre più diminuendo, avvicinandosi a zero, ma senza mai diventare zero (ciò perché y non diventa mai 3).

L'espressione $|y - 3|$, inoltre, si può far diventare più piccola di qualunque numero piccolo positivo (ϵ) si scelga. Per esempio, se $\epsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, basta prendere dalla TAB. 2-I: $x = 1{,}999999$. Infatti, per tale x è $y = 2{,}999996000001$ e

$$|y - 3| = |2{,}999996000001 - 3| = 0{,}000003999999 = 0{,}3999999 \cdot 10^{-5} < 0{,}5 \cdot 10^{-5} = \epsilon$$

Si conclude che per ogni $1{,}999999 \leqslant x < 2 \quad (2 - \delta_\epsilon \leqslant x < 2)$ la differenza $|y - 3|$ è, a

(1) Occorre considerare $y - 3$ in modulo perché: $\begin{cases} \text{con le } y \text{ della TAB. 2-I è } y - 3 < 0 \\ \text{con le } y \text{ della TAB. 2-II è } y - 3 > 0 \end{cases}$ cosicché $|y - 3|$ si può confrontare con un numero positivo.

maggior ragione, minore di $\epsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. Partendo dalla TAB. 2-II per $x = 2{,}000001$, si può concludere, con lo stesso ragionamento, che, per tutti i valori di x tali che $2 < x \leqslant 2{,}000001$ $(2 < x \leqslant 2 + \delta_\epsilon)$, la differenza $|y - 3|$ è minore, a maggior ragione, di $\epsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Riunendo le conclusioni dedotte per mezzo della TAB. 2-I e della TAB. 2-II, si ottiene che, per tutti i valori di x tali che $1{,}999999 \leqslant x \leqslant 2{,}000001$ escluso $x = 2$, la differenza $|y - 3|$ è minore di $\epsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Tutto ciò conduce a dire che, per la funzione in esame, quando si fissa un $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, si possono determinare infiniti valori di x tali da rendere la differenza $|y - 3|$ minore di ϵ. Questi valori di x, prossimi a 2, costituiscono un intorno completo di 2. Quindi, se fissato ϵ si risolvesse la disequazione $|y - 3| < \epsilon$, essa risulterebbe verificata per tutti i valori di x appartenenti all'intorno completo di 2, escluso $x = 2$. Tale intorno risulta diverso per ogni valore fissato per ϵ.

Verificandosi le condizioni dette all'inizio del paragrafo, si può scrivere:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3$$

Riepilogando:

1) Quando la disequazione $|y - 3| < \epsilon$ è verificata per tutti i valori di x appartenenti ad un conveniente intorno di 2, si può scrivere che $\lim_{x \to 2} y = 3$.

2) Quando per una funzione è esatta la scrittura: $\lim_{x \to 2} y = 3$ (qualunque sarà il procedimento per determinare il limite 3), implicitamente risulta soddisfatta la condizione che la disequazione $|y - 3| < \epsilon$ sia verificata per tutti gli x appartenenti ad un intorno di 2, escluso al più $x = 2$.

Esempio:

3. Consideriamo il $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 7.$

A parte il metodo per giungere al valore del limite (7), possono capitare due cose:

a) se il limite non è 7, la disequazione $\left| \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} - 7 \right| < \epsilon$ non è verificata per i valori di x costituenti un intorno di $x = 2$;

b) se il limite è 7, la disequazione è verificata per tutti gli x in un intorno (sinistro, destro o completo) di 2, escluso al più $x = 2$.

Risolviamo la disequazione:

$$\left| \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} - 7 \right| < \epsilon \;\rightarrow\; \left| \frac{(x - 2)(x + 5)}{x - 2} - 7 \right| < \epsilon \;\rightarrow\; |x + 5 - 7| < \epsilon$$

$$|x - 2| < \epsilon \;\rightarrow\; -\epsilon < x - 2 < \epsilon \;\rightarrow\; 2 - \epsilon < x < 2 + \epsilon$$

La soluzione è un intorno completo di $x = 2$ (caso 3°). Quindi la scrittura dell'esempio è corretta.

2.2. - Interpretazione geometrica del limite con c ed l finiti

Diamo una interpretazione geometrica all'espressione $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

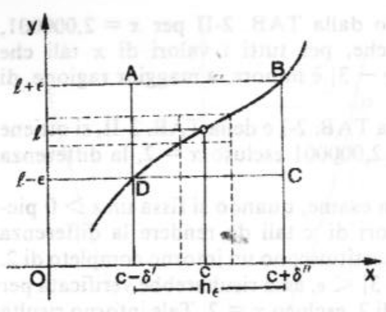


Fig. 2.2.1

Tale scrittura presuppone che la disequazione: $|f(x) - l| < \epsilon$ è verificata per i valori di x in un intorno di c, escluso al più $x = c$, comunque piccolo sia scelto $\epsilon > 0$. Basta dire che per tali valori di x la $y = f(x)$ resti tutta dentro il rettangolo ABCD di fig. 2.2.1. Infatti, per i punti del diagramma che stanno dentro il rettangolo, la differenza $|y - l|$, come si può verificare, è minore di ϵ. In fig. 2.2.1 si vede pure che l'intorno h_ϵ dipende da ϵ. Se infatti si rimpicciolisce ϵ, l'h_ϵ diventa più piccolo ed il rettangolo è quello delimitato dai segmenti tratteggiati. Osservando inoltre le tabelle 2-I e 2-II, si può scrivere:

dalla TAB. 2-I: $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3^-$

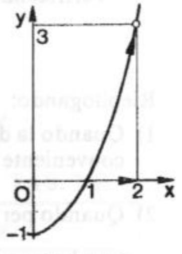


Fig. 2.2.2

Cioè per x tendente a 2 da sinistra (2^-), la y tende a 3 per difetto (3^-). La qual cosa si può rappresentare geometricamente come in fig. 2.2.2. Un limite di questo tipo è detto: limite sinistro della funzione.

Dalla TAB. 2-II: $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3^+$

Cioè per x tendente a 2 da destra (2^+), la y tende a 3 per eccesso (3^+). La qual cosa di può rappresentare geometricamente come in fig. 2.2.3. Un limite di questo tipo è detto: limite destro della funzione.
Da entrambe le tabelle 2-I e 2-II:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3$$

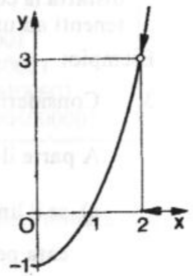
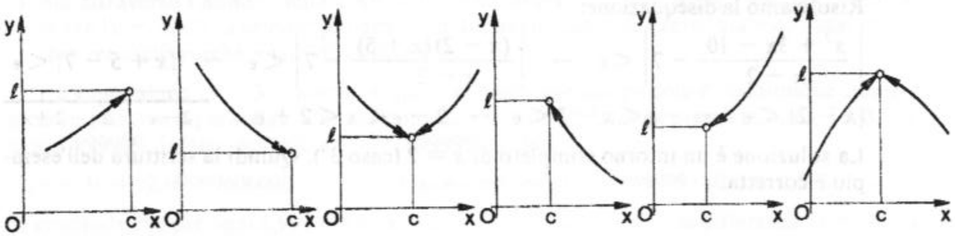


Fig. 2.2.3

Cioè per x tendente a 2, sia da sinistra che da destra, la y tende a 3. Da sinistra la y tende a 3 come in fig. 2.2.2; da destra la y tende a 3 come in fig. 2.2.3. Il punto di coordinate (2, 3) può appartenere alla funzione o non appartenervi come nel caso del limite considerato. Per sapere in che modo la funzione si approssima al punto (2, 3) è quindi necessario l'esame dei limiti destro e sinistro della funzione stessa.

In generale i limiti sottoelencati possono essere interpretati graficamente con i seguenti diagrammi:



$\lim_{x \to c^-} f(x) = l^-$ $\quad \lim_{x \to c^-} f(x) = l^+$ $\quad \lim_{x \to c} f(x) = l^+$ $\quad \lim_{x \to c^+} f(x) = l^-$ $\quad \lim_{x \to c^+} f(x) = l^+$ $\quad \lim_{x \to c} f(x) = l^-$

Fig. 2.2.4

Si può riepilogare quanto è stato detto nei §§2.1 e 2.2 nel modo seguente:
l'espressione $\lim_{x \to c} f(x) = l$ è un modo, formalmente diverso, per dire che la disequazione $|f(x) - l| < \epsilon$ è verificata in un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$, tutt'al più escluso $x = c$. Se si risolve la disequazione, ci possiamo trovare di fronte a vari casi, ognuno dei quali è suscettibile di interpretazione geometrica. Cioè:

la disequazione $|f(x) - l| < \epsilon$

si scinde in: ⓐ $f(x) - l < \epsilon$ ⓑ $f(x) - l > \epsilon$

che può avere soluzioni per:

	ⓐ	ⓑ
①	$c - \delta < x < c$	$c - \delta < x < c$
②	$c < x < c + \delta$	$c < x < c + \delta$
③	$c - \delta < x < c + \delta$	$c - \delta < x < c + \delta$

Schema A

a.1. Se pertanto dalla $|f(x) - l| < \epsilon$, troviamo come unica soluzione la a.1, si scrive:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = l^+$ (limite sinistro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^-$, tende ad l (da sopra) e si interpreta graficamente come in fig. 2.2.5.

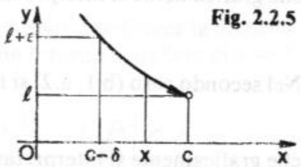


Fig. 2.2.5

a.2. Se troviamo come unica soluzione la a.2, si scrive:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = l^+$ (limite destro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^+$, tende ad l (da sopra) e si interpreta graficamente come in fig. 2.2.6.

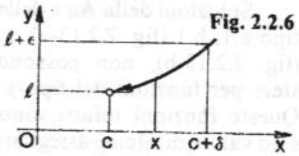


Fig. 2.2.6

a.3. Se troviamo come unica soluzione la a.3, si scrive:

$\lim_{x \to c} f(x) = l^+$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^-$, sia da sinistra che da destra, tende ad l (da sopra) e si interpreta graficamente come in fig. 2.2.7.

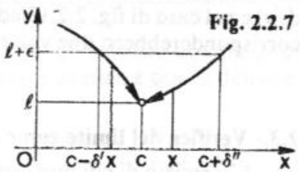


Fig. 2.2.7

b.1. Se troviamo come unica soluzione la b.1, si scrive:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = l^-$ (limite sinistro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^-$, tende ad l (da sotto) e si interpreta graficamente come in fig. 2.2.8.

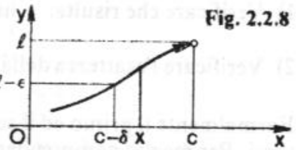


Fig. 2.2.8

b.2. Se troviamo come unica soluzione la b.2, si scrive:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = l^-$ (limite destro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^+$, tende ad l (da sotto) e si interpreta graficamente come in fig. 2.2.9.

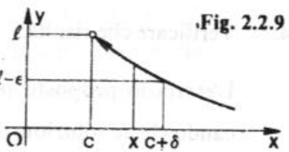


Fig. 2.2.9

b.3. Se troviamo come unica soluzione la b.3, si scrive:
$\lim_{x \to c} f(x) = \ell^-$
cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c$ sia da sinistra che da destra, tende ad ℓ (da sotto) e si interpreta graficamente come in fig. 2.2.10.

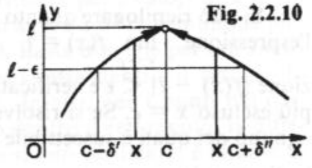


Fig. 2.2.10

Può, inoltre, capitare che risolvendo la disequazione $|f(x) - \ell| < \epsilon$, si trovino soluzioni tanto della $f(x) - \ell < \epsilon$ (schema Aa), quanto della $f(x) - \ell > \epsilon$ (schema Ab), ma solo nei casi a.1, b.2 o b.1, a.2.

Nel primo caso (a.1, b.2) si ha: $\begin{cases} \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell^+ \\ \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell^- \end{cases}$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.2.11.

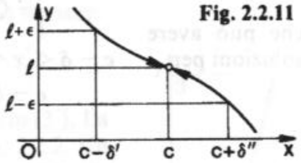


Fig. 2.2.11

Nel secondo caso (b.1, a.2) si ha: $\begin{cases} \lim_{x \to c^-} f(x) = \ell^- \\ \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell^+ \end{cases}$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.2.12.

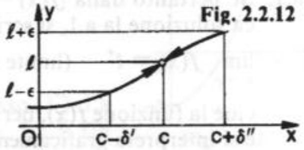


Fig. 2.2.12

Soluzioni della Aa e della Ab del tipo a.1, b.1 (fig. 2.2.13-a) o a.2, b.2 (fig. 2.2.13-b), non possono coesistere per funzioni del tipo $y = f(x)$. Queste funzioni infatti sono ad un solo valore di y (cioè assegnato un valore ad x, se ne trova uno ed uno solo di y) e nel caso di fig. 2.2.13 ad $x = x_0$ corrisponderebbero due valori di y.

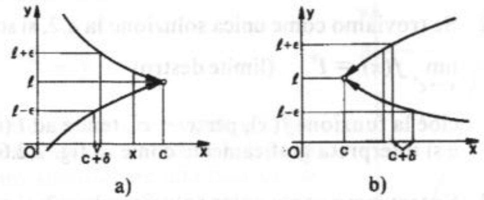


Fig. 2.2.13

2.3.- Verifica del limite con c ed ℓ finiti

L'esercizio di cui può essere chiesta la soluzione è del tipo:

1) Verificare che risulta: $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$.

2) Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$.

Formalmente il primo ed il secondo tipo di esercizio coincidono. Sostanzialmente sono diversi. Per meglio comprenderne la differenza consideriamo degli esempi.

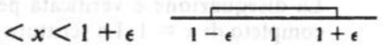
4. Verificare che risulta: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

L'esercizio proposto implica l'esattezza del limite, quindi esso viene risolto verificando che le soluzioni della disequazione: $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon$ si hanno in un intorno completo di $x = 1$, qualunque sia il numero $\epsilon > 0$ piccolo.

Infatti:

$$\left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2 \right| < \epsilon \;\to\; [\text{per } x \neq 1] \;\to\; |(x+1) - 2| < \epsilon$$

$$|x - 1| < \epsilon \;\to\; -\epsilon < x - 1 < \epsilon \;\to\; 1 - \epsilon < x < 1 + \epsilon$$



La soluzione della disequazione è un intorno completo di $x = 1$. L'interpretazione grafica è quella relativa al caso b.1, a.2 dello schema A.

5. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

L'esercizio proposto non implica l'esattezza del limite, ma tale esattezza deve essere provata (ecco la sostanziale differenza con l'esercizio tipo 1).

Ciò significa che se la disequazione: $\left| \dfrac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \right| < \epsilon$ è verificata per i valori di x in un intorno completo di $x = 3$, la scrittura è esatta; se invece la disequazione è verificata per i valori di x che non costituiscono un intorno completo di $x = 3$, la scrittura è errata.

$$\left| \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \right| < \epsilon \;\to\; \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \right| < \epsilon \;\to$$

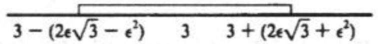
$$\to\; [\text{per } x \neq 3] \;\to\; |(\sqrt{x} + \sqrt{3}) - 2\sqrt{3}| < \epsilon \;\to\; |\sqrt{x} - \sqrt{3}| < \epsilon \;\to$$

$$\to\; -\epsilon < \sqrt{x} - \sqrt{3} < \epsilon \;\to\; \sqrt{3} - \epsilon < \sqrt{x} < \sqrt{3} + \epsilon$$

Poiché per $x > 0$ tutti e tre i membri della disequazione sono positivi, si può quadrare:

$$(\sqrt{3} - \epsilon)^2 < x < (\sqrt{3} + \epsilon)^2 \;\to\; 3 - 2\epsilon\sqrt{3} + \epsilon^2 < x < 3 + 2\epsilon\sqrt{3} + \epsilon^2 \;\to$$

$$\to\; 3 - (2\epsilon\sqrt{3} - \epsilon^2) < x < 3 + (2\epsilon\sqrt{3} + \epsilon^2)$$



Dato che la disequazione è verificata per i valori di x in un intorno completo di $x = 3$, la scrittura dell'esercizio 5 è esatta. L'interpretazione grafica è quella della relativa al caso b.1, a.2 dello schema A.

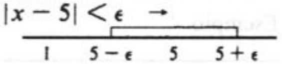
6. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = 4$

Come nell'esercizio 5, basta risolvere la disequazione:

$$\left| \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} - 4 \right| < \epsilon \;\to\; \left| \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - 4 \right| < \epsilon \;\to$$

$$\to\; [x^2 + x + 1 \neq 0 \text{ sempre}] \;\to\; |(x - 1) - 4| < \epsilon \;\to\; |x - 5| < \epsilon \;\to$$

$$\to\; -\epsilon < x - 5 < \epsilon \;\to\; 5 - \epsilon < x < 5 + \epsilon$$



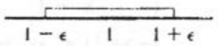
La soluzione non è un intorno completo di $x = 1$, quindi la scrittura è errata.

7. Verificare che risulta $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = 0$

Infatti:

$$\left|\frac{x^3-1}{x^2+x+1}\right| < \epsilon \rightarrow |x-1| < \epsilon \rightarrow -\epsilon < x-1 < \epsilon \rightarrow 1-\epsilon < x < 1+\epsilon$$

La disequazione è verificata per i valori di x in un intorno completo di $x = 1$. La scrittura è esatta.



A parte le difficoltà di ordine algebrico, gli esercizi del tipo 1) e 2) vanno risolti in tale modo.

2.4.- Il limite con c finito ed l infinito

Ci chiediamo qual è la proposizione, o meglio, il concetto sintetizzato nella espressione:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad \text{con } c \text{ reale finito.}$$

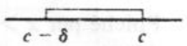
A tale scopo, si supponga di avere una funzione reale $y = f(x)$ ed un numero $M > 0$ grande a piacere. Ci proponiamo di risolvere ed interpretare la seguente disequazione:

$$|f(x)| > M \text{ (1)} \qquad [2.4.1]$$

Risolvere tale disequazione vuol dire trovare, se esiste, un insieme di valori da dare ad x, che sostituiti nella [2.4.1] rendano il primo membro maggiore del secondo membro. Supponiamo che la [2.4.1] abbia soluzioni e che tali soluzioni costituiscano un intorno di un numero c finito. Allora, risolvendola, può capitare che essa sia soddisfatta per:

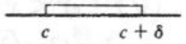
1) i valori di x appartenenti ad un intorno sinistro di $x = c$:

$$c - \delta < x < c$$



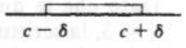
2) i valori di x appartenenti ad un intorno destro di $x = c$:

$$c < x < c + \delta$$



3) i valori di x appartenenti ad un intorno completo di $x = c$:

$$c - \delta < x < c + \delta$$



Ebbene, se questa disequazione ammette sempre soluzioni in un intorno di $x = c$, qualunque sia il numero $M > 0$ grande quanto si vuole, nei tre casi scriviamo:

1° caso: $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$ (limite sinistro)

2° caso: $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ (limite destro)

3° caso: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

Esempio:

(1) Poiché $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{per } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{per } f(x) < 0 \end{cases}$ la disequazione $|f(x)| > M$ è equivalente ai due sistemi $\begin{cases} f(x) > M \\ f(x) > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} f(x) < -M \\ f(x) < 0 \end{cases}$ quindi le soluzioni dei due sistemi sono soluzioni della disequazione $|f(x)| > M$.

8. Sia data la funzione $y = \frac{5}{x}$ e sia fissato ad arbitrio un numero positivo M grande. Risolviamo la disequazione:

$$\left|\frac{5}{x}\right| > M \qquad [2.4.2]$$

Essa equivale ai due sistemi:

a) $\begin{cases} \frac{5}{x} > M \\ \frac{5}{x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{M} \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < x < \frac{5}{M}$

b) $\begin{cases} \frac{5}{x} < -M \\ \frac{5}{x} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + M < 0 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{(5+Mx)}{x} < 0 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 + Mx > 0 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{M} \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow -\frac{5}{M} < x < 0$$

Cosicché la [2.4.2] è verificata per: $-\frac{5}{M} < x < \frac{5}{M}$ escluso $x = 0$, per il quale valore la funzione data non è definita. La soluzione trovata costituisce un intorno completo di $x = 0$, e rimarrà tale qualunque sia la scelta del numero M. Quindi, per la funzione data, esiste sempre un intorno di $x = 0$ (che sarà diverso per ogni M diverso), tale che in valore assoluto la funzione superi qualunque M positivo scelto ad arbitrio.
Per $M = 10^9$, basta prendere $-5 \cdot 10^{-9} < x < 5 \cdot 10^9$ affinché sia $|f(x)| > 10^9$. E più grande si sceglie M, più piccolo viene l'intorno.

Tutto ciò si può sintetizzare con la scrittura: $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x} = \infty$.

Più in generale, per una funzione $f(x)$, la scrittura: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ sintetizza la seguente proposizione:

> Prefissato un numero $M > 0$, grande a piacere, è possibile determinare un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$ e dipendente da M, tale che, per tutti i valori di x compresi in questo intorno, escluso $x = c$, la funzione $f(x)$ supera, in valore assoluto, il numero M scelto. Cioè:
>
> $$|f(x)| > M$$

Esempio.

9. Sia data la funzione $y = \frac{x+1}{x-3}$, definita per $x \neq 3$. Fissiamo un numero M positivo, grande a piacere, e risolviamo la disequazione:

$$\left|\frac{x+1}{x-3}\right| > M$$

Essa equivale ai due sistemi:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} > M \\ \dfrac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} - M > 0 \\ x < -1\ ,\ x > 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1-Mx+3M}{x-3} > 0 \\ x < -1\ ,\ x > 3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{(1-M)x+1+3M}{x-3} > 0 \\ x < -1\ ,\ x > 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(M-1)x-(1+3M)}{x-3} < 0 \\ x < -1\ ,\ x > 3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 3 < x < \dfrac{1+3M}{M-1} = 3 + \dfrac{4}{M-1} \\ x < -1\ ,\ x > 3 \end{cases}$

La cui soluzione è:

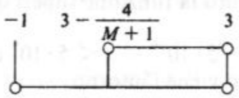
$3 < x < 3 + \dfrac{4}{M-1}$

(intorno destro di $x = 3$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} < -M \\ \dfrac{x+1}{x-3} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1+Mx-3M}{x-3} < 0 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{x(M+1)-(3M-1)}{x-3} < 0 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3M-1}{M+1} = 3 - \dfrac{4}{M+1} < x < 3 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$

La cui soluzione è:



$3 - \dfrac{4}{M+1} < x < 3$ (intorno sinistro di $x = 3$).

Pertanto, la disequazione di partenza è verificata in un intorno completo di $x = 3$:

$$3 - \frac{4}{M+1} < x < 3 + \frac{4}{M-1}$$

Poiché tale soluzione si ha sempre comunque si fissi il numero $M > 0$ grande, grandissimo, a piacere (tutt'al più, al cambiare di M, cambia l'ampiezza dell'intorno), quanto detto si può sintetizzare con la scrittura:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-3} = \infty$$

Si ponga attenzione sul fatto che per risolvere la disequazione $|f(x)| > M$, occorre considerarne due: $f(x) > M$ ed $f(x) < -M$ (vedi nota a pag. 18). Una di esse (o entrambe) può avere soluzione in un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$. In generale, quindi, possono capitare svariati casi che sintetizziamo così:

La disequazione $|f(x)| > M$

si scinde in: (a) $f(x) > M$ (b) $f(x) < -M$

che può avere soluzioni per:

(a): ① $c - \delta < x < c$ ② $c < x < c + \delta$ ③ $c - \delta < x < c + \delta$

(b): ① $c - \delta < x < c$ ② $c < x < c + \delta$ ③ $c - \delta < x < c + \delta$

Schema B

a.1. Se partendo dalla $f(x) > M$, troviamo come unica soluzione la a.1, si scrive:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ (limite sinistro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^-$, tende a $+\infty$ e si interpreta graficamente come in fig. 2.4.1.

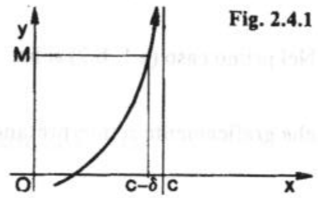


Fig. 2.4.1

a.2. Se troviamo come unica soluzione la a.2, si scrive:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$ (limite destro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^+$, tende a $+\infty$ e si interpreta graficamente come in fig. 2.4.2.

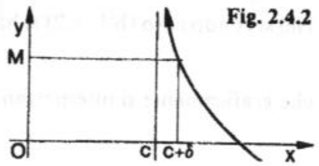


Fig. 2.4.2

a.3. Se troviamo come unica soluzione la a.3, si scrive:

$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c$, tanto da destra quanto da sinistra, tende a $+\infty$ e si interpreta graficamente come in fig. 2.4.3.

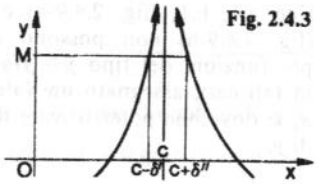


Fig. 2.4.3

b.1. Se troviamo come unica soluzione la b.1, si scrive:

$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ (limite sinistro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^-$, tende a $-\infty$ e si interpreta graficamente come in fig. 2.4.4.

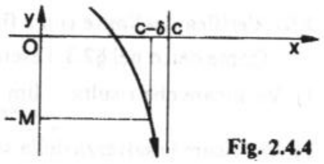


Fig. 2.4.4

b.2. Se troviamo come unica soluzione la b.2, si scrive:

$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ (limite destro)

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c^+$, tende a $+\infty$ e si interpreta graficamente come in fig. 2.4.5.

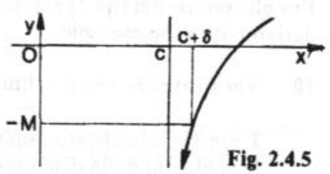


Fig. 2.4.5

b.3. Se troviamo come unica soluzione la b.3, si scrive:

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to c$, tanto da destra quanto da sinistra, tende a $-\infty$ e si interpreta graficamente come in fig. 2.4.6.

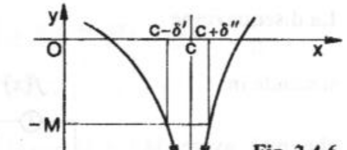


Fig. 2.4.6

Può inoltre capitare che risolvendo la disequazione $|f(x)| > M$ si trovino soluzioni tanto della $f(x) > M$ (schema Ba), quanto della $f(x) < -M$ (schema Bb), ma solo nei casi a.1, b.2 o b.1, a.2.

Nel primo caso (a.1, b.2) si ha:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty \end{cases}$$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.4.7.

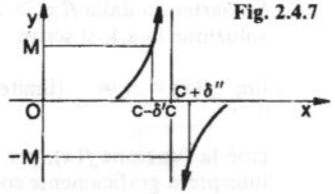


Fig. 2.4.7

Nel secondo caso (b.1, a.2) si ha:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.4.8.

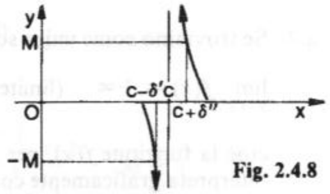
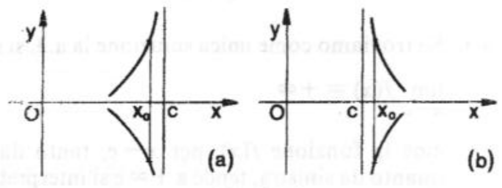


Fig. 2.4.8

Soluzioni della Ba e della Bb del tipo a.1, b.1, (fig. 2.4.9-a) o a.2, b.2 (fig. 2.4.9-b) non possono coesistere per funzioni del tipo $y = f(x)$, poiché in tali casi, assegnato un valore x_0 ad x, si dovrebbe poter trovare due valori di y.



(a) (b)

Fig. 2.4.9

2.5.- Verifica del limite con c finito ed l infinito

Come detto nel §2.3, l'esercizio di cui può essere chiesta la soluzione è del tipo:

1) Verificare che risulta $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$

2) Verificare l'esattezza della scrittura $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$

Fra gli esercizi dei tipi 1) e 2) c'è la stessa differenza vista al §2.3 (vedi esercizi 4 e 5). Consideriamo qualche esempio:

10. Verificare che risulta $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

L'esercizio proposto implica l'esattezza del limite, quindi viene risolto verificando che le soluzioni della disequazione

$\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > M$ si hanno in un intorno completo di $x = 1$, qualunque sia il numero $M > 0$.

La disequazione scritta equivale ai due sistemi:

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} > M \\ \dfrac{1}{x-1} > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1 - Mx + M}{x-1} > 0 \\ x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} -Mx + (M+1) > 0 \\ x > 1 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x < \dfrac{M+1}{M} = 1 + \dfrac{1}{M} \\ x > 1 \end{cases}$$

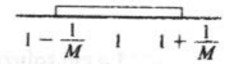
la cui soluzione è $1 < x < 1 + \dfrac{1}{M}$ (intorno destro di $x = 1$).

$$\text{b)} \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} < -M \\ \dfrac{1}{x-1} < 0 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{1 + Mx - M}{x-1} < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} Mx - (M-1) > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x > \dfrac{M-1}{M} = 1 - \dfrac{1}{M} \\ x < 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $1 - \dfrac{1}{M} < x < 1$ (intorno sinistro di $x = 1$).

Cosicché, la disequazione $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > M$ è verificata per:



i valori di x in un intorno completo di $x = 1$, escluso $x = 1$, per il quale valore la funzione $\dfrac{1}{(x-1)}$ non è definita. Ciò avviene per qualunque $M > 0$ grande a piacere, pertanto risulta verificato che:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

11. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1} = \infty.$

L'esercizio proposto non implica l'esattezza del limite, ma tale esattezza deve essere provata (ecco la sostanziale differenza con l'esercizio del tipo 1). Ciò significa che se la disequazione

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > M$$

è verificata per i valori di x in un intorno completo di $x = 1$, la scrittura è esatta; se invece la disequazione è verificata per i valori di x che non costituiscono un intorno completo di $x = 1$, scrittura è errata. Questa disequazione equivale ai due sistemi:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} > M \\ \dfrac{x+2}{x-1} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2-Mx+M}{x-1} > 0 \\ x<-2\ ,\ x>1 \end{cases} \rightarrow$

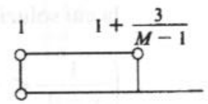
$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{-(M-1)x+(M+2)}{x-1} > 0 \\ x<-2\ ,\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(M-1)x-(M+2)}{x-1} < 0 \\ x<-2\ ,\ x>1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 1 < x < \dfrac{M+2}{M-1} = 1 + \dfrac{3}{M-1} \\ x<-2\ ,\ x>1 \end{cases}$

La cui soluzione è:

$1 < x < 1 + \dfrac{3}{M-1}$

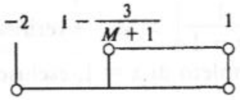
(intorno destro di $x = 1$).



b) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} < -M \\ \dfrac{x+2}{x-1} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2+Mx-M}{x-1} < 0 \\ -2<x<1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{(M+1)x-(M-2)}{x-1} < 0 \\ -2<x<1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{M-2}{M+1} = 1 - \dfrac{3}{M+1} < x < 1 \\ -2<x<1 \end{cases}$

La cui soluzione è:



$1 - \dfrac{3}{M+1} < x < 1$ (intorno sinistro di $x = 1$).

Cosicché la disequazione $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| > M$ è verificata per $1 - \dfrac{3}{M+1} < x < 1 + \dfrac{3}{M-1}$ cioè in un intorno completo di $x = 1$, escluso $x = 1$, e qualunque sia il valore di $M > 0$ grande scelto a piacere.

Tutto ciò prova l'esattezza della scrittura: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1} = \infty$.

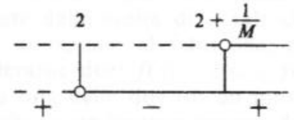
12. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

È il caso a.2 dello schema B. Quindi, se la scrittura è esatta, la disequazione $\dfrac{1}{x-2} > M$ deve essere verificata in un intorno destro di $x = 2$; altrimenti la scrittura è errata.

$\dfrac{1}{x-2} > M \rightarrow \dfrac{1}{x-2} - M > 0 \rightarrow \dfrac{1-Mx+2M}{x-2} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{-Mx+(2M+1)}{x-2} > 0 \rightarrow \dfrac{Mx-(2M+1)}{x-2} < 0$

è verificata per i valori di x interni ad $x = 2$ ed $x = \dfrac{2M+1}{M} = 2 + \dfrac{1}{M}$



cioè per $2 < x < 2 + \dfrac{1}{M}$ (intorno destro di $x = 2$).

Quindi la scrittura $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ è corretta.

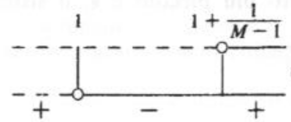
13. Verificare l'esattezza della scrittura $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$.

È il caso a.3 dello schema B. Quindi, se la scrittura è esatta, la disequazione $\dfrac{x}{x-1} > M$ deve essere verificata in un intorno completo di $x = 1$; altrimenti la scrittura è errata.

$\dfrac{x}{x-1} > M \rightarrow \dfrac{x-Mx+M}{x-1} > 0 \rightarrow \dfrac{-(M-1)x+M}{x-1} > 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{(M-1)x-M}{x-1} < 0$

è verificata per valori interni ad $x = 1$ ed $x = \dfrac{M}{M-1} = 1 + \dfrac{1}{M-1}$



cioè per $1 < x < 1 + \dfrac{1}{M-1}$ (intorno destro di $x = 1$).

Non essendo questo un intorno completo di $x = 1$, la scrittura $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$ è errata. Quella corretta è: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$.

2.6.- Il limite con c infinito ed l finito. Interpretazione geometrica

Ci si chiede qual è la proposizione, o meglio, il concetto, sintetizzato nell'espressione:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \quad \text{con } l \text{ finito.}$$

Si abbia una funzione $f(x)$ reale ed un numero l reale. Consideriamo la differenza $|f(x) - l|$. Può questa differenza essere resa piccola quanto si vuole? Può cioè essere: $|f(x) - l| < \epsilon$ con $\epsilon > 0$ piccolo a piacere?

Nel §2.1 si è visto che se la disequazione $|f(x) - \ell| < \epsilon$ ammette soluzioni in un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$ (finito), al più escluso $x = c$, allora si può sintetizzare il tutto con: $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$, e ne abbiamo dato anche l'interpretazione geometrica (cfr. i vari casi corrispondenti allo schema A).

Ma ammettiamo adesso che la disequazione $|f(x) - \ell| < \epsilon$ ammetta soluzioni in un intorno dell'infinito (cfr. appendice A.1), cioè che per tutti gli $|x|$ maggiori di un dato N (numero positivo grande dipendente da ϵ), essa sia soddisfatta. Cosa se ne conclude? Che in un caso del genere si può scrivere:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

Esempio:

14. Si abbia la funzione $y = \frac{x-1}{x+1}$ ed il numero reale $\ell = 1$. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| < \epsilon$ con $\epsilon > 0$ piccolo a piacere.

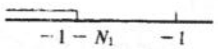
$$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|<\epsilon \to \left|\frac{x-1-x-1}{x+1}\right|<\epsilon \to \left|\frac{-2}{x+1}\right|<\epsilon$$

Questa equivale ai due sistemi di disequazioni:

a) $$\begin{cases}\frac{-2}{x+1}<\epsilon\\ \frac{-2}{x+1}>0\end{cases} \to \begin{cases}\frac{-2-\epsilon(x+1)}{x+1}<0\\ x+1<0\end{cases} \to \begin{cases}-2-\epsilon x-\epsilon>0\\ x<-1\end{cases}\to$$

$$\to \begin{cases}-\epsilon x > 2+\epsilon\\ x<-1\end{cases} \to \begin{cases} x<-\frac{2+\epsilon}{\epsilon} = -1-\frac{2}{\epsilon}\\ x<-1\end{cases}$$

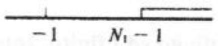
Posto $\frac{2}{\epsilon} = N_1 > 0$, tanto più grande quanto più piccolo è ϵ, il sistema a) ammette soluzioni per:



$x < -1 - N_1 = -(N_1 + 1)$

b) $$\begin{cases}\frac{-2}{x+1}>-\epsilon\\ \frac{-2}{x+1}<0\end{cases}\to\begin{cases}\frac{-2+\epsilon(x+1)}{x+1}>0\\ x+1>0\end{cases}\to\begin{cases}-2+\epsilon x+\epsilon>0\\ x>-1\end{cases}\to$$

$$\to\begin{cases}x>\frac{2-\epsilon}{\epsilon}\\ x>-1\end{cases}\to\begin{cases}x>N_1-1\\ x>-1\end{cases}$$



$\to x > N_1 - 1$

Pertanto la $\left|\frac{x-1}{x+1}-l\right|<\epsilon$ è soddisfatta per:

$x < -(N_1 + 1)$, $x > N_1 - 1$

Detto cioè N un numero positivo tale che $N > N_1 + 1$ (quindi è $N > N_1 - 1$), a maggior ragione la disequazione data è verificata per $|x| > N$.

Ciò è vero qualunque sia la scelta di $\epsilon > 0$, cioè la differenza $\left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right|$ può rendersi piccola quanto si vuole. Inoltre, più piccolo è ϵ, più grande viene N. Tutto quanto detto in questo esercizio si può sintetizzare con l'espressione: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = 1$.

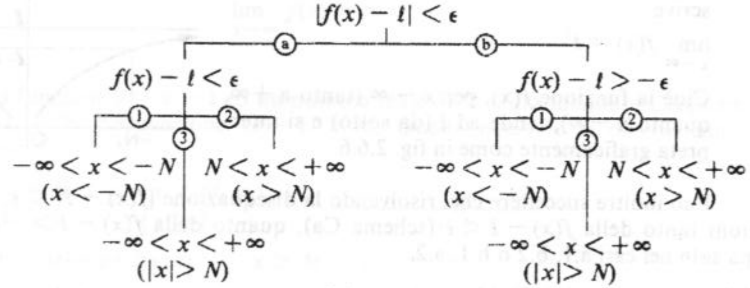
In generale, la scrittura $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ (finito) sintetizza la seguente proposizione: fissato un $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, è possibile trovare un numero $N > 0$ grande, dipendente dalla scelta di ϵ, tale che, per tutti gli $|x| > N$ si abbia: $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Si ponga attenzione al fatto che, per risolvere la disequazione $|f(x) - \ell| < \epsilon$, occorre considerarne due: $f(x) - \ell < \epsilon$, $f(x) - \ell > -\epsilon$ (cfr. es. 14), delle quali può avere soluzioni una delle due (in un intorno sinistro, destro o completo dell'infinito), oppure entrambe (in un intorno sinistro, destro o completo dell'infinito).

In generale si possono presentare svariati casi che sintetizziamo così:

la disequazione

si scinde in:

che può avere soluzioni per:



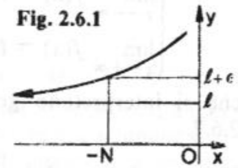
Schema C

a.1. Se partendo dalla $|f(x) - \ell| < \epsilon$ troviamo come unica soluzione la a.1, si scrive:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell^+$$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to -\infty$, tende ad ℓ (da sopra) e si interpreta graficamente come in fig. 2.6.1.

Fig. 2.6.1

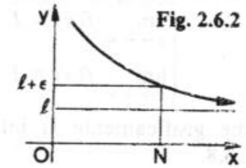


a.2. Se troviamo come unica soluzione la a.2, si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to +\infty$, tende ad ℓ (da sopra) e si interpreta graficamente come in fig. 2.6.2.

Fig. 2.6.2

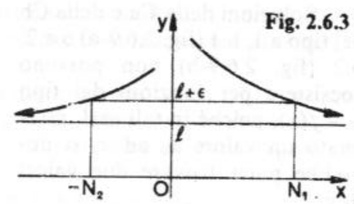


a.3. Se troviamo come unica soluzione la a.3, si scrive:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell^+$$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to \infty$ (tanto a $+\infty$, quanto a $-\infty$), tende ad ℓ (da sopra) e si interpreta graficamente come in fig. 2.6.3.

Fig. 2.6.3

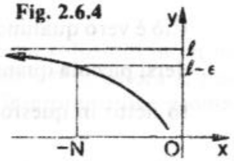


b.1. Se troviamo come unica soluzione la b.1, si scrive:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^-$$

cioè la funzione $f(x)$, per $x \to -\infty$, tende ad l (da sotto) e si interpreta graficamente come in fig. 2.6.4.

Fig. 2.6.4

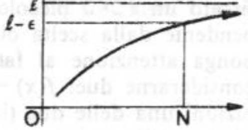


b.2. Se troviamo come unica soluzione la b.2, si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^-$$

Cioè la funzione $f(x)$, per $x \to +\infty$, tende ad l (da sotto) e si interpreta graficamente come in fig. 2.6.5.

Fig. 2.6.5

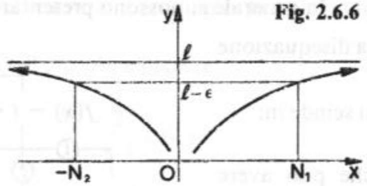


b.3. Se troviamo come unica soluzione la b.3, si scrive:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Cioè la funzione $f(x)$, per $x \to \infty$ (tanto a $+\infty$, quanto a $-\infty$), tende ad l (da sotto) e si interpreta graficamente come in fig. 2.6.6.

Fig. 2.6.6



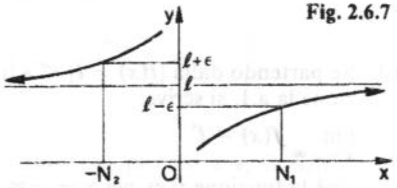
Può inoltre succedere che, risolvendo la disequazione $|f(x) - l| < \epsilon$, si trovino soluzioni tanto della $f(x) - l < \epsilon$ (schema Ca), quanto della $f(x) - l > -\epsilon$ (schema Cb), ma solo nei casi a.1, b.2 o b.1, a.2.

Nel primo caso (a.1, b.2) si ha:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l^- \end{cases}$$

che si interpretano graficamente come in fig. 2.6.7.

Fig. 2.6.7

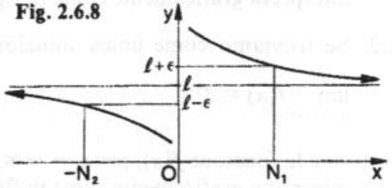


Nel secondo caso (b.1, a.2) si ha:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l^- \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l^+ \end{cases}$$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.6.8.

Fig. 2.6.8



Soluzioni della Ca e della Cb del tipo a.1, b.1 (fig. 2.6.9-a) o a.2, b.2 (fig. 2.6.9-b) non possono coesistere per funzioni del tipo $y = f(x)$, poiché in tali casi, assegnato un valore x_0 ad x, si dovrebbe poter trovare due valori di y.

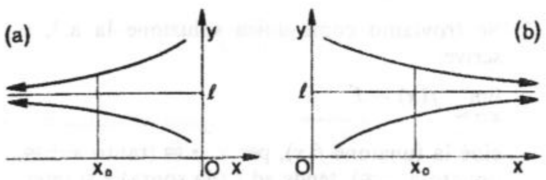


Fig. 2.6.9

2.7.- Il limite con c ed l infiniti. Interpretazione geometrica

Si abbia una funzione $f(x)$ reale ed un numero reale positivo M grande a piacere. Consideriamo l'espressione: $|f(x)|$. Può questa espressione essere resa grande quanto si vuole? Può cioè essere: $|f(x)| > M$ con M grande a piacere? La risposta è affermativa. Infatti, come si è visto al §2.4, quando la disequazione $|f(x)| > M$ ammette soluzioni in un intorno (sinistro, destro o completo) di $x = c$ (finito), al più escluso $x = c$, si può scrivere:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

e ne abbiamo fornito l'interpretazione geometrica (casi corrispondenti allo schema B).

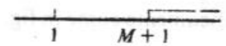
Ma ammettiamo, adesso, che la disequazione $|f(x)| > M$ abbia soluzioni in un intorno dell'infinito, cioè che per tutti gli $|x|$ maggiori di un certo N (numero positivo grande dipendente da M) essa sia soddisfatta. Cosa se ne conclude? Che in un caso del genere si può scrivere:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Esempio:

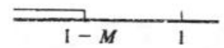
15. Si abbia la funzione $y = x - 1$ ed un numero reale $M > 0$ grandissimo. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $|x - 1| > M$. Questa equivale ai due sistemi di disequazioni:

a) $\begin{cases} x - 1 > M \\ x - 1 > 0 \end{cases} \to \begin{cases} x > M + 1 \\ x > 1 \end{cases}$



La cui soluzione si ha per: $x > M + 1$

b) $\begin{cases} x - 1 < -M \\ x - 1 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} x < 1 - M \\ x < 1 \end{cases}$



La cui soluzione si ha per: $x < 1 - M = -(M - 1)$

Pertanto la $|x - 1| > M$ è soddisfatta per $x < -(M - 1)$ e $x > M + 1$.

Detto cioè N un numero positivo tale che: $N > M + 1$, quindi $N > M - 1$, a maggior ragione la disequazione data è verificata per $|x| > N$. Ciò è vero qualunque sia la scelta di $M > 0$, cioè l'espressione $|f(x)|$ può essere resa grande quanto si vuole. Inoltre, più grande è M, più grande viene N. Tutto quanto detto in questo esempio si può sintetizzare con l'espressione:

$$\lim_{x \to \infty} (x - 1) = \infty$$

In generale, la scrittura $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ sintetizza la seguente proposizione:

Fissato un numero $M > 0$ grande a piacere, è possibile trovare un numero $N > 0$ grande, dipendente dalla scelta di M, tale che, per tutti gli $|x| > N$ la funzione $f(x)$ supera in valore assoluto M. Cioè $|f(x)| > M$.

Si ponga attenzione al fatto che, per risolvere la disequazione $|f(x)| > M$, occorre considerarne due: $f(x) > M$ ed $f(x) < -M$ (cfr. esempio 15), delle quali può avere soluzione una delle due (in un intorno sinistro, destro o completo dell'infinito) oppure entrambe (in un intorno sinistro, destro o completo dell'infinito).

In generale si possono quindi presentare svariati casi che sintetizziamo così:

la disequazione $|f(x)| > M$

si scinde in: ⓐ $f(x) > M$ ⓑ $f(x) < -M$

che può avere soluzioni per:

ⓐ: ① $-\infty < x < -N$ $(x < -N)$; ② $N < x < +\infty$ $(x > N)$; ③ $-\infty < x < +\infty$ $(|x| > N)$

ⓑ: ① $-\infty < x < -N$ $(x < -N)$; ② $N < x < +\infty$ $(x > N)$; ③ $-\infty < x < +\infty$ $(|x| > N)$

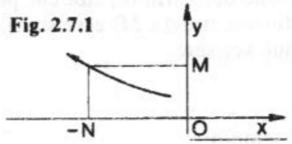
Schema D

a.1. Se, partendo dalla $|f(x)| > M$, troviamo come unica soluzione la a.1, si scrive:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

e si interpreta graficamente come in fig. 2.7.1.

Fig. 2.7.1

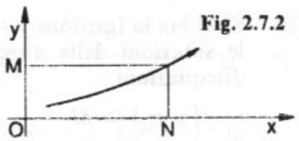


a.2. Se troviamo come unica soluzione la a.2, si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e si interpreta graficamente come in fig. 2.7.2.

Fig. 2.7.2

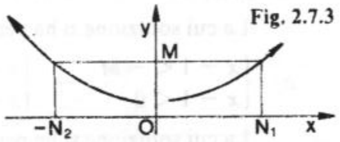


a.3. Se troviamo come unica soluzione la a.3, si scrive:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

e si interpreta graficamente come in fig. 2.7.3.

Fig. 2.7.3



b.1. Se troviamo come unica soluzione la b.1, si scrive:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

e si interpreta graficamente come in fig. 2.7.4.

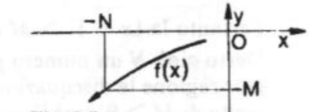


Fig. 2.7.4

b.2. Se troviamo come unica soluzione la b.2, si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

e si interpreta graficamente come in fig. 2.7.5.

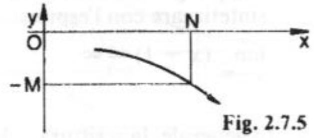


Fig. 2.7.5

b.3. Se troviamo come unica soluzione la b.3, si scrive:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

e si interpreta graficamente come in fig. 2.7.6.

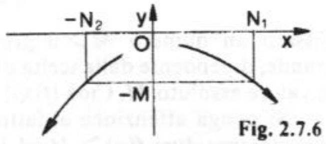


Fig. 2.7.6

Può inoltre succedere che risolvendo la disequazione $|f(x)| > M$ si trovino soluzioni, tanto della $f(x) > M$ (schema Da), quanto della $f(x) < -M$ (schema Db), ma solo nei casi a.1, b.2 o b.1, a.2.

Nel primo caso (a.1, b.2) si ha:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.7.7.

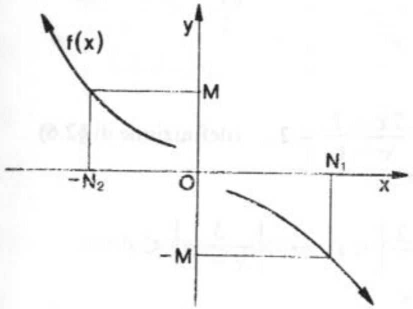


Fig. 2.7.7

Nel secondo caso (b.1, a.2) si ha:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

che graficamente si interpretano come in fig. 2.7.8.

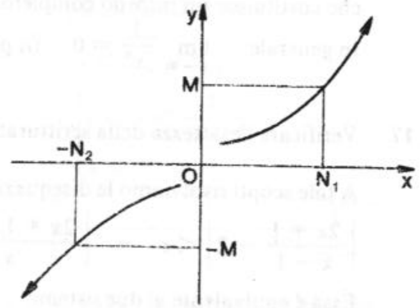


Fig. 2.7.8

Soluzioni della Da e della Db del tipo a.1, b.1 (fig. 2.7.9-a) o a.2, b.2 (fig. 2.7.9-b) non possono coesistere per funzioni del tipo $y = f(x)$, poiché in tali casi, assegnato un valore x_0 ad x, si dovrebbe poter trovare due valori di y.

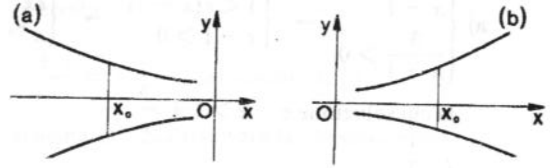


Fig. 2.7.9

2.8.- Verifica del limite con c infinito ed l finito o infinito

Come al solito, l'esercizio da risolvere può essere del tipo:

1) Verificare che risulta: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} l & \text{finito} \\ \infty \end{cases}$

2) Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} l & \text{finito} \\ \infty \end{cases}$

Tra gli esercizi del tipo 1) e 2) c'è la stessa differenza vista ai §§2.3 e 2.5, cioè, per quelli di tipo 1) la disequazione relativa (ad l finito o infinito) è sicuramente verificata nell'intorno (sinistro, destro o completo) dell'infinito; per quelli del tipo 2) la disequazione relativa può non essere verificata in un intorno dell'infinito, il che corrisponderebbe all'inesattezza del limite.

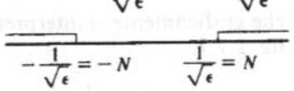
Consideriamo alcuni esempi.

16. Verificare che risulta: $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-2} = 0.$ (definizione di §2.6)

La disequazione $|x^{-2} - 0| < \epsilon$ (con $\epsilon > 0$ piccolo a piacere) ha sicuramente soluzioni per tutti gli $|x| > N$ (N dipendente da ϵ). Infatti, poiché $|x^{-2}| = \left|\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2}$, dato che $x^2 > 0$ sempre, tranne che per $x = 0$, la disequazione è equivalente a:

$\frac{1}{x^2} < \epsilon \rightarrow x^2 > \frac{1}{\epsilon}$ che è verificata per valori esterni a $-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ e $+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

Cioè, posto $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = N$, è verificata per $|x| > N$:



che costituisce un intorno completo di ∞.

In generale: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ (n positivo).

17. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$ (definizione di §2.6)

A tale scopo risolviamo la disequazione:

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{3}{x-1}\right| < \epsilon$$

Essa è equivalente ai due sistemi:

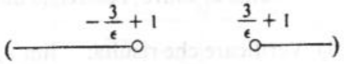
$$\text{a)} \begin{cases} \frac{3}{x-1} < \epsilon \\ \frac{3}{x-1} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 < \epsilon(x-1) \\ x-1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon x - \epsilon > 3 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{\epsilon+3}{\epsilon} = 1 + \frac{3}{\epsilon} \\ x > 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $x > 1 + \frac{3}{\epsilon}$

$$\text{b)} \begin{cases} \frac{3}{x-1} > -\epsilon \\ \frac{3}{x-1} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 < -\epsilon(x-1) \\ x-1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon x < \epsilon - 3 \\ x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \frac{\epsilon-3}{\epsilon} = 1 - \frac{3}{\epsilon} \\ x < 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è $x < 1 - \frac{3}{\epsilon}$

Pertanto la $\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \epsilon$ è verificata per



i valori di $|x| > N$ con $N > \frac{3}{\epsilon} + 1$, che costituiscono un intorno completo dell'infinito. La scrittura proposta è esatta.

18. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to \infty} \frac{2-x}{x} = 1$ (definizione di §2.6)

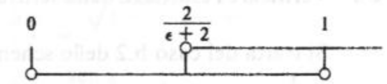
A tale scopo risolviamo la disequazione:

$$\left|\frac{2-x}{x} - 1\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{2-x-x}{x}\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{2-2x}{x}\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{1-x}{x}\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Essa equivale ai due sistemi:

$$\text{a)} \begin{cases} \frac{1-x}{x} < \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1-x}{x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 - 2x < \epsilon x \ (^1) \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 < (\epsilon + 2)x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{\epsilon+2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

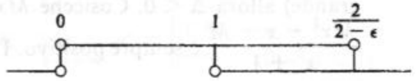
che ha soluzioni per $\frac{2}{\epsilon+2} < x < 1$



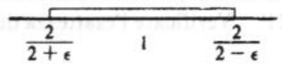
$$\text{b)} \begin{cases} \frac{1-x}{x} > -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1-x}{x} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{2-2x+\epsilon x}{2x} > 0 \\ x < 0\ ,\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{(\epsilon-2)x+2}{2x} > 0 \\ x < 0\ ,\ x > 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{(2-\epsilon)x-2}{2x} < 0 \\ x < 0\ ,\ x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{2}{2-\epsilon} \\ x < 0\ ,\ x > 1 \end{cases}$$

che ha soluzioni per $1 < x < \frac{2}{2-\epsilon}$



Pertanto, la disequazione $\left|\frac{2-x}{x} - 1\right| < \epsilon$ ha soluzioni per i valori di x che costituiscono un intorno completo di $x = 1$ e non un intorno dell'infinito. La scrittura è errata.



19. Verificare che risulta: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$ (definizione di §2.7)

Poiché questo è il caso a.2 dello schema D basta risolvere la disequazione:

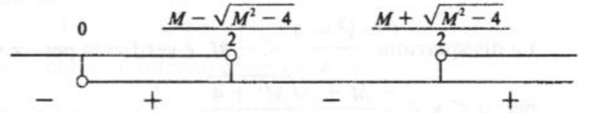
$\frac{x^2+1}{x} > M$ ed ottenere per soluzione $x > N$.

$$\frac{x^2+1}{x} - M > 0 \rightarrow \frac{x^2+1-Mx}{x} > 0 \rightarrow \frac{x^2-Mx+1}{x} > 0$$

numeratore > 0 per $x^2 - Mx + 1 > 0$ $(\Delta = M^2 - 4)$ $x = \frac{M \pm \sqrt{M^2-4}}{2}$

quindi $x^2 - Mx + 1 > 0$ per $x < \frac{M - \sqrt{M^2-4}}{2}$ ed $x > \frac{M + \sqrt{M^2-4}}{2}$

denominatore > 0 per $x > 0$



La $\frac{x^2+1}{x} > M$ è verificata per $0 < x < \frac{M-\sqrt{M^2-4}}{2}$ e $x > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2} = N$

Il primo intervallo costituisce un intorno destro dello zero e tale soluzione da sola escluderebbe l'esattezza della scrittura 19.

(1) È possibile eliminare il denominatore perché dalla seconda disequazione risulta che x è positivo.

Il secondo intervallo costituisce un intorno di $+\infty$, quindi tale soluzione conferma l'esattezza della scrittura 19.

20. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = -\infty$

Si tratta del caso b.2 dello schema D, quindi, se la scrittura è esatta, la disequazione $\dfrac{x}{x^2+1} < -M$ deve essere soddisfatta per i valori di x costituenti un intorno di $+\infty$, cioè per $x > N$. Si ha:

$$\frac{x}{x^2+1} + M < 0 \quad \to \quad \frac{x + Mx^2 + M}{x^2+1} < 0 \quad \to \quad \frac{Mx^2 + x + M}{x^2+1} < 0$$

Essendo il denominatore sempre positivo è sufficiente che sia: $Mx^2 + x + M < 0$. Dato che $\Delta = 1 - 4M^2$, se si prende $M > \dfrac{1}{2}$ (come è lecito fare dato che M si sceglie grande) allora $\Delta < 0$. Cosicché $Mx^2 + x + M > 0$ per qualunque x, ed il rapporto $\dfrac{Mx^2 + x + M}{x^2+1}$ è sempre positivo. La $\dfrac{x}{x^2+1} < -M$ non ha soluzioni. La scrittura è errata.

21. Verificare l'esattezza della scrittura: $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{x} = -\infty$

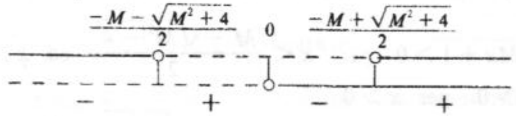
Si tratta del caso b.1 dello schema D, quindi, se la scrittura è esatta, la disequazione $\dfrac{x^2-1}{x} < -M$ deve essere soddisfatta per i valori di $x < -N$ (intorno di $-\infty$).

Si ha: $\dfrac{x^2-1}{x} + M < 0 \quad \to \quad \dfrac{x^2 + Mx - 1}{x} < 0$

numeratore > 0 per $x^2 + Mx - 1 > 0$ $(\Delta = M^2 + 4)$ $x = \dfrac{-M \pm \sqrt{M^2+4}}{2}$
pertanto:

$x^2 + Mx - 1 > 0$ per $x < \dfrac{-M - \sqrt{M^2+4}}{2}$ ed $x > \dfrac{-M + \sqrt{M^2+4}}{2}$

denominatore > 0 per $x > 0$.



La disequazione $\dfrac{x^2-1}{x} < -M$ è verificata per $x < \dfrac{-M - \sqrt{M^2+4}}{2} = -N$ e per $0 < x < \dfrac{-M + \sqrt{M^2+4}}{2}$

Il primo intervallo costituisce un intorno di $-\infty$ e tale soluzione conferma l'esattezza della scrittura, mentre il secondo intervallo, costituendo un intorno destro dello zero, se fosse l'unica soluzione della disequazione, la escluderebbe.

La TAB. 2-III riportata alle pagg. 36 e 37 compendia quanto è stato detto ai §§2.3, 2.5, 2.8. Essa indica ciò che si deve fare per verificare un limite in base alla definizione relativa.

2.9.- Esercizi proposti

Applicando le relative definizioni, verificare che risulta:

22. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x - 10}{x-2} = 9$

23. $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 5x) = -2$

24. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-1}{2-x} = \infty$

25. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2} = +\infty$

26. $\lim_{x \to 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & (b > 1) \\ +\infty & (0 < b < 1) \end{cases}$

27. $\lim_{x \to +\infty} \log(x^2 - 1) = +\infty$

28. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$

29. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

30. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

31. $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$ per qualunque c.

Applicando le relative definizioni, verificare l'esattezza delle scritture:

32. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = -1$

33. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

34. $\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ -\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$

35. $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ -\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$

Soluzioni degli esercizi proposti

22. Il limite da verificare è del tipo 7 della Tab. 2-III.
In base alla definizione (§2.3) la disequazione:

$$\left| \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 10}{x-2} - 9 \right| < \epsilon \qquad [2.9.1]$$

ha per soluzioni tutti i valori di x in un intorno completo di $x = 2$, escluso $x = 2$, qualunque sia $\epsilon > 0$ prefissato. Si ha che: $x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = (x-2)(x^2+5)$. Quindi la [2.9.1] può essere scritta:

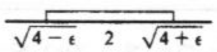
$$\left| \frac{(x-2)(x^2+5)}{x-2} - 9 \right| < \epsilon \quad \to \quad |(x^2+5) - 9| < \epsilon$$

È possibile semplificare perché, come si è detto, è $x \neq 2$.

$$|x^2 - 4| < \epsilon \quad \to \quad -\epsilon < x^2 - 4 < \epsilon \quad \to \quad 4 - \epsilon < x^2 < 4 + \epsilon$$

Estraendo la radice quadrata di tutti i membri:

$$\sqrt{4-\epsilon} < |x| < \sqrt{4+\epsilon} \quad \to \quad [^1] \quad \to \quad \sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$$

cioè: 

che è un intorno completo di $x = 2$.

Si osservi che il punto di ascissa $x = 2$ non appartiene alla

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 10}{x-2} \qquad \text{infatti:} \quad f(2) = \frac{0}{0}$$

[1] Si ricordi che $\sqrt{x^2} = |x|$ (cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §1.6). Poiché siamo interessati a valori di $x > 0$ (ci interessa un intorno di 2), possiamo assumere $|x| = x$.

TAB. 2-III

Schema		Limite da verificare	Disequazione da risolvere	Soluzione da trovare	Interpretazione grafica
	1	$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell^+$	$f(x) - \ell < \epsilon$	$c - \delta_\epsilon < x < c$	a.1
	2	$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell^+$	$f(x) - \ell < \epsilon$	$c < x < c + \delta_\epsilon$	a.2
	3	$\lim_{x\to c} f(x) = \ell^+$	$f(x) - \ell < \epsilon$	$c - \delta_\epsilon < x < c + \delta_\epsilon$	a.3
A	4	$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell^-$	$f(x) - \ell > -\epsilon$	$c - \delta_\epsilon < x < c$	b.1
	5	$\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell^-$	$f(x) - \ell > -\epsilon$	$c < x < c + \delta_\epsilon$	b.2
	6	$\lim_{x\to c} f(x) = \ell^-$	$f(x) - \ell > -\epsilon$	$c - \delta_\epsilon < x < c + \delta_\epsilon$	b.3
	7	$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$	$\lvert f(x) - \ell\rvert < \epsilon$	$c - \delta_\epsilon < x < c + \delta_\epsilon$	a.1, b.2 o b.1, a.2
	8	$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	$c - \delta_M < x < c$	a.1
	9	$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	$c < x < c + \delta_M$	a.2
	10	$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	$c - \delta_M < x < c + \delta_M$	a.3
B	11	$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	$c - \delta_M < x < c$	b.1
	12	$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	$c < x < c + \delta_M$	b.2
	13	$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	$c - \delta_M < x < c + \delta_M$	b.3
	14	$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$	$\lvert f(x)\rvert > M$	$c - \delta_M < x < c + \delta_M$	a.1, b.2 o b.1, a.2

TAB. 2-III (*seguito*)

Schema		Limite da verificare	Disequazione da risolvere	Soluzione da trovare	Interpretazione grafica
	15	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell^+$	$f(x) - \ell < \epsilon$	$x < -N$	a.1
	16	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell^+$	$f(x) - \ell < \epsilon$	$x > N$	a.2
	17	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell^+$	$f(x) - \ell < \epsilon$	$x < -N$, $x > N$ ($\lvert x\rvert > N$)	a.3
C	18	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell^-$	$f(x) - \ell > -\epsilon$	$x < -N$	b.1
	19	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell^-$	$f(x) - \ell > -\epsilon$	$x > N$	b.2
	20	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell^-$	$f(x) - \ell > -\epsilon$	$x < -N$, $x > N$ ($\lvert x\rvert > N$)	b.3
	21	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \ell$	$\lvert f(x) - \ell\rvert < \epsilon$	$x < -N$, $x > N$ ($\lvert x\rvert > N$)	a.1, b.2 o b.1, a.2
	22	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	$x < -N$	a.1
	23	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	$x > N$	a.2
	24	$\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty$	$f(x) > M$	$x < -N$, $x > N$ ($\lvert x\rvert > N$)	a.3
D	25	$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	$x < -N$	b.1
	26	$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	$x > N$	b.2
	27	$\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$	$f(x) < -M$	$x < -N$, $x > N$ ($\lvert x\rvert > N$)	b.3
	28	$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$	$\lvert f(x)\rvert > M$	$x < -N$, $x > N$ ($\lvert x\rvert > N$)	a.1, b.2 o b.1, a.2

23. Siamo ancora nel caso 7 della Tab. 2-III.

La disequazione $|2x^2 - 5x + 2| < \epsilon$ è equivalente ai due sistemi:

$$a)\ \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < \epsilon \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 - \epsilon < 0 & [2.9.2] \\ 2x^2 - 5x + 2 > 0 & [2.9.3] \end{cases}$$

[2.9.2]: $\Delta = 25 - 8(2 - \epsilon) = 9 + 8\epsilon \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{9 + 8\epsilon}}{4}$ verificata per:

$$\frac{5 - \sqrt{9 + 8\epsilon}}{4} < x < \frac{5 + \sqrt{9 + 8\epsilon}}{4}$$

[2.9.3]: $\Delta = 25 - 16 = 9 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm 3}{4}$ verificata per $x < \dfrac{1}{2}$, $x > 2$

Il sistema a) ammette soluzioni per $\dfrac{5 - \sqrt{9 + 8\epsilon}}{4} < x < \dfrac{1}{2}$ ed anche per $2 < x < \dfrac{5 + \sqrt{9 + 8\epsilon}}{4}$

$$b)\ \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > -\epsilon \\ 2x^2 - 5x + 2 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 + \epsilon > 0 & [2.9.4] \\ \dfrac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

[2.9.4]: $\Delta = 25 - 8(2 + \epsilon) = 9 - 8\epsilon \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{9 - 8\epsilon}}{4}$ verificata per:

$$x < \frac{5 - \sqrt{9 - 8\epsilon}}{4}, \quad x > \frac{5 + \sqrt{9 - 8\epsilon}}{4}$$

Il sistema b) ammette soluzioni per $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5 - \sqrt{9 - 8\epsilon}}{4}$ ed anche per $\dfrac{5 + \sqrt{9 - 8\epsilon}}{4} < x < 2$

La disequazione $|2x^2 - 5x + 2| < \epsilon$ ammette, quindi, soluzioni per i valori di x compresi in due intervalli:

Il primo intervallo costituisce un intorno completo di $x = \dfrac{1}{2}$ e tale soluzione da sola escluderebbe l'esattezza della scrittura 23. Il secondo intervallo costituisce un intorno completo di $x = 2$, quindi tale soluzione conferma l'esattezza della scrittura. Da osservare che in questo caso non è stato necessario scartare $x = 2$. Ciò vuol dire che il punto di ascissa 2 appartiene alla funzione $y = 2x^2 - 5x$. Infatti $y(2) = -2$.

24. Il limite da verificare è del tipo 14, Tab. 2-III.

Deve essere: $\left|\dfrac{x - 1}{2 - x}\right| > M$ qualunque sia $M > 0$ grande a piacere. I due sistemi da considerare sono:

$$a)\ \begin{cases} \dfrac{x - 1}{2 - x} > M \\ \dfrac{x - 1}{2 - x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 1 > 2M - Mx \\ 1 < x < 2 \end{cases} \rightarrow [1] \rightarrow \begin{cases} (M + 1)x > 2M + 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2M + 1}{M + 1} = 2 - \dfrac{1}{M + 1} \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Il sistema a) ammette soluzioni per $2 - \dfrac{1}{M + 1} < x < 2$

$$b)\ \begin{cases} \dfrac{x - 1}{2 - x} < -M \\ \dfrac{x - 1}{2 - x} < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - 1 + 2M - Mx}{2 - x} < 0 \\ x < 1,\ x > 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{(M - 1)x - (2M - 1)}{2 - x} > 0 \\ x < 1,\ x > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 < x < \dfrac{2M - 1}{M - 1} = 2 + \dfrac{1}{M - 1} \\ x < 1,\ x > 2 \end{cases}$$

Il sistema b) ammette soluzioni per

$$2 < x < 2 + \frac{1}{M - 1}$$

La disequazione $\left|\dfrac{x - 1}{2 - x}\right| > M$ è quindi verificata per

$$2 - \frac{1}{M + 1} < x < 2 + \frac{1}{M - 1}$$

che essendo un intorno completo di $x = 2$ verifica il limite proposto.

25. Il limite da verificare è del tipo 10, Tab. 2-III.

Deve essere $\dfrac{x + 1}{x^2} > M$ per qualunque $M > 0$ scelto a piacere. Essendo $x^2 > 0$ sempre, tranne che per $x = 0$, si ha:

$$x + 1 - Mx^2 > 0 \rightarrow Mx^2 - x - 1 < 0 \rightarrow \left[\Delta = 1 + 4M \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4M + 1}}{2M}\right]$$

$$\rightarrow \frac{1 - \sqrt{4M + 1}}{2M} < x < \frac{1 + \sqrt{4M + 1}}{2M}$$

Dal confronto delle due radici con lo zero, segue che la $\dfrac{x + 1}{x^2} > M$ è verificata per x compreso in un intorno completo di $x = 0$. Il che conferma il limite proposto.

(1) Si è potuto eliminare il denominatore in quanto nell'intervallo $1 < x < 2$ è $2 - x > 0$.

26. $\lim_{x\to 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & \text{per } b>1 \quad a) \\ +\infty & \text{per } 0<b<1 \quad b)\end{cases}$

a) $\lim_{x\to0^+}\log_b x = -\infty$ (Tab. 2-III, 12).

La disequazione $\log_b x < -M$ ha soluzioni in un intorno destro dello zero. Infatti:

$\log_b x < -M \rightarrow b^{\log_b x} < b^{-M} \rightarrow$ [1] $\rightarrow x < b^{-M}$

La potenza b^{-M} è maggiore di zero ed è piccola se $b>1$. Ad esempio, per $b=2$ ed $M=1000$, è $b^{-M} = \frac{1}{b^M} = \frac{1}{2^{1000}}$. Cosicché, se $b>1$, la disequazione $\log_b x < -M$ è soddisfatta per $0<x<b^{-M}$ (intorno destro dello zero). Ciò verifica che:

$\lim_{x\to0^+}\log_b x = -\infty$ se $b>1$.

b) $\lim_{x\to0^+}\log_b x=+\infty$ (Tab. 2-III, 9).

La disequazione $\log_b x > M$ ha soluzione in un intorno destro dello zero. Infatti:

$\log_b x > M \rightarrow b^{\log_b x} < b^M \rightarrow x < b^M$

Si noti l'inversione del senso della disequazione passando da $\log_b x$ ad x dovuta al fatto che $0<b<1$. Posto ad esempio $b=\frac12$, $\log_b x = M_1$ con $M_1 > M$, segue che $\left(\frac12\right)^{M_1} < \left(\frac12\right)^M$. Infatti $\frac{1}{2^{M_1}} < \frac{1}{2^M}$ essendo $2^{M_1} > 2^M$. La potenza b^M è maggiore di zero ed è piccola se $0<b<1$. Per esempio, per $b=\frac12$ ed $M=1000$ si ha: $b^M = \left(\frac12\right)^{1000} = \frac{1}{2^{1000}}$. Cosicché, se $0<b<1$ la disequazione $\log_b x > M$ è soddisfatta per $0<x<b^M$ (intorno destro dello zero). Ciò verifica che:

$\lim_{x\to0^+}\log_b x = +\infty$ se $0<b<1$

27. Il limite da verificare è del tipo 23 della Tab. 2-III.
La disequazione $\log(x^2-1) > M$ ha soluzioni in un intorno di $+\infty$, cioè, per $x>N$ con $N>0$ e per qualunque $M>0$. Si ha:

$\log(x^2-1)>M \rightarrow e^{\log(x^2-1)} > e^M \rightarrow x^2-1>e^M \rightarrow x^2>1+e^M$.

Estraendo la radice quadrata di ambo i membri: $|x| > \sqrt{1+e^M}$ Poiché siamo interessati a valori positivi di x ($x\to+\infty$), è $|x|=x$. Pertanto la disequazione $\log(x^2-1)>M$ è soddisfatta per $x>\sqrt{1+e^M} = N$ il che verifica il limite proposto.

(1) Si ricordi che per dimostrare l'uguaglianza: $b^{\log_b x} = x$, è sufficiente considerare il logaritmo in base b di ambo i membri: $\log_b(b^{\log_b x}) = \log_b x$. Per la proprietà della potenza (cfr. §1.5) si ha: $\log_b x\cdot\log_b b = \log_b x$. Essendo $\log_b b = 1$, si verifica l'asserto.

28. Il limite da verificare è del tipo 22, Tab. 2-III.
La disequazione $\sqrt{1-x} > M$ ha soluzioni in un intorno di $-\infty$ cioè per $x<-N$ con $N>0$ e per qualunque $M>0$.

$\sqrt{1-x}>M \rightarrow 1-x>M^2 \rightarrow x<1-M^2$

Posto $N=M^2-1>0$, la disequazione è verificata per $x<-(M^2-1)=-N$. Ciò conferma il limite.

29. Il limite da verificare è del tipo 21, Tab. 2-III.
La disequazione $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 0\right| < \epsilon$ ha soluzioni in un intorno completo dell'infinito, cioè, per $|x|>N$ con $N>0$ ed $\epsilon>0$ piccolo a piacere.
La disequazione $\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|<\epsilon$ può essere risolta con le considerazioni seguenti: poiché è sempre $|\operatorname{sen}x|\leqslant1$, è sicuramente $\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right| \leqslant \left|\frac1x\right| = \frac1{|x|}$. Quindi, per i valori di x per i quali è $\frac1{|x|}<\epsilon$ a maggior ragione è $\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|<\epsilon$. Essendo $\frac1{|x|}<\epsilon$ verificata per $|x|>\frac1\epsilon=N$ la disequazione $\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right|<\epsilon$ è a maggior ragione verificata per $|x|>N$. Ciò conferma il limite proposto.

30. La verifica di questo limite si riconduce a quella del limite precedente.
Basta infatti porre: $\frac1x = y$. Poiché $\lim_{x\to0}\frac1x = \lim_{x\to0} y = \left(\frac10\right) = \infty$ si ha:

$\lim_{y\to\infty}\frac1y \operatorname{sen} y = \lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{sen}y}{y} = 0$

che è lo stesso limite visto nell'esempio 29.

31. Il limite da verificare è del tipo 7, Tab. 2-III.
La disequazione $|\cos x - \cos c| < \epsilon$ è verificata per i valori di x in un intorno completo di $x=c$. Applicando le formule di prostaferesi (cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica*, §4.5) la disequazione diventa:

$$\left|-2\operatorname{sen}\frac{x+c}{2}\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{x+c}{2}\right|\cdot\left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right|<\epsilon \qquad [2.9.5]$$

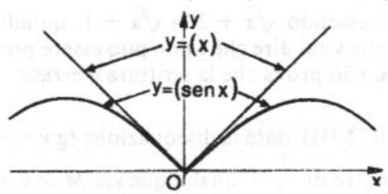


Fig. 2.9.1

Dalla fig. 2.9.1. si rileva che per ogni x le ordinate sulla curva $y=|\operatorname{sen}x|$ sono minori (o uguali, quando $x=0$) delle corrispondenti ordinate sulla curva $y=|x|$. Tali considerazioni permettono di affermare che:

$$\left|\operatorname{sen}\frac{x+c}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x+c}{2}\right| \quad \text{e} \quad \left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right|\leqslant\left|\frac{x-c}{2}\right|$$

Pertanto la [2.9.5] si può scrivere:

$$\left|\operatorname{sen}\frac{x+c}{2}\right|\cdot\left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x+c}{2}\right|\cdot\left|\frac{x-c}{2}\right| = \left|\frac{x^2-c^2}{4}\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad [2.9.6]$$

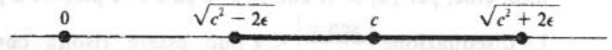
$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{x^2-c^2}{4} < \frac{\epsilon}{2} \;\rightarrow\; -2\epsilon < x^2-c^2 < 2\epsilon \;\rightarrow\; c^2-2\epsilon < x^2 < c^2+2\epsilon$$

Estraendo la radice quadrata di tutti i membri:

$$\sqrt{c^2-2\epsilon} < |x| < \sqrt{c^2+2\epsilon} \qquad [2.9.7]$$

Questo è un intorno completo di $x = c$ (qualunque sia c). Infatti:

per $\quad x = c > 0 \quad$ la [2.9.7] diventa: $\quad \sqrt{c^2-2\epsilon} < c < \sqrt{c^2+2\epsilon}$



per $\quad x = c < 0 \quad$ la [2.9.7] diventa: $\quad \sqrt{c^2-2\epsilon} < -c < \sqrt{c^2+2\epsilon}$

e moltiplicando per -1: $\quad -\sqrt{c^2+2\epsilon} < c < -\sqrt{c^2-2\epsilon}$

Il limite dato è quindi verificato.

32. La scrittura da verificare è del tipo 7 della Tab. 2-III.

Se la scrittura è esatta, la disequazione $\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}+1\right| < \epsilon$ deve essere verificata, per qualunque $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, in un intorno completo di $x = 1$, escluso $x = 1$.

$$\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+1\right| < \epsilon \;\rightarrow\; \left|\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}+1\right| < \epsilon \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}+1\right| < \epsilon \;\rightarrow\; \left|\frac{1+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right| < \epsilon \;\rightarrow\; \left|\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right| < \epsilon$$

Poiché per $x \geqslant 0$ sia il numeratore che il denominatore sono reali e positivi, il rapporto è positivo, quindi:

$$\left|\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right| = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} < \epsilon$$

Il primo membro è maggiore di 1, essendo $\sqrt{x}+2 > \sqrt{x}+1$, quindi la disequazione è verificata solo per $\epsilon > 1$. Il che vuol dire che ϵ non può essere preso a piacere. Per $\epsilon < 1$ la disequazione è assurda. Ciò prova che la scrittura è errata.

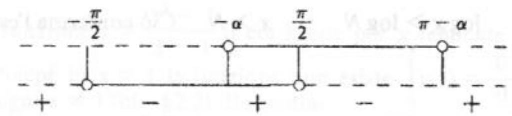
33. Se la scrittura è esatta (tipo 12, TAB. 2-III), data la disequazione $\operatorname{tg} x < -M$ è verificata per i valori di x in un intorno destro di $\frac{1}{2}\pi$, qualunque sia $M > 0$ grande a piacere. Posto $M = \operatorname{tg}\alpha$ la disequazione diventa $\operatorname{tg} x < -\operatorname{tg}\alpha \;\rightarrow\; \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\alpha < 0$.

Applicando le formule di prostaferesi (cfr. P.11, §4.5) si ottiene: $\dfrac{\operatorname{sen}(x+\alpha)}{\cos x \cos\alpha} < 0$.

Essendo $M > 0$, è $\operatorname{tg}\alpha > 0$ cioè $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ quindi $\cos\alpha > 0$. Moltiplicando ambo i membri della disequazione per $\cos\alpha$ si ottiene: $\dfrac{\operatorname{sen}(x+\alpha)}{\cos x} < 0$.

$\operatorname{sen}(x+\alpha) > 0 \quad$ per $\quad 0 < x+\alpha < \pi \;\rightarrow\; -\alpha < x < \pi - \alpha$

$\cos x > 0 \quad$ per $\quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$



Il rapporto è negativo per $-\dfrac{\pi}{2} < x < -\alpha$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi - \alpha$.

Il primo è un intorno destro di $-\pi/2$ e, da solo, escluderebbe l'esattezza del limite proposto. Il secondo è un intorno destro di $\pi/2$, tanto più piccolo quanto maggiore è α (α tende a $\pi/2$), cioè quanto maggiore è M. Ciò assicura l'esattezza del limite proposto.

34. $$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \qquad \text{a)} \\ -\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \qquad \text{b)} \end{cases}$$

a) (Tipo 23, TAB. 2-III). La disequazione $a^x > M$, deve essere verificata per i valori di $x > N$ (intorno di $+\infty$), qualunque sia $M > 0$ scelto a piacere. Posto allora $M = a^N$ la disequazione diventa:

$a^x > a^N \;\rightarrow\; x > N$. Ciò conferma l'esattezza della scrittura per $a > 1$.

b) (Tipo 26, TAB. 2-III). La disequazione $a^x < -M$, deve essere verificata per i valori di $x > N$ (intorno di $+\infty$), qualunque sia $M > 0$ scelto a piacere. Poiché $a^x > 0$ sempre, la disequazione $a^x < -M$ è assurda dato che un numero positivo non può essere minore di un numero negativo. Si conclude che la scrittura b) è errata. Dimostriamo che la scrittura esatta è: $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+ \quad$ per $\quad 0 < a < 1$ (tipo 16, TAB. 2-III).

La disequazione $a^x - 0 < \epsilon \;\rightarrow\; a^x < \epsilon$ è verificata per $x > N$ (intorno di $+\infty$). Infatti, posto $\epsilon = a^N$, la disequazione diventa:

$$a^x < a^N \;\rightarrow\; \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} < \left(\frac{1}{a}\right)^{-N} \;\rightarrow\; \left[\text{essendo } \frac{1}{a} > 1\right] \;\rightarrow\; -x < -N \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x > N \quad (\text{intorno di } +\infty).$$

35. $$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \qquad \text{a)} \\ -\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \qquad \text{b)} \end{cases}$$

a) (Tipo 23, TAB. 2-III). La disequazione $\log_a x > M$ deve essere verificata per i valori di $x > N$ (intorno di $+\infty$), qualunque sia $M > 0$ scelto a piacere. Posto infatti $M = \log_a N$, si ha:

$\log_a x > M \;\rightarrow\; \log_a x > \log_a N \;\rightarrow\; x > N$. Ciò verifica l'esattezza della scrittura a).

b) (Tipo 26, TAB. 2-III). La disequazione $\log_a x < -M$ deve essere verificata per i valori di $x > N$ (intorno di $+\infty$), qualunque sia $M > 0$ scelto a piacere. Posto infatti $-M = \log_a N$ (si ricorda che per $0 < a < 1$ ed $N > 1$ è $\log_a N < 0$), la disequazione diventa:

$\log_a x < \log_a N$ Cambiando base (cfr. P.11, § 1.14, [1.14.6]):

$\dfrac{\log x}{\log a} < \dfrac{\log N}{\log a}$ Moltiplicando ambo i membri per $\log a$, che è negativo:

$\log x > \log N \rightarrow x > N$ Ciò conferma l'esattezza della scrittura b).

2.10.- Calcolo del limite con c finito o infinito

Le funzioni delle quali può essere richiesto il limite per x tendente a c possono essere catalogate così:

a) Funzioni razionali intere
b) Funzioni razionali fratte
c) Funzioni irrazionali
d) Funzioni circolari
e) Funzioni esponenziali
f) Funzioni circolari inverse
g) Funzioni logaritmiche
h) Funzioni iperboliche
i) Funzioni composte.

Tutte queste funzioni si considerano reali a variabile reale, ed in questo paragrafo le indicheremo con $y = f(x)$. Quindi con l'espressione

$$\lim_{x \to c} f(x) \qquad [2.10.1]$$

indicheremo il calcolo del limite di una qualsiasi delle funzioni sopraelencate.

Quando viene chiesto di calcolare il limite [2.10.1], o quando il problema che si sta risolvendo richiede un tale calcolo, si deve; per prima cosa, sostituire il valore $x = c$ nella $f(x)$ e calcolare $f(c)$.

Il calcolo di $f(c)$ può condurre ai seguenti tre casi:

1) $f(c)$ è uguale ad un numero reale definito;
2) $f(c)$ dà luogo a forme indefinite di immediata interpretazione;
3) $f(c)$ dà luogo a forme indeterminate, cioè forme sulle quali nulla può dirsi a priori.

1° caso: $f(c)$ dà un numero reale definito.

36. Calcolare: $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

Cioè, sostituendo $x = \dfrac{\pi}{2}$ al posto di x nella funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, la funzione ha assunto un valore ben definito $(2/\pi)$.

Ciò avverrà non poche volte, perché è una prerogativa di tutte le funzioni $y = f(x)$ che in $x = c$ sono continue. Evidentemente è il caso più semplice. Quando allora una funzione è continua in un suo punto P di ascissa $x = c$? Quando è:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l = f(c) \qquad [2.10.2]$$

La funzione dell'esempio 36 è continua nel suo punto $P \equiv \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{\pi}\right)$, proprio perché è soddisfatta la condizione [2.10.2]. Cioè il limite è finito e coincide con il valore che la funzione assume in $x = \pi/2$. Il concetto di continuità di una funzione $f(x)$ in $x = c$ è da intendere in base al significato stesso della parola continuità, cioè senza alcun salto o interruzione in corrispondenza del punto P di ascissa $x = c$.

Consideriamo ad esempio la funzione $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ il cui limite per x tendente ad 1 è stato verificato nell'esempio 4. Poiché in $x = 1$ la funzione non esiste $\left[y(1) = \dfrac{0}{0}\right]$, essa è equivalente alla $y = x + 1$ per ogni $x \neq 1$ (cfr. §2.2). Il suo diagramma è quindi quello di fig. 2.10.1 da cui si può vedere che la funzione presenta una interruzione in $x = 1$. Ciò si verifica ogni qualvolta

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l \quad \text{e} \quad f(c) \quad \text{non esiste.}$$

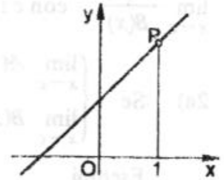


Fig. 2.10.1

Consideriamo adesso una funzione così definita:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-1}{x-1} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

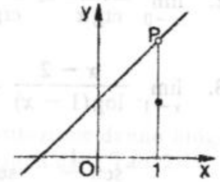


Fig. 2.10.2

Essa è sempre equivalente alla $y = x + 1$ tranne per $x = 1$, ove la funzione data vale 1 e la sua equivalente vale 2. Quindi il diagramma della funzione data è quello di fig. 2.10.2 nella quale si vede che la funzione presenta un salto in P. Ciò si verificherà, in generale, quando, pur essendo:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = l \quad \text{è} \quad f(c) \neq l.$$

Consideriamo adesso la funzione $y = x + 1$. Per essa è:

$$\lim_{x \to 1^-} (x+1) = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2.$$

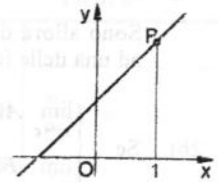


Fig. 2.10.3

Dato che $y(1) = 1 + 1 = 2$, il suo diagramma è quello di fig. 2.10.3 che, quindi, non presenta salti né interruzioni.

Conclusione: la condizione [2.10.2] è una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $y = f(x)$ sia continua in un suo punto di ascissa $x = c$.

Calcoliamo i seguenti limiti di funzioni continue in $x = c$.

37. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = \frac{1+1}{1-5+6} = \frac{2}{2} = 1$

38. $\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x} = \frac{\sqrt{3^+-3}}{3} = 0^+$

39. $\displaystyle\lim_{x \to a} \log x = \log a \quad \text{con} \quad a > 0$

40. $\lim\limits_{x\to 1} e^{1-x} = e^{1-1} = e^0 = 1$

41. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + x - \dfrac{1}{2}\log \operatorname{Ch} x - \operatorname{Th} x\right) = 1 + 0 - \dfrac{1}{2}\log \operatorname{Ch} 0 - \operatorname{Th} 0 =$

$$= 1 + 0 - \frac{1}{2}\log 1 - 0 = 1$$

2° caso: $f(x)$ **dà luogo a forme indefinite di immediata interpretazione.**

Consideriamo il rapporto di due funzioni qualsiansi $A(x)$ e $B(x)$ ed ancora il:

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ **con c finito o infinito.**

2a) **Se** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to c} A(x) = m \gtreqless 0\\ \lim\limits_{x\to c} B(x) = \infty(\pm\infty)\end{cases}$ **il** $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ **è nullo** $(0, 0^+, 0^-)$.

Esempi.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{\operatorname{ctg} x} = \dfrac{0+2}{\operatorname{ctg} 0} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

43. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-2}{\log(1-x)} = \dfrac{1^- - 2}{\log(1-1^-)} = \dfrac{-1}{\log 0^+} = \dfrac{-1}{-\infty} = 0^+$

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{x} = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{\infty}}{\infty} = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{\infty} = \dfrac{0}{\infty} = 0$

Sono allora da considerare immediati i limiti che per sostituzione danno luogo ad una delle forme elencate nella prima e nella seconda colonna della Tab. 2-IV.

2b) **Se** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to c} A(x) = m \neq 0 \quad \text{finito}\\ \lim\limits_{x\to c} B(x) = 0 \quad (0^{\pm})\end{cases}$ **il** $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ **è infinito** $(\infty, +\infty, -\infty)$

Esempi.

45. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{2-2} = \dfrac{3}{0} = \infty$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{\cos 0}{0} = \dfrac{1}{0} = \infty$

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1+\dfrac{2}{\infty}}{\operatorname{sen}\dfrac{1}{\infty}} = \dfrac{1+0}{\operatorname{sen} 0} = \dfrac{1}{0} = \infty$

Sono allora da considerare immediati i limiti che per sostituzione danno luogo ad una delle forme elencate nella terza colonna della Tab. 2-IV.

2c) **Se** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to c} A(x) = \infty\\ \lim\limits_{x\to c} B(x) = m \gtreqless 0 \quad \text{finito}\end{cases}$ **il** $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ **è infinito** $(\infty, +\infty, -\infty)$

Esempi.

48. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{\infty}{\dfrac{\pi}{2}} = \infty$

49. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log x}{1-x} = \dfrac{\log 0^+}{1-0^+} = \dfrac{-\infty}{1} = -\infty$

50. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{\cos\dfrac{1}{x}} = \dfrac{+\infty}{\cos\dfrac{1}{\pm\infty}} = \dfrac{+\infty}{\cos 0} = \dfrac{+\infty}{1^-} = +\infty$

51. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\log(1-x)}{x-1} = \dfrac{\log(1-1^-)}{1^- - 1} = \dfrac{\log 0^+}{0^-} = \dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty$

Sono allora da considerare immediati i limiti che per sostituzione danno luogo ad una delle forme elencate nella quarta e nella quinta colonna della Tab. 2-IV.

TAB. 2-IV

1		2		3		4		5	
$\dfrac{m}{\infty} = 0$	1	$\dfrac{0}{\infty} = 0$	6	$\dfrac{m}{0} = \infty$	11	$\dfrac{\infty}{m} = \infty$	16	$\dfrac{\infty}{0} = \infty$	21
$\dfrac{m}{+\infty} = 0^+$	2	$\dfrac{0^+}{+\infty} = 0^+$	7	$\dfrac{m}{0^+} = +\infty$	12	$\dfrac{+\infty}{m} = +\infty$	17	$\dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$	22
$\dfrac{m}{-\infty} = 0^-$	3	$\dfrac{0^+}{-\infty} = 0^-$	8	$\dfrac{m}{0^-} = -\infty$	13	$\dfrac{-\infty}{m} = -\infty$	18	$\dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$	23
$\dfrac{-m}{+\infty} = 0^-$	4	$\dfrac{0^-}{+\infty} = 0^-$	9	$\dfrac{-m}{0^+} = -\infty$	14	$\dfrac{+\infty}{-m} = -\infty$	19	$\dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$	24
$\dfrac{-m}{-\infty} = 0^+$	5	$\dfrac{0^-}{-\infty} = 0^+$	10	$\dfrac{-m}{0^-} = +\infty$	15	$\dfrac{-\infty}{-m} = +\infty$	20	$\dfrac{-\infty}{0^-} = +\infty$	25

m è un numero positivo finito.

2d) **Sono da considerare immediati i limiti di funzioni che per sostituzione danno luogo ad una delle forme elencate nella TAB. 2-V.**

TAB. 2-V

$-(+\infty) = -\infty$	1	$m(-\infty) = -\infty$	13	$(0^+)^{+\infty} = 0^+$		25
$+(-\infty) = -\infty$	2	$-m(-\infty) = +\infty$	14	$(0^+)^{-\infty} = +\infty$		26
$m + (+\infty) = +\infty$	3	$+\infty(+\infty) = +\infty$	15	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$		27
$m - (-\infty) = +\infty$	4	$+\infty(-\infty) = -\infty$	16	$(+\infty)^{-\infty} = 0^+$		28
$m + (-\infty) = -\infty$	5	$-\infty(+\infty) = -\infty$	17	$m^{+\infty} = +\infty$	$m > 1$	29
$m - (+\infty) = -\infty$	6	$-\infty(-\infty) = +\infty$	18	$m^{+\infty} = 0^+$	$m < 1$	30
$+\infty + (+\infty) = +\infty$	7	$(+\infty)^m = +\infty$	19	$m^{-\infty} = 0^+$	$m > 1$	31
$+\infty - (-\infty) = +\infty$	8	$(+\infty)^{-m} = 0^+$	20	$m^{-\infty} = +\infty$	$m < 1$	32
$-\infty + (-\infty) = -\infty$	9	$(-\infty)^{n_2} = +\infty$	21	$\log_m(+\infty) = +\infty$	$m > 1$	33
$-\infty - (+\infty) = -\infty$	10	$(-\infty)^{n_1} = -\infty$	22	$\log_m(+\infty) = -\infty$	$m < 1$	34
$m(+\infty) = +\infty$	11	$(-\infty)^{-n_2} = 0^+$	23	$\log_{+\infty} m = 0^+$	$m > 1$	35
$-m(+\infty) = -\infty$	12	$(-\infty)^{-n_1} = 0^-$	24	$\log_{+\infty} m = 0^-$	$m < 1$	36
$m > 0$ reale		$n_1 > 0$ intero dispari		$n_2 > 0$ intero pari.		

Esempi.

52. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2x - \pi}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\pi^+ - \pi} = 1 + \dfrac{1}{0^+} = 1 + \infty = +\infty$ Tab. 2-V-3

53. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} + \operatorname{ctg} x\right) = \dfrac{1}{0^-} + \operatorname{ctg} 0^- = -\infty + (-\infty) = -\infty$ Tab. 2-V-9

54. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} x \operatorname{tg} x = \dfrac{\pi}{2}(-\infty) = -\infty$ Tab. 2-V-13

55. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \log x = \dfrac{1}{0^+} \log 0^+ = +\infty(-\infty) = -\infty$ Tab. 2-V-16

56. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log x)^{x-3} = (\log 0^+)^{0^+ - 3} = (-\infty)^{-3} = 0^-$ Tab. 2-V-24

57. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right)^{-(+\infty)} = (0^+)^{-\infty} = +\infty$ Tab. 2-V-26

58. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^{\log x} = \left(\dfrac{1}{0+2}\right)^{\log 0^+} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$ Tab. 2-V-32

59. $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_x \left(e^{-x} + \dfrac{1}{2}\right) = \log_{+\infty}\left(e^{-\infty} + \dfrac{1}{2}\right) = \log_{+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{+\infty}} + \dfrac{1}{2}\right) =$

$= \log_{+\infty}\left(\dfrac{1}{+\infty} + \dfrac{1}{2}\right) = \log_{+\infty}\left(0 + \dfrac{1}{2}\right) = \log_{+\infty}\dfrac{1}{2} = 0^-$ Tab. 2-V-36

3° caso: $f(c)$ dà luogo a forme indeterminate.

Il calcolo di $f(c)$ può dar luogo ad una delle forme elencate nella Tab. 2-VI, di interpretazione non immediata.

TAB. 2-VI

$\dfrac{0}{0}$	1	$+\infty - \infty$	4	1^∞	7	$\log_{+\infty}(0^+)$	10
$\dfrac{\infty}{\infty}$	2	0^0	5	$\log_{0^+}(+\infty)$	8	$\log_{+\infty}(+\infty)$	11
$0 \cdot \infty$	3	∞^0	6	$\log_{0^+}(0^+)$	9	$\log_{1^\pm} 1$	12

È chiaro allora che è su queste forme che si deve porre la massima attenzione, nel senso che le difficoltà vere e proprie nel calcolo del limite di una funzione si riscontrano quando, sostituendo, si giunge ad una forma indeterminata. A questo punto interviene l'abilità di chi opera. L'abilità si acquisisce con l'esercizio, ma questo da solo non basta: occorre anche affinare l'intuito.

2.11.- Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti immediati consultando, ove occorra, le tabelle 2-IV e 2-V.

60. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

61. $\lim\limits_{x \to -a} \dfrac{x^2 - 5ax + 6a^2}{x + a}$

62. $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{1}{x - 1}\right)$

63. $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \dfrac{x}{x - 2}\right)$

64. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x - 2}{2^{-x}} - \log\dfrac{1}{x}\right)$

65. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\log(2 - x)}{-\log(x - 1)}$

66. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sqrt{2x - \pi}}{\operatorname{tg} x}$

67. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{e^{2-x}}{2 - x}$

68. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

69. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^{\log^2 x} - 1)$

70. $\lim\limits_{x \to 0^+} (2 - x)^{\frac{3}{4 \log^2 x}}$

71. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{4 \log 2x}$

72. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \log \operatorname{Ch} x - 2 \operatorname{Th} x + 1)$

73. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\operatorname{Ch} x} \cdot e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\operatorname{Sh} x}}$

74. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{x + |x^2 - x|}}$

75. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x + |x^2 - x|}}$

76. $\lim\limits_{x \to (e^{-1})^+} \left[\operatorname{arc\,tg} \dfrac{\log x - 1}{\log x + 1} + \dfrac{1}{2}\log(\log^2 x + 1) + \dfrac{1}{2}\pi\right]$

A quali delle forme indeterminate elencate nella TAB. 2-VI conducono i seguenti limiti?

77. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \operatorname{arc\,tg} x^2}{(1-\cos x)^3}$

78. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$

79. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log \operatorname{sen} x}{\operatorname{ctg} x}$

80. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$

81. $\lim_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

82. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

83. $\lim_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

84. $\lim_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

85. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

86. $\lim_{x\to -\infty} \left[\dfrac{1}{2} x \log x^2 - \dfrac{2x-e}{2}\log(2x-e)^2 + 2(x - e\cdot \operatorname{sgn} x)\right]$

87. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

88. $\lim_{x\to +\infty} (1+e^{-x})^{\sqrt{|x|} - \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{|x|+1}}$

89. $\lim_{x\to 0^+} \log_x \dfrac{1}{x}$

90. $\lim_{x\to 1^+} \log_{x-1} \dfrac{2}{e^{x-1} - e^{-(x-1)}}$

91. $\lim_{x\to 2^+} \log_{x-2} \dfrac{[\cos(x-2) - x + 1]^2}{x}$

92. $\lim_{x\to +\infty} \log_x \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}$

93. $\lim_{x\to +\infty} \log_x \left(2 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

94. $\lim_{x\to 0^+} \log_{x+1}(1 - \operatorname{sen} x)$

Soluzioni degli esercizi proposti

60. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+1} = \dfrac{4-4}{2+1} = \dfrac{0}{3} = 0$

61. $\lim_{x\to -a} \dfrac{x^2 - 5ax + 6a^2}{x+a} = \dfrac{a^2 + 5a^2 + 6a^2}{-a+a} = \dfrac{12a^2}{0} = \infty$ Tab. 2-IV-11

62. $\lim_{x\to 1^+} \left[\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{1}{x-1}\right] = \dfrac{1+1}{\sqrt{1^+-1}} + \dfrac{1}{1^+-1} = \dfrac{2}{0^+} + \dfrac{1}{0^+} =$
$= +\infty + (+\infty) = +\infty$ Tab. 2-V-7

63. $\lim_{x\to 2^+} \left(\sqrt{x^2-3x+2} - \dfrac{x}{x-2}\right) = \sqrt{4-6+2} - \dfrac{2}{2^+-2} = 0 - (+\infty) = -\infty$
Tab. 2-V-6

64. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x-2}{2^{-x}} - \log\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{+\infty - 2}{2^{-\infty}} - \log\dfrac{1}{+\infty} = [\text{Tab. 2-V-31}] = \dfrac{+\infty}{0^+} - \log 0^+ =$
$= [\text{Tab. 2-IV-22}] = +\infty - (-\infty) = +\infty$ Tab. 2-V-8

65. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\log(2-x)}{-\log(x-1)} = \dfrac{\log 1^-}{-\log 0^+} = \dfrac{0^-}{-(-\infty)} = \dfrac{0^-}{+\infty} = 0^-$ Tab. 2-IV-9

66. $\lim_{x\to \frac{\pi^+}{2}} \dfrac{\sqrt{2x-\pi}}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0^-$ Tab. 2-IV-8

67. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{e^{2-x}}{2-x} = \dfrac{e^{0^+}}{2-2^-} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ Tab. 2-IV-12

68. $\lim_{x\to \frac{\pi^+}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{sen} x} = \dfrac{-\infty}{1-1^-} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$ Tab. 2-IV-23

69. $\lim_{x\to 0^+} (x^{\log^2 x} - 1) = (0^+)^{\log^2 0^+} - 1 = (0^+)^{+\infty} - 1 = [\text{Tab. 2-V-25}] = 0^+ - 1 = -1^+$

70. $\lim_{x\to 0^+} (2-x)^{\frac{3}{4\log^2 x}} = (2)^{\frac{3}{4\log^2 0^+}} = (2)^{\frac{3}{+\infty}} = 2^0 = 1$

71. $\lim_{x\to +\infty} x^{4\log 2x} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$ Tab. 2-V-27

72. $\lim_{x\to +\infty} (x + \log \operatorname{Ch} x - 2\operatorname{Th} x + 1) = [\text{cfr. P.2, §3.8}] =$
$= +\infty + \log(+\infty) - 2(1) + 1 = +\infty + \infty - 2 + 1 = +\infty$

73. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{\operatorname{Ch} x}\cdot e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\operatorname{Sh} x}} = [\text{cfr. P.2, §3.8}] = \dfrac{1}{+\infty}\cdot e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{-\infty}} = (0^+)\cdot e^{\operatorname{arc\,tg} 0^-} =$
$= (0^+)e^0 = (0^+)\cdot 1 = 0^+$

74. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{x + |x^2 - x|}}$

Per x tendente a 0^- (quindi x è negativa prima di giungere a zero) $|x^2 - x| = x^2 - x$, infatti $x^2 - x > 0$ per $x < 0$, $x > 1$.
Cosicché

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x+x^2-x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = [\text{essendo } x<0] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{-x} = \frac{1}{-0^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

75. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2+x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

76. $$\lim_{x\to(e^{-1})^+}\left[\operatorname{arctg}\frac{\log x-1}{\log x+1}+\frac{1}{2}\log(\log^2 x+1)+\frac{1}{2}\pi\right]=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\log(e^{-1})^+-1}{\log(e^{-1})^++1}+\frac{1}{2}\log(\log^2 e^{-1}+1)+\frac{1}{2}\pi=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{-1^+-1}{-1^++1}+\frac{1}{2}\log[(-1)^2+1]+\frac{1}{2}\pi=\operatorname{arctg}\frac{-2}{0^+}+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\pi=$$

$$=\operatorname{arctg}(-\infty)+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\pi=-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2}\log 2$$

77. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{arctg}x^2}{(1-\cos x)^3}=\frac{0-\operatorname{arctg}0}{(1-1)^3}=\frac{0}{0}$$

78. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{\operatorname{tg}x-x}=\frac{e^0-1+\log(1-0)}{0-0}=\frac{0}{0}$$

79. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\operatorname{sen}x}{\operatorname{ctg}x}=\frac{\log 0^+}{\operatorname{ctg}0^+}=\frac{-\infty}{+\infty}$$

80. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\log(1+2e^{+\infty})}{\sqrt{1+\infty}}=\frac{\log(+\infty)}{+\infty}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

81. $$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=(1-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=0\cdot\infty$$

82. $$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg}x\cdot e^{\frac{1}{x}}=(0^+)\cdot e^{\frac{1}{0^+}}=(0^+)\cdot e^{+\infty}=(0^+)\cdot(+\infty)$$

83. $$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{\log 1^-}-\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}-\frac{1}{0^-}=-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty$$

84. $$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty-(+\infty)\log\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=$$

$$=+\infty-(+\infty)\log 1=+\infty-(+\infty)\cdot 0$$

85. $$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{tg}x}=(0^+)^{0^+}$$

86. $$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}x\log x^2-\frac{2x-e}{2}\log(2x-e)^2+2(x-e\cdot\operatorname{sgn}x)\right]=$$

$$=\left[\operatorname{sgn}x=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}-1 & \text{per } x<0\\ +1 & \text{per } x>0\end{cases}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(-\infty)\log(-\infty)^2-\frac{2(-\infty)-e}{2}\log[2(-\infty)-e]^2+2[-\infty-e(-1)]=$$

$$=-\infty\cdot(+\infty)-(-\infty)\cdot\log(+\infty)-\infty=-\infty-(-\infty)-\infty=-\infty+\infty-\infty=$$

$$=-\infty+\infty$$

87. $$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=1^{\frac{1}{1-1}}=1^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

88. $$\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})^{\sqrt{|x|}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{|x|+1}}=[\text{per } x\to+\infty \text{ è } |x|=x]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x})^{\sqrt{x}-\operatorname{arcsen}\frac{1}{x+1}}=(1-e^{-\infty})^{+\infty-\operatorname{arcsen}\frac{1}{+\infty}}=(1-0)^{+\infty-0}=1^{+\infty}$$

89. $$\lim_{x\to 0^+}\log_x\frac{1}{x}=\log_{0^+}\frac{1}{0^+}=\log_{0^+}(+\infty)$$

90. $$\lim_{x\to 1^+}\log_{x-1}\frac{2}{e^{x-1}-e^{-(x-1)}}=\log_{0^+}\frac{2}{e^{0^+}-e^{0^-}}=\log_{0^+}\frac{2}{1^+-1^-}=\log_{0^+}\frac{2}{0^+}=$$

$$=\log_{0^+}(+\infty)$$

91. $$\lim_{x\to 2^+}\log_{x-2}\frac{[\cos(x-2)-x+1]^2}{x}=\log_{2^+-2}\frac{(\cos 0^+-2^++1)^2}{2}=$$

$$=\log_{0^+}\frac{(1^--2^++1)^2}{2}=\log_{0^+}\frac{(0^-)^2}{2}=\log_{0^+}(0^+)$$

92. **Ricordando che $|\operatorname{sen}x|$ è una funzione limitata, cioè assume valori compresi tra 0 ed 1, il numeratore dell'argomento del logaritmo assumerà sempre valori finiti per qualunque x, quindi:**

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x\frac{|\operatorname{sen}x|}{x}=\log_{+\infty}\frac{c}{+\infty}=\log_{+\infty}(0^+)$$ **ove c può essere uguale a zero o diverso da zero**

93. $$\lim_{x\to+\infty}\log_x\left(2+\frac{2}{x}\right)^x=\log_{+\infty}\left(2+\frac{2}{+\infty}\right)^{+\infty}=\log_{+\infty}2^{+\infty}=\log_{+\infty}(+\infty)$$

94. $$\lim_{x\to 0^+}\log_{x+1}(1-\operatorname{sen}x)=\log_{1^+}(1-0^+)=\log_{1^+}1^-$$

3 - FORME INDETERMINATE

A chiusura della tabella 2-VI si è detto che sulle forme indeterminate si deve porre la massima attenzione. Ci si deve, cioè, porre in condizione di risolvere tutti i limiti di funzioni che danno luogo a forme di tale tipo. Per questo i procedimenti sono tanti, ma tutti perseguono lo stesso scopo: trasformare la funzione, senza cambiarne il limite, in modo che nella nuova funzione non compaia l'indeterminazione. Per esempio, il

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2} \quad \text{dà luogo alla forma } \frac{0}{0}\text{, infatti: } y(2)=\frac{8-8-2+2}{2-2}=\frac{0}{0}$$

Se si riduce però la frazione ai minimi termini, si ottiene:

$$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=\frac{x^2(x-2)-(x-2)}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2-1)}{x-2}=x^2-1$$

Ora, poiché le due funzioni: $y=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}$ ed $y=x^2-1$ coincidono in ogni punto, tranne in $x=2$ (in $x=2$ la prima non è determinata, la seconda è determinata), si può scrivere:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3$$

È importante notare che è stato possibile trovare il valore 3, a cui tende la prima funzione per x tendente a 2, solo perché si è potuto sfruttare la seconda funzione ad essa equivalente per tutti i valori di x escluso $x=2$. Ma come fare, ad esempio, nei casi del tipo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 1^+}(x-1)\log(x-1)=0^+\cdot(-\infty) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=1^{+\infty}$$

visto che non c'è alcuna semplificazione evidente o possibile?

3.1.- Limiti di funzioni razionali fratte

Una funzione di questo tipo si indica con $y=\dfrac{A(x)}{B(x)}$. I limiti di queste funzioni, o sono immediati, o in genere danno luogo alle forme indeterminate $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{\text{Caso } \frac{0}{0}}$ Limiti di questo tipo si hanno quando x tende ad un valore finito. L'indeterminazione viene eliminata riducendo la frazione ai minimi termini. A tale scopo si scompone in prodotto di fattori sia il numeratore che il denominatore e si semplificano i fattori comuni.

95. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\frac{4-6+2}{4+2-6}=\frac{0}{0}$

Poiché $A(2)=0$, $A(x)$ è divisibile per $x-2$.
Poiché $B(2)=0$, $B(x)$ è divisibile per $x-2$.

Cioè $x=2$ è uno zero dei polinomi $A(x)$ e $B(x)$. Scomponendo allora con Ruffini (cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica*, §1.3) si ottiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{5}$$

In generale, quando è $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{0}{0}$, vuol dire che $x=\alpha$ è uno zero sia di $A(x)$ che di $B(x)$ con ordini di molteplicità (¹) rispettivamente n e m. Dire che $x=\alpha$ è uno zero di $A(x)$ e $B(x)$ con ordine di molteplicità rispettivamente n ed m, significa che $A(x)$ e $B(x)$ si possono scomporre in:

$$A(x)=(x-\alpha)^n Q_1(x) \quad \text{e} \quad B(x)=(x-\alpha)^m Q_2(x) \qquad [3.1.1]$$

ove $Q_1(\alpha)$ e $Q_2(\alpha)$ sono entrambi diversi da zero.
Dividendo ambo i membri delle [3.1.1] rispettivamente per $(x-\alpha)^n$ e $(x-\alpha)^m$ si ottiene:

$$\frac{A(x)}{(x-\alpha)^n}=Q_1(x) \quad \text{e} \quad \frac{B(x)}{(x-\alpha)^m}=Q_2(x) \qquad [3.1.2]$$

Considerando i limiti delle [3.1.2] per $x\to\alpha$:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{A(x)}{(x-\alpha)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)=Q_1(\alpha)=l_1\neq 0 \qquad [3.1.3]$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{B(x)}{(x-\alpha)^m}=\left(\frac{0}{0}\right)=Q_2(\alpha)=l_2\neq 0 \qquad [3.1.4]$$

Cosa si deduce dai limiti [3.1.3] e [3.1.4]?
Dal limite [3.1.3] si deduce che per $x\to\alpha$ la funzione $A(x)$ tende a zero con la stessa rapidità con cui vi tende $(x-\alpha)^n$. Ciò si esprime più correttamente dicendo per $x\to\alpha$, $A(x)$ è un infinitesimo di ordine n rispetto all'infinitesimo di confronto $x-\alpha$.
Dal limite [3.1.4], allo stesso modo, si deduce che per $x\to\alpha$ $B(x)$ è un infinitesimo di ordine m rispetto all'infinitesimo di confronto $x-\alpha$.
Alla luce delle considerazioni suddette riprendiamo allora il

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)^n Q_1(x)}{(x-\alpha)^m Q_2(x)}$$

Si possono presentare tre casi:

1) se $n<m$: $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{Q_1(x)}{(x-\alpha)^{m-n}Q_2(x)}=\frac{l_1}{0\cdot l_2}=\infty$

2) se $n=m$: $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}=l\neq 0$

3) se $n>m$: $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)^{n-m}Q_1(x)}{Q_2(x)}=\frac{0\cdot l_1}{l_2}=0$

Nel primo caso si dice che, per $x\to\alpha$, $A(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $B(x)$.
Nel secondo caso si dice che, per $x\to\alpha$, $A(x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $B(x)$.
Nel terzo caso si dice che, per $x\to\alpha$, $A(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $B(x)$.

(¹) Per esempio $x=1$ è uno zero del polinomio x^6-2x^3+2x-1.
Poiché $x^6-2x^3+2x-1=(x-1)^3(x+1)$, l'ordine di molteplicità dello zero $x=1$ è 3.

Tutto ciò porta alla conclusione che il limite di un rapporto tra funzioni infinitesime:

è ∞ se il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore;

è 0 se il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore;

è finito se numeratore e denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine. In questo ultimo caso sarà necessario ridurre la frazione ai minimi termini e calcolarne il valore per $x = \alpha$.

Esempio. Calcolare:

96. $$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{4 + 2 - 6}{-8 + 20 - 16 + 4} = \frac{0}{0}$$

Scomponendo numeratore e denominatore si trova:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x+2)^2(x+1)} = \infty$$

Infatti, per $x \to -2$, il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.

97. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 8} = \frac{16 - 32 + 16}{8 - 8} = \frac{0}{0}$$

Scomponendo numeratore e denominatore si trova:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2 \cdot (x+2)^2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = 0$$

Infatti, per $x \to 2$, il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore.

98. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{8 - 12 + 4}{8 - 8 - 8 + 8} = \frac{0}{0}$$

Scomponendo numeratore e denominatore si trova:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2(x+2)} = \left[\begin{array}{l}\text{essendo numeratore e denomina-}\\ \text{tore infinitesimi dello stesso ordine}\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$\boxed{\text{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$ Per funzioni razionali fratte questo caso si verifica quando x tende all'infinito. L'indeterminazione viene eliminata mettendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore, la potenza di x con esponente massimo. Per esempio, si voglia calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d}{a_1x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + c_1x + d_1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{con } n, m \text{ interi positivi.}$$

Il numeratore è di grado n ed il denominatore di grado m. Si proceda nel modo seguente:

a) Si metta in evidenza al numeratore ed al denominatore rispettivamente x^n ed x^m. Si ottiene così:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n\left(a + \frac{b}{x} + \ldots + \frac{c}{x^{n-1}} + \frac{d}{x^n}\right)}{x^m\left(a_1 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{c_1}{x^{m-1}} + \frac{d_1}{x^m}\right)}$$

b) A questo punto si tenga presente che $\lim_{x \to \infty} \frac{p}{x^q} = \frac{p}{\infty} = 0$. Quindi tutti gli addendi con x^q al denominatore, passando al limite, si annullano. Rimane da considerare, al limite, il rapporto $\frac{ax^n}{a_1x^m}$. Ebbene, il limite dipende dai valori di n ed m.

Possono capitare 3 casi:

1) se $n < m$: $\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n}{a_1x^m} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{a_1x^{m-n}} = \frac{a}{a_1 \cdot \infty} = 0$

2) se $n = m$: $\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a}{a_1}$ uguale al rapporto dei coefficienti di grado massimo;

3) se $n > m$: $\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^{n-m}}{a_1} = \frac{a \cdot \infty}{a_1} = \infty$

Ora quando è $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, si dice che $f(x)$ è un infinito per $x \to \infty$. Nel nostro caso:

$A(x)$ è un infinito di ordine n rispetto ad x. Infatti:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d}{x^n} = a$$

$B(x)$ è un infinito di ordine m rispetto ad x. Infatti:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{B(x)}{x^m} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_1x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + c_1x + d_1}{x^m} = a_1$$

Alla luce di tali considerazioni si conclude che il limite di un rapporto tra funzioni infinite:

è 0 se il numeratore è un infinito di ordine inferiore al denominatore;

è ∞ se il numeratore è un infinito di ordine superiore al denominatore;

è finito se il numeratore ed il denominatore sono infiniti dello stesso ordine. In questo ultimo caso il limite è dato dal rapporto dei coefficienti di grado massimo.

Esempi:

99. $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{x} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Infatti il numeratore è un infinito di ordine (3) inferiore al denominatore (4).

100. $$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5\left(4+\frac{7}{x}+\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)}{x^5\left(2+\frac{7}{x^5}\right)} = \frac{4+0+0}{2+0} = 2$$

Infatti il numeratore ed il denominatore sono infiniti dello stesso ordine.

101. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Infatti il numeratore è un infinito di ordine superiore al denominatore.

3.2.- Infinitesimi ed infiniti. Ordini

I concetti di funzione infinitesima o infinita introdotti al §3.1 sono importanti perché risultano molto efficaci nel calcolo di taluni limiti. Forniscono infatti a chi esegue il calcolo una chiara indicazione sul risultato. La loro applicazione è utile, non solo al calcolo del limite di funzioni razionali fratte, ma anche al calcolo del limite di funzioni irrazionali o trascendenti.

Generalizziamo allora estendendo il concetto a funzioni di tipo qualsivoglia.

Indicando con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni di tipo qualunque, $f(x)$ è infinitesima di ordine n rispetto ad $x-a$ (infinitesimo confronto ([1])) se:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = l_1 \neq 0 \quad \text{finito.}$$

Analogamente $g(x)$ è infinitesima di ordine m rispetto ad $x-a$ se:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = l_2 \neq 0 \quad \text{finito.}$$

Dovendo allora calcolare il $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ tale limite è:

∞	se	$n<m$	perché il numeratore è infinitesimo di ordine inferiore al denominatore;
0	se	$n>m$	perché il numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore;
$l=\frac{l_1}{l_2}$	se	$n=m$	perché il numeratore e il denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine.

([1]) L'infinitesimo di confronto è:

$x-a$	se	$x\to a$	finito e non nullo;
x	se	$x\to 0$	
$1/x$	se	$x\to\infty$	

Quanto è stato detto per le funzioni infinitesime si può ripetere per le funzioni infinite. Cioè: $f(x)$ è infinita di ordine n rispetto ad x (infinito di confronto ([1])) se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = l_1 \neq 0 \quad \text{finito.}$$

Analogamente $g(x)$ è infinita di ordine m rispetto ad x se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^m} = l_2 \neq 0 \quad \text{finito.}$$

Dovendo allora calcolare il $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, tale limite è:

0	se	$n<m$	perché il numeratore è un infinito di ordine inferiore al denominatore;
∞	se	$n>m$	perché il numeratore è un infinito di ordine superiore al denominatore;
$l=\frac{l_1}{l_2}$	se	$n=m$	perché numeratore e denominatore sono infiniti dello stesso ordine.

Per concludere, quando il limite di una funzione dà luogo ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, se ne può determinare il valore mediante un confronto, rispettivamente, tra infinitesimi o infiniti.

3.3.- Limiti di funzioni irrazionali ([2])

In base al tipo di funzione irrazionale, il limite può essere immediato o dare luogo a forme di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty-\infty$, ecc.

Esempi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \qquad \text{(cfr. es. 102)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2-2}} = \frac{0}{0} \qquad \text{(cfr. es. 103)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \qquad \text{(cfr. es. 107)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x+6}-x = +\infty-\infty \qquad \text{(cfr. es. 113)}$$

([1]) L'infinito di confronto è:

x	se	$x\to\infty$
$1/x$	se	$x\to 0$
$1/(x-a)$	se	$x\to a$

([2]) Prima di affrontare questo paragrafo si consiglia di consultare nella P.11, *Corso propedeutico di matematica*, il §1.6 per quanto riguarda le proprietà dei radicali e la loro razionalizzazione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} = \frac{+\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \qquad \text{(cfr. es. 108)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x^2+1} = 0\cdot(+\infty) \qquad \text{(cfr. es. 109)}$$

Tanto le funzioni razionali quanto le irrazionali che, al limite, danno luogo a forme indeterminate diverse dalle $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty-\infty$, si possono manipolare per ricondurle alle precedenti tre forme di indeterminazione. L'ultimo esempio, infatti si può scrivere:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{ricondotto quindi alla forma } \frac{\infty}{\infty}.$$

Fissiamo quindi l'attenzione, nel caso di limiti di funzioni irrazionali, sulle forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty-\infty$

Caso $\frac{0}{0}$ Si tratta sempre di eliminare l'indeterminazione cambiando la funzione in un'altra avente lo stesso limite. Tale scopo si può raggiungere in tre modi:

1) mediante razionalizzazione del numeratore, o del denominatore, o di entrambi
2) mediante opportune scomposizioni
3) mediante particolari artifici

Esempi.

102. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

1) Razionalizziamo il numeratore della funzione:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

Cosicché:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

2) Si può scomporre il denominatore considerandolo una differenza di quadrati. Cosicché:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

103. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{0}{0}$

Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore:

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(x+2-2x)\cdot\sqrt{x-2}}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})} =$$

$$= \frac{-(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})} = \frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}$$

Cosicché: $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to2}\frac{-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = \frac{0}{2+2} = 0$

104. $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} = \frac{-1+1}{-1+1} = \frac{0}{0}$

1) Razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

2) Scomponendo in fattori il denominatore, considerato come una somma di cubi (cfr. P.11, §1.5): $x+1 = (\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$ si ha:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}$$

105. $\lim_{x\to1}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{1+1-2}{(1-1)^2} = \frac{0}{0}$

1) Razionalizzando il numeratore: $\lim_{x\to1}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x+1)+2\sqrt{x}}{(x+1)+2\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x+1)^2-4x}{(x-1)^2(x+1+2\sqrt{x})} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1+2\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{1}{x+1+2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$$

2) Scomponendo in fattori numeratore e denominatore nel modo seguente:

$x+1-2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2$

$(x-1)^2 = [(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)]^2 = (\sqrt{x}+1)^2\cdot(\sqrt{x}-1)^2$

si ha:

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

106. $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}+x^2(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-4}} = \frac{0}{0}$

1) Conviene scomporre nel modo seguente: $\dfrac{\sqrt{x^2-4}+x^2(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-4}} =$

$$= \frac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}+x^2(\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x+2}+x^2\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

Cosicché:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}+x^2(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}+x^2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4}+4\cdot 0}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}+2} = [\text{razionalizzando il denominatore}] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}+2}\cdot\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{2(\sqrt{2}-2)}{2-4} = 2-\sqrt{2}$$

2) Si può raggiungere lo stesso risultato moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x-2}$:

$$\frac{\sqrt{x^2-4}+x^2(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-4}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{(x-2)\sqrt{x+2}+x^2(x-2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}\cdot(x-2)+(x-2)\sqrt{x+2}} =$$

$$= \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+x^2\sqrt{x-2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}+x^2(x-2)}{\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}+x^2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = \frac{2}{\sqrt{2}+2}$$

Con gli esempi considerati il caso $\dfrac{0}{0}$ non dovrebbe più presentare difficoltà, a meno che non si abbia scarsa familiarità con l'algebra elementare.

$\boxed{\text{Caso } \dfrac{\infty}{\infty}}$ Anche in questo caso si procede come per le funzioni razionali fratte, cioè l'indeterminazione viene eliminata, in generale, mettendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore, la potenza di x con esponente massimo. Occorre però porre l'attenzione sul fatto che:

1) Gli esponenti sono frazionari, si ricordi infatti che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

2) Portando fuori dalla radice di indice n (pari) una potenza di x, talvolta compare il modulo (1). Esempi:

$$\sqrt{x^2} = |x| \ , \ \sqrt{x^4} = x^2 \ , \ \sqrt[4]{x^6} = |x|\sqrt[4]{x^2}$$

3) Nel radicando (che è un polinomio razionale) per $x\to\infty$ può talvolta presentarsi la forma indeterminata $\infty-\infty$. In un caso come questo il limite è sempre infinito. Infatti:

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{x\to\infty} ax^n + bx^{n-1} + \dots + cx + d =$$

(1) Si veda a tale scopo, P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §1.6.

$$= \lim_{x\to\infty} x^n\left(a + \frac{b}{x} + \dots + \frac{c}{x^{n-1}} + \frac{d}{x^n}\right) = \infty\cdot(a+0+0+\dots) = \infty$$

Più precisamente:

$$x\to+\infty \begin{cases} A(x)\to+\infty \text{ per } \begin{cases} a>0 \\ n \text{ qualsiasi}\end{cases} \\ A(x)\to-\infty \text{ per } \begin{cases} a<0 \\ n \text{ qualsiasi}\end{cases}\end{cases} \qquad x\to-\infty \begin{cases} A(x)\to+\infty \text{ per } \begin{cases} a>0 \\ n \text{ pari}\end{cases} \\ A(x)\to+\infty \text{ per } \begin{cases} a<0 \\ n \text{ dispari}\end{cases} \\ A(x)\to-\infty \text{ per } \begin{cases} a>0 \\ n \text{ dispari}\end{cases} \\ A(x)\to-\infty \text{ per } \begin{cases} a<0 \\ n \text{ pari}\end{cases}\end{cases}$$

Per concludere: il limite per $x\to\infty$ di un polinomio razionale dà luogo ad una somma algebrica di infiniti di ordini diversi. Fra essi prevale quello di ordine massimo (potenza di x con esponente massimo). Pertanto nel calcolo si possono trascurare gli infiniti di ordine inferiore.

Esempi:

107. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Il limite è dato ancora dal rapporto dei coefficienti di grado massimo. Si può procedere anche trascurando gli infiniti di ordine inferiore ad 1 (1):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

108. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} = \frac{+\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Si osservi che il limite è infinito perché, per $x\to+\infty$, il numeratore è un infinito di ordine 1 e il denominatore è un infinito di ordine $1/2$ rispetto all'infinito di confronto x. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} =$$

(1) Nelle funzioni al numeratore e al denominatore ci sono due infiniti: x e $\sqrt{x}$, rispettivamente di ordini 1 e $1/2$. Si può allora trascurare quello di ordine inferiore ($1/2$).

$$= \frac{+\infty\cdot(3-0)}{\sqrt{4-0}+\sqrt{1+0}} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

109. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1} = 0\cdot(+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{\frac{x^6}{x^2}+3\frac{x^4}{x^2}+3\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[6]{x^4+3x^2+3+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

110. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

Si osservi che: il numeratore è un infinito di ordine 2 rispetto ad x (preso come principale); il denominatore è un infinito di ordine 2 rispetto ad x (preso come principale). Quindi il limite è certamente finito. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5-\sqrt{x^4\left(1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}}{x-1+\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5+x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{x-1+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}+\sqrt{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}\right)} = \frac{2+0+1}{0-0+1} = 3$$

$\boxed{\text{Caso } \infty - \infty}$ Questo caso si riconduce, con trasformazioni della funzione che non mutano il suo limite, al precedente $\frac{\infty}{\infty}$. Come? Dipende dal tipo di funzione. In generale, comunque, essa è della forma: $\sqrt[n]{A} \pm \sqrt[n]{B}$ con $A\to\infty$ (per $x\to\infty$) e $B\to\infty$ (per $x\to\infty$) entrambe razionali intere. Per eliminare l'indeterminazione ($\infty-\infty$) basta moltiplicare e dividere la funzione per:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mp 1)^{i+1}\cdot\sqrt[n]{A^{n-i}\cdot B^{i-1}} \qquad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, n \qquad [3.3.1]$$

Se per esempio si deve calcolare il:

111. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}) = +\infty-\infty$ il fattore razionalizzante è:

$$\sum_{i=1}^{3} (+1)^{i+1}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^{3-i}\cdot(2x)^{i-1}} = \sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)\cdot 2x}+\sqrt[3]{(2x)^2}$$

e quindi il limite diventa:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x})\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1-2x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-(x+1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2-\frac{2}{x}}+\sqrt[3]{4}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2-\frac{2}{x}}+\sqrt[3]{4}} = \frac{-\infty\cdot 1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = -\infty$$

112. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+\sqrt[4]{x^4+1}) = -\infty+\infty$

Per poter applicare la [3.3.1] è necessario ridurre gli addendi a radicali aventi lo stesso indice. Per questo si deve porre $x = -\sqrt[4]{x^4}$.
Il segno (−) scaturisce dal fatto che per $x\to-\infty$, il 1° membro tende a $-\infty$ e quindi, perché sussista l'eguaglianza, anche il 2° membro deve tendere a $-\infty$. Il fattore razionalizzante della funzione $-\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^4+1}$ è:

$$\sum_{i=1}^{4} (+1)^{i+1}\cdot\sqrt[4]{(x^4+1)^{4-i}\cdot(x^4)^{i-1}} = \sqrt[4]{(x^4+1)^3}+\sqrt[4]{(x^4+1)^2x^4}+$$
$$+\sqrt[4]{(x^4+1)x^8}+\sqrt[4]{x^{12}}$$

Cosicché il limite diventa:

$$\lim_{x\to-\infty} (x+\sqrt[4]{x^4+1})\cdot\frac{\sqrt[4]{(x^4+1)^3}+|x|\sqrt{x^4+1}+x^2\cdot\sqrt[4]{x^4+1}+|x^3|}{\sqrt[4]{(x^4+1)^3}+|x|\sqrt{x^4+1}+x^2\cdot\sqrt[4]{x^4+1}+|x^3|} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+1-x^4}{\sqrt[4]{(x^4+1)^3}-x\sqrt{(x^4+1)}+x^2\cdot\sqrt[4]{x^4+1}-x^3} =$$

$$= \frac{1}{+\infty+\infty+\infty+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

113. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5x+6}-x) = +\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+5x+6}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5x+6}+x}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+6-x^2}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+6}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Il limite è finito perché sia il numeratore che il denominatore sono infiniti di ordine 1 per $x\to\infty$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+x} = [^1] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} =$$

$$=\frac{5+0}{1+1}=\frac{5}{2}$$

114. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x+3}-x\right)=+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9x+3}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+9x+3}+x}{\sqrt{x^2+9x+3}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+9x+3-x^2}{\sqrt{x^2+9x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(9+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{9}{2}$$

115. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=[^1]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

(¹) Si ricordi che: $\sqrt{x^2}=|x|$. Per $\begin{cases} x\to+\infty & |x|=x \\ x\to-\infty & |x|=-x\end{cases}$

116. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{5x^4-3x+1}+2x+\sqrt[3]{x^2+1}}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{5x^4-3x+1}}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}}+1\right)=$

$=$ [poiché al denominatore $2x$ prevale su $\sqrt[3]{x^2+1}$] $=\frac{+\infty}{-\infty}+1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{|x|\sqrt[4]{5-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{2x+\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}+1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt[4]{5-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{2x+x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x\sqrt[4]{5-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{x\left(2+x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}\right)}+1\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt[4]{5-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{2+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}+1\right)=\frac{-\sqrt[4]{5}}{2}+1$$

Anziché ricorrere ad esponenti frazionari, l'espressione $\sqrt[3]{x^2+1}$ si poteva scrivere $\sqrt[3]{x^2+1}=\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=x\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}$. È meglio prendere, comunque, familiarità con entrambi i procedimenti.

Per quanto riguarda i limiti di funzioni irrazionali che danno luogo agli altri casi di indeterminazione elencati nella Tab. 2-VI, si cerca di ricondurli ai casi precedenti $\left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right)$. Indichiamo allora dei metodi generali validi per qualsiasi tipo di funzione, per mezzo dei quali ci si può ricondurre a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

3.4.- Come ricondurre le forme indeterminate alla $\frac{0}{0}$ o alla $\frac{\infty}{\infty}$

I metodi indicati sono in generale validi per qualunque tipo di funzione, ma è ovvio che in taluni casi può essere più conveniente un particolare artificio con il quale si raggiunge lo stesso scopo.

Per semplicità indicheremo con $f(x)$ e $g(x)$, o meglio con f e g, delle funzioni qualsiansi, algebriche o trascendenti.

1) Da $0\cdot\infty$ a $\frac{0}{0}$.

Sia: $\lim_{x\to c} f(x)=0$ $\lim_{x\to c} g(x)=\infty$. Si cerca il $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$.

Si può scrivere: $f\cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$. Quindi: $\lim\limits_{x\to c} f\cdot g = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f}{\frac{1}{g}} = \dfrac{0}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$

Esempio: $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x\cdot\log\frac{2x}{\pi} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\frac{2x}{\pi}}{\operatorname{ctg}x} = \frac{0}{0}$$

2) Da $0\cdot\infty$ a $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Sia: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$. Si cerca il $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$.

Si può scrivere: $f\cdot g = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$. Quindi: $\lim\limits_{x\to c} f\cdot g = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{g}{\frac{1}{f}} = \dfrac{\infty}{\frac{1}{0}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Esempio: $$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x = [0^+\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

Esempio: $$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = [(+\infty)\cdot 0^+] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

La forma $0\cdot\infty$ può essere quindi trasformata in $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$. Si sceglie l'una forma o l'altra a seconda che sia più facile calcolare il limite nella forma $\dfrac{0}{0}$ o nella forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3) Da $+\infty-\infty$ a $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Sia: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$. Si cerca il $\lim\limits_{x\to c}(f-g) = +\infty-\infty$.

Si può scrivere $f-g = \dfrac{\frac{f-g}{f\cdot g}}{\frac{1}{fg}} = \dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$. Quindi $\lim\limits_{x\to c}(f-g) = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} =$

$$= \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$$

Questo è il metodo generale, a meno che non si possa eseguire la differenza $f-g$, o la razionalizzazione nel caso di funzioni irrazionali. Esempio:

$$\lim_{x\to+0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right). \text{ Quindi: } \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\end{cases} \quad \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}-\frac{1}{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\frac{1}{x\operatorname{sen}x}}} = \frac{\operatorname{sen}x - x}{x\operatorname{sen}x}$$

Cosicché: $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x\operatorname{sen}x} = \frac{0^+-0^+}{0\cdot0} = \frac{0}{0}$$

Si può ottenere lo stesso limite effettuando la differenza: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}x} = \dfrac{\operatorname{sen}x - x}{x\operatorname{sen}x}$

Esempio: $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\right) = +\infty-\operatorname{ctg}0^+ = +\infty-(+\infty) = +\infty-\infty$$

$$\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{0-0}{\frac{0}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

Talvolta conviene porre $f(x)-g(x) = f\left(1-\dfrac{g}{f}\right) = g\left(\dfrac{f}{g}-1\right)$ ed esaminare il limite per $x\to c$ di $\dfrac{g}{f}\left(\text{o } \dfrac{f}{g}\right)$ che è della forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Risolta l'indeterminazione, tale limite può dare:

$$\lim_{x\to c}\frac{g}{f} = \begin{cases} l\neq 1 & \to \lim\limits_{x\to c}(f-g) = \infty(1-l) = \infty \\ 1 & \to \lim\limits_{x\to c}(f-g) = \infty(1-1) = \infty\cdot 0 \quad \text{(cfr. caso 2)} \\ \infty & \to \lim\limits_{x\to c}(f-g) = \infty(1-\infty) = \infty \end{cases}$$

4) Da 0^0, ∞^0, 1^∞ a $0\cdot\infty$.

Dalle forme indeterminate esponenziali si passa alla $0\cdot\infty$, in base alla applicazione di quanto detto nella nota di pag. 40, nella quale si è dimostrato che per $x>0$ e $b>0$ (e diverso da 1) si può scrivere l'identità: $x = b^{\log_b x}$. In generale quindi $z(x) = b^{\log_b z(x)}$ che per $b = e$ (base dei logaritmi naturali) diventa:

$$z(x) = e^{\log z(x)} \qquad [3.4.1]$$

Ognuna delle forme indeterminate esponenziali (0^0, ∞^0, 1^∞) scaturisce dal limite di una funzione $z(x)$ del tipo $[f(x)]^{g(x)}$, pertanto dalla [3.4.1] si ha:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\log[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)} \qquad [3.4.2]$$

a) Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0^+$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0^+ \to \lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{g(x)} = (0^+)^{0^+}$

Applicando la [3.4.2] il limite cercato si trasforma in:

$$\lim_{x\to c} f^g = \lim_{x\to c} e^{g\log f} = e^{0^+\cdot(-\infty)}$$

Si calcola allora il $\lim_{x\to c} g\log f = l$ (finito o infinito), cosicché è:

$$\lim_{x\to c} f^g = e^l$$

b) Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)} = (+\infty)^0$

Applicando la [3.4.2] il limite cercato si trasforma in:

$$\lim_{x\to c} f^g = \lim_{x\to c} e^{g\log f} = e^{0\cdot(+\infty)}$$

Si calcola allora il $\lim_{x\to c} g\log f = l$ (finito o infinito), cosicché è:

$$\lim_{x\to c} f^g = e^l$$

c) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty$

Applicando la [3.4.2] il limite cercato si trasforma in:

$$\lim_{x\to c} f^g = \lim_{x\to c} e^{g\log f} = e^{\infty\cdot\log 1} = e^{\infty\cdot 0}$$

Si calcola il $\lim_{x\to c} g\log f = l$ (finito o infinito), cosicché è:

$$\lim_{x\to c} f^g = e^l$$

5) Dalle forme indeterminate logaritmiche alla $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$.

Le cinque forme indeterminate logaritmiche (cfr. Tab. 2-VI) si riconducono facilmente alla $\frac{\infty}{\infty}$ (le prime quattro) o alla $\frac{0}{0}$ (la quinta) ricordando la formula (cfr. P.11, [1.14.6]):

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \qquad [3.4.3]$$

che muta la base di un logaritmo da *a* ad *e* (base dei logaritmi naturali). Cosicché:

a) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} \log_f g = \log_{0^+}(+\infty)$

Applicando la [3.4.3] il limite cercato si trasforma in:

$$\lim_{x\to c} \log_f g = \lim_{x\to c} \frac{\log g}{\log f} = \frac{\log(+\infty)}{\log(0^+)} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

b) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0^+$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} \log_f g = \log_{0^+}(0^+)$

Applicando la [3.4.3] il limite cercato si trasforma in:

$$\lim_{x\to c} \log_f g = \lim_{x\to c} \frac{\log g}{\log f} = \frac{\log(0^+)}{\log(0^+)} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

c) Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 0^+$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} \log_f g = \log_{+\infty}(0^+)$

Applicando la [3.4.3] il limite cercato si trasforma in:

$$\lim_{x\to c} \log_f g = \lim_{x\to c} \frac{\log g}{\log f} = \frac{\log(0^+)}{\log(+\infty)} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

d) Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} \log_f g = \log_{+\infty}(+\infty)$

Applicando la [3.4.3] il limite cercato diventa:

$$\lim_{x\to c} \log_f g = \lim_{x\to c} \frac{\log g}{\log f} = \frac{\log(+\infty)}{\log(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

e) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to c} g(x) = 1$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to c} \log_f g = \log_1 1$

Applicando la [3.4.3] il limite cercato diventa:

$$\lim_{x\to c} \log_f g = \lim_{x\to c} \frac{\log g}{\log f} = \frac{\log 1}{\log 1} = \frac{0}{0}$$

3.5.- Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti di funzioni razionali ed irrazionali.

117. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 10x + 4}$

118. $\lim_{x\to +\infty} (x^2 - 5x - 6)$

119. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x}$

120. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2 + x - 2}{4x^2 + x - 1}$

121. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1}$

122. $\lim_{x\to \infty} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$

123. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - \sqrt{3}\cdot x + 1}{\sqrt{2}\cdot x^2 + \sqrt{5}\cdot x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})}$

124. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[8]{x^8 + 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt[5]{1 + x^5} + \sqrt[3]{1 + x^3}}$

125. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 + x - 2}$

126. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{x - 2}$

127. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{1 + x})$

128. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 2}}$

129. $\lim_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{2x^2 - 5x + 3})$

130. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

131. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{1 - x^2}}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$

132. $\lim_{x\to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{5x - 1}}$

133. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

134. $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x - \sqrt{x}}{x + 3\sqrt{x}}$

135. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 2}{\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x} + 1}$

Trasformare le forme indeterminate cui danno luogo i seguenti limiti nelle forme $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$.

136. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}$

137. $\lim_{x \to 0} x \operatorname{ctg}^2 x$

138. $\lim_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

139. $\lim_{x \to +\infty} x^2 \log \cos \frac{1}{x}$

140. $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

141. $\lim_{x \to 0^+} (\log x - \log \operatorname{sen} 2x)$

142. $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x - 1} \right)$

143. $\lim_{x \to +\infty} \left[x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

144. $\lim_{x \to 0^+} x^x$

145. $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

146. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

147. $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

148. $\lim_{x \to 2^-} (4 - x^2)^{2 - x}$

149. $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{x^3}}$

150. $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Soluzioni degli esercizi proposti

117. $$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 10x + 4} = \frac{18 - 9 - 9}{27 - 30 + 4} = \frac{0}{1} = 0$$

118. $$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 6) = +\infty - \infty$$

È una forma indeterminata, ma poiché x^2 è un infinito di ordine (2) superiore a $-5x$ (di ordine 1), prevale $+\infty$. Infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

119. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

Il limite è $+\infty$, dato che il numeratore è un infinito del 2° ordine e il denominatore è un infinito del 1° ordine. Infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= +\infty \cdot 1 = +\infty$$

120. $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x - 2}{4x^2 + x - 1} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Essendo numeratore e denominatore dello stesso ordine, il limite è $\frac{3}{4}$, eguale al rapporto tra i coefficienti dei monomi di grado massimo. Infatti:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + x - 2}{4x^2 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3 + 0 - 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}$$

121. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Il numeratore è un infinito di ordine superiore al denominatore, quindi il limite è ∞. Infatti:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty \cdot 1}{1} = \infty$$

122. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Il numeratore è un infinito di ordine inferiore al denominatore, quindi il limite è zero. Infatti:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\infty \cdot 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

123. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{3} \cdot x + 1}{\sqrt{2} \cdot x^2 + \sqrt{5} \cdot x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{1 - \sqrt{3} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - (\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{0} = \infty$$

124. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[8]{x^8 + 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt[5]{1 + x^5} + \sqrt[3]{1 + x^3}} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty + \infty}$$

Numeratore e denominatore sono infiniti dello stesso ordine, quindi il limite è finito. Infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x^8}} + |x| \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^4}}}{x \sqrt[5]{\frac{1}{x^5} + 1} + x \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt[8]{1 + \frac{1}{x^8}} + \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^4}}\right)}{x\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x^5} + 1} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + 1}\right)} =$$

$$= \frac{1 + 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

125. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 + x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Il numeratore è un infinito di ordine inferiore al denominatore, quindi il limite è zero. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{0^+}{+\infty}=0^+$$

Oppure:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x^{2-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{+\infty(1+0-0)}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

126. $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2}=\frac{0}{0}$

a) Razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{-(2-x)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{-(\sqrt{2}+\sqrt{x})}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

b) Scomponendo il denominatore:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to2}\frac{-(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{4}$$

127. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})=+\infty\cdot(+\infty-\infty)$

Trasformiamo la forma indeterminata $(+\infty-\infty)$ razionalizzando la funzione:

$$\sqrt{x}-\sqrt{1+x}=(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\frac{x-1-x}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

O più semplicemente:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x+x^2})=+\infty-\infty$$

Razionalizzando:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x+x^2})\cdot\frac{x+\sqrt{x+x^2}}{x+\sqrt{x+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{x+\sqrt{x+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+1}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

128. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-2}}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\left(-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}}=\frac{2}{1}=2$$

129. $\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{2x^2-5x+3})=-\infty(+\infty-\infty)$ [cfr. es. 127]

$$(\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{2x^2-5x+3})\cdot\frac{\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{2x^2-5x+3}}{\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{2x^2-5x+3}}=$$

$$=\frac{x^2-5x+6-2x^2+5x-3}{\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{2x^2-5x+3}}=\frac{-x^2+3}{\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{2x^2-5x+3}}$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{2x^2-5x+3}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+3x}{\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{2x^2-5x+3}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} - x\sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} + \sqrt{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{+\infty\cdot 1}{1+\sqrt{2}} = +\infty$$

Se si vuole effettuare il prodotto bisogna ricordare che per $x \to -\infty$ è $x = -\sqrt{x^2}$ e quindi il limite da calcolare diventa:

$$\lim_{x\to-\infty} -\left(\sqrt{x^4-5x^3+6x^2} - \sqrt{2x^4-5x^3+3x^2}\right)$$ indi si passa alla razionalizzazione

130. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$

Razionalizzando il numeratore:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

131. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-1}}{\sqrt[3]{1-1}} = \frac{0}{0}$

Scomponendo i radicandi:

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{\sqrt[3]{1+1}}{\sqrt[3]{1+1+1}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

O più rapidamente:

$$\lim_{x\to1} \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1-x^3}} = \lim_{x\to1} \sqrt[3]{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}} = \lim_{x\to1} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1+x+x^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

132. $\lim_{x\to2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} = \frac{4-4}{3-3} = \frac{0}{0}$

Razionalizzando il denominatore:

$$\lim_{x\to2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{3+\sqrt{5x-1}}{3+\sqrt{5x-1}} = \lim_{x\to2} \frac{(2-x)(2+x)(3+\sqrt{5x-1})}{9-5x+1} =$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(2-x)(2+x)(3+\sqrt{5x-1})}{5(2-x)} = \frac{(2+2)(3+3)}{5} = \frac{24}{5}$$

133. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2} = \frac{0}{0}$

Razionalizzando numeratore e denominatore:

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x+1-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+3-4)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{4}+2}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{4}{2\cdot2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

134. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Al numeratore prevale x su $\sqrt{x}$. Essendo numeratore e denominatore infiniti dello stesso ordine (1), il limite è finito. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3\sqrt{x}}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{\sqrt{x}}} = \frac{5}{1} = 5$$

135. $\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-2}{\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x}+1} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty-\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$ [Al denominatore prevale $\frac{5}{x^2}$ su $\frac{3}{x}$]

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x^2}(3+2x-2x^2)}{\frac{1}{x^2}(5-3x+x^2)} = \frac{3}{5}$$

Oppure, effettuando le somme al numeratore ed al denominatore:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{3+2x-2x^2}{5-3x+x^2} = \frac{3+0-0}{5-0+0} = \frac{3}{5}$$

136. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^{0^+}$

Si trasformi la forma indeterminata ∞^0 come è indicato al §3.4, 4-b:

$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log x}$ Si calcolerà quindi il $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

137. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{ctg}^2 x = 0\cdot\infty$ (cfr. §3.4, 1, 2)

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\dfrac{1}{\text{ctg}^2 x}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\text{tg}^2 x} = \dfrac{0}{0}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{ctg}^2 x}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

c) $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \lim\limits_{x\to0}\cos^2 x\cdot\dfrac{x}{\text{sen}^2 x} = 1\cdot\dfrac{0}{0}=\dfrac{0}{0}$

138. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,\text{tg}\dfrac{\pi x}{2} = (1-1)\,\text{tg}\dfrac{\pi}{2} = 0\cdot\infty$ (cfr. §3.4, 1, 2)

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{\text{ctg}\dfrac{\pi x}{2}} = \dfrac{0}{0}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$

c) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\dfrac{\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}} = \dfrac{0}{0}\cdot1=\dfrac{0}{0}$

139. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\log\cos\dfrac{1}{x} = +\infty\cdot\log\cos0 = +\infty\cdot0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{0}$ (cfr. §3.4, 1)

140. $\lim\limits_{x\to0^+}\text{tg}\,x\cdot e^{\frac{1}{x}} = (0^+)\cdot e^{\frac{1}{0^+}} = (0^+)\cdot(+\infty)$ (cfr. §3.4, 1, 2)

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\text{ctg}\,x} = \dfrac{e^{\frac{1}{0^+}}}{\text{ctg}\,0^+} = \dfrac{e^{+\infty}}{+\infty} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\text{tg}\,x}{e^{-\frac{1}{x}}} = \dfrac{\text{tg}\,0^+}{e^{-\frac{1}{0^+}}} = \dfrac{0^+}{e^{-\infty}} = \dfrac{0^+}{0^+}$

141. $\lim\limits_{x\to0^+}(\log x - \log\text{sen}\,2x) = -\infty-(-\infty) = -\infty+\infty$ (cfr. §3.4, 3)

Per una nota proprietà dei logaritmi (cfr. P.11, §1.14) si può scrivere:

$\lim\limits_{x\to0^+}\log\dfrac{x}{\text{sen}\,2x}$. Si calcolerà quindi il $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\text{sen}\,2x} = \dfrac{0}{0}$

142. $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{\log1^-} - \dfrac{1}{1^- -1} = \dfrac{1}{0^-}-\dfrac{1}{0^-} = -\infty+\infty$ (cfr. §3.4, 3)

Effettuando la differenza $\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-\log x}{(x-1)\cdot\log x}$ il limite diventa della forma $\dfrac{0}{0}$.

143. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right] = +\infty-\infty\cdot\log1 = \infty-\infty\cdot0$

Il limite diventa della forma $\dfrac{0}{0}$ con le trasformazioni:

$$x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = x^2\left[\frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

144. $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = (0^+)^{0^+} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\log x}$ (cfr. §3.4, 4-a)

Si cerca il $\lim\limits_{x\to0^+} x\log x = (0^+)\cdot(-\infty) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$

145. $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{(1-x)}} = 1^{\frac{1}{(1-1)}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^\infty = \lim\limits_{x\to1} e^{\frac{\log x}{(1-x)}}$ (cfr. §3.4, 4-c)

Si cerca il $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\log x}{1-x} = \dfrac{0}{0}$

146. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{tg}\,x} = (+\infty)^{0^+} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\text{tg}\,x\log\frac{1}{x}}$ (cfr. §3.4, 4-b)

Si cerca il $\lim\limits_{x\to0^+}\text{tg}\,x\cdot\log\dfrac{1}{x} = (0^+)(+\infty) = \lim\limits_{x\to0^+}\text{tg}\,x\cdot(-\log x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\log x}{\text{ctg}\,x} =$

$$= \frac{-(-\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

147. $\lim\limits_{x\to0^+}(\text{sen}\,x)^{\text{tg}\,x} = (0^+)^{0^+}$ (cfr. §3.4, 4-a)

$\lim\limits_{x\to0^+}(\text{sen}\,x)^{\text{tg}\,x} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\text{tg}\,x\cdot\log\text{sen}\,x}$

Si cerca il $\lim\limits_{x\to0^+}\text{tg}\,x\cdot\log\text{sen}\,x = (0^+)(-\infty) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\log\text{sen}\,x}{\text{ctg}\,x} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$

148. $\lim\limits_{x\to2^-}(4-x^2)^{2-x} = (4-4^-)^{2-2^-} = (0^+)^{0^+}$ (cfr. §3.4, 4-a)

$$\lim_{x \to 2^-} (4 - x^2)^{2-x} = \lim_{x \to 2^-} e^{(2-x)\log(4-x^2)}$$

Si cerca il $\displaystyle \lim_{x \to 2^-} (2 - x)\log(4 - x^2) = (0^+)(-\infty) = \lim_{x \to 2^-} \frac{\log(4 - x^2)}{\frac{1}{(2 - x)}} = \frac{-\infty}{+\infty}$

149. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{x^3}} = 1^{+\infty}$ (cfr. §3.4, 4-c)

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x^3}\log(1 + \operatorname{sen}^2 x)}$$

Si cerca il $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3}\log(1 + \operatorname{sen}^2 x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + \operatorname{sen}^2 x)}{x^3} = \frac{0}{0}$

150. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (+\infty)^{0^+}$ (cfr. §3.4, 4-b)

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Si cerca il $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$

4 - LIMITI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE [1]

4.1. - Considerazioni generali

Per il calcolo dei limiti di funzioni goniometriche non viene aggiunto molto a quanto detto nei paragrafi precedenti relativamente ai limiti di funzioni razionali fratte o irrazionali. Il principio di calcolo infatti è sempre quello di sostituire c al posto di x nella funzione goniometrica $f(x)$ e calcolare $f(c)$.

Può allora succedere che:

a) Il limite è immediato.
b) Il limite non esiste.
c) Il limite dà luogo ad una delle forme indeterminate elencate nella TAB. 2-VI.

a) Il limite è immediato. Esempi:

151. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \operatorname{cosec} x = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{0} = \infty$

152. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen} 0 = 0$

153. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{x} = \frac{1 \cdot 0}{\frac{\pi}{2}} = 0$

154. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{2 - x}{\operatorname{sen}(1 - x)} = \frac{2 - 1}{\operatorname{sen} 0} = \frac{1}{0} = \infty$

155. $\displaystyle \lim_{x \to \pi^+} \operatorname{ctg} x \cdot (1 - \operatorname{sen} x) = +\infty(1 - \operatorname{sen}\pi) = +\infty(1 - 0) = +\infty$

156. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left[6\operatorname{sen} x - \log\left(\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4}}\right)\right] = 6 \cdot \frac{1}{2} - \log\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}\right) =$

$$= 3 - \log\frac{1}{2} = 3 + \log 2$$

157. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x} \cdot \cos x = e^{\frac{1}{4}(-\infty)} \cdot 0^- = \frac{1}{e^{+\infty}} \cdot 0^- = (0^+)0^- = 0^-$

158. $\displaystyle \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^+} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x} \cdot \cos x = e^{\frac{1}{4}(-\infty)} \cdot 0^+ = (0^+)0^+ = 0^+$

159. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} e^{\operatorname{sen} x} \cdot |\operatorname{sen} x| = e^{0^+} \cdot \operatorname{sen} 0^+ = (1^+)0^+ = 0^+$

---

[1] Il calcolo dei limiti di dette funzioni richiede la completa conoscenza delle funzioni goniometriche, delle loro variazioni e delle relazioni tra esse (cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica*, cap. 4). Molto utili sono i grafici riportati nella P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, a pag. 34.

160. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\operatorname{sen} x}\cdot|\operatorname{sen} x| = e^{0^-}(-\operatorname{sen} 0^-) = 1\cdot(-0^-) = 1\cdot 0^+ = 0^+$

161. $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} [-e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\cdot(\operatorname{sen} x + 1)] = -e^{0^-}\cdot 1^-(0^- + 1) = -1^-\cdot 1^-\cdot 1^- = -1^+$

162. $\lim\limits_{x\to -2\pi^+} e^{\operatorname{sen} x}\cdot\operatorname{sen}|x| = e^{0^+}\cdot\operatorname{sen}|-2\pi^+| = 1^+\cdot 0^+ = 0^+$

b) Il limite non esiste. Esempio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x$$

Dimostriamo che questo limite non esiste.
La funzione $y = \operatorname{sen} x$ è definita per ogni x, ed ha periodo 2π. Osserviamo che per:

$x = k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ essa vale 0

$x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ essa vale 1

$x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ essa vale -1

Ciò detto, consideriamo un intorno di $+\infty$, ad esempio tutti gli $x > N$ (numero positivo grande): qualunque sia N, per $x > N$ la $y = \operatorname{sen} x$ assume valori oscillanti tra -1 ed 1. Quindi, ammesso per assurdo che esista il

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = l$$

scelto un $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, la differenza $|\operatorname{sen} x - l|$ non potrebbe essere sempre minore di ϵ per $x > N$. Infatti essa diventa:

$|-1-l|$ quando $\operatorname{sen} x = -1$

$|-l|$ quando $\operatorname{sen} x = 0$

$|1-l|$ quando $\operatorname{sen} x = 1$

È sufficiente allora considerare un ϵ minore del più piccolo dei tre valori considerati per concludere che esistono casi in cui $|\operatorname{sen} x - l| > \epsilon$ per $x > N$.

Con analogo ragionamento si può affermare che non esistono i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cos x \qquad \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

La dimostrazione relativa a quest'ultimo limite può essere ricondotta al precedente ponendo $\frac{1}{x} = y$ con $y\to\infty$ per $x\to 0$. Si ha così: $\lim\limits_{y\to\infty} \operatorname{sen} y$ che non esiste. D'altra parte, se si esaminasse il grafico della $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ in un intorno dello zero (destro o sinistro), si troverebbe che esso è oscillante tra -1 ed 1, comunque piccolo sia l'intorno (cfr. fig. 4.1.1).

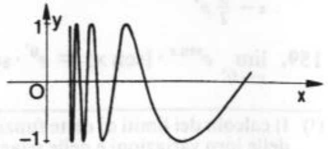


Fig. 4.1.1

Altri limiti inesistenti che si possono dedurre dai precedenti sono:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos x} \qquad \lim_{x\to\infty}\operatorname{tg} x \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x}{x} \qquad \text{ecc.}$$

c) Il limite dà luogo ad una delle forme indeterminate della TAB. 2-VI. Esempi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x - a} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x}\cdot\cos x = e^{\frac{1}{4}(+\infty)}\cdot 0^+ = (+\infty)(0^+)$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x}\cdot\cos x = e^{\frac{1}{4}(+\infty)}\cdot 0^- = (+\infty)(0^-)$$

In casi come questi, o si elimina l'indeterminazione, e per questo indichiamo due metodi, o, quando è possibile, si ricorre a considerazioni su infinitesimi o infiniti.

4.2. - Due metodi di risoluzione delle forme indeterminate

1° METODO

Ove è possibile, mediante opportune trasformazioni che non cambiano il limite della funzione $f(x)$, si trasforma la funzione stessa nel prodotto di due funzioni, in modo che il limite cercato diventi:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^n\cdot g(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x\to 0} g(x) \quad \text{immediato.}$$

Così facendo la forma indeterminata (qualunque essa sia) compare nel $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ che per x in radianti, si dimostra essere uguale ad 1.

Dimostriamo allora che nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e con x misurato in radianti è:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

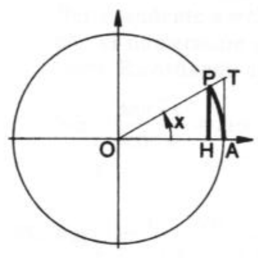


Fig. 4.2.2

Se x è misurato in radianti è:

$$\measuredangle(AP) = x < \frac{1}{2}\pi$$

Dalla fig. 4.2.2, ove la circonferenza è quella goniometrica, cioè di raggio unitario, si ha:

$$HP < \measuredangle(AP) < AT \qquad [4.2.1]$$

Essendo $HP = \text{sen}\,x$ $\quad \measuredangle(AP) = x \quad$ $AT = \text{tg}\,x$ $\quad$ la [4.2.2] diventa:

$$\text{sen}\,x < x < \text{tg}\,x \qquad [4.2.2]$$

Ambo i membri della [4.2.2] possono essere divisi per $\text{sen}\,x$ senza cambiare il senso delle disequazioni dato che per $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ è $\text{sen}\,x > 0$. Si ottiene così:

$$\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} < \frac{x}{\text{sen}\,x} < \frac{\text{tg}\,x}{\text{sen}\,x} \rightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen}\,x} < \frac{1}{\cos x} \qquad [4.2.3]$$

Nell'intervallo considerato, che costituisce un intorno destro dello zero, la [4.2.3] è sempre verificata. Essendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$, cioè $\frac{1}{\cos x} - 1 < \epsilon$ per definizione (cfr. TAB. 2-III, 2), e sottraendo 1 da ciascun membro della [4.2.3], si ha:

$$0 < \frac{x}{\text{sen}\,x} - 1 < \frac{1}{\cos x} - 1 \qquad [4.2.4]$$

Si può allora scrivere che, a maggior ragione, $\frac{x}{\text{sen}\,x} - 1 < \epsilon$. Tale espressione conferma che $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\text{sen}\,x} = 1$ sicché anche $\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\,x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\text{sen}\,x}} = \frac{1}{1} = 1$

Con analogo procedimento, considerando l'intervallo $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$ facendo attenzione ai sensi delle disequazioni, si può dimostrare che $\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$.

Quindi in definitiva: $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

Si osservi che se con x indichiamo l'angolo espresso in gradi anziché l'arco, la misura di quest'ultimo sarà:

$$x \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

Di conseguenza:

la [4.2.2] diventa: $\quad \text{sen}\,x < x \cdot \frac{\pi}{180^\circ} < \text{tg}\,x$

la [4.2.3] diventa: $\quad \frac{180^\circ}{\pi} < \frac{x}{\text{sen}\,x} < \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos x}$

la [4.2.4] diventa: $\quad 0 < \frac{x}{\text{sen}\,x} - \frac{180^\circ}{\pi} < \frac{180^\circ}{\pi}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) < \epsilon$

e pertanto: $\frac{x}{\text{sen}\,x} - \frac{180^\circ}{\pi} < \epsilon$, cioè $\lim_{x\to (0^\circ)^+} \frac{x}{\text{sen}\,x} = \frac{180^\circ}{\pi}$

Similmente per $x \to (0^\circ)^-$.

In definitiva: $\quad \lim_{x\to 0^\circ} \frac{\text{sen}\,x}{x} = \lim_{x\to 0^\circ} \frac{1}{\frac{x}{\text{sen}\,x}} = \frac{1}{\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{\pi}{180^\circ}$

Esempi:

163. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

164. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\,x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

2° METODO

Qualora il 1° metodo non sia applicabile, o ne sia poco evidente l'applicabilità, si tenta di modificare la funzione mediante le identità trigonometriche fondamentali (cfr. P.11, §4.5). Queste, trasformando somme in prodotti (prostaferesi), prodotti in somme (Werner), archi doppi in semplici (duplicazione), semiarchi in archi semplici (bisezione), ecc., potranno eventualmente permettere delle semplificazioni che eliminino l'indeterminazione. L'identità da adoperare viene, volta per volta, suggerita dal particolare limite. Esempi:

165. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\text{tg}\,x}{1-\text{ctg}\,x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

Basta notare che x tende a $\pi/4$ (e non a zero) per dedurre che questo limite non è facilmente riconducibile al 1° metodo. Allora, come eliminare l'indeterminazione? La trasformazione più evidente è:

$$\frac{1-\text{tg}\,x}{1-\text{ctg}\,x} = \frac{1-\text{tg}\,x}{1-\left(\frac{1}{\text{tg}\,x}\right)} = \frac{\text{tg}\,x(1-\text{tg}\,x)}{\text{tg}\,x - 1} = -\text{tg}\,x$$

Pertanto: $\quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\text{tg}\,x}{1-\text{ctg}\,x} = -\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \text{tg}\,x = -1$

166. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\,2x}{\cos x} = \frac{0}{0}$

Per x tendente a $\pi/2$ si annulla $\cos x$ (oltre che $\text{sen}\,2x$). Bisogna, quindi fare in modo che al numeratore compaia un $\cos x$ come fattore (oppure un $\text{sen}\,2x$ al denominatore). Ricordando che $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cos x$, si ha:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\,2x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\,\text{sen}\,x \cos x}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} 2\,\text{sen}\,x = 2 \cdot 1 = 2$$

167. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\text{sen}\,x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$

Trasformando il numeratore mediante le formule di prostaferesi (cfr. P.11, §4.5, [4.5.23]) si elimina l'indeterminazione. Infatti:

$$1 - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2} =$$

$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = 2\cdot 0 = 0$$

Vediamo adesso alcuni esempi relativi ad entrambi i metodi.

168. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

Questo limite viene ricondotto al fondamentale ponendo:

$3x = y \quad \to \quad x = \frac{y}{3} \quad$ con $\quad y \to 0 \quad$ per $\quad x \to 0$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{\frac{y}{3}} = 3\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 3\cdot 1 = 3$$

In generale allora: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\cdot m = m$

169. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$

In generale allora: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^n x}{x^n} = 1^n = 1$

170. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} 5\cdot\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\frac{1}{2} =$

$$= 5\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

In generale allora: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} qx} = \lim_{x\to 0} p\cdot\frac{\operatorname{sen} px}{px}\cdot\frac{qx}{\operatorname{sen} qx}\cdot\frac{1}{q} = \frac{p}{q}$

171. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

Contrariamente a quanto fatto nell'es. 164, si può ricondurre il limite al limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ mediante le formule di bisezione (cfr. P.11, [4.5.29]). Infatti si ha: $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

172. $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)}{x-a} = \frac{0}{0}$

Per ricondurci al limite fondamentale trasformiamo in prodotto con le formule di prostaferesi (cfr. P.11, [4.5.23]) la differenza $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a$ che dà lo zero al numeratore:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)\right] =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)\right] =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a)\right]$$

Posto $x - a = y$, con $y \to 0$ per $x \to a$, il limite diventa:

$$\lim_{y\to 0}\left\{\frac{\operatorname{sen}\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\cdot\cos\frac{y+2a}{2}\cdot[\operatorname{sen}(y+a) + \operatorname{sen} a]\right\} = 1\cdot\cos a\cdot 2\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} 2a$$

I due esempi considerati fanno intendere che per il calcolo dei limiti di funzioni goniometriche che danno luogo a forme indeterminare, i principi di guida sono:

1) il limite fondamentale e quelli da esso dedotti (163, 168, 169, 170, 171);

2) opportune trasformazioni.

Per quanto riguarda il secondo punto, la vastissima gamma dei limiti non permette di indicare un metodo per associare una particolare trasformazione ad un particolare limite. Si può solo consigliare di tenere sempre presente che le formule da applicare hanno come scopo di trasformare la funzione, sia al numeratore che al denominatore, in modo da ridurre la frazione ai minimi termini e contemporaneamente eliminare l'indeterminazione. Per esempio:

173. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+\operatorname{sen} x}{1-\cos x-\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{0}$

Si possono seguire strade diverse. Ci si deve però rendere conto che per $x \to 0$ è il seno (o la tangente) a diventare zero e non il coseno (o la cotangente). Quindi bisogna trasformare in modo da ottenere come fattore, sia al numeratore che al denominatore, un seno (o una tangente). Ricordando allora che:

$1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$ (bisezione: P.11, [4.5.29])

$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}$ (duplicazione: P.11, [4.5.9])

sostituendo si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x}{1-\cos x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Se si vuole la tangente come fattore al numeratore e al denominatore, si usino le formule parametriche (cfr. P.11, [4.5.10], [4.5.11]):

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{1+t^2-1+t^2+2t}{1+t^2-1+t^2-2t} = \lim_{t\to 0}\frac{2t(t+1)}{2t(t-1)} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t+1}{t-1} = -1$$

174. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\operatorname{sen} 2x-\operatorname{sen} 2c}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} c} = \dfrac{0}{0}$

Per $x \to c$ diventano nulle le funzioni: $\operatorname{sen}(x-c)$ e $\operatorname{tg}(x-c)$. Bisogna fare in modo, quindi, che una tale funzione compaia come fattore sia al numeratore che al denominatore. A tale scopo si applicano al numeratore e al denominatore le formule di prostaferesi (cfr. P.11, [4.5.23], [4.5.27]). Si ha:

$$\lim_{x\to c}\frac{\operatorname{sen} 2x-\operatorname{sen} 2c}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} c} = \lim_{x\to c}\left[\frac{2\operatorname{sen}(x-c)\cos(x+c)}{\operatorname{sen}(x-c)}\cdot\cos x\cos c\right] =$$

$$= \lim_{x\to c}\left[2\cos(x+c)\cos x\cos c\right] = 2\cos 2c\cdot\cos c\cdot\cos c = 2\cos 2c\cdot\cos^2 c$$

4.3. - Calcolo del limite per confronto tra infinitesimi o infiniti.

Infine c'è da tenere presente che considerazioni sugli ordini di infinitesimo (o infinito) permettono di conoscere il risultato di alcuni limiti, indipendentemente dal calcolo, il che può costituire, talvolta, un'indicazione per il calcolo stesso.

Sappiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

ciò vuol dire che $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$ sono infinitesimi di ordine uno rispetto ad x (infinitesimo di confronto). Sicché è ovvio che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^n x}{x^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n>m \\ 1 & \text{per } n=m \\ \infty & \text{per } n<m \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^n x}{x^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n>m \\ 1 & \text{per } n=m \\ \infty & \text{per } n<m \end{cases} \quad [1]$$

Poiché $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ ciò vuol dire che la funzione $1-\cos x$ è un infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x. Sicché è ovvio che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^n}{(x^2)^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n>m \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } n=m \\ \infty & \text{per } n<m \end{cases} \quad [1]$$

Esempi.

175. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{1-\cos x} = 0$

Infatti $\operatorname{sen}^4 x$ è un infinitesimo del 4° ordine rispetto ad x:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} = 1$ (cfr. 169); $1-\cos x$ è un infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (cfr. 171). Quindi il numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore.

176. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^2} = l$ (finito).

Infatti: $\operatorname{sen}^4 x$ è un infinitesimo del 4° ordine rispetto ad x:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} = 1$; $(1-\cos x)^2$ è un infinitesimo di 4° ordine rispetto ad x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{(x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Quindi: $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^4 x}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4}}{\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{\dfrac{1}{4}} = 4$$

[1] Cfr. §3.2.

177. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^4 x}{(1-\cos x)^3} = \infty$

Infatti: $\text{sen}^4 x$ è un infinitesimo del 4° ordine rispetto ad x; $(1-\cos x)^3$ è un infinitesimo del 6° ordine rispetto ad x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{x^6} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Quindi il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.

178. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\text{tg}\, x} = 0$

Infatti: $1-\cos$ è un infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x; $\text{tg}\, x$ è un infinitesimo del 1° ordine rispetto a x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = 1$$

Quindi il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore.

179. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\text{tg}^2 x} = \dfrac{1}{2}$

Infatti: $1-\cos x$ è infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x; $\text{tg}^2 x$ è infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}^2 x}{x^2} = 1$

$$\text{Quindi:} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\text{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}}{\dfrac{\text{tg}^2 x}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

180. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\text{tg}^5 x} = \infty$

Infatti:

$(1-\cos x)^2$ è un infinitesimo del 4° ordine rispetto ad x: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{x^4} = \dfrac{1}{4}$;

$\text{tg}^5 x$ è un infinitesimo del 5° ordine rispetto ad x: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}^5 x}{x^5} = 1$

Quindi il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.

Gli esercizi potevano essere risolti in altro modo. Ad esempio il 180:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\text{tg}^5 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\text{tg}^5 x} \cdot \frac{(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^4 x}{\text{tg}^5 x \cdot (1+\cos x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^5 x}{\text{sen}^5 x} \frac{\text{sen}^4 x}{(1+\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^5 x}{\text{sen}\, x(1+\cos x)^2} = \frac{1}{0\cdot 4} = \infty$$

ma sono stati risolti con considerazioni sugli infinitesimi perché in altri casi è difficile trovare strade diverse.

Tali considerazioni sono utili non solo per trovare il risultato, ma sostituiscono il calcolo effettivo. Se allo studente viene proposto un esercizio che egli vuole risolvere in tal modo, faccia le dovute considerazioni sugli infinitesimi (o infiniti), indi scriva il risultato che così è ben giustificato.

4.4 - Esercizi proposti

181. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x^2}$

182. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 2x}{x}$

183. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x}{x}$

184. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, 2x}$

185. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 2x}{x\cos x}$

186. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{sen}\, x}{x}$

187. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{sen}\, x}{x+\text{sen}\, x}$

188. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+\text{tg}\, x}{\text{sen}\, x+\text{tg}^2 x}$

189. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2\,\text{sen}\, x\cdot(1-\text{sen}\, x)}{3\cos^2 x}$

190. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\,\text{sen}\, x\cos x}$

191. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x\cdot \text{sen}\, \frac{x}{2}}{1-\cos x}$

192. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

193. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\text{sen}\, x}{1+\cos x-2\cos^2 x}$

194. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x+\cos x-1}{x}$

195. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\text{tg}\, x-\text{sen}\, x}$

196. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\text{sen}\, x)^2}{\cos x}$

197. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x+\alpha)-\text{sen}\,\alpha}{x}$

198. $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}$

199. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen}\, x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)}$

200. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\log x-\log\text{sen}\, 2x)$

201. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3\,\text{sen}^2 x+\text{sen}\, x-4}{x-\frac{\pi}{2}}$

202. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen}\, x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

203. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{ctg}^2 x$

204. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \text{tg}\, x\cdot(1-\text{sen}\, x)$

205. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (1-\text{tg}\, x)\,\text{tg}\, 2x$

206. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\text{sen}\, x}{2x-\text{sen}\, x}$

207. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot r^2\,\text{tg}\,\dfrac{\pi}{x}$

Soluzioni degli esercizi proposti

181. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = 1 \cdot \dfrac{1}{0} = \infty$

Il numeratore, infatti, è un infinitesimo di ordine (1) inferiore al denominatore.

182. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

Altro metodo meno immediato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \cos x = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

183. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$

184. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{3 \operatorname{sen} 3x}{3x}}{\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x}} = \dfrac{3}{2}$

185. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x \cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} 2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{1} = 2$

Oppure:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$$

186. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1 - 1 = 0$

187. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

188. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg}^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(3 + \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)}{\operatorname{sen} x\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{3 + \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} =$

$$= 1 \cdot \frac{3+1}{1+0} = 4$$

189. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2 \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}{3 \cos^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2 \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}{3(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} =$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2 \operatorname{sen} x}{3(1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \cdot 1}{3(1+1)} = \frac{1}{3}$$

190. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{sen} x \cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \operatorname{sen} x \cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$$

191. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{1 - \cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 \cos x \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}}{2 \cos x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos \dfrac{x}{2}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Oppure:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{x^2}}{\dfrac{1 - \cos x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{2 \cdot \dfrac{x}{2}}}{\dfrac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{1 \cdot \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 1$$

192. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = [\text{bisezione}] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{2 \cdot \dfrac{x}{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Oppure:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

193. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos x-2\cos^2 x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Può essere ricondotto ai limiti fondamentali:

$$\frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos x-2\cos^2 x} = \frac{x^2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x+\cos x-2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{\dfrac{\cos x(1-\cos x)}{x^2}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{\cos x \cdot \dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} = \frac{1}{1\cdot\dfrac{1}{2}+1} = \frac{1}{\dfrac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Se questo tipo di risoluzione è difficile da vedere, si può procedere in altro modo. Scomponiamo in fattori il denominatore:

$$-2\cos^2 x+\cos x+1 = -2(\cos x-1)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right) = (1-\cos x)(2\cos x+1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)(2\cos x+1)}$$

A questo punto, o ci si riconduce ancora ai limiti fondamentali, o si cerca di ottenere $\operatorname{sen} x$ come fattore al denominatore.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{(1-\cos x)(2\cos x+1)} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x\cdot(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x(2\cos x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}(2\cos x+1)} = \frac{1+1}{1\cdot(2+1)} = \frac{2}{3}$$

194. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x-1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}-\dfrac{(1-\cos x)}{x}\right] = 1-0 = 1$

Infatti: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ perchè il numeratore è infinitesimo del 2° ordine ed il denominatore del 1° ordine.

195. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3\cos x}{\operatorname{sen} x(1-\cos x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\,\dfrac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{1\cdot\dfrac{1}{2}} = 2$$

196. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Poichè $\cos\dfrac{1}{2}\pi = 0$ bisogna tentare di ottenere $\cos x$ al numeratore:

$$\frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos x} = \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos x}\cdot\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos^4 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}$$

Sicchè: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^4 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{1+\operatorname{sen} x} = \dfrac{0}{1+1} = 0$

Oppure, se si vuole semplificare $(1-\operatorname{sen} x)$ è sufficiente procedere così:

$$\frac{(1-\operatorname{sen} x)^2}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{(1-\operatorname{sen} x)^2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{(1-\operatorname{sen} x)\cdot\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$$

il cui limite è zero.

197. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+\alpha)-\operatorname{sen}\alpha}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Essendoci x al denominatore, bisogna tentare di ottenere $\operatorname{sen} x$ come fattore al numeratore, così ci si riconduce al limite fondamentale. Applichiamo a tale scopo le formule di prostaferesi (cfr. P.11, [4.5.24]):

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{x+\alpha-\alpha}{2}\cos\dfrac{x+\alpha+\alpha}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x+2\alpha}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x+2\alpha}{2} = 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$$

198. $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Essendoci $x-\alpha$ al denominatore, bisogna tentare di ottenere $\operatorname{sen}(x-\alpha)$ come fattore al numeratore. Applichiamo, a tale scopo, le formule di prostaferesi.

$$\lim_{x\to \alpha} \frac{-2\operatorname{sen}\dfrac{x+\alpha}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}{x-\alpha} = \lim_{x\to \alpha}\left[-\operatorname{sen}\frac{x+\alpha}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}}{\dfrac{x-\alpha}{2}}\right] =$$

$$= -\operatorname{sen}\alpha\cdot 1 = -\operatorname{sen}\alpha$$

199. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x\left(\cos\dfrac{x}{2}-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Per $x \to \pi/2$ si annullano $1 - \operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Bisogna allora scomporre in modo che lo stesso fattore compaia sia al numeratore che al denominatore:

$$\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{(1-\operatorname{sen} x)\left(\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{\cos x\left(\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)} = [\text{duplicazione, cfr. P.11, [4.5.11]}] =$$

$$= \frac{(1-\operatorname{sen} x)\left(\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos x} \cdot \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x\left(\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\left(\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

200. $\lim_{x\to 0^+} (\log x - \log\operatorname{sen} 2x) = (-\infty+\infty) = \lim_{x\to 0^+} \log\frac{x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\frac{1}{2}\right) =$

$= \left[\text{essendo } \log\frac{b}{a} = -\log\frac{a}{b}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(-\log\frac{2\operatorname{sen} 2x}{2x}\right) = -\log(2\cdot 1) = -\log 2$

201. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 4}{x-\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Posto $x - \frac{\pi}{2} = y \quad\to\quad x = \frac{\pi}{2} + y$ con $y \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$ il limite diventa:

$$\lim_{y\to 0} \frac{3\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-4}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{3\cos^2 y+\cos y-4}{y} =$$

$$= [\text{scomponendo il numeratore}] = \lim_{y\to 0}\frac{-(1-\cos y)}{y}(3\cos y+4) = 0\cdot(3\cdot 1+4) = 0$$

Infatti $1 - \cos y$ è infinitesimo del 2° ordine rispetto ad y.

202. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Posto $x - \frac{\pi}{2} = y \quad\to\quad x = \frac{\pi}{2} + y$ con $y \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$ il limite diventa:

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$$

203. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg}^2 x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \left(1\cdot\frac{1}{0}\right) = \infty$

204. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x(1-\operatorname{sen} x) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)}{\cos x}$

Poiché è il coseno che si annulla quando $x \to \pi/2$ cerchiamo di ottenere il coseno al numeratore. A tale scopo moltiplichiamo e dividiamo per $1 + \operatorname{sen} x$:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen} x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1\cdot 0}{1+1} = 0$$

205. $\lim_{x\to\pi/4} (1-\operatorname{tg} x)\operatorname{tg} 2x = (0\cdot\infty)$

Si ha che:

$$(1-\operatorname{tg} x)\operatorname{tg} 2x = \left(1-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\cdot\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{(\cos x-\operatorname{sen} x)(\cos x+\operatorname{sen} x)} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x+\operatorname{sen} x}$$

Sicchè:

$$\lim_{x\to\pi/4}(1-\operatorname{tg} x)\operatorname{tg} 2x = \lim_{x\to\pi/4}\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x+\operatorname{sen} x} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Oppure, essendo $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)}$ si ha:

$$\lim_{x\to\pi/4}(1-\operatorname{tg} x)\cdot\frac{2\operatorname{tg} x}{(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{2}{1+1} = 1$$

206. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{2x-\operatorname{sen} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(2-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}$

Poiché è: $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ (cfr. es. 29), si ha: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{2x-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$

207. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot r^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = (+\infty\cdot 0) = \lim\limits_{x\to+\infty} r^2\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} r^2\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\cdot\pi$

Posto $\frac{\pi}{x} = y$ con $y\to 0^+$ per $x\to+\infty$ il limite diventa:

$$\lim_{y\to 0^+} \pi r^2\cdot\frac{\operatorname{tg} y}{y} = \pi r^2\cdot 1 = \pi r^2$$

Si osservi che, per x intero, questo limite fornisce la soluzione del problema posto nell'introduzione di questa pubblicazione.

5 - REGOLA DI DE L'HOSPITAL

5.1 - Condizioni di applicabilità

Quando il limite da calcolare si riduce alla forma $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, si può ricorrere ad un altro metodo di calcolo: la regola di *de l'Hospital*. Tale regola si può esprimere con l'uguaglianza:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (^1) \qquad [5.1.1]$$

valida quando sono verificate le seguenti ipotesi:

a) $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

b) Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in un intorno di $x = c$ (al più escluso $x = c$)

c) Nell'intorno di $x = c$ sia sempre $g'(x) \neq 0$

d) Esista il limite del rapporto delle derivate.

Se poi il $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ assume ancora la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, allora, con analoghe ipotesi su $f'(x)$, $g'(x)$ e $g''(x)$ (oppure su $f''(x)$, $g''(x)$ e $g'''(x)$ ecc.), la regola di de l'Hospital può essere così espressa:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots \qquad [5.1.2]$$

Dopo aver premesso che questa regola è applicabile anche alle altre forme indeterminate (TAB. 2-VI) dopo averle ricondotte a $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ poniamo l'attenzione sull'ipotesi d). Infatti può succedere che il limite delle derivate non esista pur esistendo il limite del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$. Proviamo questa affermazione con un esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{1-\cos x} = \frac{0\cdot l}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{con} \quad -1\leqslant l\leqslant 1$$

Questo limite esiste, infatti, calcolato con i metodi già noti è:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos\frac{1}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{0\cdot l}{\frac{1}{2}} = 0$$

(1) Per tutto quanto riguarda la derivata di una funzione cfr. P.5 *Derivate - Esercizi*.

Mentre, applicando la regola dell'Hospital, non è possibile calcolarlo in quanto viene a mancare l'ipotesi d). Infatti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos\frac{1}{x}+\left[-\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)x^3\right]}{\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos\frac{1}{x}+x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(3x\cos\frac{1}{x}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos\frac{1}{x}+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$$

La funzione al denominatore ha limite 1. Per la funzione al numeratore è:

$$\lim_{x\to 0}3x\cos\frac{1}{x}=0\cdot l=0 \qquad \lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\quad \text{non esiste (cfr. §4.1, b)}$$

Non esistendo il limite del numeratore, non esiste quello del rapporto delle derivate. Si ricordi quindi che quando il limite del rapporto delle derivate non esiste, non vuol dire che non esiste quello del rapporto delle due funzioni. In casi come questo, il limite va calcolato senza l'ausilio della regola dell'Hospital.

Applichiamo la regola dell'Hospital ad alcuni limiti già calcolati.

208. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{1}=+\infty$ (cfr. 119)

209. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-2}{4x^2+x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{8x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ (cfr. 120)

210. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (cfr. 126)

211. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x\sqrt{x+1}}=$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (cfr. 133)

212. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\frac{-1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to\pi/4}(-\operatorname{tg}^2 x)=-1$ (cfr. 165)

213. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x\cos^3 x}{2\operatorname{sen}x}=$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cos^3 x=\frac{1}{2}$ (cfr. 179)

214. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1-\operatorname{sen}x)^2}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2(1-\operatorname{sen}x)\cos x}{-\operatorname{sen}x}=$

$\displaystyle=\frac{-2\cdot 0\cdot 0}{-1}=0$ (cfr. 196)

215. $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\operatorname{ctg}^2 x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\operatorname{tg}x\,\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x}{2\operatorname{sen}x}=$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty$ (cfr. 203)

5.2.- Interpretazione geometrica della regola di de l'Hospital

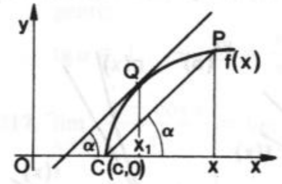


Fig. 5.2.1

Consideriamo la funzione $y=f(x)$ tale che:

$$\lim_{x\to c}f(x)=0 \qquad \text{(fig. 5.2.1)}$$

Consideriamo un punto P di ascissa generica x ed ordinata $f(x)$; se si vuole il parametro angolare della retta per C e P, esso è: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=\dfrac{f(x)}{x-c}$ essendo $f(c)=0$ per ipotesi. Tale parametro angolare è lo stesso di quello della retta tangente in Q alla $f(x)$ e parallela alla retta per C e P. Ed essendo, per definizione geometrica di derivata, $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_1)$, ne segue:

$$\frac{f(x)}{x-c}=f'(x_1) \qquad [5.2.1]$$

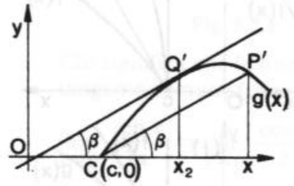


Fig. 5.2.2

Lo stesso ragionamento si può fare per un'altra funzione $y=g(x)$ e tale che:

$$\lim_{x\to c}g(x)=0 \qquad \text{(fig. 5.2.2)}$$

Cioè:

$$\frac{g(x)}{x-c}=g'(x_2) \qquad [5.2.2]$$

Si osservi che in generale è $x_1\neq x_2$ ma per $x\to c$ sia x_1 che x_2 tendono a C e le due rette tangenti, in Q e Q', tendono alle tangenti in C, rispettivamente, alla funzione $f(x)$ e alla $g(x)$. Osservato ciò effettuiamo il rapporto membro a membro delle [5.2.1] e [5.2.2]. Si ottiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad [5.2.3]$$

A tale scopo è necessario che in tutto l'intorno di c escluso al più $x = c$ sia $g'(x_2) \neq 0$ altrimenti la [5.2.3] perderebbe di significato (questo giustifica l'ipotesi c del §5.1). Se si volesse, pertanto, conoscere il valore del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ per x tendente a c, dato che tale rapporto è indeterminato $\left(\frac{0}{0}\right)$ ci si può rivolgere al rapporto delle derivate in base alla [5.2.3]. Per cui:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

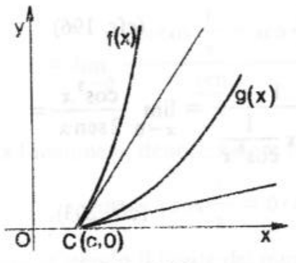


Fig. 5.2.3

Cioè: il limite del rapporto al primo membro si identifica, nell'ipotesi che $\frac{f'(c)}{g'(c)} = l$ (finito o indefinito), col rapporto dei parametri angolari delle rette tangenti in C alla $f(x)$ ed alla $g(x)$ (fig. 5.2.3).

L'ipotesi che sia $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finito o indefinito) è necessaria perchè il caso contrario è quello che dà, come risultato del limite, una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$. In ognuno di questi due casi si ripeterà il ragionamento fatto sulle due funzioni $f'(x)$ e $g'(x)$ e si chiameranno in causa la $f''(x)$ e la $g''(x)$; ecc.

Sia allo scopo di riepilogare, sia per meglio mettere in evidenza quanto può avvenire, facciamo riferimento ai seguenti diagrammi cartesiani. Quando le rette tangenti in C alle curve $f(x)$ e $g(x)$ sono quelle della fig. 5.2.4 vuol dire che:

a) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{l_1}{l_2} = l$

b) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{l} = 0$

c) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{\infty} = 0$

d) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{l}{\infty} = 0$

Se le rette tangenti in $x = c$ alle $f(x)$ e $g(x)$ coincidono entrambe con l'asse x come in fig. 5.2.4 vuol dire che:

e) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$

Allora si opera sulla $f'(x)$ e sulla $g'(x)$ come indicato nel teorema dell'Hospital, calcolando cioè le derivate seconde

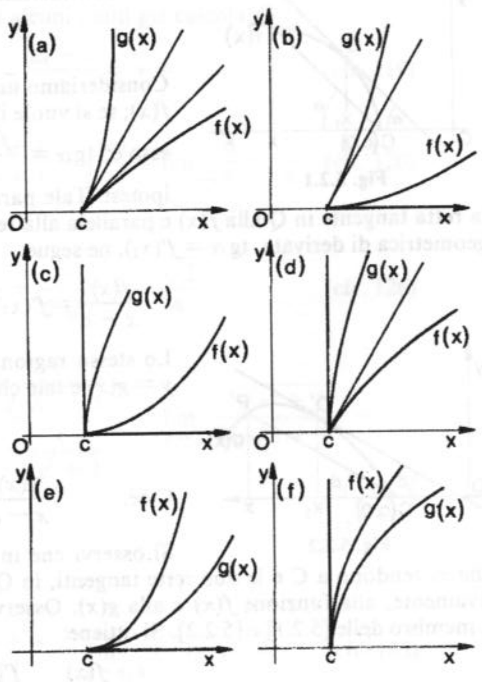


Fig. 5.2.4

ed esaminando il $\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Se le rette tangenti in $x = c$ alle $f(x)$ e $g(x)$ coincidono entrambe con una retta parallela all'asse y come in fig. 5.2.4-f), vuol dire che:

f) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Allora si opera sulla $f'(x)$ e sulla $g'(x)$ come indicato dal teorema dell'Hospital, calcolando cioè le derivate seconde ed esaminando il $\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Se si dovessero verificare i casi e) e f) per il $\lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ si procede con le derivate terze; ecc.

Esempi:

216. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Evidentemente le due curve $y = \operatorname{sen} x$ ed $y = x$ (fig. 5.2.5) hanno in O la stessa tangente:

$\operatorname{tg}\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ (caso a).

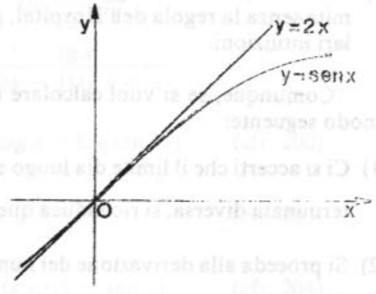


Fig. 5.2.5

217. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

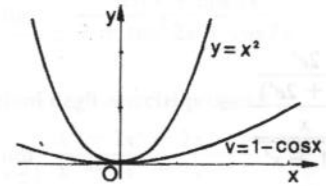


Fig. 5.2.6

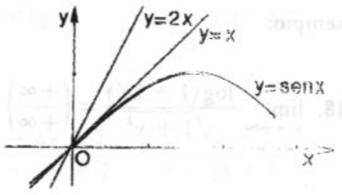


Fig. 5.2.7

Ciò significa che le due curve $y = 1 - \cos x$ e $y = x^2$ (fig. 5.2.6) hanno l'asse x come tangente comune (caso e). Si ricorre alle derivate seconde:

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

Ciò significa che le due curve $y = \operatorname{sen} x$ ed $y = 2x$ hanno nell'origine tangenti diverse, con parametri angolari finiti (caso a), come mostra la fig. 5.2.7.

5.3. - Considerazioni sulla regola di de l'Hospital

Alla luce dei §§5.1 e 5.2, lo studente potrebbe pensare che il lavoro svolto nei capitoli precedenti è pressoché inutile, perchè la regola dell'Hospital, magnifica regola, dà la possibilità di calcolare quasi tutti i limiti risolti finora, senza eccessiva fatica. Si può rispondere nel seguente modo:

a) La regola dell'Hospital talvolta, come visto nel §5.1, dà luogo a limiti inesistenti e potrebbe indurre in errore.

b) È una regola che presuppone la conoscenza della derivata di qualunque funzione, e la oculata sistemazione del rapporto $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ al fine di rendersi conto se il limite di tale rapporto esiste oppure è ancora della forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

c) All'esame, al fine di saggiare l'intuito dello studente, può essere chiesto di calcolare il limite senza la regola dell'Hospital, per l'applicazione della quale non occorrono particolari intuizioni.

Comunque, se si vuol calcolare un limite con la regola dell'Hospital, si proceda nel modo seguente:

1) Ci si accerti che il limite dia luogo alla forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Se dà luogo ad una forma indeterminata diversa, si riconduca questa nel migliore dei modi, a $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ (cfr. §3.4).

2) Si proceda alla derivazione del numeratore e del denominatore.

3) Si sistemi il rapporto, operando le eventuali semplificazioni, in modo che il limite della funzione così ottenuta o è immediato o dà luogo ancora alla forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

4) In quest'ultimo caso si ripetono le operazioni 2) e 3); e così via.

Esempio:

218. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2e^x}{(1+2e^x)}}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{1+2e^x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Non ci sono semplificazioni, ed inoltre il limite sembra essersi complicato. Ma ci si renda conto che adesso si può fare quello che non si poteva fare prima: cioè ricorrere ai metodi dei paragrafi precedenti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{1+2e^x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x\left(\dfrac{1}{e^x}+2\right)}\cdot\frac{x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\dfrac{1}{e^x}+2}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)=1$$

Questo esempio mostra che i metodi precedenti sono indispensabili anche quando si calcola un limite con la regola dell'Hospital.

5.4. - Esercizi proposti

Calcolare mediante la regola di de l'Hospital i seguenti limiti.

219. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-7x^2+7x-1}$

220. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-1}$

221. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{tg}\,3x}{5x}$

222. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}+x^2}{\mathrm{tg}\,x}$

223. $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}\frac{|x^3-1|-2x^2-1}{\sqrt{2+x}}$

224. $\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{\mathrm{sen}\,\pi x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

225. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xe^x}{1-\cos x}$

226. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\mathrm{sen}\,x+\cos 2x}{1+\mathrm{sen}^2 2x+\cos 2x}$

227. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,px-px}{\mathrm{tg}\,qx-qx}$

228. $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$

229. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{(2x-1)\,\mathrm{tg}\,x+x}$

230. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(\log x-\log\mathrm{sen}\,2x)$ (cfr. 200)

231. $\displaystyle\lim_{x\to0}x\,\mathrm{ctg}^2 x$ (cfr. 203)

232. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\mathrm{tg}\,x\cdot(1-\mathrm{sen}\,x)$ (cfr. 204)

233. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+\mathrm{sen}\,x}{2x-\mathrm{sen}\,x}$ (cfr. 206)

234. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\cdot r^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{x}$ (cfr. 207)

Soluzioni degli esercizi proposti

219. $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^3-7x^2+7x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+2}{3x^2-14x+7}=\frac{3-4+2}{3-14+7}=-\frac{1}{4}$$

220. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3}{2\sqrt{x}}+2}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

221. $$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{tg}\,3x}{5x}=\left(\frac{0^+}{0^+}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}{5}=\frac{3}{5}$$

222. $$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}+x^2}{\mathrm{tg}\,x}=\left(\frac{0^+}{0^+}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}+2x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=+\infty$$

223. $$\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^3-1|-2x^2-1}{\sqrt{2+x}} = \lim_{x\to-2^+}\frac{-(x^3-1)-2x^2-1}{\sqrt{2+x}} = \lim_{x\to-2^+}\frac{-x^3-2x^2}{\sqrt{2+x}} =$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to-2^+} \frac{-3x^2-4x}{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}} = \frac{-3\cdot4-4\cdot(-2)}{\frac{1}{0^+}} = \frac{-4}{+\infty} = 0^-$$

224. $$\lim_{x\to-1^-}\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \left(\frac{0^+}{0^+}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to-1^-}\frac{\pi\cos\pi x}{\frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}} = \left[\frac{\pi(-1)}{\frac{2(-1)}{3\cdot0^+}} = \frac{-\pi}{-\infty}\right] = 0^+$$

225. $$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot e^x}{1-\cos x} = \left(\frac00\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x}{\operatorname{sen}x} = \left(\frac10\right)=\infty$$

226. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x+\cos2x}{1+\operatorname{sen}^2 2x+\cos2x} = \left(\frac{1-1}{1+0-1}=\frac00\right) \overset{H}{\to}$$
$$\overset{H}{\to}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x - 2\operatorname{sen}2x}{4\operatorname{sen}2x\cos2x - 2\operatorname{sen}2x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x - 4\operatorname{sen}x\cos x}{8\operatorname{sen}x\cos x\cos2x - 4\operatorname{sen}x\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-4\operatorname{sen}x}{8\operatorname{sen}x\cos2x-4\operatorname{sen}x} = \frac{1-4}{-8-4}=\frac14$$

227. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}px - px}{\operatorname{tg}qx-qx} = \left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0}\frac{\frac{p}{\cos^2px}-p}{\frac{q}{\cos^2qx}-q}=$$
$$=\frac pq\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2px}{\cos^2px}\cdot\frac{\cos^2qx}{1-\cos^2qx} = \frac pq\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos^2qx}{\cos^2px}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2px}{1-\cos^2qx}=$$
$$=\frac pq\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2px}{1-\cos^2qx}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\frac pq\cdot\lim_{x\to0}\frac{2p\operatorname{sen}px\cdot\cos px}{2q\operatorname{sen}qx\cdot\cos qx}=$$
$$=\frac{p^2}{q^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos px}{\cos qx}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}px}{\operatorname{sen}qx}=\left(\frac{p^2}{q^2}\cdot1\cdot\frac00=\frac00\right)\overset{H}{\to}\frac{p^2}{q^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{p\cos px}{q\cos qx}=\frac{p^3}{q^3}$$

228. $$\lim_{x\to1^+}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x-1}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to1^+}\frac{\cos\sqrt{x-1}\,\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{-\frac\pi2\operatorname{sen}\frac{\pi x}2}=$$
$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\cos\sqrt{x-1}}{-\pi\sqrt{x-1}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{1}{-\pi\cdot(0^+)\cdot1}\right]=-\infty$$

229. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{(2x-1)\operatorname{tg}x+x}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{2\operatorname{tg}x+(2x-1)\frac{1}{\cos^2x}+1}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2\operatorname{sen}x\cos x+2x-1+\cos^2x}=\left(\frac{1}{0+0-1+1}=\frac10\right)=\infty$$

230. $$\lim_{x\to0^+}(\log x-\log\operatorname{sen}2x)=(-\infty+\infty)=\lim_{x\to0^+}\log\frac{x}{\operatorname{sen}2x}=\log\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\operatorname{sen}2x}\overset{H}{\to}$$
$$\overset{H}{\to}\log\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\cos2x}=\log\frac12=-\log2$$

231. $$\lim_{x\to0}x\operatorname{ctg}^2x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{tg}^2x}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0}\frac{1}{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)}=\left(\frac10\right)=\infty$$

232. $$\lim_{x\to\pi/2}\operatorname{tg}x\cdot(1-\operatorname{sen}x)=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}x)}{\cos x}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}$$
$$\overset{H}{\to}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x(1-\operatorname{sen}x)-\operatorname{sen}x\cos x}{-\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x-\operatorname{sen}2x}{-\operatorname{sen}x}=\frac{0}{-1}=0$$

233. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{2x-\operatorname{sen}x}=\left(\frac\infty\infty\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{2-\cos x}$$

Poichè per $x\to\infty$ non esiste il limite di $\cos x$, l'applicazione della regola dell'Hospital porterebbe alla conclusione errata che il limite cercato non esiste. Invece, come già si è visto, il limite esiste ed è stato calcolato (cfr. es. 206).

234. $$\lim_{x\to+\infty}x\cdot r^2\operatorname{tg}\frac\pi x=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to+\infty}r^2\frac{\operatorname{tg}\frac\pi x}{\frac1x}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}$$
$$\overset{H}{\to}r^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\pi}{x^2}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac\pi x\right)}{-\frac{1}{x^2}}=r^2\cdot\pi\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac\pi x\right)=\pi r^2(1+0)=\pi r^2$$

6 - LIMITI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

6.1.- Considerazioni generali

Le sei funzioni goniometriche inverse ([1]) sono funzioni continue. Ciò vuol dire (cfr. 1° caso del §2.10) che qualunque sia il valore dato alla x (naturalmente nell'insieme di esistenza di ognuna delle funzioni), la funzione è reale e definita. Il calcolo, pertanto, del limite di una delle sei funzioni per x tendente ad un valore del proprio insieme di esistenza è immediato.

Esempi:

235. $\lim\limits_{x\to -1^+} \operatorname{arcsen} x = -\dfrac{\pi}{2}$ **237.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{3}$

236. $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$ **238.** $\lim\limits_{x\to -2} \operatorname{arcsec} x = \dfrac{2}{3}\pi$

La difficoltà può nascere quando, sostituito il valore di x, si deve trovare il valore della funzione, visto che con le circolari inverse non si ha tanta familiarità quanta con le circolari dirette ($\operatorname{sen} x$, $\cos x$, ecc.). Allora si consiglia allo studente di riportare il calcolo alla corrispondente funzione circolare diretta. Per esempio, nel caso del 235, occorre conoscere il valore dell'arcsen (-1^+). Lo studente si ponga la domanda: qual è l'arco (o l'angolo) il cui seno è -1? E si dia la risposta: siccome l'arco il cui seno è -1 è $-\pi/2$, si ha:

$$\operatorname{arcsen}(-1^+) = -\frac{\pi}{2}$$

Cioè risolva (a mente) l'equazione $\operatorname{sen} z = -1 \;\rightarrow\; z = -\pi/2$ (escludendo i valori che non interessano).

Stesso ragionamento per il 236. Domanda: qual è l'arco la cui tangente è $-\infty$? Risposta: $\operatorname{tg} z = -\infty$ per $z = -\pi/2$ (escludendo i valori che non interessano).

Ancora allo stesso modo si procede per gli esempi 237 e 238.

6.2.- Calcolo di limiti

È naturale che, quando si deve calcolare il limite di una funzione nella quale qualche addendo (o fattore) è una funzione circolare inversa, o esso è immediato, o dà luogo ad una forma indeterminata.

Vediamo alcuni esempi di limiti immediati.

239. $$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{arcsen} x - \log(1-x)}{x-1} = \left[\frac{\dfrac{\pi}{2} - (-\infty)}{0^-} = \frac{+\infty}{0^-}\right] = -\infty$$

([1]) Per quanto riguarda le funzioni inverse in generale e le inverse delle circolari in particolare, le relazioni e le eventuali trasformazioni fra le inverse delle circolari, cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §§3.3, 3.4.

240. $$\lim_{x\to 1/2} \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \arccos x}{\operatorname{arcsen} x + 2\log(2x+1)} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\dfrac{1}{2}}{\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2} + 2\log(1+1)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{\pi}{6} + 2\log 2} = \frac{2\pi}{\pi + 12\log 2}$$

241. $$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{x^{-2}+1}}\right) = \left(1 + \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{\infty}}\right) = 1 + 0^+ = 1^+$$

242. $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}\right] = \left(+\infty + \operatorname{arcsen} 1 = +\infty + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$

Ma come comportarsi nei casi in cui vengono fuori delle forme indeterminate come ad esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \frac{0}{0}\,;\; \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{0}{0}\,;\; \lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x} = \frac{0}{0}\,;\; \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen} x - x} = \frac{0}{0}$$

visto che per le funzioni circolari inverse non si hanno tante trasformazioni da fare? Per una ristretta gamma di tali limiti, si può ricorrere alle considerazioni sugli infinitesimi (o infiniti). Per altri si deve ricorrere a nuovi metodi di calcolo: la regola di de l'Hospital oppure lo sviluppo in serie di Taylor (Mac Laurin). Si potrebbe, ad esempio, procedere così per il calcolo dei seguenti limiti:

243. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$ Posto $\operatorname{arcsen} x = y \;\rightarrow\; x = \operatorname{sen} y$ con $y\to 0$ per $x\to 0$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1 \quad \text{(cfr. §4.2)}$$

244. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ Posto $\operatorname{arctg} x = y \;\rightarrow\; x = \operatorname{tg} y$ con $y\to 0$ per $x\to 0$ si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1 \quad \text{(cfr. es. 163)}$$

245. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\arccos x)^2}{1-x}$ Posto $\arccos x = y \;\rightarrow\; x = \cos y$ con $y\to 0$ per $x\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-\cos y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{1-\cos y}{y^2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2 \quad \text{(cfr. es. 164)}$$

Vediamo allora a quali importanti considerazioni conducono gli esercizi 243, 244 e 245.

a) Il fatto che $\lim_{x \to 0} \frac{\text{arc sen } x}{x} = 1$ ci dice che arc sen x è un infinitesimo del primo ordine rispetto ad x (infinitesimo di confronto). Quindi con considerazioni sugli infinitesimi si possono giustificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc sen } px)^n}{qx^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \text{ (a1)} \quad \text{Il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore.} \\ \frac{p^m}{q} & \text{per } n = m \text{ (a2)} \quad \text{Numeratore e denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine.} \\ \infty & \text{per } n < m \text{ (a3)} \quad \text{Il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.} \end{cases}$$

Esempio:

246. $\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc sen } 5x)^3}{4x^3} = \frac{125}{4}$ (a2).

Posto $\text{arc sen } 5x = y \;\to\; x = \frac{1}{5} \text{sen } y$ con $y \to 0$ per $x \to 0$ si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc sen } 5x)^3}{4x^3} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3}{\frac{4}{125} \text{sen}^3 y} = \frac{125}{4}$$

b) Il fatto che $\lim_{x \to 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = 1$ ci dice che arc tg x è un infinitesimo del 1° ordine rispetto ad x (infinitesimo di confronto). Quindi, con considerazioni sugli infinitesimi, si possono giustificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc tg} px)^n}{qx^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \text{ (b1)} \quad \text{Il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore.} \\ \frac{p^m}{q} & \text{per } n = m \text{ (b2)} \quad \text{Numeratore e denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine.} \\ \infty & \text{per } n < m \text{ (b3)} \quad \text{Il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.} \end{cases}$$

Esempio:

247. $\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc tg } 3x)^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$ (b2)

Posto $\text{arc tg } 3x = y \;\to\; x = \frac{1}{3} \text{tg } y$ con $y \to 0$ per $x \to 0$, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc tg } 3x)^2}{2x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{2 \frac{1}{9} \text{tg}^2 y} = \frac{9}{2}$$

c) Il fatto che $\lim_{x \to 1} \frac{(\text{arc cos } x)^2}{1 - x} = 2$ ci dice che (arc cos x) è un infinitesimo del 1° ordine

rispetto all'infinitesimo $1 - x$ per $x \to 1$. Quindi con considerazioni sugli infinitesimi si possono giustificare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\text{arc cos } x)^{2n}}{q(1-x)^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \text{ (c1)} \quad \text{Il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore.} \\ \frac{2^n}{q} & \text{per } n = m \text{ (c2)} \quad \text{Numeratore e denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine.} \\ \infty & \text{per } n < m \text{ (c3)} \quad \text{Il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.} \end{cases}$$

Esempio:

248. $\lim_{x \to 1} \frac{(\text{arc cos } x)^4}{2(1-x)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{(\text{arc cos } x)^{2 \cdot 2}}{2(1-x)^3} = \infty$ (c3)

Posto $\text{arc cos } x = y \;\to\; x = \cos y$ con $y \to 0$ per $x \to 1$ si ha:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\text{arc cos } x)^4}{2(1-x)^3} = \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{2(1 - \cos y)^3} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{y^2}{1 - \cos y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{1 - \cos y} \cdot \frac{1}{1 - \cos y} \right) =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1-1} = \frac{2}{0} \right) = \infty$$

In base alle formule a), b), c) possono essere calcolati molti limiti. Esempi:

249. $\lim_{x \to 0} \frac{x(\text{arc sen } x)^3}{\text{sen}^4 x}$

Per $x \to 0$ il numeratore è infinitesimo del 4° ordine, come il denominatore. Allora il limite è finito:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(\text{arc sen } x)^3}{\text{sen}^4 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(\text{arc sen } x)^3}{x^3}}{\frac{\text{sen}^4 x}{x^4}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{(a2)}$$

250. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2(\text{arc tg } x)^2}{(1 - \cos x)^2}$

Per $x \to 0$ il numeratore è infinitesimo del 4° ordine $\left(\text{infatti: } \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\text{arc tg } x)^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc tg } x)^2}{x^2} = 1 \text{ (b2)}\right)$. Inoltre, essendo $1 - \cos x$ infinitesimo del 2° ordine $\left(\text{infatti: } \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$ sarà $(1 - \cos x)^2$ infinitesimo del 4° ordine. Quindi il limite è finito:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2(\text{arc tg } x)^2}{(1 - \cos x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(\text{arc tg } x)^2}{x^2}}{\frac{(1 - \cos x)^2}{x^4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

251. $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(1 - x)}{(\text{arc cos } x)^4}$

Rispetto all'infinitesimo $1-x$ per $x\to1$ si ha: $1-\cos(1-x)$ è infinitesimo del 2° ordine $\left(\text{infatti: } \lim_{x\to1}\frac{1-\cos(1-x)}{(1-x)^2}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac12\right)$; $(\arccos x)^4$ è un infinitesimo del 2° ordine $\left(\text{infatti: } \lim_{x\to1}\frac{(\arccos x)^4}{(1-x)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(\arccos x)^{2\cdot2}}{(1-x)^2}=\frac{2^2}{1}=4\ (c2)\right)$.

Pertanto il limite proposto è finito. Dividendo allora numeratore e denominatore per $(1-x)^2$ si ottiene:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(1-x)}{(\arccos x)^4}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1-\cos(1-x)}{(1-x)^2}}{\dfrac{(\arccos x)^4}{(1-x)^2}}=\frac{\frac12}{2^2}=\frac18$$

Laddove considerazioni del tipo a, b, c non possono essere fatte, si può ricorrere alla regola di de l'Hospital. Per esempio, si voglia calcolare il seguente limite:

252. $$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{\operatorname{arcsen}x-x}=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}}{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=\left(\frac11\cdot\frac00\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\overset{H}{\to}1\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{-\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to0}2\sqrt{1-x^2}=2$$

6.3.- Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti applicando, ove è possibile, le considerazioni a, b, c del §6.2, oppure la regola dell'Hospital.

253. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\operatorname{arctg}|x|}{\sqrt{1-\cos x}}$

254. $\lim_{x\to1}\dfrac{[\operatorname{arctg}(x-1)]^2}{(1-x)^2}$

255. $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arcctg}x$

256. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

257. $\lim_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arcsen}x}{\operatorname{arctg}x-x}$

258. $\lim_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}^3 2x}{x^2\operatorname{arctg}x}$

259. $\lim_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arcsen}x}{x^3}$

260. $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-\operatorname{arctg}x^2}{(1-\cos x)^3}$

261. $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

262. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\operatorname{arctg}x-x\right)$

263. $\lim_{x\to1}\dfrac{\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{4}}{x-1}$

264. $\lim_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Soluzioni degli esercizi proposti

253. $$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}|x|}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1-\cos x}}=\left(\frac00\right)$$

Rispetto a x, $\operatorname{arctg}x$ e $\sqrt{1-\cos x}$ sono infinitesimi del 1° ordine.

Infatti: $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\frac12}$$

Dividendo numeratore e denominatore per x si ha:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=1\cdot\sqrt2=\sqrt2$$

Si osservi che con l'Hospital il calcolo del limite si complica:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1-\cos x}}\overset{H}{\to}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{2\sqrt{1-\cos x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sqrt{1-\cos x}}{(1+x^2)\operatorname{sen}x}=$$

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen}x}=2\cdot1\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen}x}=\left(\frac00\right)$$

L'indeterminazione non scompare derivando ulteriormente numeratore e denominatore. Bisogna allora ricorrere ad opportune trasformazioni goniometriche. Si possono applicare le formule di bisezione al numeratore e di duplicazione al denominatore:

$$2\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen}x}=2\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt2\operatorname{sen}\dfrac x2}{2\operatorname{sen}\dfrac x2\cos\dfrac x2}=\frac{2\sqrt2}{2}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos\dfrac x2}=\sqrt2$$

254. a) Il calcolo può essere ricondotto al caso b) del §6.2. Infatti, posto $x-1=y$ con $y\to0$ per $x\to1$, il limite diventa:

$$\lim_{x\to1}\frac{[\operatorname{arctg}(x-1)]^2}{(1-x)^2}=\lim_{y\to0}\frac{(\operatorname{arctg}y)^2}{y^2}=1$$

b) Con l'Hospital:

$$\lim_{x\to1}\frac{2\operatorname{arctg}(x-1)\dfrac{1}{1+(x-1)^2}}{-2(1-x)}=\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{1+(x-1)^2}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}\cdot 1 \overset{H}{\to} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+(x-1)^2}}{1} = 1$$

255. $$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arcctg} x = (+\infty\cdot 0^+) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcctg}x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

256. $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (+\infty\cdot 0^+)$$

Posto $\sqrt{x} = \frac{1}{y}$ con $y\to 0^+$ per $x\to+\infty$ si ha:

$$\lim_{y\to0^+}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}y}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{y\to0^+}\frac{\frac{1}{1+y^2}}{1}=1$$

257. $$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arctg}x - x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}-1} =$$

$$=\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1+x^2}{1-1-x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{-x^2}=$$

$$=-1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} -\lim_{x\to0} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$$

258. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{x^2\operatorname{arctg}x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi del 3° ordine rispetto ad x. Infatti:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{x^3} = 8\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\right)^3 = 8 \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2\operatorname{arctg}x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$$

Dividendo allora il denominatore per x^3, il limite diventa:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{x^3}}{\frac{\operatorname{arctg}x}{x}} = 8\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\right)^3\cdot\frac{x}{\operatorname{arctg}x}\right]=8\cdot1\cdot1=8$$

Applicando, invece, la regola dell'Hospital, si ha:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{x^2\operatorname{arctg}x}\overset{H}{\to}\lim_{x\to0}\frac{3\operatorname{sen}^2 2x\cdot\cos2x\cdot2}{2x\operatorname{arctg}x+\frac{x^2}{1+x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{6\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}2x\cdot\cos2x}{x^2\left(\frac{2\operatorname{arctg}x}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)} =$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\operatorname{sen}2x\cdot\operatorname{sen}4x}{x^2\left(\frac{2\operatorname{arctg}x}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{3\cdot\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}\cdot2\cdot\frac{\operatorname{sen}4x}{4x}\cdot4}{2\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+\frac{1}{1+x^2}} = \frac{3\cdot1\cdot2\cdot1\cdot4}{2\cdot1+1}=8$$

259. $$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arcsen}x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to} \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\cdot\sqrt{1-x^2}} =$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-1}{3x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)} = \lim_{x\to0}\frac{-1}{3\sqrt{1-x^2}\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)}=$$

$$=\frac{-1}{3\cdot1\cdot(1+1)} = -\frac{1}{6}$$

260. $$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\operatorname{arctg}x^2}{(1-\cos x)^3} = \left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{2x}{1+x^4}}{3(1-\cos x)^2\operatorname{sen}x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x(1+x^4-1)}{3(1+x^4)\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{(1-\cos x)^2} = \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+x^4}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot1\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\right]^2\cdot1=\frac{8}{3}$$

261. $$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \left[\infty\cdot0, \text{ dato che } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=0\right] =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2+1}{x^4}}}\cdot\frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}-2x\sqrt{x^2+1}}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^4-x^2-1}}\,\frac{x^3-2x(x^2+1)}{x^4\cdot\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x}{\sqrt{x^6-2x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^6}}} = 1$$

262. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg}x-x) = \left(+\infty+\frac{\pi}{2}-\infty = +\infty-\infty\right)$

Dato che l'indeterminazione non dipende da arc tg x, conviene scomporre il limite nel modo seguente:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \frac{\pi}{2}+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) =$$

$$= [\text{razionalizzando}] = \frac{\pi}{2}+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \frac{\pi}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{\pi}{2}+0 = \frac{\pi}{2}$$

263. $\lim_{x\to1}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}x-\frac{\pi}{4}}{x-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

264. Poiché $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$, e $\operatorname{arc\,sen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$, è:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\pi}{2}\right) = (-\infty\cdot 0) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to}$$

$$\overset{H}{\to} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = -1$$

Più semplicemente, essendo (cfr. P.2, TAB. 3-I):

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arc\,tg}x \quad \text{si ha:}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\operatorname{arc\,tg}x+\frac{\pi}{2}\right) = (-\infty\cdot0) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}x+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = -1$$

7 - CALCOLO DEI LIMITI MEDIANTE SVILUPPI IN SERIE

7.1.- Considerazioni generali

Come visto ai §§3.1, 3.2 quando il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ mediante un confronto fra infinitesimi o infiniti, è possibile stabilire se il limite è finito (diverso da zero), zero, o indefinito. Per poter operare in tal senso sarebbe però necessario, date due funzioni di tipo qualunque, poter stabilire subito quale delle due prevale passando al limite. Per alcuni tipi di funzioni ciò è abbastanza agevole, per altri tipi meno.

Si è visto anche (cfr. §3.3) che in una somma di funzioni infinite prevale l'infinito di ordine maggiore, cioè è possibile trascurare gli infiniti di ordine inferiore. Viceversa, in una somma di funzioni infinitesime prevale l'infinitesimo di ordine inferiore, cioè è possibile trascurare gli infinitesimi di ordine superiore. Esempio:

265. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2 + \operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Il numeratore è infinitesimo del 1° ordine rispetto ad x; al denominatore compare la somma di un infinitesimo del 2° ordine (x^2) e di uno del 1° ordine ($\operatorname{sen} x$). Trascurando l'infinitesimo di ordine superiore si può concludere che numeratore e denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine (1°), quindi il limite è finito e non nullo. Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}}{x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{0+1} = 1$$

In questo caso è stato semplice stabilire gli ordini degli infinitesimi ma in altri casi tale ricerca può risultare laboriosa e, se non si vede alcun mezzo per eliminare l'indeterminazione (come la regola dell'Hospital) è conveniente sviluppare in serie di potenze il numeratore ed il denominatore.

Se $x \to 0$ si adoperano gli sviluppi in serie di Mac Laurin.

Se $x \to c \neq 0$ bisognerebbe sviluppare in serie di Taylor, ma poiché, mentre sono noti gli sviluppi in serie di Mac Laurin, lo sviluppo in serie di Taylor andrebbe calcolato di volta in volta, si preferisce operare un cambio di variabile, $y = x - c$ con $y \to 0$ per $x \to c$, in modo da ricondursi al primo caso.

A titolo d'esempio sviluppiamo in serie di Mac Laurin (cfr. Appendice: S.7, S.5) numeratore e denominatore della funzione dell'es. 265.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dots}{x^2 + \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

ottenuto trascurando sia al numeratore che al denominatore gli infinitesimi di ordine superiore al 1°.

Come esempio calcoliamo, mediante sviluppi in serie, i seguenti limiti:

266. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ che sappiamo essere uguale ad $\dfrac{1}{2}$. In base allo sviluppo S.6:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \dots}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} - \dots}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ottenuto trascurando, al numeratore, gli infinitesimi di ordine superiore al 2°.

267. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ che sappiamo essere uguale a 1. In base agli sviluppi S.9 e S.5:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dots}{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

ottenuto trascurando, sia al numeratore che al denominatore, gli infinitesimi di ordine superiore al 1°.

268. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x} = \left(\dfrac{1 - 1 + \log 1}{0 - 0} = \dfrac{0}{0}\right)$

Applicando gli sviluppi in serie di Mac Laurin S.2, S.4, S.7, si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right) - 1 + \left(-x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dots\right)}{\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dots\right) - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^3}{3}}{\dfrac{x^3}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^3}{6}}{\dfrac{x^3}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

7.2.- Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti mediante sviluppo in serie.

269. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ **271.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x \cos x}$ **273.** $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$

270. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$ **272.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x - \operatorname{sen} x}$ **274.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{x}$

275. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 - \operatorname{arc\,tg} x^2}{(1-\cos x)^3}$ **277.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x - \operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$ **279.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$

276. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arc\,tg}x}{\operatorname{arc\,sen}x - x}$ **278.** $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}-\dfrac{1}{x}\right)$ **280.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x}$

Soluzioni degli esercizi proposti

269. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\text{S.5}] = \lim_{x\to0}\frac{(3x) - \frac{(3x)^3}{3!} + \dots}{x} = \lim_{x\to0}\frac{3x - \frac{9x^3}{2} + \dots}{x} =$$
$$= \lim_{x\to0}\left(3 - \frac{9x^2}{2} + \dots\right) = 3$$

270. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\text{S.5}] = \lim_{x\to0}\frac{(3x) - \frac{(3x)^3}{3!} + \dots}{(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots} = \lim_{x\to0}\frac{3x - \frac{9x^3}{2} + \dots}{2x - \frac{4x^3}{3} + \dots} =$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 1°.

271. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\text{S.5, S.6}] = \lim_{x\to0}\frac{(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots}{x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right)} = \lim_{x\to0}\frac{2x - \frac{8x^3}{3!} + \dots}{x - \frac{x^3}{2!} + \dots} =$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{2x}{x} = 2$$

272. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x - \operatorname{sen}x} = \left(\frac{1-1}{0-0} = \frac{0}{0}\right) = [\text{S.6, S.5}] = \lim_{x\to0}\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right)}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2!}}{\frac{x^3}{3!}} =$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{2\cdot3\cdot x^2}{2\cdot x^3} = \lim_{x\to0}\frac{3}{x} = \infty$$

273. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} = \left[\frac{1\cdot(1-1)}{0} = \frac{0}{0}\right]$$

Per poter calcolare il limite mediante sviluppo in serie è necessario operare un cambio di variabile.

Posto $x - \frac{\pi}{2} = y \;\rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + y$ con $y \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} = \lim_{y\to0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+y\right)} =$$
$$= \lim_{y\to0}\frac{\cos y(1-\cos y)}{\operatorname{sen}^2 y} = \lim_{y\to0}\cos y\cdot\frac{1-\cos y}{\operatorname{sen}^2 y} = 1\cdot\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{\operatorname{sen}^2 y} = [\text{S.6, S.5}] =$$
$$= \lim_{y\to0}\frac{1 - \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \dots\right)}{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \dots\right)^2} = \lim_{y\to0}\frac{\frac{y^2}{2!} - \dots}{y^2 + \frac{y^6}{(3!)^2} + \dots} = \frac{1}{2}$$

274. $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x + \cos x - 1}{x} = \left(\frac{0+1-1}{0}\right) = [\text{S.5, S.6}] =$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) - 1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} =$$
$$= \lim_{x\to0}\left(1 - \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{3!} + \dots\right) = 1$$

275. $$\lim_{x\to0}\frac{x^2 - \operatorname{arc\,tg}x^2}{(1-\cos x)^3} = \left[\frac{0-0}{(1-1)^3} = \frac{0}{0}\right] = [\text{S.11, S.6}] =$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2 - \left[(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3} + \frac{(x^2)^5}{5} - \dots\right]}{\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right)\right]^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^2 - x^2 + \frac{x^6}{3} - \dots}{\left(1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \dots\right)^3} =$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^6}{3}}{\frac{x^6}{8}} = \frac{8}{3}$$ ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 6°.

276. $$\lim_{x\to0}\frac{x - \operatorname{arc\,tg}x}{\operatorname{arc\,sen}x - x} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\text{S.11, S.9}] = \lim_{x\to0}\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots\right)}{x + \frac{x^3}{2\cdot3} + \dots - x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2\cdot3}} = 2$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

277. $$\lim_{x\to0}\frac{x - \operatorname{arc\,sen}x}{\operatorname{sen}^3 x} = \left(\frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}\right) = [\text{S.9, S.5}] = \lim_{x\to0}\frac{x - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot3} + \dots\right)}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - x - \dfrac{x^3}{2\cdot 3} - \dots}{\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{-x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

278. $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\text{S.5}] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right)}{x\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x^3}{3!} - \dots}{x^2 - \dfrac{x^4}{3!} + \dots} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x^3}{3!}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{3!} = 0^+$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

279. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - x^2}{x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = [\text{S.7}] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dots\right)^2 - x^2}{x^2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dots\right)^2} = \left[\begin{matrix}\text{trascurando gli infinitesimi di ordine su-}\\ \text{periore al 3° contenuti entro le parentesi}\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right)^2 - x^2}{x^2\left(x + \dfrac{x^3}{3}\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{1}{9}x^6 - x^2}{x^2\left(x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{1}{9}x^6\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{1}{9}x^6}{x^4 + \dfrac{2}{3}x^6 + \dfrac{1}{9}x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{9}x^2\right)}{x^4\left(1 + \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{1}{9}x^4\right)} = \frac{2}{3}$$

280. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \left(\frac{1 - 1 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0}\right) = [\text{S.2, S.5}] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right) - 2x}{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots\right)} =$$

$$= [\text{togliendo le parentesi e sommando}] = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots}{\dfrac{x^3}{3!} - \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\dfrac{x^3}{3!}}{\dfrac{x^3}{3!}} = 2$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

8 - LIMITI DI FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

8.1.- Limiti di funzione esponenziali e logaritmiche elementari

La funzione $y = a^x$ è reale e positiva per ogni x reale e per $a > 0$ (1). Per ogni x reale essa è anche continua (cfr. §2.10). Quest'ultima affermazione si traduce, per definizione stessa di continuità di una funzione, in:

$$\lim_{x\to c} a^x = \ell = a^c$$

D'altra parte si è dimostrato (cfr. soluzione es. 34) che:

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ 0^+ & (0 < a < 1) \end{cases}$$

e allo stesso modo si può dimostrare che:

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = \begin{cases} 0^+ & (a > 1) \\ +\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$$

Questi risultati si possono conglobare nei seguenti grafici che servono anche a ricordarli (figg. 8.1.1 e 8.1.2)

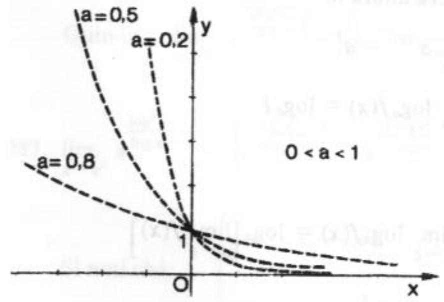


Fig. 8.1.1

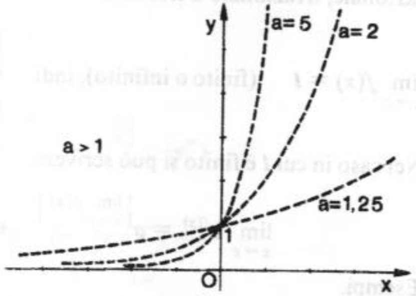


Fig. 8.1.2

I diagrammi tratteggiati si ottengono al variare della base a rispettivamente tra 0 ed 1, e tra 1 e $+\infty$.

Analoghe considerazioni si possono fare per la funzione logaritmica del tipo $y = \log_a x$ nella quale, affinché la y sia reale, deve essere $x > 0$ e $a \neq 1$ positivo. Cioè per tutti i valori di $x > 0$, $\log_a x$ è reale. Inoltre, per tali valori di x, la funzione è continua, cioè:

$$\lim_{x\to c} \log_a x = \ell = \log_a c \quad \text{con } c \text{ ed } a \text{ positivi.}$$

D'altra parte si è dimostrato (cfr. es. 26 e 35) che:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & (a > 1) \\ +\infty & (0 < a < 1) \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ -\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$$

(1) Cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §§3.1, 3.6.

Questi risultati si possono conglobare nei seguenti grafici che servono anche a ricordarli (figg. 8.1.3 e 8.1.4).

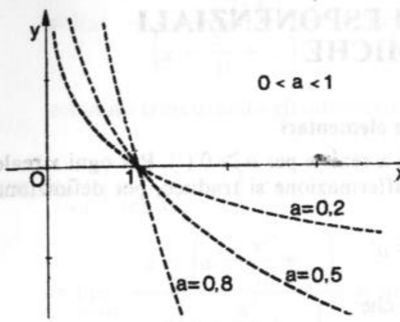


Fig. 8.1.3

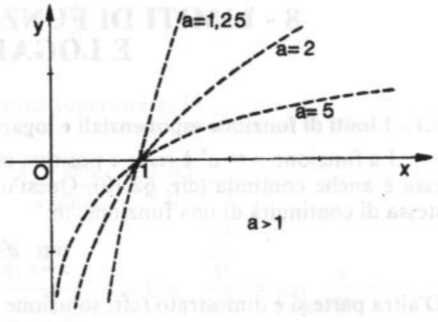


Fig. 8.1.4

I diagrammi tratteggiati si ottengono al variare della base a rispettivamente tra 0 ed 1, e tra 1 e $+\infty$.

In generale, quindi, quando si deve calcolare il:

$$\lim_{x\to c} a^{f(x)} \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to c} \log_a f(x)$$

le complicazioni possono provenire dal tipo della funzione $f(x)$, dato che essa può essere razionale, irrazionale o trascendente. Si calcolerà allora il:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l \quad \text{(finito o infinito), indi} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to c} a^{f(x)} = a^l \\ \lim\limits_{x\to c} \log_a f(x) = \log_a l \end{cases}$$

Nel caso in cui l è finito si può scrivere:

$$\lim_{x\to c} a^{f(x)} = a^{\left\{\lim\limits_{x\to c} f(x)\right\}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} \log_a f(x) = \log_a \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]$$

Esempi.

281. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x} = e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} 0} = e^0 = 1$

282. $\lim\limits_{x\to \pi^-/2} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x} = [e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi^-}{2}\right)} = e^{\frac{1}{4}(+\infty)} = e^{+\infty}] = +\infty$

283. $\lim\limits_{x\to \pi^+/2} e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg} x} = \left[e^{\frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi^+}{2}\right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$

284. $\lim\limits_{x\to 0} \log(\sqrt{x^2+1} - x) = \log 1 = 0$

285. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log(\sqrt{x^2+1} - x) = [\log(+\infty - \infty)]$

È necessario, quindi, calcolare il:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0^+$$

Pertanto: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(\sqrt{x^2+1} - x) = (\log 0^+) = -\infty$

286. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\log^2 x - 2}{\log x - 2}} = \left(e^{\frac{+\infty}{-\infty}}\right)$ Calcoliamo allora: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log^2 x - 2}{\log x - 2} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)$

Tale calcolo si può fare in due modi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2 x - 2}{\log x - 2} = \begin{cases} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\log x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\log x = -\infty \\[2ex] = \left[\begin{matrix}\text{dividendo per } \log x\\ \text{numerat. e denom.}\end{matrix}\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x - \frac{2}{\log x}}{1 - \frac{2}{\log x}} = \left(\dfrac{-\infty - 0}{1 - 0}\right) = -\infty \end{cases}$$

Quindi: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\log^2 x - 2}{\log x - 2}} = \left(e^{-\infty} = \frac{1}{+\infty}\right) = 0^+$

287. $\lim\limits_{x\to e^2} e^{\frac{\log^2 x - 2}{\log x - 2}} = \left[e^{\frac{\log^2 e^2 - 2}{\log e^2 - 2}} = e^{\frac{(2\log e)^2 - 2}{2\log e - 2}} = e^{\frac{4-2}{2-2}} = e^{\frac{2}{0}}\right] = (e^{\infty})$

Si noti che: $\begin{cases} \text{per} \quad x\to (e^2)^- \quad \text{il limite è} \quad [e^{\frac{2}{0^-}} = e^{-\infty}] = 0^+ \\ \text{per} \quad x\to (e^2)^+ \quad \text{il limite è} \quad [e^{\frac{2}{0^+}} = e^{+\infty}] = +\infty \end{cases}$

8.2.- Due limiti fondamentali

Poichè il numero $e = 2{,}7182...$ ricorre spesso come base di una potenza $[e^{f(x)}]$ o come base dei logaritmi naturali $[\log f(x)]$, calcoliamo un limite fondamentale che ne è una definizione.

288. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^{\infty})$

Forme indeterminate di questo tipo si possono ricondurre alla $\frac{0}{0}$ o alla $\frac{\infty}{\infty}$ (cfr. §3.4: 4, 1, 2).

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

Cosicchè: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = \left(e^{\frac{0}{0}}\right)$

Calcoliamo quindi il limite dell'esponente con la regola dell'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Allora: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$

Più precisamente si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0^-} = 1^+ \quad\to\quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{1^+} = e^+ \qquad \text{(a)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0^+} = 1^- \quad\to\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{1^-} = e^- \qquad \text{(b)}$$

L'esempio 288 suggerisce che i limiti delle funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ qualora diano luogo a forme indeterminate (queste possono essere: 0^0, ∞^0, 1^∞) si possono ricondurre alle forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ con la posizione:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)} = e^{\frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\frac{g(x)}{\frac{1}{\log f(x)}}}$$

Sempre dal limite dell'es. 288 si deducono i seguenti:

289. $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log e = 1$

290. $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log_a\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log_a e$

291. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Infatti, posto $\frac{1}{x} = y$ con $y\to\infty$ per $x\to0$ si ha:

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$ (identico al 288). Con più precisione:

a) $\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e^+$ (cfr. 288-a)

b) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e^-$ (cfr. 288-b)

292. $\lim\limits_{x\to0^+}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e^- = 1^-$ (cfr. 291-b)

293. $\lim\limits_{x\to0^-}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e^+ = 1^+$ (cfr. 291-a)

Occorre porre l'attenzione sui limiti del tipo:

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = [(+\infty)^{0^+}] \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = [(+\infty)^{0^+}]$$

limiti, cioè, delle stesse funzioni degli esempi 288 e 291, rispettivamente, ma che non danno, sicuramente, come risultato il numero e. Infatti:

294. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

Essendo:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\infty}\right) = 0^+$$

si ha: $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{0^+} = 1^+$

295. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (\infty^0)$

Posto $\frac{1}{x} = y$ con $y\to0^+$ per $x\to+\infty$ si ha:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to0^+}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = 1^+$ (identico al 294).

Si è voluto porre l'attenzione su questi limiti perchè lo studente, guardando la funzione di cui si vuole il limite, potrebbe essere indotto a pensare subito al numero e. Invece bisogna per prima cosa fare attenzione al valore cui tende la x.

Per evitare confusioni, disegnamo i grafici delle funzioni:

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad \text{(fig. 8.2.1)}$$

e $$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{(fig. 8.2.2)}$$

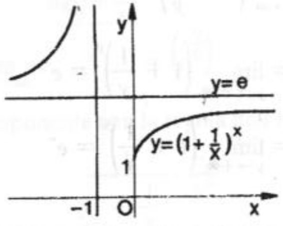


Fig. 8.2.1

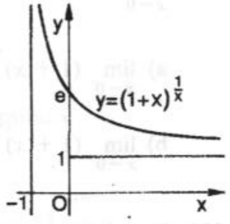


Fig. 8.2.2

Grafici che conviene sempre tenere presenti quando si calcola un limite di questo tipo.

Dalle figure 8.2.1 e 8.2.2 e dai limiti 288 e seguenti, si deduce la TAB. 8-I.

TAB. 8-I

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^+$	1	$\lim_{x\to-1^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = +\infty$	5
$\lim_{x\to-1^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = +\infty$	2	$\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^+$	6
$\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^+$	3	$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^-$	7
$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^-$	4	$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^+$	8

Questi limiti sono importanti perchè ad essi si riconducono molti altri limiti.

Esempi.

296. $$\lim_{x\to0}\frac{x}{\log_a(1+x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{x}\log_a(1+x)} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\log_a e}$$

(TAB. 8-I, 6, 7).

Per $a = e$ si ha: $\lim_{x\to0}\frac{x}{\log(1+x)} = 1$

297. $$\lim_{x\to0}\frac{a^x - 1}{x} = \left(\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right)$$

Ponendo: $a^x = 1 + y \;\rightarrow\; x = \log_a(1+y)$ con $y \to 0$ per $x \to 0$, si ottiene:

$$\lim_{y\to0}\frac{1+y-1}{\log_a(1+y)} = \lim_{x\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} \qquad \text{(cfr. 296)}$$

Per $a = e$ si ha: $\lim_{x\to0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

298. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x - 1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \quad \text{con } a > 1$$

Ponendo: $a^x = 1 + y \;\rightarrow\; x = \log_a(1+y)$ con $y \to +\infty$ per $x \to +\infty$ si ha:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\log_a(1+y)}{y} = \lim_{y\to+\infty}\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}} = \log_a 1^+ = 0^+ \qquad \text{(cfr. TAB. 8-I, 8)}$$

299. $$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\log x - \log 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to2}\frac{2\left(\frac{x}{2} - 1\right)}{\log\frac{x}{2}}$$

Ponendo: $\log\frac{x}{2} = y \;\rightarrow\; e^y = \frac{x}{2}$ con $y \to 0$ per $x \to 2$ si ottiene:

$$\lim_{y\to0}\frac{2(e^y - 1)}{y} = [\text{cfr. } 297] = 2\cdot1 = 2$$

300. $$\lim_{x\to c}\frac{x^n - c^n}{\log x^n - \log c^n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to c}\frac{c^n\left[\left(\frac{x}{c}\right)^n - 1\right]}{\log\left(\frac{x}{c}\right)^n}$$

Ponendo: $\log\left(\frac{x}{c}\right)^n = y \;\rightarrow\; e^y = \left(\frac{x}{c}\right)^n$ con $y \to 0$ per $x \to c$ si ottiene:

$$\lim_{y\to0}\frac{c^n(e^y - 1)}{y} = [\text{cfr. } 297] = c^n\cdot1 = c^n$$

301. $$\lim_{x\to0}\frac{a^{px} - 1}{a^{qx} - 1} = [a > 0] = \left(\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}\right)$$

Ci si può ricondurre ad un'applicazione del 297 nel modo seguente:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{px} - 1}{a^{qx} - 1} = \lim_{x\to0}\frac{p\cdot\frac{a^{px} - 1}{px}}{q\cdot\frac{a^{qx} - 1}{qx}} = \frac{p}{q}\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{px} - 1}{px}\cdot\frac{qx}{a^{qx} - 1}\right)$$

Poiché:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{px} - 1}{px} = [\text{ponendo } px = y] = \lim_{y\to0}\frac{a^y - 1}{y} = \frac{1}{\log_a e} \qquad \text{(cfr. 297)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{qx} - 1}{qx} = [\text{ponendo } qx = y] = \lim_{y\to0}\frac{a^y - 1}{y} = \frac{1}{\log_a e} \qquad \text{(cfr. 297)}$$

si ha:

$$\frac{p}{q}\lim_{x\to 0}\frac{a^{px}-1}{px}\cdot\frac{qx}{a^{qx}-1}=\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\log_a e}\cdot\log_a e=\frac{p}{q}$$

302. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{e^{3x}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Ci si può ricondurre ai casi precedenti dividendo numeratore e denominatore per $3x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}}{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}}=\frac{1}{1}=1 \qquad \text{Infatti: } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=1\end{cases}$$

(basta porre $3x=y$ per ricondursi all'es. 297).

È chiaro che tutti questi limiti possono essere calcolati anche applicando altri metodi. Per esempio:

303. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen}x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ può essere calcolato:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}}=[\text{cfr. } 297]=\frac{1}{1}=1$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots-1}{x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\dfrac{x}{2!}+\ldots\right)}{x\left(1-\dfrac{x^2}{3!}+\ldots\right)}=\frac{1}{1}=1$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}x}\overset{H}{\rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{1}=1$$

Non sempre tali metodi di soluzione sono richiesti, perchè sono di facile applicazione o perchè si vuole saggiare l'abilità dello studente che, partendo dal solo limite fondamentale (288), deve riuscire a dedurre tutti quelli che seguono. Quando però viene lasciata la libera scelta, l'Hospital o lo sviluppo in serie (laddove risultino efficaci), si possono applicare. Esempio.

304. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Può essere chiesto esplicitamente:

1) Calcolare il limite senza ricorrere né alla regola dell'Hospital, né agli sviluppi in serie.
2) Calcolare il limite con la regola dell'Hospital.
3) Calcolare il limite sviluppando in serie di Mac Laurin.

Nel primo caso lo studente deve subito notare che il denominatore può condurlo ad un'applicazione del limite fondamentale 297. Infatti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}{\dfrac{(e^x-1)^2}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2}$$

Essendo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (cfr. 297)

si ottiene: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

Nel secondo caso:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}\overset{H}{\rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x-1}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\rightarrow}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

Nel terzo caso:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots-1\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\ldots}{\left(x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{x^2}{4!}+\ldots\right)}{x^2\left(1+\dfrac{x}{2!}+\ldots\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2!}}{1}=\frac{1}{2}$$

8.3.- Esercizi proposti

305. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{\operatorname{tg}^2 x}$

306. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

307. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{x^2}{\log x}\right)$

308. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

309. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$

310. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\log 3x}}$

311. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{tg}x}$

312. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2^x-1}$

313. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3\log x-\log 8}$

314. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$

Soluzioni degli esercizi proposti

305. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{\operatorname{tg}^2 x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

a) Ricorrendo al limite fondamentale:

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\log(1+x)}{x}}{x\cdot\dfrac{tg^2 x}{x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)^{\frac1x}}{x\cdot\left(\dfrac{tg\, x}{x}\right)^2} = \left(\frac{\log e}{0\cdot 1}\right)=\infty$$

b) Con l'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{tg^2 x} \overset{H}{\to} \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{-1}}{2\,tg\, x(1+tg^2 x)} = \left[\frac{(1+0)^{-1}}{2\cdot0(1+0)}=\frac10\right]=\infty$$

c) Sviluppando in serie:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\frac12x^2+\dots}{\left(x+\frac{x^3}{3}+\dots\right)^2} = [\text{trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al } 2°] =$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac12x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac12x}{x}=\left(\frac{1-0}{0}\right)=\infty$$

306. $\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^{\frac10}=1^\infty\right)$

Si può scrivere: $x^{\frac1{1-x}}=e^{\frac{\log x}{1-x}}$ Quindi si cerca il $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{1-x}=\left(\frac00\right)$

a) Posto $1-x=-y \to x=1+y$ con $y\to0$ per $x\to1$ si ottiene:

$$\lim_{y\to0}\left[-\frac1y\log(1+y)\right]=-\lim_{y\to0}\log(1+y)^{\frac1y}=-\log\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac1y}=-\log e=-1$$

(cfr. TAB. 8-I: 6, 7)

b) Con l'Hospital: $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{1-x}\overset{H}{\to}\lim_{x\to1}\frac{\frac1x}{-1}=-1$

c) Sviluppando in serie il numeratore dopo aver posto $1-x=-y$:

$$\lim_{y\to0}\left[-\frac{\log(1+y)}{y}\right]=-\lim_{y\to0}\frac{y-\frac12y^2+\frac13y^3-\dots}{y}=$$

$$=-\lim_{y\to0}\left(1-\frac12y+\frac13y^2-\dots\right)=-1$$

Pertanto: $\lim_{x\to1}x^{\frac1{1-x}}=e^{-1}=\frac1e$

307. $\lim_{x\to1}\left(\frac1{\log x}-\frac{x^2}{\log x}\right)=\left(\frac10-\frac10=\infty-\infty\right)=\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\log x}=\left(\frac00\right)$

a) Posto $1-x^2=-y \to x=\sqrt{1+y}$ con $y\to0$ per $x\to1$ si ottiene:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\log x}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{\log\sqrt{1+y}}=-2\lim_{y\to0}\frac{y}{\log(1+y)}=$$

$$=-2\lim_{y\to0}\frac{1}{\log(1+y)^{\frac1y}}=-2\cdot\frac1{\log e}=-2$$

b) Sviluppando in serie il denominatore dopo aver posto $1-x^2=-y$:

$$-2\lim_{y\to0}\frac{y}{\log(1+y)}=-2\lim_{y\to0}\frac{y}{y-\frac12y^2+\frac13y^3-\dots}=$$

$$=-2\lim_{y\to0}\frac{1}{1-\frac12y+\frac13y^2-\dots}=-2$$

c) Con l'Hospital: $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\log x}\overset{H}{\to}\lim_{x\to1}\frac{-2x}{\frac1x}=-2$

308. $\lim_{x\to1^-}\left(\frac1{\log x}-\frac1{x-1}\right)=\left(\frac1{0^-}-\frac1{1^--1}=-\infty-\frac1{0^-}=-\infty+\infty\right)=$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}=\left(\frac00\right)$$

a) Con l'Hospital:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}\overset{H}{\to}\lim_{x\to1^-}\frac{1-\frac1x}{\log x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x\log x+x-1}=$$

$$=\left(\frac00\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\log x+1+1}=\frac{1}{0^-+2}=\left(\frac12\right)^+$$

b) Posto $x-1=y \to x=1+y$, con $y\to0^-$ per $x\to1^-$ e sviluppando in serie, si ha:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}=\lim_{y\to0^-}\frac{y-\log(1+y)}{y\cdot\log(1+y)}=\lim_{y\to0^-}\frac{y-\left(y-\frac12y^2+\frac13y^3-\dots\right)}{y\left(y-\frac12y^2+\frac13y^3-\dots\right)}=$$

$$=\lim_{y\to0^-}\frac{\frac12y^2-\frac13y^3+\dots}{y^2-\frac12y^3+\frac13y^4-\dots}=\lim_{y\to0^-}\frac{\frac12-\frac13y+\dots}{1-\frac12y+\frac13y^2-\dots}=\frac12$$

309. $\lim_{x\to0^+}(1+tg\, x)^{ctg\, x}=(1^{+\infty})$

a) Posto $tg\, x=y$ con $y\to0^+$ per $x\to0^+$ si ha: $\lim_{y\to0^+}(1+y)^{\frac1y}=e$

b) Con l'Hospital: $\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{ctg} x\cdot\log(1+\operatorname{tg} x)}$

Si calcola il:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{ctg} x\cdot\log(1+\operatorname{tg} x) = (+\infty\cdot 0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\operatorname{tg} x)^{-1}(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1}{1+0^+} = 1^-$$

Pertanto: $\lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{1^-} = e^-$

310. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\log 3x}} = \left(0^{\frac{1}{-\infty}} = 0^0\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\log 3x}\cdot\log x} = \left(e^{\frac{-\infty}{-\infty}}\right)$

Si cerca quindi il:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\log 3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\log 3 + \log x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log 3 + \log x}{\log x}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log 3}{\log x} + 1\right)^{-1} = \left[\left(\frac{\log 3}{-\infty} + 1\right)^{-1}\right] = (0^- + 1)^{-1} = (1^-)^{-1} = 1^+$$

Pertanto: $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\log 3x}} = e^{1^+} = e^+$

311. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = (0^0) = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg} x\cdot\log\operatorname{sen} x}$

Si calcola quindi il:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\operatorname{sen} x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \overset{H}{\rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cos x = -0^+ = 0^-$$

Pertanto: $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = e^{0^-} = 1^-$

312. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2^x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$

a) Posto $2^x - 1 = y \rightarrow x = \log_2(1+y)$ con $y\to 0$ per $x\to 0$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2^x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log_2(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \log_2(1+y)^{\frac{1}{y}} = \log_2 e$$

b) Con l'Hospital: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2^x-1} \overset{H}{\rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2^x\log 2} = \frac{1}{\log 2} = \log_2 e$

c) Sviluppando in serie 2^x (S. 3):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + x\log 2 + \frac{(x\log 2)^2}{2!} + \ldots - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log 2}\cdot\frac{x}{x + \frac{x^2\log 2}{2!} + \ldots} = \frac{1}{\log 2} = \log_2 e$$

313. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{3\log x - \log 8} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2^3}{\log x^3 - \log 2^3} = [\text{cfr. es. } 300] = 2^3 = 8$

Con l'Hospital si ha:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3\log x - \log 8} \overset{H}{\rightarrow} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{3\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

314. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-2x}(e^{4x}-1)} = \lim_{x\to 0} e^x\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1}$

a) In base a quanto visto nell'es. 301, per $a = e$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{e^{4x}-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Con l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} \overset{H}{\rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2e^{2x} + 2e^{-2x}} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}$$

c) Sviluppando in serie (S.2):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)}{\left(1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)}{2\left(2x + \frac{8x^3}{3!} + \ldots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{3!} + \ldots}{2\left(1 + \frac{4x^2}{3!} + \ldots\right)} = \frac{1}{2}$$

9 - LIMITI DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

9.1.- Funzioni iperboliche dirette

Delle sei funzioni dirette, quattro sono continue per ogni x reale: $\mathrm{Sh}\,x$, $\mathrm{Ch}\,x$, $\mathrm{Th}\,x$, $\mathrm{Sech}\,x$; le rimanenti due sono discontinue in $x = 0$: $\mathrm{Cosech}\,x$, $\mathrm{Cth}\,x$ (1). D'altra parte ciò è evidente se si considera l'insieme di esistenza delle funzioni iperboliche, la ricerca del limite non differisce da quella del limite di una funzione nella quale compaiono potenze di base e ed esponente $\pm x$. Cioè:

315. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sh}\,x = \mathrm{Sh}\,c = \dfrac{e^c - e^{-c}}{2}$

317. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Th}\,x = \mathrm{Th}\,c = \dfrac{e^c - e^{-c}}{e^c + e^{-c}}$

316. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Ch}\,x = \mathrm{Ch}\,c = \dfrac{e^c + e^{-c}}{2}$

318. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sech}\,x = \mathrm{Sech}\,c = \dfrac{2}{e^c + e^{-c}}$

Queste relazioni sono valide per qualunque c finito.

319. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Cosech}\,x = \mathrm{Cosech}\,c = \dfrac{2}{e^c - e^{-c}}$

320. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Cth}\,x = \mathrm{Cth}\,c = \dfrac{e^c + e^{-c}}{e^c - e^{-c}}$

Queste relazioni sono valide per qualunque $c \neq 0$ finito.

Vediamo adesso come si comportano le sei funzioni agli estremi del loro insieme di esistenza:

321. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Sh}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(e^x - e^{-x})}{2} = \left(\dfrac{0-\infty}{2}\right) = -\infty$

322. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Sh}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x - e^{-x})}{2} = \left(\dfrac{+\infty-0}{2}\right) = +\infty$

323. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Ch}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(e^x + e^{-x})}{2} = \left(\dfrac{0+\infty}{2}\right) = +\infty$

324. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Ch}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x + e^{-x})}{2} = \left(\dfrac{+\infty+0}{2}\right) = +\infty$

325. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Th}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$

326. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Th}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

327. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Sech}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x} = [\text{cfr. } 323] = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = 0^+$

328. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Sech}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x} = [\text{cfr. } 324] = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = 0^+$

(1) Per quanto riguarda le funzioni iperboliche cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §§3.8, 3.9, 3.10.

329. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Cosech}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Sh}\,x} = [\text{cfr. } 321] = \left(\dfrac{1}{-\infty}\right) = 0^-$

330. $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{Cosech}\,x = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \left(\dfrac{2}{1^- - 1^+}\right) = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

331. $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{Cosech}\,x = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \left(\dfrac{2}{1^+ - 1^-} = \dfrac{1}{0^+}\right) = +\infty$

332. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Cosech}\,x = \dfrac{1}{\mathrm{Sh}\,x} = [\text{cfr. } 322] = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = 0^+$

333. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Cth}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Th}\,x} = [\text{cfr. } 325] = -1$

334. $\lim\limits_{x\to0^-} \mathrm{Cth}\,x = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \left(\dfrac{1^- + 1^+}{1^- - 1^+} = \dfrac{2}{0^-}\right) = -\infty$

335. $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{Cth}\,x = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \left(\dfrac{1^+ + 1^-}{1^+ - 1^-} = \dfrac{2}{0^+}\right) = +\infty$

336. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Cth}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Th}\,x} = [\text{cfr. } 326] = 1$

Allo scopo di ricordare i suddetti limiti, è utile tenere presenti i grafici riportati al §3.10 della P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*.

Quando allora ci si trova a dover calcolare limiti di funzioni iperboliche nelle quali l'argomento sia $f(x)$ e non x, come ad esempio $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sh} f(x)$, conviene calcolare il $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ e quindi regolarsi per il $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sh} f(x)$. Nel caso delle quattro funzioni continue per ogni x, se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ finito, si può scrivere:

$$\lim_{x\to c} \mathrm{Sh} f(x) = \mathrm{Sh} \lim_{x\to c} f(x) \qquad \lim_{x\to c} \mathrm{Ch} f(x) = \mathrm{Ch} \lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c} \mathrm{Th} f(x) = \mathrm{Th} \lim_{x\to c} f(x) \qquad \lim_{x\to c} \mathrm{Sech} f(x) = \mathrm{Sech} \lim_{x\to c} f(x)$$

Mentre per le altre due si può scrivere:

$$\lim_{x\to c} \mathrm{Cosech} f(x) = \mathrm{Cosech} \lim_{x\to c} f(x) \qquad \lim_{x\to c} \mathrm{Cth} f(x) = \mathrm{Cth} \lim_{x\to c} f(x)$$

solo se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l \neq 0$ finito.

Esempi.

337. $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{Sh}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

Si ha: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \dfrac{1}{2}$

Pertanto: $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{Sh}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \mathrm{Sh}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{e} - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{e-1}{2\sqrt{e}}$

338. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x}\cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{Sh}\,x}} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{-\infty}}\right) = 0^+\cdot e^{\mathrm{arctg}\,0^-} = 0^+\cdot e^{0^-} = 0^+\cdot 1^- = 0^+$

339. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x}\cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{Sh}\,x}} = \left[e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{0^-}} = e^{\mathrm{arctg}(-\infty)}\right] = e^{-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^{\pi}}}$

340. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x}\cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{Sh}\,x}} = \left[e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{0^+}} = e^{\mathrm{arctg}(+\infty)}\right] = e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{e^{\pi}}$

341. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x}\cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{Sh}\,x}} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\cdot e^{\mathrm{arctg}\frac{1}{+\infty}}\right) = 0^+\cdot e^{\mathrm{arctg}\,0^+} = 0^+\cdot e^{0^+} = 0^+\cdot 1^+ = 0^+$

342. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + x - \dfrac{1}{2}\log\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Th}\,x\right) = \Big[1 - \infty - \dfrac{1}{2}\log(+\infty) - (-1) =$

$= 1 - \infty - \infty + 1\Big] = -\infty$

343. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \log\mathrm{Ch}\,x - 2\,\mathrm{Th}\,x + 1) = [-\infty + \log(+\infty) - 2(-1) + 1 = -\infty + \infty] =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (x + \log\mathrm{Ch}\,x) - 2\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Th}\,x + 1 = 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} (x + \log\mathrm{Ch}\,x)$

Poiché $x = \log e^x$ $\mathrm{Ch}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \to \log\mathrm{Ch}\,x = \log\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

il limite cercato diventa:

$3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\log e^x + \log\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \log\dfrac{e^{2x} + 1}{2} =$

$= \left(3 + \log\dfrac{e^{-\infty} + 1}{2}\right) = 3 + \log\dfrac{1}{2}$

344. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + |x| - \dfrac{1}{2}\log\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Th}\,x\right) = \Big[1 + \infty - \dfrac{1}{2}\log(+\infty) - (-1) =$

$= +\infty - \infty\Big]$

Poiché per $x \to -\infty$ è $|x| = -x$, il limite si può scrivere:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - x - \dfrac{1}{2}\log\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Th}\,x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (1 - \mathrm{Th}\,x) - \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + \dfrac{1}{2}\log\mathrm{Ch}\,x\right) =$

$= 2 - \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\log e^x + \log\sqrt{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}\right) = 2 - \lim\limits_{x\to-\infty} \log\sqrt{e^x\cdot\dfrac{e^{2x} + 1}{2}} =$

$= (2 - \log 0^+) = +\infty$

9.2.- Funzioni iperboliche inverse

Applicando le condizioni di invertibilità (cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §3.3) alle sei funzioni iperboliche considerate al §9.1, si ottengono le corrispondenti funzioni iperboliche inverse con i loro insiemi di esistenza (cfr. P.2, §3.10). Per ogni x appartenente all'insieme di definizione, ognuna delle sei funzioni iperboliche inverse assume un valore definito, mentre i valori non definiti vengono assunti agli estremi dell'insieme. Pertanto, in base alla definizione logaritmica delle funzioni iperboliche inverse, la ricerca del limite non differisce da quella del limite del logaritmo di una funzione $f(x)$. Cioè:

345. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sett\,Sh}\,x = \mathrm{Sett\,Sh}\,c = \log(c + \sqrt{c^2 + 1})$ per qualunque c finito.

346. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sett\,Ch}\,x = \mathrm{Sett\,Ch}\,c = \log(c + \sqrt{c^2 - 1})$ per $c \geqslant 1$ finito.

347. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sett\,Th}\,x = \mathrm{Sett\,Th}\,c = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1 + c}{1 - c}$ per $-1 < c < 1$

348. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sett\,Cosech}\,x = \mathrm{Sett\,Cosech}\,c = \begin{cases} \log\dfrac{1 + \sqrt{1 + c^2}}{c} & \text{per } c > 0 \text{ finito.} \\ \log\dfrac{1 - \sqrt{1 + c^2}}{c} & \text{per } c < 0 \text{ finito.} \end{cases}$

349. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sett\,Sech}\,x = \mathrm{Sett\,Sech}\,c = \log\dfrac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c}$ per $0 < c \leqslant 1$

350. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{Sett\,Cth}\,x = \mathrm{Sett\,Cth}\,c = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{c + 1}{c - 1}$ per $c < -1$ e $c > 1$ finito.

Vediamo adesso come si comportano le sei funzioni agli estremi del loro insieme di esistenza:

351. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Sett\,Sh}\,x = \lim\limits_{x\to-\infty} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = [\log(-\infty + \infty)] = [\text{razionalizzando}] =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \log\left[(x + \sqrt{x^2 + 1})\cdot\dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \log\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} =$

$= (\log 0^+) = -\infty$

352. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Sett\,Sh}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = [\log(+\infty)] = +\infty$

353. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Sett\,Ch}\,x = \lim\limits_{x\to+\infty} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = [\log(+\infty)] = +\infty$

354. $\lim\limits_{x\to-1^+} \mathrm{Sett\,Th}\,x = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1 + x}{1 - x} = \left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{0^+}{2}\right) = -\infty$

355. $\lim\limits_{x\to1^-} \mathrm{Sett\,Th}\,x = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1 + x}{1 - x} = \left[\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2}{0^+} = \dfrac{1}{2}\log(+\infty)\right] = +\infty$

356. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{Sett Cosech}\, x = \lim_{x\to-\infty} \log\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} = \left(\log\frac{-\infty}{-\infty}\right) =$

$$= \log\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} \overset{H}{\to} \log\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \log\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \log\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \log 1^- = 0^-$$

357. $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \text{Sett Cosech}\, x = \lim_{x\to0^-} \log\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} =$

$$= \lim_{x\to0^-} \log\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to0^-} \log\frac{-x^2}{x(1+\sqrt{1+x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to0^-} \log\frac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}} = \left(\log\frac{0^+}{2}\right) = -\infty$$

358. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \text{Sett Cosech}\, x = \lim_{x\to0^+} \log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \left[\log\frac{2}{0^+} = \log(+\infty)\right] = +\infty$

359. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Sett Cosech}\, x = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) =$

$$= \log 1^+ = 0^+$$

360. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \text{Sett Sech}\, x = \lim_{x\to0^+} \log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \left[\log\frac{2}{0^+} = \log(+\infty)\right] = +\infty$

361. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{Sett Cth}\, x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty} \log\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\log 1^- = 0^-$

362. $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \text{Sett Cth}\, x = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \left(\frac{1}{2}\log\frac{0^-}{-2} = \frac{1}{2}\log 0^+\right) = -\infty$

363. $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \text{Sett Cth}\, x = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \left[\frac{1}{2}\log\frac{2}{0^+} = \frac{1}{2}\log(+\infty)\right] = +\infty$

364. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Sett Cth}\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \log\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\log 1^+ = 0^+$

Per ricordare questi limiti sono utili i grafici riportati nella P.2 al §3.10.

Quando si devono calcolare i limiti di funzioni iperboliche inverse nelle quali l'argomento sia $f(x)$ e non x, conviene calcolare prima il limite di $f(x)$, e poi regolarsi per il limite della funzione di $f(x)$. Esempi:

365. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Sett Ch}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

Si ha: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1^+$

Pertanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{Sett Ch}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \text{Sett Ch}\, 1^+ = \log(1^+ + \sqrt{1^+ - 1}) = \log 1^+ = 0^+$$

366. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Sett Sech}\frac{\log x}{x}$

Si ha: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0^+$

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{Sett Sech}\frac{\log x}{x} = (\text{Sett Sech}\, 0^+) = [\text{cfr. } 360] = +\infty$$

10 - ESERCIZI DI RIEPILOGO

367. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt[3]{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}$

368. $\lim\limits_{x\to+\infty} [2\sqrt{2x} - \log(x^2+1)]$

369. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(x\log x + \dfrac{x}{\log x} - 2x\right)$

370. $\lim\limits_{x\to0^+} (x^{\log^2 x} - 1)$

371. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x + 1}{2x}\,\mathrm{Sett\,Sh}\,x$

372. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{1-\cos x}$

373. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{1}{x}}{\mathrm{Sett\,Ch}\,(x+1)}$

374. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos x - 2\cos^2 x}$

375. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\log\mathrm{sen}\,x}{\log x}$

376. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$

377. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\log\cos\dfrac{1}{x}$

378. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

379. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\log(3-x)}{2-x}$

380. $\lim\limits_{x\to2^-} (2-x)\log(4-x^2)$

381. $\lim\limits_{x\to0^+} (\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{1}{\log\mathrm{sen}\,x}}$

382. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+|x^2-x|}}$

383. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

384. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\mathrm{Ch}\,x - 1}{x - \mathrm{Sh}\,x}$

385. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\pi - 2x)\,\mathrm{tg}\,x$

386. $\lim\limits_{x\to1^+} \log x\cdot\log\log x$

387. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Sh}\,x(2+\mathrm{Ch}^2 x)}{1-\mathrm{Sh}^2 x}$

388. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x - x^x}{1 - x + \log x}$

389. $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)}\right]^{\frac{1}{x}}$

390. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cos\sqrt{\dfrac{2}{x}}\right)^x$

391. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{6\,\mathrm{Sh}\,x - x(6+x^2)}{x^5}$

392. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x}{\mathrm{sen}\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

393. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (1+\cos^2 x)^{\mathrm{tg}^2 x}$

394. $\lim\limits_{x\to0} (1+x^2)^{\frac{1}{x\,\mathrm{sen}\,x}}$

395. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}}{\log(1+x)}$

396. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{Sett\,Sh}\,x}{1-\sqrt{1-x}}$

397. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\log x - \mathrm{sen}\log x}{\log^2 x\cdot\mathrm{sen}\log x}$

Determinare il valore di λ in modo che le seguenti funzioni siano infinitesime di ordine superiore al 2° rispetto ad x. Determinare quindi per tale valore di λ, l'ordine effettivo di infinitesimo delle funzioni.

398. $y = e^{x^2} - \lambda x^2 - \cos x$

399. $y = \log(1+x) - \mathrm{tg}\,x + \dfrac{1}{2}\lambda x^2$

400. Verificare che la retta di equazione $y = \dfrac{x}{\sqrt[4]{2}}$ è asintoto del ramo destro della funzione $f(x) = \sqrt[4]{\mathrm{Ch}\log x^4 - 1}$

Soluzioni degli esercizi proposti

367. $$\lim_{x\to0^+} \sqrt[3]{x}\cdot e^{\frac{1}{x}} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-\frac{1}{3}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \xrightarrow{\text{H}} \lim_{x\to0^+} \frac{-\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}} =$$

$$= 3\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(3\cdot\frac{+\infty}{0^+}\right) = [\text{cfr. TAB. 2-IV, 22}] = +\infty$$

368. $$\lim_{x\to+\infty} [2\sqrt{2x} - \log(x^2+1)] = (+\infty - \infty) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x}\left[2 - \frac{\log(x^2+1)}{\sqrt{2x}}\right]$$

Calcoliamo il $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{\sqrt{2x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \xrightarrow{\text{H}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x}{\dfrac{1}{\sqrt{2x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\sqrt{2x}}{x^2+1} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 0^+$$

Pertanto: $$\lim_{x\to+\infty} [2\sqrt{2x} - \log(x^2+1)] = [+\infty\cdot(2-0^+)] = +\infty$$

369. $$\lim_{x\to0^+} \left(x\log x + \frac{x}{\log x} - 2x\right) = \left[0^+\cdot(-\infty) + \frac{0^+}{-\infty} - 2\cdot0^+\right] = (0\cdot\infty) =$$

$$= \lim_{x\to0^+} x\log x + \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\log x} - 2\lim_{x\to0^+} x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} + 0^- - 0^+ \xrightarrow{\text{H}}$$

$$\xrightarrow{\text{H}} \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} + 0^- = -\lim_{x\to0^+} x + 0^- = -0^+ + 0^- = 0^-$$

370. $\lim_{x\to0^+}(x^{\log^2 x}-1) = [(0^+)^{+\infty}-1]$

Essendo $x^{\log^2 x} = e^{\log x^{\log^2 x}} = e^{\log^3 x}$ si ha:

$$\lim_{x\to0^+}(e^{\log^3 x}-1) = (e^{-\infty}-1) = 0^+ - 1 = -1^+$$

371. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+1}{2x}\,\mathrm{Sett\,Sh}\,x = (0\cdot\infty) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Sett\,Sh}\,x}{\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x+1}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Sett\,Sh}\,x}{\dfrac{2x(\sqrt{x^2+1}+x-1)}{x^2+1-x^2+2x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Sett\,Sh}\,x}{\sqrt{x^2+1}+x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}-1}$$

Posto $x+\sqrt{x^2+1}-1=y$ con $y\to+\infty$ per $x\to+\infty$ si ha:

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y\to+\infty}\log(1+y)^{\frac{1}{y}} = 0^+ \quad \text{(cfr. TAB. 8-I, 8)}$$

372. $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = \left(\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}\right) \xrightarrow{H} \lim_{x\to0}\dfrac{2x\cdot e^{x^2}}{\mathrm{sen}\,x} = 2\lim_{x\to0} e^{x^2}\cdot\dfrac{x}{\mathrm{sen}\,x} = 2\cdot1\cdot1=2$

373. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{1}{x}}{\mathrm{Sett\,Ch}\,(x+1)} = \left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}}{0}=\dfrac{0}{0}\right)$

Sfruttando le relazioni tra le funzioni circolari inverse (cfr. P.2, §3.4, TAB. 3-I) e la definizione logaritmica dell'iperbolica inversa (cfr. P.2, §3.10), il limite diventa:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{\log(x+1+\sqrt{x^2+2x})} \xrightarrow{H} \lim_{x\to0^+}\frac{(1+x^2)^{-1}}{\dfrac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x}}\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}\cdot\sqrt{x^2+2x} = 1\cdot0^+ = 0^+$$

374. $\lim_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos x-2\cos^2 x} = \left(\dfrac{0}{1+1-2}=\dfrac{0}{0}\right) \xrightarrow{H} \lim_{x\to0}\dfrac{\mathrm{sen}\,x+x\cos x}{-\mathrm{sen}\,x+4\cos x\,\mathrm{sen}\,x} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1+\dfrac{x}{\mathrm{sen}\,x}\cdot\cos x}{-1+4\cos x} = \frac{1+1\cdot1}{-1+4\cdot1} = \frac{2}{3}$$

Oppure, dividendo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1-\cos x+2\cos x-2\cos^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+2\cos x\,\dfrac{1-\cos x}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{\dfrac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

375. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\log\mathrm{sen}\,x}{\log x} = \left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right) \xrightarrow{H} \lim_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\dfrac{x}{\mathrm{sen}\,x}\cos x = 1\cdot1 = 1$

Oppure, sviluppando in serie il numeratore (S.13):

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^4}{180}\ \ldots}{\log x} = 1-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\log x}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{180}+\ldots\right) = 1-(0^-)\cdot0^+ = 1^+$$

376. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) \xrightarrow{H} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+2e^x}\cdot2e^x}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} =$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{e^x}{1+2e^x} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\cdot e^x}{x\cdot e^x\left(\dfrac{1}{e^x}+2\right)} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}{\dfrac{1}{e^x}+2} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

377. $\lim_{x\to+\infty} x^2\log\cos\dfrac{1}{x} = (+\infty\cdot0^-) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\log\cos\dfrac{1}{x}}{x^{-2}} =$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{H} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{tg}\,\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \left[\text{posto } \tfrac{1}{x}=y \text{ con } y\to+0^+ \text{ per } x\to+\infty\right] = -\frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\frac{\mathrm{tg}\,y}{y} = -\frac{1}{2}$$

Oppure, sviluppando in serie (S.14), dopo aver posto $1/x = y$:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\log\cos y=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y^2}\left(-\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{12}-\dots\right)=\lim_{y\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}-\frac{y^2}{12}-\dots\right)=-\frac{1}{2}$$

378. $$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=(+\infty^0)=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log x}$$

Essendo: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{x}=\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{H}{\to}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0^+$ si ha: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=e^{0^+}=1^+$

379. $$\lim_{x\to 2}\frac{\log(3-x)}{2-x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to 2}-\frac{(3-x)^{-1}}{-1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{3-x}=1$$

Oppure, posto $2-x=y$ con $y\to 0$ per $x\to 2$, si ottiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\log(3-x)}{2-x}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\log(1+y)^{\frac{1}{y}}=\log\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=1$$

380. $$\lim_{x\to 2^-}(2-x)\log(4-x^2)=[0^+\cdot(-\infty)]=\lim_{x\to 2^-}\frac{\log(4-x^2)}{\frac{1}{2-x}}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)\overset{H}{\to}$$

$$\overset{H}{\to}\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{4-x^2}(-2x)}{\frac{1}{(2-x)^2}}=-2\lim_{x\to 2^-}x\cdot\frac{(2-x)^2}{(2-x)(2+x)}=-2\lim_{x\to 2^-}\frac{x(2-x)}{2+x}=0^-$$

381. $$\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{1}{\log \mathrm{sen}\,x}}=\left(+\infty^{\frac{1}{-\infty}}=+\infty^{0^-}\right)$$

Si può scrivere:

$$(\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{1}{\log\mathrm{sen}\,x}}=e^{\frac{1}{\log\mathrm{sen}\,x}\log\mathrm{ctg}\,x}=e^{\frac{\log\cos x-\log\mathrm{sen}\,x}{\log\mathrm{sen}\,x}}=e^{\frac{\log\cos x}{\log\mathrm{sen}\,x}-1}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{1}{\log\mathrm{sen}\,x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\log\cos x}{\log\mathrm{sen}\,x}-1}=\left(e^{\frac{0^-}{-\infty}-1}\right)=e^{-1^+}=\left(\frac{1}{e}\right)^+$$

382. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x+|x^2-x|}}=\left(\frac{0^+}{0^+}\right)=[\text{dato che } |x^2-x|=-(x^2-x) \text{ per } x\to 0^+]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x-x^2+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}=0^+$$

383. $$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=(\infty\cdot 0)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{-2}}$$

Ponendo $\dfrac{1}{x}=y$ con $y\to 0^+$ per $x\to+\infty$, si ottiene:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\log(1+y)}{y^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{y(1+y)}=\frac{1}{2}$$

Oppure:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\log(1+y)}{y^2}=[\mathrm{S.4}]=\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\dots\right)}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3+\dots}{y^2}=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}y+\dots\right)=\frac{1}{2}$$

384. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ch}\,x-1}{x-\mathrm{Sh}\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Sh}\,x}{1-\mathrm{Ch}\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ch}\,x}{-\mathrm{Sh}\,x}=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

Oppure:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{Ch}\,x-1}{x-\mathrm{Sh}\,x}=[\mathrm{S.20,S.19}]=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots-1}{x-\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2}{2!}+\dots}{-\frac{x^3}{3!}-\dots}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{3!}{2!}\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

385. $$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\,\mathrm{tg}\,x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\pi-2x}{\mathrm{ctg}\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}$$

$$\overset{H}{\to}\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2}{-(\mathrm{ctg}^2x+1)}=\frac{-2}{-1}=2$$

Oppure, posto $x-\dfrac{\pi}{2}=y$ con $y\to 0$ per $x\to\dfrac{\pi}{2}$ si ha:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\,\mathrm{tg}\,x=\lim_{y\to 0}\left[-2y\,\mathrm{tg}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\lim_{y\to 0}\,[-2y(-\mathrm{ctg}\,y)]=$$

$$=2\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}\,y}=2$$

86. $\lim\limits_{x\to1^+} \log x\cdot\log\log x = [0^+\cdot\log 0^+ = 0^+\cdot(-\infty)] = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\log\log x}{\dfrac{1}{\log x}} = \left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right) \xrightarrow{H}$

$\xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x\log^2 x}} = -\lim\limits_{x\to1^+}\log x = -0^+ = 0^-$

87. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Sh}\,x(2+\mathrm{Ch}^2x)}{1-\mathrm{Sh}^2x} = \left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Ch}\,x(2+\mathrm{Ch}^2x)+2\,\mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Sh}^2x}{-2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\mathrm{Ch}^2x+2\,\mathrm{Sh}^2x}{-2\,\mathrm{Sh}\,x} = \left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\,\mathrm{Ch}\,x\,\mathrm{Sh}\,x+4\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x}{-2\,\mathrm{Ch}\,x}=$

$=-3\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Sh}\,x = -\infty$

88. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\log x} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(\log x+1)}{-1+\dfrac1x}=$

$=\lim\limits_{x\to1} x\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^x(\log x+1)}{1-x} = \left(1\cdot\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^x(\log x+1)^2 - x^{x-1}}{-1}=$

$=\dfrac{-1(0+1)^2-1^0}{-1}=2$

89. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)}\right]^{\frac1x} = (1^\infty)$

Essendo: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}\cdot\dfrac{x}{\log(1+x)} =$ [cfr. TAB. 8-I, 6, 7] $= 1$

Potendosi scrivere $\left[\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)}\right]^{\frac1x} = e^{\frac1x\log\frac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)}}$ si ha:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac1x\log\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)}}{x}\xrightarrow{H}$

$\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)}{\mathrm{tg}\,x}\cdot\dfrac{\dfrac{\log(1+x)}{\cos^2x}-\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{1+x}}{\log^2(1+x)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)\log(1+x)-\mathrm{sen}\,x\cos x}{(1+x)\,\mathrm{sen}\,x\cos x\cdot\log(1+x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)\log(1+x)-\dfrac12\mathrm{sen}\,2x}{\dfrac12(1+x)\,\mathrm{sen}\,2x\cdot\log(1+x)}=$

$=\left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(1+x)+1-\cos2x}{\dfrac12[\mathrm{sen}\,2x\log(1+x)+2\cos2x\cdot(1+x)\log(1+x)+\mathrm{sen}\,2x]}=$

$=$ [dividendo numeratore e denominatore per x] $=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\log(1+x)}{x}+\dfrac{1-\cos2x}{(2x)^2}\cdot4x}{\dfrac{\mathrm{sen}\,2x}{2x}\log(1+x)+\cos2x\cdot(1+x)\dfrac{\log(1+x)}{x}+\dfrac{\mathrm{sen}\,2x}{2x}}=$

$=\dfrac{1+\dfrac12\cdot0}{1\cdot0+1\cdot1\cdot1+1}=\dfrac12$

Pertanto: $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\log(1+x)}\right]^{\frac1x} = e^{\frac12}=\sqrt e$

390. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac2x}\right)^x = (1^\infty)$

Posto $\sqrt{\dfrac2x} = y \to x = \dfrac{2}{y^2}$ con $y\to0^+$ per $x\to+\infty$ si ha:

$\lim\limits_{y\to0^+}(\cos y)^{\frac{2}{y^2}} = \lim\limits_{y\to0^+} e^{\frac{2}{y^2}\log\cos y} = \lim\limits_{y\to0^+} e^{2\frac{\log\cos y}{y^2}}$

Calcoliamo il:

$\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\log\cos y}{y^2} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{-\mathrm{tg}\,y}{2y} = -\dfrac12$

Pertanto: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{\dfrac2x}\right)^x = e^{2\left(-\frac12\right)} = \dfrac1e$

391. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\,\mathrm{Sh}\,x - x(6+x^2)}{x^5} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\,\mathrm{Ch}\,x-6-3x^2}{5x^4} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}$

$\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\,\mathrm{Sh}\,x-6x}{20x^3} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\dfrac{3}{10}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{Ch}\,x-1}{3x^2} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}$

$\xrightarrow{H}\dfrac1{10}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{Sh}\,x}{2x} = \left(\dfrac00\right)\xrightarrow{H}\dfrac1{20}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{Ch}\,x}{1}=\dfrac1{20}$

Oppure, sviluppando in serie $\mathrm{Sh}\,x$ (S.19):

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\,\mathrm{Sh}\,x-6x-x^3}{x^5} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\left(x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots\right)-6x-x^3}{x^5} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{6x^5}{5!}+\dots}{x^5}=$

$= [\text{trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al } 5°] = \dfrac{6}{5!} = \dfrac{1}{20}$

. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty)$

Potendosi scrivere: $\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{x}{\operatorname{sen} x}}$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2 \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x\operatorname{sen} x)}{2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen} x}{x(2\operatorname{sen} x + x\cos x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+1} = \frac{1}{6}$$

Pertanto: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$

. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (1+\cos^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to \pi/2} e^{\operatorname{tg}^2 x \cdot \log(1+\cos^2 x)} = \lim\limits_{x\to \pi/2} e^{\frac{\log(1+\cos^2 x)}{\operatorname{ctg}^2 x}}$

Calcoliamo il:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\log(1+\cos^2 x)}{\operatorname{ctg}^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to \pi/2} \frac{\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{2\operatorname{ctg} x \cdot \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{1+\cos^2 x} = 1$$

Oppure, ponendo $\cos^2 x = y \to \operatorname{sen}^2 x = 1 - y$ con $y \to 0$ per $x \to \dfrac{\pi}{2}$, si ha:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{\dfrac{y}{1-y}} = \lim_{y\to 0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}} \cdot (1-y) = \log e \cdot 1 = 1$$

Pertanto: $\lim\limits_{x\to \pi/2} (1+\cos^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x} = e^1 = e$

. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x\operatorname{sen} x}} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x\operatorname{sen} x}\log(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+x^2)}{x\operatorname{sen} x}}$

Calcoliamo il:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim_{x\to 0} \frac{2x(1+x^2)^{-1}}{\operatorname{sen} x + x\cos x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x} = 1$$

Oppure:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \lim_{x\to 0} \log(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to 0} \log(1+y)^{\frac{1}{y}} = 1$$

avendo posto $x^2 = y$ con $y \to 0$ per $x \to 0$.
Oppure, ancora, sviluppando in serie (S.4, S.5):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^6 - \dots}{x\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 - \dots}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dots} = 1$$

In definitiva: $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x\operatorname{sen} x}} = e$

395. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\log(1+x)} = \left(\dfrac{0\cdot \ell}{0} = \dfrac{0}{0} \text{ con } -1 \leqslant \ell \leqslant 1\right) \overset{H}{\to}$

$$\overset{H}{\to} \lim_{x\to 0} \frac{2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} + x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{(1+x)^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}}{(1+x)^{-1}}$$

Poiché il $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ non esiste (cfr. §4.1-b), non esiste il limite del numeratore, quindi non esiste il limite del rapporto delle derivate. In questo caso, dunque, la regola dell'Hospital non è applicabile. Per altra via si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{0\cdot\ell}{1} = 0$$

396. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Sett\,Sh} x}{1 - \sqrt{1-x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{H}{\to} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}} = 2\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2+1}} = 2\cdot\dfrac{1}{1} = 2$

Sviluppando in serie (S.22, S.1), si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sett\,Sh} x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\dots}{1-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2-\dots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\dots}{\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2+\dots}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 1°.

7. $\lim_{x\to 1}\frac{\log x-\operatorname{sen}\log x}{\log^2 x\cdot\operatorname{sen}\log x}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Posto $\log x = y$ con $y\to 0$ per $x\to 1$ si ha:

$$\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{y^2\operatorname{sen} y}\overset{H}{\to}\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{2y\operatorname{sen} y+y^2\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}\cdot\frac{1}{2\frac{\operatorname{sen} y}{y}+\cos y}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{6}$$

Oppure, sviluppando in serie $\operatorname{sen} y$ (S.5):

$$\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{y^2\operatorname{sen} y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\left(y-\frac{y^3}{3!}+\dots\right)}{y^2\left(y-\frac{y^3}{3!}+\dots\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y^3}{3!}-\dots}{y^3-\frac{y^5}{3!}+\dots}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

ottenuto trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 3°.

98. Affinché la funzione sia infinitesima di ordine superiore al 2° rispetto ad x, deve essere (cfr. §3.2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\lambda x^2-\cos x}{x^2}=0$$

Il limite è indeterminato e della forma $\frac{0}{0}$. Lo si può calcolare sviluppando in serie (S.2, S.6):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\lambda x^2-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\dots-\lambda x^2-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\lambda x^2+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}-\lambda+\frac{11}{24}x^2+\dots\right)=\frac{3}{2}-\lambda$$

Affinché questo limite sia zero, deve essere: $\frac{3}{2}-\lambda=0\ \to\ \lambda=\frac{3}{2}$

Allo stesso risultato si perviene applicando la regola dell'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\lambda x^2-\cos x}{x^2}\overset{H}{\to}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-2\lambda x+\operatorname{sen} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}-\lambda+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)=$$

$$=1-\lambda+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\lambda$$

Per $\lambda=\frac{3}{2}$ la funzione diventa: $y=e^{x^2}-\frac{3}{2}x^2-\cos x$ che per $x\to 0$ è infinitesima.

Per trovarne l'ordine basta determinare n in modo che risulti finito e non nullo il:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\frac{3}{2}x^2-\cos x}{x^n}\overset{H}{\to}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-3x+\operatorname{sen} x}{nx^{n-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}$$

$$\overset{H}{\to}\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{x^2}+2x^2e^{x^2})-3+\cos x}{n(n-1)x^{n-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}(1+2x^2)-3+\cos x}{n(n-1)x^{n-2}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{\to}$$

$$\overset{H}{\to}\lim_{x\to 0}\frac{2[2xe^{x^2}(1+2x^2)+4xe^{x^2}]-\operatorname{sen} x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}-\operatorname{sen} x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{x^2}(3+2x^2)-\frac{\operatorname{sen} x}{x}}{n(n-1)(n-2)x^{n-4}}=[\text{per } n=4]=\frac{4(3+0)-1}{4(4-1)(4-2)\cdot 1}=\frac{11}{24}$$

La funzione quindi è un infinitesimo del 4° ordine.
La determinazione dell'ordine della funzione risulta però più agevole con gli sviluppi in serie S.2, S.6:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\frac{3}{2}x^2-\cos x}{x^n}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\dots-\frac{3}{2}x^2-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)}{x^n}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\dots}{x^n}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}\right)x^{4-n}+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{6!}\right)x^{6-n}+\dots\right]$$

Per $n=4$ il limite risulta finito e pari a: $\quad\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$

399. Affinché la funzione sia infinitesima di ordine superiore al 2° rispetto a x, deve essere:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\lambda x^2}{x^2}=0$$

Applicando gli sviluppi in serie S.4 ed S.7, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\dots-x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5-\dots+\frac{1}{2}\lambda x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\lambda-1)x^2-\frac{1}{4}x^4+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{15}\right)x^5+\dots}{x^2}= \qquad [10.1]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{15}x^3+\dots\right]=\frac{1}{2}(\lambda-1)$$

Affinché questo limite sia zero deve essere $\frac{1}{2}(\lambda-1)=0 \;\rightarrow\; \lambda=1$

Per $\lambda=1$ la funzione diventa $y=\log(1+x)-\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}x^2$. Il suo ordine di infinitesimo rispetto ad x è dato dal valore di n per cui risulta finito e non nullo il:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}x^2}{x^n}$$

Sviluppando il numeratore come nella [10.1] ove $\lambda=1$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{15}x^5+\dots}{x^n}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}x^{4-n}+\frac{1}{15}x^{5-n}+\dots\right)$$

Per $n=4$ il limite risulta finito e pari a $-\frac{1}{4}$. La funzione è, quindi, un infinitesimo del 4° ordine rispetto ad x.

400. Perché la retta sia asintoto per il ramo destro della funzione data, deve essere soddisfatta la condizione che la distanza $y(x)-f(x)$, tra un punto della retta ed un punto della curva aventi ugual ascissa, tenda a zero per $x\to+\infty$, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty}[y(x)-f(x)]=0$$

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{\operatorname{Ch}\log x^4-1}\right]=(\infty-\infty)=[\text{cfr. P.2, §3.8}]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left[x-\sqrt[4]{\frac{x^8+1-2x^4}{x^4}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{\frac{x^4-1}{x^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^4-1}}{x}\cdot\frac{x^2+\sqrt{x^4-1}}{x^2+\sqrt{x^4-1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x^2+\sqrt{x^4-1})}=0^+$$

Il fatto che il limite sia 0^+ ci dice, non solo che la retta è effettivamente l'asintoto cercato, ma anche che la differenza $y(x) - f(x)$ in un conveniente intorno di $+\infty$ si mantiene positiva, cioè, a parità di ascissa, i punti dell'asintoto hanno ordinata maggiore di quella dei punti appartenenti alla curva (vedi fig. 10.1).

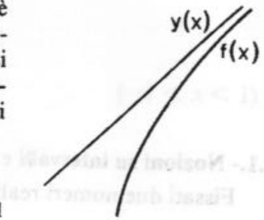


Fig. 10.1

APPENDICE

A.1.- Nozioni su intervalli e intorni

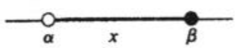
Fissati due numeri reali α e β (con $\alpha < \beta$), l'insieme di tutti i numeri reali x tali che:

1) 

$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ costituisce un intervallo chiuso.

2) 

$\alpha \leqslant x < \beta$ costituisce un intervallo aperto a destra.

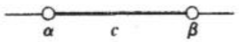
3) 

$\alpha < x \leqslant \beta$ costituisce un intervallo aperto a sinistra.

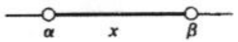
4) 

$\alpha < x < \beta$ costituisce un intervallo aperto.

Si dice intorno completo di un numero reale c ogni intervallo aperto, per esempio di estremi α e β, contenente c all'interno.



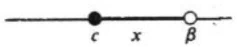
L'insieme di tutti i numeri reali x tali che:

5) 

$\alpha < x < \beta$ costituisce un intorno completo di c.

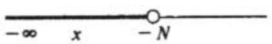
6) 

$\alpha < x \leqslant c$ costituisce un intorno sinistro di c.

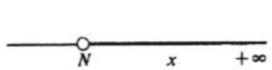
7) 

$c \leqslant x < \beta$ costituisce un intorno destro di c.

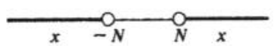
Ogni intervallo aperto tale che:

8) 

$x < -N$ costituisce un intorno sinistro dell'infinito (o, più semplicemente, un intorno di $-\infty$).

9) 

$x > N$ costituisce un intorno destro dell'infinito (o, più semplicemente, un intorno di $+\infty$).

10) 

$|x| > N \rightarrow x < -N \,,\; x > N$ costituisce un intorno completo dell'infinito.

A.2.- Sviluppi in serie più ricorrenti

S.1 $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \dots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

S.2 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

S.3 $a^x = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \frac{(x\log a)^3}{3!} + \dots$

S.4 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \qquad (-1 < x \leqslant 1)$

S.5 $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

S.6 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

S.7 $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$

S.8 $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots$

S.9 $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots \qquad (-1 < x < 1)$

S.10 $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \dots\right) \qquad (-1 < x < 1)$

S.11 $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (-1 < x < 1)$

S.12 $\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots \qquad (-1 < x < 1)$

S.13 $\log \operatorname{sen} x = \log x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \dots \qquad (-\pi < x < \pi)$

S.14 $\log \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

S.15 $\log \operatorname{tg} x = \log x + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

S.16 $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + \dots$

S.17 $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \dots\right)$

S.18 $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + \dots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

S.19 $\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

S.20 $\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

S.21 $\operatorname{Th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots$

S.22 $\quad \operatorname{Sett Sh} x = x - \dfrac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots$

S.23 $\quad \operatorname{Sett Ch} x = \log 2x - \dfrac{1}{2\cdot 2x^2} - \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \dots \qquad (x > 1)$

S.24 $\quad \operatorname{Sett Th} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \dots \qquad (-1 < x < 1)$

A.3.- SIMBOLOGIA

Sovrascritte:

a^n	esponente di una potenza
y'	derivata prima di una funzione
y''	derivata seconda di una funzione
y'''	derivata terza di una funzione
b^+	si tende a b per valori maggiori di b
b^-	si tende a b per valori minori di b

Simboli:

$\simeq$	circa uguale a
$\lvert\ \rvert$	valore assoluto o modulo
$\equiv$	coincidente con
$<$	minore di
$>$	maggiore di
$\leqslant$	minore o uguale a
$\geqslant$	maggiore o uguale a
$\neq$	diverso
$\measuredangle(AB)$	arco di estremi A e B
$\rightarrow$	tendente a (come limite); segue, discende
$\overset{H}{\rightarrow}$	passaggio al limite con la regola dell'Hospital
/	divisione. Esempio: $3/7 \equiv \dfrac{3}{7}$
$\sqrt{\ }$	radice
$\pm$	più o meno
!	fattoriale
∞	infinito
Δ	(*delta*) discriminante dell'equazione di 2° grado
ϵ	(*epsilon*) infinitesimo
π	(*pi-greco*) $\simeq$ 3,14159
Σ	(*sigma*) somma
arc	(in "arc sen" ecc.) inversa (circolare)
Ch	coseno iperbolico
cos	coseno
cosec	cosecante
ctg	cotangente
Cth	cotangente iperbolica
e	base dei logaritmi naturali o Neperiani $\simeq$ 2,71828
f	funzione
g	funzione
k	costante
l	limite finito
lim	limite
log	logaritmo naturale o in base e
$\log_a$	logaritmo in base a
P.1	riferimento alla pubblicazione 1
sec	secante
Sech	secante iperbolica
sen	seno
Sett	(in "Sett Sh" ecc.) inversa (iperbolica)
Sh	seno iperbolico
tg	tangente
Th	tangente iperbolica
x	variabile indipendente
y	variabile dipendente

43 MANUALE PRATICO PER LA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Sono sinteticamente esaminati gli argomenti implicati nella risoluzione dei problemi di Scienza delle Costruzioni: strutture isostatiche ed iperstatiche: cedimenti di vincoli e dilatazioni termiche; diagrammi delle azioni interne in strutture con carichi distribuiti.

44 TERMODINAMICA DELLE REAZIONI CHIMICHE. Parte prima
47 esercizi ed esempi concernenti l'energia interna di un sistema, la capacità termica delle sostanze e l'entalpia associata ad una trasformazione termodinamica.

45 TERMODINAMICA DELLE REAZIONI CHIMICHE. Parte seconda
51 esempi ed esercizi concernenti entropia, energia libera, costanti di equilibrio.

46 ACIDI E BASI. Parte prima
79 esercizi ed esempi concernenti il calcolo del pH di acidi e basi forti; acidi e basi deboli monovalenti; acidi poliprotici; basi poliacide; anfoliti.

47 ACIDI E BASI. Parte seconda
79 esercizi ed esempi concernenti l'idrolisi, le soluzioni tampone, le miscele di acidi e basi, gli acidi e le basi in solventi non acquosi.

48 CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA. Parte prima
33 esercizi sulle reti elettriche lineari per illustrare i principi di Kirchhoff, il principio di sovrapposizione degli effetti, i teoremi di Thevenin, Norton e Millman, il metodo dei potenziali ai nodi, il metodo delle correnti cicliche, il principio di dualità, i teoremi di reciprocità e di sostituzione.

49 CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA. Parte seconda
41 esercizi concernenti la potenza elettrica di un bipolo, le perdite ed il rendimento di un sistema; la risoluzione di circuiti elettrici contenenti generatori pilotati; lo studio di reti contenenti resistori non lineari e diodi ideali.

50 CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE ALTERNATA
65 esercizi concernenti la risoluzione di reti elettriche in regime sinusoidale e l'utilizzo dei diagrammi vettoriali; potenze e teorema di Boucherot; rendimento di una linea elettrica in regime sinusoidale e rifasamento del carico.

51 LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. Esercizi
44 esempi ed esercizi risolti per mostrare vari metodi di calcolo di limiti di funzioni di più variabili reali; per risolvere problemi inerenti alla continuità in un punto ed al prolungamento per continuità di funzioni di due variabili reali.

52 ESERCITAZIONI DI ANALISI CHIMICA DEI PRODOTTI ALIMENTARI
54 esperimenti pratici di laboratorio: analisi centesimale; analisi del latte e dei formaggi, delle bevande analcoliche, dei vini e degli oli; analisi strumentale: spettrofotometria UV e di assorbimento atomico e di emissione; cromatografia liquida ad alta pressione; gascromatografia; metodi elettrochimici.

53 INTRODUZIONE AI PROCESSI STOCASTICI: LE CATENE DI MARKOV
12 esercizi e numerosi esempi per meglio comprendere le catene di Markov, modello matematico naturale per molti fenomeni fisici, biologici, economici e sociali. I processi di Markov si ritrovano nella pianificazione a breve e a lungo termine di una produzione industriale di complessi interdipendenti.

54 ELETTROCHIMICA. Esercizi
31 esempi ed esercizi completamente svolti, concernenti la conducibilità degli elettroliti; le leggi di Faraday e i processi elettrolitici; gli equilibri di ossidoriduzione e i potenziali elettronici; il calcolo della f.e.m. di cella.

55 LA TRASFORMATA DI LAPLACE. Parte prima. Proprietà e applicazioni
40 esempi per descrivere l'uso della trasformata di Laplace nell'analisi dei sistemi differenziali lineari e stazionari, in risposta a segnali di ingresso anche non causali. L'integrale di definizione viene applicato ad un unico esempio da cui poi, applicando elegantemente le proprietà, si deducono le trasformate dei segnali più comuni. Come istante iniziale nell'integrale di definizione e nella formula di derivazione viene specificato $t=0^-$, anziché semplicemente $t=0$, illustrando nei dettagli le conseguenze che derivano da tale precisazione.

56 LA TRASFORMATA DI LAPLACE. Parte seconda. La funzione di trasferimento
23 esempi di calcolo della funzione di trasferimento per sistemi fisici di vario genere, elettrici e non. Partendo dal significato di funzione di trasferimento si arriva alla descrizione delle sue proprietà e ai metodi di rappresentazione grafica, ovvero i diagrammi di Bode, i diagrammi polari e quelli di Nyquist.

57 DOPPI E MULTI-BIPOLI
49 esercizi sulla risoluzione delle reti in continua e alternata utilizzando la rappresentazione di circuiti a 2 o n porte. Vengono descritte le matrici caratteristiche e le trasformazioni di rappresentazione per un doppio bipolo, i circuiti equivalenti e i possibili collegamenti tra doppi bipoli. Una particolare attenzione è dedicata ai circuiti contenenti il trasformatore ideale e il doppio bipolo induttivo. Infine, per i multi-bipoli, viene introdotta la matrice delle ammettenze indefinita che permette di calcolare molto velocemente, partendo dai parametri di un n-1-polo ricavato da un n-polo in cui si è definito un morsetto come riferimento, i parametri di un qualunque altro n-1-polo ottenuto sempre dallo stesso n-polo cambiando però la scelta del morsetto di riferimento.