Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 14 punti

Risolvere

$$e^{z^2-|z^2|} = e^{\mathrm{Im}(z^2)}$$

Soluzione dell'esercizio 1

Poiché $e^z = e^w$ se e solo se $z = w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, l'equazione è equivalente a

$$z^2 - |z^2| = \mathrm{Im}(z^2) + 2k\pi i\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

ossia, se $z = x + iy$,

$$x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 + y^2) = 2xy + 2k\pi i\,.$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2y^2 = 2xy\,, \\ 2xy = 2k\pi\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $(x, 0)$ è soluzione con $k = 0$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ e non ci sono soluzioni per $k > 0$. Quando $k < 0$ abbiamo $x = k\pi/y$ e $-y^2 = k\pi$, quindi

$$y = \pm\sqrt{-k\pi}\,, \quad x = -y\,.$$

Le soluzioni sono

$$z = x\,, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } z = \pm(1-i)\sqrt{k\pi}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Esercizio 2 18 punti

Sia, assegnato $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$f_a(x) = \frac{e^{\sin(ax^2)} - \cos(ax)}{\log(\cos x)}.$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} f_a(x).$$

Successivamente, calcolare al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - b}{x^2}$$

stabilendo infine se esistano valori di $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ per cui esso sia nullo (non è richiesto il calcolo esplicito di tali valori)

Soluzione dell'esercizio 2

Vale, qui e in seguito per $x \to 0$:

$$\sin(ax^2) = ax^2 + o(x^5), \quad e^{\sin(ax^2)} = e^{ax^2+o(x^5)} = 1 + ax^2 + o(x^3), \quad \cos(ax) = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^3)$$

e quindi:

$$e^{\sin(ax^2)} - \cos(ax) = \left(a + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + o(x^3) = \frac{a}{2}(2+a)x^2 + o(x^3).$$

Inoltre:

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Dunque:

$$f_a(x) = \frac{\frac{a}{2}(2+a)x^2 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -a(2+a).$$

Per rispondere alla seconda domanda occorre sviluppare f_a a un ordine superiore. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
e^{\sin(ax^2)} &= e^{ax^2+o(x^5)} = 1 + ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + o(x^5),\\
\cos(ax) &= 1 - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
e^{\sin(ax^2)} - \cos(ax) &= ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
&= \left(a + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right)x^4 + o(x^5),\\
\log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{\left(a + \frac{a^2}{2}\right) + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right)x^2 + o(x^3)}{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} = -\frac{\left(2a + a^2\right) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right)x^2 + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\\
&= -\left[\left(2a + a^2\right) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right)x^2 + o(x^3)\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right]\\
&= -\left(2a + a^2\right) + \left[\frac{2a + a^2}{6} - a^2 + \frac{a^4}{12}\right]x^2 + o(x^3)\\
&= -\left(2a + a^2\right) + \frac{a}{12}\left[4 - 10a + a^3\right]x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Quindi

$$f_a(x) - b = -b - \left(2a + a^2\right) + \frac{a}{12}\left[4 - 10a + a^3\right] x^2 + o(x^3),$$

e da ciò segue che il limite richiesto vale $+\infty$ se $b < -(2a + a^2)$ e che esso vale $-\infty$ se $b > -(2a + a^2)$. Se, infine, $b = -(2a + a^2)$ si ha:

$$\frac{f_a(x) + 2a + a^2}{x^2} = \frac{\frac{a}{12}\left[4 - 10a + a^3\right] x^2 + o(x^3)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{a}{12}\left(4 - 10a + a^3\right)$$

Infine, il polinomio $p(a) = 4 - 10a + a^3$ ha chiaramente tre zeri, in quanto è positivo se $a = 0$, negativo ad esempio se $a = 1$, positivo per a positivo e sufficientemente grande, negativo per a negativo e sufficientemente grande in modulo. Per tali tre valori, ed esattamente per essi, il termine appena calcolato è nullo.

Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 14 punti

Risolvere

$$e^{|z^2|-\mathrm{Im}(z^2)} = e^{z^2}$$

Soluzione dell'esercizio 1

Poiché $e^z = e^w$ se e solo se $z = w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, l'equazione è equivalente a

$$|z^2| - \mathrm{Im}(z^2) = z^2 + 2k\pi i\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

ossia, se $z = x + iy$,

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x^2 - y^2 + 2ixy) + 2k\pi i\,.$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2y^2 = 2xy\,, \\ 2xy = -2k\pi\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $(x, 0)$ è soluzione con $k = 0$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$ e non ci sono soluzioni per $k > 0$. Quando $k < 0$ abbiamo $x = -k\pi/y$ e $y^2 = -k\pi$, quindi

$$x = y = \pm\sqrt{-k\pi}\,.$$

Le soluzioni sono

$$z = x\,, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } z = \pm(1+i)\sqrt{k\pi}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Esercizio 2 18 punti

Sia, assegnato $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$f_a(x) = \frac{e^{-\sin(ax^2)} - \cos(ax)}{\log(\cos x)}.$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} f_a(x).$$

Successivamente, calcolare al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_a(x) - b}{x^2}$$

stabilendo infine se esistano valori di $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ per cui esso sia nullo (non è richiesto il calcolo esplicito di tali valori)

Soluzione dell'esercizio 2

Vale, qui e in seguito per $x \to 0$:

$$\sin(ax^2) = ax^2 + o(x^5), \quad e^{-\sin(ax^2)} = e^{-ax^2+o(x^5)} = 1 - ax^2 + o(x^3), \quad \cos(ax) = 1 - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^3)$$

e quindi:

$$e^{-\sin(ax^2)} - \cos(ax) = \left(\frac{a^2}{2} - a\right) x^2 + o(x^3) = \frac{a}{2}(a-2)x^2 + o(x^3).$$

Inoltre:

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Dunque:

$$f_a(x) = \frac{\frac{a}{2}(2-a)x^2 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a(a-2).$$

Per rispondere alla seconda domanda occorre sviluppare f_a a un ordine superiore. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
e^{-\sin(ax^2)} &= e^{-ax^2+o(x^5)} = 1 - ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + o(x^5),\\
\cos(ax) &= 1 - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
e^{-\sin(ax^2)} - \cos(ax) &= -ax^2 + \frac{1}{2}a^2x^4 + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\\
&= \left(\frac{a^2}{2} - a\right) x^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right) x^4 + o(x^5),\\
\log(\cos x) &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
f_a(x) &= \frac{\left(\frac{a^2}{2} - a\right) + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{24}\right) x^2 + o(x^3)}{-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^3)} = -\frac{(a^2 - 2a) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right) x^2 + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\\
&= -\left[(a^2 - 2a) + \left(a^2 - \frac{a^4}{12}\right) x^2 + o(x^3)\right]\left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right]\\
&= \left(2a - a^2\right) + \left[\frac{a^2 - 2a}{6} - a^2 + \frac{a^4}{12}\right] x^2 + o(x^3)\\
&= \left(2a - a^2\right) + \frac{a}{12}\left[a^3 - 10a - 4\right] x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Quindi

$$f_a(x) - b = -b + 2a - a^2 + \frac{a}{12}\left[a^3 - 10a - 4\right]x^2 + o(x^3),$$

e da ciò segue che il limite richiesto vale $+\infty$ se $b < 2a - a^2$ e che esso vale $-\infty$ se $b > 2a - a^2$. Se, infine, $b = 2a - a^2$ si ha:

$$\frac{f_a(x) - 2a + a^2}{x^2} = \frac{\frac{a}{12}\left[a^3 - 10a - 4\right]x^2 + o(x^3)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{a}{12}\left(a^3 - 10a - 4\right)$$

Infine, il polinomio $p(a) = a^3 - 10a - 4$ ha chiaramente tre zeri, in quanto è positivo ad esempio se $a = -2$, negativo ad esempio se $a = 2$, positivo per a positivo e sufficientemente grande, negativo per a negativo e sufficientemente grande in modulo. Per tali tre valori, ed esattamente per essi, il termine appena calcolato è nullo.