

Marco Contedini

LEZIONE 09

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

19 novembre 2021

1 Formula di Taylor

1. Calcolare, al variare del parametro reale a ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a}$$

2. Stabilire per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a \left[4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right]$$

esiste finito e diverso da zero, e per tale valore di a calcolarlo.

3. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

sia infinitesimo del massimo ordine possibile rispetto ad x per $x \rightarrow 0$.

4. Si consideri, al variare del parametro reale b , la funzione

$$f_b(x) = \cos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2 + bx^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}\log(1+2x)} - x.$$

Determinarne il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor di f_b centrato in $x = 0$

5. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[5]{1+5x}}{xe^x}, \quad x > 0.$$

- (a) Mostrare che essa è ben definita per $x > 0$ sufficientemente piccolo.
(b) Determinare i primi due termini non nulli dello sviluppo di Taylor di f centrato in $x = 0$.
6. Stabilire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e diverso da zero e, per tale valore, calcolarlo:

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{\log(1 + \cos x) - \cos x}{(x + \frac{\pi}{2})^\alpha}$$

2 Continuità

7. quale delle seguenti funzioni ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$?

$$\begin{array}{ll} (a) & \frac{|x-1|}{x-1} \\ (b) & e^{\frac{1}{1-x}} \\ (c) & (x-1) \left(\operatorname{Th} \frac{1}{x-1} \right) \\ (d) & \frac{1}{(1-x)^4} \end{array}$$

8. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2|1-x|\sin \frac{\pi}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

sia continua su tutto \mathbb{R} .

3 Esercizi proposti

1. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine quattro, centrato in $x = 1$, della seguente funzione:

$$f(x) = \left[e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x-1) \right] \left(1 - \frac{1}{1 + \sin(x-1)} \right).$$

2. Determinare il polinomio di Taylor di grado 4, centrato in $x_0 \rightarrow 0$, della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Successivamente calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il primo termine dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$g(x) = f(x) - \log(1 - \alpha x^2) - 1$$

3. Determinare i primi 4 termini non nulli dello sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 1$ della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

4. Determinare, al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il termine principale dello sviluppo di McLaurin della funzione:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = 2(\cos x)^\alpha - [1 - \sin(x^2)]^\beta - x^5 - 1$$

5. Calcolare, al variare del parametro $a > 0$, il limite per $x \rightarrow 0^+$ della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^a} \left[\frac{\sin(2x)}{1 + \sin(x^2)} - \frac{2x}{\cos x} \right].$$

6. Trovare un polinomio $P(x)$ per cui la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty), \\ P(x) & \text{se } x \in (-2, -1) \cup (1, 2). \\ 1 & \text{se } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

risulti continua su tutto \mathbb{R} .

7. Stabilire per quali valori dei parametri a e b la seguente funzione è continua

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & \text{se } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b, & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4 Soluzioni

1. Se $a > 0$ il limite presenta una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Per $x \rightarrow 0^+$, si ha:

$$\log(1 - 2x + x^2) = 2 \log |1 - x| = 2 \log(1 - x)$$

($1 - x$ è positivo in un intorno di $x = 0$).

Sviluppando fino al terzo ordine:

$$2 \log(1 - x) = -2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Inoltre:

$$\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4).$$

Pertanto:

$$\frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a} = \frac{-2x^3 + o(x^3)}{ax^3 + x^a}.$$

Se $a > 3$: $ax^3 + x^a = ax^3 + o(x^3)$. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{ax^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{a}$$

Se $a = 3$: $ax^3 + x^a = 4x^3$. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{4x^3} = -\frac{1}{2}$$

Se $0 < a < 3$: $ax^3 + x^a = x^a + o(x^a)$. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 2x + x^2) + \sin 2x + x^2}{ax^3 + x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{x^a + o(x^a)} = 0^-$$

Lo stesso accade se $a \leq 0$, infatti: Se $a = 0$, il limite è della forma $\frac{0^-}{1}$, se $a < 0$ il limite è della forma $\frac{0^-}{+\infty}$

2. Consideriamo dapprima la funzione $4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ e, posto $t = 1/x$ (dunque $t \rightarrow 0^+$) studiamo il comportamento nell'intorno dell'origine della funzione

$$g(t) := 4 + \frac{\cos(3t)}{t^2} + \frac{t-1}{t^2} e^t.$$

Si ha, per $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} g(t) &= 4 + \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{9}{2}t^2 + o(t^3)\right) + \frac{t-1}{t^2} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \\ &= \frac{t}{3} + o(t). \end{aligned}$$

Tornando alla variabile originaria abbiamo quindi, per $x \rightarrow +\infty$:

$$x^a \left[4 + x^2 \cos\left(\frac{3}{x}\right) - x(x-1)e^{\frac{1}{x}}\right] = x^a \left[\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Quindi il limite assegnato esiste finito e diverso da zero se e solo se $a = 1$, e in tal caso tale limite vale $\frac{1}{3}$.

3. Scrivendo i primi due termini non nulli dello sviluppo di Taylor di $f(x)$ centrato in zero:

$$f(x) = \left(b - a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(ab - b^2 + \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)$$

si evince che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore al quarto rispetto ad x soltanto se:

$$\begin{cases} b - a - \frac{1}{2} = 0 \\ ab - b^2 + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

vale a dire se $a = -\frac{5}{12}$ e $b = \frac{1}{12}$.

4. Valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} 1 - x + \frac{1}{2}\log(1 + 2x) &= 1 - x + \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \\ \sqrt[3]{1 - x + \frac{1}{2}\log(1 + 2x)} &= \sqrt[3]{1 - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)} \\ &= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3); \\ \cos\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) &= 1 - 2x^2 + o(x^3); \\ f_b(x) &= 1 - 2x^2 - 2 + bx^2 + 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3) \\ &= \left(b - \frac{7}{3}\right)x^2 + \frac{4}{9}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Quindi il primo termine non nullo nello sviluppo richiesto è $\left(b - \frac{7}{3}\right)x^2$ se $b \neq \frac{7}{3}$, mentre esso è $\frac{4}{9}x^3$ se $b = \frac{7}{3}$.

5. (a) Si noti che, per $x \rightarrow 0$,

$$\sqrt[5]{1 + 5x} = 1 + \frac{1}{5}(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\frac{(5x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + x - 2x^2 + o(x^2).$$

Quindi, sempre per $x \rightarrow 0$, $1 + x - \sqrt[5]{1 + 5x} = 2x^2 + o(x^2)$, il che mostra la positività del membro di sinistra per x sufficientemente piccolo.

- (b) Sviluppando come sopra, ma fino al terzo ordine si ottiene, per $x \rightarrow 0$,

$$\sqrt[5]{1 + 5x} = 1 + x - 2x^2 + 6x^3 + o(x^3)$$

Quindi, per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2x^2 - 6x^3 + o(x^3)}}{xe^x} = \sqrt{2}\sqrt{1 - 3x + o(x)}e^{-x} \\ &= \sqrt{2}\left[1 - \frac{3}{2}x + o(x)\right][1 - x + o(x)] \\ &= \sqrt{2}\left(1 - \frac{5}{2}x\right) + o(x) \end{aligned}$$

Il polinomio di grado uno cercato è quindi $P(x) = \sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{2}}x$.

6. Si noti che, per esempio usando le formule di somma per il coseno,

$$\cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Posto allora $x + \frac{\pi}{2} =: t$ il limite cercato coincide con

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sin t) - \sin t}{t^\alpha}.$$

Sviluppiamo il numeratore. Si ha, per $t \rightarrow 0$ (si noti che è inutile, sebbene ovviamente non scorretto, sviluppare il seno fino al terzo ordine);

$$\log(1 + \sin t) - \sin t = \log(1 + t + o(t^2)) - t + o(t^2) = t - \frac{t^2}{2} - t + o(t^2) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Quindi il limite cercato esiste finito e diverso da zero se e solo se $\alpha = 2$, e in tal caso esso vale $-1/2$.

Ovviamente il limite poteva essere svolto usando lo sviluppo di $\cos x$ centrato in $x_0 = -\pi/2$, che in base alla formula di Taylor generale vale $(x + \frac{\pi}{2}) + o\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2\right]$ per $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

7. (a) La funzione è discontinua in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

- (b) La funzione è discontinua in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$$

- (c) Si ricorda che $\text{Th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Th } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Th } x = -1$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left(\text{Th } \frac{1}{x-1} \right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \left(\text{Th } \frac{1}{x-1} \right) = 0$$

La funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$.

- (d) La funzione è discontinua in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1-x)^4} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1-x)^4} = +\infty$$

8. La funzione $f(x) = x^2|1-x|\sin \frac{\pi}{x}$ è continua su tutto $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ in quanto prodotto di funzioni continue.

Verifichiamo la continuità di $f(x)$ nell'origine.

Si ha: $-2x^2 < f(x) < 2x^2$ per $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Quindi, per il criterio del confronto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

La funzione è continua su tutto \mathbb{R} in quanto continua anche nell'origine.

5 soluzione degli esercizi proposti

1. Sviluppiamo separatamente le singole funzioni che appaiono nell'espressione di f . Si ha, posto $t = x - 1$, cosicchè $t \rightarrow 0$ se $x \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned}
 \sin(\log x) &= \sin[\log(1 + (x - 1))] = \sin[\log(1 + t)] = \sin\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) \\
 &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)\right)^3 + o(t^4) \\
 &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3) - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \\
 &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3). \\
 e^{(x-1)\sin(\log x)} &= e^{t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)} \\
 &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4) + \frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + o(t^4)\right)^2 + o(t^4) \\
 &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{t^4}{2} + o(t^4) \\
 &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + o(t^4).
 \end{aligned}$$

Quindi, essendo $\cos(x - 1) = \cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$, si ha che, per $x \rightarrow 1$, cioè per $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x - 1) &= 1 + t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{2}{3}t^4 - \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4\right) + o(t^4) \\
 &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{5}{8}t^4 + o(t^4).
 \end{aligned}$$

Si noti quindi che basterà ora sviluppare il fattore $1 - \frac{1}{1+\sin(x-1)}$ al secondo ordine. Si ha, sempre per $x \rightarrow 1$, cioè per $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{1 + \sin(x - 1)} &= 1 - \frac{1}{1 + \sin t} = 1 - \frac{1}{1 + t + o(t^2)} \\
 &= 1 - \left[1 - (t + o(t^2)) + (t + o(t^2))^2 + o(t^2)\right] \\
 &= t - t^2 + o(t^2).
 \end{aligned}$$

A posteriori, questo mostra che sarebbe bastato sviluppare all'ordine tre il primo fattore che compare nell'espressione di f , ma abbiamo preferito per maggior chiarezza procedere senza far uso di considerazioni non immediatamente evidenti. In conclusione:

$$\begin{aligned}
 \left[e^{(x-1)\sin(\log x)} - \cos(x - 1)\right] \left(1 - \frac{1}{1 + \sin(x - 1)}\right) &= \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3)\right) (t - t^2 + o(t^2)) \\
 &= \frac{3}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^4 + o(t^4) \\
 &= \frac{3}{2}t^3 - 2t^4 + o(t^4).
 \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor cercato è dunque, tornando alla variabile originaria x , $P_4(x) = \frac{3}{2}(x-1)^3 - 2(x-1)^4$.

2. Vale, per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Il polinomio richiesto è quindi $P_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4$. Si ha allora, sempre per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}g(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) - \left(-\alpha x^2 - \frac{\alpha^2 x^4}{2} + o(x^4) \right) - 1 \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(\frac{5}{24} + \frac{\alpha^2}{2} \right) x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Ne segue che, per $\alpha \neq -1/2$ il termine dominante nello sviluppo di g per $x \rightarrow 0$ è $-(\alpha + \frac{1}{2})x^2$. Se invece $\alpha = -1/2$ il termine di grado due si annulla e il termine dominante è il successivo, cioè $\frac{1}{3}x^4$.

3. Ponendo $x = h + 1$, si ha: $f(x) = e^{g(h)}$ con $g(h) = \frac{1}{1+h}$. Per sviluppare una funzione composta $f(g(h))$ conviene partire dall'interno: scrivere la formula di Taylor prima per g e poi scrivere lo sviluppo di f centrato in $g(x)$:

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{1+h}} &= \exp [1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3)] \\ &= e \cdot \exp [-h + h^2 - h^3 + o(h^3)] \\ &= e \left[1 + (-h + h^2 - h^3 + o(h^3)) + \frac{1}{2} (-h + h^2 - h^3 + o(h^3))^2 \right] \\ &\quad + e \left[\frac{1}{6} (-h + h^2 - h^3 + o(h^3))^3 + o(x^3) \right] \\ &= e \left[1 - h + \frac{3}{2}h^2 - \frac{13}{6}h^3 + o(h^3) \right]\end{aligned}$$

4. Si noti che la funzione è ben definita in un intorno dell'origine per ogni valore di α e β .

La presenza del termine $-x^5$ e la parità dei primi due termini suggerisce di arrestare lo sviluppo di McLaurin al quinto ordine.

$$\begin{aligned}(\cos x)^\alpha &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^\alpha \\ &= 1 + \alpha \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2 + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{24}x^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - \sin x^2)^\beta &= (1 - x^2 + o(x^5))^\beta \\
&= 1 + \beta(-x^2 + o(x^5)) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}(-x^2 + o(x^5))^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \beta x^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}x^4 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di McLaurin della funzione arrestato al quinto ordine è il seguente:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (\beta - \alpha)x^2 + \left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{12} - \frac{\beta(\beta-1)}{2} \right) x^4 - x^5 + o(x^5).$$

Se $\alpha \neq \beta$ il termine principale della funzione è dell'ordine x^2 .

Se invece $\alpha = \beta$ il termine principale è almeno del quarto ordine:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\alpha}(x) &= \left(\frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{12} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \right) x^4 - x^5 + o(x^5) \\
&= \left(-\frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha \right) x^4 - x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Il termine del quarto ordine si annulla se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \frac{4}{3}$.

Pertanto, se $\alpha = \beta \neq 0$ e $\alpha = \beta \neq \frac{4}{3}$, il termine principale della funzione è dell'ordine x^4 .

Se $\alpha = \beta = 0$ oppure $\alpha = \beta = \frac{4}{3}$, il termine principale della funzione è dell'ordine x^5 .

5. Si noti che, per $x \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2x)}{1 + \sin(x^2)} - \frac{2x}{\cos x} &= \frac{\cos x \sin(2x) - 2x[1 + \sin(x^2)]}{[1 + \sin(x^2)] \cos x} \\
&= \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] \left[2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right] - 2x[1 + x^2 + o(x^2)]}{[1 + \sin(x^2)] \cos x} \\
&= \frac{-\frac{13}{3}x^3 + o(x^3)}{[1 + \sin(x^2)] \cos x} \sim -\frac{13}{3}x^3 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.
\end{aligned}$$

Dunque il limite cercato vale zero se $a \in (0, 3)$, vale $-\infty$ se $a > 3$ e vale $-13/3$ se $a = 3$.

6. Scelgo $P(x)$ pari e tale che $P(1) = 1$ e $P(2) = 0$.

Il fatto che $P(x)$ sia pari ci garantisce che anche $P(-1) = 1$ e $P(-2) = 0$.

Avendo soltanto due condizioni, scelgo un polinomio di secondo grado a due parametri arbitrari: $P(x) = ax^2 + c$.

Deve valere:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ 4a + c = 0 \end{cases}$$

Da cui: $a = -\frac{1}{3}$ e $c = \frac{4}{3}$.

Una possibile scelta del polinomio è quindi: $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$.

7. Abbiamo: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
Deve quindi valere:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -a + b = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = a + b = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Le condizioni sono entrambe verificate se: $a = -1$ e $b = 1$. Per tali valori $f(x)$ è continua su tutto \mathbb{R} .