Marco Contedini

LEZIONE 13

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

18 dicembre 2020

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Integrali definiti

1. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(a) \quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3 - x| \arctan x \, dx$$

$$(b) \quad \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3 - x) \arctan x \, dx$$

2. Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \sin x \cos x \log(2 - \cos x)$$

ristretta sul dominio $\mathcal{D}_f = [0, \pi]$.

3. Calcolare l'area della regione limitata dai grafici delle funzioni f e g così definite:

$$f(x) = (x^3 - x)e^{-x^2} \sin^2 x \qquad g(x) = (x - x^3)e^{-x^2} \cos^2 x$$

2 Integrali impropri

4. Calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$$

5. Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \quad \int_2^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x \log x} dx \qquad (b) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 \frac{1}{x}}{\log (x^2 + 1) - 2 \log x} dx$$

$$(c) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x} \log(1 + \sqrt{x})} dx \quad (d) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

6. stabilire al variare del parametro α l'esistenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (4 + x)^{\alpha+1}} dx \qquad (b) \quad \int_2^3 \frac{x \, [\sin(x - 2)]^\alpha}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

3 Insieme di definizione di funzioni integrali

7. Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x - 2\sqrt[3]{x + 4}}.$$

Determinare per quali valori di $s \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_5^s f(x) \, \mathrm{d}x$, eventualmente inteso in senso generalizzato, esiste finito.

8. Stabilire il dominio della seguente funzione:

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t - 2)\sqrt{|t - 3|}} dt$$

4 Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(a)\quad \int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{1+2|x|})\,\mathrm{d}x$$
$$(b)\quad \int_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^3 x}$$
$$(c)\quad \int_{0}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

2. Calcolare l'area compresa tra i grafici delle funzioni f e g così definite:

$$f(x) = xe^{-x} \qquad g(x) = x\,(e^x - 2) \qquad \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$$

3. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}.$$

   Calcolare poi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}\,\mathrm{d}x.$$

4. Stabilire l'esistenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a)\quad \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx \qquad (b)\quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$$
$$(c)\quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \qquad (d)\quad \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x} dx$$
$$(e)\quad \int_0^{1} x^{\log x} dx \qquad (f)\quad \int_0^{1} \sqrt{\frac{\sin\left(1-\sqrt{\cos x}\right)}{x^3}} dx$$
$$(g)\quad \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx$$

5. stabilire al variare del parametro α l'esistenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+2-|x^2-x-2|}{x^\alpha} dx$$

6. Dimostrare che se $f(x)$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ monotona decrescente tale che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, allora l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin x dx$$

   risulta convergente.

7. Stabilire il dominio della seguente funzione:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\left(\sqrt{t+1} - e^{t/2}\right)^2 + \left(\cos t - \tanh \frac{1}{t}\right)^2}{|t|^{9/2}} dt$$

8. Determinare la forma esplicita (in termini di funzioni elementari) della seguente funzione:

$$F(x) = \int_3^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 5t + 6}} dt$$

Determinare inoltre il dominio di $F(x)$ ed i valori di x per cui: $F(x) = 0$.

9. Determinare:

$$\int_x^3 \frac{1 + \sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t} - 1} dt$$

10. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = x^2 \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Stabilire poi per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ esiste finito (se necessario l'integrale è inteso in senso generalizzato)

$$\int_0^x t^2 \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \, \mathrm{d}t.$$

Calcolare infine, al variare del parametro $a > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a} \int_0^x t^2 \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \, \mathrm{d}t.$$

11. Calcolare:

$$\int \frac{e^{3x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} \, \mathrm{d}x$$

Quindi, posto:

$$F_\alpha(x) = \int_{-1}^x \left| \frac{e^{3t} + e^{-t}}{e^{2t} - e^{-2t}} \right|^\alpha \, \mathrm{d}t$$

determinare il dominio di $F_\alpha(x)$ al variare del parametro $\alpha > 0$.

12. Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia $[x]$ la parte intera di x. Calcolare:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n (x - [x])^{[x]} \, \mathrm{d}x.$$

5 Soluzioni

5.1 Integrali definiti

1. (a) Risulta:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x^3 - x| \arctan x \, dx = 0$$

Infatti, l'integranda è una funzione dispari, in quanto è prodotto di una funzione pari (il modulo di una funzione dispari è una funzione pari) per una funzione dispari ($\arctan x$).
Dimostriamo che:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \quad \text{se } f(-x) = -f(x), \quad [-a, a] \subseteq \mathcal{D}_f$$

Dim.
Operando la sostituzione $t = -x$:

$$\int_{0}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{-a} f(-t)\, dt = \int_{0}^{-a} f(t)\, dt = -\int_{-a}^{0} f(t)\, dt$$

Quindi:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0$$

(b) L'integranda è una funzione pari. Analogamente a quanto provato nell'esercizio precedente, si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx \quad \text{se } f(-x) = f(x), \quad [-a, a] \subseteq \mathcal{D}_f$$

Calcoliamo una primitiva della funzione integranda, dapprima integrando per parti:

$$\int (x^3 - x) \arctan x \, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \arctan x - \int \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{x^2+1} dx$$

L'integrale del secondo membro è razionale e può essere calcolato utilizzando il trinomio notevole $x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2+1)(x^2-3)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\int \frac{x^4 - 2x^2}{x^2+1} dx &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^2+1} dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2+1} dx = 1 \\ &= \frac{1}{4}\int (x^2 - 3) dx + \frac{3}{4}\arctan x + C = \\ &= \frac{x^3}{12} - \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}\arctan x + C\end{aligned}$$

Quindi:

$$F(x) := \int (x^3 - x) \arctan x \, dx = -\frac{x^3}{12} + \frac{3x}{4} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\right) \arctan x + C$$

L'integrale definito risulta:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(x^3 - x\right) \arctan x \, dx = 2F(\sqrt{3}) - 2F(0) = \sqrt{3}$$

.

2. Sia $f(x)$ la funzione integranda. Occorre determinare gli zeri della funzione integranda: $f(x) = 0$ se $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ sono le uniche intersezioni con l'asse delle x nella restrizione del dominio $\mathcal{D}_f = [0, \pi]$.
Successivamente si determinano le regioni di positività della $f(x)$:
$f(x) > 0$ se $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$f(x) < 0$ se $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
L'area della regione compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione è data da: $A = A_1 - A_2$, dove:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \quad A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

Calcoliamo dapprima A_1.
Operando la sostituzione: $t = \cos x$, si ha:

$$A_1 = -\int_1^0 t \log(2-t)dt = \int_0^1 t\log(2-t)dt$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{t^2}{2}\log(2-t)\bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{2-t}dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2-4}{2-t}dt + 2\int_0^1 \frac{1}{2-t}dt = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (t+2)dt - 2\log(2-t)\bigg|_0^1 = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + 2t\right)\bigg|_0^1 + 2\log 2 = \\
&= -\frac{5}{4} + 2\log 2
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$A_2 = -\int_0^{-1} t\log(2-t)dt = \int_{-1}^0 t\log(2-t)dt$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{t^2}{2}\log(2-t)\bigg|_{-1}^0 - \left(\frac{t^2}{4} + t\right)\bigg|_{-1}^0 - 2\log(2-t)\bigg|_{-1}^0 = \\
&= \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{4} - 1 - 2\log 2 + 2\log 3 = \\
&= \frac{3}{2}\log 3 - 2\log 2 - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Infine: $A = A_1 - A_2 = 4\log 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\log 3$.

3. Innanzitutto cerchiamo i punti di intersezione dei due grafici.
$f(x) = g(x)$ se:

$$(x^3 - x)e^{-x^2}\sin^2 x = (x - x^3)e^{-x^2}\cos^2 x$$

vale a dire:

$$(x^3 - x)e^{-x^2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

ovvero:

$$x^3 - x = 0$$

I grafici delle due funzioni si incontrano nei punti $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.
L'area cercata corrisponde al valore dell'integrale definito:

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|dx$$

Poichè $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni dispari, anche $f(x) - g(x)$ è una funzione dispari, mentre $|f(x) - g(x)|$ è una funzione pari (verificare!).
Pertanto:

$$A = 2\int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|dx$$

Calcoliamo l'integrale definito:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx &= \int_0^1 (-x^3 + x)e^{-x^2}dx = \\ &= -\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx + \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt = \\ &= +\frac{1}{2}te^{-t}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt = \\ &= \frac{1}{2e}\end{aligned}$$

Il valore dell'area cercata è $A = \frac{1}{e}$.

5.2 Integrali impropri

4. Per il calcolo utiliziamo la definizione di integrale improprio di seconda specie:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{\arctan x}{1 + x^2}dx$$

Operando la sostituzione $t = \arctan x$, $dt = \frac{dx}{1+x^2}$, si ha:

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}dx = \int tdt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$

Quindi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{2}(\arctan M)^2 - 0\right] = \frac{\pi^2}{8}$$

5. In questi esercizi si utilizzeranno i criteri del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri, in particolare i seguenti risultati che dovrebbero essere noti:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \{\alpha > 1 \wedge \forall \beta\} \vee \{\alpha = 1 \wedge \beta > 1\} \\ = +\infty & \text{se } \{\alpha = 1 \wedge \beta \leq 1\} \vee \{\alpha < 1 \wedge \forall \beta\} \end{cases}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta x} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \{\alpha < 1 \wedge \forall \beta\} \vee \{\alpha = 1 \wedge \beta > 1\} \\ = \infty & \text{se } \{\alpha = 1 \wedge \beta \leq 1\} \vee \{\alpha > 1 \wedge \forall \beta\} \end{cases}$$

Per stabilire la parte principale della funzione integranda (necessaria per il confronto asintotico) si utilizzeranno gli sviluppi in serie di potenze.

(a) L'integranda è definita $\forall x \in [2, +\infty)$.
Poichè $e^{1/x} > 1$ se $x \in [2, +\infty)$, si ha:

$$\frac{e^{1/x}}{x \log x} > \frac{1}{x \log x}$$

Inoltre:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx = +\infty$$

pertanto l'integrale diverge per il criterio del confronto.

(b) Notiamo che l'integranda, sia essa $f(x)$, si può riscrivere nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{\sin^5 \frac{1}{x}}{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Inoltre:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Il primo integrale al secondo membro non è improprio in quanto $f(x)$ ha in zero una discontinuità eliminabile: infatti $f(x) \to 0$ se $x \to 0$ (il numeratore si mantiene limitato ed il denominatore tende all'infinito).
Il secondo integrale al secondo membro risulta convergente, infatti, per il criterio del confronto asintotico:

$$f(x) \sim \frac{x^{-5}}{x^{-2}} = \frac{1}{x^3} \quad \text{per } x \to +\infty$$

(c) L'integranda è definita in $(0, +\infty)$ ma tende all'infinito per $x \to 0$.
Riscriviamo l'integrale come la somma di due integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}\log(1+\sqrt{x})}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}\log(1+\sqrt{x})}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x}\log(1+\sqrt{x})}dx$$

Analizziamo il comportamento dell'integranda per $x \to 0$:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}\log(1+\sqrt{x})} \sim \frac{1}{x^{1/5}x^{1/2}} = \frac{1}{x^{7/10}}$$

Il primo integrale al secondo membro converge per il criterio del confronto asintotico.
Analizziamo il comportamento dell'integranda per $x \to +\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}\log(1+\sqrt{x})} \sim \frac{2}{x^{1/5}\log x}$$

Il secondo integrale al secondo membro diverge per il criterio del confronto asintotico (vedere esercizio 4a: caso $\alpha < 1$).
L'integrale è pertanto divergente.

(d) Integrando per parti:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}dx \right)$$
$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

L'ultimo integrale converge, infatti:

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \right| \le \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx < +\infty$$

Pertanto:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx < +\infty$$

6. integrali impropri dipendenti dal parametro α:

(a) L'integranda presenta una singolarità in $x = 0$. Occorre quindi verificare l'esistenza di due integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(4+x)^{\alpha+1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(4+x)^{\alpha+1}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(4+x)^{\alpha+1}}dx$$

Poichè:

$$\frac{1}{x^\alpha(4+x)^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{4^{\alpha+1}x^\alpha} \qquad \text{per } x \to 0^+$$

e

$$\frac{1}{x^\alpha(4+x)^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{2\alpha+1}} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

il primo integrale converge se $\alpha < 1$, il secondo integrale se $2\alpha + 1 > 1$, ovvero se $\alpha > 0$.
Quindi l'integrale converge solo se $0 < \alpha < 1$.

(b) L'integranda ha una singolarità in $x = 2$.
Ponendo $x - 2 = t$, si ottiene:

$$\frac{x\,[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{(t+2)\sin^\alpha t}{\sqrt{t}\sqrt{t+4}} \sim \frac{2t^\alpha}{\sqrt{t}\sqrt{4}} = \frac{1}{t^{1/2-\alpha}} \quad \text{per } t \to 0^+$$

L'integrale esiste se $\frac{1}{2} - \alpha < 1$, vale a dire: $\alpha > -\frac{1}{2}$.

5.3 Insieme di definizione di funzioni integrali

7. Occorre trovare gli eventuali punti in cui la funzione integranda è singolare. Poniamo $\sqrt[3]{x+4} = t$. Deve valere $t^3 - 2t - 4 = 0$. Scomponendo con la regola di Ruffini si ha: $(t-2)(t^2+t+2) = 0$. Ciò accade se e solo se $t = 2$, cioè se e solo se $x = 4$. Quindi prima di tutto è chiaro che l'integrale considerato è ben definito se $x > 4$. Occorre determinare il tipo di singolarità di $f(x)$ quando $x \to 4$. A tal fine basta notare che, posto $g(x) = x - 2\sqrt[3]{x+4}$, vale $g(4) = 0$, $g'(x) = 1 - \frac{2}{3(x+4)^{2/3}}$ per ogni $x \neq -4$, e dunque $g'(4) = 5/6$. La formula di Taylor mostra allora che, per $x \to 4$: $g(x) = g'(4)(x-4) + o(x-4) \sim \frac{5}{6}(x-4)$. Quindi, per $x \to 4$,
$$\frac{1}{x - 2\sqrt[3]{x+4}} \sim \frac{6}{5(x-4)}.$$
La singolarità di $f(x)$ in $x = 4$ non è dunque integrabile, e quindi l'integrale assegnato non esiste per $x = 4$. A maggior ragione esso non esisterà se $x < 4$. Dunque occorre richiedere che $x > 4$ affinché l'integrale assegnato esista.

8. Sia $f(t)$ la funzione integranda.
La prima cosa da cercare è il dominio di $f(t)$: $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.
Inoltre si analizzano i tipi di discontinuità nei valori esclusi dal dominio: l'integranda presenta discontinuità di seconda specie sia in $t = 2$ che in $t = 3$.
Per determinare il dominio della funzione integrale si dovrà stabilire se gli integrali nelle discontinutà di seconda specie convergono in senso improprio.
Nel nostro caso, un estremo dell'integrale è $+\infty$ e dovremo innanzitutto stabilire l'esistenza dell'integrale improprio nell'estremo $+\infty$, affinchè la funzione sia ben definita.
Consideriamo il caso $x > 3$. In questo modo escludiamo le due discontinuità dagli estremi di integrazione. Poichè
$$\frac{1}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} \sim \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{per } t \to +\infty$$
allora, se $x > 3$:
$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} < +\infty$$
Consideriamo adesso il caso: $2 < x \leq 3$
$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} = \int_x^{3} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} + \int_3^{+\infty} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}}$$

Analizziamo l'andamento di $f(t)$ nella «singolarità» $t = 3$:

$$\frac{1}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} \sim \frac{1}{\sqrt{|t-3|}} \quad \text{per } t \to 3$$

Pertanto sono convergenti gli integrali in senso improprio negli estremi $x = 3$.
Infine, se $x < 2$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} = \int_x^2 \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} + \int_2^{5/2} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} + \\ + \int_{5/2}^3 \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} + \int_3^{+\infty} \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}}$$

Per quanto già detto gli ultimi due integrali al secondo membro sono convergenti ma i primi due non lo sono, infatti:

$$\frac{1}{(t-2)\sqrt{|t-3|}} \sim \frac{1}{t-2} \quad \text{per } t \to 2$$

La singolarità $x = 2$ non è "superabile" in quanto l'integrale improprio non esiste. Pertanto, il dominio della funzione integrale è: $\mathcal{D}_F = (2, +\infty)$.
Se invece la funzione $F(x)$ fosse stata così definita:

$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{(t-2)\sqrt{|t-3|}}$$

la singolarità in $x = 2$ non sarebbe stata ancora superabile, ma questa volta la funzione sarebbe stata definita nell'origine e quindi per valori «a sinistra» di $x = 2$.
In questo caso il dominio sarebbe stato: $\mathcal{D}_F = (-\infty, 2)$.

6 Soluzione degli esercizi proposti

1. **Integrali definiti**

   (a) Si noti che, essendo la funzione integranda pari, si ha

   $$\int_{-1}^1 \arctan(\sqrt{1+2|x|})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \arctan(\sqrt{1+2x})\,\mathrm{d}x$$

   Determiniamo una primitiva della funzione $\arctan(\sqrt{1+2x}$.
   Si ponga $\sqrt{1+2x} = t$. Ne segue che $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Dunque, integrando poi

per parti e ritornando infine alla variabile x:

$$\begin{aligned}\int \arctan(\sqrt{1+2x})\,\mathrm{d}x &= \int t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\arctan t\\ &= \frac{1}{2}(t^2+1)\arctan t - \frac{t}{2}\\ &= (x+1)\arctan(\sqrt{1+2x}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x},\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \arctan(\sqrt{1+2|x|})\,\mathrm{d}x &= 2\left[(x+1)\arctan(\sqrt{1+2x}) - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x}\right]_0^1\\ &= 1-\sqrt{3}+\frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$

(b) Moltiplicando numeratore e denominatore per $\cos x$ e utilizzando l'identità fondamentale trigonometrica, si ottiene:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^3 x} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}dx$$

Si razionalizza l'integranda operando il cambio di variabile $t = \sin x$:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$

Il denominatore della funzione integranda ha due radici reali con molteplicità algebrica doppia. Si cerca una scomposizione in fratti semplici del tipo:

$$\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t-1)^2}+\frac{D}{(t+1)^2}$$

che conduce al seguente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0\\ A-B+C+D=0\\ -A-B+2C-2D=0\\ -A+B+C+D=1\end{cases}$$

Le cui soluzioni sono $A = -\frac{1}{4}$, $B = C = D = \frac{1}{4}$.
Pertanto:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t^2)^2} dt &= \frac{1}{4}\left(-\int_0^{1/2} \frac{dt}{t-1} + \int_0^{1/2} \frac{dt}{t+1} + \int_0^{1/2} \frac{dt}{(t-1)^2} + \int_0^{1/2} \frac{dt}{(t+1)^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \log \frac{t+1}{1-t}\bigg|_0^{1/2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-1}\bigg|_0^{1/2} + \frac{1}{t+1}\bigg|_0^{1/2} \right) \\
&= \frac{1}{4}\log 3 - \frac{1}{4}\left(-2+1+\frac{2}{3}-1\right) \\
&= \frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(c) Cerchiamo una primitiva di $f(x) = \cos^{-4} x$. Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
F(x) := \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} &= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \tan x \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}\tan^3 x \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \frac{2}{3}\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3}\tan x + \frac{1}{3}\frac{\tan x}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Quindi, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} &= \frac{2}{3}\tan x\bigg|_0^{\pi/6} + \frac{1}{3}\frac{\tan x}{\cos^2 x}\bigg|_0^{\pi/6} \\
&= \frac{10}{9\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

2. I grafici delle funzioni si intersecano se:

$$xe^{-x} = x(e^x - 2)$$

Questo avviene se $x = 0$ oppure, posto $t = e^x$ se:

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

ovvero se $t = 1+\sqrt{2}$, cioè $x = \log(1+\sqrt{2})$. Sia, per comodità $\alpha := \log(1+\sqrt{2})$.
L'area delimitata dai due grafici è il valore assoluto dell'integrale definito:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha} \left(xe^{-x} - xe^x + 2x\right) dx &= \int_0^{\alpha} xe^{-x}dx - \int_0^{\alpha} xe^x + x^2\bigg|_0^{\alpha} \\
&= -xe^{-x}\bigg|_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x}dx - xe^x\bigg|_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^x dx + \log^2(1+\sqrt{2}) \\
&= -\alpha(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) + (e^x - e^{-x})\bigg|_0^{\alpha} + \log^2(1+\sqrt{2}) \\
&= (1-\alpha)e^{\alpha} - (1+\alpha)e^{-\alpha} + \log^2(1+\sqrt{2}) \\
&= 2 - 2\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2}) + \log^2(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

3. Il cambio di variabile $\log x = t$ mostra che
$$\int \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^4 - 16}\,\mathrm{d}t.$$
Calcoliamo quest'ultimo integrale. Calcoli elementari mostrano che vale la seguente scomposizione in fratti semplici:
$$\frac{t}{t^4 - 16} = \frac{t}{8(t^2 - 4)} - \frac{t}{8(t^2 + 4)}.$$
L'integrale può dunque essere calcolato immediatamente:
$$\begin{aligned}\int \frac{t}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t &= \int \left(\frac{t}{8(t^2 - 4)} - \frac{t}{8(t^2 + 4)}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{16}\log\left|t^2 - 4\right| - \frac{1}{16}\log(t^2 + 4) \\ &= \frac{1}{16}\log\left|\frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}\right|.\end{aligned}$$
Quindi, tornando alla variabile originaria:
$$\int \frac{\log x}{x\,[(\log x)^4 - 16]}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\log\left|\frac{(\log x)^2 - 4}{(\log x)^2 + 4}\right|$$
avendo posto ad esempio uguale a zero la costante additiva.
Circa la seconda domanda, si noti che la funzione integranda $f(x)$ soddisfa
$$f(x) \overset{[}{x}\!\to +\infty]\!\sim \frac{1}{x(\log x)^3} \quad \text{per } x \to +\infty.$$
Ciò implica che f è integrabile in senso generalizzato all'infinito. Quindi in particolare
$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
Essendo f positiva in un intorno dell'infinito, ciò implica immediatamente che anche il limite richiesto vale zero.

4. (a) Una c. n. per l'esistenza dell'integrale improprio (in $+\infty$) è la seguente: Se $f(x)$ ha limite per $x \to +\infty$, esso deve essere necessariamente zero.
In questo caso però l'integranda non ammette limite e non ci si può avvalere della precedente condizione per concludere che l'integrale improprio non esiste. Ad esempio la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$
non ammette limite, ma esiste - e vale zero - l'integrale improprio.
Un metodo diretto per stabilire la non esistenza dell'integrale improprio

è il seguente.
Innanzitutto, posto:

$$f(M) := \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \sin^2 x dx$$

possiamo dire che $f(M)$ è crescente perchè l'integranda non è mai negativa, quindi $f(M)$ ha limite, finito o infinito. Inoltre:

$$f(n\pi) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \sin^2 x dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin^2 x dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Pertanto $f(M) \to +\infty$ per $M \to +\infty$.

(b) Operando il cambio di variabile $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, si ottiene:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

La funzione integranda all'ultimo membro non è definita in $t = 0$, pertanto occorre determinare il carattere di due integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

Il primo integrale al secondo membro converge perchè:

$$\left| \int_0^1 \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt < +\infty$$

Il secondo integrale converge perchè, integrando per parti:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt = \lim_{M\to+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \bigg|_1^M + \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$$

e per quanto concerne l'ultimo integrale improprio:

$$\left| \int_1^M \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt \right| \leq \int_1^M \frac{|\sin t|}{t^{3/2}} dt \leq \int_1^M \frac{1}{t^{3/2}} dt < +\infty$$

Quindi:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx < +\infty$$

(c) Poniamo:

$$f(M) := \int_1^M \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Mostriamo che $F(M) \to +\infty$ per $M \to +\infty$.

$$F(n\pi) = \int_1^{\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx + \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi}$$

Osserviamo che (vedi l'esercizio 3e svolto a lezione):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx < +\infty \qquad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

Tale integrale converge semplicemente ma non assolutamente.

(d) Anche questo integrale converge semplicemente ma non assolutamente:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x} dx = \lim_{M \to +\infty} \left(-\frac{\cos x}{\log x}\Big|_2^M - \int_2^M \frac{\cos x}{x \log^2 x} dx \right)$$

L'ultimo integrale converge per il teorema del confronto:

$$\left| \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x \log^2 x} dx \right| \leq \int_2^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x \log^2 x} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^2 x} dx < +\infty$$

L'integrale, come dicevamo, non converge assolutamente. Infatti, per il criterio del confronto e dall'esercizio precedente:

$$\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\log x} dx \geq \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

(e) Riscriviamo l'integrale improprio nella forma:

$$\int_0^1 e^{(\log x)^2} dx$$

La funzione integranda è ben definita nell'intervallo di integrazione $(0, 1]$.
Per $x \to 0^+$ essa tende a $+\infty$.
Operando il cambio di variabile: $t = \log x$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$, si ha:

$$\int_{-\infty}^0 e^{t^2+t} dt$$

Ricordiamo che una condizione necessaria per l'esistenza dell'integrale improprio di seconda specie è la seguente: se la funzione integranda ha limite per $x \to \infty$, allora tale limite deve valere 0. In questo caso:

$$\lim_{t \to -\infty} e^{t^2+t} = +\infty,$$

per cui l'integrale improprio diverge.

(f) L'integranda è definita nell'intervallo di integrazione $(0, 1]$.
Usiamo il criterio del confronto asintotico per verificare l'esistenza dell'integrale improprio nell'estremo inferiore di integrazione.
Per $x \to 0^+$ si ha:

$$f(x) := \sqrt{\frac{\sin(1 - \sqrt{\cos x})}{x^3}} = \sqrt{\frac{\sin\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}\right)}{x^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{x^2}{4} + o(x^3)\right)}{x^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{x^2}{4} + o(x^3)}{x^3}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Quindi, l'integrale improprio converge.

(g) Ricordiamo che con $[x]$ si intende la *parte intera* di x.
Dalla definizione di integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} F(n)$$

dove, con $F(n)$ si intende la seguente funzione:

$$F(n) := \int_1^n \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx$$

Sia $n \in \mathbb{N}$. Scomponendo l'intervallo di integrazione in intervalli di lunghezza unitaria, si ottiene:

$$\begin{aligned}
F(n) &= \int_1^2 \frac{-1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \int_3^4 \frac{-1}{x} dx + ... + \int_{n-1}^n \frac{(-1)^{n-1}}{x} dx = \\
&= -(\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) - ... + (-1)^{n-1} (\log(n) - \log(n-1)) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\log(k+1) - \log k\right] = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\right]
\end{aligned}$$

Se $n \notin \mathbb{N}$, bisogna aggiungere come ultimo termine:

$$\int_{[n]}^n \frac{(-1)^{[n]}}{x} dx = (-1)^{[n]} \log \frac{n}{[n]}$$

Quindi:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \left[F(n) + (-1)^{[n]} \log \frac{n}{[n]}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left[\log\left(\frac{k+1}{k}\right)\right] + 0$$

La serie al secondo membro converge per il criterio di Leibnitz. Infatti, tutte le ipotesi di tale criterio sono facilmente verificabili: $\frac{k+1}{k}$ è una successione decrescente, quindi anche $\log\left(\frac{k+1}{k}\right)$ è decrescente e inoltre tende a zero. Di conseguenza anche l'integrale improprio è convergente.

5. L'integranda presenta una singolarità in $x = 0$. Occorre quindi verificare l'esistenza di due integrali impropri:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + x + 2 - |x^2 - x - 2|}{x^\alpha} dx =$$

$$\int_0^2 \frac{x^2 + x + 2 - (-x^2 + x + 2)}{x^\alpha} dx + \int_2^{+\infty} \frac{x^2 + x + 2 - (x^2 - x - 2)}{x^\alpha} dx =$$

$$2\int_0^2 \frac{1}{x^{\alpha-2}} dx + 2\int_2^{+\infty} \frac{2x+4}{x^\alpha} dx$$

Il primo integrale converge se $\alpha - 2 < 1$, ovvero se $\alpha < 3$. Il secondo integrale converge se $\alpha - 1 > 1$, ovvero se $\alpha > 2$.
In definitiva l'integrale converge se $2 < \alpha < 3$.

6. Integrando per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\sin x dx &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M f(x)\sin x dx \\ &= \lim_{M\to+\infty}\left(-\cos x f(x)\Big|_0^M + \int_0^M \cos x f'(x)dx\right) \\ &= f(0) + \int_0^{+\infty}\cos x f'(x)dx\end{aligned}$$

L'ultimo integrale converge (assolutamente) per il teorema del confronto:

$$\big|\cos x f'(x)\big| \leq |f'(x)|$$

e dal fatto che:

$$\int_0^{+\infty}|f'(x)|dx = \lim_{M\to+\infty} -\int_0^M f'(x)dx = \lim_{M\to+\infty}[f(0)-f(M)] = f(0).$$

7. La funzione integranda, sia essa $f(t)$, è ben definita in $\mathcal{D}_f = [-1,0)\cup(0,+\infty)$. Resta da capire il comportamento asintotico per $t\to 0$.
Il termine $\tanh 1/t$ presenta una discontinuità di prima specie in $t=0$, infatti:

$$\lim_{t\to 0^+}\tanh\frac{1}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0^-}\tanh\frac{1}{t} = -1$$

Occorre allora differenziare i due comportamenti di $f(t)$ per $t\to 0^+$ e per $t\to 0^-$.
Se $t\to 0^-$ si ha: $f(t)\sim\frac{4}{|t|^{9/2}}$. La funzione presenta una discontinuità di seconda specie non integrabile in senso improprio. Quindi il dominio della funzione integrale non potrà contenere valori di x minori di zero.
Per capire invece se il valore $x=0$ appartiene al dominio dobbiamo studiare l'esistenza del seguente integrale improprio:

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\left(\sqrt{t+1}-e^{t/2}\right)^2 + \left(\cos t - \tanh\frac{1}{t}\right)^2}{t^{9/2}}dt$$

occorre quindi analizzare il comportamento della funzione per $t\to 0^+$.

Concentriamoci sul numeratore: la prima parentesi è sviluppabile in serie di potenze con centro in $x=0$ la seconda invece no a causa del termine $\tanh 1/t$: Possiamo però asserire che:

$$\tanh\frac{1}{t} = \frac{e^{1/t}-e^{-1/t}}{e^{1/t}+e^{-1/t}} = \frac{1-e^{-2/t}}{1+e^{-2/t}} = \left(1-e^{-2/t}\right)\left(1-e^{-2/t}+o(e^{-2/t})\right)$$

In quanto $e^{-2/t}$ è un infinitesimo per $t\to 0^+$. Quindi:

$$\cos t - \tanh\frac{1}{t} = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)-1+2e^{-2/t}+o(e^{-2/t}) = -\frac{t^2}{2}+o(t^3)$$

Infatti $e^{-2/t}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di t.
Scriviamo il polinomio di Maclaurin del numeratore:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{t+1}-e^{t/2}\right)^2+\left(\cos t-\tanh\frac{1}{t}\right)^2=\\
&=\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)-1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)\right)^2+\left(-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right)^2\\
&=\frac{t^4}{16}+o(t^4)+\frac{t^4}{4}+o(t^5)=\frac{5}{16}t^4+o(t^4)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\left(\sqrt{t+1}-e^{t/2}\right)^2+\left(\cos t-\tanh\frac{1}{t}\right)^2}{t^{9/2}}\sim\frac{5}{16\sqrt{t}}\quad \text{per } t\to 0^+$$

L'integrale converge.
Non essendoci altre singolarità di $f(t)$ la funzione integrale è ben definita per tutti i valori di x maggiori di zero: $\mathcal{D}_F=[0,+\infty)$.

Se non fosse esistito neanche l'integrale improprio:

$$\int_0^1 f(t)dt$$

allora il dominio della funzione sarebbe stato: $\mathcal{D}_F=(0,+\infty)$.

8. Chiamiamo $f(x)=\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^{-1}$ la funzione integranda e osserviamo che:
- $f(x)$ è definita in $\mathcal{D}_f=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$.
- $f(x)$ diverge nell'estremo inferiore di integrazione:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}=+\infty$$

quindi essa non è Riemann-integrabile.
Necessariamente deve essere $x\geq 3$, altrimenti non è definita la funzione integranda. Il dominio di $F(x)$ sarà $\mathcal{D}_F=[3,+\infty)$ se esiste l'integrale improprio nell'estremo inferiore di integrazione, sarà invece l'insieme vuoto (oppure si può dire: $F(x)$ non è ben definita) se non è integrabile in senso improrpio.
Per verificare l'esistenza dell'integrale improprio partiamo dalla definizione (certamente si potrebbe analizzare il tipo di singolarità in $t=3$, ma dovendo determinare l'espressione analitica della funzione integrale, ci sembra più istruttivo uno studio *diretto* del problema).
Fissiamo $x>3$ e $\epsilon>0$ e verifichiamo se esiste:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{3+\epsilon}^{x}\frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}dt$$

Calcoliamo ora la primitiva di $f(t)$.
Sia $z = \sqrt{t-2}$. Allora: $t-3 = z^2 - 1$ e $\frac{dx}{2\sqrt{t-2}} = dz$.
Supponiamo che $t > 3$. Si ha:

$$
\begin{aligned}
F(t) := \int \frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}dt &= \int \frac{1}{\sqrt{(t-2)(t-3)}}dt = \\
&= 2\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \\
&= 2\text{arcosh } z + C = \\
&= 2\log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + C = \\
&= 2\log\left(\sqrt{t-2} + \sqrt{t-3}\right) + C
\end{aligned}
$$

Se invece, fosse stato $t < 2$, allora, fattorizzando il polinomio di II grado nella forma: $t^2 - 5t + 6 = (2-t)(3-t)$, con la sostituzione $z = \sqrt{2-t}$, si sarebbe pervenuti alla primitiva $F(t) = 2\log\left(\sqrt{2-t} + \sqrt{3-t}\right) + C$.
Infine, calcoliamo direttamente il limite per $\epsilon \to 0^+$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{3+\epsilon}^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2-5t+6}}dt &= \lim_{\epsilon\to 0^+} [F(x) - F(3+\epsilon)] = \\
&= 2\log\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}\right) - \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\log\left(\sqrt{1+\epsilon} + \sqrt{\epsilon}\right) = \\
&= 2\log\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}\right)
\end{aligned}
$$

Da cui si ricava: $\mathcal{D}_F = [3, +\infty)$ e $F(3) = 0$.
Inoltre, poichè: $F'(x) = f(x) > 0 \ \forall x \in (3, +\infty)$, la funzione è monotona crescente e pertanto non esistono altri zeri.
Possiamo anche asserire che $x = 3$ è un punto a tangente verticale per il grafico di $F(x)$, infatti la sua derivata tende all'infinito per $x \to 3^+$.

9. Osserviamo innanzitutto che deve essere $x \geq -1$.
Sia $F(x)$ la funzione integrale così definita:

$$F(x) = \int_x^3 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}dt$$

Il dominio è $\mathcal{D}_F = (0, +\infty)$, infatti la funzione integranda ha una singolarità in $t = 0$ non integrabile in senso improprio:

$$\frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1} \sim \frac{4}{t} \quad \text{per } t \to 0$$

È possibile scrivere un'espressione analitica di $F(x)$ calcolando l'integrale definito, ad esempio operando il seguente cambio di variabile:

$$z = \sqrt{1+t} \qquad t = z^2 - 1 \qquad dt = 2zdz$$

$$
\begin{aligned}
t = x &\to z = \sqrt{1+x} \\
t = 3 &\to z = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_x^3 \frac{1+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}-1}dt &= 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 \frac{z+z^2}{z-1}dz \\
&= 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 \frac{z}{z-1}dz + 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 \frac{z^2}{z-1}dz \\
&= 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 \frac{z-1+1}{z-1}dz + 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 \frac{z^2-1+1}{z-1}dz \\
&= 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 dz + 4\int_{\sqrt{x+1}}^2 \frac{1}{z-1}dz + 2\int_{\sqrt{x+1}}^2 (z+1)dz \\
&= 2z\Big|_{\sqrt{x+1}}^2 + 4\log|z-1|\Big|_{\sqrt{x+1}}^2 + (z^2+2z)\Big|_{\sqrt{x+1}}^2 \\
&= 4 - 2\sqrt{x+1} - 4\log|\sqrt{x+1}-1| + 8 - x - 1 - 2\sqrt{x+1} \\
&= 11 - 4\sqrt{x+1} - 4\log(\sqrt{x+1}-1) - x
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio è stato omesso il modulo nell'argomento del logaritmo perchè la funzione è definita solo per $x > 0$.

10. Calcoliamo, integrando per parti:

$$
\int x^2 \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \int \frac{x^3}{3}\frac{2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.
$$

Si noti ora che $\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \,\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{2}{3}\int\left(x - \frac{x}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}\log|1-x^2|,
\end{aligned}
$$

dove si è posta per comodità uguale a zero la costante additiva, e dove si intende la primitiva scritta definita per $x \neq \pm 1$ (a rigore, si dovrebbe scrivere la medesima espressione sui tre intervalli $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ separatamente).

Per quanto riguarda il secondo punto, malgrado sia possibile affrontarlo studiando il limite della primitiva appena scritta, basta notare che l'integrale inteso in senso improprio esiste finito per ogni x, in quando la funzione integranda è singolare se e solo se $t = \pm 1$ e le corrispondenti singolarità, entrambe di tipo logaritmico, sono integrabili.

Per quanto riguarda il terzo punto, di nuovo esso potrebbe essere affrontato usando l'espressione esplicita per la primitiva. Tuttavia, anche senza conoscere l'espressione di quest'ultima, è facile notare che $\int_0^x t^2 \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \,\mathrm{d}t \to +\infty$ se $x \to +\infty$. In effetti a tal fine basta notare che, sviluppando il logaritmo al primo ordine, vale $t^2 \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \overset{[}{t}\!\to +\infty]{\sim} 2t$. Quindi per la regola di de l'Hospital si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}\int_0^x t^2\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}{ax^{a-1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}x^{3-a}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a}x^{3-a}\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{a}\frac{x^{3-a}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{a}x^{2-a}.
\end{aligned}$$

Quindi il limite cercato vale uno per $a=2$, zero per $a\in(0,2)$, $+\infty$ se $a>2$.

11. L'integranda è razionalizzabile con la sostituzione: $e^x=t$.

$$\int\frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}e^x\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2+t^{-2}}{t^2-t^{-2}}\,\mathrm{d}t=\int\frac{t^4+1}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$$

La scomposizione in fratti semplici può avvenire nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\frac{t^4+1}{t^4-1}&=\frac{t^4-1+2}{t^4-1}\\
&=1+\frac{2}{t^4-1}\\
&=1+\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\\
&=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{t^2+1}
\end{aligned}$$

Integrando:

$$\int\frac{t^4+1}{t^4-1}\,\mathrm{d}t=t+\frac{1}{2}\left(\log|t-1|-\log|t+1|\right)-\operatorname{arctg}\,t+K$$

Tornando alla variabile x:

$$\int\frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=e^x+\log\sqrt{\frac{|e^x-1|}{e^x+1}}-\operatorname{arctg}\,(e^x)+K$$

Riguardo al secondo punto, la funzione integranda ha una singolarità in $t=0$. Analizziamo il comportamento asintotico della funzione integranda per $t\to0^-$:

$$\left|\frac{e^{3t}+e^{-t}}{e^{2t}-e^{-2t}}\right|^\alpha=\left|\frac{1+o(1)+1+o(1)}{1+2t+o(t)-(1-2t+o(t))}\right|^\alpha\sim\left|\frac{1}{2t}\right|^\alpha\quad\text{per } t\to0^-$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge in senso improprio se $0<\alpha<1$, non converge se $\alpha\geq1$. Pertanto, il dominio della funzione $F_\alpha(x)$ è $\mathbb{R}$ se $0<\alpha<1$, $(-\infty,0)$ se $\alpha\geq1$.

12. Per l'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\int_0^n (x-[x])^{[x]}\,\mathrm{d}x = &= \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{n-1}^n (x-n+1)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= x\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che la serie armonica è divergente, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (x-[x])^{[x]}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$