I VOLUMI DELLA COLLANA ESAMI

1 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI. Esercizi
43 esercizi risolti e discussi forniscono un'efficace guida pratica alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Vengono affrontati 17 sistemi non omogenei fondamentali, 8 sistemi omogenei fondamentali, 10 sistemi parametrici. Compendiano gli argomenti trattati 8 temi d'esame risolti.

2 INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLE FUNZIONI
Guida alla conoscenza degli argomenti basilari per lo studio sistematico delle funzioni: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radice, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc. Gli argomenti sono corredati di esempi esplicativi nei quali alle considerazioni algebriche è abbinata l'interpretazione grafica.

3 FUNZIONI DA ESAME
57 funzioni scelte per dare un'opportuna preparazione all'esame scritto di ANALISI I. Ognuna di esse è svolta integralmente in modo da risultare facilmente comprensibile ed ogni operazione difficile (limiti, derivate, ...) è eseguita. Tutti I grafici sono stati realizzati con l'ausilio di un calcolatore.

4 LIMITI. Esercizi
400 esempi ed esercizi scelti in modo da condurre lo studente ad un agevole calcolo di limiti di funzioni comunque complicate e di qualsiasi tipo: funzioni razionali e irrazionali, funzioni logaritmiche ed esponenziali, funzioni circolari dirette ed inverse, funzioni iperboliche dirette e inverse.

5 DERIVATE. Esercizi
252 esercizi di derivazione di funzioni in coordinate cartesiane ortogonali, in coordinate parametriche e polari. Derivazione di funzioni esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Derivate successive. Differenziali. L'applicazione della derivata a problemi tecnici fondamentali ha lo scopo di rendere meno difficoltoso lo studio delle scienze applicate.

6 INTEGRALI. Esercizi
274 integrali completamente svolti, preceduti da una parte introduttiva comprendente richiami di algebra e di trigonometria circolare e iperbolica.

7 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume primo
176 esercizi per spiegare organicamente le leggi che governano l'algebra delle matrici; interpretazione vettoriale delle matrici; proprietà dei determinanti; ricerca del rango di una matrice; applicazioni dei determinanti alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

8 ALGEBRA DELLE MATRICI. Volume secondo
149 esempi ed esercizi per illustrare in modo efficace gli spazi vettoriali, le trasformazioni lineari, la ricerca degli autovalori e degli autovettori di una matrice, le matrici simili e i procedimenti per triangolarizzare e per diagonalizzare una matrice; applicazioni a coniche e quadriche.

9 L'ALGEBRA DELLE MATRICI E LA RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI
60 sistemi omogenei, non omogenei, parametrici, trigonometrici affrontati con il metodo di Gauss-Jordan, il più efficace nella risoluzione dei problemi tecnici.

continua in seconda di copertina

10 NUMERI COMPLESSI
100 esercizi sufficienti per acquisire la pratica necessaria sui numeri complessi nelle loro quattro forme e per meglio fissare i concetti teorici espressi nel modo più elementare possibile. 22 temi d'esame risolti.

11 CORSO PROPEDEUTICO DI MATEMATICA PER GLI STUDENTI DEL PRIMO ANNO DI UNIVERSITÀ
294 esempi ed esercizi: dai polinomi alle disequazioni, dai logaritmi alle funzioni trigonometriche: i fondamenti della matematica necessari per affrontare in modo sicuro gli studi universitari.

12 LO STUDIO DELLA FUNZIONE
36 funzioni di vario tipo, precedute da una parte introduttiva avente la funzione di traccia per lo studio di qualsiasi funzione. Corredati di numerosi esempi ed esercizi, sono trattati: disequazioni, valori assoluti, estrazione di radici, funzioni inverse, calcolo di periodi, limiti, derivate, ecc.

13 IL LIMITE
337 esercizi scelti per condurre lo studente ad un'agevole ricerca dei limiti di funzioni di qualunque tipo e comunque complicate.

14 LA DERIVATA
220 esercizi di derivazione di funzioni vario tipo, esplicite ed implicite, ad una e a due variabili. Differenziali, derivate successive. Significato ed applicazioni della derivata.

15 L'INTEGRALE
250 esercizi di integrazione di funzioni di vario tipo: hanno lo scopo di condurre gradualmente lo studente ad una rapida familiarizzazione con l'operatore integrale.

16 CIRCUITI TRIFASE
36 esercizi concernenti l'analisi di reti trifase in regime sinusoidale: reti simmetriche equilibrate e non equilibrate; sistemi trifase simmetrici con neutro. Misura di potenze attive, reattive, apparenti nei sistemi trifase.

17 CAMPI E CIRCUITI MAGNETICI
46 esercizi completamente svolti, concernenti campi e circuiti magnetici, induttori mutuamente accoppiati, azioni meccaniche generate dalle correnti elettriche, elettromagneti.

18 EQUAZIONI DIFFERENZIALI
273 esercizi per acquisire la tecnica necessaria ad affrontare le equazioni differenziali nelle loro più svariate forme.

19 GEOMETRIA ANALITICA NEL PIANO
173 esercizi svolti concernenti la retta nelle sue varie forme e le sue proprietà; fasci di rette a centro proprio ed a centro improprio; traslazione e rotazione degli assi di riferimento; luoghi geometrici; circonferenza e sue proprietà; coniche in forma canonica: ellisse, parabola, iperbole; funzione omografica.

ISBN 978-88-85255-06-7

9 788885 255067

€ 7,00

6 TECNOS

6

Collana Esami

Gioacchino ORECCHIA
Salvatore TRIBULATO

Gino

INTEGRALI

ESERCIZI

274 integrali completamente svolti, preceduti da una parte introduttiva comprendente richiami di algebra e di trigonometria circolare e iperbolica

Quarta edizione
Prima edizione: © 1974
Seconda edizione: © 1975
Terza edizione © 1981

EDIZIONI TECNOS srl
Via Rucellai 23 - 20126 Milano
Tel. & Fax 022571634
www.edizionitecnos.it
e-mail: info@edizionitecnos.it

ISBN 978-88-85255-06-7

Stampa della Edizioni Tecnos srl
Via Rucellai 23 - 20126 Milano

INDICE

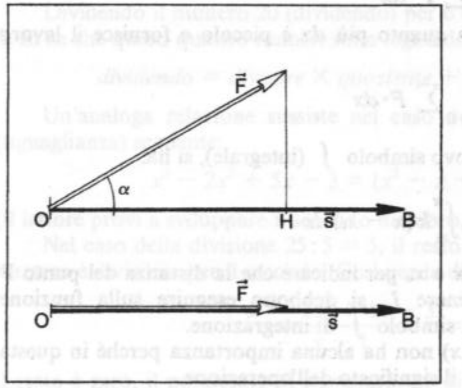
5. INTEGRAZIONE DI FUNZIONI TRASCENDENTI

6. INTEGRALI DI FUNZIONI IRRAZIONALI

7. L'INTEGRALE DEFINITO

INTRODUZIONE

L'importanza dell'operatore integrale può essere messa in evidenza con un esempio. È noto che il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ che sposti il suo punto di applicazione di $\vec{s}$ è dato da:



$$L = F_1 \cdot s$$

con $F_1 = \overline{OH}$, $s = \overline{OB}$. Più propriamente, detto α l'angolo che i due vettori formano (vedi figura), è:

$$L = \vec{F} \times \vec{s} = Fs \cos \alpha = F_1 \cdot s$$

essendo $F \cos \alpha = F_1$. Il simbolo $\times$ sta ad indicare il prodotto scalare.

Se è $\alpha = 0$ forza e spostamento hanno uguali la direzione e il verso. Allora:

$$L = \vec{F} \times \vec{s} = Fs \cos 0 = F_1 \cdot s$$

Esempio:

$$F = 25\ \text{N}, \quad s = 10\ \text{m} \rightarrow \quad L = 250\ \text{J}$$

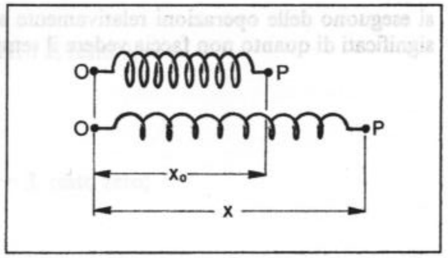
Calcolare il lavoro in tal modo è corretto solo nel caso che la forza che lo compie si mantenga costante mentre si sposta il suo punto di applicazione. Ci sono però delle forze che subiscono delle variazioni se il loro punto di applicazione si sposta. È questo, ad esempio, il caso delle forze di natura elastica. Come si calcola il lavoro in questi casi? Consideriamo un esempio.

Quando l'estremo libero P di una molla, vincolata all'altro estremo O, è spostato (ad esempio allontanato) dalla posizione di riposo, la molla sviluppa una forza di reazione proporzionale alla variazione di lunghezza subita (legge di Hooke):

$$R = -k(x - x_0)$$

ove:

- **x_0 denota la posizione di riposo,**
- **x è la nuova posizione dell'estremo libero rispetto ad O,**
- **k è una costante di proporzionalità dipendente dalla natura della molla.**



Per mantenere P in equilibrio in una qualsiasi posizione x, occorre una forza:

$$F = -R = k(x - x_0)$$

la cui intensità dipende quindi dalla posizione di P.

Per calcolare il lavoro compiuto da tale forza quando il suo punto di applicazione si sposta di $s = x - x_0$ non si può più applicare la formula $L = F \cdot s$, poiché F diventa tanto più grande quanto maggiore è $x - x_0$.

Se però lo spostamento fosse piccolissimo, ad esempio $s = dx$, la variazione della forza durante lo spostamento si potrebbe ritenere nulla. In tal caso il prodotto della forza F per lo spostamento dx ci dà ancora un lavoro che chiameremo infinitesimo:

$$dL = F \cdot dx$$

In prima approssimazione il lavoro compiuto dalla forza F, quando il suo punto di applicazione si sposta di $x - x_0$, si otterrà sommando i lavori del tipo $dL = F \cdot dx$ corrispondenti ad una suddivisione di $x - x_0$ in un numero molto grande di elementi dx. Cioè:

$$L = \sum F \cdot dx$$

Questa espressione è tanto più corretta quanto più dx è piccolo e fornisce il lavoro effettivo quando dx tende a zero. Cioè:

$$L = \lim_{dx \to 0} \sum F \cdot dx$$

Sostituendo al simbolo $\lim\limits_{dx \to 0} \sum$ il nuovo simbolo $\int$ (integrale), si ha:

$$L \int_{x_0}^{x} F \cdot dx = \int_{x_0}^{x} k(x - x_0)\, dx$$

Al simbolo $\int$ sono stati apposti gli indici x e x_0 per indicare che la distanza del punto P da O varia da x_0 a x. Quindi, per ottenere L, si debbono eseguire sulla funzione $F(x) = k(x - x_0)$ le operazioni indicate dal simbolo $\int$ di integrazione.

Il modo di eseguire l'integrazione di $F(x)$ non ha alcuna importanza perché in questa introduzione si vuol mettere in evidenza solo il significato dell'operazione.

Quando il lettore calcola un limite, ad esempio:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$$

non fa altro che sostituire il numero 2 al posto di x, eseguendo un'operazione molto semplice. Ma sa benissimo che il calcolo del limite di una funzione implica un concetto che non traspare dalla semplice sostituzione del numero 2 al posto di x. Allo stesso modo, quando si calcola l'integrale:

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

si eseguono delle operazioni relativamente semplici, ma l'operatore integrale è più ricco di significati di quanto non faccia vedere il semplice calcolo.

1 - RICHIAMI DI ALGEBRA, TRIGONOMETRIA CIRCOLARE ED IPERBOLICA

1.1.- Divisione tra polinimi interi. Regola di Ruffini e del resto

Dividendo il numero 20 (dividendo) per 6 (divisore), si ottiene il quoziente 3 ed il resto 2. Si sa che questi quattro numeri sono legati dalla relazione:

dividendo = divisore × quoziente + resto infatti: $20 = 6 \cdot 3 + 2$

Un'analoga relazione sussiste nel caso dei polinomi. Infatti è corretta la relazione (uguaglianza) seguente:

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 3 = (x^2 - x + 1)(x - 1) + 3x - 2 \qquad [1.1.1]$$

(il lettore provi a sviluppare il secondo membro, troverà così il primo membro).

Nel caso della divisione $25 : 5 = 5$, il resto è zero e si può scrivere $25 = 5 \cdot 5$. Il primo numero è divisibile per il secondo. Così per la divisione:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{x - 1} = x^2 \quad x + 3 \qquad [1.1.2]$$

il resto è zero, il polinomio al numeratore è divisibile per quello al denominatore e si può scrivere:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x^2 - x + 3) \qquad [1.1.3]$$

Capiterà spesso di dovere effettuare divisioni tra due polinomi e di dover scrivere relazioni come le [1.1.1], [1.1.2], [1.1.3]. Ciò avverrà principalmente quando si dovrà integrare una funzione razionale fratta, o calcolarne il limite, oppure scomporre un polinomio in prodotto di due o più fattori. Pertanto è necessario saper fare la divisione tra polinomi. Tale divisione sarà eseguita tutte le volte che il grado del dividendo è maggiore o uguale a quello del divisore, così come (per ottenere un quoziente intero) la divisione tra due numeri si effettua quando il dividendo è maggiore o uguale al divisore.

Esempi.

$\dfrac{27}{12}$ si esegue: quoziente intero 2, resto 3;

$\dfrac{15}{33}$ non si esegue

$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ si esegue: quoziente $x - 3$, resto zero;

$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1}$ non si esegue.

Come si effettua la divisione tra due polinomi? Consideriamo l'esempio che conduce alla [1.1.1]. Il lettore curi che il dividendo ed il divisore siano ordinati secondo le potenze decrescenti di x. Si dividano i due monomi di grado maggiore:

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 3 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^3 + x^2 - x & x \\ \hline -x^2 + 4x - 3 & \end{array}$$

Si sottragga, quindi, dal dividendo il divisore moltiplicato per x.
Si assuma adesso come dividendo la differenza e si ripeta la stessa operazione. Cioè:

$$\begin{array}{l|l} -x^2 + 4x - 3 & x^2 - x + 1 \\ \hline +x^2 - x + 1 & -1 \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

La divisione fra i monomi di grado massimo dà $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$

La differenza tra il dividendo ed il divisore moltiplicato per -1 dà resto $3x - 2$. Poiché questo resto ha grado inferiore a quello del divisore l'operazione finisce qui.

In definitiva il quoziente è $x - 1$, il resto è $3x - 2$.

Adesso che è chiaro il meccanismo, eseguiamo l'operazione senza spezzarla:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + 5x - 3 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^3 + x^2 - x & x - 1 \\ \hline -x^2 + 4x - 3 & \\ +x^2 - x + 1 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

Si può quindi scrivere: $x^3 - 2x^2 + 5x - 3 = (x^2 - x + 1)(x - 1) + 3x - 2$

Dividendo ambo i membri di questa uguaglianza per $x^2 - x + 1$ si ottiene un modo di esprimere il rapporto tra due polinomi di fondamentale importanza per il calcolo di integrali di funzioni razionali fratte:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{x^2 - x + 1} = x - 1 + \frac{3x - 2}{x^2 - x + 1} \qquad [1.1.4]$$

Così, eseguendo una certa operazione (ad esempio l'integrazione) sul 2° membro, si ottiene lo stesso risultato che si otterrebbe eseguendo l'operazione sul 1° membro. Ciò faciliterà molto i calcoli nel seguito.

Altro esempio. Come si può scrivere il rapporto $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{x - 1}$?

Eseguiamo la divisione:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 + 4x - 3 & x - 1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 - x + 3 \\ \hline -x^2 + 4x - 3 & \\ +x^2 - x & \\ \hline 3x - 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quoziente: $x^2 - x + 3$
Resto: zero

Si può quindi scrivere:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{x - 1} = x^2 - x + 3 \qquad [1.1.5]$$

Questo allora è il modo di eseguire la divisione tra due polinomi qualsiasi, purché il grado del dividendo sia maggiore o uguale a quello del divisore.

In generale è:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

cioè il rapporto tra due polinomi è uguale al quoziente più il resto fratto il divisore, come nella [1.1.4].

Un caso che capiterà molto spesso è quello in cui il denominatore (divisore) è di 1° grado, cioè è un polinomio di uno dei seguenti tipi:

Tipo	a	b	c	d
Polinomio	$x - p$	$x + p$	$qx - p$	$qx + p$
Esempio	$x - 2$	$x + 3$	$2x - 1$	$3x + 2$

La divisione può essere eseguita esattamente come prima. Ma in ognuno di questi quattro casi, è preferibile applicare una regola pratica che conduce velocemente al quoziente. È questa la regola di Ruffini. Essa si basa sulle seguenti considerazioni: se nell'espressione

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

è n il grado del numeratore $A(x)$ ed m quello del denominatore $B(x)$, $n - m$ è il grado del quoziente $Q(x)$, mentre il grado del resto $R(x)$ è sicuramente inferiore ad m, altrimenti la divisione sarebbe andata avanti. Cosicché, se il grado del denominatore è $m = 1$ (tipi a, b, c, d), quello del quoziente è $n - 1$ e quello del resto è zero (cioè il resto è un numero o una espressione indipendente da x).

Consideriamo un esempio relativo al tipo a):

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{x - 2} = px^2 + qx + r + \frac{s}{x - 2}$$

La regola di Ruffini fornisce i coefficienti p, q, r ed il resto s, quindi ci fornisce il secondo membro per intero. Lo schema da seguire è il seguente:

1) Si allineano i coefficienti del numeratore mettendo uno zero al posto delle potenze di x eventualmente mancanti, e si isola l'ultimo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -4 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2) Si determina il valore che annulla il divisore ($x = 2$) e lo si pone alla sinistra dello schema. Quindi si riscrive il primo coefficiente (1) in basso.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

si ha: $p = 1$ (sempre uguale al 1° coefficiente)

3) Si moltiplica il valore che annulla il divisore ($x = 2$) per p (1° coefficiente) e si somma il risultato al 2° coefficiente (2):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & & 1\cdot 2 & & \\ \hline & 1 & 4 & & \end{array}$$

si ha: $q = 4$

4) Si moltiplica il valore che annulla il divisore ($x = 2$) per $q = 4$ e si somma il risultato al 3° coefficiente (-5):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & & 1\cdot 2 & 2\cdot 4 & \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \end{array}$$

si ha: $r = 3$

5) Si moltiplica il valore che annulla il divisore ($x = 2$) per $r = 3$ e si somma il risultato al 4° coefficiente (-4):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & & 1\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array} \qquad \text{si ha: } s = 2 \text{ (resto).}$$

Pertanto: $$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{x - 2} = x^2 + 4x + 3 + \frac{2}{x - 2}$$

Per applicare la regola di Ruffini è sufficiente, in definitiva, costruire la seguente tabella che fornisce immediatamente i valori p, q, r, s:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Vediamo degli esempi relativi ai quattro tipi a, b, c, d, con:

resto = zero (il primo polinomio è divisibile per il secondo)	resto ≠ zero (il primo polinomio non è divisibile per il secondo)

tipo a

$$\frac{-x^3 + x^2 + 18}{x - 3} = \dots$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 1 & 0 & 18 \\ 3 & & -3 & -6 & -18 \\ \hline & -1 & -2 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\dots = -x^2 - 2x - 6$$

$$\frac{2x^3 - x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \dots$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\dots = 2x^2 + x + 4 + \frac{3}{x - 1}$$

tipo b

$$\frac{2x^3 + x^2 - 3x - 2}{x + 1} = \dots$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & & -2 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\dots = 2x^2 - x - 2$$

$$\frac{-3x^4 - 2x^2 + x}{x + 2} = \dots$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & & 6 & -12 & 28 & -58 \\ \hline & -3 & 6 & -14 & 29 & -58 \end{array}$$

$$\dots = -3x^3 + 6x^2 - 14x + 29 - \frac{58}{x + 2}$$

Per i tipi c e d si procede nello stesso modo dopo aver diviso numeratore e denominatore per q. Anche l'eventuale resto risulta diviso per q.

tipo c

$$\frac{8x^3 - 27}{2x - 3} = \frac{4x^3 - \frac{27}{2}}{x - \frac{3}{2}} = \dots$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} \\ \frac{3}{2} & & 6 & 9 & \frac{27}{2} \\ \hline & 4 & 6 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\dots = 4x^2 + 6x + 9$$

$$\frac{3x^2 + x + 1}{3x - 2} = \frac{x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x - \frac{2}{3}} = \dots$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Resto effettivo: $R = 1 \cdot 3 = 3$

$$\dots = x + 1 + \frac{3}{3x - 2}$$

resto = zero (il primo polinomio è divisibile per il secondo)	resto ≠ zero (il primo polinomio non è divisibile per il secondo)

tipo d

$$\frac{x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x - 1}{\frac{1}{2}x + 1} = \frac{2x^3 + 4x^2 - x - 2}{x + 2} = \dots$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & & -4 & 0 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\dots = 2x^2 - 1$$

$$\frac{4x^2 + 4x + 2}{2x + 1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x + \frac{1}{2}} = \dots$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & -\frac{1}{2} \\ \hline & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Resto effettivo $R = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$$= 2x + 1 + \frac{1}{2x + 1}$$

Gli esempi relativi alla prima colonna ci dicono che quando un polinomio è divisibile per un binomio di 1° grado, il quoziente è un polinomio intero. Cioè, in ognuno dei quattro casi, l'espressione generale

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) \qquad \text{oppure} \qquad A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

diventa:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad A(x) = (x - p) \cdot Q(x) \\ &\text{b)} \quad A(x) = (x + p) \cdot Q(x) \\ &\text{c)} \quad A(x) = (qx - p) \cdot Q(x) \\ &\text{d)} \quad A(x) = (qx + p) \cdot Q(x) \end{aligned} \qquad [1.1.6]$$

Le [1.1.6], così come sono scritte, sono delle identità, cioè uguaglianze verificate per qualunque valore di x. Valori particolari che sono utili al fine di scomporre in fattori un polinomio $A(x)$ sono:

a) $x = p$ per cui la [1.1.6-a] diventa: $A(p) = (p - p) \cdot Q(p) = 0$

b) $x = -p$ » » » [1.1.6-b] » $A(-p) = (-p + p) \cdot Q(-p) = 0$

c) $x = \frac{p}{q}$ » » » [1.1.6-c] » $A\left(\frac{p}{q}\right) = (p - p) \cdot Q\left(\frac{p}{q}\right) = 0$

d) $x = -\frac{p}{q}$ » » » [1.1.6-d] » $A\left(-\frac{p}{q}\right) = (-p + p) \cdot Q\left(-\frac{p}{q}\right) = 0$

Quindi, se un polinomio si annulla per:

a) $x = p$ esso è divisibile per $x - p$

b) $x = -p$ » » » $x + p$

c) $x = \frac{p}{q}$ » » » $qx - p$

d) $x = -\frac{p}{q}$ » » » $qx + p$

1.2.- Scomposizione di polinomi in fattori

Riportiamo nella seguente tabella la scomposizione di alcuni particolari tipi di polinomi.

TAB. 1-I

Tipo	Scomposizione	Esempio
$x^2 - a^2$	$(x + a)(x - a)$	$4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$
$a^2x^2 \pm 2abx + b^2$	$(ax \pm b)^2$	$4x^2 \pm 12x + 9 = (2x \pm 3)^2$
$x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3$	$(x \pm a)^3$	$8x^3 \pm 12x^2 + 6x \pm 1 = (2x \pm 1)^3$
$x^3 + a^3$	$(x + a)(x^2 - ax + a^2)$	$27x^3 + 8 = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$
$x^3 - a^3$	$(x - a)(x^2 + ax + a^2)$	$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
$x^n - a^n$ n pari	$(x^{n/2} + a^{n/2})(x^{n/2} - a^{n/2})$	$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = \ldots$
$x^n - a^n$ n dispari	$(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots)$	$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$x^n + a^n$ n pari	non è divisibile per $x \pm a$	
$x^n + a^n$ n dispari	$(x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots)$	$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

Quando il polinomio non si presenta in alcuna di queste forme è necessario ricorrere ad altri metodi:

a) *Raccoglimento a fattore comune totale*

Esempio: $5x^3 - 10x^2 + 20x = 5x(x^2 - 2x + 4)$

b) *Raccoglimento a fattore comune parziale*

Esempio: $2x^4 - 4x^3 + x - 2 = 2x^3(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(2x^3 + 1)$

c) *Applicazione del criterio di divisibilità di un polinomio per un binomio di 1° grado.* Si applicano, cioè, le [1.1.6]. Per questo però occorre trovare dei valori di x che annullino $A(x)$. Ebbene, dato il polinomio $A(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, se ammette valori di x razionali che l'annullano, questi sono da ricercare tra i divisori del termine noto: $\pm 1, \pm 2$:

$A(1) = 1 - 1 - 1 - 1 - 2 = -4 \neq 0$

$A(-1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$ si annulla per $x = -1$ è quindi divisibile per $x + 1$

$A(2) = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0$ si annulla per $x = 2$ è quindi divisibile per $x - 2$

$A(-2) = 16 + 8 - 4 + 2 - 2 = 20 \neq 0$

Con Ruffini si trovano i coefficienti del quoziente di $\dfrac{A(x)}{x + 1}$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\
-1 & & -1 & 2 & -1 & 2 \\
\hline
1^\circ \text{ quoz.} & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\
2 & & 2 & 0 & 2 & \\
\hline
2^\circ \text{ quoz.} & 1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Il primo quoziente si annulla per $x = 2$. Si applica allora ancora Ruffini.

Infine: $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$

Poiché $x^2 + 1$ nel campo reale non è scomponibile, il risultato è quello trovato.

Tutto ciò vale quando il primo coefficiente del polinomio $A(x)$ è uno. Se così non fosse bisognerebbe procedere come nel seguente esempio:

$$A(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$$

Si scrivono i divisori del termine noto (-6) e quelli del 1° coefficiente (2):

divisori del termine noto: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

divisori del 1° coefficiente: $\pm 1, \pm 2$

Se esistono valori razionali che annullano $A(x)$, essi sono da ricercare tra i rapporti di ciascun divisore del termine noto e ciascun divisore del 1° coefficiente, cioè:

$$\pm 1,\ \pm 1/2,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 3/2,\ \pm 6$$

Per individuare i valori di x che annullano $A(x)$ si calcola:

$A(1) = 2 + 3 - 11 - 6 = -12 \neq 0$

$A(-1) = -2 + 3 + 11 - 6 = 6 \neq 0$

$A\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 11\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 6 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{11}{2} - 6 = 0$

$A(x)$ è divisibile quindi per $x + \dfrac{1}{2}$. Si trova il quoziente:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 3 & -11 & -6 \\
-\frac{1}{2} & & -1 & -1 & 6 \\
\hline
 & 2 & 2 & -12 & 0
\end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6)$

Allora: $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x^2 + x - 6) = (2x + 1)(x^2 + x - 6)$

Si cerca infine di scomporre $x^2 + x - 6$ applicando la formula di scomposizione del trinomio di secondo grado (cfr. §1.4):

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ove x_1 e x_2 sono gli zeri del trinomio. Nel nostro caso si ha: $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$. Pertanto:

$$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = (2x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

I valori di x_1 e x_2 si possono anche trovare proseguendo con il calcolo di $A(2)$ e di $A(-3)$, oppure, meglio ancora, risolvendo l'equazione di 2° grado $x^2 + x - 6 = 0$.

1.3.- Potenze. Radicali. Razionalizzazione di espressioni irrazionali

Scrivendo a^n si intende una potenza con base (a) positiva ed esponente (n) reale. Tali potenze godono delle proprietà indicate in TAB. 1-II.

Inoltre, per definizione, è:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \quad \text{con } n > 0 \text{ intero.}$$

Ne segue che:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \quad \text{con } n > 0,\ m \lesseqgtr 0 \text{ interi.}$$

TAB. 1-II

Proprietà	Esempi
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	$2^{\sqrt{2}} : 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{1-\sqrt{3}} = 7^{\sqrt{3}-1}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^{1/2} \cdot 5^{1/2} = 10^{1/2}$
$a^n : b^n = (a : b)^n$	$2^3 : 5^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{6}}$

Poiché un radicale (¹) non è altro che una potenza con base positiva ed esponente razionale, valgono ancora le proprietà delle potenze della TAB. 1-II. Esempio:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2^{1/2} \cdot 2^{3/4} = 2^{5/4} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2}$$

Capita spesso di dover razionalizzare un'espressione irrazionale. Si consideri ad esempio l'espressione irrazionale:

$$\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-1}$$

quando si parla di razionalizzazione si intende razionalizzarne o il numeratore o il denominatore, poiché, se l'espressione è irrazionale, essa non può, in alcun modo, essere resa razionale. Così, se dell'espressione data si vuol rendere razionale il denominatore, basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x-1}+1$:

$$\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{x-1+3\sqrt{x-1}+2}{(\sqrt{x-1})^2-1} =$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x-1}+1}{x-2}$$

Se si volesse invece razionalizzare il numeratore basterebbe moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x-1}-2$:

$$\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-2} = \frac{(\sqrt{x-1})^2-4}{x-1-3\sqrt{x-1}+2} =$$

$$= \frac{x-5}{x-3\sqrt{x-1}+1}$$

L'espressione per cui si deve moltiplicare numeratore e denominatore si chiama *fattore razionalizzante*. Nella tabella 1-III-a viene indicato, per ogni espressione da razionalizzare, il corrispondente fattore razionalizzante.

(¹) Per maggiori dettagli sui radicali cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica per gli studenti del I° anno di università*, §1.6.

TAB. 1-III-a

Espressione irrazionale	Fattore razionalizzante
$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$
$a\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$
$\sqrt[n]{x^m}$	$\sqrt[n]{x^{n-m}}$
$a \cdot \sqrt[n]{x^m}$	$\sqrt[n]{x^{n-m}}$
$\sqrt{x} \pm c$	$\sqrt{x} \mp c$
$\sqrt{x} \pm \sqrt{c}$	$\sqrt{x} \mp \sqrt{c}$
$a\sqrt{x} \pm b\sqrt{c}$	$a\sqrt{x} \mp b\sqrt{c}$
$\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}$
$\sqrt[4]{x} \pm a$	$\sqrt[4]{x^3} \mp a\sqrt{x} + a^2\sqrt[4]{x} \mp a^3$
$\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{x}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$
$\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$	$(\sqrt{x}+\sqrt{a})-(\sqrt{b}+\sqrt{c})$

Nella tabella seguente riportiamo degli esempi relativi alla razionalizzazione delle espressioni che figurano nella tabella 1-III-a:

TAB. 1-III-b

Esempi di razionalizzazione del denominatore

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

$$\frac{1}{2\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}+1$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\frac{6}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{6}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$\frac{8}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}} = 2\sqrt[3]{4} \cdot (\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$$

$$\frac{11}{\sqrt[4]{5}+2} = \frac{11}{\sqrt[4]{5}+2} \cdot \frac{\sqrt[4]{125}-2\sqrt{5}+4\sqrt[4]{5}-8}{\sqrt[4]{125}-2\sqrt{5}+4\sqrt[4]{5}-8} = 8-4\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}$$

La razionalizzazione delle ultime due espressioni della tabella 1-III-a va fatta in due tempi, infatti i fattori razionalizzanti indicati riconducono l'espressione ad una delle forme precedenti. Ad esempio:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{2}-5}{(2-\sqrt{2})^2-3} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}-5}{3-4\sqrt{2}} \cdot \frac{3+4\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} = -\frac{23\sqrt{2}+23}{9-32} = \sqrt{2}+1$$

1.4.- Formule di risoluzione dell'equazione di secondo grado. Scomposizione del trinomio di secondo grado

Data l'equazione di 2° grado $ax^2+bx+c=0$, dette x_1 e x_2 le sue radici, si possono verificare i seguenti tre casi:

1) $\Delta = b^2-4ac > 0 \rightarrow$ x_1 e x_2 reali e distinte
2) $\Delta = b^2-4ac = 0 \rightarrow$ x_1 e x_2 reali coincidenti
3) $\Delta = b^2-4ac < 0 \rightarrow$ x_1 e x_2 complesse coniugate

Le radici dell'equazione sono date da:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} \qquad x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

a, b, c qualsiasi — per *b* pari — per *b* pari e $a = 1$

L'espressione $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ si indica con $\frac{\Delta}{4}$ perché in effetti è:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{1}{4}(b^2-4ac) = \frac{\Delta}{4}$$

Nel caso in cui è $a = 1$ con b pari, si ha: $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$

Dovendo scomporre in fattori il trinomio di 2° grado ax^2+bx+c, si calcola il Δ dell'equazione che si ottiene uguagliandolo a zero. Si ha:

1) $\Delta > 0 \rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
2) $\Delta = 0 \rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$ con $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ e quindi:
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a}(2ax+b)^2$$
3) $\Delta < 0 \rightarrow$ Poiché l'equazione non ammette radici reali, il trinomio non è scomponibile nel campo reale.

1.5.- Logaritmi e loro proprietà (¹)

Per definizione le due scritture $a^x = b$ e $x = \log_a b$ sono equivalenti. Come visto al §1.3, nella prima deve essere $a > 0$, quindi, per qualsiasi x, ne segue $b > 0$. Dovendo essere

(¹) Per maggiori dettagli sui logaritmi cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica per gli studenti del I° anno di università*, §§ 1.14, 5.4.

le due relazioni equivalenti, anche per la seconda deve essere $a > 0$ e $b > 0$. Se ne deduce che:

il logaritmo in base a (positiva) è l'esponente x (qualsiasi) da dare ad a per ottenere l'argomento b (positivo).

Scrivere, ad esempio, $y = \log_5(x-1)$ comporta la limitazione $x-1>0 \rightarrow x>1$. Se poi si vuole che la x possa assumere qualsiasi valore, è necessario scrivere:

$$y = \log_5|x-1| \quad \text{con} \quad x \neq 1$$

In generale la scrittura $y = \log|f(x)|$ comporta l'unica limitazione che la x non assuma valori che rendano nulla la $f(x)$, infatti il modulo (²) di $f(x)$ assicura la positività dell'argomento per qualsiasi x per cui $f(x)$ è definita e non nulla.

Se poi si volesse togliere il modulo, basterebbe imporre le dovute limitazioni:

$$y = \log|f(x)| = \begin{cases} \log f(x) & \text{per } f(x) > 0 \\ \log[-f(x)] & \text{per } f(x) < 0 \end{cases}$$

Esempio:

$$\log|x^2-4| = \begin{cases} \log(x^2-4) & \text{per } x<-2 \text{ e } x>2 \\ \log(4-x^2) & \text{per } -2<x<2 \end{cases}$$

I logaritmi più frequentemente adoperati sono quelli in base 10 che si dicono *volgari* o *di Briggs* e si indicano con Log, e quelli in base *e* che si dicono *naturali* o *neperiani* e si indicano con log o con ln.

Nella seguente tabella si riportano alcune fondamentali proprietà dei logaritmi. Si ponga l'attenzione sul fatto che tali proprietà valgono qualunque sia la base ed in entrambi i sensi.

Tabella 1-IV

$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$	$\log\lvert f(x)\rvert + \log\lvert g(x)\rvert = \log\lvert f(x)\cdot g(x)\rvert$
$\log a - \log b = \log\frac{a}{b}$	$\log\lvert f(x)\rvert - \log\lvert g(x)\rvert = \log\left\lvert\frac{f(x)}{g(x)}\right\rvert$
$n\log a = \log a^n$	$n\log\lvert f(x)\rvert = \begin{cases}\log[f(x)]^n & \text{per } n \text{ pari} \\ \log\lvert f(x)\rvert^n & \text{per } n \text{ dispari}\end{cases}$
$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$	

1.6.- Funzioni trigonometriche e relazioni tra esse

Con riferimento alla fig. 1.6.1, sia α un qualsiasi angolo. Si stabilisce che esso è positivo se descritto dalla rotazione in senso antiorario della retta t. Questa forma l'angolo di ampiezza nulla quando è sovrapposta all'asse x. Sia P un punto di t e si indichi con r (positivo) la sua distanza da O. Per definizione è:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

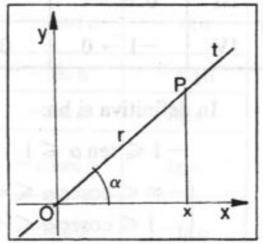


Fig. 1.6.1

(²) Per maggiori dettagli sui moduli cfr. P.11, *Corso propedeutico di matematica per gli studenti del I° anno di università*, §1.6.

Nell'ipotesi in cui r sia unitario, le sei relazioni precedenti diventano:

$$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Tra le sei funzioni sussistono quindi le relazioni:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Le sei funzioni goniometriche assumono segni diversi a seconda del quadrante in cui si trova il punto P, cioè a seconda dell'ampiezza dell'angolo α:

TAB. I-V

Quadrante	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
Primo	+	+	+	+	+	+
Secondo	+	−	−	+	−	−
Terzo	−	−	+	−	−	+
Quarto	−	+	−	−	+	−

Nella seguente tabella sono riepilogati i valori entro cui può variare ciascuna delle sei funzioni in relazione alla posizione del punto P nei singoli quadranti:

TAB. 1-VI

	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	$0 \to 1$	$1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 1$	$1 \to +\infty$	$+\infty \to 0$
II	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-\infty \to 0$	$1 \to +\infty$	$-\infty \to -1$	$0 \to -\infty$
III	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$-\infty \to -1$	$-1 \to -\infty$	$+\infty \to 0$
IV	$-1 \to 0$	$0 \to 1$	$-\infty \to 0$	$-1 \to -\infty$	$+\infty \to 1$	$0 \to -\infty$

In definitiva si ha:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\alpha \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1 \qquad -\infty < \operatorname{tg}\alpha < +\infty$$

$$\begin{cases} -\infty < \operatorname{cosec}\alpha \leqslant -1 \\ 1 \leqslant \operatorname{cosec}\alpha < +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} -\infty < \sec\alpha \leqslant -1 \\ 1 \leqslant \sec\alpha < +\infty \end{cases} \qquad -\infty < \operatorname{ctg}\alpha < +\infty$$

Tra le funzioni trigonometriche esistono delle relazioni mediante le quali si può esprimerne una in funzione delle altre. Queste relazioni sono raggruppate nella TAB. 1-VII riprodotta alla pagina seguente.

TAB. 1-VII

	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$
$\sec\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$	$\sec\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Il segno (+) o (−) dipende dalla posizione del punto P (1°, 2°, 3°, 4° quadrante), cioè dall'ampiezza dell'angolo α

1.7.- Relazioni tra archi associati e identità fondamentali

Conoscendo i valori delle funzioni trigonometriche di un angolo (o arco) α, è possibile calcolare, tramite le formule di TAB. 1-VIII, i valori delle funzioni trigonometriche degli angoli associati ad α:

$$-\alpha \qquad \frac{\pi}{2} \pm \alpha \qquad \pi \pm \alpha \qquad \frac{3}{2}\pi \pm \alpha \qquad 2\pi \pm \alpha.$$

TAB. I-VIII

Archi	sen	cos	tg	cosec	sec	ctg
$-\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Vediamo l'uso della tabella mediante un esempio.

Si verifichi che la funzione $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ non varia scambiando x con $\pi + x$.

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi + x)}{\operatorname{sen}(\pi + x) + \cos(\pi + x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-(\operatorname{sen} x + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = y$$

Si è pervenuti al risultato riconducendo mediante la quinta riga della **TAB. 1-VIII** le funzioni di $\pi + x$ a quelle di x.

Trattiamo adesso le identità fondamentali. Il primo problema che ci si pone è quello di esprimere le funzioni trigonometriche dell'angolo $\alpha \pm \beta$ conoscendo le funzioni di α e di β. Il problema è risolto mediante le:

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} \qquad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$$

Si possono poi esprimere le funzioni trigonometriche di un angolo mediante le funzioni della sua metà con le:

FORMULE DI DUPLICAZIONE E LE FORMULE PARAMETRICHE

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 \qquad = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \qquad = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{2t} \quad \text{con } t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

I prodotti tra le funzioni trigonometriche di angoli α e β si possono esprimere in somme algebriche mediante le:

FORMULE DI WERNER

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

Mentre le somme algebriche tra funzioni trigonometriche di angoli α e β si possono esprimere in prodotti mediante le:

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} \qquad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Mediante le funzioni trigonometriche di α possono anche essere espresse le funzioni di $\alpha/2$ con le:

FORMULE DI BISEZIONE

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \quad \rightarrow \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

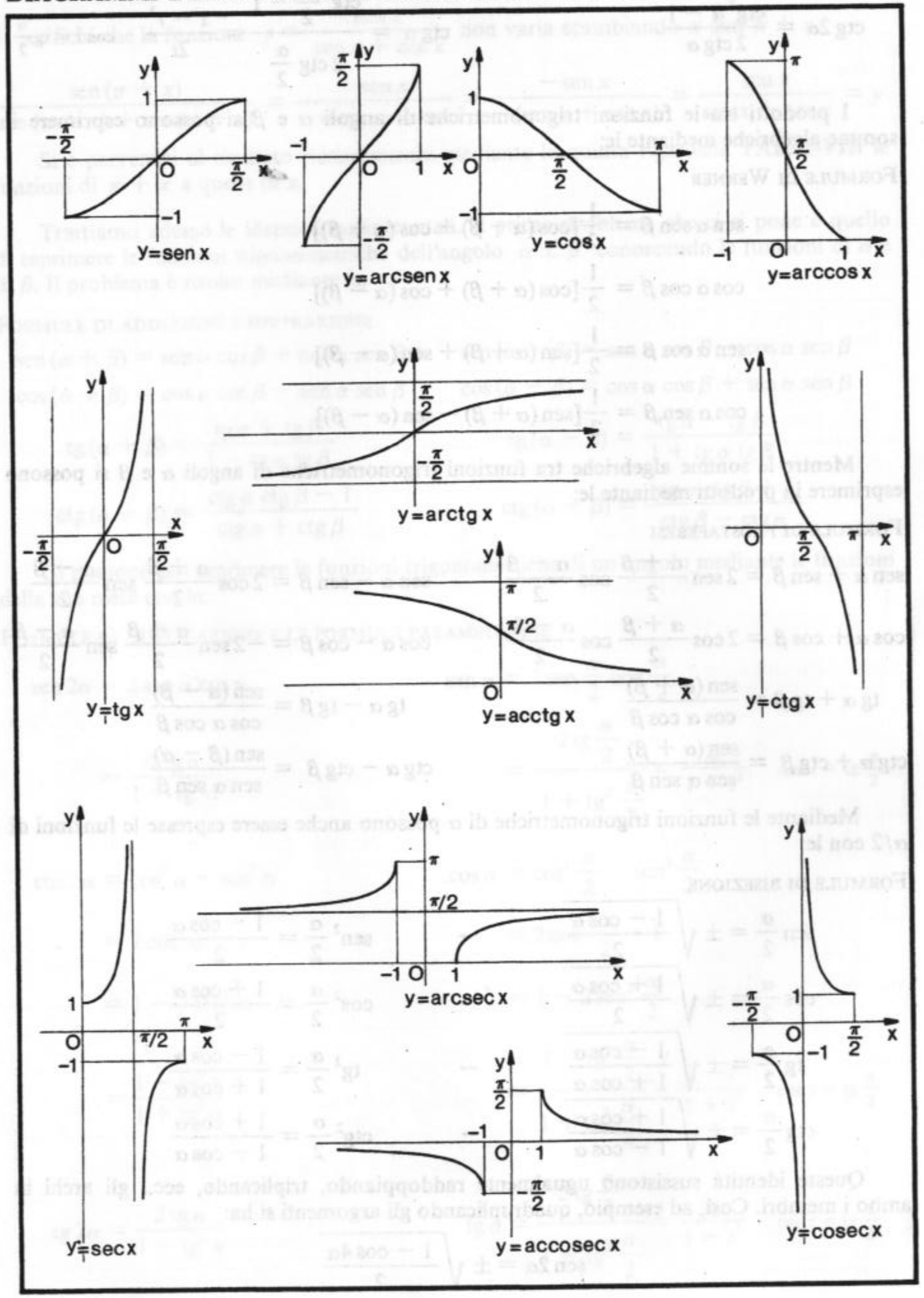
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} \quad \rightarrow \quad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

Queste identità sussistono ugualmente raddoppiando, triplicando, ecc., gli archi in ambo i membri. Così, ad esempio, quadruplicando gli argomenti si ha:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 4\alpha}{2}}$$

DIAGRAMMI DELLE FUNZIONI CIRCOLARI E DELLE RISPETTIVE INVERSE



1.8.- Inverse delle funzioni trigonometriche (1)

Dai grafici delle funzioni trigonometriche inverse, riprodotti nella pagina precedente, si possono rilevare le variazioni delle sei funzioni e del loro argomento:

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \quad \text{con} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{arc\,cos} x \quad \text{con} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{arc\,cosec} x \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\infty < x \leqslant -1 & \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y < 0 \\ 1 \leqslant x < +\infty & \text{e} \quad 0 < y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y = \operatorname{arc\,sec} x \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\infty < x \leqslant -1 & \text{e} \quad \frac{\pi}{2} < y \leqslant \pi \\ 1 \leqslant x < +\infty & \text{e} \quad 0 \leqslant y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad 0 < y < \pi$$

Entro questi intervalli sussistono delle relazioni tra le funzioni trigonometriche inverse che possono essere utili sia per il calcolo di integrali che per l'eventuale studio di una funzione di questo tipo. Tali relazioni sono elencate nella TAB. 1-IX, ove si è posto:

$$x = a \qquad \sqrt{1-x^2} = b \qquad \sqrt{1+x^2} = c \qquad \sqrt{x^2-1} = d$$

TAB. 1-IX

arc sen a =		arc cos a =	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
$-\operatorname{arc\,sen}(-a)$	$-\operatorname{arc\,sen}(-a)$	$-\operatorname{arc\,sen} a + \frac{\pi}{2}$	$-\operatorname{arc\,sen} a + \frac{\pi}{2}$
$-\operatorname{arc\,sen} b + \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,sen} b - \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,sen}(-a) + \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,sen}(-a) + \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arc\,cos}(-a) - \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,cos}(-a) - \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,sen} b$	$-\operatorname{arc\,sen} b + \pi$
$-\operatorname{arc\,cos} a + \frac{\pi}{2}$	$-\operatorname{arc\,cos} a + \frac{\pi}{2}$	$-\operatorname{arc\,cos}(-a) + \pi$	$-\operatorname{arc\,cos}(-a) + \pi$
$\operatorname{arc\,cos} b$	$-\operatorname{arc\,cos} b$	$-\operatorname{arc\,cos} b + \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,cos} b + \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$	$-\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + \frac{\pi}{2}$	$-\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arc\,cosec} \frac{1}{a}$	$\operatorname{arc\,cosec} \frac{1}{a}$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$	$\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + \pi$
$\operatorname{arc\,sec} \frac{1}{b}$	$-\operatorname{arc\,sec} \frac{1}{b}$	$\operatorname{arc\,cosec} \frac{1}{b}$	$-\operatorname{arc\,cosec} \frac{1}{b} + \pi$
$-\operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{b} + \frac{\pi}{2}$	$-\operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{b} + \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{arc\,sec} \frac{1}{a}$	$\operatorname{arc\,sec} \frac{1}{a}$
$\operatorname{arc\,ctg} \frac{b}{a}$	$\operatorname{arc\,ctg} \frac{b}{a} - \pi$	$\operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{b}$	$\operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{b}$

(segue)

(1) Per ulteriori ragguagli sulle funzioni inverse in generale e sulle trigonometriche inverse in particolare, cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §§3.3, 3.4.

TAB. 1-IX *(seguito)*

arc tg a =		arc cosec a =	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
$\text{arc sen}\,\frac{a}{c}$	$\text{arc sen}\,\frac{a}{c}$	$\text{arc sen}\,\frac{1}{a}$	$\text{arc sen}\,\frac{1}{a}$
$-\text{arc cos}\,\frac{a}{c}+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc cos}\,\frac{a}{c}+\frac{\pi}{2}$	$\text{arc cos}\,\frac{d}{a}$	$\text{arc cos}\,\frac{d}{a}-\pi$
$\text{arc cos}\,\frac{1}{c}$	$-\text{arc cos}\,\frac{1}{c}$	$\text{arc tg}\,\frac{1}{d}$	$-\text{arc tg}\,\frac{1}{d}$
$-\text{arc tg}(-a)$	$-\text{arc tg}(-a)$	$-\text{arc cosec}(-a)$	$-\text{arc cosec}(-a)$
$-\text{arc tg}\,\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc tg}\,\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc sec}\,a+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc sec}\,a+\frac{\pi}{2}$
$\text{arc cosec}\,\frac{c}{a}$	$\text{arc cosec}\,\frac{c}{a}$	$\text{arc sec}(-a)-\frac{\pi}{2}$	$\text{arc sec}(-a)-\frac{\pi}{2}$
$\text{arc sec}\,c$	$\text{arc sec}\,c$	$\text{arc sec}\,\frac{a}{d}$	$\text{arc sec}\,\frac{a}{d}-\pi$
$-\text{arc tg}\,a+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc tg}\,a+\frac{\pi}{2}$	$\text{arc ctg}\,d$	$-\text{arc ctg}\,d$
$\text{arc ctg}(-a)-\frac{\pi}{2}$	$\text{arc ctg}(-a)-\frac{\pi}{2}$		
$\text{arc ctg}\,\frac{1}{a}$	$\text{arc ctg}\,\frac{1}{a}-\pi$		

arc sec a =		arc ctg a =	
$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
$\text{arc sen}\,\frac{d}{a}$	$\text{arc sen}\,\frac{d}{a}+\pi$	$-\text{arc sen}\,\frac{a}{c}+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc sen}\,\frac{a}{c}+\frac{\pi}{2}$
$\text{arc cos}\,\frac{1}{a}$	$\text{arc cos}\,\frac{1}{a}$	$\text{arc sen}\,\frac{1}{c}$	$-\text{arc sen}\,\frac{1}{c}+\pi$
$\text{arc tg}\,d$	$-\text{arc tg}\,d+\pi$	$\text{arc cos}\,\frac{a}{c}$	$\text{arc cos}\,\frac{a}{c}$
$-\text{arc cosec}\,a+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc cosec}\,a+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc tg}\,a+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc tg}\,a+\frac{\pi}{2}$
$\text{arc cosec}(-a)+\frac{\pi}{2}$	$\text{arc cosec}(-a)+\frac{\pi}{2}$	$\text{arc tg}(-a)+\frac{\pi}{2}$	$\text{arc tg}(-a)+\frac{\pi}{2}$
$\text{arc cosec}\,\frac{a}{d}$	$\text{arc cosec}\,\frac{a}{d}+\pi$	$\text{arc tg}\,\frac{1}{a}$	$\text{arc tg}\,\frac{1}{a}+\pi$
$-\text{arc sec}(-a)+\pi$	$-\text{arc sec}(-a)+\pi$	$\text{arc cosec}\,c$	$-\text{arc cosec}\,c+\pi$
$\text{arc ctg}\,\frac{1}{d}$	$-\text{arc ctg}\,\frac{1}{d}+\pi$	$\text{arc sec}\,\frac{c}{a}$	$\text{arc sec}\,\frac{c}{a}$
		$-\text{arc tg}(-a)+\pi$	$-\text{arc tg}(-a)+\pi$
		$-\text{arc ctg}\,\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}$	$-\text{arc ctg}\,\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\pi$

1.9.- Funzioni iperboliche e relazioni tra esse

DEFINIZIONE GEOMETRICA

Sia data l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = a^2$ avente per asintoti le rette $y = x$ ed $y = -x$ e semiasse reale a.

Su uno dei due rami (ad esempio quello destro) si consideri un punto P di coordinate x, y. Si ha, quindi:

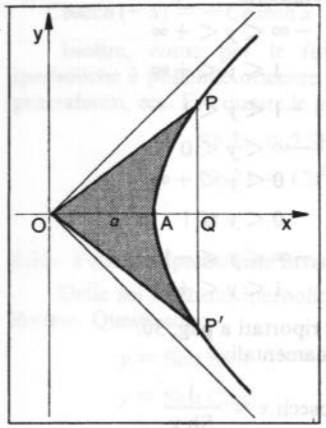


Fig. 1.9.1

$$\overline{OA} = a \qquad \overline{OQ} = x \qquad \overline{PQ} = y$$

Detto r il rapporto tra l'area del triangolo mistilineo OPAP′ (area in grigio) ed il quadrato costruito su OA, per definizione si ha:

$$\text{Sh}\,r = \frac{y}{a} \qquad \text{Ch}\,r = \frac{x}{a} \qquad \text{Th}\,r = \frac{y}{x}$$

$$\text{Cosech}\,r = \frac{a}{y} \qquad \text{Sech}\,r = \frac{a}{x} \qquad \text{Cth}\,r = \frac{x}{y}$$

Nel caso in cui a sia unitario le sei relazioni precedenti diventano:

$$\text{Sh}\,r = y \qquad \text{Ch}\,r = x \qquad \text{Th}\,r = \frac{y}{x}$$

$$\text{Cosech}\,r = \frac{1}{y} \qquad \text{Sech}\,r = \frac{1}{x} \qquad \text{Cth}\,r = \frac{x}{y}$$

DEFINIZIONE ESPONENZIALE

Per poter conoscere i valori che le funzioni iperboliche assumono al variare di r è utile esprimerle in forma esponenziale. Si hanno le seguenti relazioni:

$$\text{Sh}\,r = \frac{e^r - e^{-r}}{2} \qquad \text{Ch}\,r = \frac{e^r + e^{-r}}{2} \qquad \text{Th}\,r = \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}}$$

$$\text{Cosech}\,x = \frac{2}{e^r - e^{-r}} = \frac{2e^r}{e^{2r} - 1} \qquad \text{Sech}\,r = \frac{2}{e^r + e^{-r}} = \frac{2e^r}{e^{2r} + 1}$$

$$\text{Cth}\,r = \frac{e^r + e^{-r}}{e^r - e^{-r}} = \frac{e^{2r} + 1}{e^{2r} - 1}$$

Si è adesso in grado di definire sei funzioni del tipo $y = f(x)$ ove x ha lo stesso significato di r:

$$y = \text{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad y = \text{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad y = \text{Th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \text{Cosech}\,x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad y = \text{Sech}\,x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad y = \text{Cth}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Le sei funzioni iperboliche assumono segni diversi a seconda della posizione del punto P (1° o 4° quadrante):

TAB. I-X

Quadrante	Sh x	Ch x	Th x	Cosech x	Sech x	Cth x
Primo	+	+	+	+	+	+
Quarto	−	+	−	−	+	−

I valori che possono assumere la x (variabile indipendente) e la y (variabile dipendente) relativamente a ciascuna delle sei funzioni iperboliche sono i seguenti:

$$y = \mathrm{Sh}\,x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad -\infty < y < +\infty$$
$$y = \mathrm{Ch}\,x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad 1 \leqslant y < +\infty$$
$$y = \mathrm{Th}\,x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad -1 < y < 1$$
$$y = \mathrm{Cosech}\,x \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\infty < x < 0 & \text{e} \quad -\infty < y < 0 \\ 0 < x < +\infty & \text{e} \quad 0 < y < +\infty \end{cases}$$
$$y = \mathrm{Sech}\,x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad 0 < y \leqslant 1$$
$$y = \mathrm{Cth}\,x \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\infty < x < 0 & \text{e} \quad -\infty < y < -1 \\ 0 < x < +\infty & \text{e} \quad 1 < y < +\infty \end{cases}$$

Queste variazioni possono essere rilevate dai diagrammi riportati a pag. 30.

Tra le funzioni iperboliche esistono cinque relazioni fondamentali:

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1 \qquad \mathrm{Th}\,x = \frac{\mathrm{Sh}\,x}{\mathrm{Ch}\,x} \qquad \mathrm{Cosech}\,x = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,x}$$
$$\mathrm{Sech}\,x = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,x} \qquad \mathrm{Cth}\,x = \frac{1}{\mathrm{Th}\,x}$$

in base alle quali è possibile esprimere l'una in funzione delle altre, ottenendo la seguente tabella:

TAB. 1-XI

	$\mathrm{Sh}\,x$	$\mathrm{Ch}\,x$	$\mathrm{Th}\,x$	$\mathrm{Cosech}\,x$	$\mathrm{Sech}\,x$	$\mathrm{Cth}\,x$
$\mathrm{Sh}\,x$	$\mathrm{Sh}\,x$	$\pm\sqrt{\mathrm{Ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\mathrm{Th}\,x}{\sqrt{1-\mathrm{Th}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{Cosech}\,x}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\mathrm{Sech}^2 x}}{\mathrm{Sech}\,x}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{Cth}^2 x - 1}}$
$\mathrm{Ch}\,x$	$\sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 x}$	$\mathrm{Ch}\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Th}^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\mathrm{Cosech}^2 x + 1}}{\mathrm{Cosech}\,x}$	$\dfrac{1}{\mathrm{Sech}\,x}$	$\dfrac{\mathrm{Cth}\,x}{\pm\sqrt{\mathrm{Cth}^2 x - 1}}$
$\mathrm{Th}\,x$	$\dfrac{\mathrm{Sh}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\mathrm{Ch}^2 x - 1}}{\mathrm{Ch}\,x}$	$\mathrm{Th}\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Cosech}^2 x + 1}}$	$\pm\sqrt{1-\mathrm{Sech}^2 x}$	$\dfrac{1}{\mathrm{Cth}\,x}$
$\mathrm{Cosech}\,x$	$\dfrac{1}{\mathrm{Sh}\,x}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\mathrm{Ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{Th}^2 x}}{\mathrm{Th}\,x}$	$\mathrm{Cosech}\,x$	$\dfrac{\mathrm{Sech}\,x}{\pm\sqrt{1-\mathrm{Sech}^2 x}}$	$\pm\sqrt{\mathrm{Cth}^2 x - 1}$
$\mathrm{Sech}\,x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{Ch}\,x}$	$\sqrt{1-\mathrm{Th}^2 x}$	$\dfrac{\mathrm{Cosech}\,x}{\pm\sqrt{\mathrm{Cosech}^2 x + 1}}$	$\mathrm{Sech}\,x$	$\dfrac{\pm\sqrt{\mathrm{Cth}^2 x - 1}}{\mathrm{Cth}\,x}$
$\mathrm{Cth}\,x$	$\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 x}}{\mathrm{Sh}\,x}$	$\dfrac{\mathrm{Ch}\,x}{\pm\sqrt{\mathrm{Ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{Th}\,x}$	$\sqrt{\mathrm{Cosech}^2 x + 1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\mathrm{Sech}^2 x}}$	$\mathrm{Cth}\,x$
Prendere il segno (+) oppure (−) a seconda che sia rispettivamente $x > 0$ oppure $x < 0$.						

1.10.- Relazioni di simmetria. Formule principali

In base ai diagrammi, o in base alle definizioni esponenziali, si possono dedurre le seguenti formule di simmetria:

$$\mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}\,x \qquad \mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}\,x \qquad \mathrm{Th}(-x) = -\mathrm{Th}\,x$$
$$\mathrm{Cosech}(-x) = -\mathrm{Cosech}\,x \qquad \mathrm{Sech}(-x) = \mathrm{Sech}\,x \qquad \mathrm{Cth}(-x) = -\mathrm{Cth}\,x$$

Inoltre, come per le funzioni trigonometriche circolari, anche per le funzioni iperboliche è possibile ottenere formule di addizione e sottrazione, duplicazione, bisezione, prostaferesi, ecc. Fra queste le più comunemente adoperate sono le seguenti:

$$\mathrm{Sh}\,2x = 2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x$$
$$\mathrm{Ch}\,2x = \mathrm{Ch}^2 x + \mathrm{Sh}^2 x = 2\,\mathrm{Ch}^2 x - 1 = 1 + 2\,\mathrm{Sh}^2 x$$

1.11.- Funzioni iperboliche inverse

Delle sei funzioni iperboliche del §1.9, si possono definire le corrispondenti funzioni inverse. Queste sono:

$$y = \mathrm{Sett\,Sh}\,x \quad \text{con} \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad -\infty < y < +\infty$$
$$y = \mathrm{Sett\,Ch}\,x \quad \text{con} \quad 1 \leqslant x < +\infty \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y < +\infty$$
$$y = \mathrm{Sett\,Th}\,x \quad \text{con} \quad -1 < x < 1 \quad \text{e} \quad -\infty < y < +\infty$$
$$y = \mathrm{Sett\,Cosech}\,x \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\infty < x < 0 & \text{e} \quad -\infty < y < 0 \\ 0 < x < +\infty & \text{e} \quad 0 < y < +\infty \end{cases}$$
$$y = \mathrm{Sett\,Sech}\,x \quad \text{con} \quad 0 < x \leqslant 1 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y < +\infty$$
$$y = \mathrm{Sett\,Cth}\,x \quad \text{con} \quad \begin{cases} -\infty < x < 1 & \text{e} \quad -\infty < y < 0 \\ 1 < x < +\infty & \text{e} \quad 0 < y < +\infty \end{cases}$$

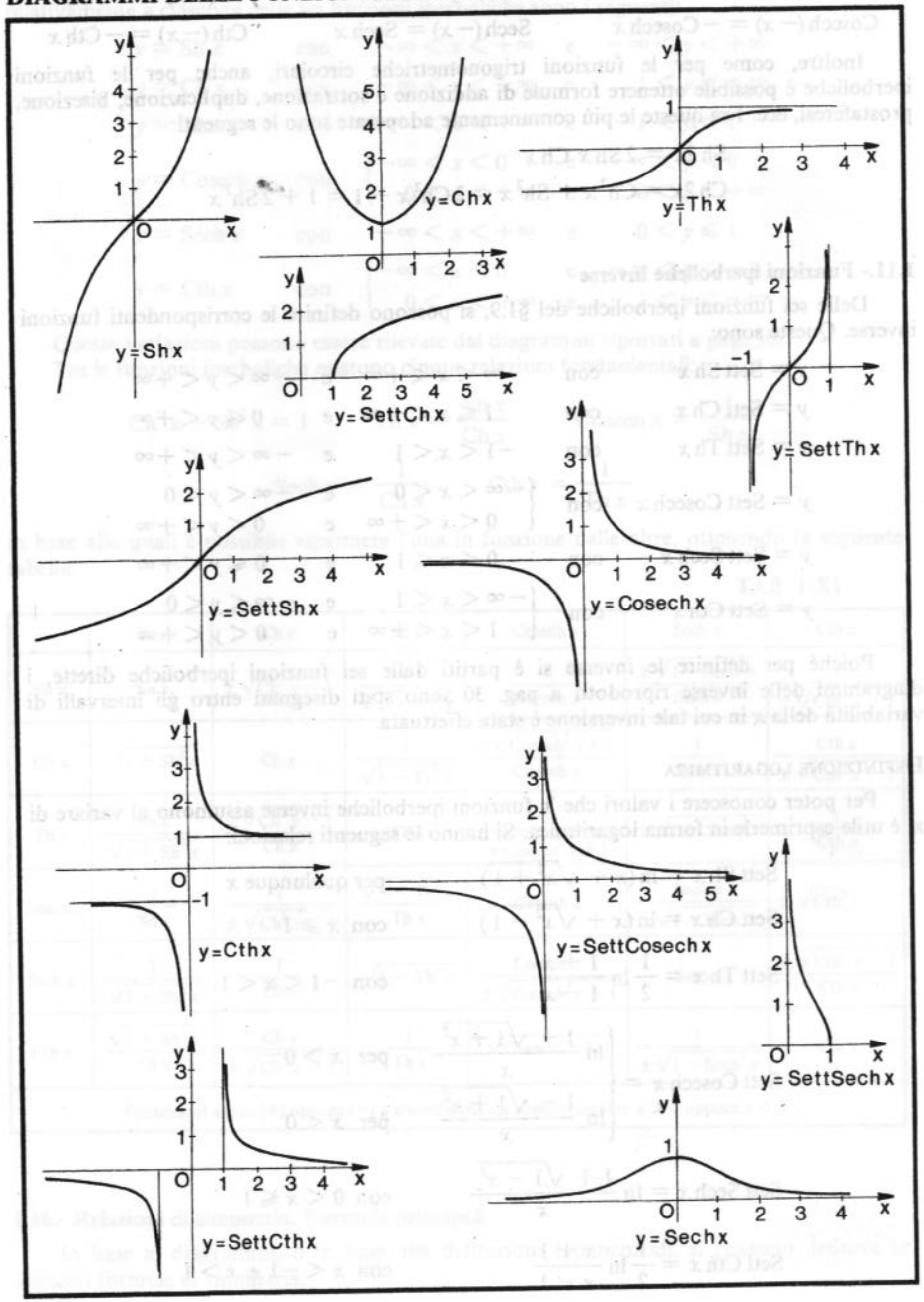
Poiché per definire le inverse si è partiti dalle sei funzioni iperboliche dirette, i diagrammi delle inverse riprodotti a pag. 30 sono stati disegnati entro gli intervalli di variabilità della x in cui tale inversione è stata effettuata.

DEFINIZIONE LOGARITMICA

Per poter conoscere i valori che le funzioni iperboliche inverse assumono al variare di x, è utile esprimerle in forma logaritmica. Si hanno le seguenti relazioni:

$$\mathrm{Sett\,Sh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \text{per qualunque } x$$
$$\mathrm{Sett\,Ch}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad \text{con } x \geqslant 1$$
$$\mathrm{Sett\,Th}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{con } -1 < x < 1$$
$$\mathrm{Sett\,Cosech}\,x = \begin{cases} \ln\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{per } x > 0 \\ \ln\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$
$$\mathrm{Sett\,Sech}\,x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \text{con } 0 < x \leqslant 1$$
$$\mathrm{Sett\,Cth}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \qquad \text{con } x < -1 \text{ e } x > 1$$

DIAGRAMMI DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE E DELLE RISPETTIVE INVERSE



2 - INTEGRALE INDEFINITO DI UNA FUNZIONE

2.1.- L'operatore integrale

La ricerca dell'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ si esprime nel modo seguente:

$$\int f(x)\,dx$$

ove: il simbolo $\int$ di integrazione è una deformazione della lettera S (somma), $f(x)$ si dice funzione integranda, e l'espressione si legge *"integrale di $f(x)$ in di x"*. In pratica il simbolo $\int$ è un operatore come tanti altri, ad es. ln, $\sqrt{\ }$, $D \equiv d/dx$ (derivazione). Quindi una tale espressione richiede che si facciano su $f(x)$ delle trasformazioni. Quali? La risposta è la seguente: si deve trovare, partendo dalla $f(x)$, un'altra funzione $F(x)$ tale che sia:

$$DF(x) = \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

Ad esempio, si ha:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + 3) = 4x^3 \qquad \text{per cui, per definizione, è} \quad \int 4x^3\,dx = x^4 + 3$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x + 1) = \cos x \qquad \text{per cui, per definizione, è} \quad \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + 1$$

Pertanto è la stessa cosa scrivere:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \qquad \text{o} \qquad \int f(x)\,dx = F(x)$$

Essendo però:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{d}{dx}F(x) + 0$$

è più corretto scrivere:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Questo fatto merita una particolare attenzione. Quando si deve trovare $\int 4x^3\,dx$ senza conoscere la storia passata della funzione non si ha alcuna indicazione del valore della costante che entra in gioco nel calcolo. Infatti, essendo

$$\frac{d}{dx}(x^4 + C) = 4x^3 \quad \rightarrow \quad \int 4x^3\,dx = x^4 + C$$

ed il valore di C dovrà essere determinato caso per caso. Così è necessario tutte le volte che si calcola un integrale indefinito, aggiungere una costante indeterminata C. Essa assumerà un particolare valore quando si conoscerà il passato della funzione. Per fissare le idee: calcolare $\int f(x)\,dx$ significa trovare infinite funzioni che differiscono solo per la costante C, tali che, derivate, diano la funzione integranda $f(x)$.

Nella scrittura che indica l'integrale indefinito di una funzione $f(x)$, cioè $\int f(x)\,dx$, compare anche il simbolo dx che, come è noto, indica il differenziale della variabile x. Si deve pertanto tenere in considerazione la sua presenza sotto il segno di integrazione. Così l'integrale indefinito $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, essendo:

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$$

si può scrivere:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Ma [1] è:

$$d[F(x) + C] = F'(x)\,dx$$

pertanto si ha:

$$\int F'(x)\,dx = \int d[F(x) + C] = F(x) + C$$

Si è giunti ad una importante conclusione: quando su una funzione $[F(x) + C]$ si eseguono successivamente in un qualunque ordine le operazioni di integrazione indefinita e di differenziazione, la funzione rimane alterata.

Tutto ciò si può riassumere in quattro punti fondamentali:

a) Il simbolo di integrazione è un comune operatore.

b) L'integrazione indefinita è l'operazione inversa della derivazione.

Più precisamente si può dire che:

c) L'integrazione indefinita è l'operazione inversa della differenziazione.

IMPORTANTE:

d) Il risultato di una integrazione indefinita coinvolge una costante (costante di integrazione) che non bisogna dimenticare. Essa assumerà un particolare valore quando si conoscerà il passato della funzione.

2.2.- Integrali fondamentali

In base alla precedente definizione d'integrale indefinito di una funzione possiamo affermare di conoscere già parecchi integrali, solo che con essi abbiamo poca familiarità. Infatti, ad esempio, sappiamo che è:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \quad \rightarrow \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

quindi, in pratica, la tabella delle derivate fondamentali, scritta al contrario, diventa quella degli integrali fondamentali. Per comodità dello studente riportiamo nella tabella che segue un elenco di integrali fondamentali.

---

[1] Si ricordi che per definizione di derivata di una funzione è: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ cioè (fuori dal limite): $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon$ con $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$. Pertanto si ha:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \epsilon \Delta x$$

ed anche, potendosi porre $\Delta x = dx$:

$$\Delta y = f'(x)\,dx + \epsilon dx$$

relazione che esprime il fatto che l'incremento della variabile dipendente è dato dalla somma di due incrementi: $dy = f'(x)\,dx$ (differenziale) e $\epsilon\,dx$ (infinitesimo di ordine superiore).

TAB. 2-I

	DERIVATE	INTEGRALI
1.	$\frac{d}{dx}(ax) = a$	$\int a\,dx = \int d(ax + C) = ax + C$
2.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \int d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3.	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}dx = \int d(\ln\lvert x\rvert + C) = \ln\lvert x\rvert + C$
4.	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = \int d(e^x + C) = e^x + C$
5.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{kx}}{k}\right) = e^{kx}$	$\int e^{kx} dx = \int d\left(\frac{e^{kx}}{k} + C\right) = \frac{e^{kx}}{k} + C$
6.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \int d\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \int d(\operatorname{sen} x + C) = \operatorname{sen} x + C$
8.	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = \int d(-\cos x + C) = -\cos x + C$
9a.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int d(\operatorname{tg} x + C) = \operatorname{tg} x + C$
9b.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \int d(\operatorname{tg} x + C) = \operatorname{tg} x + C$
9c.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$	$\int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = \int d(\operatorname{tg} x + C) = \operatorname{tg} x + C$
10a.	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int d(-\operatorname{ctg} x + C) = -\operatorname{ctg} x + C$
10b.	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{ctg} x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int d(-\operatorname{ctg} x + C) = -\operatorname{ctg} x + C$
10c.	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}^2 x + 1$	$\int (\operatorname{ctg}^2 x + 1)\,dx = \int d(-\operatorname{ctg} x + C) = -\operatorname{ctg} x + C$
11.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{Ch} x) = \operatorname{Sh} x$	$\int \operatorname{Sh} x\,dx = \int d(\operatorname{Ch} x + C) = \operatorname{Ch} x + C$
12.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{Sh} x) = \operatorname{Ch} x$	$\int \operatorname{Ch} x\,dx = \int d(\operatorname{Sh} x + C) = \operatorname{Sh} x + C$
13.	$\frac{d}{dx}(\operatorname{Th} x) = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x} = 1 - \operatorname{Th}^2 x$	$\int \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x} dx = \int (1 - \operatorname{Th}^2 x)\,dx = \int d(\operatorname{Th} x + C) = \operatorname{Th} x + C$

(la tabella continua a pag. 36)

Seguono altri sei integrali fondamentali da includere nella tabella. Poiché essi sono meno familiari, li trattiamo dettagliatamente.

14. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\operatorname{arc\,sen} x + C) = \begin{cases} \operatorname{arc\,sen} x + C \\ -\operatorname{arc\,cos} x + C_1 \end{cases}$$

La formula **14** si ottiene considerando, della funzione $x = \operatorname{sen} y$, la inversa $y = \operatorname{arc\,sen} x$ (1); poiché è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\operatorname{sen} y)} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= [\text{essendo } \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\operatorname{arc\,sen} x + C) = \operatorname{arc\,sen} x + C = [\text{cfr. TAB. 1.IX}] =$$

$$= -\operatorname{arc\,cos} x + \frac{\pi}{2} + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C_1$$

15. $$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\operatorname{arc\,cos} x + C) = \begin{cases} \operatorname{arc\,cos} x + C \\ -\operatorname{arc\,sen} x + C_1 \end{cases}$$

La formula **15** si ottiene considerando, della funzione $x = \cos y$, la inversa $y = \operatorname{arc\,cos} x$ (1); poiché è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos} x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\cos y)} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} =$$

$$= [\text{essendo } \operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

si ha:

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\operatorname{arc\,cos} x + C) = \operatorname{arc\,cos} x + C = [\text{cfr. TAB. 1.IX}] =$$

$$= -\operatorname{arc\,sen} x + \frac{\pi}{2} + C = -\operatorname{arc\,sen} x + C_1$$

16. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\operatorname{arc\,tg} x + C)$$

La formula **16** si ottiene considerando, della funzione $x = \operatorname{tg} y$, la inversa $y = \operatorname{arc\,tg} x$ (1); poiché è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\operatorname{tg} y)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

si ha:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int d(\operatorname{arc\,tg} x + C) = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

(1) Per le condizioni in cui è possibile tale inversione cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §3.4.

17. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int d(\operatorname{Sett\,Sh} x + C) = \operatorname{Sett\,Sh} x + C$$

La formula **17** si ottiene considerando, della funzione $x = \operatorname{Sh} y$, la inversa $y = \operatorname{Sett\,Sh} x$ (1) definita per qualunque x. Poiché è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dy}(\operatorname{Sett\,Sh} x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}(\operatorname{Sh} y)} = \frac{1}{\operatorname{Ch} y}$$

ed essendo $\operatorname{Ch} y = \sqrt{1+\operatorname{Sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$ si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int d(\operatorname{Sett\,Sh} x + C) = \operatorname{Sett\,Sh} x + C$$

Questo integrale si può scrivere in altra forma. Essendo infatti:

$$x = \operatorname{Sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \;\rightarrow\; 2xe^y = e^{2y} - 1 \;\rightarrow\; e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

risolvendo l'equazione rispetto ad e^y, si ha:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} = \begin{cases} x - \sqrt{x^2+1} < 0 \\ x + \sqrt{x^2+1} > 0 \end{cases}$$

Essendo $e^y > 0$ sempre, la prima soluzione si scarta. Da $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri, si ottiene:

$$y = \operatorname{Sett\,Sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

e quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{Sett\,Sh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

18. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$$

Se è $x > 1$ si può omettere il valore assoluto nel 2° membro, ottenendo l'espressione di $\operatorname{Sett\,Ch} x$ (cfr. §1.11).

Per giungere alla formula **18** si derivi la funzione che compare al secondo membro (2):

$$\frac{d}{dx}(\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C) = \frac{1}{|x+\sqrt{x^2-1}|}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\frac{|x+\sqrt{x^2-1}|}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Pertanto si ha:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int d(\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C) = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

(1) Per le condizioni in cui è possibile tale inversione cfr. §1.11.

(2) Per la derivata di una funzione contenente moduli cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §4.8, punto 3.

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

Se è $-1 < x < 1$ si può omettere il valore assoluto nel 2° membro, ottenendo l'espressione di $\text{Sett Th}\, x$ (cfr. §1.11).
Per giungere alla formula **19** si derivi (1) la funzione al secondo membro:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \cdot \left|\frac{1+x}{1-x}\right| \cdot \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

Pertanto si ha:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int d\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

TAB. 2-I (*seguito*)

DERIVATE	INTEGRALI
$\frac{d}{dx}(\text{arc sen}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\text{arc sen}\, x + C) = \left\{\begin{array}{l}\text{arc sen}\, x + C \\ -\text{arc cos}\, x + C_1\end{array}\right.$
$\frac{d}{dx}(\text{arc cos}\, x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\text{arc cos}\, x + C) = \left\{\begin{array}{l}\text{arc cos}\, x + C \\ -\text{arc sen}\, x + C_1\end{array}\right.$
$\frac{d}{dx}(\text{arc tg}\, x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int d(\text{arc tg}\, x + C) = \text{arc tg}\, x + C$
$\frac{d}{dx}(\text{Sett Sh}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int d(\text{Sett Sh}\, x + C) = \left\{\begin{array}{l}\text{Sett Sh}\, x + C \\ \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C\end{array}\right.$
$\frac{d}{dx}(\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int d(\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert + C) = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right) = \frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int d\left(\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C\right) = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$

2.3.- Esercizi proposti

Onde acquisire dimestichezza con gli integrali elementari della Tab. 2-I, necessaria per poter affrontare il calcolo di integrali di funzioni comunque complicate, si consiglia di risolvere, aiutandosi con la tabella, gli esercizi proposti controllandone in un secondo tempo i risultati e le eventuali differenze nel procedimento seguito. Si tenga presente che alcuni di questi esercizi richiedono l'applicazione della prima proprietà degli integrali indefiniti: *l'integrale del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione.* Cioè, detta k la costante, è:

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \qquad [2.3.1]$$

In sostanza, quindi, si può portare fuori dal segno di integrale un fattore costante. La dimostrazione è immediata; basta infatti differenziare i due membri della [2.3.1]:

(1) Per la derivata di una funzione contenente moduli cfr. P.2, *Introduzione allo studio delle funzioni*, §4.8, punto 3.

$$\begin{array}{ccc} d\int kf(x)\,dx & = & d[k\int f(x)\,dx] \\ \downarrow & & \downarrow \\ kf(x)\,dx & = & kd\int f(x)\,dx = kf(x)\,dx \end{array}$$

1. $\int x^3\,dx$
2. $\int \sqrt{x}\,dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
4. $\int x\sqrt{x}\,dx$
5. $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$
6. $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$
7. $\int 2^x\,dx$
8. $\int 3\,\text{sen}\, x\,dx$
9. $\int 2\,\text{Sh}\, x\,dx$
10. $\int \frac{3}{x}\,dx$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
12. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$
13. $\int \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-3}}\,dx$
15. $\int \frac{1}{3+3x^2}\,dx$
16. $\int \frac{5}{x^2-1}\,dx$
17. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+2}}\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

1. $\displaystyle\int x^3\,dx = \int d\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = \frac{x^4}{4} + C$ [TAB. 2-I, 2]

2. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int d\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + C\right) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ [TAB. 2-I, 2]

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int d(2x^{1/2} + C) = 2\sqrt{x} + C$ [TAB. 2-I, 2]

4. $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \int d\left(\frac{2}{5}x^{5/2} + C\right) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$ [TAB. 2-I, 2]

5. $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = 5\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = 5\int d(4x^{1/4} + C) = 5(4\sqrt[4]{x} + C) = 20\sqrt[4]{x} + C_1$ [TAB. 2-I, 2]

6. $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = \int d(2e^{\frac{x}{2}} + C) = 2e^{\frac{x}{2}} + C$ [TAB. 2-I, 5]

7. $\displaystyle\int 2^x\,dx = \int d\left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ [TAB. 2-I, 6]

8. $\displaystyle\int 3\,\text{sen}\, x\,dx = 3\int \text{sen}\, x\,dx = 3\int d(-\cos x + C) = 3(-\cos x + C) =$
$= -3\cos x + C_1$ [TAB. 2-I, 8]

9. $\displaystyle\int 2\,\text{Sh}\, x\,dx = 2\int \text{Sh}\, x\,dx = 2\int d(\text{Ch}\, x + C) = 2\,\text{Ch}\, x + C_1$ [TAB. 2-I, 11]

10. $\displaystyle\int \frac{3}{x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx = 3\int d(\ln|x| + C) = 3\ln|x| + C_1$ [TAB. 2-I, 3]

11. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int d(\text{arc sen}\,x + C) = \text{arc sen}\,x + C$$ [TAB. 2-I, 14]

12. $$\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\,\text{arc sen}\,x + C$$ [TAB. 2-I, 14]

13. $$\int \frac{-2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -2\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = -2\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$ [TAB. 2-I, 18]
$$= -2\,\text{Sett Ch}\,x + C \quad [\text{solo per } x \geqslant 1]$$

14. $$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$ [TAB. 2-I, 18]
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Sett Ch}\,x + C \quad [\text{solo per } x \geqslant 1]$$

15. $$\int \frac{1}{3+3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int d(\text{arc tg}\,x + C) = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,x + C_1$$ [TAB. 2-I, 16]

16. $$\int \frac{5}{x^2-1}\,dx = -5\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = -\frac{5}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$ [TAB. 2-I, 19]
$$= -\frac{5}{2}\,\text{Sett Th}\,x + C \quad [\text{solo per } -1 < x < 1]$$

17. $$\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+2}}\,dx = \sqrt{2}\int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int d(\text{Sett Sh}\,x + C) = \text{Sett Sh}\,x + C =$$
$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$ [TAB. 2-I, 17]

2.4.- Integrale della somma di più funzioni

Seconda proprietà degli integrali indefiniti: *l'integrale della somma algebrica di più funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni.* Questa proprietà viene espressa nel modo seguente:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)\,dx \quad [2.4.1]$$

ove $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ sono tutte funzioni integrabili. Infatti, differenziando ambo i membri della [2.4.1], si ottiene:

$$d\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]\,dx = d\int f_1(x)\,dx \pm d\int f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm d\int f_n(x)\,dx$$

ed essendo $d\int g(x)\,dx = \int d[g(x)] = g(x)$, si ha:

$$f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots$$

Esempi di applicazione della seconda proprietà, tenendo sempre presente la TAB. 2-I.

18. $$\int (\text{sen}\,x + \cos x)\,dx = \int \text{sen}\,x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + C_1 + \text{sen}\,x + C_2 =$$
$$= \text{sen}\,x - \cos x + C$$ [7, 8]

19. $$\int\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int \sqrt[3]{x^2}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{2/3}\,dx - \int x^{-2/3}\,dx =$$
$$= \int d\left[\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C_1\right] - \int d\left[\frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + C_2\right] = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + C$$ [2]

20. $$\int \frac{x^3-4x^2+3}{x}\,dx = \int x^2\,dx - 4\int x\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \int d\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 4\int d\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) + 3\int d(\ln|x| + C_3) =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3\ln|x| + C$$ [2, 3]

21. $$\int \frac{3x^5-2x^3+1}{x^3}\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx =$$
$$= 3\int d\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 2\int d(x + C_2) + \int d\left(\frac{x^{-2}}{-2} + C_3\right) =$$
$$= x^3 - 2x - \frac{1}{2x^2} + C$$ [2]

22. $$\int\left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\text{sen}^2 x}\right)dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + 2\int \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,dx =$$
$$= 3\int d(\text{tg}\,x + C_1) + 2\int d(-\text{ctg}\,x + C_2) =$$
$$= 3\,\text{tg}\,x - 2\,\text{ctg}\,x + C$$ [9a, 10a]

23. $$\int \frac{\text{sen}\,2x + 2\cos x}{\cos x}\,dx = \int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x + 2\cos x}{\cos x}\,dx = 2\int \text{sen}\,x\,dx + 2\int dx =$$
$$= -2\cos x + 2x + C$$ [8, 9]

24. $$\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}\right)dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= 3\int d(\text{arc sen}\,x + C_1) - 2\int d(\text{arc tg}\,x + C_2) =$$
$$= 3\,\text{arc sen}\,x - 2\,\text{arc tg}\,x + C$$ [14, 16]

Il **20** e il **21** sono esempi di integrazione di funzioni razionali fratte: prima di applicare la seconda proprietà si è diviso il numeratore per il denominatore. Questo modo di procedere può essere seguito ogni qualvolta la funzione da integrare è razionale fratta, purché il grado del numeratore sia maggiore o uguale al grado del denominatore. La divisione tra polinomi è richiamata al §1.1.

2.5.- Esercizi proposti

Il lettore finora si è limitato ad applicare gli integrali fondamentali della TAB. 2-I, magari aiutandosi con qualche sbirciatina; adesso proceda alla risoluzione dei seguenti integrali tenendo presente che deve impiegare poco tempo. Procedimento e risultati relativi si trovano subito dopo.

25. $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5x}{x^2}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int\left(e^{3x} + \frac{5}{x}\right)dx$ **31.** $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\,dx$ **29.** $\displaystyle\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ **32.** $\int (2x+5)^3\,dx$

33. $\int (2x+1)^4\,dx$

27. $\displaystyle\int\left(2\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\right)dx$ **30.** $\displaystyle\int\left(\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + \sec^2 x\right)dx$ **34.** $\int (x-5)^2\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

25. $$\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5x}{x^2}\,dx = 2\int x^2\,dx - 3\int dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= 2\int d\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) - 3\int d(x + C_2) + 5\int d(\ln|x| + C_3) =$$
$$= \frac{2}{3}x^3 - 3x + 5\ln|x| + C$$

26. $$\int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\,dx = [\text{essendo } \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)\ (^1)] =$$
$$= \int \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x - \cos x}\,dx =$$
$$= -\int (\cos x + \operatorname{sen} x)\,dx = -\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

27. $$\int\left(2\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\right)dx = [\text{essendo } \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x] = -2\cos x + 2\int \cos x\,dx =$$
$$= -2\cos x + 2\operatorname{sen} x + C$$

28. $$\int\left(e^{3x} + \frac{5}{x}\right)dx = \int e^{3x}\,dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx = \int d\left(\frac{e^{3x}}{3} + C_1\right) + 5\int d(\ln|x| + C_2) =$$
$$= \frac{e^{3x}}{3} + 5\ln|x| + C$$

29. $$\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = 3\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -3\operatorname{ctg} x + C$$

(¹) Cfr. §1.7, formule di duplicazione

30. $$\int\left(\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} + \sec^2 x\right)dx = 2\int d(\arccos x + C_1) + \int d(\operatorname{tg} x + C_2) =$$
$$= 2\arccos x + \operatorname{tg} x + C$$

31. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx = [\text{cfr. es. } 26] = \int \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx =$$
$$= \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

32. $$\int (2x+5)^3\,dx = [\text{sviluppando il cubo}] = \int (8x^3 + 60x^2 + 150x + 125)\,dx =$$
$$= 2x^4 + 20x^3 + 75x^2 + 125x + C$$

33. $$\int (2x+1)^4\,dx = [\text{sviluppando la potenza}] = \int (16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1)\,dx =$$
$$= 16\frac{x^5}{5} + 32\frac{x^4}{4} + 24\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + x + C =$$
$$= \frac{16}{5}x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 4x^2 + x + C$$

34. $$\int (x-5)^2\,dx = \int (x^2 - 10x + 25)\,dx = \frac{x^3}{3} - 10\frac{x^2}{2} + 25x + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x + C$$

2.6.- Integrali di funzioni di funzioni lineari di x

Gli integrali visti negli esempi **32, 33, 34** rientrano in questa particolare categoria, avendo definito $f(z)$ con $z = mx + n$ funzione di funzione lineare di x. Altri esempi di funzioni di funzioni lineari di x sono:

$\operatorname{sen}(3x-5) = \operatorname{sen} z$ con $z = 3x - 5$ $\quad (2x+5)^3 = z^3$ con $z = 2x + 5$

$\operatorname{tg}(x+2) = \operatorname{tg} z$ con $z = x + 2$

Notare com'è semplice integrare funzioni di questo tipo dopo aver compreso quello che segue. Calcoliamo l'integrale:

35. $I = \int \operatorname{sen}(3x-5)\,dx$

Esso è del tipo $\int \operatorname{sen} z$ con $z = 3x - 5$. Sostituendo $\operatorname{sen} 3x - 5$ con $\operatorname{sen} z$ e dx con $dz/3$ (che, vedi nota a pag. 32, si ottiene differenziando ambo i membri della $z = 3x - 5$, cioè $dz = 3dx \rightarrow dx = dz/3$), l'integrale diventa:

$$\int \operatorname{sen} z\,\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} z\,dz = -\frac{1}{3}\cos z + C \rightarrow I = -\frac{1}{3}\cos(3x-5) + C$$

Risolvendo lo stesso integrale senza operare sostituzioni si ha:

$$\int \operatorname{sen}(3x-5)\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x-5)\,d(3x-5) = \frac{1}{3}\int d[-\cos(3x-5) + C] =$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(3x-5) + C$$

36. $I = \int (x-6)^5\,dx = [\text{essendo } dx = d(x-6)] = \int (x-6)^5\,d(x-6)$

Quest'ultimo integrale è del tipo $\int x^n\,dx$, solo che al posto di x c'è $x-6$. Così è:

$$I = \frac{(x-6)^6}{6} + C$$

Alla luce di quanto si è detto, rivediamo gli esempi n. 32, 33, 34.

32. $\int (2x+5)^3\,dx = \left[d(2x+5) = 2dx \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{2}(2x+5)\right] = \frac{1}{2}\int (2x+5)^3\,d(2x+5) =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x+5)^4}{4} + C_1 = \frac{1}{8}(2x+5)^4 + C_1$$

33. $\int (2x+1)^4\,dx = \left[d(2x+1) = 2dx \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{2}(2x+1)\right] = \frac{1}{2}\int (2x+1)^4\,d(2x+1) =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^5}{5} + C_1 = \frac{(2x+1)^5}{10} + C_1$$

34. $\int (x-5)^2\,dx = [\text{essendo } d(x-5) = dx] = \int (x-5)^2\,d(x-5) = \frac{1}{3}(x-5)^3 + C_1$

Se nei risultati di questi tre integrali si sviluppano le potenze e si fa il confronto con i risultati ottenuti in precedenza, si nota che essi differiscono solo per le costanti. Come si può notare entra in causa solo la TAB. 2-I.

Altri esempi:

37. $\int e^{5x-1}\,dx = \frac{1}{5}\int e^{5x-1}\,d(5x-1) = \frac{1}{5}e^{5x-1} + C$

38. $\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \cos 5x\,d(5x) = \frac{1}{5}\,\text{sen}\,5x + C$

39. $\int \sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \sec^2 4x\,d(4x) = \frac{1}{4}\,\text{tg}\,4x + C$

40. $\int \frac{1}{(2x-3)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-3}\,d(2x-3) = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^{-2}}{-2} + C =$

$$= -\frac{1}{4(2x-3)^2} + C$$

41. $\int \text{Sh}(2-3x)\,dx = -\frac{1}{3}\int \text{Sh}(2-3x)\,d(2-3x) = -\frac{1}{3}\,\text{Ch}(2-3x) + C$

2.7.- Esercizi proposti

42. $\int (7-2x)^3\,dx$

43. $\int \cos(5x-2)\,dx$

44. $\int 3e^{-2x+5}\,dx$

45. $\int \frac{5}{3}\,\text{Sh}\,5x\,dx$

46. $\int \frac{2}{(3-5x)^6}\,dx$

47. $\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx$

48. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

49. $\int \text{sen}(7x+1)\,dx$

50. $\int \text{Ch}(2-3x)\,dx$

51. $\int 5^{3x}\ln 5\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

42. $\int (7-2x)^3\,dx = -\frac{1}{2}\int (7-2x)^3\,d(7-2x) = -\frac{1}{2}\,\frac{(7-2x)^4}{4} + C =$

$$= -\frac{(7-2x)^4}{8} + C$$

43. $\int \cos(5x-2)\,dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x-2)\,d(5x-2) = \frac{1}{5}\,\text{sen}(5x-2) + C$

44. $\int 3e^{-2x+5}\,dx = -\frac{3}{2}\int e^{-2x+5}\,d(-2x+5) = -\frac{3}{2}e^{-2x+5} + C$

45. $\int \frac{5}{3}\,\text{Sh}\,5x\,dx = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}\int \text{Sh}\,5x\,d(5x) = \frac{1}{3}\,\text{Ch}\,5x + C$

46. $\int \frac{2}{(3-5x)^6}\,dx = -\frac{2}{5}\int (3-5x)^{-6}\,d(3-5x) = -\frac{2}{5}\cdot\frac{(3-5x)^{-5}}{-5} + C =$

$$= \frac{2}{25(3-5x)^5} + C$$

47. $\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx = \frac{3}{3}\int \frac{1}{1+(3x)^2}\,d(3x) = \text{arc tg}\,3x + C$

48. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,d(2x) = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,2x + C$

49. $\int \text{sen}(7x+1)\,dx = \frac{1}{7}\int \text{sen}(7x+1)\,d(7x+1) = -\frac{1}{7}\cos(7x+1) + C$

50. $\int \text{Ch}(2-3x)\,dx = -\frac{1}{3}\int \text{Ch}(2-3x)\,d(2-3x) = -\frac{1}{3}\,\text{Sh}(2-3x) + C$

51. $\int 5^{3x}\ln 5\,dx = \frac{\ln 5}{3}\int 5^{3x}\,d(3x) = \frac{1}{3}\cdot 5^{3x} + C$ [cfr. TAB. 2-I, 6]

3 - METODI DI INTEGRAZIONE

3.1.- Integrazione per sostituzione

Finora si è sempre usata la TAB. 2-I. Ancora ad essa ci si riferisce per gli integrali che si presentano in una delle due forme:

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

cioè integrali del prodotto o del rapporto tra la derivata di una funzione e la funzione stessa. Tenendo presente che è $f'(x)\,dx = d[f(x)]$ [1], si ha quindi:

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \int f(x)\,d[f(x)]$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,d[f(x)]$$

Ponendo $f(x) = t$ in entrambe le relazioni si ha:

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \int f(x)\,d[f(x)] = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,d[f(x)] = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|f(x)| + C$$

Allo stesso modo si ha anche:

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \int [f(x)]^n\,d[f(x)] = \int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx = \int \frac{1}{[f(x)]^n}\,d[f(x)] = \int \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} + C \qquad [n \neq 1]$$

Riepilogando, abbiamo i seguenti quattro tipi di integrali:

a) $\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \int f(x)\,d[f(x)] = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$

b) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,d[f(x)] = \ln|f(x)| + C$

c) $\int [f(x)]^n\cdot f'(x)\,dx = \int [f(x)]^n\,d[f(x)] = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C$

d) $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx = \int \frac{1}{[f(x)]^n}\,d[f(x)] = -\frac{1}{n-1}[f(x)]^{-n+1} + C$

Esempi di applicazione:

52. $\int (x^2-5)\cdot 2x\,dx = \int (x^2-5)\,d(x^2-5) = [\text{tipo a}] = \frac{1}{2}(x^2-5)^2 + C$

[1] Vedere nota a pag. 32.

Si noti che questo integrale, dopo il primo passaggio, è stato ricondotto alla formula 2 della TAB. 2-I. Infatti, ponendo $x^2 - 5 = t$, si ha:

$$\int (x^2-5)\cdot 2x\,dx = \int (x^2-5)\,d(x^2-5) = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(x^2-5)^2 + C$$

Questo metodo è detto di integrazione per sostituzione.

53. $\int (2x-3)^5\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^5\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^5\,d(2x-3) = [\text{tipo c}] =$
$= \frac{1}{12}(2x-3)^6 + C$

54. $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,d(\operatorname{sen} x) = [\text{tipo a}] = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

55. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) = [\text{tipo b}] = -\ln|\cos x| + C$

56. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-3x+1)^2}\,d(x^2-3x+1) = [\text{tipo d}] =$
$= -(x^2-3x+1)^{-1} + C = -\frac{1}{x^2-3x+1} + C$

57. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\,d(\operatorname{sen} x) = [\text{tipo d}] = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-2} x + C = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} + C$

58. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \int \ln^3 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \ln^3 x\,d(\ln x) = [\text{tipo c}] = \frac{1}{4}\ln^4 x + C$

59. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int (\ln x)^{1/3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = [\text{tipo c}] = \frac{1}{3}\int (\ln x)^{1/3}\,d(\ln x) = \frac{1}{3}\,\frac{(\ln x)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C =$
$= \frac{1}{4}\ln x\sqrt[3]{\ln x} + C$

60. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\operatorname{sen} x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-\operatorname{sen} x)^2}\,d(x-\operatorname{sen} x) = [\text{tipo d}] = -(x-\operatorname{sen} x)^{-1} + C =$
$= \frac{1}{\operatorname{sen} x - x} + C$

61. $\int \frac{x^2}{x^3-9}\,dx = [\text{essendo } d(x^3-9) = 3x^2\,dx] = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-9}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3-9}\,d(x^3-9) =$
$= [\text{tipo b}] = \ln|x^3-9| + C$

62. $\int \frac{x-1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$
$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \operatorname{arc\,tg} x + C$

3.2.- Esercizi proposti

63. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx$

64. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

65. $\int \operatorname{Th} x\,dx$

66. $\int x^2\cdot\sqrt[3]{x^3-4}\,dx$

67. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)^3}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

70. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{1-x^2}\,dx$

71. $\int e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

74. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

75. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

76. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

63. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\,dx = [\sec^2 x\,dx = d(\operatorname{tg} x) \text{ (cfr. TAB. 2-I, 9b)}] = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,d(\operatorname{tg} x) = \ln|\operatorname{tg} x| + C$

64. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{sen} x) = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

65. $\displaystyle\int \operatorname{Th} x\,dx = \int \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{Ch} x}\,d(\operatorname{Ch} x) = \ln \operatorname{Ch} x + C$

66. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{x^3-4}\,dx = [d(x^3-4) = 3x^2dx] = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{x^3-4}\,d(x^3-4) = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3-4)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C =$

$$= \frac{1}{4}(x^3-4)\cdot\sqrt[3]{x^3-4} + C$$

67. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)^3}\,dx = \int \frac{1}{(x-\cos x)^3}\,d(x-\cos x) = -\frac{1}{2}(x-\cos x)^{-2} + C =$

$$= -\frac{1}{2(x-\cos x)^2} + C$$

68. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\text{TAB. 2-I, 14}] = \int \operatorname{arc\,sen} x\,d(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} x)^2 + C$

69. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x) =$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x\,d(\operatorname{sen} x) - \int \operatorname{sen}^4 x\,d(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C$$

70. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{1-x^2}\,dx = \int \frac{3x}{1-x^2}\,dx + \int \frac{2}{1-x^2}\,dx = 3\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{1-x^2}\,dx =$

$$= -\frac{3}{2}\ln|1-x^2| + 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \qquad [1]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\cdot\frac{1}{|1-x^2|^3}\right] + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{(1-x)^4\,|1-x^2|} + C =$$

$$= -\ln\left[(1-x)^2\sqrt{|1-x^2|}\right] + C$$

Si osservi che nel caso in cui è $-1 < x < 1$ la [1] si può scrivere:

$$\int \frac{3x+2}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\ln(1-x^2) + 2\operatorname{Sett\,Th} x + C =$$

$$= -\ln\sqrt{(1-x^2)^3} + 2\operatorname{Sett\,Th} x + C$$

71. $\displaystyle\int e^{2x}\cdot\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+e^{2x}}\,d(1+e^{2x}) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$

$$= \frac{1}{3}(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}} + C$$

72. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,d(e^x+e^{-x}) = \ln(e^x+e^{-x}) + C$

Si osservi che è: $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \operatorname{Th} x$ e $\ln(e^x+e^{-x}) = \ln(2\operatorname{Ch} x) = \ln 2 + \ln\operatorname{Ch} x$,

quindi l'integrale 72 è identico all'integrale 65.

73. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int \operatorname{sen}(1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[d(1-\sqrt{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right] =$

$$= -2\int \operatorname{sen}(1-\sqrt{x})\,d(1-\sqrt{x}) = -2[-\cos(1-\sqrt{x})] + C =$$

$$= 2\cos(1-\sqrt{x}) + C$$

74. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,d(\operatorname{sen} x) = [\text{posto } \operatorname{sen} x = t] = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$

$$= \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sen} x + C$$

75. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \left[1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \text{ (cfr. §1.7, formule di bisezione)}\right] = \int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,d\left(\frac{x}{2}\right) =$

$$= [\text{TAB. 2-I, 9a}] = \int d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

76. $\displaystyle I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

Essendo $\sqrt{x^2-a^2} = |x|\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^2} = |x|\sqrt{1-\left|\dfrac{a}{x}\right|^2}$ si ha:

$$I=\int\frac{1}{x\,|x|\sqrt{1-\left|\frac{a}{x}\right|^2}}\,dx=\int\frac{1}{x\,|x|}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-\left|\frac{a}{x}\right|^2}}=$$

$$=\left[\text{essendo }\ d\left|\frac{a}{x}\right|=-\frac{a}{x^2}\cdot\frac{\left|\frac{a}{x}\right|}{\frac{a}{x}}=-\frac{1}{x}\left|\frac{a}{x}\right|=\frac{-a}{x\,|x|}\right]=-\frac{1}{a}\int\frac{-a}{x\,|x|}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-\left|\frac{a}{x}\right|^2}}=$$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left|\frac{a}{x}\right|^2}}\,d\left|\frac{a}{x}\right|=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\,\text{arc sen}\left|\dfrac{a}{x}\right|+C\\[2mm] \dfrac{1}{a}\,\text{arc cos}\left|\dfrac{a}{x}\right|+C\end{cases}$$

Data l'importanza degli integrali dei tipi a, b, c, d, è opportuno tenerli sempre presenti. Il lettore provi a calcolare:

77. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}\,dx$ **78.** $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}\ln x}{x}\,dx$

C'è riuscito? Bene, controlli i risultati riportati nella nota (1).

3.3.- Integrazione per parti

Si è visto che per semplificare il calcolo dell'integrale del prodotto di funzioni del tipo a (§3.1) basta operare una trasformazione. Ma come ci si deve comportare di fronte ad integrali del tipo:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=\int f(x)\,d[g(x)] \qquad [3.3.1]$$

se $f(x)$ non è la derivata di $g'(x)$, e $g'(x)$ non è la derivata di $f(x)$?

Naturalmente $g'(x)$ è la derivata di una funzione $g(x)$. Si ricorre, ove è possibile, alla integrazione per parti, alla cui formula si perviene con il semplice ragionamento che segue. Supponiamo di dovere calcolare il differenziale del prodotto $f(x)\cdot g(x)$. Per definizione è:

$$d[f(x)\cdot g(x)]=[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)]\,dx=f'(x)\cdot g(x)\,dx+f(x)\cdot g'(x)\,dx=$$
$$=g(x)\,d[f(x)]+f(x)\,d[g(x)]$$

e quindi si può scrivere:

$$f(x)\,d[g(x)]=d[f(x)\cdot g(x)]-g(x)\,d[f(x)]$$

Integrando ambo i membri si ottiene:

$$\int f(x)\,d[g(x)]=\int d[f(x)\,g(x)]-\int g(x)\,d[f(x)]=f(x)\,g(x)-\int g(x)\,d[f(x)]$$

e per la [3.3.1]

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=\int f(x)\,d[g(x)]=f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\,d[f(x)] \qquad [3.3.2]$$

Questa è la formula cercata. Esempi:

(1) **77.** ... $=-\operatorname{arctg}\cos x+C$ **78.** ... $=-\cos\ln x+C$.

79. $\int x\ln x\,dx$

Prendendo $f(x)=\ln x \quad g'(x)=x \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2$ per la [3.3.2] si ha:

$$\int x\ln x\,dx=\int\ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\,d(\ln x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$$

80. $\int x\operatorname{sen}x\,dx$

Prendendo $f(x)=x \quad g'(x)=\operatorname{sen}x \quad g(x)=-\cos x$ si ha:

$$\int x\operatorname{sen}x\,dx=\int x\,d(-\cos x)=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\operatorname{sen}x+C$$

ATTENZIONE. Per calcolare $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$ con questo metodo si devono verificare due condizioni:

1) Si deve conoscere l'integrale della $g'(x)$, cioè la $g(x)$, per potere scrivere che è $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=\int f(x)\,d[g(x)]$.
2) Il calcolo del secondo integrale $\int g(x)\,d[f(x)]$ deve presentare minori difficoltà rispetto a quello di partenza. Infatti, poiché il metodo d'integrazione per parti riconduce il calcolo di un integrale al calcolo di un altro integrale, è ovvio che quest'ultimo deve essere di più facile soluzione.

Si faccia attenzione al fatto che talvolta si conoscono gli integrali sia di $f(x)$ che di $g'(x)$. Per esempio:

$$\int xe^x\,dx \quad \text{si può scrivere} \quad I_1=\int x\,d(e^x) \quad \text{oppure} \quad I_2=\int e^x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

In casi come questo si deve scegliere l'integrale che rende più semplice il calcolo del secondo integrale (in accordo con la condizione 2). Nel caso dell'esempio precedente si ha:

81. $I_1=\int xe^x\,dx=\int x\,d(e^x)=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$

Il calcolo del secondo integrale è, come si vede, molto semplice.

$$I_2=\int xe^x\,dx=\int e^x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2e^x}{2}-\int\frac{x^2}{2}\,d(e^x)=\frac{x^2e^x}{2}-\frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx$$

Le operazioni eseguite hanno portato ad un aumento dell'esponente di x: è inutile continuare perché il calcolo di $\int x^2e^x\,dx$ è più difficile del calcolo dell'integrale dato.

Detto ciò, passiamo ad ulteriori esempi.

82. $\int\ln x\,dx=\left[\text{è già scritto nella forma }\int f(x)\,d[g(x)]\text{ con }f(x)=\ln x,\ g(x)=x\right]=$

$$=x\ln x-\int x\,d(\ln x)=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\ln x-\int dx=$$
$$=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$$

83. $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx=\int\ln x\,d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\,d(\ln x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx=$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C$$

84. $$\int xe^{2x}dx = \frac12\int x\,d(e^{2x}) = \frac12\left(xe^{2x} - \int e^{2x}dx\right) = \frac12\left[xe^{2x} - \frac12\int e^{2x}d(2x)\right] =$$
$$= \frac12\left(xe^{2x} - \frac12 e^{2x} + C\right) = \frac14 e^{2x}(2x-1) + C_1$$

85. $$I = \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \int x^2 d(-\cos x) = -\int x^2 d(\cos x) = -\left[x^2\cos x - \int \cos x\, d(x^2)\right] =$$
$$= -x^2\cos x + 2\int\cos x\cdot x\,dx = -x^2\cos x + 2I_1$$
$$I_1 = \int\cos x\cdot x\,dx = \int x\,d(\operatorname{sen}x) = \text{[integrabile ancora per parti]} = x\operatorname{sen}x - \int\operatorname{sen}x\,dx =$$
$$= x\operatorname{sen}x + \cos x + C_1$$

Pertanto si ha:
$$I = \int x^2\operatorname{sen}x\,dx = -x^2\cos x + 2(x\operatorname{sen}x+\cos x + C_1) =$$
$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x + 2\cos x + C$$

86. $$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}x\,dx = \int\operatorname{sen}x\,d(-\cos x) = -\int\operatorname{sen}x\,d(\cos x) =$$
$$= -\left[\operatorname{sen}x\cos x - \int\cos x\,d(\operatorname{sen}x)\right] = -\operatorname{sen}x\cos x + \int\cos^2 x\,dx$$

Essendo $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$ si può scrivere:
$$\int\operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen}x\cos x + \int(1-\operatorname{sen}^2x)\,dx = -\operatorname{sen}x\cos x + x - \int\operatorname{sen}^2x\,dx$$

Trasportando al 1° membro l'integrale del 2° membro, si ha:
$$2\int\operatorname{sen}^2x\,dx = x - \operatorname{sen}x\cos x + C_1 \quad\rightarrow\quad \int\operatorname{sen}^2x\,dx = \frac{x-\operatorname{sen}x\cos x}{2} + C$$

A questo risultato si può giungere più velocemente ricordando che, per le formule di bisezione (cfr. §1.7), è:
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
e quindi:
$$\int \operatorname{sen}^2x\,dx = \frac12\int(1-\cos2x)\,dx = \frac12\int dx - \frac12\int\cos2x\,dx = \frac{x}{2} - \frac14\int\cos 2x\,d(2x) =$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + C$$

L'uguaglianza dei risultati è evidente tenendo presente che è $\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$ (cfr. §1.7, formule di duplicazione). Allora:
$$\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{4} = \frac{x-\operatorname{sen}x\cos x}{2}$$

87. $$I = \int e^{3x}\cos x\,dx = \int e^{3x}d(\operatorname{sen}x) = e^{3x}\operatorname{sen}x - \int\operatorname{sen}x\,d(e^{3x}) =$$
$$= e^{3x}\operatorname{sen}x - 3\int e^{3x}\operatorname{sen}x\,dx = e^{3x}\operatorname{sen}x - 3I_1$$

$$I_1 = \int e^{3x}\operatorname{sen}x\,dx = \int e^{3x}d(-\cos x) = -\int e^{3x}d(\cos x) = \text{[ancora per parti]} =$$
$$= -\left[e^{3x}\cos x - \int\cos x\,d(e^{3x})\right] = -e^{3x}\cos x + 3\int\cos x\cdot e^{3x}dx$$

Sostituendo si ha:
$$I = \int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\operatorname{sen}x - 3\left(-e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x\,dx\right) + C_1$$
$$\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\operatorname{sen}x + 3e^{3x}\cos x - 9\int e^{3x}\cos x\,dx + C_1$$

Trasportando al primo membro l'integrale del secondo membro e sommando si ha:
$$10\int e^{3x}\cos x\,dx = e^{3x}\operatorname{sen}x + 3e^{3x}\cos x + C_1$$
ed infine:
$$\int e^{3x}\cos x\,dx = \frac{1}{10}(e^{3x}\operatorname{sen}x + 3x^{3x}\cos x) + C = \frac{1}{10}e^{3x}(\operatorname{sen}x + 3\cos x) + C$$

88. $$I = \int x^3\ln(x-2)\,dx = \int\ln(x-2)\,d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac14\int\ln(x-2)\,d(x^4) =$$
$$= \frac14\{x^4\ln(x-2) - \int x^4 d[\ln(x-2)]\} = \frac14\left[x^4\ln(x-2) - \int x^4\cdot\frac{1}{x-2}dx\right] =$$
$$= \frac14[x^4\ln(x-2) - I_1] \quad \text{con} \quad I_1 = \int\frac{x^4}{x-2}dx$$

Abbiamo visto (cfr. es. 24) che in casi come questo si divide il numeratore per il denominatore; si ottiene allora:
$$\frac{x^4}{x-2} = x^3+2x^2+4x+8+\frac{16}{x-2}$$
Quindi:
$$I_1 = \frac{x^4}{4} + \frac23x^3 + 2x^2 + 8x + 16\ln(x-2) + C_1$$

Sostituendo si ottiene infine:
$$I = \int x^3\ln(x-2)\,dx = \frac14x^4\ln(x-2) - \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - 2x - 4\ln(x-2) + C$$

89. $$I = \int\operatorname{arc\,sen} x\,dx = \text{[per parti con } f(x) = \operatorname{arc\,sen} x,\ g(x) = x\text{]} =$$
$$= x\operatorname{arc\,sen} x - \int x\,d(\operatorname{arc\,sen} x) = x\operatorname{arc\,sen} x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\operatorname{arc\,sen} x - I_1$$
$$I_1 = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac12\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac12\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2) =$$
$$= -\frac12\,\frac{(1-x^2)^{-\frac12+1}}{-\frac12+1} + C_1 = -\sqrt{1-x^2}+C_1$$

Sostituendo si ha:

$$I = \int \text{arc sen}\, x\, dx = x \,\text{arc sen}\, x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

90. $I = \int \text{sen} \ln x\, dx = [\text{per parti con } f(x) = \text{sen} \ln x,\ g(x) = x] =$

$$= x \,\text{sen} \ln x - \int x\, d(\text{sen} \ln x) = x\, \text{sen} \ln x - \int x \cdot \frac{\cos \ln x}{x}\, dx =$$

$$= x\, \text{sen} \ln x - \int \cos \ln x\, dx = x\, \text{sen} \ln x - I_1$$

$$I_1 = \int \cos \ln x\, dx = x \cos \ln x - \int x\, d(\cos \ln x) = x \cos \ln x + \int \text{sen} \ln x\, dx$$

Sostituendo si ha:

$$\int \text{sen} \ln x\, dx = x\, \text{sen} \ln x - x \cos \ln x - \int \text{sen} \ln x\, dx + C_1$$

Trasportando al primo membro l'integrale del secondo membro e sommando si ha:

$$2 \int \text{sen} \ln x\, dx = x\,(\text{sen} \ln x - \cos \ln x) + C_1$$

ed infine:

$$I = \int \text{sen} \ln x\, dx = \frac{1}{2} x\,(\text{sen} \ln x - \cos \ln x) + C$$

Dopo aver seguito con molta attenzione gli esempi precedenti, si consiglia di riesaminarli osservando come è stata scelta in ciascuno di essi la funzione $g(x)$. Una scelta sbagliata avrebbe condotto a maggiori difficoltà nel calcolo del secondo integrale.

Durante la risoluzione degli esercizi è utile tener presente la seguente tabella costruita sulla scorta degli esempi svolti.

TAB. 3-I

$f(x) \cdot g'(x)$	$f(x)$	$g(x)$
$x^n \ln mx$	$\ln mx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $n \neq -1$
$x^n \ln(mx+q)$	$\ln(mx+q)$	
$x^n \,\text{sen}\, mx$	x^n	$-\frac{1}{m} \cos mx$
$x^n \cos mx$	x^n	$\frac{1}{m}$ sen mx
$x^n e^{mx}$	x^n	$\frac{1}{m} e^{mx}$ $n > 0$ intero
e^{nx} sen mx	e^{nx}	$-\frac{1}{m} \cos mx$
$e^{nx} \cos mx$	e^{nx}	$\frac{1}{m}$ sen mx
x^n arc sen x	arc sen x	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $n \neq -1$
x^n arc cos x	arc cos x	
x^n arc tg x	arc tg x	

3.4.- Esercizi proposti

Per i seguenti integrali si richiede l'uso del metodo di integrazione per parti e di tutto quanto visto finora. Si raccomanda di scegliere prima la funzione $g'(x)$ [quindi la $g(x)$] e poi controllare la scelta mediante la TAB. 3-I.

91. $\int x^2 e^{3x} dx$

92. $\int x^3 \ln x\, dx$

93. $\int x^3\, \text{sen}\, x\, dx$

94. $\int \cos^2 x\, dx$

95. $\int e^{2x}\, \text{sen}\, x\, dx$

96. $\int \ln^2 x\, dx$

97. $\int x\, \text{arc tg}\, x\, dx$

98. $\int \text{arc cos}\, x\, dx$

99. $\int \sqrt{x} \ln 2x\, dx$

100. $\int (x+1) \ln(x+2)\, dx$

101. $\int \cos \ln x\, dx$

102. $\int x^3 \ln(x+1)\, dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

91. $I = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x^2\, d(e^{3x}) = \frac{1}{3} [x^2 e^{3x} - \int e^{3x}\, d(x^2)] = \frac{1}{3} (x^2 e^{3x} - 2 \int x e^{3x} dx) =$

$$= \frac{1}{3} (x^2 e^{3x} - 2 I_1)$$

Calcoliamo I_1 ancora per parti:

$$I_1 = \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x\, d(e^{3x}) = \frac{1}{3} (x e^{3x} - \int e^{3x} dx) = \frac{1}{3} \left(x e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C_1 \right)$$

Per cui:

$$I = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \left(x^2 e^{3x} - 2 \cdot \frac{1}{3} x e^{3x} + \frac{2}{9} e^{3x} \right) + C = \frac{1}{27} e^{3x} (9x^2 - 6x + 2) + C$$

92. $\int x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{4} \int \ln x\, d(x^4) = \frac{1}{4} [x^4 \ln x - \int x^4\, d(\ln x)] = \frac{1}{4} \left(x^4 \ln x - \int x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$

$$= \frac{1}{4} (x^4 \ln x - \int x^3 dx) = \frac{1}{4} \left(x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} \right) + C = \frac{x^4}{16} (4 \ln x - 1) + C$$

93. $I = \int x^3\, \text{sen}\, x\, dx = \int x^3\, d(-\cos x) = -\int x^3\, d(\cos x) = -[x^3 \cos x - \int \cos x\, d(x^3)] =$

$$= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x\, dx = -x^3 \cos x + 3 I_1$$

$$I_1 = \int x^2 \cos x\, dx = [\text{per parti}] = \int x^2\, d(\text{sen}\, x) = x^2\, \text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, d(x^2) =$$

$$= x^2\, \text{sen}\, x - 2 \int x\, \text{sen}\, x\, dx = x^2\, \text{sen}\, x - 2 I_2$$

$$I_2 = \int x\, \text{sen}\, x\, dx = -\int x\, d(\cos x) = -(x \cos x - \int \cos x\, dx) = -x \cos x + \text{sen}\, x + C_1$$

Sostituendo I_2 in I_1 e il risultato in I, si ha:

$$I = \int x^3\, \text{sen}\, x\, dx = -x^3 \cos x + 3 [x^2\, \text{sen}\, x - 2(-x \cos x + \text{sen}\, x + C_1)] =$$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2\, \text{sen}\, x + 6x \cos x - 6\, \text{sen}\, x + C$$

94. $\int \cos^2 x\, dx = \int \cos x \cdot \cos x\, dx = \int \cos x\, d(\text{sen}\, x) = \cos x\, \text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, d(\cos x) =$

$$= \text{sen}\, x \cos x + \int \text{sen}^2 x\, dx = \text{sen}\, x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \text{sen}\, x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx + C_1$$

Trasportando al 1° membro l'integrale del 2° membro e sommando si ha:

$$2\int\cos^2 x\,dx = x + \operatorname{sen} x\cos x + C_1 \qquad \int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x\cos x) + C$$

Allo stesso risultato si può giungere più velocemente ricordando che è:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{[cfr. §1.7, formule di bisezione]}$$

Così:

$$\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,d(2x)\right] = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

L'uguaglianza dei risultati è evidente tenendo presente che per le formule di duplicazione (cfr. §1.7) è $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$:

$$\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{4} = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x\cos x)$$

95. $I = \int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx = -\int e^{2x}\,d(\cos x) = -[e^{2x}\cos x - \int\cos x\,d(e^{2x})] =$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2I_1$$

$$I_1 = \int e^{2x}\cos x\,dx = \int e^{2x}\,d(\operatorname{sen} x) = e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$$

Sostituendo I_1 in I, si ha:

$$\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\operatorname{sen} x - 4\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$$

Trasportando al 1° membro l'integrale del 2° membro e sommando:

$$5\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\operatorname{sen} x + C_1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^{2x}}{5}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

96. $I = \int\ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int x\,d(\ln^2 x) = x\ln^2 x - \int 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$$= x\ln^2 x - 2\int\ln x\,dx = x\ln^2 x - 2I_1$$

Essendo (cfr. es. 82) $I_1 = x(\ln x - 1) + C_1$, sostituendo in I si ha:

$$I = \int\ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$$

97. $I = \int x\operatorname{arctg} x\,dx = \int\operatorname{arctg} x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x^2\,d(\operatorname{arctg} x) =$

$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}I_1$$

$$I_1 = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int dx - \int\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x - \operatorname{arctg} x + C_1$$

Sostituendo:

$$I = \int x\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C$$

98. $I = \int\arccos x\,dx = x\arccos x - \int x\,d(\arccos x) =$

$$= x\arccos x + \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arccos x + I_1$$

$$I_1 = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(1-x^2) =$$

$$= -2\,\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -4\sqrt{1-x^2} + C$$

Sostituendo si ha:

$$I = \int\arccos x\,dx = x\arccos x - 4\sqrt{1-x^2} + C$$

99. $\int\sqrt{x}\ln 2x\,dx = \int\ln 2x\,d\left[\frac{x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\int\ln 2x\,d(x\sqrt{x}) =$

$$= \frac{2}{3}[x\sqrt{x}\ln 2x - \int x\sqrt{x}\,d(\ln 2x)] =$$

$$= \frac{2}{3}(x\sqrt{x}\ln 2x - \int x\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2\,dx) = \frac{2}{3}(x\sqrt{x}\ln 2x - \int\sqrt{x}\,dx) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\ln 2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) + C = \frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln 2x - 2) + C$$

100. $I = \int(x+1)\ln(x+2)\,dx = \int(x+1)\ln(x+2)\,d(x+1) =$

$$= \int\ln(x+2)\,d\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int(x+1)^2\,d[\ln(x+2)] =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int(x+1)^2\cdot\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+2) - \frac{1}{2}I_1$$

$$I_1 = \int\frac{(x+1)^2}{x+2}\,dx = \int\frac{(x+2-1)^2}{x+2}\,dx = \int\frac{(x+2)^2 - 2(x+2) + 1}{x+2}\,dx =$$

$$= \int(x+2)\,dx - 2\int dx + \int\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{(x+2)^2}{2} - 2x + \ln(x+2) + C_1$$

Sostituendo si ha:

$$I = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\left[\frac{(x+2)^2}{2} - 2x + \ln(x+2) + C_1\right] =$$

$$= \frac{1}{4}[2(x+1)^2 \ln(x+2) - (x+2)^2 + 4x - 2\ln(x+2)] + C$$

101. $I = \int \cos \ln x \, dx = x \cos \ln x - \int x \, d(\cos \ln x) =$

$$= x \cos \ln x - \int x\left(-\operatorname{sen} \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = x \cos \ln x + \int \operatorname{sen} \ln x \, dx = x \cos \ln x + I_1$$

$$I_1 = \int \operatorname{sen} \ln x \, dx = x \operatorname{sen} \ln x - \int x \, d(\operatorname{sen} \ln x) = x \operatorname{sen} \ln x - \int x \cos \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= x \operatorname{sen} \ln x - \int \cos \ln x \, dx$$

Sostituendo si ha:

$$I = \int \cos \ln x \, dx = x \cos \ln x + x \operatorname{sen} \ln x - \int \cos \ln x \, dx$$

Trasportando al primo membro l'integrale del secondo membro e sommando, si ha:

$$2I = x(\cos \ln x + \operatorname{sen} \ln x) + C_1 \quad \rightarrow \quad \int \cos \ln x \, dx = \frac{1}{2} x (\cos \ln x + \operatorname{sen} \ln x) + C$$

102. $I = \int x^3 \ln(x+1) \, dx = \int \ln(x+1) \, d\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{1}{4} \int \ln(x+1) \, d(x^4) =$

$$= \frac{1}{4}\{x^4 \ln(x+1) - \int x^4 \, d[\ln(x+1)]\} = \frac{1}{4}\left[x^4 \ln(x+1) - \int \frac{x^4}{x+1} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{4}[x^4 \ln(x+1) - I_1]$$

$$I_1 = \int \frac{x^4}{x+1} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{x+1} dx = \int \frac{x^4 - 1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \int (x^2+1)(x-1) \, dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \int (x^3 - x^2 + x - 1) \, dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C_1$$

Sostituendo:

$$I = \int x^3 \ln(x+1) \, dx = \frac{1}{4}\left[x^4 \ln(x+1) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{48}[12x^4 \ln(x+1) - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 12x - 12\ln(x+1)] + C$$

4 - INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

4.1.- Integrazione per decomposizione in frazioni parziali

Gli esercizi **97** e **102** hanno richiesto il calcolo di integrali (I_1) di funzioni razionali fratte. Poiché in entrambi i casi il grado del numeratore è non inferiore a quello del denominatore, è stato seguito il metodo indicato nell'es. **24**. Estendiamo ora ai casi più generali l'integrazione di funzioni del tipo $f(x)/g(x)$ con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni razionali.

Così come nel rapporto $20 : 6 = 3$ con resto 2 si può scrivere $20 = 6 \cdot 3 + 2$, anche nella divisione tra i polinomi $f(x)$ e $g(x)$ si può scrivere l'identità:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \text{dividendo (numeratore)} & \text{di grado } n \\ g(x) & \text{divisore (denominatore)} & \text{di grado } m \leqslant n \\ q(x) & \text{quoziente} & \text{di grado } n - m \\ r(x) & \text{resto} & \text{di grado } p < m \end{array} \right.$$

Dividendo ambo i membri dell'identità per $g(x)$ si ha:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int q(x) \, dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx$$

Cioè: l'integrale di una funzione razionale fratta, il cui numeratore è di grado non inferiore a quello del denominatore, viene trasformato nella somma di due integrali: il primo è l'integrale di una funzione razionale intera (e questa la si sa integrare); il secondo è l'integrale di una funzione razionale fratta in cui il numeratore è di grado inferiore, stavolta, a quello del denominatore. Esempio:

103. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 8}{x - 2} dx$

Essendo $\dfrac{x^3 + 8}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 + \dfrac{16}{x - 2}$ (cfr. §1.1, divisione tra polinomi), si ha:

$$\int \frac{x^3 + 8}{x - 2} dx = \int (x^2 + 2x + 4) \, dx + 16 \int \frac{1}{x - 2} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 16 \ln|x - 2| + C$$

Non sempre però, l'integrale $\displaystyle\int \frac{r(x)}{g(x)} dx$ è così immediato. L'immediatezza si avrà tutte le volte che $g(x)$ è di 1° grado, come nell'esempio precedente, infatti, quando il divisore è di primo grado, il resto è di grado zero (cioè un numero). In tal caso si ha:

$$\int \frac{r}{g(x)} dx = [\text{a meno di una costante moltiplicativa}] = \ln|g(x)| + C$$

Esempio.

104. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2}{2x + 1} dx = [\text{eseguendo la divisione}] = \frac{1}{2} \int \left(x - \frac{1}{2}\right) dx - \frac{7}{4} \int \frac{1}{2x + 1} dx =$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,d(2x+1) =$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{7}{8}\ln|2x+1| + C$$

La costante moltiplicativa in questo caso è $-7/8$.

Da quanto detto si intuisce che imparando ad integrare le funzioni razionali fratte con numeratore di grado inferiore a quello del denominatore, si sarà in grado di integrare l'espressione $f(x)/g(x)$ nei casi più generali.

Stabilito che il numeratore $f(x)$ è inferiore di grado rispetto al denominatore $g(x)$, si fissi l'attenzione sul polinomio $g(x)$. Esso può contenere:

1) fattori di 1° grado del tipo $ax + b$
2) fattori di 1° grado con ordine di molteplicità α, del tipo $(ax + b)^\alpha$
3) fattori di 2° grado, non scomponibili, del tipo $ax^2 + bx + c$
4) fattori di 2° grado, non scomponibili, con ordine di molteplicità β, del tipo $(ax^2 + bx + c)^\beta$

In ognuno di questi casi il problema consiste nel trasformare la frazione $f(x)/g(x)$ in una somma algebrica di frazioni parziali. Per esempio, si voglia trasformare nella somma algebrica di frazioni parziali la frazione:

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$$

Si osservi innanzitutto che il denominatore è scomponibile in due fattori del 1° tipo:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Per eseguire la trasformazione si procede nel seguente modo. Si scrive l'uguaglianza:

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

e si calcolano A e B in modo che l'uguaglianza sussista. Per far ciò si sommano le due frazioni del secondo membro e si ottiene:

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

Perché il 1° e il 3° membro siano uguali deve essere:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + 2B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 4 \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}$$

Dall'esempio ora visto si deduce che ogni fattore del tipo $ax + b$ dà luogo a una frazione del tipo $\dfrac{A}{ax+b}$. Dovendo allora integrare la frazione data, sarà:

105. $$\int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = -3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$= -3\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C$$

Si voglia ora trasformare in somma algebrica di frazioni parziali la frazione

$$\frac{x^2+1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Si osservi che il denominatore è scomponibile in:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$

Per eseguire la trasformazione scriviamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{x^2+1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

e calcoliamo A, B e C in modo che l'uguaglianza sussista. Per far ciò sommiamo le tre frazioni del secondo membro:

$$\frac{x^2+1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (C-2A)x + A - B + C}{(x+1)(x-1)^2}$$

Perché il 1° e il 3° membro siano uguali basta che sia:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + C = 0 \\ A - B + C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \\ C = 1 \end{cases}$$

Pertanto si ha:

$$\frac{x^2+1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Dall'esempio ora visto si deduce che ogni fattore del tipo $(ax+b)^\alpha$ dà luogo alla somma di α frazioni del tipo:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(ax+b)^\alpha}$$

Dovendo allora integrare la frazione data sarà:

106. $$\int \frac{x^2+1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C =$$

$$= \ln\sqrt{|x^2-1|} - \frac{1}{x-1} + C$$

Si voglia ora trasformare in somma algebrica di frazioni parziali la frazione:

$$\frac{(x+2)^2}{x^3 - 1}$$

Il denominatore è scomponibile in:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

L'uguaglianza da considerare è la seguente:

$$\frac{(x+2)^2}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Procedendo come negli esempi precedenti si ha:

$$\frac{x^2+4x+4}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Deve essere:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=4 \\ A-C=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=-1 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\frac{(x+2)^2}{x^3-1}=\frac{3}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Dall'esempio visto si deduce che ogni fattore del tipo ax^2+bx+c dà luogo a una frazione del tipo $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$. Dovendo allora integrare la frazione data, sarà:

107. $$\int\frac{(x+2)^2}{x^3-1}dx=3\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=3\ln|x-1|-\ln(x^2+x+1)+C=\ln\frac{|x-1|^3}{x^2+x+1}$$

Si voglia ora trasformare la frazione

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$$

Il denominatore si scompone in:

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1=(x^2+1)^2(x-1)$$

L'uguaglianza da considerare è la seguente:

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Procedendo come negli esempi precedenti si ha:

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)x^4+(C-B)x^3+(2A+B-C+D)x^2+(-B+C-D+E)x+A-C-E}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

Deve essere:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ 2A+B-C+D=2 \\ -B+C-D+E=0 \\ A-C-E=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=1 \\ E=0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

Dall'esempio visto si deduce che ogni fattore del tipo $(ax^2+bx+c)^\beta$ dà luogo alla somma di β frazioni del tipo:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_\beta x+B_\beta}{(ax^2+bx+c)^\beta}$$

Dovendo integrare la frazione data, sarà:

108. $$\int\frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C$$

La tabella che segue riassume le regole che permettono di individuare le frazioni parziali a seconda del modo in cui si scompone in fattori il denominatore della frazione razionale. Nella terza colonna viene indicato il numero di frazioni parziali che si ottengono per ciascun fattore.

TAB. 3-II

FATTORE	FRAZIONI PARZIALI		N.
$ax+b$	$\dfrac{A}{ax+b}$		1
$(ax+b)^\alpha$	$\dfrac{A_i}{(ax+b)^i}$	$i=1,2,\ldots\alpha$	α
ax^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$		1
$(ax^2+bx+c)^\beta$	$\dfrac{A_ix+B_i}{(ax^2+bx+c)^i}$	$i=1,2,\ldots\beta$	β

109. $$I=\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$$

Essendo $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ si ha:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

Deve essere:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$$

pertanto:

$$I = -2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{x-2}dx = -2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

110. $I = \int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx$

Il denominatore è già scomposto in fattori. Si ha:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + Bx - 2B + Cx + 2C}{(x+2)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (A-2B+2C)}{(x+2)(x-1)^2}$$

Confrontando:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B + C = 0 \\ A - 2B + 2C = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 4/9 \\ B = 5/9 \\ C = 1/3 \end{cases}$$

$$I = \frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{5}{9}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C$$

111. $\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx$

Si ha:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)}{(x-1)^3}$$

Confrontando i numeratori:

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \\ A - B + C = 2 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases}$$

Cosicché risulta:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{3}{(x-1)^3}dx =$$

$$= \ln|x-1| + 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 3\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + C$$

112. $I = \int \frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)}dx$

Si ha:

$$\frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{A + Ax^2 + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C}{(x-2)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 - (2B-C)x + (A-2C)}{(x-2)(1+x^2)}$$

Confrontando i numeratori:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2B - C = 0 \\ A - 2C = -1 \end{cases} \to \begin{cases} B + 2C = 2 \\ 2B - C = 0 \\ A - 2C = 1 \end{cases} \to \begin{cases} A = 3/5 \\ B = 2/5 \\ C = 4/5 \end{cases}$$

Pertanto:

$$I = \frac{3}{5}\int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{\frac{2x}{5} + \frac{4}{5}}{1+x^2}dx = \frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\int \frac{2x+4}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{4}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{4}{5}\operatorname{arctg} x + C$$

113. $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

Essendo $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$ si ha:

$$\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (-3A+B-2C)x + (2A-2B+C)}{(x-1)^2(x-2)}$$

Confrontando con il primo membro deve essere:

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ -3A + B - 2C = 0 \\ 2A - 2B + C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 5 \end{cases}$$

Così:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx = \int \frac{-4}{x-1}\,dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx =$$

$$= -4\ln|x-1| - 2\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 5\ln|x-2| + C$$

$$= \ln\frac{|x-2|^5}{(x-1)^4} + \frac{2}{x-1} + C$$

Dagli esempi visti si può notare che, in generale, l'integrale di una funzione razionale fratta è costituito da addendi razionali e/o da addendi contenenti le funzioni trascendenti elementari *logaritmo* ed *arcotangente*.

4.2.- Esercizi proposti

114. $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$ **118.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$ **121.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}\,dx$

115. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$ **119.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^4+6x^2+9}}\,dx$ **122.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$

116. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)}\,dx$ **120.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+18x+7}\,dx$ **123.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^3}\,dx$

117. $\displaystyle\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

114. $I = \displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$

Essendo $x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2)+(x-2) = (x-2)(x^2+1)$ si ha:

$$\frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C}{(x-2)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2-(2B-C)x+(A-2C)}{(x-2)(x^2+1)}$$

Dal confronto con il primo membro si ha:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2B - C = 0 \\ A - 2C = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B + 2C = 3 \\ 2B - C = 0 \\ A - 2C = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 7/5 \\ B = 3/5 \\ C = 6/5 \end{cases}$$

Pertanto:

$$I = \frac{7}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}}{x^2+1}\,dx = \frac{7}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{5}\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{7}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{6}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{7}{5}\ln|x-2| + \frac{3}{10}\ln(x^2+1) + \frac{6}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C$$

115. $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$

Essendo $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ si ha:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Dal confronto con il primo membro si ha:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B + C = 1 \\ A - C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = -2/3 \\ C = -1/3 \end{cases}$$

Pertanto:

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C = \frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + C$$

116. $I = \displaystyle\int \frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)}\,dx$

Si ha:

$$\frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+2Bx^2-Bx+2Cx-C}{(2x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+2B)x^2 - (B-2C)x + A - C}{(2x-1)(x^2+1)}$$

Dal confronto col primo membro si ha:

$$\begin{cases} A + 2B = 1 \\ B - 2C = 2 \\ A - C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2B + C = 1 \\ B - 2C = 2 \\ A - C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -3/5 \\ B = 4/5 \\ C = -3/5 \end{cases}$$

Pertanto:

$$I = -\frac{3}{5}\int \frac{1}{2x-1}\,dx + \int \frac{\frac{4x}{5} - \frac{3}{5}}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x-1}\,d(2x-1) + \frac{2}{5}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{10}\ln|2x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+1) - \frac{3}{5}\operatorname{arc\,tg} x + C =$$

$$= -\frac{1}{10}[3\ln|2x-1| - 4\ln(x^2+1) + 6\operatorname{arc\,tg} x] + C$$

117. $I = \int \frac{5x^2 + 11x - 2}{(x+5)(x^2+9)}\,dx$

Si ha:

$$\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{Ax^2 + 9A + Bx^2 + 5Bx + Cx + 5C}{(x+5)(x^2+9)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (5B+C)x + 9A + 5C}{(x+5)(x^2+9)}$$

Dal confronto con il primo membro si ha:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ 5B + C = 11 \\ 9A + 5C = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5A - C = 14 \\ 5B + C = 11 \\ 9A + 5C = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ C = -4 \end{cases}$$

Pertanto:

$$I = 2\int \frac{2}{x+5}\,dx + \int \frac{3x-4}{x^2+9}\,dx =$$

$$= 2\ln|x+5| + 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2+9}\,dx =$$

$$= 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - 4\cdot\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,d\left(\frac{x}{3}\right) =$$

$$= 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C$$

118. $I = \int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1}\,dx = \int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$

$$= \int \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = \int (x-1)\,d(x-1) + \int \frac{1}{x+1}\,d(x+1) =$$

$$= \frac{(x-1)^2}{2} + \ln|x+1| + C$$

Con questo artificio non è necessario applicare il metodo generale.

119. $I = \int \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 6x^2 + 9}}\,dx = \int \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)^2}}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} =$

$$= \ln(x^2+3) + C$$

120. $I = \int \frac{x+1}{9x^2 + 18x + 7}\,dx = \frac{1}{18}\int \frac{18x + 18}{9x^2+18x+7}\,dx =$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{1}{9x^2+18x+7}\,d(9x^2+18x+7) = \frac{1}{18}\ln|9x^2+18x+7| + C$$

Con questo artificio non è necessario applicare il metodo generale.

121. $I = \int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 + x^2}\,dx = \int \frac{x^3}{x^2(x^2+1)}\,dx + \int \frac{x}{x^2(x^2+1)}\,dx + \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx + \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + I_1 + I_2$$

Calcolo di I_1:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(x^2+1)}$$

Dal confronto con il primo membro si ha:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1$$

Calcolo di I_2:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = -1$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Allora:

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C$$

122. $I=\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx$

Talvolta per la determinazione dell'integrale si scorge qualche artificio che permette, con un certo vantaggio, di non ricorrere al metodo generale. In questo caso, come nel successivo, si esegua, ad esempio, il seguente cambio di variabile:

$$t=\frac{x-1}{x+1}\ \rightarrow\ x=\frac{1+t}{1-t}\ \rightarrow\ dx=\frac{1-t+1+t}{(1-t)^2}dt=\frac{2\,dt}{(1-t)^2}$$

$$(x^2-1)^2=\left[\frac{(1+t)^2}{(1-t)^2}-1\right]^2=\left[\frac{(1+t)^2-(1-t)^2}{(1-t)^2}\right]^2=\left[\frac{4t}{(1-t)^2}\right]^2=\frac{16t^2}{(1-t)^4}$$

Così è:

$$I=\int\frac{1}{\frac{16t^2}{(1-t)^4}}\cdot\frac{2}{(1-t)^2}dt=\frac{1}{8}\int\frac{(1-t)^4}{t^2}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(1-t)^2}{t^2}dt=\frac{1}{8}\int\frac{1-2t+t^2}{t^2}dt=\frac{1}{8}\int\frac{1}{t^2}dt-\frac{1}{4}\int\frac{1}{t}dt+\frac{1}{8}\int dt=$$

$$=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{8}t+C$$

Sostituendo $t=\dfrac{x-1}{x+1}$ si ha:

$$I=-\frac{1}{8}\cdot\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{8}\cdot\frac{x-1}{x+1}+C=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{-(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2-1}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{-4x}{x^2-1}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=\frac{x}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

123. $I=\int\frac{1}{(x^2-1)^3}dx$

Col procedimento precedente ed evitando il metodo generale si ha:

$$t=\frac{x-1}{x+1}\ \rightarrow\ x=\frac{1+t}{1-t}\ \rightarrow\ dx=...=\frac{2\,dt}{(1-t)^2}$$

$$(x^2-1)^3=\left[\frac{(1+t)^2}{(1-t)^2}-1\right]^3=...=\left[\frac{4t}{(1-t)^2}\right]^3=\frac{64t^3}{(1-t)^6}$$

$$I=\int\frac{1}{\frac{64t^3}{(1-t)^6}}\cdot\frac{2}{(1-t)^2}dt=\frac{1}{32}\int\frac{(1-t)^4}{t^3}dt=\frac{1}{32}\int\frac{1-4t+6t^2-4t^3+t^4}{t^3}dt=$$

$$=\frac{1}{32}\left[\int\frac{1}{t^3}dt-4\int\frac{1}{t^2}dt+6\int\frac{1}{t}dt-4\int dt+\int t\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{32}\left(-\frac{1}{2t^2}+4\frac{1}{t}+6\ln|t|-4t+\frac{1}{2}t^2\right)+C$$

Sostituendo $t=\dfrac{x-1}{x+1}$ si ha:

$$I=-\frac{(x+1)^2}{64(x-1)^2}+\frac{x+1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{x-1}{8(x+1)}+\frac{(x-1)^2}{64(x+1)^2}+C$$

Sommando il secondo addendo al quarto, ed il primo addendo al quinto, si ha:

$$I=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{x^3+x}{8(x^2-1)^2}+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left[3\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{6x^3-10x}{(x^2-1)^2}\right]+C$$

4.3.- Integrali del tipo: $I_n=\int\frac{1}{(x^2-1)^n}dx$

Come si può notare dagli esempi 122 e 123 del paragrafo precedente gli integrali del tipo

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2-1)^n}dx\quad\text{con } n>1,\ \text{intero}$$

vengono trasformati in somma di integrali di potenze di monomi con il cambio di variabile

$$x=\frac{1+t}{1-t}\ \rightarrow\ dx=\frac{2}{(1-t)^2}dt$$

Operata la trasformazione si giunge a:

$$I_n=\frac{1}{2^{2n-1}}\int\frac{(1-t)^{2n-2}}{t^n}dt\qquad [4.3.1]$$

come si può facilmente rilevare per $n=2$ (es. 122) ed $n=3$ (es. 123). Si ricordi che per $n=1$ è:

$$I_1=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

La formula [4.3.1] si presta bene al calcolo di I_n per valori di n non molto grandi. Se infatti si dovesse calcolare I_{10}, l'applicazione della [4.3.1] richiederebbe lo sviluppo di $(1-t)^{18}$. Al fine di evitare tali sviluppi ci si propone di dare una formula di riduzione per questi integrali, cioè una formula che esprima I_n in funzione di I_{n-1}. A tale scopo si osservi che è:

$$\frac{1}{(x^2-1)^n} = \frac{x^2-x^2+1}{(x^2-1)^n} = -\frac{x^2-1}{(x^2-1)^n}+\frac{x^2}{(x^2-1)^n} = -\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}}+\frac{x^2}{(x^2-1)^n}$$

cioè:

$$I_n = \int\frac{1}{(x^2-1)^n}\,dx = -\int\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}}\,dx + \int\frac{x^2}{(x^2-1)^n}\,dx = -I_{n-1}+I'$$

Calcoliamo I' per parti:

$$I' = \int\frac{x^2}{(x^2-1)^n}\,dx = \frac{1}{2(1-n)}\int x\,\frac{2x(1-n)}{(x^2-1)^n}\,dx = \frac{1}{2(1-n)}\int x\,d\left[\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{-1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}} - \int\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}}\,dx\right] = \frac{1}{2(n-1)}\left[I_{n-1} - \frac{x}{(x^2-1)^{n-1}}\right]$$

Pertanto:

$$I_n = -I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}}$$

Sommando il primo ed il secondo addendo del secondo membro si ha:

$$I_n = -\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}} \qquad [4.3.2]$$

Si verifichi questa formula per $n = 2$ (es. **122**) ed $n = 3$ (es. **123**) e la si usi per determinare I_4.

124. $I_4 = \frac{2\cdot4-3}{2\cdot4-2}I_3 - \frac{1}{2(4-1)}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^{4-1}} = -\frac{5}{6}I_3 - \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2-1)^3}$

Sostituendo ad I_3 il risultato dell'es. **123** si ottiene:

$$I_4 = \int\frac{1}{(x^2-1)^4}\,dx = -\frac{5}{6}\frac{1}{16}\left[\frac{6x^3-10x}{(x^2-1)^2} + 3\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right] - \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2-1)^3}+C =$$

$$= -\frac{5}{48}\cdot\frac{3x^3-5x}{(x^2-1)^2} - \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{6(x^2-1)^3}+C$$

Il calcolo di I_n non richiede necessariamente la conoscenza di I_{n-1}, come potrebbe sembrare dalla formula [4.3.2], poiché I_n si può esprimere in funzione del primo integrale noto, ad esempio I_1. Cosicché I_n si calcola direttamente tramite le formule:

$$I_n = \frac{1}{2}A_1\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \sum_{i=1}^{n-1}A_i\frac{x}{(x^2-1)^i}+C \qquad [4.3.3]$$

con

$$A_i = (-1)^{n+i}\frac{1}{2i-1}\prod_{k=i}^{n-1}\frac{2k-1}{2k} \quad (^1) \qquad [4.3.3\text{-a}]$$

che si ottengono calcolando successivamente I_{n-1} in funzione di I_{n-2}, I_{n-2} in funzione di I_{n-3}, ..., I_2 in funzione di I_1 e sostituendo le espressioni trovate nella [4.3.2].

Si verifichino le formule [4.3.3], [4.3.3-a] per $n = 4$ e le si usino per il calcolo di I_5:

Dalla [4.3.3] si ottiene:

(¹) Il simbolo $\prod$ indica un prodotto così come $\sum$ indica una somma.

$$I_4 = \frac{1}{2}A_1\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + A_1\frac{x}{x^2-1} + A_2\frac{x}{(x^2-1)^2} + A_3\frac{x}{(x^2-1)^3}+C$$

e dalla [4.3.3-a]:

$$A_1 = (-1)^{4+1}\frac{1}{2\cdot1-1}\cdot\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1}\cdot\frac{2\cdot2-1}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot3-1}{2\cdot3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = -\frac{5}{16}$$

$$A_2 = (-1)^{4+2}\frac{1}{2\cdot2-1}\cdot\frac{2\cdot2-1}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot3-1}{2\cdot3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{24}$$

$$A_3 = (-1)^{4+3}\frac{1}{2\cdot3-1}\cdot\frac{2\cdot3-1}{2\cdot3} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

Quindi:

$$I_4 = \int\frac{1}{(x^2-1)^4}\,dx =$$

$$= -\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{5}{16}\cdot\frac{x}{x^2-1} + \frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^3}+C$$

Da questo risultato, sommando il secondo ed il terzo addendo si ottiene l'I_4 già calcolato.

Per il calcolo di I_5 si usi lo stesso procedimento. Dalla [4.3.3] si ha:

125. $I_5 = \int\frac{1}{(x^2-1)^5}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}A_1\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + A_1\frac{x}{x^2-1} + A_2\frac{x}{(x^2-1)^2} + A_3\frac{x}{(x^2-1)^3} + A_4\frac{x}{(x^2-1)^4}+C$$

Dalla [4.3.3-a] si ha:

$$A_1 = (-1)^6\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8} = \frac{35}{128} \qquad A_3 = (-1)^8\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{48}$$

$$A_2 = (-1)^7\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8} = -\frac{35}{192} \qquad A_4 = (-1)^9\,\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$I_5 = \frac{35}{256}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{35}{128}\cdot\frac{x}{x^2-1} - \frac{35}{192}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^2} + \frac{7}{48}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^3} +$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{(x^2-1)^4}+C$$

Viene spontaneo chiedersi se esiste una formula di riduzione analoga per gli integrali del tipo:

$$I_n = \int\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx \quad (^1)$$

Si osservi che è:

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = \int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^n}\,dx - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx$$

(¹) Si ricordi che per $n = 1$ si ha: $\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

cioè:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx$$

Così, sapendo calcolare $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx$ (che si calcola per parti), si può ottenere I_n.

Esempi.

126. $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = I_1 - I'$

$$I' = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x\, d\left(\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - I_1\right) + C$$

quindi sostituendo si ha:

$$I_2 = I_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{x}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

127. $I_3 = \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = I_2 - I''$

$$I'' = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\int x\frac{-4x}{(x^2+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\int x\, d\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[x\frac{1}{(x^2+1)^2} - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\right] = -\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}I_2$$

Quindi sostituendo:

$$I_3 = I_2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}I_2 = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right] + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + C =$$

$$= \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + C$$

Con procedimento analogo a quello seguito per ricavare la [4.3.2], si può dimostrare che in generale è:

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} \qquad [4.3.4]$$

Si verifichi la formula per il calcolo di I_2 e di I_3 (es. **126**, **127**) e la si usi per calcolare I_4. Con la formula [4.3.4], il calcolo di I_4 è immediato. Infatti:

128. $I_4 = \frac{2\cdot 4-3}{2\cdot 4-2}I_{4-1} + \frac{x}{2(4-1)(x^2+1)^{4-1}} = \frac{5}{6}I_3 + \frac{x}{6(x^2+1)^3} + C$

e sostituendo l'espressione di I_3 già trovata (cfr. es. **127**):

$$I_4 = \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x + \frac{5}{16}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3} + C$$

Il calcolo di I_n non richiede necessariamente la conoscenza di I_{n-1}, come potrebbe sembrare dalla [4.3.4], poiché I_n si può esprimere in funzione del primo integrale noto, ad esempio I_1. Cosicché I_n si calcola direttamente dalle formule:

$$I_n = A_1 \operatorname{arctg} x + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \frac{x}{(x^2+1)^i} + C \qquad [4.3.5]$$

$$A_i = \frac{1}{2i-1}\prod_{k=i}^{n-1}\frac{2k-1}{2k} \qquad [4.3.5\text{-a}]$$

Si verifichino le formule [4.3.5], [4.3.5-a] per $n = 4$ e le si usino per il calcolo di I_5. Dalla [4.3.5] si ha:

$$I_4 = A_1 \operatorname{arctg} x + A_1\frac{x}{x^2+1} + A_2\frac{x}{(x^2+1)^2} + A_3\frac{x}{(x^2+1)^3} + C$$

Dalla [4.3.5-a] si ha:

$$A_1 = \frac{1}{2\cdot 1-1}\cdot\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{16}$$

$$A_2 = \frac{1}{2\cdot 2-1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{24}$$

$$A_3 = \frac{1}{2\cdot 3-1}\cdot\frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Quindi:

$$I_4 = \int \frac{1}{(x^2+1)^4}\,dx = \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x + \frac{5}{16}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3} + C$$

Per il calcolo di I_5 si segua lo stesso procedimento. Dalla [4.3.5] si ha:

129. $I_5 = A_1 \operatorname{arctg} x + A_1\frac{x}{x^2+1} + A_2\frac{x}{(x^2+1)^2} + A_3\frac{x}{(x^2+1)^3} + A_4\frac{x}{(x^2+1)^4} + C$

Dalla [4.3.5-a] si ha:

$$A_1 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8} = \frac{35}{128} \qquad A_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{48}$$

$$A_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8} = \frac{35}{192} \qquad A_4 = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Si ottiene:

$$I_5 = \int \frac{1}{(x^2+1)^5}\,dx =$$

$$= \frac{35}{128}\operatorname{arctg} x + \frac{35}{128}\frac{x}{x^2+1} + \frac{35}{192}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{7}{48}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+1)^4} + C$$

4.4.- Integrali di tipo: a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-a^2)^n}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$

Questi tre tipi di integrali sono riconducibili agli integrali visti nel paragrafo precedente.

$\boxed{\text{TIPO a}}$

$$(x^2-a^2)^n = a^{2n}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right]^n \qquad dx = a\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

quindi:

$$\int \frac{1}{(x^2-a^2)^n}\,dx = \int \frac{a}{a^{2n}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right]^n}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right]^n}\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ponendo $\dfrac{x}{a}=t$ il calcolo si riduce a quello di: $\displaystyle\frac{1}{a^{2n-1}}\int \frac{1}{(t^2-1)^n}\,dt$

$\boxed{\text{TIPO b}}$

$$(x^2+a^2)^n = a^{2n}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]^n \qquad dx = a\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

quindi:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{a}{a^{2n}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]^n}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right]^n}\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

Ponendo $\dfrac{x}{a}=t$ il calcolo si riduce a quello di: $\displaystyle\frac{1}{a^{2n-1}}\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$

$\boxed{\text{TIPO c}}$

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-b^2) =$$

$$= \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)] = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-\Delta]$$

1) Se è $\Delta>0$, si pone: $2ax+b=t$, $b^2-4ac=k^2$. Allora:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}(t^2-k^2) \quad\rightarrow\quad (ax^2+bx+c)^n = \left(\frac{1}{4a}\right)^n\cdot(t^2-k^2)^n$$

In questo caso l'integrale viene ricondotto ad uno di tipo a.

2) Se è $\Delta=0$, si ha: $ax^2+bx+c = \dfrac{1}{4a}(2ax+b)^2$. Pertanto:

$$(ax^2+bx+c)^n = \left(\frac{1}{4a}\right)^n\cdot(2ax+b)^{2n}$$

In questo caso l'integrale diventa quello di una funzione di funzione lineare di x (cfr. §2.6).

3) Se è $\Delta<0$, si ha:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-\Delta] = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+(-\Delta)]$$

Essendo $-\Delta>0$, si ponga: $2ax+b=t$, $-\Delta=k^2$. Allora:

$$(ax^2+bx+c)^n = \left(\frac{1}{4a}\right)^n[(2ax+b)^2+(-\Delta)]^n = \left(\frac{1}{4a}\right)^n(t^2+k^2)^n$$

In questo caso l'integrale viene ricondotto ad uno di tipo b.

4.5.- Esercizi proposti

130. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2-2)^4}\,dx$ **133.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+3)^3}\,dx$ **136.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-3x+2)^4}\,dx$

131. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-3)^3}\,dx$ **134.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ **137.** $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^5}\,dx$

132. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2)^4}\,dx$ **135.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

130. $$I = \int \frac{x-1}{(x^2-2)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2-2)^4}\,dx - \int \frac{1}{(x^2-2)^4}\,dx = \frac{1}{2}I' - I''$$

$$I' = \int \frac{1}{(x^2-2)^4}\,d(x^2-2) = \frac{(x^2-2)^{-3}}{-3} + C_1 = -\frac{1}{3(x^2-2)^3} + C_1$$

$$I'' = \int \frac{1}{(x^2-2)^4}\,dx = \frac{1}{2^4}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-1\right]^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2-1\right]^4}\,d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\int \frac{1}{(t^2-1)^4}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{16}I_4 \quad \text{con} \quad t = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

L'integrale I_4 è stato già calcolato mediante le formule [4.3.3]. Si ha quindi:

$$I_4 = -\frac{5}{32}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{5}{16}\cdot\frac{t}{t^2-1} + \frac{5}{24}\cdot\frac{t}{(t^2-1)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{t}{(t^2-1)^3} + C_2 =$$

$$= -\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{5}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}x}{x^2-2} + \frac{5}{12}\cdot\frac{\sqrt{2}x}{(x^2-2)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}x}{(x^2-2)^3} + C_2$$

Sostituendo:

$$I = \frac{1}{2}I' - I'' = -\frac{1}{6(x^2-2)^3} - \frac{\sqrt{2}}{16}\left[-\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{5}{16}\cdot\frac{\sqrt{2}x}{x^2-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{12}\cdot\frac{\sqrt{2}x}{(x^2-2)^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}x}{(x^2-2)^3}\right] + C =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{512}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{5}{128}\cdot\frac{x}{x^2-2} - \frac{5}{96}\cdot\frac{x}{(x^2-2)^2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{x-2}{(x^2-2)^3} + C$$

131. $$I=\int\frac{x^2}{(x^2-3)^3}dx = \int\frac{x^2-3+3}{(x^2-3)^3}dx = \int\frac{1}{(x^2-3)^2}dx + 3\int\frac{1}{(x^2-3)^3}dx =$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right]^2}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{27}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right]^3}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}I_2+\frac{\sqrt{3}}{9}I_3=\frac{\sqrt{3}}{9}(I_2+I_3)$$

Ponendo $t=\frac{x}{\sqrt{3}}$, dalla formula [4.3.2] si ha:

$$I_3=-\frac{3}{4}I_2-\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t^2-1)^2}$$

Quindi:

$$I=\frac{\sqrt{3}}{9}\left[I_2-\frac{3}{4}I_2-\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t^2-1)^2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{36}\left[I_2-\frac{t}{(t^2-1)^2}\right]$$

Dall'esercizio **122**:

$$I_2=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2-1}+C_1$$

Quindi:

$$I=\frac{\sqrt{3}}{36}\left[-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2-1}-\frac{t}{(t^2-1)^2}\right]+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{144}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{24}\cdot\frac{x}{x^2-3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2-3)^2}+C$$

132. $$I=\int\frac{x+1}{(x^2+2)^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+2)^4}dx+\int\frac{1}{(x^2+2)^4}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+2)^4}d(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]^4}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^2+2)^3}+\frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{dt}{(t^2+1)^4}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^2+2)^3}+\frac{\sqrt{2}}{16}I_4 \quad\text{con}\quad t=\frac{x}{\sqrt{2}}$$

I_4 è stato già calcolato al §4.3 mediante le formule [4.3.5], [4.3.5-a]:

$$I_4=\int\frac{1}{(t^2+1)^4}dt=$$

$$=\frac{5}{16}\operatorname{arctg}t+\frac{5}{16}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\frac{5}{24}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^3}+C_1=$$

$$=\frac{5}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{x}{x^2+2}+\frac{5\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{x}{(x^2+2)^2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{x}{(x+2)^3}+C_1$$

Quindi:

$$I=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x^2+2)^3}+\frac{\sqrt{2}}{16}I_4=$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{256}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{5}{128}\cdot\frac{x}{x^2+2}+\frac{5}{96}\cdot\frac{x}{(x^2+2)^2}+\frac{1}{12}\cdot\frac{x-2}{(x^2+2)^3}+C$$

133. $$I=\int\frac{x^2}{(x^2+3)^3}dx=\int\frac{x^2+3-3}{(x^2+3)^3}dx=\int\frac{1}{(x^2+3)^2}dx-3\int\frac{1}{(x^2+3)^3}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^3}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt-\frac{\sqrt{3}}{9}\int\frac{1}{(t^2+1)^3}dt=\frac{\sqrt{3}}{9}(I_2-I_3)\quad\text{con}\quad t=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Dalla formula [4.3.4] si ha: $I_3=\frac{3}{4}I_2+\frac{t}{4(t^2+1)^2}$. Pertanto:

$$I=\frac{\sqrt{3}}{9}\left[I_2-\frac{3}{4}I_2-\frac{t}{4(t^2+1)^2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{36}\left[I_2-\frac{t}{(t^2+1)^2}\right]$$

I_2 è stato calcolato nell'esempio **126**:

$$I_2=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+C_1$$

$$I=\frac{\sqrt{3}}{36}\left[\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}-\frac{t}{(t^2+1)^2}\right]+C=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{72}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{24}\cdot\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+3)^2}+C$$

134. $$I=\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}[(2x+1)^2+3]=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$$

$$I=\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int\frac{1}{t^2+1}dt\quad\text{con}\quad t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$I=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

135. $I=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

Essendo $x^2+2x+2=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1$ si ha:

$$I=\int\frac{1}{[(x+1)^2+1]^2}\,d(x+1)=\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt=I_2\quad \text{con } t=x+1$$

I_2 è stato calcolato nell'esempio **126**:

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+C$$

136. $I=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2-3x+2)^4}\,dx$

$$(x^2-3x+2)^4=\left[\frac{1}{4}(4x^2-12x+9-1)\right]^4=\frac{1}{2^8}[(2x-3)^2-1]^4$$

$$I=\frac{2^8}{2}\int\frac{1}{[(2x-3)^2-1]^4}\,d(2x-3)=2^7\int\frac{1}{(t^2-1)^4}\,dt=2^7 I_4$$

con $t=2x-3$. I_4 è stato già calcolato al §4.3 con le formule [4.3.3] e [4.3.3-a].

$$I=2^7 I_4=$$

$$=2^7\left[-\frac{5}{32}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{5}{16}\cdot\frac{t}{t^2-1}+\frac{5}{24}\cdot\frac{t}{(t^2-1)^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{t}{(t^2-1)^3}\right]+C=$$

$$=-20\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|-10\frac{2x-3}{x^2-3x+2}+\frac{5}{3}\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}-\frac{1}{3}\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}+C$$

137. $I=\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^5}\,dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}}\,dx=\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-9}}{-9}+C=-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^9}+C$$

5 - INTEGRAZIONE DI FUNZIONI TRASCENDENTI

5.1.- Integrazione di funzioni trigonometriche

Sia $F(\operatorname{sen} x,\cos x,\operatorname{tg} x)$ una funzione di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ con F simbolo di funzione razionale, cioè i legami tra le funzioni seno, coseno, tangente siano di tipo razionale, ad esempio:

$$\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\qquad\frac{1}{\cos x}\qquad\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\qquad\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\qquad(\operatorname{sen} x-1)\operatorname{tg} x$$

L'integrale di una funzione di questo tipo si riconduce a quello di una funzione razionale mediante la posizione:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ \rightarrow\ x=2\operatorname{arc\,tg} t\ \rightarrow\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.\quad\text{Si ricordi che è:}\quad\begin{cases}\operatorname{sen} x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\[2mm]\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\[2mm]\operatorname{tg} x\ =\dfrac{2t}{1-t^2}\end{cases}$$

Esempi di applicazione.

138. $\displaystyle\int\frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$

139. $\displaystyle\int\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=2\int\frac{1}{(1+t)^2}\,dt=$

$$=2\int(1+t)^{-2}\,d(1+t)=-\frac{2}{1+t}+C=-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$$

140. $I=\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx=$ [seguendo il metodo generale] $\displaystyle=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=$

$$=\int\frac{2t}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=4\int\frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt=4I'$$

$$\frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$=\frac{A(1+t)(1+t^2)+B(1+t^2)+(Ct+D)(1+t)^2}{(1+t)^2(1+t^2)}=$$

$$= \frac{A + At + At^2 + At^3 + B + Bt^2 + Ct + 2Ct^2 + Ct^3 + D + 2Dt + Dt^2}{(1+t)^2(1+t^2)}$$

Dal confronto con il primo membro segue:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 0 \\ A + C + 2D = 1 \\ A + B + D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1/2 \\ C = 0 \\ D = 1/2 \end{cases}$$

$$I' = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t =$$

$$= \left[\text{essendo } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \frac{x}{4} + C_1 = \frac{1}{4}\left[x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right] + C_1$$

Sostituendo:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = 4I' = x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

ALTRO METODO:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + 1 - 1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx = [\text{cfr. es. 139}] = x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

141. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

In questo caso non conviene applicare il metodo generale suggerito perché l'integrale dato si può scrivere nella forma:

$$-\int \frac{d(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen} x} = -\ln(1-\operatorname{sen} x) + C = \ln\frac{1}{1-\operatorname{sen} x} + C$$

È chiaro quindi da questo esempio che la razionalizzazione di $F(\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tg} x)$ mediante la posizione $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ va fatta quando non è evidente alcun particolare artificio che semplifichi i calcoli.

142. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}\,dx$

Con il metodo generale si ha:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2-1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t(1-t^2)}$$

che è facile da integrare.

Alla soluzione si può arrivare anche ponendo: $\cos x = z \rightarrow -\operatorname{sen} x\,dx = dz$.

Dividendo membro a membro queste due relazioni si ha: $-\operatorname{tg} x\,dx = \dfrac{dz}{z}$ e quindi:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{1-z}\cdot\frac{dz}{z} = -\int \frac{1}{z(1-z)}\,dz = -\int\frac{dz}{z} - \int\frac{1}{1-z}\,dz =$$

$$= -\ln|z| + \ln(1-z) + C = \ln\frac{1-z}{|z|} + C = \ln\frac{1-\cos x}{|\cos x|} + C$$

Si può seguire questo procedimento tutte le volte che l'elemento differenziale [cioè $F(x)\,dx$] non varia mutando x in $-x$ (1). Nel caso in esame si ha:

$$\frac{\operatorname{tg}(-x)\,d(-x)}{1-\cos(-x)} = \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1-\cos x}$$

143. $\displaystyle I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}\,dx$

a) METODO GENERALE:

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t(1-t^2)^2}\,dt$$

Si integra come funzione razionale fratta.

b) ALTRO METODO:

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,d(\operatorname{tg} x) = [\text{per parti}] = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\cdot\left(-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = [\text{cfr. es. 138}] = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

c) ALTRO METODO:

Essendo $\dfrac{d(-x)}{\operatorname{sen}(-x)\cos^2(-x)} = \dfrac{-dx}{-\operatorname{sen} x\cos^2 x} = \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}$, si può porre:

$$\cos x = z \rightarrow -\operatorname{sen} x\,dx = dz \rightarrow dx = -\frac{dz}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos^2 x} = -\frac{dz}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x} = -\frac{dz}{(1-z^2)z^2} = -\frac{1-z^2+z^2}{(1-z^2)z^2}\,dz =$$

$$= \left(-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{1-z^2}\right)dz$$

Quindi:

(1) Cfr. §1.7.

$$I=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos^2 x}=-\int\frac{1}{z^2}\,dz-\int\frac{1}{1-z^2}\,dz=\frac{1}{z}-\operatorname{Sett\,Th}z+C=$$

$$=\frac{1}{\cos x}-\operatorname{Sett\,Th}\cos x+C\quad[1]$$

L'uguaglianza di questo risultato con quello ottenuto in b) è evidente, dato che è:

$$\operatorname{Sett\,Th}\cos x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\right|=\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|=-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

144. $I=\displaystyle\int\frac{\cos x}{\cos^2 x-4\operatorname{sen}x-6}\,dx$

a) METODO GENERALE:

$$\frac{\cos x}{\cos^2 x-4\operatorname{sen}x-6}\,dx=\frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{\dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}-4\dfrac{2t}{1+t^2}-6}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{1-2t^2+t^4-8t-8t^3-6-12t^2-6t^4}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=2\frac{t^2-1}{5t^4+8t^3+14t^2+8t+5}\,dt$$

L'integrale è stato reso razionale, ma il suo calcolo non è agevole.

b) METODO CONSIGLIATO:

$$I=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x-4\operatorname{sen}x-6}\,dx=\int\frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}x-6}\,d(\operatorname{sen}x)=$$

$$=[\text{posto }\operatorname{sen}x=z]=\int\frac{1}{-z^2-4z-5}\,dz=-\int\frac{1}{z^2+4z+4+1}\,dz=$$

$$=-\int\frac{1}{(z+2)^2+1}\,d(z+2)=-\operatorname{arc\,tg}(z+2)+C=-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}x+2)+C$$

La posizione $\operatorname{sen}x=z$ è possibile tutte le volte che l'elemento differenziale $[F(x)\,dx]$ non muta cambiando x in $\pi-x$. Nel nostro caso è:

$$\frac{\cos(\pi-x)\,d(\pi-x)}{\cos^2(\pi-x)-4\operatorname{sen}(\pi-x)-6}=\frac{-\cos x(-dx)}{\cos^2 x-4\operatorname{sen}x-6}=\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x-4\operatorname{sen}x-6}$$

145. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{sen}x}\,dx$

Essendo $\displaystyle\frac{\operatorname{tg}(\pi-x)}{1-\operatorname{sen}(\pi-x)}\,d(\pi-x)=\frac{-\operatorname{tg}x(-dx)}{1-\operatorname{sen}x}=\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{sen}x}\,dx$ si pone

$$\operatorname{sen}x=z\ \rightarrow\ \cos x\,dx=dz\ \rightarrow\ dx=\frac{dz}{\cos x}$$

[1] Essendo $z=\cos x$ ne segue $-1\leqslant z\leqslant 1$, quindi è $\displaystyle\int\frac{1}{1-z^2}\,dz=\operatorname{Sett\,Th}z+C$

$$\int\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{sen}x}\,dx=\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x(1-\operatorname{sen}x)}\,dx=\int\frac{z}{\cos x(1-z)}\cdot\frac{dz}{\cos x}=$$

$$=\int\frac{z\,dz}{\cos^2 x(1-z)}=\int\frac{z\,dz}{(1-z^2)(1-z)}=\int\frac{z\,dz}{(1-z)^2(1+z)}$$

$$\frac{z}{(1-z)^2(1+z)}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{(1-z)^2}+\frac{C}{1+z}=$$

$$=\frac{A-Az^2+B+Bz+C-2Cz+Cz^2}{(1-z)^2(1+z)}$$

$$=\frac{(C-A)z^2+(B-2C)z+A+B+C}{(1-z)^2(1+z)}$$

Dal confronto tra i membri estremi si ha:

$$\begin{cases}-A+C=0\\ B-2C=1\\ A+B+C=0\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}A=-1/4\\ B=1/2\\ C=-1/4\end{cases}$$

$$\int\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{sen}x}\,dx=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1-z}\,dz+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-z)^2}\,dz-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(1-z)+\frac{1}{2(1-z)}-\frac{1}{4}\ln(1+z)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1-z}{1+z}+\frac{1}{2(1-z)}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}+\frac{2}{1-\operatorname{sen}x}\right)+C$$

146. $\displaystyle\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$

a) METODO GENERALE:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx=\frac{\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{(1-t^2)^6}{(1+t^2)^6}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{(1+t^2)^6}{(1-t^2)^6}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\frac{8t^2(1+t^2)^3}{(1-t^2)^6}\,dt$$

L'integrale di questa funzione razionale fratta è di soluzione molto laboriosa.

b) METODO CONSIGLIATO:

Posto $\operatorname{tg}x=z\ \rightarrow\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx=dz$, si ha:

$$\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx=\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg}^2 x+1)\,dz=$$

$$=\int z^2(z^2+1)\,dz=\int(z^4+z^2)\,dz=\frac{z^5}{5}+\frac{z^3}{3}+C=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$$

La posizione $\operatorname{tg} x = z$ è possibile tutte le volte che l'elemento differenziale $[F(x)\,dx]$ non muta cambiando x in $\pi + x$. Nel nostro caso è:

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\pi+x)}{\cos^6(\pi+x)}\,d(\pi+x) = \frac{(-\operatorname{sen}x)^2}{(-\cos x)^6}\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}\,dx$$

147. $I=\displaystyle\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2\cos x+\operatorname{sen} x}\,dx$

$$\frac{\cos(\pi+x)-\operatorname{sen}(\pi+x)}{2\cos(\pi+x)+\operatorname{sen}(\pi+x)}\,d(\pi+x) = \frac{-\cos x+\operatorname{sen}x}{-2\cos x-\operatorname{sen}x} = \frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{2\cos x+\operatorname{sen}x}\,dx$$

Si pone $\operatorname{tg} x = z \rightarrow (\operatorname{tg}^2 x+1)\,dx = dz \rightarrow dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$

$$\int\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{2\cos x+\operatorname{sen}x}\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{dividendo numeratore e}\\ \text{denominatore per } \cos x\end{array}\right] = \int\frac{1-\operatorname{tg}x}{2+\operatorname{tg}x}\,dx = \int\frac{1-z}{2+z}\cdot\frac{dz}{1+z^2}$$

$$\frac{1-z}{(2+z)(1+z^2)} = \frac{A}{2+z}+\frac{Bz+C}{1+z^2} = \frac{A+Az^2+2Bz+Bz^2+2C+Cz}{(2+z)(1+z^2)} =$$
$$= \frac{(A+B)z^2+(2B+C)z+A+2C}{(2+z)(1+z^2)}$$

Confrontando i membri estremi si ha:

$$\begin{cases}A+B=0\\ 2B+C=-1\\ A+2C=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}A+B=0\\ -A+4B=-3\\ A+2C=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}A=3/5\\ B=-3/5\\ C=1/5\end{cases}$$

$$I=\frac{3}{5}\int\frac{1}{2+z}\,dz-\frac{1}{5}\int\frac{3z-1}{1+z^2}\,dz=$$
$$=\frac{3}{5}\int\frac{1}{2+z}\,d(2+z)-\frac{3}{10}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+z^2}\,dz=$$
$$=\frac{3}{5}\ln|2+z|-\frac{3}{10}\ln(1+z^2)+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}z+C=$$
$$=\frac{1}{5}\left(3\ln\frac{|2+z|}{\sqrt{1+z^2}}+\operatorname{arctg}z\right)+C=\frac{1}{5}\left(3\ln\frac{|2+\operatorname{tg}x|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}+x\right)+C=$$
$$=\frac{1}{5}(3\ln|2\cos x+\operatorname{sen}x|+x)+C$$

A conclusione del paragrafo, si osservi che, in generale, per integrare una funzione del tipo $F(\operatorname{sen}x,\cos x,\operatorname{tg}x)$ si pone $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. In particolare, se è:

$F(-x)\,d(-x)=F(x)\,dx$ si pone $\cos x=z$

$F(\pi-x)\,d(\pi-x)=F(x)\,dx$ si pone $\operatorname{sen}x=z$

$F(\pi+x)\,d(\pi+x)=F(x)\,dx$ si pone $\operatorname{tg}x=z$

5.2.- Integrali del tipo: $I_n=\int\operatorname{sen}^n x\,dx$

Questi integrali possono essere resi razionali con la posizione $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, ma gli integrali di funzione razionale ottenuti sono sempre di difficile soluzione. Indichiamo altri metodi d'integrazione sia per n dispari che per n pari.

1) n dispari:

$I_1=\int\operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+C$

148. $I_3=\int\operatorname{sen}^3x\,dx=\int\operatorname{sen}^2x\operatorname{sen}x\,dx=-\int\operatorname{sen}^2x\,d(\cos x)=-\int(1-\cos^2x)\,d(\cos x)=$
$$=-\int d(\cos x)+\int\cos^2x\,d(\cos x)=-\cos x+\frac{\cos^3x}{3}+C$$

Questo stesso metodo si può applicare per qualunque n dispari. Infatti:

149. $I_7=\int\operatorname{sen}^7x\,dx=\int\operatorname{sen}^6x\operatorname{sen}x\,dx=-\int\operatorname{sen}^6x\,d(\cos x)=-\int(1-\cos^2x)^3\,d(\cos x)=$
$$=-\int(1-3\cos^2x+3\cos^4x-\cos^6x)\,d(\cos x)=$$
$$=-\cos x+\cos^3x-\frac{3}{5}\cos^5x+\frac{1}{7}\cos^7x+C$$

150. $I=\int(x+1)\operatorname{sen}^5(x^2+2x+3)\,dx=\dfrac{1}{2}\int\operatorname{sen}^5(x^2+2x+3)\,d(x^2+2x+3)$

Ponendo $x^2+2x+3=t$ si ha:

$$I=\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}^5t\,dt=-\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}^4t\,d(\cos t)=-\frac{1}{2}\int(1-\cos^2t)^2\,d(\cos t)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos t-\frac{2}{3}\cos^3t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)+C=$$
$$=-\frac{1}{2}\cos(x^2+2x+3)+\frac{1}{3}\cos^3(x^2+2x+3)-\frac{1}{10}\cos^5(x^2+2x+3)+C$$

Il metodo ora visto per calcolare $I_n=\int\operatorname{sen}^nx\,dx$ si presta bene per n dispari non molto grande; per n grande è necessario conoscere lo sviluppo della potenza $(1-\cos^2x)^{n-1}$.

2) n pari:

$I_2=\int\operatorname{sen}^2x\,dx=\dfrac{1}{2}(x-\operatorname{sen}x\cos x)+C$ [cfr. es. 86]

151. $I_4=\int\operatorname{sen}^4x\,dx=\int\operatorname{sen}^3x\operatorname{sen}x\,dx=-\int\operatorname{sen}^3x\,d(\cos x)=$ [per parti] $=$
$$=-[\operatorname{sen}^3x\cos x-\int\cos x\,d(\operatorname{sen}^3x)]=-\operatorname{sen}^3x\cos x+3\int\cos^2x\operatorname{sen}^2x\,dx=$$
$$=-\operatorname{sen}^3x\cos x+3I'$$

$$I'=\int(1-\operatorname{sen}^2x)\operatorname{sen}^2x\,dx=\int\operatorname{sen}^2x\,dx-\int\operatorname{sen}^4x\,dx=\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen}x\cos x)-I_4$$

Sostituendo si ha:

$$I_4=-\operatorname{sen}^3x\cos x+\frac{3}{2}(x-\operatorname{sen}x\cos x)-3I_4$$

e ricavando I_4:

$$I_4 = -\frac{1}{4}\,\text{sen}^3 x\cos x - \frac{3}{8}\,\text{sen}\, x\cos x + \frac{3}{8}x + C$$

Questo stesso metodo può essere applicato per qualunque n pari. Infatti si calcoli:

152. $I_6 = \int \text{sen}^6 x\,dx = -\int \text{sen}^5 x\,d(\cos x) =$ [per parti] $= -\text{sen}^5 x\cos x + \int \cos x\, d(\text{sen}^5 x) =$

$$= -\text{sen}^5 x \cos x + 5\int \cos^2 x\,\text{sen}^4 x\,dx = -\text{sen}^5 x\cos x + 5\int(1-\text{sen}^2 x)\,\text{sen}^4 x\,dx =$$

$$= -\text{sen}^5 x\cos x + 5\int \text{sen}^4 x\,dx - 5\int\text{sen}^6 x\,dx = -\text{sen}^5 x\cos x + 5I_4 - 5I_6$$

Isolando I_6 si ha:

$$I_6 = -\frac{1}{6}\,\text{sen}^5 x\cos x + \frac{5}{6} I_4 = \text{[cfr. es. 151]} =$$

$$= -\frac{1}{6}\,\text{sen}^5 x\cos x - \frac{5}{24}\,\text{sen}^3 x\cos x - \frac{5}{16}\,\text{sen}\,x\cos x + \frac{5}{16}x + C$$

153. $I = \int x\,\text{sen}^4(x^2-1)\,dx$

$$I = \frac{1}{2}\int 2x\,\text{sen}^4(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int\text{sen}^4(x^2-1)\,d(x^2-1) = \frac{1}{2}\int\text{sen}^4 t\,dt = \frac{1}{2} I_4$$

[con $t = x^2-1$]

Dall'esempio **151**, sostituendo a I_4 si ottiene:

$$I = \frac{1}{2} I_4 = -\frac{1}{8}\,\text{sen}^3 t\cos t - \frac{3}{16}\,\text{sen}\,t\cos t + \frac{3}{16}t + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\,\text{sen}^3(x^2-1)\cos(x^2-1) - \frac{3}{16}\,\text{sen}(x^2-1)\cos(x^2-1) + \frac{3}{16}(x^2-1) + C$$

Riepilogando: per il calcolo degli integrali del tipo $I_n = \int\text{sen}^n x\,dx$ in generale si procede:
come negli esempi **148, 149, 150** quando n è dispari;
come negli esempi **151, 152, 153** quando n è pari.

Naturalmente esistono altri metodi d'integrazione sia nell'uno che nell'altro caso. Questi altri metodi non sempre semplificano i calcoli.

Per n dispari si può integrare per parti. Si calcoli ad esempio:

$$\int\text{sen}^3 x\,dx = \int\text{sen}^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = -\int\text{sen}^2 x\,d(\cos x) =$$

$$= -\text{sen}^2 x\cos x + \int\cos x\,d(\text{sen}^2 x) = -\text{sen}^2 x\cos x + 2\int\text{sen}\,x\cos^2 x\,dx =$$

$$= -\text{sen}^2 x\cos x - 2\int\cos^2 x\,d(\cos x) = -\text{sen}^2 x\cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3} + C =$$

$$= -(1-\cos^2 x)\cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

Il risultato è identico a quello ottenuto nell'esempio **148**. Si osservi che in questo caso i calcoli non vengono semplificati.

Per n pari si può procedere come nel seguente esempio.

$$I_4 = \int\text{sen}^4 x\,dx$$

Dalle formule di bisezione: $\text{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ $\quad$ si ha:

$$I_4 = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int\cos 2x\,dx + \int\cos^2 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \int\cos 2x\,d(2x) + \int\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\right] + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \text{sen}\,2x + \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,4x}{8}\right) + C = \frac{1}{8}\left(3x - 2\,\text{sen}\,2x + \frac{\text{sen}\,2x\cos 2x}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}[3x - 4\,\text{sen}\,x\cos x + \text{sen}\,x\cos x\cdot(1-2\,\text{sen}^2 x)] + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\text{sen}^3 x\cos x - \frac{3}{8}\,\text{sen}\,x\cos x + \frac{3}{8} x + C \quad \text{[cfr. es. 151]}$$

Dagli esempi visti si rileva che in ogni caso si può integrare per parti. Così, integrando I_n, si giunge ad una importante formula di riduzione che mette in relazione I_n con I_{n-2}:

$$I_n = \int\text{sen}^n x\,dx = \int\text{sen}^{n-1}x\,\text{sen}\,x\,dx = -\int\text{sen}^{n-1}x\,d(\cos x) =$$

$$= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + \int\cos x\,d(\text{sen}^{n-1}x) =$$

$$= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + \int(n-1)\cos^2 x\,\text{sen}^{n-2}x\,dx =$$

$$= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int(1-\text{sen}^2 x)\,\text{sen}^{n-2}x\,dx =$$

$$= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)\int\text{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int\text{sen}^n x\,dx =$$

$$= -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Da questa si ricava:

$$I_n + (n-1)I_n = -\text{sen}^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = -\frac{1}{n}\,\text{sen}^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad [5.2.1]$$

Usiamo la formula [5.2.1] per la verifica di I_3 (cfr. es. **148**) e per il calcolo di I_8:

$$I_3 = -\frac{1}{3}\,\text{sen}^2 x\cos x + \frac{2}{3} I_1 = \left[\text{essendo } I_1 = \int\text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C_1\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\text{sen}^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C = -\frac{1}{3}(1-\cos^2 x)\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C =$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\cos x - \frac{2}{3}\cos x + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C \quad \text{[cfr. es. 148]}$$

154. $I_8 = \int\text{sen}^8 x\,dx$

Con la formula [5.2.1] si ha: $\quad I_8 = -\dfrac{1}{8}\,\text{sen}^7 x\cos x + \dfrac{7}{8} I_6$

e sostituendo a I_6 il risultato dell'es. **152**:

$$I_8 = -\frac{1}{8}\,\text{sen}^7 x\cos x - \frac{7}{48}\,\text{sen}^5 x\cos x - \frac{35}{192}\,\text{sen}^3 x\cos x - \frac{35}{128}\,\text{sen}\,x\cos x + \frac{35}{128}x + C$$

Il calcolo di I_n non richiede necessariamente la conoscenza di I_{n-2}, come potrebbe sembrare dalla [5.2.1], poiché I_n si può esprimere in funzione del primo integrale noto:

I_0 se n è pari

I_1 se n è dispari

Cosicché I_n si calcola direttamente dalle formule:

1) $n\,[\text{pari}] = 2m \;\rightarrow\; m = \dfrac{n}{2}$

$$I_n = I_{2m} = \int \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = A_1 x - \sum_{i=1}^{m} A_i \operatorname{sen}^{2i-1} x \cos x + C \qquad [5.2.2]$$

con
$$A_i = \frac{1}{2i-1}\prod_{k=i}^{m}\frac{2k-1}{2k} \qquad [5.2.2\text{-a}]$$

2) $n\,[\text{dispari}] = 2m+1 \;\rightarrow\; m = \dfrac{n-1}{2}$

$$I_n = I_{2m+1} = \int \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{i+1}}{2i+1}\binom{m}{i}\cos^{2i+1} x + C \qquad [5.2.3]$$

Verifichiamo queste formule per $n = 4$ ed $n = 7$ ed impieghiamole per il calcolo di I_{10} ed I_{11}.

$$I_4 = \int \operatorname{sen}^4 x\,dx \qquad [n = 4 \quad m = 2]$$

Dalla [5.2.2] si ha: $I_4 = A_1 x - A_1 \operatorname{sen} x \cos x - A_2 \operatorname{sen}^3 x \cos x + C$

e dalla [5.2.2-a]:

$$A_1 = \frac{1}{2\cdot 1-1}\cdot\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$A_2 = \frac{1}{2\cdot 2-1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Quindi:
$$I_4 = \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + C$$

Per il calcolo di I_7, dalla formula [5.2.3] ove è $m = \dfrac{7-1}{2} = 3$, si ha:

$$I_7 = \int \operatorname{sen}^7 x\,dx =$$
$$= -\binom{3}{0}\cos x + \frac{1}{2\cdot 1+1}\binom{3}{1}\cos^3 x - \frac{1}{2\cdot 2+1}\binom{3}{2}\cos^5 x + \frac{1}{2\cdot 3+1}\binom{3}{3}\cos^7 x + C =$$
$$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Calcoliamo I_{10}. Dalla [5.2.2], ove è $m = 5$, si ha:

155. $I_{10} = \int \operatorname{sen}^{10} x\,dx = A_1 x - A_1 \operatorname{sen} x\cos x - A_2 \operatorname{sen}^3 x\cos x - A_3 \operatorname{sen}^5 x\cos x +$
$- A_4 \operatorname{sen}^7 x\cos x - A_5 \operatorname{sen}^9 x\cos x + C$

Dalla [5.2.2-a] si ha:

$$A_1 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{63}{256} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{21}{128}$$

$$A_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{21}{160} \qquad A_4 = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{80} \qquad A_5 = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Quindi:

$$I_{10} = \frac{63}{256}x - \frac{63}{256}\operatorname{sen} x\cos x - \frac{21}{128}\operatorname{sen}^3 x\cos x - \frac{21}{160}\operatorname{sen}^5 x\cos x +$$
$$- \frac{9}{80}\operatorname{sen}^7 x\cos x - \frac{1}{10}\operatorname{sen}^9 x\cos x + C$$

Con la [5.2.3] calcoliamo ora I_{11} ($m = 5$).

156. $I_{11} = \int \operatorname{sen}^{11} x\,dx = -\binom{5}{0}\cos x + \frac{1}{3}\binom{5}{1}\cos^3 x - \frac{1}{5}\binom{5}{2}\cos^5 x + \frac{1}{7}\binom{5}{3}\cos^7 x +$
$$- \frac{1}{9}\binom{5}{4}\cos^9 x + \frac{1}{11}\binom{5}{5}\cos^{11} x + C =$$
$$= -\cos x + \frac{5}{3}\cos^3 x - 2\cos^5 x + \frac{10}{7}\cos^7 x - \frac{5}{9}\cos^9 x + \frac{1}{11}\cos^{11} x + C$$

5.3.- Integrali del tipo: $I_n = \int \cos^n x\,dx$

Per gli integrali di questo tipo vale ancora quanto è stato detto per quelli del tipo $I_n = \int \operatorname{sen}^n x\,dx$, cioè essi possono essere resi razionali con la sostituzione $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

Indichiamo altri metodi d'integrazione sia per n dispari che per n pari.

1) n dispari:

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

157. $I_3 = \int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x\cos x\,dx = \int \cos^2 x\,d(\operatorname{sen} x) = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x) =$
$$= \int d(\operatorname{sen} x) - \int \operatorname{sen}^2 x\,d(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

158. $I_5 = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\,d(\operatorname{sen} x) = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2\,d(\operatorname{sen} x) =$
$$= \int d(\operatorname{sen} x) - 2\int \operatorname{sen}^2 x\,d(\operatorname{sen} x) + \int \operatorname{sen}^4 x\,d(\operatorname{sen} x) =$$
$$= \operatorname{sen} x - 2\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

159. $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^7(\sqrt{x}+1)\,dx = 2\int \cos^7(\sqrt{x}+1)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$
$$= 2\int \cos^7(\sqrt{x}+1)\,d(\sqrt{x}+1) = 2\int \cos^7 t\,dt = 2I_7 \quad \text{con} \quad \sqrt{x}+1 = t$$
$$I_7 = \int \cos^6 t\,d(\operatorname{sen} t) = \int (1 - \operatorname{sen}^2 t)^3\,d(\operatorname{sen} t) =$$

$$= \int (1 - 3\,\mathrm{sen}^2 t + 3\,\mathrm{sen}^4 t - \mathrm{sen}^6 t)\, d(\mathrm{sen}\, t) =$$
$$= \mathrm{sen}\, t - 3\,\frac{\mathrm{sen}^3 t}{3} + 3\,\frac{\mathrm{sen}^5 t}{5} - \frac{\mathrm{sen}^7 t}{7} + C_1$$

$$I = 2\,\mathrm{sen}(\sqrt{x} + 1) - 2\,\mathrm{sen}^3(\sqrt{x} + 1) + \frac{6}{5}\mathrm{sen}^5(\sqrt{x} + 1) - \frac{2}{7}\mathrm{sen}^7(\sqrt{x} + 1) + C$$

Il metodo usato per calcolare $I_n = \int \cos^n x\, dx$ si presta bene per n (dispari) non molto grande. Se n fosse grande diventerebbe necessaria la conoscenza dello sviluppo della potenza $(1 - \mathrm{sen}^2 x)^{n-1}$.

2) n pari:

$$I_2 = \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \mathrm{sen}\, x \cos x) + C = \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$$

160. $I_4 = \int \cos^4 x\, dx = \int \cos^3 x \cos x\, dx = \int \cos^3 x\, d(\mathrm{sen}\, x) =$ [per parti] $=$
$$= \cos^3 x\, \mathrm{sen}\, x - \int \mathrm{sen}\, x\, d(\cos^3 x) = \cos^3 x\, \mathrm{sen}\, x + 3\int \mathrm{sen}^2 x \cos^2 x\, dx =$$
$$= \cos^3 x\, \mathrm{sen}\, x + 3I'$$
$$I' = \int \mathrm{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^4 x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}(x + \mathrm{sen}\, x \cos x) - I_4$$

Sostituendo si ha:

$$I_4 = \cos^3 x\, \mathrm{sen}\, x + \frac{3}{2}\mathrm{sen}\, x \cos x + \frac{3}{2}x - 3I_4$$

Infine:

$$I_4 = \frac{1}{4}\cos^3 x\, \mathrm{sen}\, x + \frac{3}{8}\mathrm{sen}\, x \cos x + \frac{3}{8}x + C$$

Questo stesso metodo si può applicare per qualunque n pari.

161. $I = \int x \cos^6(x^2 - 1)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos^6(x^2 - 1) \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos^6(x^2 - 1)\, d(x^2 - 1) =$
$$= \frac{1}{2}\int \cos^6 t\, dt = \frac{1}{2} I_6 \quad \text{con} \quad t = x^2 - 1$$
$$I_6 = \int \cos^6 t\, dt = \int \cos^5 t\, d(\mathrm{sen}\, t) = [\text{per parti}] = \cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t - \int \mathrm{sen}\, t\, d(\cos^5 t) =$$
$$= \cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t + 5\int \mathrm{sen}^2 t \cos^4 t\, dt = \cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t + 5\int (1 - \cos^2 t)\cos^4 t\, dt =$$
$$= \cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t + 5I_4 - 5I_6$$

Trasportando al primo membro $5I_6$ si ottiene:

$$I_6 = \frac{1}{6}\cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{5}{6}I_4$$

Sostituendo ad I_4 il risultato dell'esempio **160**:

$$I_6 = \frac{1}{6}\cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{3}{8}\cos t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{3}{8}t + C_1\right)$$

e sostituendo in I il risultato ottenuto si ha:

$$I = \frac{1}{2}I_6 = \frac{1}{12}\cos^5 t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{5}{48}\cos^3 t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{5}{32}\cos t\, \mathrm{sen}\, t + \frac{5}{32}t + C_2$$

Infine, ricordando che è $t = x^2 - 1$:

$$I = \frac{1}{12}\cos^5(x^2 - 1)\,\mathrm{sen}(x^2 - 1) + \frac{5}{48}\cos^3(x^2 - 1)\,\mathrm{sen}(x^2 - 1) +$$
$$+ \frac{5}{32}\cos(x^2 - 1)\,\mathrm{sen}(x^2 - 1) + \frac{5}{32}x^2 + C$$

Riepilogando: in generale, per il calcolo degli integrali del tipo

$$I_n = \int \cos^n x\, dx$$

quando n è dispari si procede come negli esempi **157**, **158**, **159**; quando n è pari si procede come negli esempi **160**, **161**.

Naturalmente in entrambi i casi esistono altri metodi d'integrazione. Infatti:

a) Per n dispari si può integrare per parti. Ad esempio:

$$I_3 = \int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x\, d(\mathrm{sen}\, x) = \cos^2 x\, \mathrm{sen}\, x - \int \mathrm{sen}\, x\, d(\cos^2 x) =$$
$$= \cos^2 x\, \mathrm{sen}\, x + 2\int \mathrm{sen}^2 x \cos x\, dx = \cos^2 x\, \mathrm{sen}\, x + 2\int \mathrm{sen}^2 x\, d(\mathrm{sen}\, x) =$$
$$= \cos^2 x\, \mathrm{sen}\, x + 2\,\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3} + C = (1 - \mathrm{sen}^2 x)\,\mathrm{sen}\, x + 2\,\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3} + C =$$
$$= \mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}^3 x + 2\,\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3} + C = \mathrm{sen}\, x - \frac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x + C \quad \text{[cfr. es. 157]}$$

b) Per n pari si può procedere come nel seguente esempio:

$$I_4 = \int \cos^4 x\, dx$$

Essendo: $\mathrm{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ $\quad \cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 4x}{2}$ si ha:

$$I_4 = \int (\cos^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\, dx =$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{sen}\, 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2}\, dx =$$
$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{sen}\, 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\int \cos 4x\, d(4x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}\, 2x + \frac{1}{32}\mathrm{sen}\, 4x + C =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, x \cos x + \frac{1}{16}\mathrm{sen}\, 2x \cos 2x + C =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, x \cos x + \frac{1}{8}\mathrm{sen}\, x \cos(2\cos^2 x - 1) + C =$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\, x \cos x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}\, x \cos^3 x - \frac{1}{8}\mathrm{sen}\, x \cos x + C =$$
$$= \frac{1}{4}\cos^3 x\, \mathrm{sen}\, x + \frac{3}{8}\mathrm{sen}\, x \cos x + \frac{3}{8}x + C \quad \text{[cfr. es. 160]}$$

Dagli esempi visti si rileva che in ogni caso si può integrare per parti. Integrando per parti I_n, come si è fatto nel paragrafo 5.2, si giunge a un'importante formula di riduzione che mette in relazione I_n con I_{n-2}.

$$I_n = \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\,\operatorname{sen}x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad [5.3.1]$$

Si usi la formula [5.3.1] per verificare il risultato di I_3 (es. **157**), e per il calcolo di I_8.

$$I_3 = \frac{1}{3}\cos^2 x\,\operatorname{sen}x + \frac{2}{3}I_1 = [\text{essendo } I_1 = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x + C] =$$

$$= \frac{1}{3}\cos^2 x\,\operatorname{sen}x + \frac{2}{3}\operatorname{sen}x + C = \frac{1}{3}(1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}x + \frac{2}{3}\operatorname{sen}x + C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{2}{3}\operatorname{sen}x + C = \operatorname{sen}x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C \quad [\text{cfr. es. } 157]$$

162. $I_8 = \int \cos^8 x\,dx$

Per la [5.3.1] si ha: $I_8 = \frac{1}{8}\cos^7 x\,\operatorname{sen}x + \frac{7}{8}I_6$

ed ancora: $I_6 = \frac{1}{6}\cos^5 x\,\operatorname{sen}x + \frac{5}{6}I_4$

Sostituendo ad I_4 il risultato dell'es. **160** si ha:

$$I_6 = \frac{1}{6}\cos^5 x\,\operatorname{sen}x + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{4}\cos^3 x\,\operatorname{sen}x + \frac{3}{8}\cos x\,\operatorname{sen}x + \frac{3}{8}x + C_1\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cos^5 x\,\operatorname{sen}x + \frac{5}{24}\cos^3 x\,\operatorname{sen}x + \frac{5}{16}\cos x\,\operatorname{sen}x + \frac{5}{16}x + C_2$$

Infine, sostituendo I_6 in I_8, si ottiene:

$$I_8 = \frac{1}{8}\cos^7 x\,\operatorname{sen}x + \frac{7}{8}I_6 = \frac{1}{8}\cos^7 x\,\operatorname{sen}x + \frac{7}{48}\cos^5 x\,\operatorname{sen}x + \frac{35}{192}\cos^3 x\,\operatorname{sen}x +$$

$$+ \frac{35}{128}\cos x\,\operatorname{sen}x + \frac{35}{128}x + C$$

Il calcolo di I_n non richiede necessariamente la conoscenza di I_{n-2}, come potrebbe sembrare dalla formula, poiché I_n si può esprimere in funzione del primo integrale noto:

I_0 se n è pari

I_1 se n è dispari

Cosicché I_n si calcola direttamente dalle formule:

n [pari] $= 2m \;\rightarrow\; m = \frac{n}{2}$

$$I_n = I_{2m} = \int \cos^{2m}x\,dx = A_1 x + \sum_{i=1}^{m} A_i \cos^{2i-1}x\,\operatorname{sen}x + C \qquad [5.3.2]$$

con

$$A_i = \frac{1}{2i-1}\prod_{k=i}^{m}\frac{2k-1}{2k} \qquad [5.3.2\text{-a}]$$

n [dispari] $= 2m+1 \;\rightarrow\; m = \frac{n-1}{2}$

$$I_n = I_{2m+1} = \int \cos^{2m+1}x\,dx = \sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i}{2i+1}\binom{m}{i}\operatorname{sen}^{2i+1}x + C \qquad [5.3.3]$$

Verifichiamo con queste formule i risultati ottenuti per $n = 4$ e per $n = 5$ e calcoliamo poi I_{10} e I_{11}.

$$I_4 = \int \cos^4 x\,dx \qquad [n = 4 \rightarrow m = 2]$$

Dalla [5.3.2] si ha: $I_4 = A_1 x + A_1 \cos x\,\operatorname{sen}x + A_2\cos^3 x\,\operatorname{sen}x + C$

e dalla [5.3.2-a]:

$$A_1 = \frac{1}{2\cdot 1-1}\cdot\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$A_2 = \frac{1}{2\cdot 2-1}\cdot\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Quindi: $I_4 = \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\cos x\,\operatorname{sen}x + \frac{1}{4}\cos^3 x\,\operatorname{sen}x + C$ [cfr. es. 160]

Per il calcolo di I_5, dalla formula [5.3.3] ove è $m = \frac{5-1}{2} = 2$ si ha:

$$I_5 = \int \cos^5 x\,dx = \binom{2}{0}\operatorname{sen}x - \frac{1}{2\cdot 1+1}\binom{2}{1}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{2\cdot 2+1}\binom{2}{2}\operatorname{sen}^5 x + C =$$

$$= \operatorname{sen}x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C \quad [\text{cfr. es. } 159]$$

Con lo stesso procedimento si calcola I_{10}. Dalla [5.3.2], ove è $m = 5$, si ha:

$$I_{10} = \int \cos^{10}x\,dx = A_1 x + A_1\cos x\,\operatorname{sen}x + A_2\cos^3 x\,\operatorname{sen}x + A_3\cos^5 x\,\operatorname{sen}x +$$

$$+ A_4\cos^7 x\,\operatorname{sen}x + A_5\cos^9 x\,\operatorname{sen}x + C$$

Dalla [5.3.2-a] si ha:

$$A_1 = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{63}{256} \qquad A_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{21}{128}$$

$$A_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{21}{160} \qquad A_4 = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{80} \qquad A_5 = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

Quindi:

$$I_{10} = \frac{63}{256}x + \frac{63}{256}\cos x\,\operatorname{sen}x + \frac{21}{128}\cos^3 x\,\operatorname{sen}x + \frac{21}{160}\cos^5 x\,\operatorname{sen}x +$$

$$+ \frac{9}{80}\cos^7 x\,\operatorname{sen}x + \frac{1}{10}\cos^9 x\,\operatorname{sen}x + C$$

Con la [5.3.3] calcoliamo ora I_{11} ($m = 5$).

164. $I_{11} = \int \cos^{11}x\,dx = \binom{5}{0}\operatorname{sen}x - \frac{1}{3}\binom{5}{1}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\binom{5}{2}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\binom{5}{3}\operatorname{sen}^7 x +$

$$+ \frac{1}{9}\binom{5}{4}\operatorname{sen}^9 x - \frac{1}{11}\binom{5}{5}\operatorname{sen}^{11}x + C =$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{5}{3}\operatorname{sen}^3 x + 2\operatorname{sen}^5 x - \frac{10}{7}\operatorname{sen}^7 x + \frac{5}{9}\operatorname{sen}^9 x - \frac{1}{11}\operatorname{sen}^{11} x + C$$

5.4.- Integrali di tipo: a) $\int \operatorname{sen} px\cdot\cos qx\,dx$ b) $\int \operatorname{sen} px\cdot\operatorname{sen} qx\,dx$ c) $\int \cos px\cdot\cos qx\,dx$

Il calcolo di questi integrali si rivela semplice se si applicano le formule di Werner che trasformano prodotti in somme (cfr. §1.7).

Esempi.

165. $I = \int \operatorname{sen} 4x\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}(4x+2x)+\operatorname{sen}(4x-2x)]\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 6x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{12}\int \operatorname{sen} 6x\,d(6x) + \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} 2x\,d(2x) =$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C = -\frac{1}{12}(\cos 6x + 3\cos 2x) + C$$

166. $I = \int \operatorname{sen} 4x\cdot\operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int[\cos(4x-2x)-\cos(4x+2x)]\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x\,dx = \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) - \frac{1}{12}\int \cos 6x\,d(6x) =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C = \frac{1}{12}(3\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x) + C$$

167. $I = \int \cos 4x\cdot\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int[\cos(4x+2x)+\cos(4x-2x)]\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 6x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{12}\int \cos 6x\,d(6x) + \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C = \frac{1}{12}(\operatorname{sen} 6x + 3\operatorname{sen} 2x) + C$$

168. $I = \int \cos 2x\cdot\operatorname{sen} 5x\,dx = \int \operatorname{sen} 5x\cdot\cos 2x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}(5x+2x)+\operatorname{sen}(5x-2x)]\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 7x\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{14}\int \operatorname{sen} 7x\,d(7x) + \frac{1}{6}\int \operatorname{sen} 3x\,d(3x) = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$$

169. $I = \int \cos 2x\cdot\operatorname{sen} 6x\,dx = \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}(2x+6x)-\operatorname{sen}(2x-6x)]\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 8x\,dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-4x)\,dx = \frac{1}{16}\int \operatorname{sen} 8x\,d(8x) + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}(-4x)\,d(-4x) =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{8}\cos(-4x) + C = -\frac{1}{16}(\cos 8x + 2\cos 4x) + C$$

5.5.- Integrali del tipo: $I_{p,q} = \int \operatorname{sen}^p x\cdot\cos^q x\,dx$

Gli esponenti p e q, entrambi interi, possono essere:

1) uno pari e uno dispari
2) entrambi dispari
3) entrambi pari

Nei primi due casi, cioè quando almeno un esponente è dispari, questo tipo di integrali si riconduce ad una delle forme elementari già trattate:

a) $\int \operatorname{sen}^n x\,d(\operatorname{sen} x)$ (cfr. §5.2) oppure b) $\int \cos^n x\,d(\cos x)$ (cfr. §5.3)

Infatti, supponendo p dispari, si può scrivere:

$$I_{p,q} = \int \operatorname{sen}^{p-1} x\cdot\cos^q x\cdot\operatorname{sen} x\,dx = -\int \operatorname{sen}^{p-1} x\cdot\cos^q x\,d(\cos x)$$

rendendo così pari l'esponente $p-1$ del seno e si può quindi esprimere $\operatorname{sen}^{p-1} x$ mediante potenze di $\cos x$. Per esempio:

$$\operatorname{sen}^6 x = (\operatorname{sen}^2 x)^3 = (1-\cos^2 x)^3 = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x$$

Pertanto $I_{p,q}$ è esprimibile come somma algebrica di integrali del tipo b).

Se è q dispari, seguendo lo stesso procedimento, si può scrivere:

$$I_{p,q} = \int \operatorname{sen}^p x\cdot\cos^{q-1} x\cdot\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^p x\cos^{q-1} x\,d(\operatorname{sen} x)$$

rendendo così pari l'esponente $q-1$ del coseno e si può quindi esprimere $\cos^{q-1} x$ mediante potenze di $\operatorname{sen} x$. Per esempio:

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = (1-\operatorname{sen}^2 x)^3 = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^6 x$$

Pertanto $I_{p,q}$ è esprimibile come somma algebrica di integrali del tipo a).

Esempi.

170. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\,d(\cos x) =$

$$= -\int \cos^2 x\,d(\cos x) + \int \cos^4 x\,d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

171. $$\int \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x\,dx = \begin{cases} \int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\operatorname{sen} x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^3 x\,d(\cos x) & \text{a)} \\ \int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^3 x\cdot(1-\operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x) & \text{b)} \end{cases}$$

Ambedue le vie conducono allo stesso risultato. È ovvio che quando p e q sono entrambi dispari conviene trasformare la funzione avente esponente minore.

a) $\ldots = -\int \cos^3 x\,d(\cos x) + \int \cos^5 x\,d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C_1 = f_1$

b) $\ldots = \int \operatorname{sen}^3 x\,d(\operatorname{sen} x) - \int \operatorname{sen}^5 x\,d(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C_2 = f_2$

I due risultati sembrano diversi, ma sostanzialmente sono uguali, infatti si ha:

$$f_2 = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^4 x(3 - 2\operatorname{sen}^2 x) + C_2 = \frac{1}{12}(1-\cos^2 x)^2(3 - 2 + 2\cos^2 x) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{12}(1-\cos^2 x)^2(1 + 2\cos^2 x) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{12}[(1 - 2\cos^2 x) + \cos^4 x](1 + 2\cos^2 x) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{12}(1 - 4\cos^4 x + \cos^4 x + 2\cos^6 x) + C_2 = \frac{1}{12} - \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C_2 =$$

$$= -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C_1 = f_1 \qquad \text{con } C_1 = C_2 + \frac{1}{12}$$

Se p e q sono entrambi pari, $I_{p,q}$ si riconduce ad una somma di integrali del tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx \qquad \text{oppure del tipo} \qquad \int \cos^n x\, dx$$

esprimendo $\operatorname{sen}^p x$ mediante potenze di $\cos x$ o $\cos^q x$ mediante potenze di $\operatorname{sen} x$.
Esempio:

172. $\int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int \operatorname{sen}^4 x\, dx - \int \operatorname{sen}^6 x\, dx = I_4 - I_6$

I_4 e I_6 si calcolano con le formule [5.2.2] e [5.2.2-a].
Oppure:

$$\ldots = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2\, dx = \int \cos^2 x\, dx - 2\int \cos^4 x\, dx + \int \cos^6 x\, dx =$$
$$= I_2 - 2I_4 + I_6$$

I_2, I_4, I_6 si calcolano con le [5.3.2] e [5.3.2-a].

Questo esempio mette in evidenza come sia più conveniente, nell'integrale del tipo considerato con p e q entrambi pari, trasformare la funzione ad esponente minore.

5.6.- Integrali di tipo: a) $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$ b) $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^m x}\, dx$

Questi integrali (con $m > 0$ intero) possono essere resi razionali con la posizione:

$$\operatorname{tg} x = t \;\rightarrow\; (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = dt \;\rightarrow\; dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

Si ha, ad esempio, infatti:

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int t^4 \frac{dt}{1 + t^2} = \int \frac{t^4}{1 + t^2}\, dt$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\, dx = \int \frac{1}{t^3(1 + t^2)}\, dt$$

Questi integrali si risolvono con i metodi visti nel capitolo 4.

Quando m è dispari si può eseguire in altro modo l'integrazione. Vediamo degli esempi.

173. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}\, d(\cos x) = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x}\, d(\cos x) =$

$$= [\text{ponendo } \cos x = t] = -\int \frac{1 - t^2}{t^3}\, dt = -\int \frac{1}{t^3}\, dt + \int \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= -\frac{t^{-2}}{-2} + \ln|t| + C = \frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \ln|\cos x| + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C_1$$

174. $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\, dx = \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = \int \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^3 x}\, d(\operatorname{sen} x) =$

$$= [\operatorname{sen} x = t] = \int \frac{1 - t^2}{t^3}\, dt = \int \frac{1}{t^3}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{t^{-2}}{-2} - \ln|t| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + C_1 = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - \ln|\operatorname{sen} x| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right) - \ln|\operatorname{sen} x| + C_1 = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} - \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Gli esempi 173 e 174 mostrano che quando m è dispari:

$\int \operatorname{tg}^m x\, dx$ **viene reso razionale con la posizione** $\cos x = t$

$\int \frac{1}{\operatorname{tg}^m x}\, dx$ **viene reso razionale con la posizione** $\operatorname{sen} x = t$

È importante osservare che questi due tipi di integrali con m pari o dispari possono essere risolti anche nel seguente modo:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1) \operatorname{tg} x\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \operatorname{tg} x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$$

175. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1)\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx - \int \operatorname{tg}^2 x\, dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x\, d(\operatorname{tg} x) - \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1)\, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int d(\operatorname{tg} x) + \int dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\, dx = \int \operatorname{ctg}^3 x\, dx = \int (\operatorname{ctg}^2 x + 1 - 1) \operatorname{ctg} x\, dx =$$

$$= -\int \operatorname{ctg} x[-(\operatorname{ctg}^2 x + 1)]\, dx - \int \operatorname{ctg} x\, dx = -\int \operatorname{ctg} x\, d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg} x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\operatorname{sen} x| + C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} - \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Gli esempi esposti suggeriscono un procedimento generale per determinare delle formule di riduzione per questi due tipi di integrali, qualunque sia $m > 2$, pari o dispari.

a) $I_m = \int \operatorname{tg}^m x\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1) \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x\, dx$$

e quindi:

$$I_m = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - I_{m-2} \qquad [5.6.1]$$

b) $I_m = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^m x}\,dx = \int \operatorname{ctg}^m x\,dx = \int (\operatorname{ctg}^2 x + 1 - 1)\operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx =$

$= -\int \operatorname{ctg}^{m-2} x[-(\operatorname{ctg}^2 x + 1)]\,dx - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx =$

$= -\int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x\,dx$

e quindi:

$$I_m = -\frac{1}{(m-1)\operatorname{tg}^{m-1} x} - I_{m-2} \qquad [5.6.2]$$

5.7.- Esercizi proposti

Per la risoluzione degli integrali che seguono può essere di valido aiuto quanto detto ai §§1.6, 1.7.

176. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\,dx$

177. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x\,dx$

178. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

179. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

180. $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$

181. $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x - 2\cos x}\,dx$

182. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$

183. $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x\,dx$

184. $\int \operatorname{tg}^2(3x+1)\,dx$

185. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

186. $\int e^{-2x} \cos 3x\,dx$

187. $\int x \operatorname{sen}^5(x^2-1)\,dx$

188. $\int \cos^4(2x+1)\,dx$

189. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\,dx$

190. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

191. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$

192. $\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\,dx$

193. $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x\,dx$

194. $\int \frac{x}{\operatorname{tg}^3 x^2}\,dx$

195. $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

176. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\,dx$

Poiché l'elemento differenziale $[f(x)\,dx]$ non muta cambiando x in $\pi + x$, si può porre:

$$\operatorname{tg} x = t \;\rightarrow\; \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt$$

ed esprimendo il seno in funzione della tangente: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$ si ha:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2}\,dt + \int dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + t + C = -\frac{1}{t} + t + C = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + C$$

ALTRO MODO:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\,d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$$

177. $I = \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x\,dx$

Applicando le formule di Werner (cfr. §1.7) si ottiene:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x = \frac{1}{2}(\cos x \operatorname{sen} 4x - \cos 3x \operatorname{sen} 4x)$$

$$\operatorname{sen} 4x \cos x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x) \qquad \operatorname{sen} 4x \cos 3x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} x)$$

Pertanto:

$$I = \frac{1}{4}\int(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{20}\int \operatorname{sen} 5x\,d(5x) + \frac{1}{12}\int \operatorname{sen} 3x\,d(3x) - \frac{1}{28}\int \operatorname{sen} 7x\,d(7x) - \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{12}\cos 3x + \frac{1}{28}\cos 7x + \frac{1}{4}\cos x + C$$

178. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

L'elemento differenziale $[f(x)\,dx]$ non muta cambiando x in $-x$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(-x)\cos(-x)}\,d(-x) = \frac{-1}{-\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$$

Ponendo quindi $\cos x = t \;\rightarrow\; -\operatorname{sen} x\,dx = dt$ e sostituendo si ha:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx = \int \frac{-1}{t \operatorname{sen}^2 x}\,dt = \int \frac{-1}{(1-\cos^2 x)\,t}\,dt = -\int \frac{1}{t(1-t^2)}\,dt$$

$$\frac{1}{t(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t} = \frac{A(1-t^2) + Bt(1+t) + Ct(1-t)}{t(1-t)(1+t)} =$$

$$= \frac{A - At^2 + Bt + Bt^2 + Ct - Ct^2}{t(1-t)(1+t)} = \frac{(-A+B-C)\,t^2 + (B+C)\,t + A}{t(1-t)(1+t)}$$

Dal confronto segue:

$$\begin{cases} -A+B-C=0 \\ \quad\;\; B+C=0 \\ A \qquad\quad\;\; =1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1/2 \\ C=-1/2 \end{cases}$$

$$-\int \frac{1}{t(1-t^2)}\,dt = -\left[\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt\right] =$$

$$= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) + C =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{1-t^2}}{|t|} + C = \ln\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\cos x|} + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C$$

179. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

$f(x)\,dx$ non muta cambiando x in $\pi + x$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^4(\pi+x)}\,d(\pi+x) = \frac{1}{(-\operatorname{sen} x)^4}\,dx = \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$$

Poniamo allora: $\operatorname{tg} x = t \;\rightarrow\; (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = dt \;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

Ed essendo $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = \left(\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^2 = \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2 = \dfrac{t^4}{(1+t^2)^2}$ si ha:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t^4}\,dt = \int \frac{1}{t^4}\,dt + \int \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$$

ALTRO MODO:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,d(\operatorname{ctg} x) = -\int d(\operatorname{ctg} x) - \int \operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + C$$

L'identità dei due risultati è evidente ricordando che è $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$.

180. $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$

Essendo $\dfrac{1}{1+\cos^2(\pi+x)}\,d(\pi+x) = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$ si pone:

$\operatorname{tg} x = t \;\rightarrow\; (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = dt \;\rightarrow\; dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

Si ha allora:

$$I = \int \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{2+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{2+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,d\!\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$$

181. $I = \displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x - 2\cos x}\,dx$

$F(x)\,dx$ non è invariante per alcuna delle tre possibili sostituzioni di x (con $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$). Quindi per rendere razionale l'integrale si deve ricorrere alla sostituzione suggerita al §5.1:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\[2mm] \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \rightarrow\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2} - 2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t-2+2t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2+2t-1} = \int \frac{2}{3(t+1)\left(t-\dfrac{1}{3}\right)}\,dt = \int \frac{2}{(t+1)(3t-1)}\,dt$$

$$\frac{2}{(t+1)(3t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{3t-1} = \frac{3At - A + Bt + B}{(t+1)(3t-1)} = \frac{(3A+B)t + (B-A)}{(t+1)(3t-1)}$$

dal confronto si ha:

$$\begin{cases} 3A+B=0 \\ -A+B=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=3/2 \end{cases}$$

quindi:

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{3t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln|3t-1| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}\right| + C$$

182. $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$

$F(x)\,dx$ non muta cambiando x con $-x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^5(-x)\,d(-x)}{\sqrt[3]{\cos(-x)}} = \frac{\operatorname{sen}^5 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$$

Si può porre $\cos x = t \rightarrow -\operatorname{sen} x\,dx = dt$:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{\cos x}}\,dx = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2(-\operatorname{sen} x\,dx)}{\cos^{1/3} x} = -\int \frac{(1-t^2)^2\,dt}{t^{1/3}} =$$

$$= -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^{1/3}}\,dt = -\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt + 2\int t^{2-\frac{1}{3}}\,dt - \int t^{4-\frac{1}{3}}\,dt =$$

$$= -\frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 2\frac{t^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - \frac{t^{\frac{11}{3}+1}}{\frac{11}{3}+1} + C = -\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + 2\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{14}t^{\frac{14}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} + \frac{3}{4}\cos^2 x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} - \frac{3}{14}\cos^4 x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} + C =$$

$$= -\frac{3}{28}\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}\,(14 - 7\cos^2 x + 2\cos^4 x) + C$$

183. $I = \int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

Poiché $F(x)\,dx$ non muta cambiando x in $-x$: $e^{\cos(-x)}\operatorname{sen}(-x)\,d(-x) = e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$, si pone $\cos x = t \rightarrow -\operatorname{sen} x\,dx = dt$.

$$I = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

Questo tipo di integrale è stato risolto in precedenza nel seguente modo:

$$I = -\int e^{\cos x}\,d(\cos x) = -e^{\cos x} + C$$

184. $I = \int \operatorname{tg}^2(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2(3x+1)\,d(3x+1) = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2 z\,dz \quad$ con $\quad z = 3x+1$

L'integrale è del tipo a) del §5.6 e quindi si razionalizza con la posizione

$$\operatorname{tg} z = t \rightarrow (\operatorname{tg}^2 z + 1)\,dz = dt \rightarrow dz = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \frac{1}{3}\int t^2\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\,.\,dt - \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} t + C_1 = \frac{1}{3}\operatorname{tg} z - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg} z + C_1 = \frac{1}{3}\operatorname{tg} z - \frac{1}{3}z + C_1 =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) - \frac{1}{3}(3x+1) + C_1 = \frac{1}{3}[\operatorname{tg}(3x+1) - 3x] + C$$

ALTRO METODO:

$$I = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2(3x+1)\,d(3x+1) = \frac{1}{3}\int(\operatorname{tg}^2 z + 1 - 1)\,dz =$$

$$= \frac{1}{3}\int(\operatorname{tg}^2 z + 1)\,dz - \frac{1}{3}\int dz = \frac{1}{3}\int d(\operatorname{tg} z) - \frac{1}{3}\int dz = \frac{1}{3}\operatorname{tg} z - \frac{1}{3}z + C_1 = \ldots$$

185. $I = \int x^2\operatorname{sen} 2x\,dx$

Questo integrale rientra tra quelli indicati nella TAB. 3-I ($x^n\operatorname{sen} mx$) e si integra per parti. Ponendo $2x = t$ si ha:

$$I = \frac{1}{8}\int 4x^2\operatorname{sen} 2x\,d(2x) = \frac{1}{8}\int t^2\cdot\operatorname{sen} t\,dt = -\frac{1}{8}\int t^2\,d(\cos t) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t^2\cos t - \int\cos t\cdot 2t\,dt\right) = -\frac{1}{8}\left(t^2\cos t - 2\int t\cos t\,dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[t^2\cos t - 2\int t\,d(\operatorname{sen} t)\right] = -\frac{1}{8}\left[t^2\cos t - 2\left(t\operatorname{sen} t - \int\operatorname{sen} t\,dt\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{8}(t^2\cos t - 2t\operatorname{sen} t - 2\cos t) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}(2x^2\cos 2x - 2x\operatorname{sen} 2x - \cos 2x) + C$$

186. $I = \int e^{-2x}\cos 3x\,dx$

L'integrale rientra tra quelli indicati nella TAB. 3-I ($e^{nx}\cos mx$) e si integra per parti.

$$I = \frac{1}{3}\int e^{-2x}\,d(\operatorname{sen} 3x) = \frac{1}{3}\left[e^{-2x}\operatorname{sen} 3x - \int\operatorname{sen} 3x\,d(e^{-2x})\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{-2x}\operatorname{sen} 3x + 2\int e^{-2x}\operatorname{sen} 3x\,dx\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-2x}\operatorname{sen} 3x + 2I'\right)$$

$$I' = -\frac{1}{3}\int e^{-2x}\,d(\cos 3x) = [\text{ancora per parti}] = -\frac{1}{3}\left[e^{-2x}\cos 3x - \int\cos 3x\,d(e^{-2x})\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(e^{-2x}\cos 3x + 2\int e^{-2x}\cos 3x\,dx\right) = -\frac{1}{3}\left(e^{-2x}\cos 3x + 2I\right)$$

Sostituendo in I:

$$I = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen} 3x + \frac{2}{3}I' = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x - \frac{4}{9}I$$

Isolando I si ha:

$$\frac{13}{9}I = \frac{1}{3}e^{-2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x + C_1 = \frac{1}{9}e^{-2x}(3\operatorname{sen} 3x - 2\cos 3x) + C_1$$

$$I = \frac{1}{13}e^{-2x}(3\operatorname{sen} 3x - 2\cos 3x) + C$$

187. $I = \int x\operatorname{sen}^5(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\operatorname{sen}^5(x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}^5(x^2-1)\,d(x^2-1) =$

$$= [\text{posto } z = x^2 - 1] = \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}^5 z\,dz$$

L'integrale ottenuto è del tipo $\int\operatorname{sen}^n x\,dx$. Così la formula [5.2.1] ci dà:

$$I = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\operatorname{sen}^4 z\cos z + \frac{4}{5}I_3\right)$$

con $\quad I_3 = \int \operatorname{sen}^3 z\, dz = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 z \cos z + \frac{2}{3}(-\cos z) + C_1$

$$I = \frac{1}{10}\left(-\operatorname{sen}^4 z \cos z - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^2 z \cos z - \frac{8}{3}\cos z\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{30}\cos(x^2-1)[3\operatorname{sen}^4(x^2-1) + 4\operatorname{sen}^2(x^2-1) + 8] + C$$

Allo stesso risultato si perviene applicando la [5.2.3].

188. $I = \int \cos^4(2x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos^4(2x+1)\, d(2x+1) = [2x+1=z] = \frac{1}{2}\int \cos^4 z\, dz$

L'integrale ottenuto è del tipo $\int \cos^n x$. Così la formula [5.3.1] ci dà:

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^3 z \operatorname{sen} z + \frac{3}{4}I_2\right) \quad \text{con} \quad I_2 = \int \cos^2 z\, dz = \frac{z + \operatorname{sen} z \cos z}{2} + C_1$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cos^3 z \operatorname{sen} z + \frac{3}{4}\cdot\frac{z + \operatorname{sen} z\cos z}{2}\right) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{16}[2\cos^3(2x+1)\operatorname{sen}(2x+1) + 3\operatorname{sen}(2x+1)\cos(2x+1) + 6x] + C$$

ALTRO METODO:

$$I = \frac{1}{2}\int \cos^4 z\, dz = \frac{1}{2}\int (\cos^2 x)^2\, dz = \frac{1}{2}\int \frac{(1+\cos 2z)^2}{4}\, dz = \dots \quad \text{[cfr. §5.3, punto b)]}$$

189. $I = \int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$

Con le formule di Werner (cfr. §1.7) si ha:

$$I = \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen}(-x)]\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(-x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{10}\int \operatorname{sen} 5x\, d(5x) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

190. $I = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$

$F(x)\, dx$ non muta cambiando x in $-x$:

$$\frac{\operatorname{sen}(-2x)}{1+\cos^2(-x)}\, d(-x) = \frac{-\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}(-dx) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx$$

Si pone allora: $\quad \cos x = t \quad \rightarrow \quad -\operatorname{sen} x\, dx = dt$

$$I = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\cos^2 x}\, dx = -2\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt =$$

$$= -\int \frac{1}{1+t^2}\, d(1+t^2) = -\ln(1+t^2) + C = -\ln(1+\cos^2 x) + C$$

191. $\int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$

192. $I = \int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx =$ [dividendo numeratore e denominatore per $\cos x$] $= \int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\, dx$

$F(x)\, dx$ non muta cambiando x in $\pi + x$:

$$\frac{\cos(\pi+x) - \operatorname{sen}(\pi+x)}{\cos(\pi+x) + \operatorname{sen}(\pi+x)}\, d(\pi+x) = \frac{-\cos x + \operatorname{sen} x}{-\cos x - \operatorname{sen} x}\, dx = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx$$

Si può quindi porre $\quad \operatorname{tg} x = t \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{arc\,tg} t \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$$I = \int \frac{1-t}{1+t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\, dt = \dots$$

In tal modo l'integrale è stato reso razionale ed il metodo d'integrazione è ormai noto. In questo caso però, osservando che il numeratore è la derivata del denominatore, si ha, molto più semplicemente:

$$I = \int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x}\, d(\cos x + \operatorname{sen} x) = \ln|\cos x + \operatorname{sen} x| + C$$

Allo stesso risultato, con opportune trasformazioni, si perviene col primo metodo.

193. $I = \int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \cos^2 x(1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = -\int (\cos^2 x - \cos^4 x)\, d(\cos x) =$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

194. $I = \int \frac{x}{\operatorname{tg}^3 x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\operatorname{tg}^3 x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x^2}\, d(x^2) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 z}\, dz \quad$ con $\quad z = x^2$

L'integrale è uguale a quello dell'es. **174**, si ha quindi:

$$I = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 z} - \ln|\operatorname{sen} z|\right) + C = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x^2} + \ln|\operatorname{sen} x^2|\right) + C$$

195. $I = \int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

Essendo $\quad \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 2x =$
$\qquad = \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)$

si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \cos x + \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \cos x + \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos x} = 2\cos x - \frac{1}{2\cos x}$$

$$I = 2\int \cos x\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos x}\, dx = 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}I' \quad \text{con} \quad I' = \int \frac{1}{\cos x}\, dx$$

Essendo $\quad \frac{1}{\cos(\pi - x)}\, d(\pi - x) = \frac{1}{\cos x}\, dx$ si può porre:

$$\operatorname{sen} x = t \quad \rightarrow \quad \cos x\,dx = dt \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$I' = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dt = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-t) + \ln(1+t) + C_1 = \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + C_1 = \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} + C_1$$

Pertanto:

$$I = 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} + C$$

L'integrale I' si può calcolare anche, come indicato per le funzioni $F(\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x, \operatorname{tg} x)$ all'inizio del §5.1, ponendo:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

5.8.- Integrali del tipo: $I_n = \int x^n e^x\,dx$ $(n > 0$ intero$)$

Come già si è visto (cfr. TAB. 3-I), gli integrali di questo tipo si calcolano per parti, prendendo $e^x = g(x)$. Così è possibile ricavare una formula di riduzione che mette in relazione I_n e I_{n-1}:

$$I_n = \int x^n d(e^x) = x^n e^x - \int e^x d(x^n) = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx$$

cioè:

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1} \qquad [5.8.1]$$

Mediante la [5.8.1] è possibile, con riduzioni successive, ricondurre il calcolo di I_n a quello di I_0, con $I_0 = \int e^x\,dx = e^x + C$. Esempio:

196. $I_2 = \int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2I_1$

$I_1 = \int x e^x\,dx = xe^x - I_0 = xe^x - e^x + C_1$

quindi:

$I_2 = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

5.9.- Integrali del tipo: $\int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq 0$ intero$)$

Questi integrali si calcolano per parti prendendo $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = g(x)$ (cfr. TAB. 3-I). Si ha:

$$\int x^n \ln x\,dx = \int \ln x\, d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^n}{n+1}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

Esempio:

197. $\int x^5 \ln x\,dx = \int \ln x\, d\left(\dfrac{x^6}{6}\right) = \dfrac{x^6}{6}\ln x - \int \dfrac{x^6}{6}\,d(\ln x) = \dfrac{x^6}{6}\ln x - \int \dfrac{x^5}{6}\,dx =$

$= \dfrac{x^6}{6}\ln x - \dfrac{x^6}{36} + C$

5.10.- Integrali di tipo: $I_n = \int x^n \operatorname{sen} x\,dx$ e $J_n = \int x^n \cos x\,dx$

Anche per questi integrali è possibile dare delle formule di riduzione. Il procedimento è ancora quello dell'integrazione per parti.

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} x\,dx = \int x^n d(-\cos x) =$$
$$= x^n(-\cos x) - \int(-\cos x)\,d(x^n) =$$
$$= -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$

Si osservi che $\int x^{n-1}\cos x\,dx$ non è altro che J_{n-1}, quindi:

$$I_n = -x^n \cos x + nJ_{n-1} \qquad [5.10.1]$$

$$J_n = \int x^n \cos x\,dx = \int x^n d(\operatorname{sen} x) =$$
$$= x^n \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,d(x^n) =$$
$$= x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx$$

Si osservi che $\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx$ non è altro che I_{n-1}, quindi:

$$J_n = x^n \operatorname{sen} x - nI_{n-1} \qquad [5.10.2]$$

Dalle [5.10.1] e [5.10.2] si vede come l'integrazione per parti riconduce il calcolo di I_n a quello di J_{n-1}, ed il calcolo di J_n a quello di I_{n-1}. Si avrà anche:

$$I_{n-1} = -x^n \cos x + (n-1)J_{n-2} \qquad [5.10.3]$$

$$J_{n-1} = x^{n-1}\operatorname{sen} x - (n-1)I_{n-2} \qquad [5.10.4]$$

Sostituendo l'espressione [5.10.4] di J_{n-1} nella [5.10.1] e l'espressione [5.10.3] di I_{n-1} nella [5.10.2] si ha:

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1}\operatorname{sen} x - n(n-1)I_{n-2} \qquad [5.10.5]$$

$$J_n = x^n \operatorname{sen} x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)J_{n-2} \qquad [5.10.6]$$

Le formule di riduzione [5.10.5] e [5.10.6] permettono di ricondurre il calcolo di I_n a quello di I_{n-2} ed il calcolo di J_n a quello di J_{n-2}. L'applicazione ripetuta della [5.10.5] riconduce il calcolo di I_n a $I_0 = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$ se n è pari. Se n è dispari, mediante ripetute applicazioni della [5.10.5] si giunge a $I_1 = \int x \operatorname{sen} x\,dx$, di facile integrazione, oppure, applicando la [5.10.1] si giunge direttamente a $J_0 = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

Analogamente, applicando la [5.10.6] si riconduce il calcolo di J_n a quello di J_0 se n è pari. Se n è dispari applicando ripetutamente la [5.10.6] si giunge a $J_1 = \int x\cos x\,dx$, di facile integrazione, oppure applicando ancora la [5.10.2] si giunge direttamente a $I_0 = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.

Esempi:

198. $I_4 = \int x^4 \operatorname{sen} x\,dx =$ [per la [5.10.5]] $= -x^4\cos x + 4x^3 \operatorname{sen} x - 12I_2$

Ancora per la [5.10.5]:

$I_2 = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - 2I_0 = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C_1$

Sostituendo in I_4:

$I_4 = -x^4\cos x + 4x^3\operatorname{sen} x + 12x^2\cos x - 24x\operatorname{sen} x - 24\cos x + C$

199. $I_5 = \int x^5 \operatorname{sen} x\,dx =$ [per la [5.10.5]] $= -x^5\cos x + 5x^4\operatorname{sen} x - 20I_3$

$I_3 =$ [per la [5.10.5]] $= -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x - 6I_1$

$I_1 =$ [per la [5.10.1]] $= -x\cos x + J_0 = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C_1$

Sostituendo I_1 in I_3 e I_3 in I_5 si ha:

$I_3 = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C_2$

$I_5 = -x^5\cos x + 5x^4\operatorname{sen} x + 20x^3\cos x - 60x^2\operatorname{sen} x - 120x\cos x + 120\operatorname{sen} x + C$

200. $J_6 = \int x^6 \cos x\,dx = [\text{per la } [5.10.6]] = x^6 \operatorname{sen} x + 6x^5 \cos x - 30 J_4$

$J_4 = [\text{per la } [5.10.6]] = x^4 \operatorname{sen} x + 4x^3 \cos x - 12 J_2$

$J_2 = [\text{per la } [5.10.6]] = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2J_0 = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C_1$

Sostituendo J_1 in J_4 e J_4 in J_6 si ha:

$J_4 = x^4 \operatorname{sen} x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \operatorname{sen} x - 24x \cos x + 24 \operatorname{sen} x + C_2$

$$J_6 = x^6 \operatorname{sen} x + 6x^5 \cos x - 30x^4 \operatorname{sen} x - 120x^3 \cos x + 360x^2 \operatorname{sen} x + 720x \cos x - 720 \operatorname{sen} x + C$$

201. $J_5 = \int x^5 \cos x\,dx = [\text{per la } [5.10.6]] = x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20 J_3$

$J_3 = [\text{per la } [5.10.6]] = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6J_1$

$J_1 = [\text{per la } [5.10.2]] = x \operatorname{sen} x - I_0 = x \operatorname{sen} x + \cos x + C_1$

Sostituendo J_1 in J_3 e J_3 in J_5 si ha:

$J_3 = x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6x \operatorname{sen} x - 6 \cos x + C_2$

$J_5 = x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120 x \operatorname{sen} x + 120 \cos x + C$

5.11.- Integrali di tipo: $\int e^{mx} \cdot \operatorname{sen}^n x\,dx$ e $\int e^{mx} \cdot \cos^n x\,dx$

Anche per questi integrali si possono dare delle formule di riduzione che si ottengono integrando per parti e prendendo $g(x) = \frac{1}{m} \cdot e^{mx}$:

$$I_{m,n} = \int e^{mx} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{1}{m}\int \operatorname{sen}^n x\,d(e^{mx}) = \frac{1}{m}\left[e^{mx} \operatorname{sen} x - n\int e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{m} e^{mx} \operatorname{sen}^n x - \frac{n}{m^2}\int \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x\,d(e^{mx}) =$$

$$= \frac{1}{m} e^{mx} \operatorname{sen}^n x - \frac{n}{m^2}\left\{e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x - \int e^{mx}\left[(n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^n x\right] dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{m} e^{mx} \operatorname{sen}^n x - \frac{n}{m^2} e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{m^2}\int e^{mx} \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x)\,dx + - \frac{n}{m^2}\int e^{mx} \operatorname{sen}^n x\,dx =$$

$$= \frac{1}{m} e^{mx} \operatorname{sen}^n x - \frac{n}{m^2} e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{m^2}\int e^{mx} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx + - \left[\frac{n(n-1)}{m^2} + \frac{n}{m^2}\right] \cdot \int e^{mx} \operatorname{sen}^n x\,dx =$$

$$= \frac{1}{m} e^{mx} \operatorname{sen}^n x - \frac{n}{m^2} e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{m^2} I_{m,n-2} - \frac{n^2}{m^2} I_{m,n}$$

Trasportando al primo membro l'ultimo termine si ha:

$$\frac{m^2 + n^2}{m^2} I_{m,n} = \frac{1}{m} e^{mx} \operatorname{sen}^n x - \frac{n}{m^2} e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n(n-1)}{m^2} I_{m,n-2}$$

e quindi:

$$I_{m,n} = \int e^{mx} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{1}{m^2 + n^2}\left[m e^{mx} \operatorname{sen}^n x - n e^{mx} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + n(n-1) I_{m,n-2}\right]$$

Questa formula permette di ricondurre, mediante riduzioni successive, il calcolo di $I_{m,n}$ a quello di $I_{m,0}$ se n è pari, a quello di $I_{m,1}$ se n è dispari, essendo:

$$I_{m,0} = \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m} e^{mx} + C \quad \text{e} \quad I_{m,1} = \int e^{mx} \operatorname{sen} x\,dx$$

$I_{m,1}$ si integra ancora per parti.

Si calcoli ad esempio:

202. $I_{3,5} = \int e^{3x} \operatorname{sen}^5 x\,dx = \frac{1}{3^2 + 5^2}(3e^{3x} \operatorname{sen}^5 x - 5e^{3x} \operatorname{sen}^4 x \cos x + 20 I_{3,3})$

$I_{3,3} = \int e^{3x} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{3^2 + 3^2}(3e^{3x} \operatorname{sen}^3 x - 3e^{3x} \operatorname{sen}^2 x \cos x + 6 I_{3,1})$

$I_{3,1} = \int e^{3x} \operatorname{sen} x\,dx = -\int e^{3x} d(\cos x) = [\text{per parti}] = -e^{3x} \cos x + 3\int e^{3x} \cos x\,dx =$

$= -e^{3x} \cos x + 3\int e^{3x} d(\operatorname{sen} x) = -e^{3x} \cos x + 3\left(e^{3x} \operatorname{sen} x - 3\int e^{3x} \operatorname{sen} x\,dx\right) =$

$= -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \operatorname{sen} x - 9\int e^{3x} \operatorname{sen} x\,dx$

Quindi:

$I_{3,1} = -e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \operatorname{sen} x - 9 I_{3,1} \rightarrow I_{3,1} = \frac{1}{10}(-e^{3x} \cos x + 3e^{3x} \operatorname{sen} x) + C_1$

Sostituendo in $I_{3,3}$ si ha:

$I_{3,3} = \frac{1}{6}\left(e^{3x} \operatorname{sen}^3 x - e^{3x} \operatorname{sen}^2 x \cos x + \frac{3}{5} e^{3x} \operatorname{sen} x - \frac{1}{5} e^{3x} \cos x\right) + C_2$

Infine:

$$I_{3,5} = \frac{1}{34}\left(3e^{3x} \operatorname{sen}^5 x - 5e^{3x} \operatorname{sen}^4 x \cos x + \frac{10}{3} e^{3x} \operatorname{sen} x - \frac{10}{3} e^{3x} \operatorname{sen}^2 x \cos x + 2e^{3x} \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} e^{3x} \cos x\right) + C$$

In modo del tutto analogo, cioè prendendo $g(x) = \frac{1}{m} e^{mx}$ e integrando due volte per parti, si giunge alla formula di riduzione:

$$I_{m,n} = \int e^{mx} \cos^n x\,dx = \frac{1}{m^2 + n^2}\left[m e^{mx} \cos^n x + n e^{mx} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + n(n-1) I_{m,n-2}\right]$$

con $I_{m,n-2} = \int e^{mx} \cos^{n-2} x\,dx$.

Questa formula permette di ricondurre, mediante riduzioni successive, il calcolo di $I_{m,n}$ a quello di $I_{m,0}$ se n è pari, a quello di $I_{m,1}$ se n è dispari, essendo:

$$I_{m,0} = \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m} e^{mx} + C \quad \text{e} \quad I_{m,1} = \int e^{mx} \cos x\,dx$$

$I_{m,1}$ si integra ancora per parti.

Si calcoli ad esempio:

203. $I_{6,4} = \int e^{6x}\cos^4 x\,dx = \frac{1}{6^2+4^2}(6e^{6x}\cos^4 x + 4e^{6x}\cos^3 x\,\text{sen}\,x + 12 I_{6,2})$

$$I_{6,2} = \int e^{6x}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{6^2+2^2}(6e^{6x}\cos^2 x + 2e^{6x}\cos x\,\text{sen}\,x + 2I_{6,0})$$

$$I_{6,0} = \int e^{6x}dx = \frac16 e^{6x} + C_1$$

Sostituendo in $I_{6,2}$ e quindi in $I_{6,4}$ si ha:

$$I_{6,2} = \frac{1}{20}e^{6x}\left(3\cos^2 x + \cos x\,\text{sen}\,x + \frac16\right) + C_2$$

$$I_{6,4} = \frac{1}{26}e^{6x}\left(3\cos^4 x + 2\cos^3 x\,\text{sen}\,x + \frac{9}{10}\cos^2 x + \frac{3}{10}\cos x\,\text{sen}\,x + \frac{1}{20}\right) + C$$

5.12.- Integrali di tipo: a) $\int x^n \,\text{arc sen}\,x\,dx$, **b)** $\int x^n\,\text{arc cos}\,x\,dx$, **c)** $\int x^n\,\text{arc tg}\,x\,dx$

Gli integrali trascendenti dei tipi a e b sono trattati nel §6.4, infatti una prima integrazione per parti li riconduce al calcolo di integrali di differenziale binomio.

Gli integrali di tipo c si integrano per parti, come indicato nella TAB. 3-I, e vengono ricondotti ad integrali di funzioni razionali fratte.

Esempi.

204. $\int x^3\,\text{arc tg}\,x\,dx = \frac14\int \text{arc tg}\,x\,d(x^4) = \frac14\left(x^4\,\text{arc tg}\,x - \int x^4\frac{1}{1+x^2}dx\right) =$

$$= \frac14 x^4\,\text{arc tg}\,x - \frac14\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac14 x^4\,\text{arc tg}\,x - \frac14\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac14 x^4\,\text{arc tg}\,x - \frac14\left(\frac{x^3}{3} - x + \text{arc tg}\,x\right) + C$$

205. $I = \int\frac{1}{x^2}\,\text{arc tg}\frac{x}{2}\,dx = \frac12\int\frac{4}{x^2}\,\text{arc tg}\frac x2\,d\left(\frac x2\right)$

Posto $\frac x2 = t \rightarrow d\left(\frac x2\right) = dt$, si ha:

$$I = \frac12\int\frac{1}{t^2}\,\text{arc tg}\,t\,dt = -\frac12\int \text{arc tg}\,t\,d\left(\frac1t\right) = [\text{per parti}] =$$

$$= -\frac12\left(\frac1t\,\text{arc tg}\,t - \int\frac1t\cdot\frac{1}{1+t^2}dt\right) = -\frac12\left(\frac1t\,\text{arc tg}\,t - I'\right)$$

Essendo $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac1t - \frac{t}{1+t^2}$ si ha:

$$I' = \int\frac1t\,dt - \int\frac{t}{1+t^2}dt = \ln|t| - \frac12\ln(1+t^2) = \ln\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} + C_1$$

Pertanto:

$$I = -\frac12\left(\frac1t\,\text{arc tg}\,t - \ln\frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}\right) + C = -\frac12\left(\frac2x\,\text{arc tg}\frac x2 - \ln\frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}}\right) + C =$$

$$= -\frac1x\,\text{arc tg}\frac x2 + \frac12\ln\frac{|x|}{\sqrt{4+x^2}} + C$$

206. $I = \int\frac{1}{x^3}\,\text{arc sen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = [\text{TAB. I-IX}] = \int\frac{1}{x^3}\,\text{arc tg}\,x\,dx = -\frac12\int \text{arc tg}\,x\,d\left(\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= [\text{per parti}] = -\frac12\left(\frac{1}{x^2}\,\text{arc tg}\,x - \int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2+1}dx\right) = -\frac{1}{2x^2}\,\text{arc tg}\,x + \frac12 I'$$

$$I' = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int\frac{1}{x^2}dx - \int\frac{1}{x^2+1}dx = -\frac1x - \text{arc tg}\,x + C_1$$

Pertanto:

$$I = -\frac{1}{2x^2}\,\text{arc tg}\,x + \frac12 I' = -\frac{1}{2x^2}\,\text{arc tg}\,x - \frac{1}{2x} - \frac12\,\text{arc tg}\,x + C$$

207. $I = \int \text{arc tg}\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,dx = [\text{ponendo } x = \text{sen}\,t \rightarrow dx = \cos t\,dt] =$

$$= \int\text{arc tg}\frac{\text{sen}\,t\cos t}{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int t\cos t\,dt = \int t\,d(\text{sen}\,t) = [\text{per parti}] =$$

$$= t\,\text{sen}\,t + \cos t + C$$

La posizione fatta non è però facile da individuare. Si consiglia quindi di procedere nel modo seguente:

$$\text{arc tg}\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = [\text{cfr. TAB. I-IX}] = \text{arc sen}\,x$$

quindi:

$$I = \int\text{arc sen}\,x\,dx = [\text{per parti}] = x\,\text{arc sen}\,x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\,\text{arc sen}\,x + \int\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\,\text{arc sen}\,x + \sqrt{1-x^2} + C$$

6 - INTEGRALI DI FUNZIONI IRRAZIONALI

6.1.- Integrali del tipo: $\int F(x^{a/b}, x^{c/d}, x^{e/f})\, dx$

La prima cosa da fare è cercare di razionalizzare la funzione integranda; una volta fatto ciò, l'integrazione si esegue con i metodi visti nei capitoli precedenti.

Diciamo subito che il processo di razionalizzazione conduce a risultati espressi da funzioni razionali, irrazionali, trascendenti elementari combinate tra loro. Inoltre, tale razionalizzazione è possibile solo in pochi casi particolari.

Elementi differenziali del tipo $F(x^{a/b}, x^{c/d}, x^{e/f})\, dx$, ove F è un simbolo di funzione razionale (cioè le operazioni eseguite su $x^{a/b}$, $x^{c/d}$, $x^{e/f}$ sono di tipo razionale), sono razionalizzabili mediante la posizione:

$$x = t^s \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = \sqrt[s]{x} \\ dx = s t^{s-1}\, dt \end{cases}$$

ove s è il minimo comune multiplo di b, d, f (indici dei radicali).

Esempio:

208. $I = \displaystyle\int \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx$

Posto $x = t^{12} \rightarrow t = \sqrt[12]{x} \rightarrow dx = 12 t^{11}\, dt$, si ha:

$$I = \int \frac{1 - t^4}{t^6 + t^3}\, 12 t^{11}\, dt = 12 \int \frac{t^8 (1 - t^4)}{t^3 + 1}\, dt = 12 \int \frac{t^8 (1 - t)(1 + t^2)}{t^2 - t + 1}\, dt$$

Dividendo il numeratore per il denominatore (cfr. §1.1), si ha:

$$\frac{t^8 (1 - t)(1 + t^2)}{t^2 - t + 1} = - t^9 + t^6 + t^5 - t^3 - t^2 + 1 + \frac{t - 1}{t^2 - t + 1}$$

e quindi:

$$I = 12 \int (- t^9 + t^6 + t^5 - t^3 - t^2 + 1)\, dt + 12 \int \frac{t - 1}{t^2 - t + 1}\, dt$$

Essendo:

$$I' = \int \frac{t - 1}{t^2 - t + 1}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t - 1 - 1}{t^2 - t + 1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1}\, dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 - t + 1}\, dt = \frac{1}{2} \ln (t^2 - t + 1) - \frac{1}{2} I''$$

$$I'' = \int \frac{1}{t^2 - t + 1}\, dt = \int \frac{1}{t^2 - t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\, dt = \int \frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, d\left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C_2$$

$$I' = \frac{1}{2} \ln (t^2 - t + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C_1$$

$$I = - 12 \frac{t^{10}}{10} + 12 \frac{t^7}{7} + 12 \frac{t^6}{6} - 12 \frac{t^4}{4} - 12 \frac{t^3}{3} + 12t + 6 \ln (t^2 - t + 1) +$$
$$- 12 \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$I = - \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{7} \cdot \sqrt[12]{x^7} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + 12\sqrt[12]{x} +$$
$$+ 6 \ln (\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 1) - 4\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt[12]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C$$

209. $I = \displaystyle\int \frac{1 - \sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x + 1}}\, dx = \int \frac{1 - \sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x + 1}}\, d(x + 1)$

Posto $x + 1 = t^6 \rightarrow t = \sqrt[6]{x + 1} \rightarrow d(x + 1) = 6t^5\, dt$, si ha:

$$I = \int \frac{1 - t^2}{t^3 + t^2}\, 6t^5\, dt = 6 \int \frac{t^3 (1 - t)(1 + t)}{t^2 (t + 1)}\, dt = 6 \int t^3 (1 - t)\, dt = 6 \frac{t^4}{4} - 6 \frac{t^5}{5} + C$$

$$I = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{(x + 1)^5} + C$$

6.2.- Integrali contenenti $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$

Altri casi di razionalizzazione possibile sono sintetizzati nei seguenti 6 tipi particolari di integrali irrazionali, ai quali molti altri si possono ricondurre:

1) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$ 3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$ 5) $I_5 = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$

2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx$ 4) $I_4 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ 6) $I_6 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

1) La razionalizzazione si esegue ponendo:

$$x = a \operatorname{sen} t \quad \rightarrow \quad t = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} \quad \rightarrow \quad dx = a \cos t\, dt$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}}\, a \cos t\, dt = \frac{a}{a} \int \frac{\cos t}{\cos t}\, dt = \int dt = t + C$$

Si ha pertanto:

$$I_1 = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$$

Allo stesso risultato si perviene più semplicemente nel modo seguente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$$

2) Si giunge ad un integrale di tipo elementare ponendo:

$$x = a\,\mathrm{Sh}\,t \;\rightarrow\; t = \mathrm{Sett\,Sh}\frac{x}{a} \;\rightarrow\; dx = a\,\mathrm{Ch}\,t\,dt$$

Ricordando le identità iperboliche $\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t = 1 \;\rightarrow\; \mathrm{Ch}^2 t = 1 + \mathrm{Sh}^2 t$ si ha:

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2\,\mathrm{Sh}^2 t}}\,a\,\mathrm{Ch}\,t\,dt = \frac{a}{a}\int \frac{\mathrm{Ch}\,t}{\mathrm{Ch}\,t}\,dt = \int dt = t + C_1 = \mathrm{Sett\,Sh}\frac{x}{a} + C_1 =$$

$$= [\text{cfr. §1.11}] = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right) + C_1 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} + C_1 =$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

3) Si giunge ad un integrale di tipo elementare ponendo:

$$x = a\,\mathrm{Ch}\,t \;\rightarrow\; t = \mathrm{Sett\,Ch}\frac{x}{a} \;\rightarrow\; dx = a\,\mathrm{Sh}\,t\,dt$$

Ricordando le identità iperboliche $\mathrm{Ch}^2 t - \mathrm{Sh}^2 t = 1 \rightarrow \mathrm{Sh}^2 t = \mathrm{Ch}^2 t - 1$ si ha:

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\,\mathrm{Ch}^2 t - a^2}}\,a\,\mathrm{Sh}\,t\,dt = \int \frac{1}{\mathrm{Sh}\,t}\,\mathrm{Sh}\,t\,dt = \int dt = t + C = \mathrm{Sett\,Ch}\frac{x}{a} + C$$

Si ricordi che il risultato è corretto (cfr. §1.11) se è $\frac{x}{a} > 1 \rightarrow x > a$. Potendo essere $x < -a$ la soluzione corretta dell'integrale è:

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right| + C_1 = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

4) Ci si riconduce ad un integrale di funzione trigonometrica e successivamente di funzione razionale, ponendo:

$$x = a\,\mathrm{sen}\,t \;\rightarrow\; t = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} \;\rightarrow\; dx = a\cos t\,dt$$

$$I_4 = \int \sqrt{a^2 - a^2\,\mathrm{sen}^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}a^2(t + \mathrm{sen}\,t\cos t) + C$$

Essendo: $\mathrm{sen}\,t = \frac{x}{a} \;\rightarrow\; \cos t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ sostituendo si ha:

$$I_4 = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right) + C$$

5) Si giunge ad un integrale di tipo elementare ponendo:

$$x = a\,\mathrm{Sh}\,t \;\rightarrow\; t = \mathrm{Sett\,Sh}\frac{x}{a} \;\rightarrow\; dx = a\,\mathrm{Ch}\,t\,dt$$

$$I_5 = \int \sqrt{a^2\,\mathrm{Sh}^2 t + a^2}\cdot a\,\mathrm{Ch}\,t\,dt = a^2\int \mathrm{Ch}^2 t\,dt$$

che si può integrare per parti:

$$\int \mathrm{Ch}^2 t\,dt = \int \mathrm{Ch}\,t\cdot\mathrm{Ch}\,t\,dt = \int \mathrm{Ch}\,t\,d(\mathrm{Sh}\,t) = \mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t - \int \mathrm{Sh}\,t\,d(\mathrm{Ch}\,t) =$$

$$= \mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t - \int \mathrm{Sh}^2 t\,dt = \mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t - \int (\mathrm{Ch}^2 t - 1)\,dt =$$

$$= \mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t - \int \mathrm{Ch}^2 t\,dt + t$$

Trasportando al 1° membro il 2° addendo dell'ultimo membro e sommando:

$$2\int \mathrm{Ch}^2 t\,dt = \mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t + t + C_1 \;\rightarrow\; \int \mathrm{Ch}^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t + t) + C_2 \quad (*)$$

Essendo $\mathrm{Sh}\,t = \frac{x}{a} \;\rightarrow\; \mathrm{Ch}\,t = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}$ sostituendo si ha:

$$I_5 = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = a^2\int \mathrm{Ch}^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t + t) + C_2 =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\mathrm{Sett\,Sh}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2}\right) + C_3 = \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + C$$

6) Si giunge ad un integrale di tipo elementare ponendo:

$$x = a\,\mathrm{Ch}\,t \;\rightarrow\; t = \mathrm{Sett\,Ch}\frac{x}{a} \;\rightarrow\; dx = a\,\mathrm{Sh}\,t\,dt$$

$$I_6 = \int \sqrt{a^2\,\mathrm{Ch}^2 - a^2}\cdot a\,\mathrm{Sh}\,t\,dt = a^2\int \mathrm{Sh}^2 t\,dt$$

che si integra per parti, oppure esprimendo $\mathrm{Sh}\,t$ in funzione di $\mathrm{Ch}\,t$ e ricordando la (*):

$$I_6 = a^2\int (\mathrm{Ch}^2 t - 1)\,dt = a^2\left(\int \mathrm{Ch}^2 t\,dt - t\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t + \frac{t}{2} - t\right) + C_1 =$$

$$= \frac{a^2}{2}(\mathrm{Ch}\,t\,\mathrm{Sh}\,t - t) + C_1$$

Essendo $\mathrm{Ch}\,t = \frac{x}{a} \;\rightarrow\; \mathrm{Sh}\,t = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ sostituendo si ha:

$$I_6 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \mathrm{Sett\,Ch}\frac{x}{a}\right) + C_1 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2} - \mathrm{Sett\,Ch}\frac{x}{a}\right) + C_1$$

Questa relazione è valida solo se è $x > a$ (cfr. §1.11). Potendo essere anche $x < -a$, la soluzione corretta dell'integrale è:

$$I_6 = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

I risultati di questi ultimi tre tipi di integrali sono difficili da ricordare, ma ciò che più interessa è il metodo per giungere a tali risultati e non i risultati in se stessi.

Riepilogando:

TAB. 6-I

TIPO	POSIZIONE	RISULTATO
1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$	$x = a \operatorname{sen} t$	$\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$
2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$	$x = a \operatorname{Sh} t$	$\operatorname{Sett Sh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$	$x = a \operatorname{Ch} t$	$\operatorname{Sett Ch}\frac{x}{a} + C_1 = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$
4) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$x = a \operatorname{sen} t$	$\frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$
5) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$	$x = a \operatorname{Sh} t$	$\frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Sett Sh}\frac{x}{a} + x\sqrt{x^2+a^2}\right) + C_1 = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + C$
6) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$	$x = a \operatorname{Ch} t$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \operatorname{Sett Ch}\frac{x}{a}\right) + C_1 = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$

6.3.- Integrali contenenti $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Si possono adesso introdurre i seguenti casi generali, riconducibili ad uno dei sei tipi precedenti:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Il trinomio che compare sotto radice, come è stato detto al §1.4, può ammettere degli zeri reali o complessi a seconda che $\Delta = b^2 - 4ac$ sia rispettivamente positivo o negativo.

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

Sarà sempre possibile trasformare $ax^2 + bx + c$ in differenza di due quadrati. Infatti:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2) = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 - (b^2 - 4ac)]$$

Posto allora: $2ax + b = z$ e $b^2 - 4ac = k^2$ si ha:

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} \dfrac{1}{4a}(z^2 - k^2) & \text{per } a > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{4(-a)}(k^2 - z^2) & \text{per } a < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$

Sarà sempre possibile trasformare $ax^2 + bx + c$ in somma di due quadrati. Infatti:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 + (-\Delta)] \qquad \text{con } -\Delta > 0$$

Posto allora: $2ax + b = z$ e $-\Delta = 4ac - b^2 = k^2$ si ha:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(z^2 + k^2)$$

Con questi procedimenti un integrale di tipo a) o b) viene ricondotto ad uno di quelli inclusi nella TAB. 6-I. Per gli integrali di tipo c) si possono verificare due casi:

1) $px + q = \dfrac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) \;\rightarrow\; px + q = 2ax + b \;\rightarrow\; p = 2a\,,\; q = b$

In questo caso si ha:

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,d(ax^2+bx+c) = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$$

2) $px + q$ non è la derivata di $ax^2 + bx + c$; si ha allora:

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = p\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + q\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Il secondo integrale al secondo membro è del tipo a), mentre il primo si può scrivere:

$$\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx - \frac{pb}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Così il primo integrale rientra nel primo caso, il secondo è del tipo a).

Man mano si svolgeranno gli esempi, si faranno vedere altri procedimenti, la cui utilità consiste nella semplificazione del calcolo vero e proprio. Chi dovesse trovare difficoltà nell'acquisire i diversi procedimenti, segua il metodo generale, il quale, pur essendo in certi casi lungo, è sempre efficace.

210. $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}\,dx$

L'integrale è del tipo a). Essendo $a = 1 > 0$ e $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, il radicando si può scrivere come differenza di due quadrati:

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}[(2x-3)^2 - 1]$$

Si ha pertanto:

$$I = 2\int \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^2 - 1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^2-1}}\,d(2x-3) = \int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,dz$$

con $z = 2x - 3$. Dalla TAB. 6-I si ha:

$$I = \ln\lvert z + \sqrt{z^2-1}\rvert + C = \ln\lvert 2x - 3 + \sqrt{(2x-3)^2-1}\rvert + C =$$

Riepilogando:

TAB. 6-I

TIPO	POSIZIONE	RISULTATO
1) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$	$x = a \operatorname{sen} t$	$\operatorname{arc sen}\frac{x}{a} + C$
2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$	$x = a \operatorname{Sh} t$	$\operatorname{Sett Sh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$	$x = a \operatorname{Ch} t$	$\operatorname{Sett Ch}\frac{x}{a} + C_1 = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$
4) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$x = a \operatorname{sen} t$	$\frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arc sen}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$
5) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$	$x = a \operatorname{Sh} t$	$\frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Sett Sh}\frac{x}{a} + x\sqrt{x^2+a^2}\right) + C_1 =$ $= \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + C$
6) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$	$x = a \operatorname{Ch} t$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \operatorname{Sett Ch}\frac{x}{a}\right) + C_1 =$ $= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$

6.3.- Integrali contenenti $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Si possono adesso introdurre i seguenti casi generali, riconducibili ad uno dei sei tipi precedenti:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Il trinomio che compare sotto radice, come è stato detto al §1.4, può ammettere degli zeri reali o complessi a seconda che $\Delta = b^2 - 4ac$ sia rispettivamente positivo o negativo.

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

Sarà sempre possibile trasformare $ax^2 + bx + c$ in differenza di due quadrati. Infatti:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - b^2) = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 - (b^2 - 4ac)]$$

Posto allora: $2ax + b = z$ e $b^2 - 4ac = k^2$ si ha:

$$ax^2 + bx + c = \begin{cases} \dfrac{1}{4a}(z^2 - k^2) & \text{per } a > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{4(-a)}(k^2 - z^2) & \text{per } a < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$

Sarà sempre possibile trasformare $ax^2 + bx + c$ in somma di due quadrati. Infatti:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2 + (-\Delta)] \qquad \text{con } -\Delta > 0$$

Posto allora: $2ax + b = z$ e $-\Delta = 4ac - b^2 = k^2$ si ha:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(z^2 + k^2)$$

Con questi procedimenti un integrale di tipo a) o b) viene ricondotto ad uno di quelli inclusi nella TAB. 6-I. Per gli integrali di tipo c) si possono verificare due casi:

1) $px + q = \dfrac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) \;\rightarrow\; px + q = 2ax + b \;\rightarrow\; p = 2a\,,\; q = b$

In questo caso si ha:

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}d(ax^2+bx+c) = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$$

2) $px + q$ non è la derivata di $ax^2 + bx + c$; si ha allora:

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = p\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + q\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Il secondo integrale al secondo membro è del tipo a), mentre il primo si può scrivere:

$$\frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx - \frac{pb}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Così il primo integrale rientra nel primo caso, il secondo è del tipo a).

Man mano si svolgeranno gli esempi, si faranno vedere altri procedimenti, la cui utilità consiste nella semplificazione del calcolo vero e proprio. Chi dovesse trovare difficoltà nell'acquisire i diversi procedimenti, segua il metodo generale, il quale, pur essendo in certi casi lungo, è sempre efficace.

210. $I = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}dx$

L'integrale è del tipo a). Essendo $a = 1 > 0$ e $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, il radicando si può scrivere come differenza di due quadrati:

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}[(2x-3)^2 - 1]$$

Si ha pertanto:

$$I = 2\int \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^2 - 1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^2-1}}d(2x-3) = \int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}dz$$

con $z = 2x - 3$. Dalla TAB. 6-I si ha:

$$I = \ln\lvert z + \sqrt{z^2-1}\rvert + C = \ln\lvert 2x - 3 + \sqrt{(2x-3)^2 - 1}\rvert + C =$$

$$= \ln|2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}| + C$$

ALTRO METODO DI RISOLUZIONE. Si ponga:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x + t \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x$$

Tale posizione è suggerita dal fatto che, elevando al quadrato ambo i membri, scompaiono i termini in x^2.

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2tx + t^2 \quad \rightarrow \quad 2tx + 3x = 2 - t^2 \quad \rightarrow \quad x(2t + 3) = 2 - t^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{2 - t^2}{2t + 3} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{-2t(2t + 3) - 2(2 - t^2)}{(2t + 3)^2}\,dt = -\frac{2(t^2 + 3t + 2)}{(2t + 3)^2}\,dt$$

Sostituendo si ha:

$$I = -2\int \frac{1}{x + t} \cdot \frac{t^2 + 3t + 2}{(2t + 3)^2}\,dt = -2\int \frac{1}{2t + 3}\,dt = -\int \frac{1}{2t + 3}\,d(2t + 3) =$$

$$= -\ln|2t + 3| + C = -\ln|3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} - 2x| + C =$$

$$= \ln|2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}| + C$$

211. $I = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}\,dx$

L'integrale è del tipo c).

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x + 1 - 1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{-2x + 1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}\,dx\right) = -\frac{1}{2}(I' - I'')$$

$I' = 2\sqrt{-x^2 + x + 2} + C_1$, I'' è del tipo a).

Essendo $a = -1 < 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$, il radicando può essere espresso come differenza di due quadrati:

$$-x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -\frac{1}{4}[(2x - 1)^2 - 9] = \frac{1}{4}[9 - (2x - 1)^2]$$

$$I'' = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{9 - (2x - 1)^2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{9 - (2x - 1)^2}}\,d(2x - 1) = \int \frac{1}{\sqrt{9 - z^2}}\,dz \qquad \text{con } z = 2x - 1$$

Dalla TAB. 6-I si ha:

$$I'' = \text{arcsen}\,\frac{z}{3} + C_2 = \text{arcsen}\,\frac{2x - 1}{3} + C_2$$

Sostituendo I' ed I'' in I si ha:

$$I = -\frac{1}{2}(I' - I'') = -\sqrt{-x^2 + x + 2} + \frac{1}{2}\,\text{arcsen}\,\frac{2x - 1}{3} + C$$

ALTRO METODO. Si ponga:

$$\sqrt{-x^2 + x + 2} = (x + 1)\,t \ (*) \quad \rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 2}}{x + 1}$$

Tale posizione è suggerita dal fatto che $x + 1$ è uno dei due fattori in cui si può scomporre il radicando:

$$-x^2 + x + 2 = -(x + 1)(x - 2)$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (*):

$$-(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2 t^2$$

e semplificando spariscono i termini in x^2:

$$-(x - 2) = (x + 1)\,t^2$$

Ed infine ricavando x si ha:

$$x = -\frac{t^2 - 2}{t^2 + 1} \quad \rightarrow \quad dx = \dots = -\frac{6t}{(t^2 + 1)^2}\,dt$$

Operando le sostituzioni in I, questo diventa l'integrale di una funzione razionale fratta. Questo metodo è quindi più lungo.

212. $I = \int \sqrt{x^2 + 4x + 13}\,dx$

L'integrale è del tipo b).

$$I = \int \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 9}\,dx = \int \sqrt{(x + 2)^2 + 9}\,dx = \int \sqrt{(x + 2)^2 + 9}\,d(x + 2) =$$

$$= [\text{posto } z = x + 2] = \int \sqrt{z^2 + 9}\,dz = \frac{9}{2}\left(\text{Sett Sh}\,\frac{z}{3} + \frac{z\sqrt{z^2 + 9}}{9}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\text{Sett Sh}\,\frac{x + 2}{3} + \frac{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 13}}{9}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2}[9\ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}) + (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 13}] + C$$

213. $I = \int \sqrt{-x^2 - x + 1}\,dx$

L'integrale è del tipo b), infatti:

$$-x^2 - x + 1 = -(x^2 + x - 1) = -\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right] =$$

$$= -\left[\frac{(2x + 1)^2}{4} - \frac{5}{4}\right] = \frac{1}{4}[5 - (2x + 1)^2]$$

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{5 - (2x + 1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \sqrt{5 - (2x + 1)^2}\,d(2x + 1) =$$

$$= [\text{posto } z = 2x + 1] = \frac{1}{4}\int \sqrt{5 - z^2}\,dz = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}\left(\text{arcsen}\,\frac{z}{\sqrt{5}} + \frac{z\sqrt{5 - z^2}}{5}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left[5\,\text{arcsen}\,\frac{2x + 1}{\sqrt{5}} + (2x + 1)\sqrt{-x^2 - x + 1}\right] + C$$

214. $I=\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx$.

L'integrale è di tipo c).

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2+4}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx+2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+10}}\,dx=\frac{1}{2}I'+2I''$$

$I'=2\sqrt{x^2+2x+10}+C_1$, I'' è del tipo a).

Essendo:

$$x^2+2x+10=x^2+2x+1+9=(x+1)^2+9=z^2+9 \quad \text{con} \quad z=x+1$$

sostituendo si ha:

$$I''=\int\frac{1}{\sqrt{z^2+9}}\,dz=\text{Sett Sh}\,\frac{z}{3}+C_2=\text{Sett Sh}\,\frac{x+1}{3}+C_2$$

$$I=\frac{1}{2}I'+2I''=\sqrt{x^2+2x+10}+2\,\text{Sett Sh}\,\frac{x+1}{3}+C$$

215. $I=\int\frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,dx$

Apparentemente non rientra in alcuno dei tipi a), b) o c). Osserviamo però che è:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,d(x^2)$$

Posto allora $x^2=t \;\rightarrow\; d(x^2)=dt$, si ha:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{t+1}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\,dt=\text{[l'integrale è di tipo c)]}=-\frac{1}{4}\int\frac{-2t+3-5}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{-2t+3}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\,dt+\frac{5}{4}\int\frac{1}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\,dt=-\frac{1}{4}I'+\frac{5}{4}I''$$

$I'=2\sqrt{-t^2+3t-2}+C_1$, I'' è del tipo a).

Essendo:

$$-t^2+3t-2=-(t^2-3t+2)=-\frac{4t^2-12t+8}{4}=-\frac{4t^2-12t+9-1}{4}=$$

$$=-\frac{1}{4}[(2t-3)^2-1]=\frac{1}{4}[1-(2t-3)^2]=\frac{1}{4}(1-z^2)$$

con $z=2t-3 \;\rightarrow\; dz=2dt$, ed inoltre:

$$I''=\int\frac{1}{\sqrt{-t^2+3t-2}}\,dt=2\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{dz}{2}=\text{arc sen}\,z+C_2=$$

$$=\text{arc sen}\,(2t-3)+C_2$$

sostituendo I' ed I'' in I si ottiene:

$$I=-\frac{1}{4}I'+\frac{5}{4}I''=-\frac{1}{4}\cdot2\sqrt{-t^2+3t-2}+\frac{5}{4}\,\text{arc sen}\,(2t-3)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{-x^4+3x^2-2}+\frac{5}{4}\,\text{arc sen}\,(2x^2-3)+C$$

6.4.- Integrali di differenziale binomio

Sono gli integrali del tipo $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ con m, n, p numeri razionali. Affinché questi integrali siano razionalizzabili si deve verificare una delle seguenti condizioni:

1) p intero. L'integrale è del tipo considerato al §6.1, ove si è posto $x=t^s$ con s minimo comune multiplo dei denominatori di m ed n che sono razionali. Esempio:

216. $I=\int x^{-\frac{1}{3}}\left[1+x^{\frac{1}{6}}\right]^{-1}dx=\int\frac{1}{x^{1/3}+x^{1/2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Si pone $x=t^6 \;\rightarrow\; t=\sqrt[6]{x} \;\rightarrow\; dx=6t^5\,dt$

$$I=\int\frac{1}{t^3+t^2}\cdot6t^5\,dt=6\int\frac{t^5}{t^2(t+1)}\,dt=6\int\frac{t^3}{t+1}\,dt$$

$$\frac{t^3}{t+1}=\frac{t^3+1-1}{t+1}=\frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}=t^2-t+1-\frac{1}{t+1}$$

$$I=6\int(t^2-t+1)\,dt-6\int\frac{1}{t+1}\,dt=6\frac{t^3}{3}-6\frac{t^2}{2}+6t-6\ln(t+1)+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$$

2) $\frac{m+1}{n}$ intero. Nel caso in cui è $p=\frac{r}{s}$ si effettua la sostituzione: $a+bx^n=t^s$ (s è il denominatore di p). Esempio.

217. $I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left[1+x^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}dx$

Si ha: $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot4=2$ intero

Si pone: $1+x^{1/4}=t^3 \;\rightarrow\; \begin{cases} t=\sqrt[3]{1+x^{1/4}}=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \\ x=(t^3-1)^4 \;\rightarrow\; dx=12(t^3-1)^3t^2\,dt \\ x^{-1/2}=(t^3-1)^{-2} \end{cases}$

$$I=\int\frac{1}{(t^3-1)^2}\cdot t\cdot12(t^3-1)^3t^2\,dt=12\int t^3(t^3-1)\,dt=12\int t^6\,dt-12\int t^3\,dt=$$

$$=12\frac{t^7}{7}-12\frac{t^4}{4}+C=\frac{12}{7}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C$$

3) $p+\frac{m+1}{n}$ intero. In questo caso si effettua la sostituzione:

$\frac{a+bx^n}{x^n} = b + ax^{-n} = t^s$ [s è il denominatore di p]. Esempio

218. $I=\int x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

Si ha: $p+\frac{m+1}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}+1}{1} = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 1$ intero

Si pone: $\frac{1-x}{x}=t^2 \to \begin{cases} x^{-1}-1=t^2 \to x=\frac{1}{t^2+1} \to dx=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt \\ 1-x = t^2x = t^2\cdot\frac{1}{t^2+1}\end{cases}$

Sostituendo si ha:

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\cdot\left[-\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt\right] = -2\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = -2I_2$$

I_2 è del tipo $\int\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ e ad esso si può applicare formula di riduzione [4.3.4]:

$I_2=\frac{1}{2} I_1+\frac{t}{2(t^2+1)}$ con $I_1=\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arc\,tg} t + C_1$. Pertanto:

$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}+C_1$

Sostituendo:

$$I=-2I_2 = -\operatorname{arc\,tg} t - \frac{t}{t^2+1}+C = -\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\frac{1}{x}}+C=$$

$$=-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \sqrt{x(1-x)} \quad + C$$

Se m, n, p, anziché razionali sono reali, l'integrale è razionalizzabile se si verifica uno dei seguenti tre casi:

4) p intero positivo. Non è necessaria alcuna sostituzione, essendo infatti sufficiente sviluppare la potenza $(a+bx^n)^p$ e moltiplicare il risultato per x^m. L'integrale dato si trasforma nella somma di più integrali semplici. Esempio:

219. $I=\int x^{\sqrt{5}}(1+2x^{\sqrt{6}})^2dx = \int x^{\sqrt{5}}(1+4x^{\sqrt{6}}+4x^{2\sqrt{6}})\,dx=$

$=\int x^{\sqrt{5}}dx + 4\int x^{\sqrt{5}+\sqrt{6}}dx + 4\int x^{\sqrt{5}+2\sqrt{6}}dx=$

$=\frac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1}+4\cdot\frac{x^{\sqrt{5}+\sqrt{6}+1}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+1}+4\cdot\frac{x^{\sqrt{5}+2\sqrt{6}+1}}{\sqrt{5}+2\sqrt{6}+1}+C$

5) $\frac{m+1}{n}$ intero positivo. In questo caso si effettua la sostituzione $a+bx^n=t$. Esempio:

220. $I=\int x(2-\sqrt{x})^{\sqrt{3}}\,dx$

Si ha: $\frac{m+1}{n}=\frac{1+1}{\frac{1}{2}}=4$ intero positivo

Si pone: $2-\sqrt{x} = t \to \sqrt{x} = 2-t \to x=(2-t)^2 \to dx=-2(2-t)\,dt$

Sostituendo si ottiene:

$I=\int(2-t)^2t^{\sqrt{3}}[-2(2-t)]\,dt = -2\int(2-t)^3t^{\sqrt{3}}\,dt = 2\int(t-2)^3t^{\sqrt{3}}\,dt=$

$=2\int(t^3-6t^2+12t-8)t^{\sqrt{3}}\,dt=$

$=2\int t^{3+\sqrt{3}}dt - 12\int t^{2+\sqrt{3}}dt+24\int t^{1+\sqrt{3}}dt - 16\int t^{\sqrt{3}}dt=$

$=2\cdot\frac{t^{4+\sqrt{3}}}{4+\sqrt{3}} - 12\cdot\frac{t^{3+\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}}+24\cdot\frac{t^{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} - 16\cdot\frac{t^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+C=$

$=48\left[\frac{(2-\sqrt{x})^{4+\sqrt{3}}}{24(4+\sqrt{3})} - \frac{(2-\sqrt{x})^{3+\sqrt{3}}}{4(3+\sqrt{3})} + \frac{(2-\sqrt{x})^{2+\sqrt{3}}}{2(2+\sqrt{3})} - \frac{(2-\sqrt{x})^{\sqrt{3}+1}}{3(\sqrt{3}+1)}\right]+C$

6) $-\left(p+\frac{m+1}{n}\right)$ intero positivo. Si effettua la sostituzione $\frac{a+bx^n}{x^n}=t$.

221. $I=\int x^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}\,dx$

Si ha: $-\left(p+\frac{m+1}{n}\right) = -\left(-\frac{3+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)=1$ intero positivo

Si pone: $\frac{2-x^2}{x^2}=t \to \frac{2}{x^2}=t+1 \to x^2=\frac{2}{t+1}\to x=\sqrt{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}$

$dx=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{3}{2}}\right]dt = -\frac{\sqrt{2}}{2(t+1)\sqrt{t+1}}\,dt$

Sostituendo:

$$I=\int\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}\right)^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2t}{t+1}\right)^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2(t+1)\sqrt{t+1}}\right]dt=$$

$$=-\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}\cdot 2^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}}{2}\int\frac{t^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}}{(t+1)^{\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})+1+\frac{1}{2}}}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{t^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}}{t^0}\,dt = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}\,dt = -\frac{1}{4}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})+1}}{-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})+1}+C=$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}{1+\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\sqrt{\left(\frac{x^2}{2-x^2}\right)^{1+\sqrt{2}}} + C$$

Si osservi che gli integrali $\int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}}\,dx$ e $\int x^m\sqrt{ax+b}\,dx$ con m intero, altro non sono che forme particolari del secondo caso, quindi si razionalizzano con la posizione $ax+b=t^2$. Esempio:

222. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

Si pone: $2x+1=t^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{t^2-1}{2} \;\rightarrow\; dx = t\,dt \\ t = \sqrt{2x+1} \end{cases}$

Sostituendo:

$$I = \int \frac{\left[\frac{1}{2}(t^2-1)\right]^2}{t}\cdot t\,dt = \frac{1}{4}\int (t^2-1)^2\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + \sqrt{2x+1}\right] + C$$

Ricapitolando:

TAB. 6-II

$\int x^m (a+bx^n)^p$	INTERO	POSIZIONE	SIGNIFICATO DI s
m, n, p razionali	p	$x = t^s$	s è il m.c.m. fra i denominatori di m e n
	$\frac{m+1}{n}$	$a + bx^n = t^s$	s è il denominatore di p
	$p + \frac{m+1}{n}$	$\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$	s è il denominatore di p
m, n, p reali (¹)	p	non occorre sostituzione, si sviluppa $(a+bx^n)^p$	
	$\frac{m+1}{n}$	$a + bx^n = t^s$	
	$-\left(p + \frac{m+1}{n}\right)$	$\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$	

(¹) Si ricordi che per m, n, p reali, l'intero deve essere anche positivo.

6.5.- Esercizi proposti

223. $\int \frac{x+\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

224. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$

225. $\int \sqrt{-x^2-14x+17}\,dx$

226. $\int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2-12x+52}}\,dx$

227. $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx$

228. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

229. $\int \frac{1}{x(1+\sqrt{x})^2}\,dx$

230. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

231. $\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

232. $\int x^{\sqrt{2}}\left[1+3x^{1-\sqrt{2}}\right]^{2\sqrt{2}}\,dx$

233. $\int x^3 \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti

223. $I = \int \frac{x+\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

La razionalizzazione dell'integrale si ottiene ponendo:

$x+2=t^{12} \;\rightarrow\; t=\sqrt[12]{x+2} \;\rightarrow\; x=t^{12}-2 \;\rightarrow\; dx=12t^{11}\,dt$

Sostituendo:

$$I = \int \frac{t^{12}-2+t^3}{t^4}\cdot 12t^{11}\,dt = 12\int t^7(t^{12}+t^3-2)\,dt = 12\int (t^{19}+t^{10}-2t^7)\,dt =$$

$$= 12\cdot\frac{t^{20}}{20} + 12\cdot\frac{t^{11}}{11} - 24\cdot\frac{t^8}{8} + C =$$

$$= 3\,\frac{\sqrt[12]{(x+2)^{20}}}{5} + 12\,\frac{\sqrt[12]{(x+2)^{11}}}{11} - 3\cdot\sqrt[12]{(x+2)^8} + C =$$

$$= \frac{3(x+2)\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}{5} + \frac{12\cdot\sqrt[12]{(x+2)^{11}}}{11} - 3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2} + C$$

224. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$

Si tenga presente che è $x>0$. Razionalizzando il denominatore si ha:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-1)}{x}\,dx = \int\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$$

$$= \int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = I' - 2\sqrt{x}$$

I' si razionalizza ponendo:

$$\frac{x+1}{x} = z^2 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{z^2-1} \;\rightarrow\; dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}\,dz \quad \text{con } z<-1,\; z>1$$

Sostituendo si ha:

$$I' = \int z\left[-\frac{2z}{(z^2-1)^2}\right]dz = -2\int \frac{z^2}{(z^2-1)^2}\,dz = -2\int \frac{z^2-1+1}{(z^2-1)^2}\,dz =$$

$$= 2\int\frac{dz}{1-z^2} - 2\int\frac{dz}{(z^2-1)^2} = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - 2I_2 = [\text{essendo } z<-1,\ z>1] =$$

$$= \ln\frac{z+1}{z-1} - 2I_2$$

L'integrale I_2 si calcola con la formula [4.3.1] con $t = \frac{z-1}{z+1} > 0$:

$$I_2 = \frac{1}{2^3}\int\frac{(1-t)^2}{t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1\right)dt = -\frac{1}{8t} - \frac{1}{4}\ln t + \frac{t}{8} + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4}\ln\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{8}\,\frac{z-1}{z+1} + C_1$$

Sostituendo in I' si ha:

$$I' = \ln\frac{z+1}{z-1} + \frac{1}{4}\,\frac{z+1}{z-1} + \frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1} - \frac{1}{4}\,\frac{z-1}{z+1} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} + \frac{z}{z^2-1} + C = \left[\text{essendo } z=\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1} + \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\frac{1}{x}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \sqrt{x(x+1)} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2}{x+1-x} + \sqrt{x(x+1)} + C =$$

$$= \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) + \sqrt{x(x+1)} + C = \text{Sett Sh}\sqrt{x} + \sqrt{x(x+1)} + C$$

In definitiva:

$$I = I' - 2\sqrt{x} = \text{Sett Sh}\sqrt{x} + \sqrt{x(x+1)} - 2\sqrt{x} + C$$

I' può essere calcolato più velocemente ponendo:

$x = \text{Sh}^2 t \ \rightarrow\ dx = 2\,\text{Sh}\,t\,\text{Ch}\,t\,dt$, $t = \text{Sett Sh}\sqrt{x}$

$$I' = \int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int\frac{\sqrt{\text{Sh}^2 t+1}}{\text{Sh}\,t}\cdot 2\,\text{Sh}\,t\,\text{Ch}\,t\,dt =$$

$$= 2\int\text{Ch}^2 t\,dt = 2\int\text{Ch}\,t\,d(\text{Sh}\,t) = [\text{per parti}] = 2\left[\text{Ch}\,t\,\text{Sh}\,t - \int\text{Sh}\,t\,d(\text{Ch}\,t)\right] =$$

$$= 2\,\text{Ch}\,t\,\text{Sh}\,t - 2\int\text{Sh}^2 t\,dt = 2\,\text{Ch}\,t\,\text{Sh}\,t - 2\int(\text{Ch}^2 t - 1)\,dt =$$

$$= 2\,\text{Ch}\,t\,\text{Sh}\,t - 2\int\text{Ch}^2 t\,dt + 2t$$

Da questa ri ricava:

$4\int\text{Ch}^2 t\,dt = 2\,\text{Ch}\,t\,\text{Sh}\,t + 2t + C_1 \ \rightarrow\ I' = 2\int\text{Ch}^2 t\,dt = \text{Ch}\,t\,\text{Sh}\,t + t + C$

Essendo $\text{Sh}\,t = \sqrt{x}$, $\text{Ch}\,t = \sqrt{x+1}$ si ha: $I' = \sqrt{x^2+x} + \text{Sett Sh}\sqrt{x} + C$

Quindi: $I = I' - 2\sqrt{x} = \sqrt{x^2+x} + \text{Sett Sh}\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$

225. $I = \int\sqrt{-x^2-14x+17}\,dx$

Il radicando può scritto nella forma:

$$-x^2-14x+17 = -(x^2+14x-17) = -(x^2+14x+49-66) =$$
$$= -[(x+7)^2-66] = 66-(x+7)^2$$

$$I = \int\sqrt{66-(x+7)^2}\,dx = [\text{TAB. 6-I}] =$$

$$= \frac{66}{2}\left[\text{arc sen}\frac{x+7}{\sqrt{66}} + \frac{(x+7)\sqrt{-x^2-14x+17}}{66}\right] + C =$$

$$= 33\,\text{arc sen}\frac{x+7}{\sqrt{66}} + \frac{x+7}{2}\sqrt{-x^2-14x+17} + C$$

226. $$I = \int\frac{6x-5}{\sqrt{x^2-12x+52}}\,dx = 3\int\frac{2x-12}{\sqrt{x^2-12x+52}}\,dx + 31\int\frac{1}{\sqrt{x^2-12x+52}}\,dx =$$

$$= 6\sqrt{x^2-12x+52} + 31I'$$

Essendo $x^2-12x+52 = x^2-12x+36+16 = (x-6)^2+16$ si ha:

$$I' = \int\frac{1}{\sqrt{(x-6)^2+16}}\,dx = [\text{TAB. 6-I}] = \text{Sett Sh}\frac{x-6}{4} + C =$$

$$= \ln(x-6+\sqrt{x^2-12x+52}) + C$$

$$I = 6\sqrt{x^2-12x+52} + 31\ln(x-6+\sqrt{x^2-12x+52}) + C_1$$

ALTRO MODO PER CALCOLARE I'

Ponendo $\sqrt{x^2-12x+52} = x+t$ ed elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$$x^2-12x+52 = x^2+2xt+t^2 \ \rightarrow\ 2x(t+6) = 52-t^2 \ \rightarrow\ x = \frac{52-t^2}{2(t+6)} \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ dx = -\frac{t^2+12t+52}{2(t+6)^2}\,dt$$

$$I' = \int\frac{1}{\frac{52-t^2}{2(t+6)}+t}\cdot\left[\frac{t^2+12t+52}{2(t+6)^2}\right]dt = -\int\frac{1}{t+6}\,dt =$$

$$= -\ln(t+6) + C_1 = \ln\frac{1}{t+6} + C_1 = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2-12x+52}-x+6} + C_1 =$$

$$= \ln(x-6+\sqrt{x^2-12x+52}) + C$$

227. $$I = \int\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,dx = \int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

Ponendo: $x = 2\,\text{sen}^2 t \ \rightarrow\ dx = 4\,\text{sen}\,t\cos t\,dt$ $\quad t = \text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}$ e sostituendo:

$$I=\int \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\,t}{\sqrt{2}\cos t}\cdot 4\,\text{sen}\,t\cos t\,dt = 4\int \text{sen}^2 t\,dt = 4\cdot\frac{t-\text{sen}\,t\cos t}{2}+C=$$

$$=2t-\text{sen}\,2t + C = 2\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{2x-x^2}+C$$

ALTRO METODO

Si ponga $\frac{x}{2-x}=t^2 \to \begin{cases} x=\frac{2t^2}{1+t^2} \to dx=\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt \\ t=\sqrt{\frac{x}{2-x}}\end{cases}$

Sostituendo:

$$I=\int t\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,dt = 4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = 4\int\frac{1}{1+t^2}\,dt - 4\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt=$$

$$=4(I_1-I_2)$$

Gli integrali I_1 e I_2 si calcolano con la formula di riduzione [4.3.4].

228. $I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

L'integrale si razionalizza ponendo $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$. Quadrando si ha:

$x^2+x+1=x^2+2xt+t^2 \to x(2t-1)=1-t^2 \to$

$\to x=\frac{1-t^2}{2t-1} \to dx=-2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt$

Sostituendo:

$$I=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{2t-1}\left(t+\frac{1-t^2}{2t-1}\right)}\cdot\left[-2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\right]dt=-2\int\frac{1}{1-t^2}\,dt=$$

$$=-\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+x+1}+x}{1+\sqrt{x^2+x+1}-x}\right|+C$$

229. $I=\int\frac{1}{x(1+\sqrt{x})^2}\,dx=\int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-2}\,dx$

È un integrale di differenziale binomio con p intero. Si pone (cfr. TAB. 6-II): $x=t^2 \to dx=2t\,dt$.

$$I=\int\frac{1}{t^2(1+t)^2}\cdot 2t\,dt = 2\int\frac{1}{t(1+t)^2}\,dt$$

Scomponendo in frazioni parziali:

$$\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1+t)^2}=\frac{A+2At+At^2+Bt+Bt^2+Ct}{t(1+t)^2}=$$

$$=\frac{(A+B)t^2+(2A+B+C)t+A}{t(1+t)^2}$$

Dal confronto segue:

$$\begin{cases} A+B=0\\ 2A+B+C=0\\ A=1\end{cases} \to \begin{cases}A=1\\ B=-1\\ C=-1\end{cases}$$

$$I=2\int\frac{1}{t}\,dt-2\int\frac{1}{1+t}\,dt-2\int\frac{1}{(1+t)^2}\,dt=$$

$$=2\ln t-2\ln(1+t)-2\cdot\frac{(1+t)^{-1}}{-1}+C=2\ln\frac{t}{1+t}+\frac{2}{1+t}+C=$$

$$=[\text{essendo } t=\sqrt{x}]=2\ln\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{2}{1+\sqrt{x}}+C$$

230. $I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left[1+x^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}dx$

Integrale di differenziale binomio con $\frac{m+1}{n}$ intero (cfr. TAB. 6-II)

Si pone: $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \to \begin{cases}x=(t^3-1)^4\\ t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\end{cases} \to \begin{cases}\sqrt{x}=(t^3-1)^2\\ dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt\end{cases}$

Sostituendo:

$$I=\int\frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12t^2(t^3-1)^3\,dt=12\int t^3(t^3-1)\,dt=12\int t^6\,dt-12\int t^3\,dt=$$

$$=12\cdot\frac{t^7}{7}-12\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{12}{7}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C$$

231. $I=\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx=$ [razionalizzando il denominatore] $=$

$$=\int\frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2}\,dx=\int\frac{1}{x^2}\,dx-\int\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx+\int\frac{1-x^2}{x^2}\,dx=$$

$$=2\int\frac{1}{x^2}\,dx-2\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx-\int dx=-\frac{2}{x}-2I'-x$$

$I'=\int x^{-2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$. Integrale di differenziale binomio con $p+\frac{m+1}{n}=0$

Si pone: $\frac{1-x^2}{x^2}=t^2 \to \begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \to dx=-\frac{t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\,dt\\ t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\end{cases}$

Sostituendo:

$$I'=-\int(t^2+1)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\,dt=-\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=-\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$

$$= -\int dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -t + \operatorname{arctg} t + C_1$$

Pertanto:

$$I = -\frac{2}{x} - x - 2I' = -\frac{2}{x} - x + 2\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

ALTRO METODO

L'integrale dato può essere razionalizzato ponendo:

$$\sqrt{1-x^2} = (x+1)\,t \;\rightarrow\; (1-x)(1+x) = (x+1)^2 t^2 \;\rightarrow\; 1 - x = (x+1)\,t^2$$

Per cui si ha:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \;\rightarrow\; dx = -4\cdot\dfrac{t}{(1+t^2)^2}\,dt \\[2ex] t^2 = \dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$$

Sostituendo:

$$I = \int \frac{1 - \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)t}{1+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)t}\cdot\left[-4\cdot\frac{t}{(1+t^2)^2}\right]dt = -4\int\frac{t\,(t-1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)^2}\,dt$$

che è un integrale di funzione razionale fratta di calcolo laborioso.

Un ALTRO METODO ancora è il seguente.

Ponendo: $x = \operatorname{sen} t \;\rightarrow\; dx = \cos t\,dt$, $t = \operatorname{arcsen} x$ e sostituendo:

$$I = \int\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\cdot\cos t\,dt = [\text{cfr. §1.7}] = \int \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\cdot\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)dt =$$

$$= 2\int \operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,dt - \int \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\,dt = 4\int \operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) - 2\int \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= t - \operatorname{sen} t - 2\int\left(\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} + 1 - 1\right)d\left(\frac{t}{2}\right) = t - \operatorname{sen} t - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} + 2\cdot\frac{t}{2} + C$$

Essendo $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}} = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

sostituendo si ha:

$$I = 2t - \operatorname{sen} t - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = 2\operatorname{arcsen} x - x - 2\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C =$$

$$= 2\operatorname{arcsen} x - x - \frac{2}{x} + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

Trasformando l'arcoseno in arcotangente (cfr. TAB. 1-IX) si ottiene l'identità dei due risultati a meno di una costante conglobata in C.

232. $I = \int x^{\sqrt{2}}\left[1 + 3x^{1-\sqrt{2}}\right]^{2\sqrt{2}} dx$

Integrale di differenziale binomio con $-\left(p + \dfrac{m+1}{n}\right) = -\left(2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}}\right) = 3 > 0$

Si pone (cfr. TAB. 6-II):

$$\frac{1+3x^{1-\sqrt{2}}}{x^{1-\sqrt{2}}} = t \;\rightarrow\; \frac{1}{x^{1-\sqrt{2}}} = t - 3 \;\rightarrow\; x = (t-3)^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(t-3)^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}-1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}-1}(t-3)^{\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}\,dt = \frac{(t-3)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}\,dt$$

Quindi:

$$I = \int (t-3)^{2+\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{t}{t-3}\right)^{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(t-3)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int (t-3)^{2+\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}}\cdot t^{2\sqrt{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int (t-3)^2\,t^{2\sqrt{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\int\left[t^{2+2\sqrt{2}} - 6\,t^{1+2\sqrt{2}} + 9\,t^{2\sqrt{2}}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{t^{3+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}} - 6\frac{t^{2+2\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}} + 9\frac{t^{1+2\sqrt{2}}}{1+2\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1+3x^{1-\sqrt{2}}}{x^{1-\sqrt{2}}}\right)^{3+2\sqrt{2}} - 3\left(\frac{1+3x^{1-\sqrt{2}}}{x^{1-\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{9}{3-\sqrt{2}}\left(\frac{1+3x^{1-\sqrt{2}}}{x^{1-\sqrt{2}}}\right)^{1+2\sqrt{2}} + C$$

233. $I = \int x^3 \operatorname{arcsen} x\,dx = \dfrac{1}{4}\int \operatorname{arcsen} x\,d(x^4) = [\text{per parti}] =$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 \operatorname{arcsen} x - \int\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right) = \frac{1}{4}(x^4\operatorname{arcsen} x - I') \qquad I' = \int x^4(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Essendo $p + \dfrac{m+1}{n} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2} = 2$ intero, si pone:

$$\frac{1-x^2}{x^2} = t^2 \;\rightarrow\; \frac{1}{x^2} = t^2 + 1 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \;\rightarrow\; dx = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\,dt$$

$$I' = -\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}\,dt = -\int\frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt = -I_3$$

Per la formula di riduzione [4.3.4] si ha:

$$I_3 = \frac{3}{4}I_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} \quad \text{con} \quad I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1} + C_1$$

Sostituendo si ha:

$$I' = -\frac{3}{8}\operatorname{arctg} t - \frac{3}{8}\cdot\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t}{(t^2+1)^2} + C_2$$

Ed infine:

$$I = \frac{1}{4}x^4\operatorname{arcsen} x + \frac{3}{32}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{3}{32}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{16}x^3\cdot\sqrt{1-x^2} + C$$

7 - L'INTEGRALE DEFINITO

7.1.- Un'applicazione dell'operatore integrale: il calcolo delle aree

Si vuole far vedere come, mediante l'operatore integrale, è possibile il calcolo dell'area di una regione di piano compresa fra l'asse delle ascisse, la curva $y = f(x)$ e le rette di equazioni $x = a$ ed $x = b$ (fig. 7.1.1, zona in grigio).

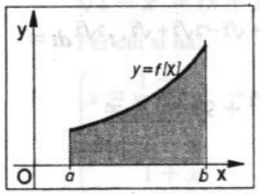


Fig. 7.1.1

Per raggiungere lo scopo consideriamo un esempio che renderà più semplice la spiegazione del caso generale.

Si consideri la funzione $y = 2x$ (che, vedi fig. 7.1.2, è rappresentata da una retta passante per l'origine) e le sue primitive:

$$y = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

(parabole con il vertice sull'asse delle ordinate). Nella fig. 7.1.2-a ne è stata disegnata una: quella corrispondente a $C = 0$.

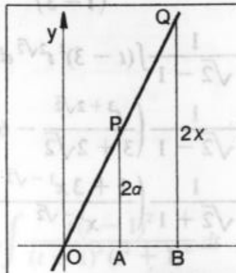


Fig. 7.1.2

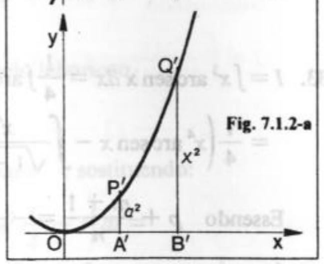


Fig. 7.1.2-a

Fissiamo sulla retta un punto P di ascissa $x = a$ ed un punto Q di ascissa generica x, con $x > a$. A questi punti corrispondono sulla primitiva i punti P' di ascissa a e Q' di ascissa x. L'area del trapezio APQB è:

$$S = \frac{1}{2}(AP + BQ)\cdot AB = \frac{1}{2}(2a + 2x)(x - a) =$$

$$= (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

La misura di questa area viene immediatamente fornita dal modulo della differenza delle ordinate dei punti P' e Q' della primitiva $y = x^2$:

$$Q'B' - P'A' = x^2 - a^2$$

Anziché considerare questa primitiva, si sarebbe potuto considerare una qualunque delle altre ed il risultato non sarebbe cambiato. Calcoliamo infatti, per qualunque C, le ordinate dei punti di ascissa $x = a$ e $x = x$ della funzione $y = x^2 + C$: $y(a) = a^2 + C$ $y(x) = x^2 + C$. Il modulo della loro differenza è:

$$|y(x) - y(a)| = |x^2 + C - (a^2 + C)| = |x^2 - a^2| = [x > a] = x^2 - a^2$$

In altre parole, essendo: $y(a) = [\int 2x\,dx]_a$ (calcolato in $x = a$)

$y(x) = [\int 2x\,dx]_x$ (calcolato in $x = x$)

ed inoltre: $y(x) - y(a) = [\int 2x\,dx]_x - [\int 2x\,dx]_a = \int_a^x 2x\,dx = x^2 - a^2$ [1]

[1] a ed x si dicono estremi (o limiti) d'integrazione e si appongono sopra e sotto il simbolo $\int$ anziché scrivere $[\int f(x)\,dx]_x - [\int f(x)\,dx]_a$. Si intende che nella primitiva va sostituito per primo quello sopra, poi quello sotto, indi si fa la differenza $F(x) - F(a)$.

si vuole affermare che l'operatore integrale è utile per il calcolo delle aree. Per esempio, per $a = 1$ e $x = 2$, l'area del trapezio APQB è data da:

$$\int_1^2 2x\,dx = \left[x^2 + C\right]_1^2 = 4 + C - (1 + C) = 3 \text{ unità quadrate,}$$

come si può facilmente verificare calcolando l'area del trapezio di fig. 7.1.3 come prodotto della semisomma delle basi per l'altezza.

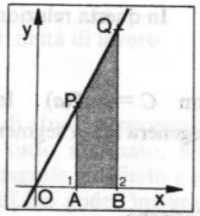


Fig. 7.1.3

Ma quanto è stato detto in un caso particolare vale anche in generale? Cioè l'espressione

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad [7.1.1]$$

ove $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$, dà la misura dell'area indicata nella fig. 7.1.4? La risposta è affermativa.

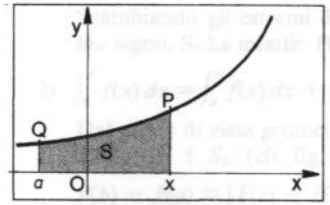


Fig. 7.1.4

Come generalizzare quanto detto? Un modo semplice è il seguente.

Sia $y = f(x)$ una funzione integrabile in tutti i punti in cui la si considera; siano Q un punto fisso d'ascissa $x = a$ e P un punto d'ascissa corrente x. Sia S l'area della parte di piano indicata in grigio in fig. 7.1.4. Si vuole calcolare tale area. A tale scopo si dia un incremento Δx a x. L'area considerata subisce un incremento ΔS rappresentato in fig. 7.1.5 dall'area del quadrilatero mistilineo APP'B. Tale area si può considerare come la somma dell'area del rettangolo APTB e dell'area del triangolo mistilineo PP'T, cioè:

$$\Delta S = y\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad [7.1.2]$$

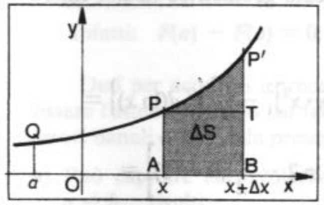


Fig. 7.1.5

essendo: $y\,\Delta x$ l'area del rettangolo APTB ($AP = y$, $AB = \Delta x$);

$\epsilon\,\Delta x$ l'area del triangolo mistilineo, equivalente ad un triangolo di ugual base $PT = \Delta x$ ed altezza 2ϵ (cfr. fig. 7.1.6).

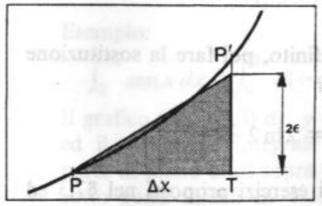


Fig. 7.1.6

Al tendere a zero di Δx anche ϵ tende a zero, pertanto, dividendo per Δx ambo i membri della [7.1.2]:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = y + \epsilon = f(x) + \epsilon$$

e passando al limite per Δx tendente a zero si ottiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (y + \epsilon)$$ [1] $$\to \frac{dS}{dx} = y \to dS = y\,dx$$

ed integrando ambo i membri si ha:

$$S = \int y\,dx = \int f(x)\,dx$$

[1] Si ricordi che: 1) ΔS e Δx sono entrambi infinitesimi con Δx.
2) Per definizione di derivata è $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{dS}{dx}$
3) È $\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$ e $\lim_{\Delta x \to 0} y = y$ poiché y non dipende da Δx.

In questa relazione, essendo l'integrale calcolato per i valori di $x > a$, si può porre:

$$S = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C \qquad [7.1.3]$$

con $C = -F(a)$. Infatti per $x = a$ l'area è zero (in fig. 7.1.4 il quadrilatero mistilineo degenera in un segmento), si ha cioè: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Pertanto dalla [7.1.3] si ricava:

$$0 = F(a) + C \;\rightarrow\; C = -F(a)$$

Cosicché

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a) \qquad [7.1.4]$$

rappresenta l'area sotto la curva $y = f(x)$, a sinistra del punto di ascissa x e a destra del punto di ascissa a.

7.2.- Integrale definito

Per $x = b$ (con $b > a$) la [7.1.4] diventa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

espressione che corrisponde quindi al calcolo di un integrale indefinito quando si assumano valori che vanno da un minimo a ad un massimo b. Il significato geometrico risulta chiaro dalle considerazioni del paragrafo precedente.

Esempio:

$$I = \int_1^2 x \ln x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x\,d(x^2) = [\text{per parti}] = \frac{1}{2}\left\{\left[\ln x \cdot x^2\right]_1^2 - \int_1^2 x^2\,d(\ln x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left\{4\ln 2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\right\} = \frac{1}{2}\left[4\ln 2 - \frac{1}{2}(4-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Si sarebbe anche potuto calcolare prima l'integrale indefinito, poi fare la sostituzione e quindi la differenza $F(b)\ \ F(a)$, cioè:

$$I = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[4\ln 2 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right] = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Lo studente acquisirà il metodo migliore risolvendo gli esercizi proposti nel §7.3 ed esaminando con cura le relative soluzioni.

Tutta la discussione fatta sinora è servita a chiarire come va eseguita l'integrazione definita ed il suo significato geometrico. Si deve però tenere presente che, mentre il calcolo dell'integrale definito va sempre fatto allo stesso modo, il suo significato può anche essere di volta in volta diverso. Nel caso, infatti, dell'esempio scelto nell'introduzione di questa pubblicazione, l'integrale rappresenta il limite di una somma di lavori infinitesimi compiuti dalla forza $F\ \ k(x - x_0)$ durante lo spostamento del suo punto di applicazione da x_0 a x. Per $x_0 = 10$ cm e $x = 30$ cm, ad esempio, l'integrale definito:

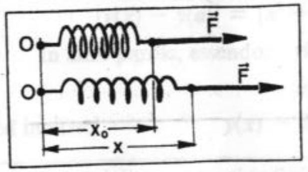


Fig. 7.2.1

$$L = \int_{10}^{30} k(x - x_0)\,dx = \int_{10}^{30} k(x-10)\,dx = k\int_{10}^{30}(x-10)\,d(x-10) =$$

$$= k\left[\frac{1}{2}(x-10)^2\right]_{10}^{30} = \frac{1}{2}k[(30-10)^2 - (10-10)^2] = 200\,k \text{ unità di lavoro}$$

dà il lavoro effettivamente compiuto dalla forza F.

Molte altre applicazioni attendono lo studente durante il corso di studi. È necessario quindi acquisire molta dimestichezza con l'integrale definito che, tutto sommato, non presenta grosse difficoltà. Esso, in fondo, si riduce al calcolo di un integrale indefinito e ad una sostituzione. Bisogna, però, tener presenti alcune proprietà (1) di cui gode l'integrale definito ed applicarle là dove occorre. Esse sono:

1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Scambiando gli estremi di integrazione l'integrale cambia segno. Si ha infatti: $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$.

2) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con $a < c < b$

Dal punto di vista geometrico ciò corrisponde a dire che è $S = S_1 + S_2$ (cfr. fig. 7.2.2). Si ha infatti:

$$F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = -F(a) + F(b)$$

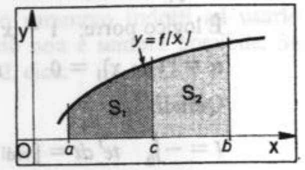


Fig. 7.2.2

3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Infatti: $F(a) - F(a) = 0$.

Dati per acquisiti i procedimenti legati all'integrazione indefinita, si ritiene opportuno fissare l'attenzione solo sui fatti nuovi che sono legati all'integrazione definita, onde evitare errori banali dovuti alla presenza degli estremi d'integrazione.

a) Può capitare che svolgendo il calcolo, pur essendo $a \neq b$, risulti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

Esempio:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{2\pi} d(-\cos x) = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0$$

Il grafico (fig. 7.2.3) di $y = \operatorname{sen} x$ con $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ed il valore dell'integrale dicono che le aree della parte di piano al di sopra dell'asse x e di quella al di sotto sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto:

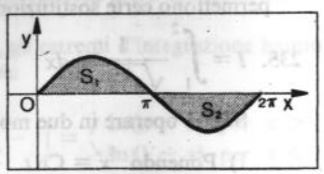


Fig. 7.2.3

$$S = S_1 + S_2 = 0 \;\rightarrow\; S_1 = -S_2$$

Allo stesso modo (fig. 7.2.4) si interpreta

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

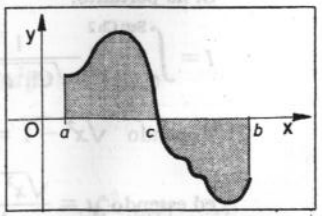


Fig. 7.2.4

Cosicché, se venisse chiesto esplicitamente il calcolo di tale area, dovremmo individuare il valore (o i valori) di x per cui è $f(x) = 0$ e cambiare segno agli integrali relativi all'area della parte di piano sotto l'asse x.

(1) Tali proprietà sono legate alla presenza degli estremi d'integrazione. Le altre proprietà sono ancora quelle dell'integrale indefinito.

Ad esempio (fig. 7.2.5):

$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx=S_1+S_2+S_3$$

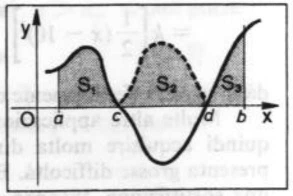


Fig. 7.2.5

b) Attenzione ai cambiamenti di variabile. Tutte le volte, infatti, che si cambia variabile (ciò avviene quando si opera per sostituzione) si deve avere cura di calcolare i nuovi estremi d'integrazione per la nuova variabile. Esempio:

234. $I=\int_1^2 (1-x)e^{1-x}\,dx=-\int_1^2 (1-x)e^{1-x}\,d(1-x)$

È logico porre: $1-x=t$, per cui i nuovi estremi sono:

$t_1=[1-x]_1=0 \qquad t_2=[1-x]_2=-1$

Quindi:

$$I=-\int_0^{-1} te^t\,dt=[\text{vedi proprietà 1}]=\int_{-1}^0 te^t\,dt=$$

$$=[\text{per parti}]=[te^t-e^t]_{-1}^0=-1-(-e^{-1}-e^{-1})=$$

$$=\frac{2}{e}-1<0$$

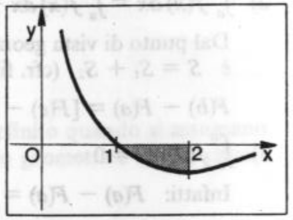


Fig. 7.2.6

Il risultato negativo si spiega col fatto che il grafico (fig.7.2.6) della funzione $(1-x)e^{1-x}$ per $1<x<2$ giace nel semipiano delle y negative.

In genere la ricerca dei nuovi estremi d'integrazione presenta solo relative difficoltà di calcolo. Ci sono però dei casi in cui gli estremi d'integrazione per l'integrale dato non permettono certe sostituzioni. Si debba, ad esempio, calcolare l'integrale definito:

235. $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Si può operare in due modi:

1) Ponendo $x=\mathrm{Ch}\,t \rightarrow dx=\mathrm{Sh}\,t\,dt$ con $\begin{cases} t_1=[\mathrm{Sett\,Ch}\,x]_1=0\\ t_2=[\mathrm{Sett\,Ch}\,x]_2=\mathrm{Sett\,Ch}\,2\end{cases}$

Si ha pertanto:

$$I=\int_0^{\mathrm{Sett\,Ch}\,2}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ch}^2 t-1}}\,\mathrm{Sh}\,t\,dt=\int_0^{\mathrm{Sett\,Ch}\,2}dt=[t]_0^{\mathrm{Sett\,Ch}\,2}=\mathrm{Sett\,Ch}\,2$$

2) Ponendo $\sqrt{x^2-1}=(x+1)t \rightarrow x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}\rightarrow dx=\dfrac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt$

ed essendo $t=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \rightarrow \begin{cases} t_1=0\\ t_2=\sqrt{3}/3\end{cases}$ si ha:

$$I=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=4\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}+1\right)t}\,\frac{t}{(1-t^2)^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{1-t^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}/3}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{1+t}\,dt+\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{1-t}\,dt=$$

$$=[\ln(1+t)-\ln(1-t)]_0^{\sqrt{3}/3}=\left[\ln\frac{1+t}{1-t}\right]_0^{\sqrt{3}/3}=\ln\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\ln\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})$$

L'identità dei due risultati è evidente ricordando che per $x\geqslant 1$ è:

$\mathrm{Sett\,Ch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, quindi $\mathrm{Sett\,Ch}\,2=\ln(2+\sqrt{3})$

Il primo metodo è ovviamente più rapido e per questo saremmo indotti ad usarlo sempre per il calcolo di integrali del tipo dato, mentre ciò non è sempre possibile. Se infatti i limiti d'integrazione fossero -2 e -1, anziché 1 e 2, cioè:

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

il primo metodo non potrebbe essere usato. Infatti l'espressione:

$$x=\mathrm{Ch}\,t \rightarrow t=\mathrm{Sett\,Ch}\,x$$

è corretta solo per $x\geqslant 1$ (cfr. il diagramma di $\mathrm{Sett\,Ch}\,x$), mentre non ha senso per $x<1$, come nel caso degli estremi d'integrazione considerati. Si avrebbe infatti:

$$t_1=\mathrm{Sett\,Ch}\,(-2)$$
$$t_2=\mathrm{Sett\,Ch}\,(-1)$$

pertanto l'eventuale sostituzione errata condurrebbe ad espressioni prive di significato.

c) Quando nella funzione integranda compare un modulo, gli estremi d'integrazione hanno un'importanza fondamentale. Infatti, se si vuole calcolare:

236. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln|x-1|}{x-1}\,dx$, si deve tenere presente che è $\ln|x-1|=\begin{cases}\ln(x-1) & \text{per } x>1\\ \ln(1-x) & \text{per } x<1\end{cases}$

Quale espressione si deve utilizzare? Naturalmente la prima, dato che gli estremi d'integrazione sono tali da soddisfarla ($2<x<3$):

$$\int_2^3\frac{\ln|x-1|}{x-1}\,dx=\int_2^3\frac{\ln(x-1)}{x-1}\,dx=\int_2^3\ln(x-1)\,d[\ln(x-1)]=$$

$$=\left[\frac{\ln^2(x-1)}{2}\right]_2^3=\frac{1}{2}\ln^2 2$$

237. $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{\ln|x-1|}{x-1}\,dx=[\text{essendo } x<1]=\int_{-1}^0\frac{\ln(1-x)}{x-1}\,dx=-\int_{-1}^0\frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx=$

$$=\int_{-1}^0\ln(1-x)\,d[\ln(1-x)]=\frac{1}{2}\left[\ln^2(1-x)\right]_{-1}^0=-\frac{1}{2}\ln^2 2$$

Infine può capitare il caso che un integrale si calcoli mediante due integrali. Ciò avviene quando la funzione in modulo cambia segno al variare di x fra gli estremi d'integrazione. Esempio:

238. $I=\int_{-1}^{1}(x^2-2|x|+1)\,dx$

Essendo $|x|=\begin{cases} x & \text{per } x>0 \\ -x & \text{per } x<0 \end{cases}$ per la proprietà 2 si ha:

$$I=\int_{-1}^{0}(x^2-2|x|+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2|x|+1)\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx$$

Infatti, nel primo integrale la x assume valori negativi, nel secondo valori positivi. Allora:

$$I=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,d(x+1)+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,d(x-1)=$$
$$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(0-\frac{-1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Si evita ogni difficoltà operando nel seguente modo:

239. $I=\int_{0}^{\ln 3}(x-2)\,e^{|1-x|}\,dx$

1) Stabilire per quali valori la funzione in modulo inverte il suo segno:

$|1-x|=\begin{cases} 1-x & \text{per } x<1 \\ x-1 & \text{per } x>1 \end{cases}$ quindi in $x=1$ si inverte il segno.

2) In base agli estremi d'integrazione scomporre l'integrale dato in due integrali:

$$I=\int_{0}^{1}(x-1)\,e^{1-x}\,dx+\int_{1}^{\ln 3}(x-1)\,e^{x-1}\,dx=I'+I''$$

(si osservi che per il primo integrale è $x<1 \rightarrow |1-x|=1-x$ e per il secondo è $x>1 \rightarrow |1-x|=x-1$)

3) Eseguire il calcolo separato dei due integrali:

$$I'=\int_{0}^{1}(x-1)\,e^{1-x}\,dx=\int_{0}^{1}(1-x)\,d(e^{1-x})=[\text{per parti}]=$$
$$=\left[(1-x)\,e^{1-x}-e^{1-x}\right]_0^1=\left[e^{1-x}(1-x-1)\right]_0^1=-\left[xe^{1-x}\right]_0^1=-1$$

$$I''=\int_{1}^{\ln 3}(x-1)\,e^{x-1}\,dx=\int_{1}^{\ln 3}(x-1)\,d(e^{x-1})=[\text{per parti}]=$$
$$=\left[(x-1)\,e^{x-1}-e^{x-1}\right]_1^{\ln 3}=\left[e^{x-1}(x-2)\right]_1^{\ln 3}=e^{\ln 3-1}(\ln 3-2)-(1-2)=$$
$$=\frac{3}{e}(\ln 3-2)+1$$

Infine: $I=I'+I''=\dfrac{3}{e}(\ln 3-2)$

d) Altri eventuali accorgimenti si potranno rilevare risolvendo gli esercizi proposti.

7.3.- Esercizi proposti

Poiché l'esame scritto comprende, anche, il calcolo di un integrale definito, sono stati proposti e risolti integrali definiti già oggetto d'esame.

240. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{27^x}{9^x-x}\,dx$

241. $\displaystyle\int_{0}^{1/8}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}\,dx$

242. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 4}\frac{\sqrt{e^x-1}}{8\,e^{-x}+1}\,dx$

243. $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}\,dx$

244. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\operatorname{Ch}x}{1-5\operatorname{Th}^2x}\,dx$

245. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\ln_{2x}(ex)\,dx$

246. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{\operatorname{arc\,sen}\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

247. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\cdot\frac{1-\cos x^2}{1+\cos x^2}\,dx$

248. $\displaystyle\int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}}\frac{\sqrt{1+\cos\ln x}}{x\operatorname{sen}\ln x}\,dx$

249. $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{5}}\frac{2x\,e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$

250. $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{1}{x\sqrt{x}}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$

251. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}e^{\sqrt{1+\operatorname{Sh}x}}\operatorname{Sh}2x\,dx$

252. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)^2}{1+2\cos x}\,dx$

253. $\displaystyle\int_{1}^{e}x^{\ln\frac{x}{e}}\ln^3x\,dx$

254. $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}\,dx$

255. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^3-x)\,e^{|1-x^2|}\,dx$

256. $\displaystyle\int_{\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{0}\frac{\operatorname{Ch}x+\operatorname{Sh}x}{1+2\operatorname{Ch}x}\,dx$

257. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt[4]{e}}\frac{\ln^2x\operatorname{sen}(\pi\ln x)}{x\cos^3(\pi\ln x)}\,dx$

258. $\displaystyle\int_{2}^{2\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\ln(x^2+1)\,dx$

259. $\displaystyle\int_{(\pi/4)^2}^{(\pi/3)^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{1+\cos\sqrt{x}}\right)^2dx$

260. $\displaystyle\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2}\frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2e^x+e^{-2x}}}\,dx$

261. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{2}|x(1-2x)|\ln(1+x)\,dx$

262. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\ln 2}{2}}e^{5x/2}(\operatorname{Ch}x)^{5/2}\,dx$

263. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3}e^x\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

264. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\frac{\operatorname{sen}2x}{(\operatorname{sen}x)^\lambda}-4\cos x\right]dx$

265. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{sen}x}}\,dx$

266. $\displaystyle\int_{1/\pi}^{2/\pi}\frac{1}{x^4}\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)dx=$

267. $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\frac{\ln x}{x}\sqrt{\ln^2x-1}\cdot e^{\sqrt{\ln^2x-1}}\,dx$

268. $\displaystyle\int_{1/e}^{e^3}\frac{1}{x}\sqrt{\ln^2x-2|\ln x|-2\ln x+4}\,dx$

269. $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\ln^2x\left[\ln\left(\sqrt{1+\ln^2x}-\ln x\right)\right]dx$

270. $\displaystyle\int_{-\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln(1+\sqrt{2})}\operatorname{Sh}x\operatorname{Ch}x\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt[3]{\operatorname{Sh}x}\right)dx$

271. $\displaystyle\int_{\operatorname{arc\,sen}(3/4)}^{\pi/2}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\operatorname{sen}x+\sqrt{\operatorname{sen}x-(3/4)}}\,dx$

272. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\ln 2}{2}}e^{-x}\ln(\lambda+e^{2x})\,dx$ con $\lambda>-1$

273. $\displaystyle\int_{\operatorname{arc\,tg}2}^{\operatorname{arc\,tg}3}\frac{1}{(1+\cos 2x)(\operatorname{tg}x+2\sqrt{\operatorname{tg}x-2})}\,dx$

274. $\displaystyle\int_{[(\pi/3)-1]^2}^{[(\pi/2)-1]^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+2\right)\operatorname{sen}(1+\sqrt{x})\,dx$

Soluzioni degli esercizi proposti.

240. $I=\int_{-2}^{-1}\frac{27^x}{9^x-4}\,dx=\int_{-2}^{-1}\frac{3^{3x}}{3^{2x}-4}\,dx=\int_{-2}^{-1}\frac{3^{2x}\cdot 3^x}{3^{2x}-4}\,dx=$ [essendo $d(3^x)=3^x\ln 3\,dx$] $=$

$$=\frac{1}{\ln 3}\int_{-2}^{-1}\frac{3^{2x}}{3^{2x}-4}\,d(3^x)$$

Ponendo $3^x=t$ gli estremi d'integrazione diventano: $\begin{cases} t_1=[3^x]_{-2}=1/9 \\ t_2=[3^x]_{-1}=1/3 \end{cases}$ e quindi:

$$I=\frac{1}{\ln 3}\int_{1/9}^{1/3}\frac{t^2}{t^2-4}\,dt=\frac{1}{\ln 3}\int_{1/9}^{1/3}\frac{t^2-4+4}{t^2-4}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\left[\int_{1/9}^{1/3}dt+4\int_{1/9}^{1/3}\frac{1}{t^2-4}\,dt\right]=\frac{1}{\ln 3}\left\{[t]_{1/9}^{1/3}+\int_{1/9}^{1/3}\left[\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right]dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\left[\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_{1/9}^{1/3}\right\}=[^1]=\frac{1}{\ln 3}\left\{\frac{2}{9}+\left[\ln\frac{2-t}{2+t}\right]_{1/9}^{1/3}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{2}{9}+\ln\frac{5}{7}-\ln\frac{17}{19}\right)=\frac{1}{\ln 3}\left(\frac{2}{9}+\ln\frac{95}{119}\right)$$

241. $I=\int_0^{1/8}\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}\,dx$

Si pone: $x=\operatorname{sen}^3 t \;\rightarrow\; dx=3\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt$. Essendo $t=\operatorname{arc\,sen}\sqrt[3]{x}$ i limiti per la t sono $\begin{cases} t_1=[\operatorname{arc\,sen}\sqrt[3]{x}]_0=0 \\ t_2=[\operatorname{arc\,sen}\sqrt[3]{x}]_{1/8}=\pi/6 \end{cases}$

$$I=\int_0^{\pi/6}\frac{3\operatorname{sen}^2 t\cos t}{\sqrt{1-\sqrt[3]{\operatorname{sen}^6 t}}}\,dt=3\int_0^{\pi/6}\frac{\operatorname{sen}^2 t\cos t}{\cos t}\,dt=3\int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}^2 t\,dt=$$

$$=3\left[\frac{t-\operatorname{sen}t\cos t}{2}\right]_0^{\pi/6}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{3}$$

242. $I=\int_0^{\ln 4}\frac{\sqrt{e^x-1}}{8e^{-x}+1}\,dx=\int_0^{\ln 4}\frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{8+e^x}\,dx=\left[\text{essendo } \begin{cases} e^x\,dx=d(e^x-1) \\ e^x+8=(e^x-1)+9 \end{cases}\right]=$

$$=\int_0^{\ln 4}\frac{\sqrt{e^x-1}}{(e^x-1)+9}\,d(e^x-1)$$

Conviene pertanto porre: $t^2=e^x-1$ con $\begin{cases} t_1=[\sqrt{e^x-1}]_0=0 \\ t_2=[\sqrt{e^x-1}]_{\ln 4}=\sqrt{3} \end{cases}$

$$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t}{t^2+9}\,d(t^2)=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{t^2+9}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2+9-9}{t^2+9}\,dt=$$

(1) Per $\frac{1}{9}\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}$ la frazione positiva è $\frac{2-t}{t+2}$ e non $\frac{t-2}{t+2}$

$$=2[t]_0^{\sqrt{3}}-2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{9}{t^2+9}\,dt=2\sqrt{3}-6\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+(t/3)^2}\,d\left(\frac{t}{3}\right)=$$

$$=2\sqrt{3}-6\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-6\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}-\pi$$

243. $I=\int_1^4\frac{\ln x}{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}\,dx=\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+1)}\,dx=\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}\,dx=$

$$=2\int_1^4\frac{\ln x}{(\sqrt{x}+1)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\left[\text{essendo } d(\sqrt{x}+1)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right]=$$

$$=2\int_1^4\frac{\ln x}{(\sqrt{x}+1)^2}\,d(\sqrt{x}+1)=2\int_1^4\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x}+1)^2}\,d(\sqrt{x}+1)$$

Conviene porre: $t=\sqrt{x}+1 \;\rightarrow\; \sqrt{x}=t-1$ con $\begin{cases} t_1=\sqrt{1}+1=2 \\ t_2=\sqrt{4}+1=3 \end{cases}$

$$I=2\int_2^3\frac{\ln(t-1)^2}{t^2}\,dt=\left[\begin{matrix}\text{è } \ln(t-1)^2=2\ln|t-1|=2\ln(t-1) \\ \text{essendo } t-1>0 \text{ per } 2<t<3\end{matrix}\right]=$$

$$=4\int_2^3\frac{\ln(t-1)}{t^2}\,dt=[\text{cfr. TAB. 3-I}]=-4\int_2^3\ln(t-1)\,d\left(\frac{1}{t}\right)=$$

$$=-4\left\{\left[\frac{1}{t}\ln(t-1)\right]_2^3-\int_2^3\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t-1}\,dt\right\}=-\frac{4}{3}\ln 2+4\int_2^3\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=-\frac{4}{3}\ln 2+4[-\ln t+\ln(t-1)]_2^3=-\frac{4}{3}\ln 2+4\ln\frac{2}{3}+4\ln 2=\frac{20}{3}\ln 2-4\ln 3$$

244. $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\operatorname{Ch}x}{1-5\operatorname{Th}^2 x}\,dx$

Esprimendo la funzione integranda in $\operatorname{Sh}x$ (cfr. §1.9) ed essendo $\operatorname{Ch}x\,dx=d(\operatorname{Sh}x)$:

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\operatorname{Ch}x\cdot\operatorname{Ch}^2 x}{\operatorname{Ch}^2 x-5\operatorname{Sh}^2 x}\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{1+\operatorname{Sh}^2 x}{1-4\operatorname{Sh}^2 x}\,d(\operatorname{Sh}x)=\Bigg[\text{posto } t=\operatorname{Sh}x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; t^2=\operatorname{Sh}^2 x \text{ con } \begin{cases} t_1=\operatorname{Sh}(\ln 2)=\dfrac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}=\dfrac{2-(1/2)}{2}=\dfrac{3}{4} \\ t_2=\operatorname{Sh}(\ln 3)=\dfrac{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}{2}=\dfrac{3-(1/3)}{2}=\dfrac{4}{3} \end{cases}\Bigg]=\int_{3/4}^{4/3}\frac{1+t^2}{1-4t^2}\,dt$$

$$\frac{1+t^2}{1-4t^2}=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\frac{1}{1-4t^2}=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2t}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1-2t}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1+2t}$$

$$I=\int_{3/4}^{4/3}\left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1-2t}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{1+2t}\right)dt=$$

$$= -\frac{1}{4}[t]_{3/4}^{4/3} - \frac{5}{8}\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{2t-1}\,dt + \frac{5}{8}\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{2t+1}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{12} - \frac{5}{16}\left[\ln(2t-1) - \ln(2t+1)\right]_{3/4}^{4/3} = -\frac{7}{48} - \frac{5}{16}\left[\ln\frac{2t-1}{2t+1}\right]_{3/4}^{4/3} =$$

$$= -\frac{7}{48} - \frac{5}{16}\ln\frac{25}{11}$$

245. $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln_{2x}(ex)\,dx$

$$\ln_{2x}(ex) = [\text{cfr. §1.5}] = \frac{\ln ex}{\ln 2x} = \frac{\ln e + \ln x}{\ln 2 + \ln x} = \frac{1+\ln x}{\ln 2 + \ln x} \qquad \frac{1}{x}\,dx = d(\ln x)$$

$$I = \int_1^2 \frac{1+\ln x}{\ln 2 + \ln x}\,d(\ln x) = \left[\text{posto } \ln x = t \text{ con } \begin{cases} t_1 = [\ln x]_1 = 0 \\ t_2 = [\ln x]_2 = \ln 2\end{cases}\right] = \int_0^{\ln 2} \frac{1+t}{\ln 2 + t}\,dt$$

La funzione da integrare può essere scritta:

$$\frac{1+t}{\ln 2 + t} = \frac{1}{\ln 2 + t} + \frac{t}{\ln 2 + t} = \frac{1}{\ln 2 + t} + \frac{t + \ln 2 - \ln 2}{\ln 2 + t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2 + t} + 1 - \frac{\ln 2}{\ln 2 + t} = 1 + (1 - \ln 2)\cdot\frac{1}{\ln 2 + t}$$

$$I = \int_0^{\ln 2}\left\{1 + (1-\ln 2)\frac{1}{\ln 2 + t}\right\}dt = \left[t + (1-\ln 2)\ln(\ln 2 + t)\right]_0^{\ln 2} =$$

$$= \ln 2 + (1 - \ln 2)\ln(2\ln 2) - (1-\ln 2)\ln(\ln 2) =$$

$$= \ln 2 + \ln(2\ln 2) - \ln 2\cdot\ln(2\ln 2) - \ln(\ln 2) + \ln 2\cdot\ln(\ln 2) =$$

$$= \ln 2 + \ln 2 + \ln(\ln 2) - \ln^2 2 - \ln 2\cdot\ln(\ln 2) - \ln(\ln 2) + \ln 2\cdot\ln(\ln 2) =$$

$$= 2\ln 2 - \ln^2 2 = \ln 2\cdot(2 - \ln 2)$$

246. $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{arc\,sen}\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{arc\,sen}\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{arc\,sen}\ln x}{2\sqrt{1+\ln x}}\,d(\ln x) =$

$$= \left[\text{essendo } d(\sqrt{1+z}) = \frac{1}{2\sqrt{1+z}}dz\right] = 2\int_1^{\sqrt{e}} \operatorname{arc\,sen}\ln x\, d(\sqrt{1+\ln x}) = [\text{per parti}] =$$

$$= 2\left\{\left[\operatorname{arc\,sen}\ln x\cdot\sqrt{1+\ln x}\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}}\sqrt{1+\ln x}\,d(\operatorname{arc\,sen}\ln x)\right\} =$$

$$= 2(\sqrt{1+\ln\sqrt{e}}\operatorname{arc\,sen}\ln\sqrt{e} - \sqrt{1-\ln 1}\operatorname{arc\,sen}\ln 1) - 2\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\,d(\ln x)$$

$$I = \sqrt{6}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2} - 2\int_1^{\sqrt{e}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln x}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} + 4\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{2\sqrt{1-\ln x}}\,d(1-\ln x) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}} + 4\left[\sqrt{1-\ln x}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} + 4\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{2} - 4$$

247. $I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cdot\frac{1-\cos x^2}{1+\cos x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{1-\cos x^2}{1+\cos x^2}\,d(x^2) = \left[x^2 = t \ \to \ \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \pi/2\end{cases}\right] =$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2\left(\frac{t}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^2\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \left[\operatorname{tg}\frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

248. $I = \int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}}\frac{\sqrt{1+\cos\ln x}}{x\operatorname{sen}\ln x}\,dx = \int_{e^{\pi/6}}^{e^{\pi/2}}\frac{\sqrt{1+\cos\ln x}}{\operatorname{sen}\ln x}\,d(\ln x)$

Ponendo $\ln x = t$ con $\begin{cases} t_1 = \ln e^{\pi/6} = \pi/6 \\ t_2 = \ln e^{\pi/2} = \pi/2\end{cases}$ si ha:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sqrt{1+\cos t}}{\operatorname{sen} t}\,dt$$

Applicando le formule di bisezione e di duplicazione si ha:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sqrt{2}\cos(t/2)}{2\operatorname{sen}(t/2)\cos(t/2)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\operatorname{sen}(t/2)}\,dt = \sqrt{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{\operatorname{sen}(t/2)}\,d\left(\frac{t}{2}\right)$$

Si verifica facilmente che l'elemento differenziale non muta cambiando $t/2$ in $-t/2$.

Si pone quindi: $\cos\frac{t}{2} = z$ con $\begin{cases} z_1 = \cos(\pi/12) \\ z_2 = \cos(\pi/4)\end{cases}$

È inoltre $-\operatorname{sen}\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = dz \to d\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{dz}{\operatorname{sen}(t/2)} \to$

$$\to \frac{1}{\operatorname{sen}(t/2)}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{dz}{\operatorname{sen}^2(t/2)} = -\frac{dz}{1-\cos^2(t/2)} = -\frac{dz}{1-z^2}$$

Pertanto:

$$I = -\sqrt{2}\int_{\cos(\pi/12)}^{\cos(\pi/4)}\frac{1}{1-z^2}\,dz = \left[\text{essendo } \cos\frac{\pi}{12} > \cos\frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= \sqrt{2}\int_{\cos(\pi/4)}^{\cos(\pi/12)}\frac{1}{1-z^2}\,dz = \sqrt{2}\left[\operatorname{Sett\,Th} z\right]_{\cos(\pi/4)}^{\cos(\pi/12)} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}\right]_{\cos(\pi/4)}^{\cos(\pi/12)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{1-\cos\frac{\pi}{12}} - \ln\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{24}\right) - \ln\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left[\frac{\operatorname{tg}^2(\pi/8)}{\operatorname{tg}^2(\pi/24)}\right] = \sqrt{2}\ln\left[\frac{\operatorname{tg}(\pi/8)}{\operatorname{tg}(\pi/24)}\right]$$

249. $I = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{5}}\frac{2xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \left[2e^{2x}\,dx = d(e^{2x}-1)\right] = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,d(e^{2x}-1)$

Si pone: $e^{2x}-1=t^2 \;\to\; e^{2x}=t^2+1 \;\to\;$ [prendendo i logaritmi dei due membri] $\to\; 2x=\ln(t^2+1)$

$\to\; x=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)$ con $\begin{cases} t_1=[\sqrt{e^{2x}-1}]_{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{e^{2\ln\sqrt{2}}-1}=1 \\ t_2=[\sqrt{e^{2x}-1}]_{\ln\sqrt{5}}=\sqrt{e^{2\ln\sqrt{5}}-1}=2 \end{cases}$

Con tale sostituzione l'integrale diventa:

$$I=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\frac{1}{t}\,d(t^2)=\int_1^2 \ln(t^2+1)\,dt=[\text{per parti con } g(x)=t]=$$

$$=\big[t\ln(t^2+1)\big]_1^2-\int_1^2 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\,dt=2\ln 5-\ln 2-2\int_1^2\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\ln\frac{25}{2}-2\int_1^2\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=\ln\frac{25}{2}-2\big[t\big]_1^2+2\big[\operatorname{arctg} t\big]_1^2=$$

$$=\ln\frac{25}{2}-2(2-1)+2\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}\right)=\ln\frac{25}{2}-2+2\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}$$

250. $I=\displaystyle\int_1^3\frac{1}{x\sqrt{x}}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$

Essendo $\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx=d\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=-2\,d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, si ha:

$$I=-2\int_1^3 \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,d\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=[\text{per parti}]=$$

$$=-2\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]_1^3-\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x}}\,d\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\right\}=$$

$$=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}-\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+2\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{4}+\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}}\,dx=$$

$$=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}+\int_1^3\frac{1}{x(1+x)}\,dx=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}+\left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^3=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}+\ln\frac{3}{2}$$

251. $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\operatorname{Sh}x}}\cdot\operatorname{Sh}2x\,dx=$ [essendo $\operatorname{Sh}2x=2\operatorname{Sh}x\operatorname{Ch}x$ e $\operatorname{Ch}x\,dx=d(\operatorname{Sh}x+1)$] $=$

$$=2\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\operatorname{Sh}x}}\cdot\operatorname{Sh}x\,d(\operatorname{Sh}x+1)$$

Si pone: $1+\operatorname{Sh}x=t^2 \;\to\; \operatorname{Sh}x=t^2-1$ $\begin{cases} t_1=\sqrt{1+\operatorname{Sh}0}=1 \\ t_2=[\sqrt{1+\operatorname{Sh}\ln 2}=\sqrt{7}/2 \end{cases}$

$$I=2\int_1^{\sqrt{7}/2}e^t(t^2-1)\,d(t^2)=2\int_1^{\sqrt{7}/2}e^t(t^2-1)2t\,dt=4\int_1^{\sqrt{7}/2}t(t^2-1)\,d(e^t)=$$

$$=[\text{per parti}]=4\left\{\big[t(t^2-1)e^t\big]_1^{\sqrt{7}/2}-\int_1^{\sqrt{7}/2}e^t(t^2-1+2t^2)\,dt\right\}=$$

$$=4\left[\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-\int_1^{\sqrt{7}/2}(3t^2-1)e^t\,dt\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-4\left(3\int_1^{\sqrt{7}/2}t^2\,d(e^t)-\int_1^{\sqrt{7}/2}e^t\,dt\right)=\frac{3}{2}\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-12I'+4\big[e^t\big]_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}}=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}+4e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-4e-12I'$$

$$I'=\int_1^{\sqrt{7}/2}t^2\,d(e^t)=[\text{per parti}]=\big[t^2e^t\big]_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-2\int_1^{\sqrt{7}/2}e^t\cdot t\,dt=$$

$$=\frac{7}{4}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-e-2\int_1^{\sqrt{7}/2}t\,d(e^t)=\frac{7}{4}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-e-2\big[te^t-e^t\big]_1^{\frac{\sqrt{7}}{2}}=$$

$$=\frac{7}{4}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-e-2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-e+e\right)=\frac{7}{4}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-e-\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}+2e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

Infine:

$$I=\frac{3}{2}\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}+4e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-4e-21e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}+12e+12\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-24e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}=$$

$$=-41e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}+\frac{27}{2}\sqrt{7}\cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}+8e=\frac{1}{2}\left[16e+e^{\frac{\sqrt{7}}{2}}(27\sqrt{7}-82)\right]$$

252. $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x+\operatorname{sen}x)^2}{1+2\cos x}\,dx=$ [$(\cos x+\operatorname{sen}x)^2=\cos^2x+\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x\cos x=1+2\operatorname{sen}x\cos x$] $=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\operatorname{sen}x\cos x}{1+2\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+2\cos x}\,dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}x\cos x}{1+2\cos x}\,dx=I'+2I''$$

I' è un integrale che si razionalizza con la posizione (cfr. §5.1):

$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ con $\begin{cases} t_1=0 \\ t_2=1 \end{cases}$ $\to\; x=2\operatorname{arctg}t \;\to\; dx=2\frac{dt}{1+t^2}$

Inoltre, esprimendo $\cos x$ in funzione di $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ottiene $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Pertanto:

$$I'=\int_0^1\frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\int_0^1\frac{1}{3-t^2}\,dt=$$

$$=\left[\text{essendo } \frac{1}{3-t^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-t}+\frac{1}{\sqrt{3}+t}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3}-t}\,dt+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{3}+t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Si calcoli adesso I''

$$I''=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+2\cos x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\cos x}\,d(1+2\cos x)$$

Posto $1+2\cos x = t \;\rightarrow\; \cos x = \dfrac{t-1}{2}$ con $\begin{cases} t_1 = 1+2\cos 0 = 3 \\ t_2 = 1 + 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$ si ha:

$$I''=-\frac{1}{2}\int_3^1 \frac{t-1}{2t}\,dt = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(1-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{4}\left[t-\ln t\right]_1^3 = \frac{1}{4}(3-\ln 3 - 1) =$$

$$= \frac{1}{4}(2-\ln 3)$$

$$I = I' + 2I'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{2}(2-\ln 3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + 1 - \frac{1}{2}\ln 3$$

253. $I=\int_1^e x^{\ln(x/e)}\ln^3 x\,dx = \int_1^e x^{\ln x - 1}\ln^3 x\,dx = \displaystyle\int_1^e \frac{x^{\ln x}}{x}\ln^3 x\,dx = \int_1^e x^{\ln x}\ln^3 x\, d(\ln x)$

Posto $\ln x = t \;\rightarrow\; x = e^t$ con $\begin{cases} t_1 = \ln 1 = 0 \\ t_2 = \ln e = 1 \end{cases}$ si ha:

$$I = \int_0^1 (e^t)^t \cdot t^3\,dt = \int_0^1 e^{t^2} t^2 \cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t^2} t^2\, d(t^2)$$

Posto ancora $t^2 = z$, con $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$, si ha:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^z \cdot z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 z\,d(e^z) = [\text{per parti}] = \frac{1}{2}\left[z e^z - e^z\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-e+1) = \frac{1}{2}$$

254. $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}\,dx$

Si noti che $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ è la derivata di $\sqrt{x^2-1}$ e quindi l'integrale si può scrivere:

$$I = \int_2^4 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}\,d(\sqrt{x^2-1}) =$$

$$= \left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x^2-1}\right]_2^4 - \int_2^4 \sqrt{x^2-1}\,d(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x-1}) =$$

$$= (\sqrt{15}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg} 1) - \int_2^4 \sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{1+x-1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{15} - \frac{\pi}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = \frac{\pi}{3}\sqrt{15} - \frac{\pi}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}I'$$

I' si razionalizza ponendo:

$x+1 = t^2 \;\rightarrow\; x = t^2 - 1 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$ con $\begin{cases} t_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \\ t_2 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \end{cases}$

$$I' = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{t^2-1}\,2t\,dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} dt + 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{t^2-1} = 2\,[t]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} + \left[\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} =$$

$$= 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \ln\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\cdot\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2} = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}) + 2\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}-1} - \ln 2$$

Sostituendo:

$$I = \frac{\pi}{3}\sqrt{15} - \frac{\pi}{4}\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{12}(4\sqrt{5}-3) - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \ln\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}-1}$$

255. $I = \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x)\,e^{|1-x^2|}\,dx$

Essendo $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{per } -1<x<1 \\ x^2-1 & \text{per } x<-1 \text{ e } x>1 \end{cases}$ si deve scrivere:

$$I = \int_{\sqrt{1/2}}^{1} (x^3-x)\,e^{1-x^2}\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} (x^3-x)\,e^{x^2-1}\,dx = I' + I''$$

$$I' = -\int_{\sqrt{1/2}}^{1} x(1-x^2)\,e^{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{1/2}}^{1} (1-x^2)\,e^{1-x^2}\,d(1-x^2)$$

È naturale porre $1-x^2 = t$ con $\begin{cases} t_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = 1-1 = 0 \end{cases}$. Così:

$$I' = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{0} t\,e^t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} t\,e^t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} t\,d(e^t) = [\text{per parti}] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left[t e^t\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} e^t\,dt\right\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{1/2} - \left[e^t\right]_0^{1/2}\right\} = -\frac{1}{4}\sqrt{e} + \frac{1}{2}\sqrt{e} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{e} - \frac{1}{2}$$

$$I'' = \int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-1)\,e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)\,e^{x^2-1}\,d(x^2-1)$$

Posto $x^2 - 1 = t$, con $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, si ha:

$$I'' = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,e^t\,dt = \frac{1}{2}\left[t e^t - e^t\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-e+1) = \frac{1}{2}$$

Sostituendo:

$$I = I' + I'' = \frac{1}{4}\sqrt{e} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{e}$$

256. $I = \displaystyle\int_{\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{0} \frac{\mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x}{1 + 2\,\mathrm{Ch}\,x}\,dx$

Nessun particolare artificio semplifica il calcolo di I, perciò si ricorre alla definizione esponenziale delle funzioni iperboliche (cfr. §1.9):

$$\frac{\mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x}{1 + 2\,\mathrm{Ch}\,x} = \frac{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{1 + 2\cdot\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x}{1 + e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e^x + 1}$$

$$I = \int_{\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{0} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e^x + 1}\,dx = \int_{\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{0} \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1}\,d(e^x)$$

Posto quindi $e^x = t$ con $\begin{cases} t_1 = e^{\ln\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ t_2 = e^0 = 1 \end{cases}$, si ha:

$$I = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{t}{t^2 + t + 1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{2t + 1 - 1}{t^2 + t + 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}\,dt - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{1}{t^2 + t + 1}\,dt = \frac{1}{2}(I' - I'')$$

$$I' = \left[\ln(t^2 + t + 1)\right]_{(\sqrt{3}-1)/2}^{1} = \ln 3 - \ln\left(\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1\right) =$$

$$= \ln 3 - \ln\frac{3}{2} = \ln 2$$

$$I'' = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{dt}{\frac{3}{4}\left[1 + \left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \frac{d\left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctg}\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\right]_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 1\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$

257. $I = \displaystyle\int_{1}^{\sqrt[4]{e}} \frac{\ln^2 x\,\mathrm{sen}(\pi\ln x)}{x\cos^3(\pi\ln x)}\,dx = \left[\text{essendo } \frac{dx}{x} = d(\ln x)\right] = \int_{1}^{\sqrt[4]{e}} \frac{\ln^2 x\,\mathrm{sen}(\pi\ln x)}{\cos^3(\pi\ln x)}\,d(\ln x) =$

$$= \frac{1}{\pi^3}\int_{1}^{\sqrt[4]{e}} \frac{(\pi\ln x)^2\,\mathrm{sen}(\pi\ln x)}{\cos^3(\pi\ln x)}\,d(\pi\ln x)$$

Si pone quindi: $\pi\ln x = t$ con $\begin{cases} t_1 = \pi\ln 1 = 0 \\ t_2 = \pi\ln\sqrt[4]{e} = \pi/4 \end{cases}$

$$I = \frac{1}{\pi^3}\int_0^{\pi/4} \frac{t^2\,\mathrm{sen}\,t}{\cos^3 t}\,dt = \left[\text{essendo } \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos^3 t}\,dt = \frac{1}{2}d\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)\right] = \frac{1}{2\pi^3}\int_0^{\pi/4} t^2\,d\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right) =$$

$$= [\text{per parti}] = \frac{1}{2\pi^3}\left\{\left[\frac{t^2}{\cos^2 t}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\,d(t^2)\right\} = \frac{1}{2\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{8} - 2\int_0^{\pi/4} t\,d(\mathrm{tg}\,t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{8} - 2\left[t\cdot\mathrm{tg}\,t\right]_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}\,t\,dt\right\} = \frac{1}{2\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} - 2\left[\ln\cos t\right]_0^{\pi/4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} - 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \frac{1}{2\pi^3}\left\{\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + \ln 2\right\}$$

258. $I = \displaystyle\int_2^{2\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}\ln(x^2 + 1)\,dx$

Essendo $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}\,dx = d(\sqrt{x^2 + 5})$ si può scrivere:

$$I = \int_2^{2\sqrt{5}} \ln(x^2 + 1)\,d(\sqrt{x^2 + 5}) =$$

$$= \left[\sqrt{x^2 + 5}\cdot\ln(x^2 + 1)\right]_2^{2\sqrt{5}} - \int_2^{2\sqrt{5}} \sqrt{x^2 + 5}\cdot\frac{2x}{x^2 + 1}\,dx =$$

$$= 5\ln 21 - 3\ln 5 - \int_2^{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x^2 + 1}\,d(x^2) =$$

$$= 5\ln 21 - 3\ln 5 - \int_2^{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{(x^2 + 5) - 4}\,d(x^2 + 5) = 5\ln 21 - 3\ln 5 - I'$$

Si pone $x^2 + 5 = t^2$ con $\begin{cases} t_1 = [\sqrt{x^2 + 5}]_2 = 3 \\ t_2 = [\sqrt{x^2 + 5}]_{2\sqrt{5}} = 5 \end{cases}$

$$I' = \int_3^5 \frac{t}{t^2 - 4}\,d(t^2) = 2\int_3^5 \frac{t^2}{t^2 - 4}\,dt = 2\int_3^5 \frac{t^2 - 4 + 4}{t^2 - 4}\,dt =$$

$$= 2\int_3^5 dt + 8\int_3^5 \frac{1}{t^2 - 4}\,dt = 2(5 - 3) + 2\int_3^5 \left(\frac{1}{t - 2} - \frac{1}{t + 2}\right)dt =$$

$$= 4 + 2\left[\ln\frac{t - 2}{t + 2}\right]_3^5 = 4 + 2\left(\ln\frac{3}{7} - \ln\frac{1}{5}\right) = 4 + 2\ln\frac{15}{7}$$

Sostituendo in I si ottiene:

$$I = 5\ln 21 - 3\ln 5 - 4 - 2\ln\frac{15}{7} =$$

$$= 5\ln 3 + 5\ln 7 - 3\ln 5 - 4 - 2\ln 3 - 2\ln 5 + 2\ln 7 = 3\ln 3 + 7\ln 7 - 5\ln 5 - 4$$

259. $I = \displaystyle\int_{(\pi/4)^2}^{(\pi/3)^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{1 + \cos\sqrt{x}}\right)^2 dx = \left[\text{essendo } \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,d(\sqrt{x})\right] =$

$$I = 2\int_{(\pi/4)^2}^{(\pi/3)^2} \left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{1+\cos\sqrt{x}}\right)^2 d(\sqrt{x})$$

Si pone $\sqrt{x} = z$ con $\begin{cases} z_1 = [\sqrt{x}]_{(\pi/4)^2} = \pi/4 \\ z_2 = [\sqrt{x}]_{(\pi/3)^2} = \pi/3 \end{cases}$

$$I = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{\operatorname{sen} z}{1+\cos z}\right)^2 dz = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^2 z}{(1+\cos z)^2}\,dz = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1-\cos^2 z}{(1+\cos z)^2}\,dz =$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1-\cos z}{1+\cos z}\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{per le formule di}\\ \text{bisezione (cfr. §1.7)}\end{array}\right] = 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}\,dz = 4\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}\,d\left(\frac{z}{2}\right)$$

Posto ancora $\frac{z}{2} = t$ con $t_1 = \left[\frac{z}{2}\right]_{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$ e $t_2 = \left[\frac{z}{2}\right]_{\pi/3} = \frac{\pi}{6}$ si ha:

$$I = 4\int_{\pi/8}^{\pi/6} \operatorname{tg}^2 t\,dt = 4\left[\operatorname{tg} t - t\right]_{\pi/8}^{\pi/6} = 4\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} + 1 + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{2} + 4 - \frac{\pi}{6}$$

260. $I = \displaystyle\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{\sqrt{1-2e^{-x}+e^{-2x}}}\,dx$

Si ha: $1 - 2e^{-x} + e^{-2x} = (1-e^{-x})^2 = \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{2x}} \rightarrow \sqrt{1-2e^{-x}+e^{-2x}} = \dfrac{|e^x-1|}{e^x}$

Essendo $-2\ln 2 < x < -\ln 2$, si ha: $|e^x - 1| = 1 - e^x$ e quindi si può scrivere:

$$I = \int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{e^x \ln(1-e^x)}{1-e^x}\,dx = -\int_{-2\ln 2}^{-\ln 2} \frac{\ln(1-e^x)}{1-e^x}\,d(1-e^x)$$

Si pone quindi $1 - e^x = t$ con $\begin{cases} t_1 = [1-e^x]_{-2\ln 2} = 1 - e^{-2\ln 2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \\ t_2 = [1-e^x]_{-\ln 2} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$I = -\int_{3/4}^{1/2} \ln t \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int_{1/2}^{3/4} \ln t\,d(\ln t) = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_{1/2}^{3/4} = \frac{1}{2}\left(\ln^2\frac{3}{4} - \ln^2\frac{1}{2}\right)$$

261. $I = \int_{-1/2}^{2} |x(1-2x)|\ln(1+x)\,dx$

Essendo: $|x(1-2x)| = \begin{cases} x(1-2x) & \text{per } 0 < x < 1/2 \\ x(2x-1) & \text{per } x < 0,\ x > 1/2 \end{cases}$

bisogna scindere in tre parti l'integrale dato:

$$I = \int_{-1/2}^{0} x(2x-1)\ln(1+x)\,dx + \int_0^{1/2} x(1-2x)\ln(1+x)\,dx + \int_{1/2}^{2} x(2x-1)\ln(1+x)\,dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{0} x(2x-1)\ln(1+x)\,dx - \int_0^{1/2} x(2x-1)\ln(1+x)\,dx + \int_{1/2}^{2} x(2x-1)\ln(1+x)\,dx = I_1 - I_2 + I_3$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$I_i = \int x(2x-1)\ln(1+x)\,dx = 2\int x^2\ln(1+x)\,dx - \int x\ln(1+x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \ln(1+x)\,d(x^3) - \frac{1}{2}\int \ln(1+x)\,d(x^2) = [\text{per parti}] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^3\ln(1+x) - \int\frac{x^3}{1+x}\,dx\right] - \frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x) - \int\frac{x^2}{1+x}\,dx\right] = \Bigg[\text{essendo:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^3}{1+x} = \dfrac{x^3+1-1}{1+x} = \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} = x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{1+x} \\ \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{x^2-1+1}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^3\ln(1+x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right] - \frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)\right] + C =$$

$$= \ln(1+x)\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}\right) - \frac{2}{9}x^3 + \frac{7}{12}x^2 - \frac{7}{6}x + C = P(x)$$

$$I = I_1 - I_2 + I_3 = P(0) - P\left(-\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) + P(0) + P(2) - P\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2P(0) - P\left(-\frac{1}{2}\right) - 2P\left(\frac{1}{2}\right) + P(2)$$

$$P(0) = C$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\ln 2\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{7}{6}\right) + \frac{1}{36} + \frac{7}{48} + \frac{7}{12} + C = -\frac{23}{24}\ln 2 + \frac{109}{144} + C$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{7}{6}\right) - \frac{1}{36} + \frac{7}{48} - \frac{7}{12} + C = \frac{9}{8}\ln 3 - \frac{9}{8}\ln 2 - \frac{67}{144} + C$$

$$P(2) = \ln 3\left(\frac{16}{3} - 2 + \frac{7}{6}\right) - \frac{16}{9} + \frac{7}{3} - \frac{7}{3} + C = \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{16}{9} + C$$

$$I = \frac{23}{24}\ln 2 - \frac{109}{144} - \frac{9}{4}\ln 3 + \frac{9}{4}\ln 2 + \frac{67}{72} + \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{16}{9} =$$

$$= \frac{77}{24}\ln 2 + \frac{9}{4}\ln 3 - \frac{77}{48}$$

262. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} e^{\frac{5x}{2}}(\operatorname{Ch} x)^{\frac{5}{2}}\,dx = \left[\text{essendo } \operatorname{Ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right] = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \left(e^x \cdot \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{5/2} dx =$

$$= \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^{5/2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} (e^{2x}+1)^2 \cdot \sqrt{e^{2x}+1}\cdot dx$$

Posto $e^{2x} + 1 = t^2 \rightarrow e^{2x} = t^2 - 1 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(t^2-1) \rightarrow dx = \dfrac{t}{t^2-1}\,dt$

con $\begin{cases} t_1 = \sqrt{e^0+1} = \sqrt{2} \\ t_2 = \sqrt{e^{\ln 2}+1} = \sqrt{3} \end{cases}$ si ha:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^4 \cdot t \cdot \frac{t}{t^2-1}\, dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^6}{t^2-1}\, dt$$

Dividendo il numeratore per il denominatore si ottiene:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{9\sqrt{3}}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\ln \frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{19\sqrt{3}}{5} - \frac{37\sqrt{2}}{15}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$$

263. $\displaystyle \int_0^{\ln 3} e^x \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\, dx = \int_0^{\ln 3} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\, d(1+e^x)$

Posto $1 + e^x = t^2$ con $\begin{cases} t_1 = [\sqrt{1+e^x}]_0 = \sqrt{2} \\ t_2 = [\sqrt{1+e^x}]_{\ln 3} = \sqrt{1+3} = 2 \end{cases}$ si ha:

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{t}\, d(t^2) = \left[t^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{t}\right]_{\sqrt{2}}^{2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$= 4 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} - 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\, dt =$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, d(t^2-1) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{t^2-1}}{\frac{1}{2}}\right]_{\sqrt{2}}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{t^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1$$

264. $\displaystyle I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{(\operatorname{sen} x)^\lambda} - 4\cos x\right] dx$

Eseguire il calcolo per ogni λ reale ed interpretarne graficamente il risultato per $\lambda = 3$.

Essendo $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ si ha:

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[\frac{2\cos x}{(\operatorname{sen} x)^{\lambda-1}} - 4\cos x\right] dx = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1-\lambda} \cdot \cos x\, dx - 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\, dx =$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1-\lambda}\, d(\operatorname{sen} x) - 4\left[\operatorname{sen} x\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

Da questa, considerando i casi $\lambda \neq 2$ e $\lambda = 2$, si ha:

Per $\lambda \neq 2$

$$I' = 2\left[\frac{(\operatorname{sen} x)^{1-\lambda+1}}{1-\lambda+1}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} - 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2-\lambda} - \frac{2^{\lambda-2}}{2-\lambda}\right) - 2 =$$

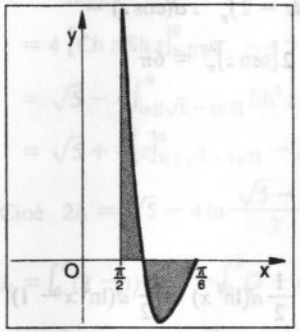
$$= 2\frac{1}{2-\lambda}(1 - 2^{\lambda-2}) - 2$$

Per $\lambda = 2$

$$I'' = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} - 2 =$$

$$= 2\left[\ln \operatorname{sen} x\right]_{\pi/6}^{\pi/2} - 2 =$$

$$= 2\left(\ln 1 - \ln \frac{1}{2}\right) - 2 = 2\ln 2 - 2$$



INTERPRETAZIONE GEOMETRICA PER $\lambda = 3$

Se in I' si pone $\lambda = 3$ si ottiene:

$$I' = \frac{2}{2-3}(1 - 2^{3-2}) - 2 = -2(-1) - 2 = 0$$

cioè l'area della parte di piano delimitata dall'asse x, dalle rette $x = \pi/6$ e $x = \pi/2$ e dalla linea di equazione $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^3 x} - 4\cos x$ è complessivamente nulla. Ciò significa (vedi figura) che l'area racchiusa nel semipiano delle y positive è uguale a quella racchiusa nel semipiano delle y negative.

265. $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\, d(1 + 2\operatorname{sen} x)$

Si pone: $1 + 2\operatorname{sen} x = t^2$ con: $\begin{cases} t_1 = [\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}]_0 = 1 \\ t_2 = [\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}]_{\pi/2} = \sqrt{3} \end{cases}$

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t}\, d(t^2) = [\text{per parti}] = \left[t^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} t^2\, d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t}\right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} t^2 \cdot \frac{1}{1 + 1/t^2} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt = \frac{\pi}{4} + [t]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1 - \left[\operatorname{arc\,tg} t\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1$$

266. $\displaystyle I = \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^4} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right)$

Si pone: $\dfrac{1}{x} = t$ con $t_1 = \left[\dfrac{1}{x}\right]_{1/\pi} = \pi$, $t_2 = \left[\dfrac{1}{x}\right]_{2/\pi} = \dfrac{\pi}{2}$

$$I = -\int_{\pi}^{\pi/2} t^2 \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int_{\pi/2}^{\pi} t^2 \operatorname{sen}^2 t\, dt = \left[\text{essendo } \operatorname{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} t^2 (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} t^2\, dt - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} t^2 \cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{16}\int_{\pi/2}^{\pi} (2t)^2 \cos 2t\, d(2t) = \frac{1}{6}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{8}\right) - \frac{1}{16}\int_{\pi/2}^{\pi} (2t)^2\, d(\operatorname{sen} 2t) =$$

$$= \frac{7}{48}\cdot \pi^3 - \frac{1}{16} I'$$

Ponendo in I' $z = 2t$ ed integrando per parti:

$$I' = \int_{\pi}^{2\pi} z^2\, d(\operatorname{sen} z) = \left[z^2 \operatorname{sen} z\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} z \cdot 2z\, dz = 2\int_{\pi}^{2\pi} z\, d(\cos z) =$$

$$= 2\left[z \cos z\right]_{\pi}^{2\pi} - 2\int_{\pi}^{2\pi} \cos z\, dz = 2(2\pi + \pi) - 2\left[\operatorname{sen} z\right]_{\pi}^{2\pi} = 6\pi$$

$$I = \frac{7}{48}\cdot \pi^3 - \frac{3}{8}\cdot \pi$$

267. $I = \displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{\ln x}{x} \cdot \sqrt{\ln^2 x - 1} \cdot e^{\sqrt{\ln^2 x - 1}}\, dx$

Si osservi che è $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$ e $\ln x\, d(\ln x) = \dfrac{1}{2}\, d(\ln^2 x) = \dfrac{1}{2}\, d(\ln^2 x - 1)$

$$I = \frac{1}{2}\int_{e}^{e^2} \sqrt{\ln^2 x - 1} \cdot e^{\sqrt{\ln^2 x - 1}}\, d(\ln^2 x - 1)$$

Ponendo quindi $\ln^2 x - 1 = t^2$ con $\begin{cases} t_1 = [\sqrt{\ln^2 x - 1}]_e = 0 \\ t_2 = [\sqrt{\ln^2 x - 1}]_{e^2} = \sqrt{3} \end{cases}$ si ha:

$$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}} t \cdot e^t\, d(t^2) = \int_{0}^{\sqrt{3}} t^2\, d(e^t) = \left[t^2 e^t\right]_0^{\sqrt{3}} - 2\int_{0}^{\sqrt{3}} t\, d(e^t) =$$

$$= 3e^{\sqrt{3}} - 2\left[te^t\right]_0^{\sqrt{3}} + 2\left[e^t\right]_0^{\sqrt{3}} = 3e^{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\, e^{\sqrt{3}} + 2e^{\sqrt{3}} - 2 = (5 - 2\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}} - 2$$

268. $I = \displaystyle\int_{1/e}^{e^3} \frac{1}{x}\sqrt{\ln^2 x - 2\,|\ln x| - 2\ln x + 4}\, dx = \left[\text{essendo } \frac{dx}{x} = d(\ln x)\right] =$

$$= \int_{1/e}^{e^3} \sqrt{\ln^2 x - 2\,|\ln x| - 2\ln x + 4}\, d(\ln x)$$

Ponendo $\ln x = t$ con $\begin{cases} t_1 = [\ln x]_{1/e} = -1 \\ t_2 = [\ln x]_{e^3} = 3 \end{cases}$ si ha:

$$I = \int_{-1}^{3} \sqrt{t^2 - 2\,|t| - 2t + 4}\, dt = \left[\text{essendo } |t| = \begin{cases} t & \text{per } t > 0 \\ -t & \text{per } t < 0 \end{cases}\right] =$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 + 2t - 2t + 4}\, dt + \int_{0}^{3} \sqrt{t^2 - 2t - 2t + 4}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{3} \sqrt{(t-2)^2}\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{3} |t - 2|\, dt =$$

$$= \left[\text{essendo } |t - 2| = \begin{cases} t - 2 & \text{per } t > 2 \\ 2 - t & \text{per } t < 2 \end{cases}\right] =$$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 + 4}\, dt + \int_{0}^{2} (2 - t)\, dt + \int_{2}^{3} (t - 2)\, dt = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 + 4}\, dt$$

Poniamo $t = 2\,\mathrm{Sh}\, z \;\rightarrow\; dt = 2\,\mathrm{Ch}\, z\, dz$ con

$$\begin{cases} z_1 = \mathrm{Sett\,Sh}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(-\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{5}{4}}\right) = \ln\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ z_2 = \mathrm{Sett\,Sh}\, 0 = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = 4\int_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} \mathrm{Ch}^2 z\, dz = 4\int_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} \mathrm{Ch}\, z\, d(\mathrm{Sh}\, z) = [\text{per parti}] =$$

$$= 4\left[\mathrm{Ch}\, z\, \mathrm{Sh}\, z\right]_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} - 4\int_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} \mathrm{Sh}\, z\, d(\mathrm{Ch}\, z) =$$

$$= \sqrt{5} - 4\int_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} \mathrm{Sh}^2 z\, dz = \sqrt{5} - 4\int_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} (-1 + \mathrm{Ch}^2 z)\, dz =$$

$$= \sqrt{5} + 4\left[z\right]_{\ln[(\sqrt{5}-1)/2]}^{0} - I_1$$

Cioè $2I_1 = \sqrt{5} - 4\ln\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \;\rightarrow\; I_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - 2\ln\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$$I_2 = \int_{0}^{2} (2 - t)\, dt = -\int_{0}^{2} (2 - t)\, d(2 - t) = -\left[\frac{(2 - t)^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

$$I_3 = \int_{2}^{3} (t - 2)\, dt = \int_{2}^{3} (t - 2)\, d(t - 2) = \left[\frac{(t - 2)^2}{2}\right]_2^3 = \frac{1}{2}$$

Sostituendo in I:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\sqrt{5}}{2} - 2\ln\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5} + 5}{2} - 2\ln\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

269. $I = \displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\ln^2 x\,[\ln(\sqrt{1 + \ln^2 x} - \ln x)]\, dx$

Si osservi che è $\dfrac{1}{x}\, dx = d(\ln x)$ (senza modulo perché è sempre $x > 1$)

Ponendo $t = \ln x$ con $\begin{cases} t_1 = \ln 1 = 0 \\ t_2 = \ln e = 1 \end{cases}$ l'integrale diventa:

$$I = \int_{0}^{1} t^2 \ln(\sqrt{1 + t^2} - t)\, dt$$

e lo si può ancora trasformare notando che è:

$$\sqrt{1 + t^2} - t = (\sqrt{1 + t^2} - t)\cdot\frac{\sqrt{1 + t^2} + t}{\sqrt{1 + t^2} + t} = \frac{1 + t^2 - t^2}{\sqrt{1 + t^2} + t} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2} + t}$$

$$\ln(\sqrt{1 + t^2} - t) = \ln\frac{1}{\sqrt{1 + t^2} + t} = -\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) = -\mathrm{Sett\,Sh}\, t$$

[cfr. § 1.11, funzioni iperboliche inverse]

$$I = -\int_{0}^{1} t^2\, \mathrm{Sett\,Sh}\, t\, dt = -\frac{1}{3}\int_{0}^{1} \mathrm{Sett\,Sh}\, t\, d(t^3) = [\text{per parti}] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{\left[t^3 \operatorname{Sett\,Sh} t\right]_0^1 - \int_0^1 t^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\int_0^1 t^2\, d(\sqrt{t^2+1}) = [\text{per parti}] =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\left\{\left[t^2\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, d(t^2)\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, d(t^2+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{9}\left[\sqrt{(t^2+1)^3}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{9}(2-\sqrt{2})$$

270. $I = \int_{-\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{Sh} x \cdot \operatorname{Ch} x \operatorname{arc\,tg}(\sqrt[3]{\operatorname{Sh} x})\,dx = \int_{-\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{Sh} x \cdot \operatorname{arc\,tg}(\sqrt[3]{\operatorname{Sh} x})\,d(\operatorname{Sh} x)$

Verrebbe spontaneo eseguire la posizione $t = \operatorname{Sh} x$ ma, volendo razionalizzare, è preferibile porre:

$$t = \sqrt[3]{\operatorname{Sh} x} \;\rightarrow\; t^3 = \operatorname{Sh} x \;\text{ con } \begin{cases} t_1 = \sqrt[3]{\operatorname{Sh}[-\ln(1+\sqrt{2})]} = -1 \;(^1) \\ t_2 = \sqrt[3]{\operatorname{Sh}[\ln(1+\sqrt{2})]} = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{1} t^3 \operatorname{arc\,tg} t\, d(t^3) = \int_{-1}^{1} 3t^5 \operatorname{arc\,tg} t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{arc\,tg} t\, d(t^6) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t^6 \operatorname{arc\,tg} t\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t^6}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}[\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}(-1)] - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t^6+1-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t^6+1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(t^2+1)(t^4-t^2+1)}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} t\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (t^4 - t^2 + 1)\,dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{13}{15}$$

---

(1) Ricordando la definizione esponenziale del seno iperbolico si ha:

$t_1 = \operatorname{Sh}[-\ln(1+\sqrt{2})] = \frac{1}{2}[e^{-\ln(1+\sqrt{2})} - e^{\ln(1+\sqrt{2})}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\sqrt{2}} - (1+\sqrt{2})\right] = -1$

Con analogo procedimento si ottiene t_2.

271. $I = \int_{\operatorname{arc\,sen}(3/4)}^{\pi/2} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x - \frac{3}{4}}}\,dx$

Si ha $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$ (cfr. § 1.7). Nel nostro caso viene scelto il segno positivo perché per $\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ è $\cos x > 0$ (1° quadrante). Pertanto:

$$I = \sqrt{2}\int_{\operatorname{arc\,sen}(3/4)}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x - \frac{3}{4}}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_{\operatorname{arc\,sen}(3/4)}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x - \frac{3}{4}}}\,d\left(\operatorname{sen} x - \frac{3}{4}\right)$$

L'integrale si razionalizza ponendo:

$$t^2 = \operatorname{sen} x - \frac{3}{4} \;\rightarrow\; \operatorname{sen} x = t^2 + \frac{3}{4} \;\text{ con } \begin{cases} t_1 = \sqrt{\operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{3}{4}\right)\right] - \frac{3}{4}} = 0 \\ t_2 = \sqrt{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 + (3/4) + t}\,d(t^2) = \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8t}{4t^2+4t+3}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8t+4}{4t^2+4t+3}\,dt - 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2t+1)^2+2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left[\ln(4t^2+4t+3)\right]_0^{1/2} - 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dt =$$

$$= \left[\text{essendo } d\left(\frac{2t+1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,dt\right] = \sqrt{2}(\ln 6 - \ln 3) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,d\left(\frac{2t+1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\ln 2 - 2\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\ln 2 - 2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\ln 2 - 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

272. $I = \int_0^{(\ln 2)/2} e^{-x}\ln(\lambda + e^{2x})\,dx \quad \text{con } \lambda > -1$

$$I = -\int_0^{(\ln 2)/2} \ln(\lambda + e^{2x})\,d(e^{-x}) = -\left[e^{-x}\ln(\lambda + e^{2x})\right]_0^{(\ln 2)/2} + \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} e^{-x} \cdot \frac{2e^{2x}}{\lambda + e^{2x}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\lambda+2) + \ln(\lambda+1) + 2\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^x}{\lambda + e^{2x}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\lambda + 2) + \ln(\lambda + 1) + 2I'$$

Distinguiamo tre casi:

$\boxed{-1 < \lambda < 0}$ Posto $\lambda = -\gamma$ si ha:

$$I' = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^x}{e^{2x} - \gamma}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{1}{(e^x/\sqrt{\gamma})^2 - 1}\, d\left(\frac{e^x}{\sqrt{\gamma}}\right)$$

Si pone $\frac{e^x}{\sqrt{\gamma}} = t \;\rightarrow\; t_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ e $t_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$

$$I' = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_{1/\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{2/\gamma}} \frac{1}{t^2 - 1}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \int_{1/\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{2/\gamma}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left[\ln \frac{t-1}{t+1}\right]_{1/\sqrt{\gamma}}^{\sqrt{2/\gamma}} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left[\ln \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{2} + \sqrt{\gamma}} - \ln \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{1 + \sqrt{\gamma}}\right]$$

Pertanto, sostituendo in I, si ha:

$$I = -\frac{\ln(\lambda + 2)}{\sqrt{2}} + \ln(\lambda + 1) + \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{2} + \sqrt{-\lambda}} \cdot \frac{1 + \sqrt{-\lambda}}{1 - \sqrt{-\lambda}}\right)}{\sqrt{-\lambda}}$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$I' = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^x}{e^{2x}}\, dx = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{d(e^x)}{(e^x)^2} = \left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^{(\ln 2)/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2 + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2 - \sqrt{2} + 2$$

$\boxed{\lambda > 0}$

$$I' = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^x}{e^{2x} + \lambda}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{1}{(e^x/\sqrt{\lambda})^2 + 1}\, d\left(\frac{e^x}{\sqrt{\lambda}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\operatorname{arctg} \frac{e^x}{\sqrt{\lambda}}\right]_0^{(\ln 2)/2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\lambda + 2) + \ln(\lambda + 1) + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{\lambda}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

273. $I = \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1}{(1 + \cos 2x)(\operatorname{tg} x + 2\sqrt{\operatorname{tg} x - 2})}\, dx = [\text{essendo } 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x] =$

$$= \frac{1}{2} \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1}{\operatorname{tg} x + 2\sqrt{\operatorname{tg} x - 2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1}{\operatorname{tg} x + 2\sqrt{\operatorname{tg} x - 2}}\, d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{2} \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1}{\operatorname{tg} x + 2\sqrt{\operatorname{tg} x - 2}}\, d(\operatorname{tg} x - 2)$$

Si pone quindi:

$$\operatorname{tg} x - 2 = t^2 \;\rightarrow\; \operatorname{tg} x = t^2 + 2 \;\text{ con }\; \begin{cases} t_1 = \sqrt{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) - 2} = \sqrt{2 - 2} = 0 \\ t_2 = \sqrt{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3) - 2} = \sqrt{3 - 2} = 1 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2 + 2t}\, d(t^2) = \int_0^1 \frac{t}{t^2 + 2t + 2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t + 2 - 2}{t^2 + 2t + 2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 2}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(t^2 + 2t + 2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 2t + 1 + 1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) - \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2 + 1}\, d(t + 1) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \left[\operatorname{arctg}(t + 1)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}$$

274. $I = \int_{[(\pi/3) - 1]^2}^{[(\pi/2) - 1]^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 2\right) \operatorname{sen}(1 + \sqrt{x})\, dx$

Si noti che è: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 2 = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + x + 2\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})^2$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2d(\sqrt{x}) = 2d(1 + \sqrt{x})$$

Pertanto:

$$I = \int_{[(\pi/3) - 1]^2}^{[(\pi/2) - 1]^2} (1 + \sqrt{x})^2 \operatorname{sen}(1 + \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= 2 \int_{[(\pi/3) - 1]^2}^{[(\pi/2) - 1]^2} (1 + \sqrt{x})^2 \operatorname{sen}(1 + \sqrt{x})\, d(1 + \sqrt{x})$$

Conviene porre:

$$1 + \sqrt{x} = t \;\text{ con }\; \begin{cases} t_1 = 1 + \sqrt{\left(\frac{\pi}{3} - 1\right)^2} = 1 + \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi}{3} \\ t_2 = 1 + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2} = 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = -2\int_{\pi/3}^{\pi/2} t^2\, d(\cos t) = [\text{per parti}] =$$

$$= -2\left\{\left[t^2 \cos t\right]_{\pi/3}^{\pi/2} - \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2t \cos t\, dt\right\} = \frac{\pi^2}{9} + 4\int_{\pi/3}^{\pi/2} t\, d(\operatorname{sen} t) =$$

$$= \frac{\pi^2}{9} + 4\left[t \operatorname{sen} t + \cos t\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{9} + 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{9} + 2\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - 2$$

61 **IL MOTO IN UNA DIMENSIONE. Problemi**
58 problemi conducono ad una conoscenza approfondita su velocità, accelerazione, moto armonico semplice.

62 **IL MOTO IN DUE E TRE DIMENSIONI. Problemi**
86 problemi conducono ad una conoscenza approfondita su vettori, moto di un proiettile, moto circolare uniforme, moti relativi, composizione dei movimenti.

63 **LE FORZE E IL MOTO. Problemi**
79 problemi conducono ad una conoscenza approfondita sulle leggi di Newton, le loro applicazioni, le forze in generale, i moti conseguenti.

64 **LAVORO ED ENERGIA. Problemi**
65 problemi conducono ad una conoscenza approfondita di lavoro, potenza, energia, sistemi conservativi.

65 **QUANTITÀ DI MOTO ED ENERGIA NELLA FISICA CLASSICA E NELLA FISICA MODERNA. Problemi**
110 problemi conducono ad una conoscenza approfondita di quantità di moto, energia e loro conservazione nella teoria classica e in quella relativistica.

66 **CINEMATICA E DINAMICA ROTAZIONALE. Problemi**
84 problemi conducono ad una conoscenza approfondita del moto traslatorio, rotatorio e rototraslatorio dei corpi rigidi.

67 **EQUILIBRIO DEI CORPI RIGIDI. Problemi**
52 problemi conducono ad una conoscenza approfondita della statica dei corpi.

68 **LE OSCILLAZIONI. Problemi**
37 problemi conducono ad una conoscenza approfondita dei moti oscillatori.

69 **LA GRAVITAZIONE. Problemi**
42 problemi conducono ad una conoscenza approfondita della gravitazione e dei moti di pianeti e satelliti.

70 **I FLUIDI. Problemi**
65 problemi conducono ad una conoscenza approfondita della statica e della dinamica dei fluidi.

71 **LE ONDE. Problemi**
65 problemi conducono alla conoscenza del moto ondulatorio in generale e, in particolare, delle onde sonore.

72 **LA TEMPERATURA NEI SOLIDI, NEI LIQUIDI E NEI GAS. Problemi**
70 problemi conducono alla conoscenza della temperatura e ai suoi effetti, macroscopici e microscopici, su solidi e fluidi.

73 **LA TERMODINAMICA. Problemi**
114 problemi conducono alla conoscenza del primo e del secondo principio della termodinamica e delle loro applicazioni.

74 **L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE. Teoria ed esercizi**
33 esercizi sulle applicazioni lineari e non lineari dell'amplificatore operazionale. Dopo una rapida e completa descrizione delle proprietà dell'amplificatore (reale e ideale), si introduce il suo schema equivalente distinguendo tra zona di linearità e saturazione. Si risolvono quindi, tra i circuiti retroazionati contenenti l'amplificatore operazionale, quelli più comunemente usati, vale a dire derivatori, integratori, combinatori lineari, comparatori, ..., e i temi di esame più impegnativi proposti ai corsi di elettronica e teoria dei circuiti. Della maggior parte dei circuiti proposti vengono calcolate le impedenze di ingresso e uscita e la funzione di trasferimento in forma complessa, rappresentandone i diagrammi di Bode.

L'elenco aggiornato dei volumi della Collana Esami è disponibile nel sito:

www.edizionitecnos.it

In esso potrai anche trovare informazioni dettagliate circa il contenuto di ciascun volume: indice degli argomenti, numero di pagine, prezzo di copertina. Potrai inoltre scaricare sul tuo computer l'ultima versione del *Catalogo* in formato pdf.

43 **MANUALE PRATICO PER LA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**
Sono sinteticamente esaminati gli argomenti implicati nella risoluzione dei problemi di Scienza delle Costruzioni: strutture isostatiche ed iperstatiche: cedimenti di vincoli e dilatazioni termiche; diagrammi delle azioni interne in strutture con carichi distribuiti.

44 **TERMODINAMICA DELLE REAZIONI CHIMICHE. Parte prima**
47 esercizi ed esempi concernenti l'energia interna di un sistema, la capacità termica delle sostanze e l'entalpia associata ad una trasformazione termodinamica.

45 **TERMODINAMICA DELLE REAZIONI CHIMICHE. Parte seconda**
51 esempi ed esercizi concernenti entropia, energia libera, costanti di equilibrio.

46 **ACIDI E BASI. Parte prima**
79 esercizi ed esempi concernenti il calcolo del pH di acidi e basi forti; acidi e basi deboli monovalenti; acidi poliprotici; basi poliacide; anfoliti.

47 **ACIDI E BASI. Parte seconda**
79 esercizi ed esempi concernenti l'idrolisi, le soluzioni tampone, le miscele di acidi e basi, gli acidi e le basi in solventi non acquosi.

48 **CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA. Parte prima**
33 esercizi sulle reti elettriche lineari per illustrare i principi di Kirchhoff, il principio di sovrapposizione degli effetti, i teoremi di Thevenin, Norton e Millman, il metodo dei potenziali ai nodi, il metodo delle correnti cicliche, il principio di dualità, i teoremi di reciprocità e di sostituzione.

49 **CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE CONTINUA. Parte seconda**
41 esercizi concernenti la potenza elettrica di un bipolo, le perdite ed il rendimento di un sistema; la risoluzione di circuiti elettrici contenenti generatori pilotati; lo studio di reti contenenti resistori non lineari e diodi ideali.

50 **CIRCUITI ELETTRICI IN CORRENTE ALTERNATA**
65 esercizi concernenti la risoluzione di reti elettriche in regime sinusoidale e l'utilizzo dei diagrammi vettoriali; potenze e teorema di Boucherot; rendimento di una linea elettrica in regime sinusoidale e rifasamento del carico.

51 **LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. Esercizi**
44 esempi ed esercizi risolti per mostrare vari metodi di calcolo di limiti di funzioni di più variabili reali; per risolvere problemi inerenti alla continuità in un punto ed al prolungamento per continuità di funzioni di due variabili reali.

52 **ESERCITAZIONI DI ANALISI CHIMICA DEI PRODOTTI ALIMENTARI**
54 esperimenti pratici di laboratorio: analisi centesimale; analisi del latte e dei formaggi, delle bevande analcoliche, dei vini e degli oli; analisi strumentale: spettrofotometria UV e di assorbimento atomico e di emissione; cromatografia liquida ad alta pressione; gascromatografia; metodi elettrochimici.

53 **INTRODUZIONE AI PROCESSI STOCASTICI: LE CATENE DI MARKOV**
12 esercizi e numerosi esempi per meglio comprendere le catene di Markov, modello matematico naturale per molti fenomeni fisici, biologici, economici e sociali. I processi di Markov si ritrovano nella pianificazione a breve e a lungo termine di una produzione industriale di complessi interdipendenti.

54 **ELETTROCHIMICA. Esercizi**
31 esempi ed esercizi completamente svolti, concernenti la conducibilità degli elettroliti; le leggi di Faraday e i processi elettrolitici; gli equilibri di ossidoriduzione e i potenziali elettronici; il calcolo della f.e.m. di cella.

55 **LA TRASFORMATA DI LAPLACE. Parte prima. Proprietà e applicazioni**
40 esempi per descrivere l'uso della trasformata di Laplace nell'analisi dei sistemi differenziali lineari e stazionari, in risposta a segnali di ingresso anche non causali. L'integrale di definizione viene applicato ad un unico esempio da cui poi, applicando elegantemente le proprietà, si deducono le trasformate dei segnali più comuni. Come istante iniziale nell'integrale di definizione e nella formula di derivazione viene specificato $t=0^-$, anziché semplicemente $t=0$, illustrando nei dettagli le conseguenze che derivano da tale precisazione.

56 **LA TRASFORMATA DI LAPLACE. Parte seconda. La funzione di trasferimento**
23 esempi di calcolo della funzione di trasferimento per sistemi fisici di vario genere, elettrici e non. Partendo dal significato di funzione di trasferimento si arriva alla descrizione delle sue proprietà e ai metodi di rappresentazione grafica, ovvero i diagrammi di Bode, i diagrammi polari e quelli di Nyquist.

57 **DOPPI E MULTI-BIPOLI**
49 esercizi sulla risoluzione delle reti in continua e alternata utilizzando la rappresentazione di circuiti a 2 o n porte. Vengono descritte le matrici caratteristiche e le trasformazioni di rappresentazione per un doppio bipolo, i circuiti equivalenti e i possibili collegamenti tra doppi bipoli. Una particolare attenzione è dedicata ai circuiti contenenti il trasformatore ideale e il doppio bipolo induttivo. Infine, per i multi-bipoli, viene introdotta la matrice delle ammettenze indefinita che permette di calcolare molto velocemente, partendo dai parametri di un (n-1)-polo ricavato da un n-polo in cui si è definito un morsetto come riferimento, i parametri di un qualunque altro (n-1)-polo ottenuto sempre dallo stesso n-polo cambiando però la scelta del morsetto di riferimento.

58 **STUDIO AVANZATO DELLE FUNZIONI. Parte prima. I quesiti da esame più impegnativi**
95 esempi. Dopo una rapida descrizione dei grafici delle funzioni elementari più comuni si descrive come, con semplici traslazioni, simmetrie, e applicazioni di valori assoluti, si possa ricondurre a semplici modifiche di tali grafici lo studio delle proprietà di funzioni anche di notevole complessità. Viene poi approfondito il metodo di studio di una funzione facendo opportuni richiami ai teoremi della teoria e affrontando i problemi più difficili richiesti in sede di esame scelti tra i temi di analisi I.

59 **STUDIO AVANZATO DELLE FUNZIONI. Parte seconda. Scomposizione in sequenze di operatori**
85 esempi per capire come il grafico di una funzione viene modificato dall'applicazione degli operatori più comuni, tipo reciproco, esponenziale, radice, logaritmo, potenza, ..., e per saper riconoscere le sequenze di tali operatori nell'espressione di una funzione da esame risalendo al suo grafico solamente tramite le loro proprietà.

60 **STUDIO AVANZATO DELLE FUNZIONI. Parte terza. Composte e primitive**
36 esempi. Nella prima sezione viene illustrato il metodo di composizione che permette di rappresentare il grafico di una funzione da esame quando risulta composta da una sequenza di operatori di espressione qualsiasi (non necessariamente tra quelli trattati nella Parte seconda), studiando solamente le proprietà degli operatori componenti. Segue una sezione dedicata alla risoluzione dei quesiti più richiesti nei temi d'esame riguardanti la deduzione, dal grafico di una funzione, dell'andamento di una sua primitiva, cioè le modifiche che l'operatore INTEGRALE apporta al diagramma di una assegnata funzione.

continua sull'ultima pagina del volume