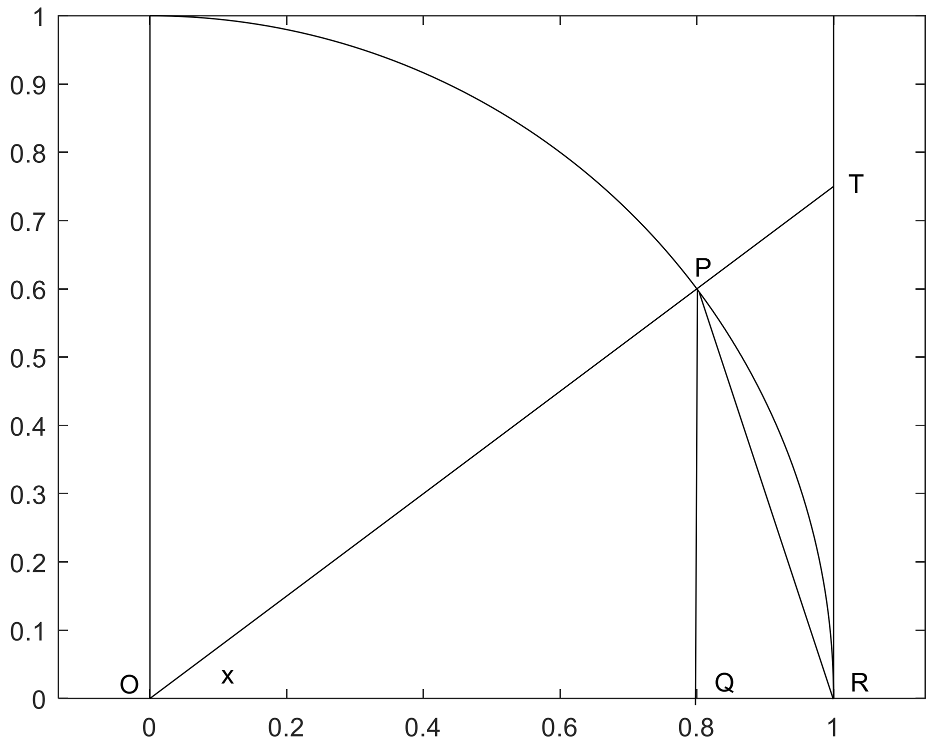
Dimostrare che $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

Considerare la funzione $y = \frac{sinx}{x}$, notare che la funzione è pari (ovvero simmetrica rispetto all'asse delle ordinate) per cui è sufficiente analizzare il caso $x \to 0^+$

Considerato l'arco nel primo quadrante della circonferenza geometrica siano:
O centro della circonferenza: $O(0,0)$
P il punto dell'arco estremo del raggio OP che forma l'angolo x con l'asse delle ascisse: $P(cosx, sinx)$
Q la proiezione ortogonale del punto P sull'asse delle ascisse: $Q(cosx, 0)$
R il punto dell'arco sull'asse delle ascisse: $R(1,0)$
T il punto di intersezione del prolungamento del raggio OP con la tangente all'arco tracciata da R: $T(1, tanx)$



Dalla figura dedurre che il triangolo OPR è contenuto nel settore circolare OPR a sua volta contenuto nel triangolo OTR considerare le aree delle figure la relazione diventa area del triangolo OPR minore o uguale all'area del settore OPR che sarà non superiore all'area del triangolo OTR ovvero
$\frac{1}{2}OR \cdot PQ \leq \frac{1}{2}OR^2 \cdot P\hat{O}R\,\frac{1}{2}OR \cdot RT \to \frac{1}{2}sinx \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}tanx$
Dividere tutti i termini della relazione per $\frac{1}{2}sinx$ (valore positivo essendo $x \to 0^+$)

$1 \leq \frac{x}{sinx} \leq \frac{1}{cosx}$

passare ai reciproci

$cosx \leq \frac{sinx}{x} \leq 1$

calcolare il limite per $x \to 0^+$

$\lim_{x\to 0^+} cosx \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x} \leq \lim_{x\to 0^+} 1 \to 1 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x} \leq 1 \to \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x} = 1$

essendo la funzione pari dedurre $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

Da $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ dedurre $\lim_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = 1$ infatti

$\lim_{x\to 0} \frac{tanx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \frac{1}{cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = 1$

Da $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ dedurre $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$ infatti

$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} \frac{1+cosx}{1+cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2x}{x^2} \frac{1}{1+cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{sin^2x}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+cosx} =$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+cosx} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+cosx} = \frac{1}{2}$

Limite notevole $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ equivalente a $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Da $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ dedurre $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$ infatti

$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

calcolare il logaritmo naturale di ambo i termini

$ln\left(\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = lne$

Per le proprietà dei limiti

$\lim_{x\to 0} \left(ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$

Per le proprietà dei logaritmi

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$

Da $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$ dedurre $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ infatti

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$

Attuare un cambio di variabile:

$ln(1+x) = t \to 1+x = e^t \to x = e^t - 1$

Se $x \to 0$ anche $t \to 0$ per cui

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$

Per le proprietà dei limiti

Se $\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1$ allora $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1 \to \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Verificare i seguenti limiti:

$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{1-x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

Calcolare i seguenti limiti

$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x =$ e^2

$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{tan2x} =$ $\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1-x^2)}{1-cosx} =$ -2

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-x}-e}{x} =$ $-e$