

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1		prova del 12/7/2024
Cognome:	Nome:	Codice persona:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 6) Si consideri la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + i},$$

determinandone il dominio di definizione. Determinarne parte reale e parte immaginaria. Successivamente, stabilire se la funzione assegnata è limitata sul proprio dominio di definizione, cioè se esiste  $k > 0$  tale che  $|f(z)| \leq k$  per ogni  $z$  nel dominio di  $f$ .

**Soluzione.** La funzione è definita se  $z^2 \neq -i = e^{3\pi/2}$ , cioè se  $z \neq e^{3\pi i/4}$ ,  $z \neq e^{-\pi i/4}$ . Per tali  $z$ , e posto  $z = x + iy$ , si ha:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x + iy}{(x + iy)^2 + i} = \frac{x + iy}{x^2 - y^2 + i(1 + 2xy)} = \frac{(x + iy)(x^2 - y^2 - i(1 + 2xy))}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2} \\ &= \frac{x(x^2 - y^2) + y(1 + 2xy) + i[y(x^2 - y^2)^2 - x(1 + 2xy)]}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2}. \end{aligned}$$

Quindi, sempre per  $z \neq e^{3\pi i/4}$ ,  $z \neq e^{-\pi i/4}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(z) &= \frac{x(x^2 - y^2) + y(1 + 2xy)}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2} = \frac{x^3 + y + xy^2}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2}; \\ \operatorname{Im} f(z) &= \frac{y(x^2 - y^2)^2 - x(1 + 2xy)}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2} = -\frac{y^3 + x + yx^2}{(x^2 - y^2)^2 + (1 + 2xy)^2}. \end{aligned}$$

Per rispondere alla domanda successiva, è sufficiente notare che

$$|f(z)|^2 = [\operatorname{Re} f(z)]^2 + [\operatorname{Im} f(z)]^2,$$

e che sia  $\operatorname{Re} f(z)$  che  $\operatorname{Im} f(z)$  sono, in valore assoluto, grandi a piacere se  $z = x + iy$  è sufficientemente vicino a  $e^{3\pi i/4}$  oppure a  $e^{-\pi i/4}$ . La funzione non è quindi limitata sul proprio dominio di definizione.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = (e^x - e^{2x} - e^{3x})^{\frac{1}{3}}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma solo le eventuali informazioni qualitative su concavità, convessità e flessi deducibili dal resto dello studio.

**Soluzione.** La funzione è definita ovunque. Studiamone i limiti. Vale chiaramente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

in quanto per  $x \rightarrow +\infty$  il termine dominante è  $[-e^{3x}]^{1/3} = -e^x$ , mentre per  $x \rightarrow -\infty$  tutti gli addendi sotto radice tendono a zero. Chiaramente non vi sono asintoti obliqui per  $x \rightarrow +\infty$  in quanto la crescita di  $f$  è esponenziale in tale limite.

Studiamo il segno di  $f$ . Esso coincide col segno di  $e^x - e^{2x} - e^{3x}$  cioè, posto  $t = e^x > 0$ , col segno di  $t - t^2 - t^3 = t(1 - t - t^2)$ , dunque col segno di  $1 - t - t^2$ . Tale polinomio si annulla per  $t = (-1 \pm \sqrt{5})/2$ , solo la radice

positiva è accettabile, dunque la funzione è negativa se  $e^x > (\sqrt{5} - 1)/2$ , cioè se  $x > \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ , positiva se  $x < \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ . La funzione si annulla solo se  $x = \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ .

Studiamo ora la derivata prima, per  $x \neq \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ , punto nel quale la funzione non è derivabile. Vale, per ogni tale  $x$ :

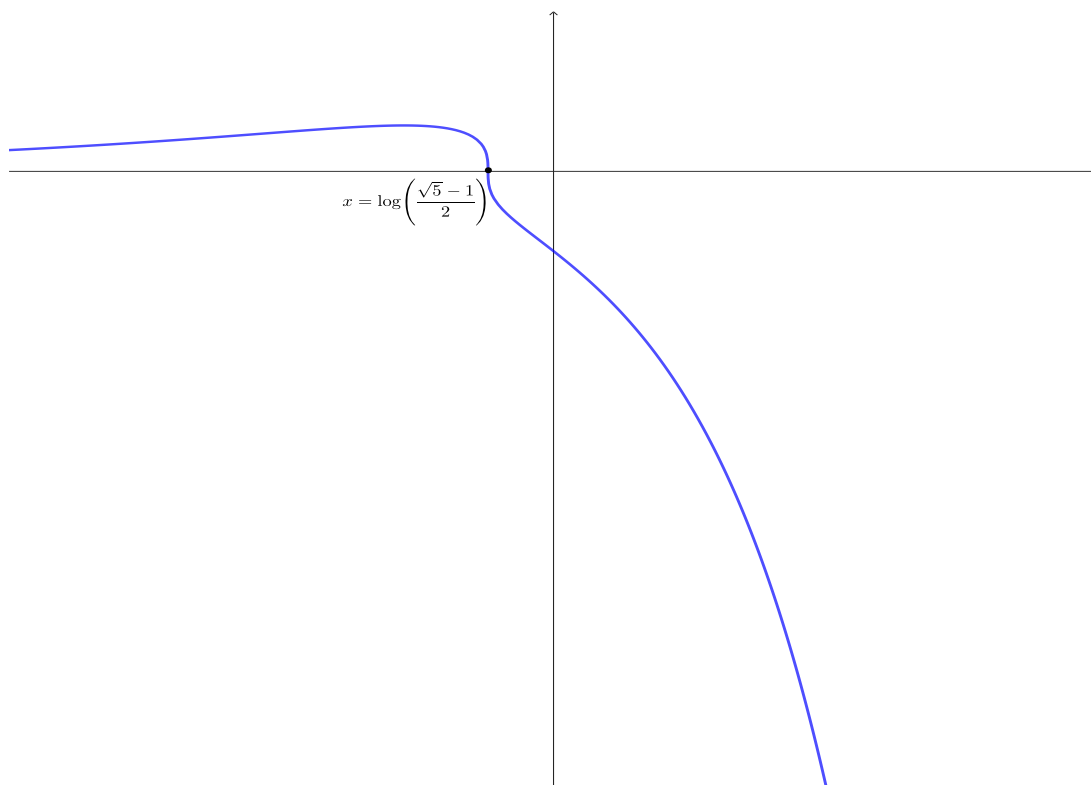
$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x} - 3e^{3x}}{3(e^x - e^{2x} - e^{3x})^{2/3}}.$$

Il denominatore è sempre strettamente maggiore di zero nell'insieme di derivabilità di  $f$ . Quanto al numeratore, posto di nuovo  $t = e^x > 0$ , esso si riscrive con  $t(1 - 2t - 3t^2)$ . Tale polinomio si annulla, per  $t > 0$ , se e solo se  $t = 1/3$ . Dunque la derivata prima si annulla se e solo se  $x = -\log 3$ . È facile vedere che tale valore di  $x$  è strettamente minore dello zero di  $f$ ,  $x = \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ . Quanto al segno della derivata, per quanto detto sopra esso coincide con il segno di  $1 - 2t - 3t^2$  con  $t = e^x$ , dunque  $f'(x) > 0$  se  $x < -\log 3$ , così che  $f$  è crescente in tale intervallo,  $f'(x) < 0$  se  $x > -\log 3$ , così che  $f$  è decrescente in tale intervallo, mentre il punto  $x = -\log 3$  è di massimo relativo per  $f$ . Il fatto che esso sia l'unico massimo relativo di  $f$  e che  $f$  sia definita ovunque implica che tale punto è anche di massimo assoluto. Si noti infine che:

$$\lim_{x \rightarrow \log [(\sqrt{5} - 1)/2]} = -\infty.$$

Dunque il punto  $x = \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$  è un flesso a tangente verticale di  $f$ . Le informazioni ottenute permettono inoltre di stabilire che esiste almeno un flesso per  $x < \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ , in quanto la concavità di  $f$  deve passare dall'essere rivolta verso l'alto all'essere rivolta verso il basso almeno una volta in tale intervallo, e almeno un flesso per  $x > \log [(\sqrt{5} - 1)/2]$ , in quanto analogamente la concavità di  $f$  deve passare dall'essere rivolta verso l'alto all'essere rivolta verso il basso almeno una volta in tale intervallo.

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + (\sin x)^4 + (\cos x)^4}.$$

**Soluzione.** Scriviamo, dapprima con la sostituzione  $\sin x = t$  e poi con quella  $t^2 = u$ :

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^4 + (\cos x)^4} dx = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^4 + (1 - (\sin x)^2)^2} dx \\&= \int \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin x)^4 - (\sin x)^2} dx = \int \frac{t}{1 + t^4 - t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + u^2 - u} du \\&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} du = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} du \\&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(u - \frac{1}{2}\right) \right] + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(u - \frac{1}{2}\right) \right] + c \\&= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) \right] + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} \left((\sin x)^2 - \frac{1}{2}\right) \right] + c,\end{aligned}$$

con  $c$  costante arbitraria reale. Ovviamente, era possibile procedere più brevemente con la singola sostituzione  $(\sin x)^2 = u$ , ma è stato svolto il calcolo in due passaggi, più immediato.

4. (punti 6) Si consideri la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \arctan(x + n), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Determinare se la successione converge puntualmente, e in tal caso determinarne il limite puntuale, se essa converge uniformemente su  $\mathbb{R}$ , e in caso negativo in quali sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  essa converge uniformemente.

**Soluzione.** Chiaramente si ha, per ogni  $x \in \mathbb{R}$  fissato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(x + n) = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque è immediato osservare che la successione di funzioni data converge puntualmente alla funzione costante  $f(x) = \frac{\pi}{2}$  su tutto  $\mathbb{R}$ . Studiamo la convergenza uniforme, in primo luogo su tutto  $\mathbb{R}$ . Dobbiamo calcolare, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  fissato:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \arctan(x + n) - \frac{\pi}{2} \right|.$$

È chiaro che, per  $x \rightarrow -\infty$  ed  $n$  fissato,  $\arctan(x + n) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ . Ne segue dunque che:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \arctan(x + n) - \frac{\pi}{2} \right| = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che ovviamente non tende a zero per  $n \rightarrow +\infty$ . Dunque non vi è convergenza uniforme di  $f_n$  a  $f$  su  $\mathbb{R}$ . Lo stesso evidentemente vale su ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  illimitato dal basso. Verifichiamo allora se la convergenza uniforme ha luogo sugli intervalli del tipo  $[a, +\infty)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . In analogia a quanto detto prima, e usando il fatto che  $\arctan$  è crescente, si ha:

$$\sup_{x \geq a} \left| \arctan(x + n) - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \arctan(a + n) - \frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$  fissato. Dunque vi è convergenza uniforme su ogni intervallo  $[a, +\infty)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , e quindi ovviamente in ogni sottoinsieme di un tale intervallo.