Politecnico di Milano, Corso di Laurea in Ingegneria Fisica

ANALISI MATEMATICA I
Prof. G. Grillo - A.A. 2025/2026

BOZZA di programma

1. Insiemi numerici. Numeri naturali, interi, razionali. $\sqrt{2}$ non è razionale. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme. Allineamenti decimali illimitati e numeri reali. Operazioni sui numeri reali. Insiemi infiniti, numerabilità. L'insieme dei numeri razionali è numerabile, l'insieme dei numeri irrazionali non è numerabile. Il principio di induzione.

2. Numeri complessi. Piano di Argand-Gauss. Operazioni sui numeri complessi, struttura algebrica di $\mathbb{C}$. Forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale dei numeri complessi. Identità di Eulero. Formula di de Moivre per il prodotto($*$) e per il rapporto. Coniugato e modulo di un complesso. Radici n-esime. Teorema fondamentale dell'algebra. Esponenziale nel campo complesso. Logaritmo e logaritmo principale nel campo complesso.

3. Cenni di topologia. Spazi metrici e spazi normati: definizione assiomatica. Esempi. Lo spazio Euclideo n-dimensionale $\mathbb{R}^n$. Norma in $\mathbb{R}^n$, distanza tra due punti in $\mathbb{R}^n$. Cenni di topologia: palle, sfere, intorni di un punto, punti interni, esterni, di frontiera di un insieme, punti di accumulazione di un insieme, insiemi aperti, chiusi, limitati, compatti. Teorema di Bolzano-Weierstrass($*$), Teorema di Heine-Borel($*$). Successioni in uno spazio metrico e loro convergenza. Compattezza sequenziale e sua equivalenza con la compattezza. Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Spazi metrici completi.

4. Funzioni, limiti e continuità. Definizione topologica di limite per funzioni, definizioni "$\epsilon - \delta$". Limiti destro, sinistro, per eccesso, per difetto. Algebra dei limiti e forme di indecisione. Unicità del limite, permanenza del segno, criterio del confronto. Limite della funzione composta. Equivalenza asintotica, simbolo di "o piccolo". Successioni convergenti e loro limite. Le successioni monotone hanno limite. Limiti notevoli. Il numero $e(*)$. Gerarchia degli infiniti. Sottosuccessioni, classe limite, massimo e minimo limite. Completezza di $\mathbb{R}$. Funzioni continue. Punti di discontinuità. Funzioni continue su insiemi compatti. Teorema degli zeri($*$) e dei valori intermedi. L'immagine di un compatto in $\mathbb{R}^n$ tramite una funzione reale continua è compatta. Teorema di Weierstrass. Algebra delle funzioni continue. Continuità della funzione composta. Continuità della funzione inversa. Continuità uniforme, teorema di Heine-Cantor($*$).

5. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale. Derivabilità di una funzione. Retta tangente a una curva in un punto. Differenziabilità. Una funzione di una variabile reale è derivabile in x_0 se e soltanto se è ivi differenziabile. Le funzioni derivabili sono continue. Derivate di funzioni elementari. Derivata destra e sinistra. Punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale. Algebra delle derivate: derivata della somma, del prodotto, del rapporto. Derivata della funzione composta($*$). Derivata della funzione inversa. Punti di massimo e di minimo locali o globali. Teorema di Fermat. Teorema di Rolle, Teorema di Cauchy. Teorema del valor medio o di Lagrange. Applicazioni: funzioni a derivata nulla, test di monotonia, proprietà dei valori intermedi per le derivate, limite della derivata e derivabilità. Ricerca di massimi e minimi. Il Teorema di de l'Hôpital($*$, caso 0/0). Concavità, convessità e loro relazioni con proprietà delle derivate. Polinomi di McLaurin-Taylor. La formula di Taylor con resto di Peano. La formula di Taylor con resto di Lagrange($*$). Determinazione della natura dei punti stazionari in termini delle derivate successive. Sviluppi di McLaurin delle principali funzioni elementari. Cenno al calcolo approssimato e alla serie di Taylor.

6. Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale. Partizioni, somme di Riemann. Proprietà elementari delle somme di Riemann. Funzioni integrabili secondo Riemann, integrale di Riemann. Esempio di funzione non integrabile. Integrabilità delle funzioni continue su $[a, b](*)$ o limitate e con un numero finito di punti di discontinuità su $[a, b]$, integrabilità delle funzioni monotone su $[a, b]$. Proprietà elementari dell'integrale. Teorema della media integrale. Primo($*$) e secondo($*$) teorema fondamentale del calcolo integrale. Cambiamento di variabili negli integrali definiti e indefiniti. Integrazione per parti. Applicazioni: lunghezza di una curva, cenni all'approssimazione numerica di integrali. Integrazione generalizzata al finito e all'infinito. Teoremi del confronto, del confronto asintotico, dell'integrabilità assoluta per integrali impropri.

7. Serie numeriche, successioni e serie di funzioni. Serie numeriche: definizione, prime proprietà ed esempi. Serie geometrica, serie armonica generalizzata. Condizione necessaria per la convergenza. Serie a termini positivi: criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice, del rapporto. Serie a termini di segno qualunque: convergenza assoluta, criterio di Leibniz($*$). Successioni di funzioni: convergenza puntuale, convergenza uniforme. Scambio di limiti per successioni di funzioni e completezza dello spazio $C([a,b])(*)$. Scambio di limite e integrale, scambio di limite e derivata. Serie di funzioni: convergenza puntuale, convergenza uniforme. Criterio di Weierstrass. Serie di potenze, raggio di convergenza. Calcolo del raggio di convergenza: criterio della radice($*$) e del rapporto. Proprietà delle serie di potenze all'interno dell'insieme di convergenza. Derivazione termine a termine delle serie di potenze. Serie di Taylor e funzioni analitiche in senso reale.

NOTA: ($*$) con dimostrazione