Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		**Recupero prima prova intermedia, 12/1/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 14) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ così definita:

$$f(x) = e^{z^2} - e^{-z^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(a) Stabire per quali $z \in \mathbb{C}$ vale $f(z) = 0$, rappresentando le soluzioni nel piano complesso.

(b) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$ in termini delle coordinate cartesiane di z. Successivamente, stabilire per quali z f è reale e per quali z f è immaginaria, rappresentando i corrispondenti insiemi nel piano complesso.

Soluzione. Per quanto riguarda il primo punto, notiamo che $f(z) = 0$ se e solo se $e^{2z^2} = 1$. A sua volta, ciò accade se e solo se $2z^2 = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Se $k = 0$ ciò ha luogo se e solo se $z = 0$. Altrimenti, si noti che $k\pi i = k\pi e^{\frac{\pi}{2}i}$ se $k \in \mathbb{N}$, mentre $k\pi i = -k\pi e^{\frac{3\pi}{2}i}$ se $-k \in \mathbb{N}$. Dunque, se $k \in \mathbb{N}$, le soluzioni sono $z_1 = \sqrt{k\pi} e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1+i)$, $z_2 = \sqrt{k\pi} e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1+i)$. Se invece $-k \in \mathbb{N}$, le soluzioni sono $z_3 = \sqrt{-k\pi} e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\sqrt{\frac{-k\pi}{2}}(1-i)$, $z_4 = \sqrt{-k\pi} e^{\frac{7\pi}{4}i} = \sqrt{\frac{-k\pi}{2}}(1-i)$. In conclusioni, le soluzioni sono:

$$z = 0, \quad z = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1+i) \text{ con } k \in \mathbb{N}, \quad z = \pm\sqrt{\frac{k\pi}{2}}(1-i) \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Si tratta dell'origine e dei punti che si trovano sulle bisettrici del primo e terzo quadrante, e del secondo e quarto quadrante, di modulo $\sqrt{k\pi}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Circa il secondo punto, posto $z = x + iy$ vale $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Quindi:

$$\begin{aligned}
f(z) = e^{z^2} - e^{-z^2} &= e^{x^2-y^2+2ixy} - e^{-[x^2-y^2+2ixy]} \\
&= e^{x^2-y^2}[\cos(2xy) + i\sin(2xy)] - e^{-(x^2-y^2)}[\cos(2xy) - i\sin(2xy)] \\
&= \cos(2xy)\left[e^{x^2-y^2} - e^{-(x^2-y^2)}\right] + i\sin(2xy)\left[e^{x^2-y^2} + e^{-(x^2-y^2)}\right] \\
&= 2\cos(2xy)\sinh(x^2-y^2) + 2i\sin(2xy)\cosh(x^2-y^2).
\end{aligned}$$

In particolare:

$$\operatorname{Re} f(z) = 2\cos(2xy)\sinh(x^2-y^2), \quad \operatorname{Im} f(z) = 2\sin(2xy)\cosh(x^2-y^2).$$

Ne segue che $f(z)$ è reale se e solo se $\sin(2xy) = 0$, dato che il coseno iperbolico non si annulla mai, cioè se e solo se $2xy = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta degli assi cartesiani $x = 0$ e $y = 0$ e di infinite iperboli equilatere. $f(z)$ è invece immaginaria se $x^2 - y^2 = 0$, ovvero se $|x| = |y|$, cioè sulle bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto quadrante, oppure se $2xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Anche tali ultime curve sono iperboli del tipo precedente (ma ovviamente diverse da esse).

2. (punti 18) Calcolare il primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine della funzione:

$$f(x) = \frac{e^{\left(e^{-\sin x}-1\right)} - 1}{1 + \sin\left(e^{-x} - 1\right)} + x$$

Successivamente, si consideri, al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{N}$, la seguente funzione:

$$f_{h,k}(x) := \{\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x)\}^k,$$

e se ne calcoli il grado del primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine.

Soluzione. Vale, sempre per $x \to 0$:

$$e^{-\sin x} - 1 = e^{-x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)} - 1 = -x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right];$$

$$\begin{aligned}
e^{\left(e^{-\sin x}-1\right)} - 1 &= e^{-x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} - 1 = \left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] + \frac{1}{2}\left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^2 + \frac{1}{6}\left[-x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^3 + o(x^3) \\
&= -x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[x^2 - x^3\right] - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&= -x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4); \\
\sin\left(e^{-x} - 1\right) &= \sin\left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left[-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]^3 + o(x^3) \\
&= -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&= -x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3); \\
\frac{1}{1+\sin\left(e^{-x}-1\right)} &= \frac{1}{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \\
&= 1 - \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 - \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 - x^3 + x^3 + o(x^3) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);
\end{aligned}$$

Quindi, in conclusione:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^{\left(e^{-\sin x}-1\right)} - 1}{1+\sin\left(e^{-x}-1\right)} + x = \left[-x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right] \times \left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right] + x \\
&= -x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) + x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Il termine dominante dello sviluppo è quindi $-x^3/6$.

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che per quanto svolto si ha, sempre per $x \to 0$, e in quanto $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, quindi $f(f(x)) \to 0$ per $x \to 0$, e così via:

$$\begin{aligned}
[f \circ f](x) &= f(f(x)) = f\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = \frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9); \\
[f \circ f \circ f](x) &= f(f(f(x))) = f\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right)^3 = -\frac{1}{6^{13}}x^{27} + o(x^{27}),
\end{aligned}$$

e iterando il procedimento si ottiene, per $x \to 0$ e per un'opportuna costante $c_h \neq 0$:

$$\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x) = c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right).$$

Quindi

$$f_{h,k}(x) = \left[c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right)\right]^k = c_h^k x^{k3^h} + o\left(x^{k3^h}\right).$$

Dunque il grado cercato è $k3^h$.

Es. 1	Es. 2	Totale

Analisi Matematica 1, Versione B		**Recupero prima prova intermedia, 12/1/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 14) Si consideri la funzione $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ così definita:

$$f(x)=e^{z^2}+e^{-z^2},\quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

(a) Stabire per quali $z\in\mathbb{C}$ vale $f(z)=0$, rappresentando le soluzioni nel piano complesso.

(b) Scrivere la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$ in termini delle coordinate cartesiane di z. Successivamente, stabilire per quali z f è reale e per quali z f è immaginaria, rappresentando i corrispondenti insiemi nel piano complesso.

Soluzione. Per quanto riguarda il primo punto, notiamo che $f(z)=0$ se e solo se $e^{2z^2}=-1$. A sua volta, ciò accade se e solo se $2z^2=(2k+1)\pi i$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$. Si noti che $\left(k+\frac12\right)\pi i=\left(k+\frac12\right)\pi e^{\frac{\pi}{2}i}$ se $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, mentre $\left(k+\frac12\right)\pi i=-\left(k+\frac12\right)\pi e^{\frac{3\pi}{2}i}$ se $-k\in\mathbb{N}$. Dunque, se $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, le soluzioni sono $z_1=\sqrt{\left(k+\frac12\right)\pi}e^{\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{\left(k+\frac12\right)\frac{\pi}{2}}(1+i)$, $z_2=\sqrt{\left(k+\frac12\right)\pi}e^{\frac{5\pi}{4}i}=-\sqrt{\left(k+\frac12\right)\frac{\pi}{2}}(1+i)$. Se invece $-k\in\mathbb{N}$, le soluzioni sono $z_3=\sqrt{-\left(k+\frac12\right)\pi}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\sqrt{-\left(k+\frac12\right)\frac{\pi}{2}}(1-i)$, $z_4=\sqrt{-\left(k+\frac12\right)\pi}e^{\frac{7\pi}{4}i}=\sqrt{-\left(k+\frac12\right)\frac{\pi}{2}}(1-i)$. In conclusioni, le soluzioni sono:

$$z=\pm\sqrt{\left(k+\frac12\right)\frac{\pi}{2}}(1+i)\text{ con }k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad z=\pm\sqrt{\left(k-\frac12\right)\frac{\pi}{2}}(1-i)\text{ con }k\in\mathbb{N}.$$

Si tratta dell'origine e dei punti che si trovano sulle bisettrici del primo e terzo quadrante, e del secondo e quarto quadrante, di modulo $\sqrt{\left(k+\frac12\right)\pi}$ con $k\in\mathbb{N}$.

Circa il secondo punto, posto $z=x+iy$ vale $z^2=x^2-y^2+2ixy$. Quindi:

$$\begin{aligned}f(z)&=e^{z^2}-e^{-z^2}=e^{x^2-y^2+2ixy}+e^{-[x^2-y^2+2ixy]}\\&=e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right]+e^{-(x^2-y^2)}\left[\cos(2xy)-i\sin(2xy)\right]\\&=\cos(2xy)\left[e^{x^2-y^2}+e^{-(x^2-y^2)}\right]+i\sin(2xy)\left[e^{x^2-y^2}-e^{-(x^2-y^2)}\right]\\&=2\cos(2xy)\cosh(x^2-y^2)+2i\sin(2xy)\sinh(x^2-y^2).\end{aligned}$$

In particolare:

$$\operatorname{Re}f(z)=2\cos(2xy)\cosh(x^2-y^2),\quad \operatorname{Im}f(z)=2\sin(2xy)\sinh(x^2-y^2).$$

Ne segue che $f(z)$ è immaginario se e solo se $\cos(2xy)=0,$ dato che il coseno iperbolico non si annulla mai, cioè se e solo se $2xy=\frac{\pi}{2}+k\pi$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$. Si tratta di infinite iperboli equilatere. $f(z)$ è invece reale se $x^2-y^2=0$, ovvero se $|x|=|y|$, cioè sulle bisettrici del primo e terzo quadrante e del secondo e quarto quadrante, oppure se $2xy=k\pi$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$. Anche tali ultime curve sono iperboli del tipo precedente (ma ovviamente diverse da esse), oltre agli assi cartesiani $x=0$ e $y=0$.

2. (punti 18) Calcolare il primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine della funzione:

$$f(x)=\frac{e^{\left(e^{\sin x}-1\right)}-1}{1+\sin\left(e^x-1\right)}-x$$

Successivamente, si consideri, al variare dei parametri $k, h \in \mathbb{N}$, la seguente funzione:

$$f_{h,k}(x) := \{\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x)\}^k,$$

e se ne calcoli il grado del primo termine non nullo dello lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine.

Soluzione. Vale, sempre per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} - 1 &= e^{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} - 1 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right];\\
e^{\left(e^{\sin x} - 1\right)} - 1 &= e^{x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)} - 1 = \left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] + \frac{1}{2}\left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^2 + \frac{1}{6}\left[x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]^3 + o(x^3)\\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[x^2 + x^3\right] + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4);\\
\sin\left(e^x - 1\right) &= \sin\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}\left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]^3 + o(x^3)\\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\\
&= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);\\
\frac{1}{1 + \sin\left(e^x - 1\right)} &= \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}\\
&= 1 - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\\
&= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 + x^3 - x^3 + o(x^3)\\
&= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3);
\end{aligned}$$

Quindi, in conclusione:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{e^{\left(e^{\sin x} - 1\right)} - 1}{1 + \sin\left(e^x - 1\right)} - x &= \left[x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)\right] \times \left[1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right] - x\\
&= x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Il termine dominante dello sviluppo è quindi $x^3/6$.

Riguardo alla seconda domanda, notiamo che per quanto svolto si ha, sempre per $x \to 0$, e in quanto $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, quindi $f(f(x)) \to 0$ per $x \to 0$, e così via:

$$\begin{aligned}
[f \circ f](x) = f(f(x)) &= f\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = \frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9);\\
[f \circ f \circ f](x) = f(f(f(x))) &= f\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^4}x^9 + o(x^9)\right)^3 = \frac{1}{6^{13}}x^{27} + o(x^{27}),
\end{aligned}$$

e iterando il procedimento si ottiene, per $x \to 0$ e per un'opportuna costante $c_h > 0$:

$$\underbrace{[f \circ f \circ \cdots \circ f]}_{h \text{ volte}}(x) = c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right).$$

Quindi

$$f_{h,k}(x) = \left[c_h x^{3^h} + o\left(x^{3^h}\right)\right]^k = c_h^k x^{k3^h} + o\left(x^{k3^h}\right).$$

Dunque il grado cercato è $k3^h$.

Soluzione.