Marco Contedini

LEZIONE 10

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

26 novembre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Derivate

1. Sia $f(x)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Mostrare che $f(x)$ è continua ma non derivabile in $x = 0$.

2. Determinare un polinomio $P(x)$, tale che la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1, \\ x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

   sia di classe $\mathcal{C}^1$.

3. Determinare per quale valore del parametro k l'equazione

$$2\sqrt{x} - \log(x^2) - k = 0$$

   ammette una sola soluzione. Qual è la soluzione?

2 Studi di funzione

4. Studiare la funzione:

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$$

5. Studiare la funzione:

$$y = \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}{x}$$

6. Studiare la funzione:

$$y = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

7. Studiare la funzione:

$$y = x \cdot e^{\frac{1+x}{1-x}}$$

8. Studiare la funzione:

$$y = \log(x^2 - 1) - \frac{x-2}{x-1}$$

9. Studiare la funzione:

$$y = \sin x(1 - 2\sin x)$$

10. Studiare la funzione:

$$y = \log \left| 1 - \frac{1}{\log|x|} \right|$$

11. Studiare la funzione:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right).$$

3 Esercizi proposti

1. Determinare, al variare del parametro k, il numero di radici reali della seguente funzione:
$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + k.$$

2. Studiare la funzione:
$$y = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4}$$

3. Studiare la funzione:
$$y = x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}$$

4. Studiare la funzione:
$$y = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

5. Studiare la funzione:
$$y = e^{\frac{x-1}{x}} \log\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

6. Studiare la funzione:
$$y = \log\left(\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}\right)$$

4 Soluzioni

1. la funzione è continua nell'origine: poichè $-x \leq f(x) \leq x$ per $x \neq 0$, allora, per il criterio del confronto: $f(x) \to 0$ se $x \to 0$. Dalla definizione diretta di derivata:
$$\lim_{h\to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{h} = \lim_{t\to\infty} \sin t.$$
Poichè tale limite non esiste, $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$.

2. $P(x)$ deve essere tale che: $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$.
Sia dunque P un polinomio di terzo grado: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Si ha:
$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases}$$
da cui: $a = -1$ e $b = 2$, ovvero: $P(x) = -x^3 + 2x^2$.

3. La funzione è continua sul suo insieme di definizione $\mathcal{D} = (0, +\infty)$.
Abbiamo che: $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to 0^+$ che per $x \to +\infty$.
Calcoliamo la derivata:
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}.$$
La derivata si annulla solo per $x = 4$, è positiva se $x > 4$, negativa se $x < 4$.
$f(x) = 0$ ammette un'unica soluzione soltanto se $f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$. Infatti,

in tal caso, solo $\bar{x}$ è uno zero di $f(x)$. Per $x < \bar{x}$ la funzione è monotona decrescente e per $x > \bar{x}$ la funzione è monotona crescente.
Allora:

$$f(4) = 4 - \log 16 - k = 0$$

da cui: $k = 4(1 - \log 2)$.

4. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$,
Intersezione asse y: $y = -1$.
Intersezioni asse x e segno: è conveniente rinviare la determinazione degli zeri della funzione dopo lo studio della derivata prima, anche se si potrebbe scomporre la funzione (con la regola di Ruffini) nel seguente modo:

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1 = (x-1)^2(x^3 - 3x^2 - 2x - 1)$$

e dedurre che esiste uno zero in $x = 1$.
Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

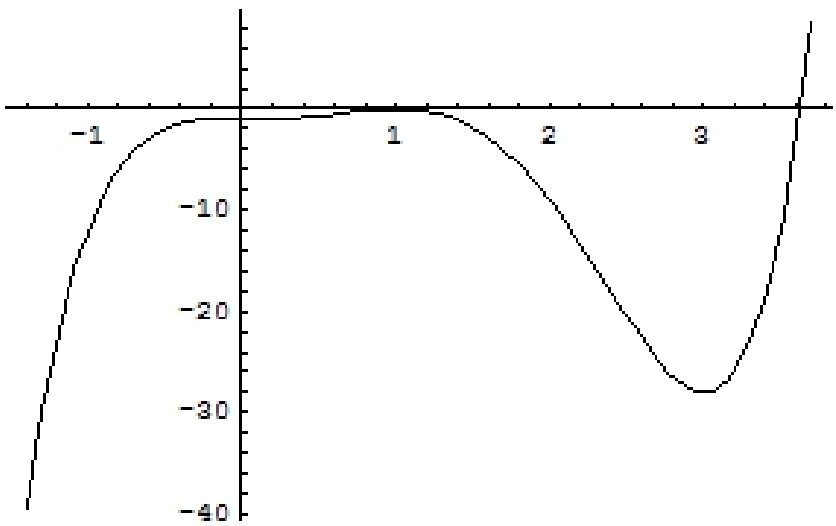
Derivata prima:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3)$$

La funzione ha un massimo relativo in $x = 1$, $f(1) = 0$, un minimo relativo in $x = 3$, $f(3) = -28$ ed un flesso in $x = 0$ a tangente orizzontale. è crescente in $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ e decrescente in $(1, 3)$.
Poichè $f(x)$ è monotona crescente nell'intervallo $(3, +\infty)$, deve esistere un altro zero in $x = \alpha$ con $\alpha > 3$.
Segno: $y \geq 0 \ \forall x > \bar{x}$.
Derivata seconda:

$$f''(x) = 20x(2x^2 - 6x + 3)$$

si ritrova il flesso $x = 0$ ed altri due flessi in $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$.
Rappresentazione grafica:



5. $f(x)$ è una funzione dispari. É conveniente studiare la funzione per $x \geq 0$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x^2-1)(x^2-2)}}{x}$$

Dominio: $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup [-1:0) \cup (0;1] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.
Intersez. asse x: $x = \pm 1$, $= x = \pm\sqrt{2}$.
Segno: $f(x) > 0$ se $x \in (0;1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$
Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

Poichè $f(x) = \frac{x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}{x} \sim x$ per $x \to +\infty$ verifichiamo se c'è asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0$$

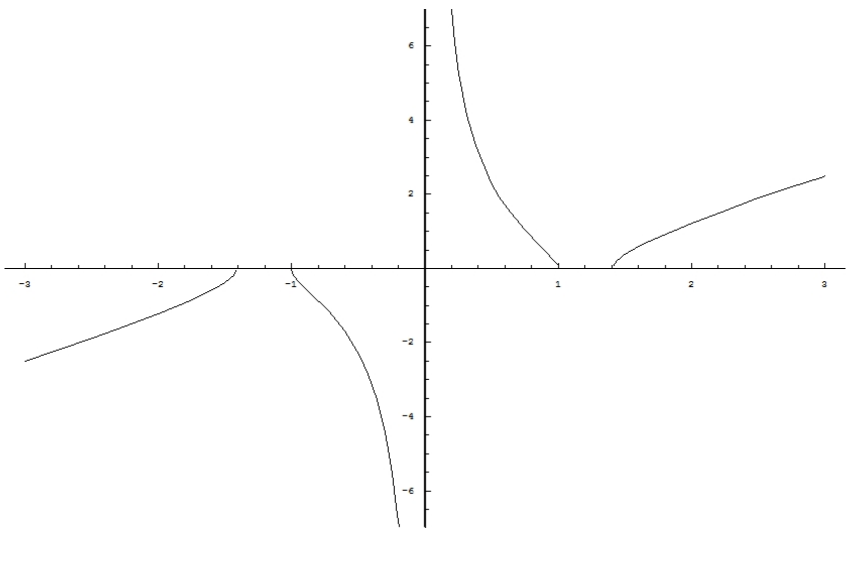
La funzione ammette asintoto obliquo $y = x$ per $x \to \pm\infty$. $x = 0$ è asintoto verticale.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^4-2}{x^2\sqrt{x^4-3x^2+2}} \qquad \mathcal{D}' = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-1:0) \cup (0;1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

La derivata non si annulla mai: i valori $x = \pm\sqrt[4]{2}$ non appartengono a $\mathcal{D}$.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^+} f'(x) = +\infty$$

La funzione ha quattro estremanti che giaciono sull'asse x: due minimi relativi in $x = 1$ e $x = \sqrt{2}$ con tangente verticale e, per simmetria, due massimi relativi in $x = -1$ e $x = -\sqrt{2}$ sempre con tangente verticale.
Lo studio della derivata seconda non è contemplato per questo esercizio.
Rappresentazione grafica:



6. La funzione non ha simmetrie ed è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si ha che $f(x)$ è positiva se $x > 1$, è negativa se $x < 0 \vee 0 < x < 1$, nulla se $x = 0 \vee x = 1$.

   Il fatto che $f(x) \sim x$ per $x \to \pm\infty$ suggerisce l'eventuale esistenza di un asintoto obliquo. Infatti, ricordando che $\sqrt[3]{(1-t)} = 1 - \frac{1}{3}t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha:

$$f(x) = x\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x\left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - \frac{1}{3} + o(1) \quad \text{per } x \to \pm\infty,$$

   avendo indicato con $o(1)$ una generica funzione tendente a zero.

   Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) + x^2}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$$

   La derivata prima non è definita in $x = 0$ e $x = 1$. In questi punti, la funzione è continua ma non derivabile. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty; \qquad \lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = +\infty.$$

   La funzione presenta una cuspide in $x = 0$ ed un punto a tangente verticale in $x = 1$. Inoltre, il punto $x = 0$ è anche un punto di massimo relativo per $f(x)$, infatti, in un intorno di $x = 0$ la funzione è sempre negativa.

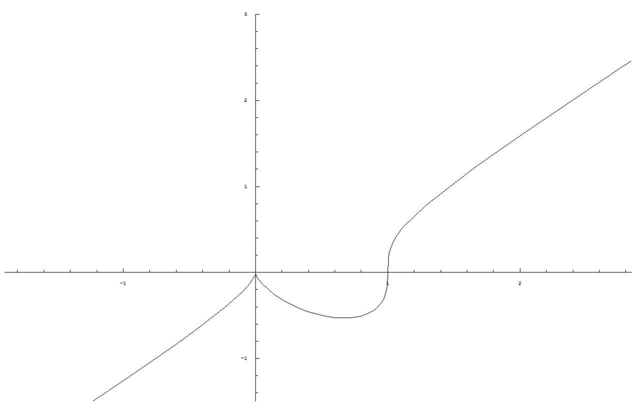
   Lo studio del segno della derivata prima è immediato: essa è positiva per $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$, nulla in $x = \frac{2}{3}$ e negativa per $x \in (0, \frac{2}{3})$. Pertanto la funzione ha un punto di minimo relativo in $x = \frac{2}{3}$, la cui immagine è $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

   Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{3\sqrt[3]{x(x-1)^2} - (3x-2) \cdot \frac{3x^2-4x+1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}}}{3\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^2} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4(x-1)^5}}.$$

   Essa ha lo stesso insieme di definizione della derivata prima. Anche in questo caso lo studio del segno è immediato: $f''(x) < 0$ se $x > 1$, $f''(x) > 0$ se $x < 1$. Pertanto, in $x = 1$ si ha un punto di flesso a tangente verticale.

   Il grafico è il seguente:



7. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
$f(x) < 0$ se $x < 0$, $f(x) = 0$ se $x = 0$, $f(x) > 0$ se $x > 0$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0^+$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Il fatto che $f(x) \sim \frac{1}{e}x$ per $x \to \infty$ suggerisce che potrebbe esserci un asintoto obliquo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{e}x = & \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1+x}{1-x}} - e^{-1}\right) = \\ & \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e} \left(e^{\frac{2}{1-x}} - 1\right) = \\ & \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e} \frac{2}{1-x} = -\frac{2}{e}\end{aligned}$$

La funzione presenta dunque un asintoto verticale in $x = 1$ e un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{e}x - \frac{2}{e}$.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{(1-x)^2} e^{\frac{1+x}{1-x}}$$

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$.

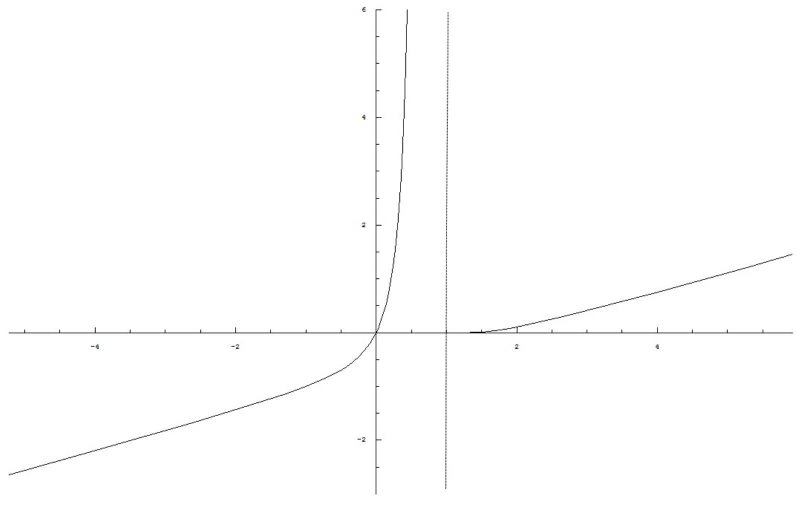
$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = 0^+$$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^4}$$

$\mathcal{D}'' = \mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
$f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$.

$$\lim_{x \to 1^-} f''(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f''(x) = 0^+$$



8. La funzione è definita se $|x| > 1$. Essa non è né pari né dispari. Vale:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La crescita di f all'infinito è logaritmica, dunque, non vi sono asintoti obliqui ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$). La funzione è derivabile nel proprio insieme di definizione. Calcoli elementari mostrano che, se $|x| > 1$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{(x-1)^2(x+1)} \quad \text{se } |x| > 1.$$

Il numeratore di tale espressione si annulla se $x = (3 \pm \sqrt{17})/4$, ma solo la soluzione corrispondente al segno più appartiene all'insieme di definizione di f, dunque $x_1 := (3+\sqrt{17})/4$ è un punto stazionario per f. Lo studio del segno di f' è immediato e dà:

$$f'(x) < 0 \text{ se } x \in (-\infty, -1) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right), \; f'(x) > 0 \text{ se } x \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right).$$

La funzione è dunque decrescente in $(-\infty, -1)$ e in $\left(1, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$, crescente in $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$. Il punto x_1 è di minimo relativo. Ovviamente non vi sono estremi assoluti.

Riguardo al segno di f, le considerazioni precedenti mostrano che esiste un solo punto $x_2 < -1$ in cui f si annulla e che f è positiva per $x < x_2$, negativa per $x \in (x_2, -1)$. Non è invece del tutto immediato stabilire se vi sono zeri di f nella regione $x > 1$. Notiamo tuttavia che la funzione $\log(x^2-1)$ è crescente per $x > 1$ e che evidentemente $x_1 \in (7/4, 2)$. Quindi, essendo $(x_1-2)/(x_1-1) < 0$, si ha:

$$f(x_1) > \log\left(\frac{49}{16} - 1\right) = \log\left(\frac{33}{16}\right) > 0.$$

Quindi la funzione è positiva in x_1 e dunque non ci sono zeri di f per $x > 1$.

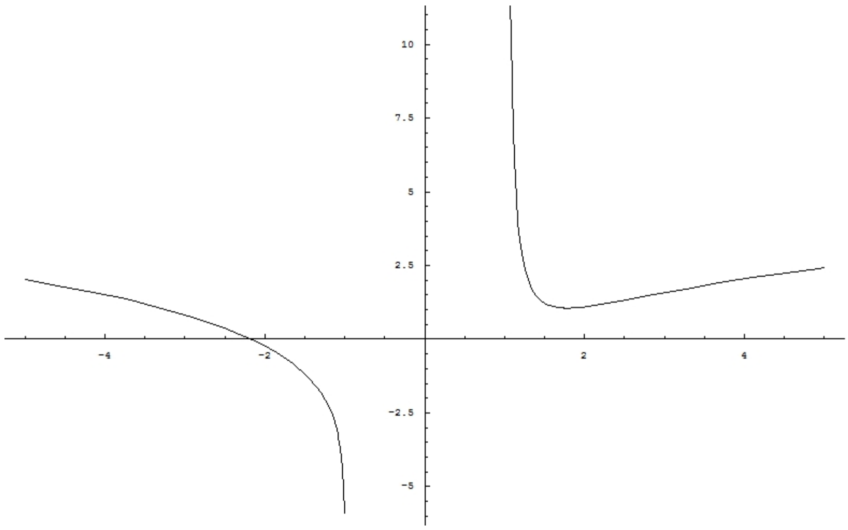
La funzione è due volte derivabile nel suo dominio. Calcoli elementari mostrano che

$$f''(x) = -2\frac{x^3 - 2x^2 - x - 2}{(x-1)^3(x+1)^2}.$$

Il polinomio $P(x) := x^3 - 2x^2 - x - 2$ non ha radici immediatamente visibili. Tuttavia $P'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ si annulla se e solo se $x = x_3 := (2 - \sqrt{7})/3$ (punto di massimo relativo per P) oppure $x = x_4 := (2 + \sqrt{7})/3$ (punto di minimo relativo per P). Siccome $P(0) = -2 < 0$ e $x_4 > 1$, ne segue che esiste uno e un solo punto $x_5 > 1$ in cui P, e dunque f'', si annullano. Lo studio del segno di f'' è a questo punto immediato per $x > 1$ e mostra che f è convessa se $x \in (1, x_5)$ (per costruzione $x_1 < x_5$ mentre f è concava se $x \in (x_5, +\infty)$. Il punto $x = x_5$ è di flesso.

Per $x < -1$ si procede come segue. Chiaramente x_3, punto di massimo relativo per P, soddisfa $x_3 \in (-1, 0)$. Tale proprietà e il fatto che $P(-1) < 0$ implicano che $P(x) < 0$ se $x < -1$. Dunque f è concava in $(-\infty, -1)$.

In conclusione il grafico qualitativo di f è il seguente:



9. Il dominio è $\mathbb{R}$. La funzione risulta periodica di periodo 2π. Si limita quindi lo studio della funzione all'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$. In tale regione $y = 0$ solo se $\sin x = 0$ oppure $\sin x = \frac{1}{2}$, vale a dire se $x = 0 \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \pi \vee x = 2\pi$.
   Inoltre, $\sin x > 0$ solo se $0 < x < \pi$ e $1 - 2\sin x > 0$ solo se $0 < x < \frac{1}{6}\pi \vee \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$. Pertanto, $y > 0$ solo se $0 < x < \frac{1}{6}\pi \vee \frac{5}{6}\pi < x < \pi$.
   La funzione è ovunque continua e derivabile.
   Si ha:
   $$y' = \cos x(1 - 2\sin x) + \sin x(-2\cos x) = \cos x(1 - 4\sin x)$$
   Dunque:
   $y' = 0$ se $x = \arcsin\frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} \vee x = \frac{3}{2}\pi$.

   $y' > 0$ se $x \in (0, \arcsin\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi - \arcsin\frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

   $y' < 0$ se $x \in (\arcsin\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi - \arcsin\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\pi)$.
   Inoltre, quando $x = \arcsin\frac{1}{4} \vee x = \pi - \arcsin\frac{1}{4}$ si ha: $y = \frac{1}{8}$, punti di massimo assoluto;

   quando $x = \frac{1}{2}\pi$ si ha: $y = -1$, punto di minimo relativo;

   quando $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha: $y = -3$, punto di minimo assoluto.

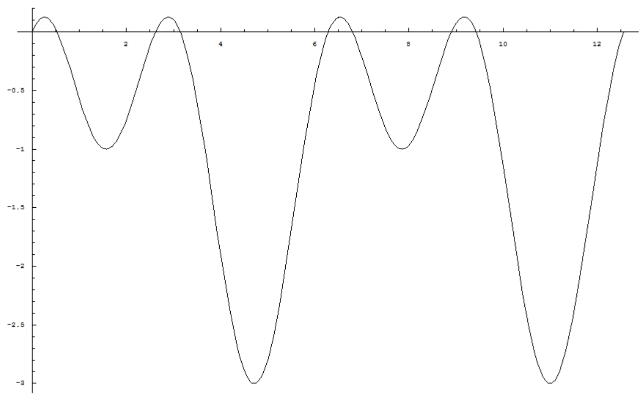
   Derivata seconda:
   $$y'' = -\sin x(1 - 4\sin x) + \cos x(-4\cos x) = 8\sin^2 x - \sin x - 4$$
   Per determinare i punti di flesso si pone $t = \sin x$ e si risolve l'equazione $8t^2 - t - 4 = 0$. Da cui:
   $$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{129}}{16}$$

Pertanto si hanno quattro punti di flesso, infatti:

$$\sin x = t_1 \Longrightarrow x_1 = \arcsin\frac{1-\sqrt{129}}{16} \vee x_2 = \pi - \arcsin\frac{1-\sqrt{129}}{16}$$

$$\sin x = t_2 \Longrightarrow x_3 = \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16} \vee x_4 = \pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{129}}{16}$$

Il grafico della funzione è il seguente:



10. La funzione è pari. pertanto è opportuno studiarla solo per $x \geq 0$.
Dominio: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-e, -1, 0, 1, e\}$.
Esplicitando il modulo esterno:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{\log x - 1}{\log x}\right) & \text{se } 0 < x < 1 \vee x > e \\ \log\left(\frac{1-\log x}{\log x}\right) & \text{se } 1 < x < e \end{cases}$$

Sia, d'ora in poi, $x > 0$:
$f(x) = 0$ se $x = \sqrt{e}$.
$f(x) > 0$ se $x \in (0; 1) \cup (1; \sqrt{e})$.
$f(x) < 0$ se $x \in (\sqrt{e}; e) \cup (e; +\infty)$.
Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to e} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0^-.$$

La funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$, asintoti verticali in $x = \pm 1$ e $x = \pm e$, asintoto orizzontale $y = 0$.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x(\log x - 1)\log x}, \qquad \mathcal{D}' = \mathcal{D}$$

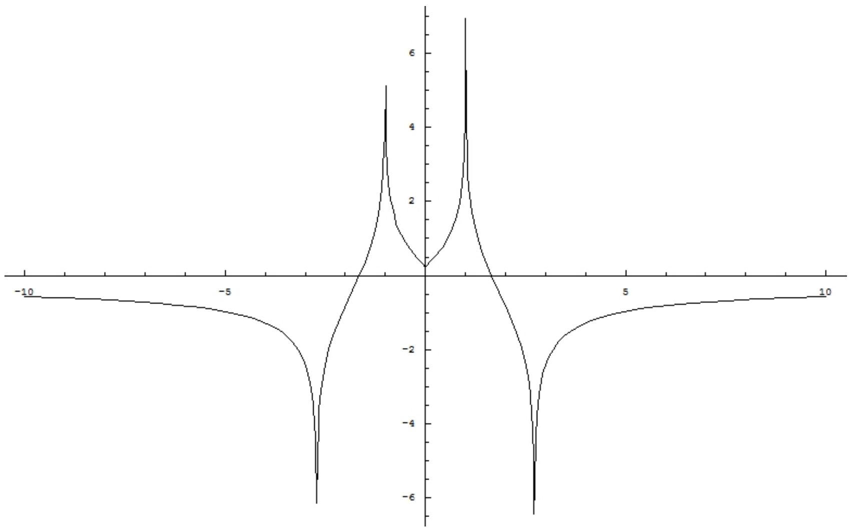
$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$.
$f'(x) > 0$ se$x \in (0; 1) \cup (e; +\infty)$.
$f'(x) < 0$ se$x \in (1; e)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

Se si ripristinasse la continuità nell'origine ponendo $f(0) = 0$, il punto di origine sarebbe una cuspide (minimo relativo) della funzione.
Derivata seconda:

$$f'(x) = \frac{-\log^2 x - \log x + 1}{x^2(\log x - 1)^2 \log^2 x}, \qquad \mathcal{D}'' = \mathcal{D}$$

Posto $t = \log x$, la derivata seconda si annulla se $-t^2 - t + 1 = 0$, ovvero se $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
La funzione (nel semipiano $x > 0$) ammette due flessi:
$x_1 = e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ e $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Si ha: $x_1 < 1 < \sqrt{e} < x_2 < e$.
$f''(x) > 0$ se $x \in (x_1, 1) \cup (1, x_2)$.
$f''(x) < 0$ se $x \in (0, x_1) \cup (x_2, e) \cup (e, +\infty)$.



11. La funzione è definita per $x \neq 1$. Non vi sono simmetrie. Vale:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

dato che l'argomento dell'arcotangente tende a $+\infty$ in ciascuno di questi casi. Ciò mostra in particulare che la funzione può essere estesa per continuità in $x = 1$ ponendo $f(x) = \pi/2$. Inoltre $y = \pi/2$ è asintoto orizzontale per f per $x \to \pm\infty$. L'argomento dell'arcotangente è inoltre sempre non negatitivo ove definito, dunque $f(x) \geq 0$ $\forall x \neq 1$. La funzione si annulla solo per $x = 0$, e tale punto è quindi di minimo assoluto per f.

Calcoliamo la derivata, dapprima per $x > 1$. Vale:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2 + x^4}, \quad \forall x > 1.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x > 2$ così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ per $x \in (1, 2)$ così che f è decrescente in tale intervallo, $f'(2) = 0$. In particolare $x = 2$ è punto di minimo relativo per f, e in tale punto la funzione vale $\arctan 4$. Si ha infine

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -1.$$

Analogamente si ha, per $x < 1$:

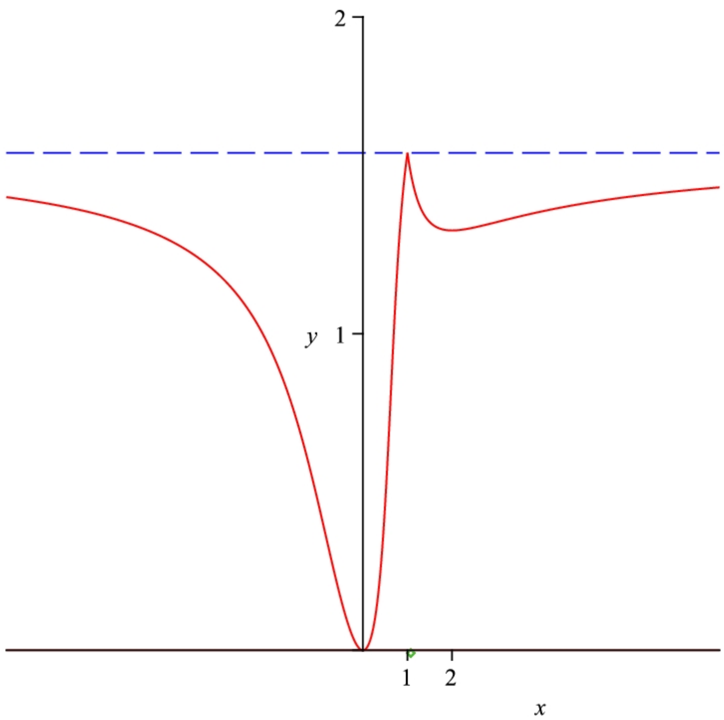
$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2 + x^4}, \quad \forall x < 1.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x \in (0,1)$ così che f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ per $x < 0$ così che f è decrescente in tale intervallo, $f'(0) = 0$. In particolare $x = 0$, punto nel quale la funzione si annulla, è punto di minimo assoluto per f, come già notato in precedenza. Si ha infine

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1.$$

Si noti che la funzione non è definita in $x = 1$. Tuttavia, se si estendesse la funzione per continuità in $x = 1$ come detto sopra, $x = 1$ sarebbe punto di massimo assoluto per f e si avrebbe ivi un punto angoloso.

In conclusione il grafico di f è il seguente:



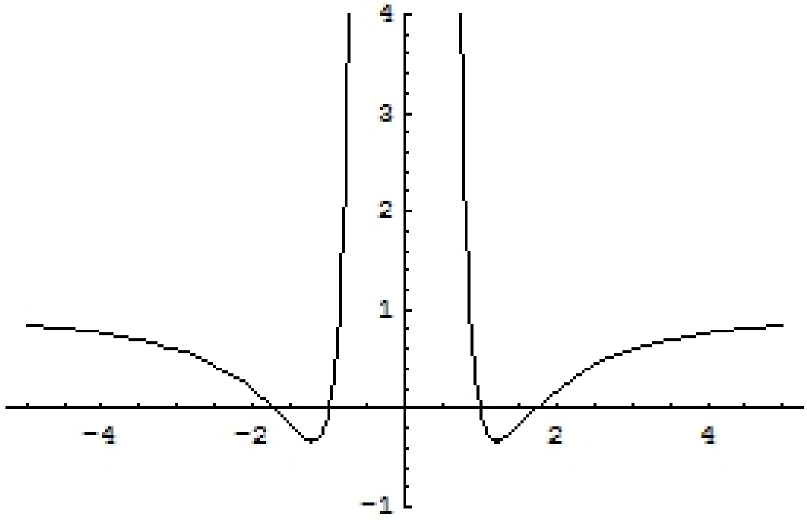
5 soluzione degli esercizi proposti

1. L'esercizio è un'applicazione del teorema degli zeri. La funzione in questione è infatti continua. Determiniamo i punti estremanti:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Si deduce che la funzione ha un punto di massimo relativo in $(1, 4+k)$ e un minimo relativo in $(3, k)$.
Per $k < -4$ oppure $k > 0$ $f(x)$ ha una sola radice reale.
Per $-4 < x < 0$ $f(x)$ ha tre radici reali.
Per $k = -4$ oppure $k = 0$ $f(x)$ ha due radici reali.

2. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$f(x) = \frac{(x^2-3)(x^2-1)}{x^4}$ è una funzione pari. Intersez. asse x: $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{3}$.
Segno: $f(x) > 0$ se $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-1 : 0) \cup (0; 1) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$
Limiti:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^\pm} f(x) = +\infty$$
Asintoti: $y = 0$ asintoto orizzontale, $x = 0$ asintoto verticale.
Derivata prima:
$$f'(x) = \frac{4(2x^2 - 3)}{x^5}$$
Minimi in $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
Derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{12(-2x^2 + 5)}{x^6}$$
Flessi in $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.
Rappresentazione grafica:



3. Dominio: $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
La funzione può essere riscritta come:
$$f(x) = x^{-2/3}(x - 2)$$
Da cui: $f(x) = 0$ se $x = 2$.
$f(x) > 0$ se $x > 2$.
Limiti:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

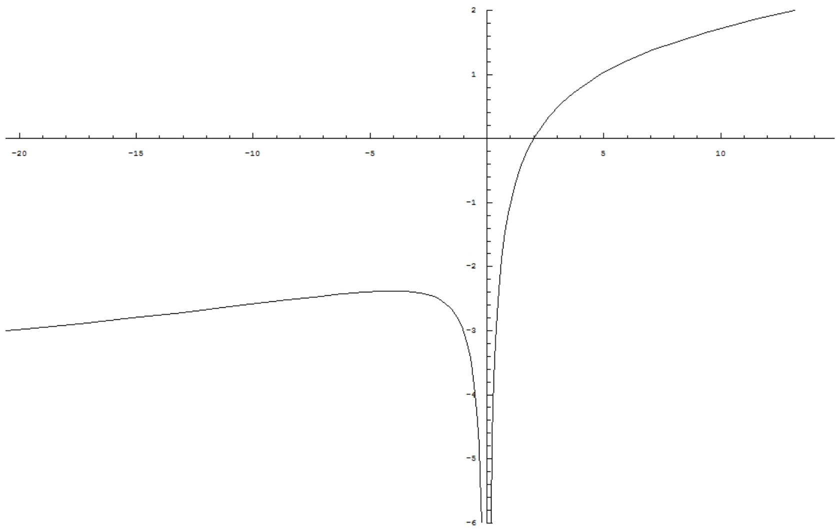
Asintoti: $x = 0$ asintoto verticale.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{4}{3}x^{-5/3} = \frac{1}{3}x^{-5/3}(x+4) \qquad \mathcal{D}' = \mathcal{D}$$

Punto di massimo in $x = -4$.
La funzione è crescente se $x \in (-\infty; -4) \cup (0, +\infty)$ decrescente in $x \in (-4, 0)$.
Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} - \frac{20}{9}x^{-8/3} = -\frac{2}{9}x^{-8/3}(x+10) \qquad \mathcal{D}'' = \mathcal{D}$$

Punto di flesso in $x = -10$.
Rappresentazione grafica:



4. il numeratore e il denominatore di $f(x)$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, quindi $f(x)$ è periodica di periodo non superiore a 2π. Conviene limitare lo studio della funzione in $x \in [0, 2\pi)$, sebbene $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
   Inoltre, $f(x)$ è dispari, quindi: $f(x+\pi) = f(x-\pi) = -f(\pi - x)$: il grafico della funzione ha una simmetria di tipo centrale con centro nel punto $(0, \pi)$.
   La funzione non ammette limite per $x \to \pm\infty$.
   Zeri: $x = 0$ e $x = \pi$.
   Segno: $f(x) > 0$ se $0 < x < \pi$ e $f(x) < 0$ se $\pi < x < 2\pi$ (il denominatore è positivo per ogni valore di x).
   Derivata prima:

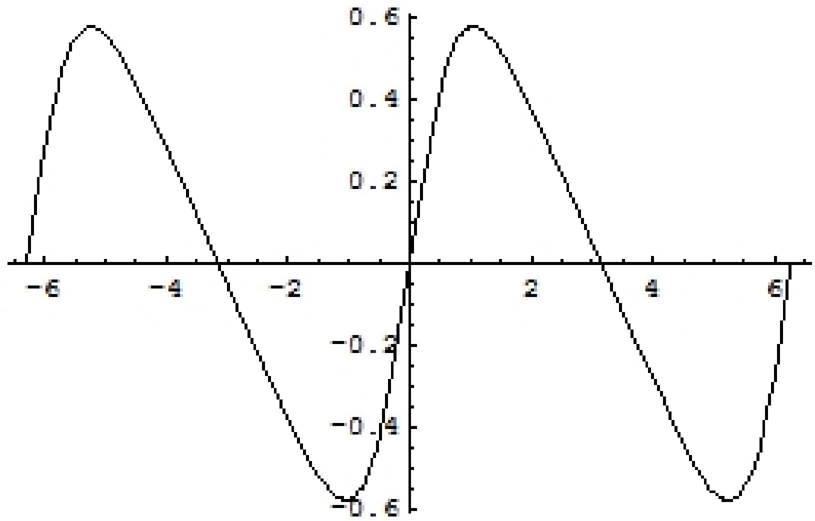
$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2} \qquad \mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

   La derivata si annulla se $\cos x = \frac{1}{2}$. Nella regione $[0, 2\pi)$ ciò accade solo se $x = \pi/3$ oppure $x = \frac{5}{3}\pi$.
   La funzione è crescente se $\cos x > \frac{1}{2}$, vale a dire se $x \in (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{5}{3}\pi, 2\pi)$.
   La funzione è decrescente se $\cos x < \frac{1}{2}$, vale a dire se $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi)$.
   $x = \frac{\pi}{3}$, $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di massimo.

$x = \frac{5}{3}\pi$, $f(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di minimo.
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(\cos x + 1)}{(2-\cos x)^3} \qquad \mathcal{D}'' = \mathbb{R}$$

La concavità è rivolta verso il basso se $0 < x < \pi$, verso l'alto se $\pi < x < 2\pi$.
La funzione ha due flessi: $x = 0$, $f(0) = 0$ e $x = \pi$, $f(\pi) = 0$.
Rappresentazione grafica:



5. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
   $f(x) > 0$ se $x < 0$, $f(x) = 0$ per nessun valore di x, $f(x) < 0$ se $x > 1$.
   Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$$

La funzione ha un asintoto orizzontale $y = 0$, un asintoto verticale alto $x = 0$ e un asintoto verticale basso $x = 1$.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2}\left[\log\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{x}{x-1}\right]$$

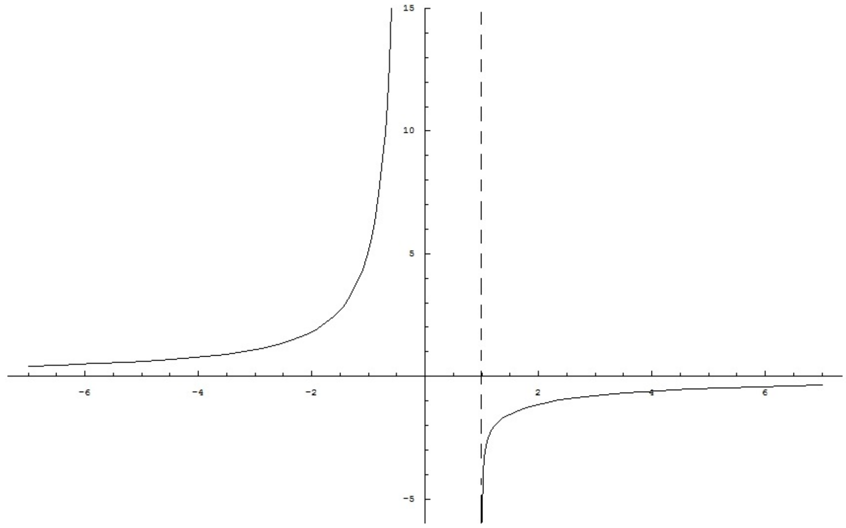
$\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
Per lo studio della derivata prima, si deve risolvere la disequazione:

$$\log\left(\frac{x-1}{x}\right) > -\frac{x}{x-1}$$

Posto $t = \frac{x-1}{x}$, l'equazione diventa:

$$\log t > -\frac{1}{t}$$

Essa è soddisfatta per ogni $t \in D'$, infatti è noto che: $\log x < x$. Quindi, posto $t = x^{-1}$, abbiamo: $\log(t^{-1}) < t^{-1}$, ovvero: $-\log t < 1/t$ e, cambiando segno: $\log t > -1/t$.
La funzione è sempre crescente negli intervalli in cui essa è continua.
Lo studio della derivata seconda non è richiesto: Il grafico è il seguente:



6. La funzione è periodica di periodo non superiore a π (l'argomento del logaritmo è un quoziente di funzioni periodiche di periodo π).
   Dominio: l'argomento del logaritmo è non negativo. Esso si annulla soltanto se $\sin x = 1$ (e quindi: $\cos x = 0$), vale a dire se $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   Pertanto: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Regioni di positività: poichè $\sin^2 x \le 1 \le 1+\cos^2 x$, l'argomento del logaritmo è sempre minore o uguale a 1. Pertanto:
   $f(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   $f(x) < 0$ se $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Limiti:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = -\infty$$
   La funzione, essendo periodica, non ammette limiti per $x \to \pm\infty$.
   Derivata prima:
$$f'(x) = \frac{4\text{cotg}\ x}{1+\cos^2 x}$$
   $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
   $f'(x) = 0$ se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
   $f'(x) > 0$ se $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   $f'(x) < 0$ se $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   I punti $(\frac{\pi}{2} + k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo.
   Derivata seconda:
$$f''(x) = 4\frac{2\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x - 1}{\sin^2 x(1+\cos^2 x)^2}$$

$\mathcal{D}'' = \mathcal{D}' = \mathcal{D}$.
Si ha: $2\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x - 1 < 0$ $\forall x \in D$.
Infatti, posto $t = \cos^2 x$:

$$
\begin{aligned}
2(1-t)t - t - 1 &< 0 \\
-2t^2 + t - 1 &< 0 \quad \forall t
\end{aligned}
$$

La funzione è sempre concava nelle regioni in cui essa è continua e non ha punti di flesso.
Il grafico è il seguente: