Marco Contedini

LEZIONE 2

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

24 settembre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 numeri Complessi - Seconda parte

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\begin{aligned} &a) \qquad Re(z) \geq Im((1-i)\bar{z}) \\ &b) \qquad \left|\frac{z-4}{z+4}\right| > 3 \end{aligned}$$

2. Determinare $z \in \mathbb{C}$ per cui

$$\frac{z+1-i}{z+i} \in \mathbb{R}.$$

3. Calcolare le radici cubiche, quarte e quinte dell'unità.

4. Calcolare: $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt{i+1}$.

5. Calcolare: $\sqrt{1-4i\sqrt{3}}$ e $\sqrt[6]{(1+4i)^6}$

6. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} &a) \qquad z^2 + i\sqrt{5}|z| + 6 = 0 \\ &b) \qquad z^6 + z^3 + 1 = 0 \\ &c) \qquad z^3 = |z|^4 \end{aligned}$$

7. Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4(\sqrt{3}+i)^2 = 1 + 2z\bar{z}.$$

   Rappresentare l'insieme A di tali soluzioni nel piano complesso e l'insieme $B := \{w \in \mathbb{C}, w = 1 + iz, z \in A\}$.

8. Dopo avere verificato che il numero complesso $z = 2 + i$ è una radice del polinomio $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5$, fattorizzare $P(z)$ nel campo complesso.

9. Si consideri la seguente funzione complessa di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{1}{i\bar{z}^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

   - Calcolare $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, in termini delle coordinate cartesiane di z.
   - Determinare l'insieme $A := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) \in \mathbb{R}\}$.
   - Determinare, al variare del parametro $R > 0$,

$$C_R := \inf\{f(z), z \in A, |z| \geq R\}.$$

2 Esercizi proposti

1. Determinare $z \in \mathbb{C}$ per cui
$$\frac{Re(z)}{iz^2} \in \mathbb{R}.$$

2. Risolvere la seguente disequazione:
$$|z+i| + |z-i| < 4, \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. Si consideri il numero complesso $z = (-\sqrt{3} - i)^{46}$.
   - Calcolare modulo e argomento di z;
   - scrivere z in forma cartesiana;
   - calcolare le radici quarte di z.

4. Risolvere le seguenti equazioni:
$$\begin{array}{ll} a) & (z-1)^3 = -i \\ b) & (z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3 \\ c) & (1-z)^4 = (1+z)^4 \\ d) & z^2 + i\bar{z} = 1 \\ e) & |z|^2 + 5z + 10i = 0 \\ f) & e^{2z} - 2ie^z + 8 = 0 \end{array}$$

5. Scomporre i seguenti polinomi:
$$\begin{array}{ll} a) & z^4 + 81 \\ b) & 3z^2 + 2iz + 1 \\ c) & z^3 + 8 \\ d) & z^3 - 2(1+\sqrt{3})z^2 + 4(1+\sqrt{3})z - 8 \end{array}$$

3 Soluzioni

1. Sia $z = x + iy$.
   a)
$$\begin{aligned} Re(z) &\geq Im((1-i)\bar{z}) \\ x &\geq Im((1-i)(x-iy)) \\ x &\geq Im(x - iy - ix - y) \\ x &\geq -x - y \\ y &\geq -2x \end{aligned}$$
   semipiano superiore rispetto alla retta $y = -2x$.

b) Sia $z \neq -4$, allora:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{z-4}{z+4}\right| > 3\\
&|z-4| > 3|z+4|\\
&\sqrt{(x-4)^2+y^2} > 3\sqrt{(x+4)^2+y^2}\\
&x^2-8x+16+y^2 > 9x^2+72x+144+9y^2\\
&-8x^2-80x-8y^2-128 > 0\\
&x^2+10x+y^2+16 < 0\\
&x^2+10x+25+y^2 < 9\\
&(x+5)^2+y^2 < 9
\end{aligned}$$

che è la relazione di un cerchio centrato nel punto $z = -5$ di raggio 3 privato del punto $z = -4$.

2. Si osservi innanzitutto che il denominatore si annulla se $z = -i$. Posto $z \neq -i$, moltiplicando numeratore e denominatore per $\bar{z} - i$ (complesso coniugato di $z + i$), si ha

$$\frac{z+1-i}{z+i} = \frac{(z+1-i)(\bar{z}-i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} \in \mathbb{R}$$

Il denominatore è un numero reale essendo il prodotto di numeri complessi coniugati, quindi

$$(z+1-i)(\bar{z}-i) = |z|^2 - iz + \bar{z} - i - i\bar{z} - 1 \in \mathbb{R}$$

Considerato che $|z|^2 - 1 \in \mathbb{R}$ la richiesta si riduce a:

$$-i(z+\bar{z}+1) + \bar{z} \in \mathbb{R}.$$

Sia $z = x + iy$, poichè $z + \bar{z} = 2x$, si ha:

$$2x + 1 + y = 0$$

ovvero:

$$y = -2x - 1.$$

Quindi z deve essere della forma: $z = x - i(2x + 1)$, per qualsiasi $x \neq 0$ (altrimenti $z = -i$).

3. Applichiamo la formula generale:

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, ..., n-1 \tag{1}$$

Radici cubiche: $n = 3$, $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \cos 0 + i\sin 0 = 1\\
\omega_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\omega_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Radici quarte: $n = 4,\ k = 0, 1, 2, 3.$

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1\\
\omega_1 &= \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\\
\omega_2 &= \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1\\
\omega_3 &= \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i
\end{aligned}$$

Radici quinte: $n = 5,\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1\\
\omega_1 &= \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\
\omega_2 &= \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\
\omega_3 &= \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\
\omega_4 &= \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}
\end{aligned}$$

Se non ci si ricorda i valori del seno e del coseno di 72^o e suoi multipli è possibile risovere la seguente equazione:

$$z^5 - 1 = 0$$

fattorizzandola. Sapendo che $z_0 = 1$ è una soluzione, si può raccogliere il fattore $z - 1$. Si ottiene:

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

Le restanti quattro radici quinte dell'unità si otterranno risolvendo:

$$(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

che è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Dividendo per z^2 e riordinando i termini abbiamo:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

Aggiungendo e sottraendo 2:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$$

Ponendo $t = z + \frac{1}{z}$, diventa

$$t^2 + t - 1 = 0$$

Le cui soluzioni sono:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ritornando alla variabile z si hanno due equazioni, $z+1/z = t_1$ e $z+1/z = t_2$. La prima equazione è:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$
$$z^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

Questa equazione di secondo grado ha discriminante negativo: $\Delta = 1+5+2\sqrt{5}-16 = -10+2\sqrt{5} < 0$, pertanto avrà due soluzioni complesse coniugate:

$$z_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Analogamente si risolve la seconda equazione:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$z_{3,4} = \frac{\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

4. Utilizziamo la formula di De Moivre:

$$\epsilon_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, ..., (n-1) \tag{2}$$

Occorre quindi conoscere modulo e fase dei radicandi.

- $\sqrt[3]{27}$, $27 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

$$\epsilon_0 = 3(\cos 0 + i\sin 0) = 3$$
$$\epsilon_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\epsilon_2 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- $\sqrt[3]{-i}$, $-i = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$

$$\epsilon_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$\epsilon_1 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

- $\sqrt{1+i}$, $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi\right)$

$$\epsilon_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$
$$\epsilon_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi+i\sin\frac{9}{8}\pi\right)=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Al medesimo risultato si poteva arrivare nel seguente modo. Poniamo: $\sqrt{1+i}=x+iy$. Quadrando:

$$1+i=x^2-y^2+2ixy.$$

Per il principio di identità:

$$\begin{cases}1=x^2-y^2\\1=2xy\end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo che $x=1/2y$, e dalla prima un'equazione per y:

$$4y^4+4y^2-1=0$$

da cui:

$$y^2=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}.$$

Ricordando che x e y sono reali, $y^2\geq 0$, quindi l'unica soluzione accettabile è:

$$y^2=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

da cui:

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\qquad\text{e}\qquad x=\pm\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}.$$

Razionalizzando:

$$x=\pm\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}.$$

Quindi:

$$\sqrt{1+i}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

5. In generale per calcolare le radici di un numero complesso occorre utilizzare la formula di De Moivre, ma non sempre si riesce a determinare la fase di un numero complesso. In questo caso, per calcolare $\sqrt{1-4i\sqrt{3}}$ usiamo un approccio differente. Determiniamo $z=x+iy$ tale che $z^2=1-4i\sqrt{3}$. Ovvero, in termini di x e y:

$$x^2-y^2+2ixy=1-4i\sqrt{3}$$

Separando la parte reale da quella immaginaria, per il principio di identità dei numeri complessi, otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -4\sqrt{3} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deduce che x e y sono discordi, inoltre: $x = -\frac{2\sqrt{3}}{y}$ $(y \neq 0)$. Pertanto:

$$\begin{cases} 12y^{-2} - y^2 = 1 \\ x = -\frac{2\sqrt{3}}{y} \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli della prima equazione e fattorizzando, si ha:

$$\begin{cases} (y^2 + 4)(y^2 - 3) = 0 \\ x = -\frac{2\sqrt{3}}{y} \end{cases}$$

Poichè y^2 è un numero reale positivo, l'unica soluzione accettabile è $y^2 = 3$. Ricordando che x e y sono discordi: $y = \pm\sqrt{3}$ e $x = \mp 2$. Quindi: $z = \mp 2 \pm i\sqrt{3}$.

Si poteva pervenire al medesimo risultato ricorrendo alle formule di bisezione che ci permettono di conoscere $\cos\frac{\theta}{2}$ e $\sin\frac{\theta}{2}$ in termini di $\cos\theta$.
Poniamo $1 - 4i\sqrt{3} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Avremo:

$$\rho = \sqrt{1 + 16 \cdot 3} = \sqrt{49} = 7$$

e

$$\cos\theta = \frac{1}{7}, \qquad \sin\theta = -\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{7}}{2}} = -\sqrt{\frac{8}{14}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

Il segno meno dipende dal fatto che $1 - 4i\sqrt{3}$ giace nel quarto quadrante, quindi $\theta > 3/2\pi$ e $\pi/2 < \theta/2 < \pi$.
Inoltre:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = \frac{2}{\sqrt{7}} \qquad \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Quindi, le due radici complesse si possono scrivere:

$$\epsilon_0 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{7}\left(-\frac{2}{\sqrt{7}} + i\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = -2 + i\sqrt{3}$$

$$\epsilon_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) = \sqrt{7}\left(+\frac{2}{\sqrt{7}} - i\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = 2 - i\sqrt{3}$$

Per calcolare $\sqrt[6]{(1 + 4i)^6}$, osserviamo che (ovviamente) una delle sei radici da determinare è $z_0 = 1 + 4i$.
Sia ora w_i $(i = 0, \ldots, 5)$ una radice sesta dell'unità.

Osserviamo che: $(z_0 \cdot w_i)^6 = (1+4i)^6$ e che i numeri complessi $z_i = z_0 \cdot w_i$, avendo fasi che differiscono di $2\pi/6$, sono tutti distinti, pertanto i numeri z_i sono le radici cercate.

$$
\begin{array}{ll}
w_0 = e^0 = 1 & z_0 = 1 + 4i \\
w_1 = e^{i\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i & z_1 = \frac{1-4\sqrt{3}}{2} + \frac{4+\sqrt{3}}{2} i \\
w_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i & z_2 = -\frac{1+4\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-4}{2} i \\
w_3 = e^{i\pi} = -1 & z_3 = -1 - 4i \\
w_4 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i & z_4 = \frac{4\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+4}{2} i \\
w_5 = e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i & z_5 = \frac{4\sqrt{3}+1}{2} + \frac{4-\sqrt{3}}{2} i
\end{array}
$$

6. Equazioni complesse
a) Si pone: $z = x + iy$.
Abbiamo:

$$x^2 - y^2 + 2ixy + i\sqrt{5(x^2+y^2)} + 6 = 0$$

Perciò:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6 = 0 \\ 2xy = -\sqrt{5(x^2+y^2)} \end{cases}$$

da cui si evince che x e y devono essere discordi. Elevando al quadrato la seconda equazione, si ottiene:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6 = 0 \\ 4x^2y^2 = 5(x^2+y^2) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema in y^2, si ricava l'equazione:

$$2y^4 - 17y^2 + 15 = 0$$

Da cui $y^2 = \frac{15}{2}$, (l' altra soluzione $y^2 = 1$ non è accettabile, altrimenti si avrebbe che $x^2 = -5$). Pertanto le uniche soluzioni sono:

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad y = \mp\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Quindi:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \mp i\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

b) Posto $t = z^3$, l'equazione diventa:

$$t^2 + t + 1 = 0$$

che ha soluzioni

$$t = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Nel primo caso:

$$z^3 = \exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$$

abbiamo tre soluzioni:

$$z_1 = \exp\left(\frac{2}{9}\pi i\right) \quad z_2 = \exp\left(\frac{8}{9}\pi i\right) \quad z_3 = \exp\left(\frac{14}{9}\pi i\right).$$

Nel secondo caso:

$$z^3 = \exp\left(\frac{4}{3}\pi i\right)$$

abbiamo altre tre soluzioni:

$$z_4 = \exp\left(\frac{4}{9}\pi i\right) \quad z_5 = \exp\left(\frac{10}{9}\pi i\right) \quad z_6 = \exp\left(\frac{16}{9}\pi i\right).$$

c) Posto $z = \varrho e^{i\vartheta}$, l'equazione diventa:

$$\varrho^3 e^{3i\vartheta} = \varrho^4.$$

Sapendo che due numeri complessi sono uguali se hanno stesso modulo e stessa fase, a meno di multipli di 2π, si ha:

$$\varrho^3 = \varrho^4 \quad \Longrightarrow \quad \varrho = 0, \quad \varrho = 1,$$

$$3\vartheta = 0 + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2 \qquad \Longrightarrow \quad \vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \frac{2}{3}\pi, \quad \vartheta_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

Se $\varrho = 0$ abbiamo la soluzione $z_1 = 0$. Se $\varrho = 1$ abbiamo tre soluzioni:

$$\begin{aligned} z_2 &= 1, \\ z_3 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_4 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

7. Si ha $(\sqrt{3} + i)^2 = 4e^{i\pi/3}$. Quindi, posto $z = \varrho e^{i\vartheta}$, l'equazione scritta diventa

$$4\varrho^4 e^{i\left(4\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)} = 1 + 2\varrho^2.$$

Poiché la quantità a destra è reale e positiva, dovrà essere reale e positiva anche la quantità a sinistra. Ciò accade se e solo se $4\vartheta + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$, ovvero $\vartheta = \frac{\pi}{12}(6k-1)$, per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Ciò corrisponde, a meno di multipli di 2π, alle fasi $\vartheta = \vartheta_{1,2,3,4} = -\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$. Per tali scelte di ϑ, l'equazione considerata si riduce a $4\varrho^4 - 2\varrho^2 - 1 = 0$. Ciò implica (ricordando che ϱ deve essere positivo) che $\varrho = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$. Si trovano dunque quattro punti, tutti sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$, corrispondenti alle fasi $\vartheta_{1,2,3,4}$.

Circa il secondo punto, la trasformazione $z \mapsto 1 + iz$ corrisponde a una rotazione in senso antiorario di angolo $\pi/2$ e a una traslazione, di misura uno, nella direzione delle x positive. Dunque B è costituito da quattro punti sulla circonferenza centrata nel punto $z = 1$, con fasi identiche a quelle precedenti.

8. Se $z = 2 + i$, allora:

$$(2+i)^2 = 3 + 4i$$
$$(2+i)^3 = 2 + 11i$$
$$(2+i)^4 = -7 + 24i$$

Da un calcolo diretto si verifica che $P(2+i) = 0$.
Poichè z è una radice di $P(z)$ e i coefficienti di $P(z)$ sono tutti reali, anche $\bar{z} = 2 - i$ è una radice di $P(z)$.
Di conseguenza $P(z)$ è divisibile per $(z - 2 - i)(z - 2 + i) = z^2 - 4z + 5$. La seguente divisione di polinomi:

$$\begin{array}{r|l} z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z \quad +5 & z^2 - 4z + 5 \\ \cline{2-2} \dots \qquad & \; z^2 + z + 1 \\ 0 & \end{array}$$

permette di scomporre $P(z)$ in due polinomi irriducibili di secondo grado a coefficienti reali:

$$z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5 = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + z + 1)$$

Il polinomio $z^2 + z + 1$ ha due radici complesse coniugate: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Pertanto la scomposizione di $P(z)$ nel campo complesso è la seguente:

$$z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z = (z - 2 - i)(z - 2 + i)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

9. Calcoliamo, posto $z = x + iy$:

$$\frac{1}{i\bar{z}^2} = \frac{1}{i(x-iy)^2} = -\frac{i}{x^2 - y^2 - 2ixy} = -\frac{i(x^2 - y^2 + 2ixy)}{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{2xy - i(x^2-y^2)}{x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2}$$
$$= \frac{2xy - i(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dunque

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \operatorname{Im} f(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

In particolare, $f(z)$ è reale se e solo se $|y| = |x|$ (con $x \neq 0$, si ricordi che deve essere $z \neq 0$ perché f sia definita). Quindi A è dato dall'unione delle due rette $z = x \pm ix$, private dell'origine. Infine, se $z \in A$ si ha

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Si ricordi però che se $z \in A$ vale $z = x \pm ix$ con $x \neq 0$, quindi

$$f(z) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \pm\frac{2x^2}{4x^4} = \pm\frac{1}{2x^2}. \tag{3}$$

Chiedere $|z| \geq R$ significa, ricordando che $z = x \pm ix$, che $2x^2 \geq R^2$, ovvero che $|x| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$. Si osservi che ci viene chiesto di trovare $\inf\{f(z), z \in A, |z| \geq R\}$, dunque basta considerare il segno meno nella formula (3). È infine chiaro che il minimo della funzione $g(x) = -\frac{1}{2x^2}$ definita sul dominio $|x| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$ si ottiene per $x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$, e vale $-\frac{1}{R^2}$.

4 Soluzioni degli esercizi proposti

1. Sia $z = x + iy$, $z \neq 0$. Allora:

$$\frac{Re(z)}{iz^2} = \frac{x}{-2xy + i(x^2 - y^2)}$$

Razionalizzando il denominatore:

$$\frac{x(-2xy - i(x^2 - y^2))}{(-2xy + i(x^2 - y^2))(-2xy - i(x^2 - y^2))} = \frac{-2x^2y}{x^4 + y^4 + 2x^2y^2} - i\frac{x(x^2 - y^2)}{+x^4 + y^4 + 2x^2y^2}$$

Questa espressione è puramente reale se la sua parte immaginaria è nulla, ciò accade soltanto se: $x(x^2 - y^2) = 0$, ovvero se z appartiene ad una delle seguenti rette del piano di Gauss: $y = \pm x$, $x = 0$ esclusa ovviamente l'origine.

2. Si vede subito che $|z + i| + |z - i| < 4$ è l'equazione di un'ellisse di fuochi $\pm i$. Altrimenti, in termini della parte reale x e della parte immaginaria y di z, si ha:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} \leq 4$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 1 + 2y)(x^2 + y^2 + 1 - 2y)} \leq 16$$
$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 1 + 2y)(x^2 + y^2 + 1 - 2y)} \leq 7 - (x^2 + y^2)$$

poichè il primo membro è positivo, anche $7 - (x^2 + y^2)$ deve essere maggiore di zero, quindi i punti z devono essere necessariamente interni alla circonferenza di raggio $\sqrt{7}$. Sotto questa condizione, elevando al quadrato:

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4y^2 \leq 49 + (x^2 + y^2)^2 - 14(x^2 + y^2)$$
$$(x^2 + y^2)^2 + 1 + 2(x^2 + y^2) - 4y^2 \leq 49 + (x^2 + y^2)^2 - 14(x^2 + y^2)$$
$$16x^2 + 12y^2 \leq 48$$
$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

3. Si scriva $-\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2e^{\frac{7}{6}\pi i}$. Per la formula di de Moivre si ha dunque $z = 2^{46}e^{\frac{7}{6}46\pi i}$. Inoltre $\frac{7}{6}46 = \frac{7}{3}23 = 52 + \frac{5}{3}$. Quindi $e^{\frac{7}{6}46\pi i} = e^{\left(52+\frac{5}{3}\right)\pi i} = e^{\frac{5}{3}\pi i}$, dato che $e^{52\pi i} = 1$. Quindi $|z| = 2^{46}$ e, con le usuali convenzioni sull'argomento, $\arg z = \frac{5}{3}\pi$. In forma cartesiana avremo quindi $z = 2^{46}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{45}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$. Il calcolo delle radici quarte di tale numero procede usando la formula generale per le radici n-esime di un numero complesso in forma trigonometrica (o esponenziale): le quattro radici quarte avranno modulo $\left(2^{46}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{23}{2}}$, e argomenti $\vartheta_k = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Dunque $\vartheta_0 = \frac{5}{12}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{11}{12}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{17}{12}\pi$, $\vartheta_1 = \frac{23}{12}\pi$.

4. Equazioni

a) Pongo $t = z - 1$. L'equazione diventa:

$$t^3 = -i$$

Quindi:

$$t = \sqrt[3]{-i}$$

$$\begin{aligned}
t_1 &= \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i \to z_1 = i + 1\\
t_2 &= \exp\left(\frac{\pi}{2}i + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \to z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{1}{2}i\\
t_3 &= \exp\left(\frac{\pi}{2}i + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \to z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(z+1)^2 &= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^3\\
(z+1)^2 &= 8\left(e^{i\pi/6}\right)^3\\
(z+1)^2 &= 8\left(e^{i\pi/2}\right)\\
(z+1)^2 &= 8i\\
z+1 &= 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{i}
\end{aligned}$$

Dove con $\sqrt{2}$ si intende una radice reale, mentre con $\sqrt{i}$ si intende una (doppia) radice complessa.
Quindi, sapendo che le due radici di i sono:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\epsilon_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

si ricava:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 + 2i\\
z_2 &= -3 - 2i
\end{aligned}$$

c) Si pone

$$t = \frac{1-z}{1+z}.$$

L'equazione diventa $t^4 = 1$ con soluzioni $t_1 = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -1$ e $t_4 = -i$. Abbiamo quattro differenti casi:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \frac{1-z}{1+z} = 1 \Longrightarrow z_1 = 0\\
&2)\quad \frac{1-z}{1+z} = i \Longrightarrow z_2 = -i\\
&3)\quad \frac{1-z}{1+z} = -1 \Longrightarrow \text{nessuna soluzione}\\
&4)\quad \frac{1-z}{1+z} = -i \Longrightarrow z_3 = i
\end{aligned}$$

d) Posto $z = x + iy$ e ricordando che $\bar{z} = x - iy$ e $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, si ha:

$$x^2 - y^2 + 2ixy + ix + y - 1 = 0$$

Uguagliando le parti reali ed immaginarie del primo e del secondo membro abbiamo:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ x(2y+1) = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni (ricordiamo che x e y devono essere numeri reali):

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

da cui:

$$z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

e) Posto $z = x + iy$, l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 + 5x + 5iy + 10i = 0$$

da cui si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x = 0 \\ 5y + 10 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $y = -2$, $x_1 = -4$ e $x_2 = -1$. Quindi:

$$z_1 = -4 - 2i, \quad z_2 = -1 - 2i.$$

f) Sia $t = e^z$. L' equazione diventa:

$$t^2 - 2it + 8 = 0$$

da cui: $t_1 = 4i$ e $t_2 = -2i$.
Indichiamo nel seguito con log il logaritmo (in base e) nel campo complesso. Si ricordi che tale mappa definisce un *insieme* di valori, e non è dunque una funzione nel senso tradizionale del termine. Ricordiamo inoltre che, se $z = \varrho e^{i\vartheta}$ con $\varrho > 0, \vartheta \in (-\pi, \pi]$, allora i numeri complessi

$$w_k := \log\varrho + i\,(\vartheta + 2k\pi)$$

dove $\log\varrho$ indica il logaritmo (reale) in base e del numero positivo ϱ, sono tali che $e^{w_k} = z$, dunque ciascuno di essi è definibile come logaritmo di z, dal che la necessità di definire la funzione log nel campo complesso in modo multivoco.
Sia $e^z = 4i$, allora:

$$z = \log 4i = \log\left(e^{\log 4} e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \log 4 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sia $e^z = -2i$, allora:

$$z = \log(-2i) = \log\left(e^{\log 2} e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) = \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k'\pi\right) \quad k' \in \mathbb{Z}$$

5. Scomposizioni:

a)

$$z^4 + 81 = (z^2 + 9i)(z^2 - 9i) =$$

$$\left(z + \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Si ricorda che le radici quadrate dell'unità immaginaria e di $-i$ sono:

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} 3z^2 + 2iz + 1 &= 3z^2 + 3iz - iz - i \cdot i = \\ &= 3z(z+i) - i(z+i) = \\ &= (3z - i)(z + i) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} z^3 + 8 &= (z+2)(z^2 + 2z + 4) = \\ &= (z+2)(z + 1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i\sqrt{3}) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} z^3 - 2(1+\sqrt{3})z^2 + 4(1+\sqrt{3})z - 8 &= (z-2)(z^2 + 2z + 4) - 2z(1+\sqrt{3})(z-2) \\ &= (z-2)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) \\ &= (z-2)(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i) \end{aligned}$$