Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1, versione A		**prova del 2/2/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Risolvere la seguente disequazione, nella variabile complessa z, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} < k,$$

rappresentando qualitativamente, al variare di k, l'insieme delle soluzioni ottenuto.

Soluzione. Scriviamo, posto $z = x + iy$ e richiesto che $z \neq -i$:

$$\frac{z-1}{z+i} = \frac{x-1+iy}{x+i(y+1)} = \frac{(x-1+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x-1)x+y(y+1)+i[xy-(x-1)(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$
$$= \frac{(x-1)x+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{1+y-x}{x^2+(y+1)^2}.$$

In particolare:

$$\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+i} = \frac{1+y-x}{x^2+(y+1)^2}.$$

Dobbiamo quindi risolvere, posto $z \neq -i$, la disequazione

$$1+y-x < kx^2 + k(y+1)^2.$$

Se $k = 0$, ciò equivale a $y < x-1$, cioè alla regione di piano che sta strettamente sotto la retta $y = x-1$ (si noti che il punto $z = -i$ sta proprio su tale retta). Se invece $k \neq 0$ ciò equivale a: $kx^2 + x + k(y+1)^2 - (y+1) > 0$. Assumiamo dapprima $k > 0$. Deve allora valere:

$$x^2 + \frac{x}{k} + (y+1)^2 - \frac{y+1}{k} > 0 \iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} + \left(y + 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} > 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y + 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 > \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta dunque del *complementare* del cerchio (chiuso) di centro $z_0 = -\frac{1}{2k} + i\left(\frac{1}{2k} - 1\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}k}$. Si noti che il punto $z = -i$ giace sulla circonferenza per ogni k. Sia ora invece $k < 0$. Calcoli analoghi ai precedenti forniscono che deve valere (attenzione al cambio di verso nella disequazione dividendo per $k < 0$:

$$\left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y + 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 < \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta del cerchio aperto centrato nel punto z_0 sopra scritto e di raggio $\frac{1}{-\sqrt{2}k}$.

2. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x - 1}.$$

(la derivata seconda non è facile perché si deve fare una stima sul numeratore per vedere che è >0. Tuttavia io la terrei e direi ai ragazzi che se non riescono lascino stare, tanto la conterò poco).

Soluzione. La funzione è definita se e solo se $e^x \neq 1+\sqrt{2}$, cioè se e solo se $x \neq \log(1+\sqrt{2})$ (si noti che ovviamente l'equazione $e^x = 1-\sqrt{2}$ non ha soluzioni). Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(\log(1+\sqrt{2}))^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

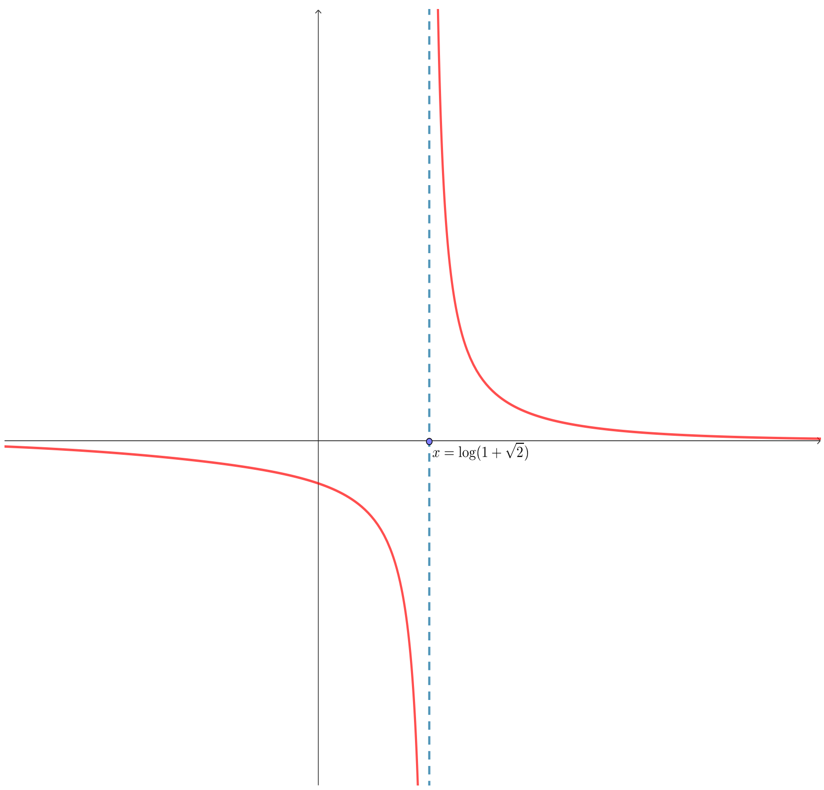
Infatti, per $x \to +\infty$ vale $f(x) \sim e^{-x} \to 0$, per $x \to -\infty$ vale, essendo $e^x, e^{2x} \to 0$ se $x \to -\infty$, $f(x) \sim e^x \to 0$. Inoltre, il denominatore di f è positivo se e solo se $x > \log(1+\sqrt{2})$, mentre esso è negativo altrimenti. Quest'ultima considerazione permette anche di stabilire che f è positiva se e solo se $x > \log(1+\sqrt{2})$, mentre essa è negativa se e solo se $x < \log(1+\sqrt{2})$. Si noti inoltre che la retta $x = \log(1+\sqrt{2})$ è asintoto verticale bilatero per f, mentre la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f se $x \to \pm\infty$. Si noti che $\log(1+\sqrt{2}) > 0$. Calcoliamo ora, per $x \neq \log(1+\sqrt{2})$, la derivata prima. Vale, per tali x:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}-2e^x-1) - e^x(2e^{2x}-2e^x)}{(e^{2x}-2e^x-1)^2} = -e^x \frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}-2e^x-1)^2}$$

Chiaramente $f'(x) < 0$ sul proprio dominio di definizione. Quindi f è decrescente separamente per $x < \log(1+\sqrt{2})$ e per $x > \log(1+\sqrt{2})$ (ovviamente *non* è decrescente sul proprio intero dominio). Calcoliamo infine la derivata seconda. Vale, con alcuni calcoli elementari, sempre per $x \neq \log(1+\sqrt{2})$:

$$f''(x) = e^x \frac{e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} + 2e^x + 1}{(e^{2x}-2e^x-1)^3}.$$

Si noti ora che vale $e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} = e^{2x}(e^{2x} - 2e^x + 6) = e^{2x}(5 + (e^x-1)^2) > 0$ per ogni x. Ne segue che la derivata seconda ha il segno del denominatore. Dunque f è convessa per $x > \log(1+\sqrt{2})$ e concava per $x < \log(1+\sqrt{2})$. Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{3x} + e^{-x}}{e^{2x} - 16e^{-2x}}.$$

Successivamente, stabilire se l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} [e^{-t} f(t) - 1] \, \mathrm{d}t$$

esiste finito.

Soluzione. Vale, ponendo $e^x = t$, così che $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-16e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-16}e^x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^4+1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t = \int \left(1+\frac{17}{t^4-16}\right)\mathrm{d}t = t + 17\int \frac{1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t.$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{t^4-16} = \frac{1}{(t^2-4)(t^2+4)} = \frac{1}{(t-2)(t+2)(t^2+4)} = \frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+2}+\frac{Ct+D}{t^2+4}.$$

Calcoli elementari forniscono: $A = \frac{1}{32}$, $B = -A$, $C = 0$ (ovvio in quanto la funzione a sinistra è pari, e se $C \neq 0$ il membro di destra non sarebbe pari), $D = -\frac{1}{8}$. Dunque:

$$\int \frac{1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{32(t-2)} - \frac{1}{32(t+2)} - \frac{1}{8(t^2+4)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2} - \frac{1}{32}\int \frac{1}{\frac{t^2}{4}+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2} - \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, dove si è notato che $t > 0$ per costruzione. Tornando alla variabile originaria:

$$\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}-16e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = e^x + \frac{17}{32}\log\frac{|e^x-2|}{e^x+2} - \frac{17}{8}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + c.$$

Circa la seconda domanda, si noti che l'integranda è singolare solo per $e^{4x} = 16$, cioè se $e^x = 2$, cioè se $x = \log 2$. Dunque non vi sono singolarità all'interno o al bordo del dominio di integrazione, e occorre verificare il comportamento di f solo all'infinito. Si ha:

$$e^{-t}f(t) - 1 = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}} - 1 = \frac{17e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 18e^{-4t}.$$

Il decadimento dell'integranda è quindi esponenziale all'infinito, e dunque l'integrale improprio proposto esiste finito.

4. (punti 7) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+\sqrt{n})}{n^2+1}x^n$$

Soluzione. Calcoliamo il raggio di convergenza. Vale, per $n \geq 1$:

$$\frac{2^{n+1}(n+1+\sqrt{n+1})}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{2^n(n+\sqrt{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Il raggio di convergenza è dunque $R = \frac{1}{2}$. In particolare la serie converge puntualmente e assolutamente se $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Valutiamo la convergenza agli estremi. Se $x = 1/2$ la serie è a termini positivi e il suo termine generale è

$$\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

e dunque per il criterio del confronto asintotico la serie non converge neppure semplicemente. Se $x = -\frac{1}{2}$ la serie è a segni alterni e il suo termine generale è

$$(-1)^n\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

Sia $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1}$. Chiaramente $a_n > 0$ per ogni n e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Verifichiamo la decrescenza. Posto $f(x) := \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1+2\sqrt{x}-3x^2-2x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{x}(x^2+1)^2},$$

che è chiaramente negativo per x abbastanza grande. Quindi a_n è definitivamente decrescente. Valgono le condizioni del criterio di Leibnitz, e quindi la serie data converge in $x = -\frac{1}{2}$. Per quanto già visto, in tale punto la serie non converge assolutamente. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, risultati noti permettono di concludere che essa ha luogo in tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$, per ogni $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (in realtà, un risultato da noi non svolto a lezione mostrerebbe che la convergenza uniforme ha luogo anche negli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1, Versione B		**prova del 2/2/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 7) Risolvere la seguente disequazione, nella variabile complessa z, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Im} \frac{z+1}{i-z} > k,$$

rappresentando qualitativamente, al variare di k, l'insieme delle soluzioni ottenuto.

Soluzione. Scriviamo, posto $z = x + iy$ e richiesto che $z \neq i$:

$$\frac{z+1}{i-z} = \frac{x+1+iy}{-x+i(1-y)} = \frac{(x+1+iy)(-x+i(y-1))}{x^2+(1-y)^2} = \frac{-(x+1)x - y(y-1) + i[(x+1)(y-1)-xy]}{x^2+(1-y)^2}$$
$$= \frac{y(1-y)-x(x+1)}{x^2+(1-y)^2} + i\frac{y-x-1}{x^2+(1-y)^2}.$$

In particolare:

$$\operatorname{Im} \frac{z+1}{i-z} = \frac{y-x-1}{x^2+(1-y)^2}.$$

Dobbiamo quindi risolvere, posto $z \neq -i$, la disequazione

$$y - x - 1 > kx^2 + k(1-y)^2.$$

Se $k = 0$, ciò equivale a $y > x+1$, cioè alla regione di piano che sta strettamente sopra la retta $y = x+1$ (si noti che il punto $z = i$ sta proprio su tale retta). Se invece $k \neq 0$ ciò equivale a: $kx^2 + x + k(y-1)^2 - (y-1) < 0$. Assumiamo dapprima $k > 0$. Deve allora valere:

$$x^2 + \frac{x}{k} + (y-1)^2 - \frac{y-1}{k} < 0 \iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} + \left(y - 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} < 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 < \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta dunque del cerchio (aperto) di centro $z_0 = -\frac{1}{2k} + i\left(\frac{1}{2k} + 1\right)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}k}$. Si noti che il punto $z = -i$ giace sulla circonferenza per ogni k. Sia ora invece $k < 0$. Calcoli analoghi ai precedenti forniscono che deve valere (attenzione al cambio di verso nella disequazione dividendo per $k < 0$:

$$\left(x + \frac{1}{2k}\right)^2 + \left(y - 1 - \frac{1}{2k}\right)^2 > \frac{1}{2k^2}.$$

Si tratta del *complementare* del cerchio chiuso centrato nel punto z_0 sopra scritto e di raggio $\frac{1}{-\sqrt{2}k}$.

2. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - 2e^x - e^{2x}}.$$

Soluzione. La funzione è definita se e solo se $e^x \neq -1 + \sqrt{2}$, cioè se e solo se $x \neq \log(-1+\sqrt{2})$ (si noti che ovviamente l'equazione $e^x = -1 - \sqrt{2}$ non ha soluzioni). Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to(\log(-1+\sqrt{2}))^{\pm}} f(x) = \mp\infty.$$

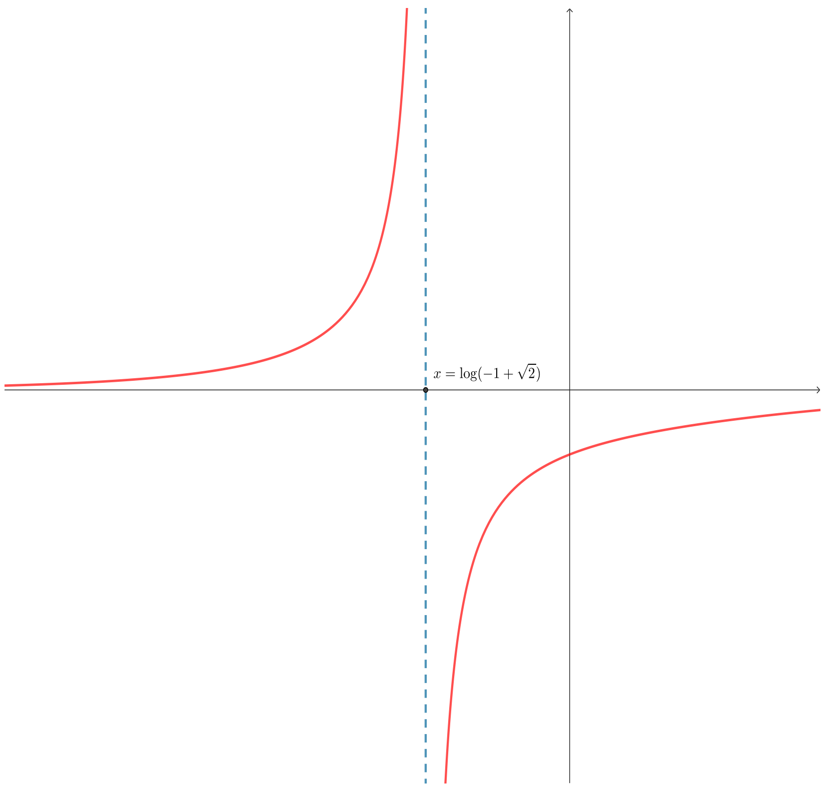
Infatti, per $x \to +\infty$ vale $f(x) \sim -e^{-x} \to 0$, per $x \to -\infty$ vale, essendo $e^x, e^{2x} \to 0$ se $x \to -\infty$, $f(x) \sim e^x \to 0$. Inoltre, il denominatore di f è positivo se e solo se $x < \log(-1+\sqrt{2})$, mentre esso è negativo altrimenti. Quest'ultima considerazione permette anche di stabilire che f è positiva se e solo se $x < \log(-1+\sqrt{2})$, mentre essa è negativa se e solo se $x > \log(-1+\sqrt{2})$. Si noti inoltre che la retta $x = \log(-1+\sqrt{2})$ è asintoto verticale bilatero per f, mentre la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f se $x \to \pm\infty$. Si noti che $\log(-1+\sqrt{2}) < 0$. Calcoliamo ora, per $x \neq \log(-1+\sqrt{2})$, la derivata prima. Vale, per tali x:

$$f'(x) = \frac{e^x(1-2e^x-e^{2x}) + e^x(2e^x+2e^{2x})}{(1-2e^x-e^{2x})^2} = e^x \frac{e^{2x}+1}{(1-2e^x-e^{2x})^2}$$

Chiaramente $f'(x) > 0$ sul proprio dominio di definizione. Quindi f è crescente separamente per $x < \log(-1+\sqrt{2})$ e per $x > \log(-1+\sqrt{2})$ (ovviamente *non* è crescente sul proprio intero dominio). Calcoliamo infine la derivata seconda. Vale, con alcuni calcoli elementari, sempre per $x \neq \log(1+\sqrt{2})$:

$$f''(x) = e^x \frac{e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} + 2e^x + 1}{(1-2e^x-e^{2x})^3}.$$

Si noti ora che vale $e^{4x} - 2e^{3x} + 6e^{2x} = e^{2x}(e^{2x} - 2e^x + 6) = e^{2x}(5 + (e^x - 1)^2) > 0$ per ogni x. Ne segue che la derivata seconda ha il segno del denominatore. Dunque f è convessa per $x < \log(1+\sqrt{2})$ e concava per $x > \log(1+\sqrt{2})$. Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare le primitive della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - 16e^{-2x}}.$$

Successivamente, stabilire se l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} [e^{-t} f(t) - 1] \, \mathrm{d}t$$

esiste finito.

Soluzione. Vale, ponendo $e^x = t$, così che $e^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

$$\int \frac{e^{3x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - 16e^{-2x}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{e^{4x}+2}{e^{4x}-16} e^x \, \mathrm{d}x = \int \frac{t^4+2}{t^4-16} \, \mathrm{d}t = \int \left(1 + \frac{18}{t^4-16}\right) \mathrm{d}t = t + 18 \int \frac{1}{t^4-16} \, \mathrm{d}t.$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{t^4-16}=\frac{1}{(t^2-4)(t^2+4)}=\frac{1}{(t-2)(t+2)(t^2+4)}=\frac{A}{t-2}+\frac{B}{t+2}+\frac{Ct+D}{t^2+4}.$$

Calcoli elementari forniscono: $A=\frac{1}{32}$, $B=-A$, $C=0$ (ovvio in quanto la funzione a sinistra è pari, e se $C\neq 0$ il membro di destra non sarebbe pari), $D=-\frac{1}{8}$. Dunque:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{t^4-16}\,\mathrm{d}t&=\int\left(\frac{1}{32(t-2)}-\frac{1}{32(t+2)}-\frac{1}{8(t^2+4)}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2}-\frac{1}{32}\int\frac{1}{\frac{t^2}{4}+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{32}\log\frac{|t-2|}{t+2}-\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)+c,\end{aligned}$$

con $c\in\mathbb{R}$ costante arbitraria, dove si è notato che $t>0$ per costruzione. Tornando alla variabile originaria:

$$\int\frac{e^{3x}+2e^{-x}}{e^{2x}-16e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=e^x+\frac{9}{16}\log\frac{|e^x-2|}{e^x+2}-\frac{9}{8}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right)+c.$$

Circa la seconda domanda, si noti che l'integranda è singolare solo per $e^{4x}=16$, cioè se $e^x=2$, cioè se $x=\log 2$. Dunque non vi sono singolarità all'interno o al bordo del dominio di integrazione, e occorre verificare il comportamento di f solo all'infinito. Si ha:

$$e^{-t}f(t)-1=\frac{e^{2t}+2e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}}-1=\frac{18e^{-2t}}{e^{2t}-16e^{-2t}}\underset{t\to+\infty}{\sim}18e^{-4t}.$$

Il decadimento dell'integranda è quindi esponenziale all'infinito, e dunque l'integrale improprio proposto esiste finito.

4. (punti 7) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n(n-\sqrt{n})}{n^2+2}x^n$$

Soluzione. Calcoliamo il raggio di convergenza. Vale, per $n\geq 2$:

$$\frac{3^{n+1}(n+1-\sqrt{n+1})}{(n+1)^2+2}\,\frac{n^2+2}{3^n(n-\sqrt{n})}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}3$$

Il raggio di convergenza è dunque $R=\frac{1}{3}$. In particolare la serie converge puntualmente e assolutamente se $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Valutiamo la convergenza agli estremi. Se $x=1/3$ la serie è a termini positivi e il suo termine generale è

$$\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n},$$

e dunque per il criterio del confronto asintotico la serie non converge neppure semplicemente. Se $x=-\frac{1}{3}$ la serie è a segni alterni e il suo termine generale è

$$(-1)^n\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+2}.$$

Sia $a_n=\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+2}$. Chiaramente $a_n\geq 0$ per ogni n e $a_n\to 0$ per $n\to+\infty$. Verifichiamo la decrescenza. Posto $f(x):=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+2}$, si ha

$$f'(x)=\frac{-2+4\sqrt{x}+3x^2-2x^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{x}(x^2+2)^2},$$

che è chiaramente negativo per x abbastanza grande. Quindi a_n è definitivamente decrescente. Valgono le condizioni del criterio di Leibnitz, e quindi la serie data converge in $x=-\frac{1}{3}$. Per quanto già visto, in tale punto la serie non converge assolutamente. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, risultati noti permettono di concludere che essa ha luogo in tutti gli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{1}{3}-\varepsilon\right]$, per ogni $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (in realtà, un risultato da noi non svolto a lezione mostrerebbe che la convergenza uniforme ha luogo anche negli intervalli del tipo $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\varepsilon\right]$).