Marco Contedini

LEZIONE 11

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

03 dicembre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Studi di funzione

1. Delle seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
&a. \qquad y = e^{\frac{1}{x\log|x|}} \\
&b. \qquad y = \sqrt{|x|} - \arcsin\frac{x-1}{|x|+1} \\
&c. \qquad y = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}
$$

Determinare: dominio di definizione, limiti alla frontiera di tale dominio, segno, eventuali intersezioni con gli assi, eventuali asintoti, insieme di derivabilità, derivata, limiti della derivata alla frontiera del suo dominio di definizione, intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo locali e globali, derivata seconda e suo dominio di definizione, intervalli di concavità e convessità, eventuali flessi. Tracciare poi un grafico qualitativo della funzione. Per la peima funzione non è richiesto il calcolo della derivata seconda.

2 Integrali indefiniti

2. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} &\qquad &(b) \quad \int \frac{3x^4+2x^3-1}{x^4-x^2}\,dx \\
&(c) \quad \int \frac{x^5+4x^3+3x^2+5}{x^2+2}\,dx &\qquad &(d) \quad \int \frac{1}{2x^2-4x+9}\,dx \\
&(e) \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &\qquad &(f) \quad \int \frac{1}{x^4+1}\,dx
\end{aligned}
$$

3 Esercizi proposti

1. Studiare le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
&a. \qquad y = \left(2x^2+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-x^2} \text{ (non è richiesto lo studio della derivata seconda)} \\
&b. \qquad y = \frac{x^3}{1+x^2} e^{\arctan x} \\
&c. \qquad y = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \log\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) - 3x \\
&d. \qquad y = \log(\cosh x) - \frac{1}{2}x
\end{aligned}
$$

2. Al variare del parametro α determinare gli asintoti della funzione:

$$
y = \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{x^2+\alpha}
$$

4 Soluzioni

1. (a) La funzione è definita per $x \neq 0, x \neq \pm 1$. Non vi sono simmetrie. La funzione è ovunque strettamente positiva. Vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1^{\pm},$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+.$$

Per trarre tali conclusioni è sufficiente esaminare il limite dell'esponente nei vari casi da studiare. Nei casi di cui alla prima riga tale limite vale zero, nei casi di cui alla seconda riga vale $+\infty$, nei casi di cui alla terza riga vale $-\infty$. Gli asserti seguono usando tali informazioni e il teorema sui limiti delle funzioni composte.

Calcoliamo la derivata di f, che esiste per ogni x nel dominio di f. Vale, per $x \neq 0, x \neq \pm 1$:

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x\log|x|}}\frac{1+\log|x|}{x^2\log^2|x|}.$$

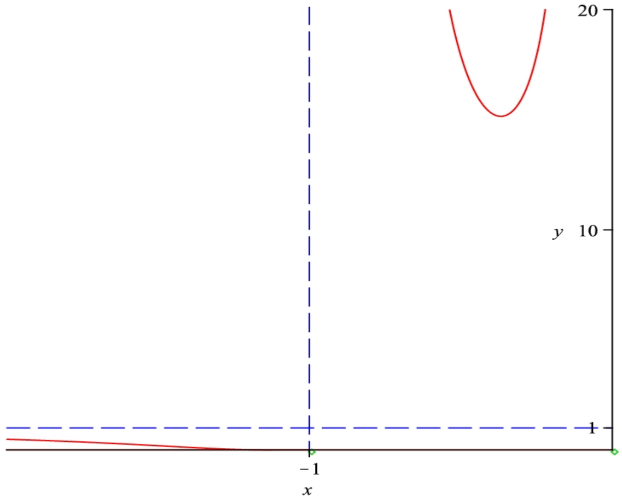
Dunque il segno di f' è determinato dal segno della quantità $-(1+\log|x|)$. Ne segue che $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{e}\right)$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$, e che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\frac{1}{e}$. Quindi f è crescente separatamente negli intervalli $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, decrescente separatamente negli intervalli $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$, $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, $(1, +\infty)$, inoltre $x = -\frac{1}{e}$ è punto di minimo relativo, mentre $x = \frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo. Si noti che f è illimitata dall'alto, quindi non vi sono massimi assoluti, e che non vi sono nemmeno minimi assoluti perché la funzione è sempre positiva e può assumere valori arbitrariamente vicini a zero, ma non si annulla mai. Notiamo infine che in ciascuno dei punti in cui il limite di f vale zero, anche il limite di f' vale zero. Infatti in tali casi prevale l'esponenziale (che, per ipotesi, ha limite zero) sulla frazione che ad esso si moltiplica per ottenere f'. Dunque:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

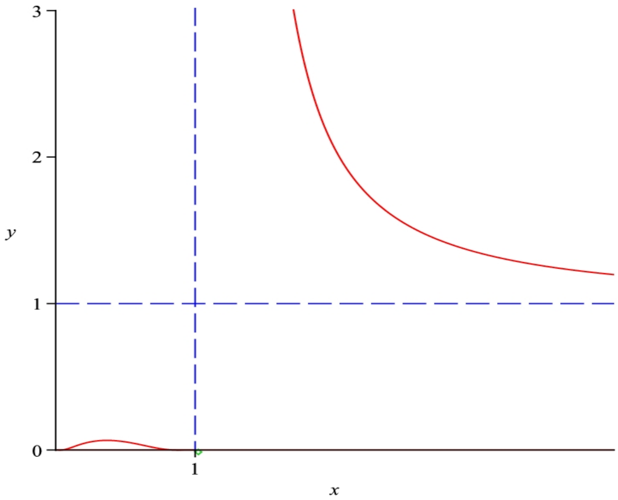
cioè in ciascuno di tali limiti la funzione si avvicina al proprio limite con tangente che tende a diventare orizzontale.

L'espressione della derivata seconda è laboriosa e comunque non richiesta. Le informazioni appena ottenute ci permettono di concludere però che vi sono *almeno* tre flessi: *almeno* uno nell'intervallo $(-\infty, -1)$ (la concavità deve passare almeno una volta dall'essere rivolta verso il basso all'essere rivolta verso l'alto) e *almeno* due nell'intervallo $(0, 1)$ (dato che i limiti di f e f' valgono zero sia a 0^+ che a 1^-, e che la funzione è positiva nell'intervallo dato, ne segue che la concavità deve passare da rivolta verso l'alto, a rivolta verso il basso, ad ancora rivolta verso l'alto).

Il grafico di f è qui sotto accluso, in due figure separate (relative a $x < 0$ e $x > 0$ rispettivamente) a causa delle diverse scale coinvolte



Il grafico di f per $x < 0$



Il grafico di f per $x > 0$

(b) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} + \frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \\ \sqrt{x} - \arcsin \frac{x-1}{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione, per $x \to \pm\infty$ è asintotica a $\sqrt{|x|}$. Quindi,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

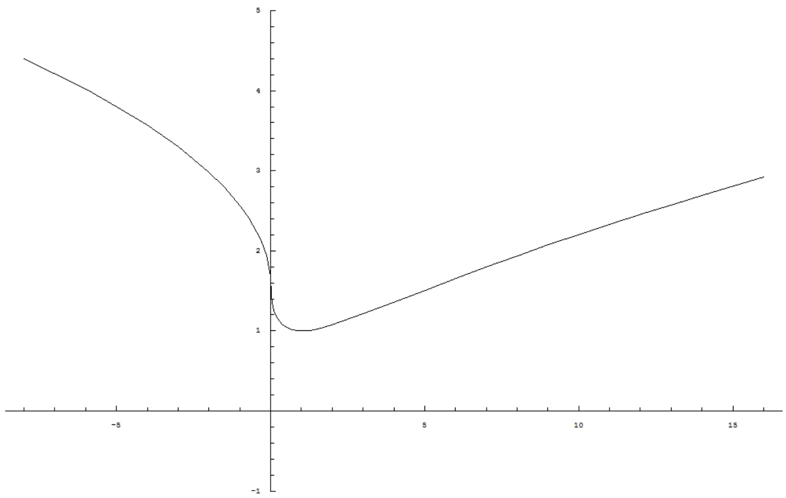
Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \\ \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) \to -\infty$ se $x \to 0$.
Minimo assoluto in $x = 1$, $f(x) = 1$, pertanto: $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ è crescente se$x > 1$ e decrescente se $x < 1$.
Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4(-x)^{3/2}} & \text{se } x < 0 \\ \\ \frac{-x^2+4x+1}{4x^{3/2}(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\mathcal{D}'' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Flessi: $x = 2 + \sqrt{5}$ punto di flesso, $x = 0$ punto di flesso a tangente verticale. La funzione presenta la concavità verso l'alto se $0 < x < 2+\sqrt{5}$, verso il basso se $x < 0$ oppure se $x > 2 + \sqrt{5}$.



(c) $\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
$f(0) = 1 + \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{1}{2} - \pi$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\frac{1}{2} + \pi$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

La funzione ha una discontinuità di prima specie in $x = -1$.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

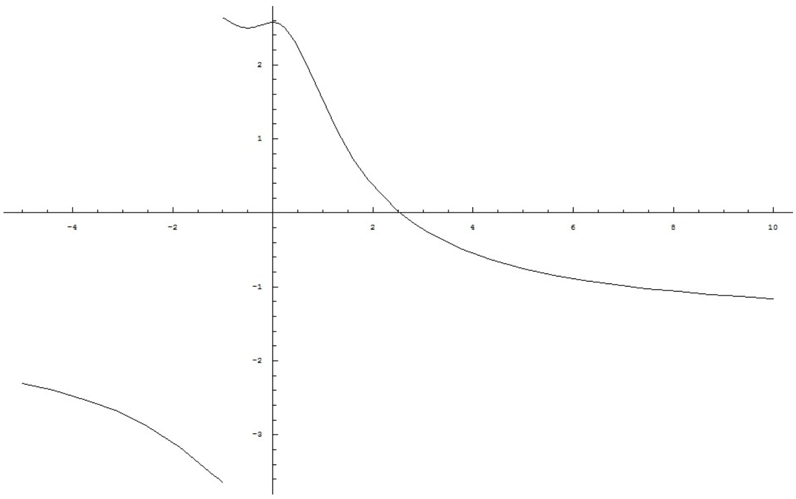
$\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

$$\lim_{x \to -1} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

La funzione presenta un massimo relativo in $x = 0$ e un minimo relativo in $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = 2\text{arctg}\, 3$. La funzione è crescente per $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Poichè $f(x)$ è monotona decrescente in $(0, +\infty)$, $f(2) > 0$ e $f(3) < 0$, allora: $f(x) = 0$ solo se $x = a$ dove $2 < a < 3$.
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2(4x^3 + 3x^2 - 4x - 1)}{(x^2+1)^3}$$

$\mathcal{D}'' = \mathcal{D}$.
Si ha:$f''(1) > 0$, $f''(0) < 0$, $f''(-1) > 0$ e $f''(-2) < 0$. Pertanto la funzione ha tre flessi: {b,c,d} con $-2 < b < -1$, $-\frac{1}{2} < c < 0$, $0 < d < 1$.



2. integrali di funzioni razionali algebriche

   (a) la funzione integranda ha un denominatore di terzo grado con tre radici tutte semplici (di molteplicità algebrica pari a uno). occorre scomporre la funzione in fratti semplici:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{(A+B+C)x^2 - (3A+2B+C)x + 2A}{x(x-1)(x-2)}$$

   Uguagliando i coefficienti dei polinomi dei numeratori al primo e all'ultimo membro si ottiene il seguente sistema nelle incognite A, B e C:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3A-2B-C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

   Da cui: $A = C = \frac{1}{2}$ e $B = -1$. Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{1}{2}\log|x| - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x-2| + C \end{aligned}$$

   (b) Per trasformare l'integranda in fratti semplici occorre che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore.
   Aggiungendo e sottraendo il termine $3x^2$ al numeratore abbiamo che:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - 1}{x^4 - x^2} = 3 + \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^4 - x^2}$$

   Esiste uno zero del denominatore con molteplicità geometrica pari a due, pertanto la scomposizione in fratti semplici è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^4 - x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} \\ &= \frac{(A+C+D)x^3 + (B-C+D)x^2 - Ax - B}{x^2(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

   Uguagliando i coefficienti dei polinomi dei numeratori al primo e all'ultimo membro si ottiene il seguente sistema nelle incognite A, B, C e D:

$$\begin{cases} A+C+D=2 \\ B-C+D=3 \\ -A=0 \\ -B=-1 \end{cases}$$

   Da cui si ottiene: $A = C = 0$, $B = 1$ e $D = 2$.
   Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4 + 2x^3 - 1}{x^4 - x^2}\,dx &= 3\int dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= 3x - \frac{1}{x} + 2\log|x-1| + C \end{aligned}$$

(c) Occorre operare una divisione tra polinomi per abbassare il grado del numeratore:

$$\frac{x^5+4x^3+3x^2+5}{x^2+2} = x^3+2x+3-\frac{4x+1}{x^2+2}$$

Inoltre:

$$\frac{4x+1}{x^2+2} = 2\frac{2x}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+4x^3+3x^2+5}{x^2+2}\,dx &= \int (x^3+2x+3)\,dx - 2\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}x^4+x^2+3x-2\log(x^2+2)-\int\frac{1}{x^2+2}\,dx\end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale rimasto compare un denominatore di secondo grado irriducibile, che si gestisce nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+K\end{aligned}$$

Infine:

$$\int \frac{x^5+4x^3+3x^2+5}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2\log(x^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+K$$

(d) L'integranda è una funzione del tipo: $(Ax^2+Bx+C)^{-1}$ dove il polinomio di secondo grado non ha radici reali. Occorre trasformarla nella forma:

$$\frac{\alpha}{(x-\beta)^2+\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{\left(\frac{x-\beta}{\sqrt{\gamma}}\right)^2+1},$$

infine operare la sostituzione $\frac{x-\beta}{\sqrt{\gamma}} = t$.
Nel nostro caso:

$$\frac{1}{2x^2-4x+9} = \frac{1}{2x^2-4x+2+7} = \frac{1}{(\sqrt{2}\,x-\sqrt{2})^2+7} = \frac{1}{7}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2+1}$$

Ponendo: $t = \frac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, si ha: $dx = \sqrt{\frac{7}{2}}dt$. Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x^2-4x+9}\,dx = \frac{1}{\sqrt{14}}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{14}}\arctan t + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)+C\end{aligned}$$

(e) L'integranda ha al denominatore un polinomio con radici i e $-i$ con molteplicità algebrica due.
La scomposizione in fratti semplici può avvenire nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1)-2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{Ax^3+(B-C)x^2+(A-2D)x+B+C}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Uguagliando i numeratori del primo e dell'ultimo membro segue:
$A = D = 0$ e $B = C = \frac{1}{2}$.
Pertanto:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left(\text{arctg } x + \frac{x}{x^2+1}\right)$$

È possibile generalizzare il risultato appena ottenuto mediante una legge di ricorrenza. Definamo:

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$$

Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx - 2n\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}\end{aligned}$$

da cui segue:

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n$$

(f) Ogni polinomio (a coefficienti reali) *irriducibile*, cioè senza radici reali, di grado $2n$, può essere fattorizzato in n polinomi di secondo grado irriducibili (cioè con discriminante negativo) presi con la loro molteplicità algebrica. Ricordiamo anche che polinomi a coefficienti reali di grado dispari ammettono *sempre* almeno una radice reale. Un metodo generale per scomporre un polinomio è quello di partire dalle sue radici complesse. Un corollario del teorema fondamentale dell'algebra ci dice che ci sono sempre coppie di radici tra loro coniugate, se i coefficienti sono reali ed il grado del polinomio è pari.
Nel nostro caso x^4+1 si annulla per $x = \sqrt[4]{-1}$, vale a dire per i quattro

valori complessi $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Quindi:

$$
\begin{aligned}
x^4+1 &= \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \\
&= \left[\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right] = \\
&= (x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)
\end{aligned}
$$

Altrimenti si poteva procedere nel seguente modo (più semplice seppur meno generale):

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+1-\sqrt{2}\,x)(x^2+1+\sqrt{2}\,x)$$

La scomposizione in fratti semplici è la seguente:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^4+1} &= \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} = \\
&= \frac{(A+C)x^3+(\sqrt{2}(A-C)+B+D)x^2+(\sqrt{2}(B-D)+A+C)x+B+D}{(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)}
\end{aligned}
$$

Da cui:

$$
\begin{cases}
A+C=0\\
\sqrt{2}\,A+B-\sqrt{2}\,C+D=0\\
A+\sqrt{2}\,B+C-\sqrt{2}\,D=0\\
B+D=1
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
A=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
B=\frac{1}{2}\\
C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\
D=\frac{1}{2}
\end{cases}
$$

L'integrale richiesto si scompone nella somma di quattro integrali:

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^4+1} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx+ \\
&\quad +\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx
\end{aligned}
$$

Il calcolo dei primi due integrali è il seguente:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx = \\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx = \\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}dx = \\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\sqrt{2}\,x-1)^2+1}dx = \\
&-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\,x-1)+C
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo si calcolano gli ultimi due integrali:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx =$$
$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}\,x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\,x+1) + C$$

Il risultato finale è:

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}\,x+1)+\arctan(\sqrt{2}\,x-1)\right]+C$$

5 Soluzione degli esercizi proposti

1. Studio di funzioni

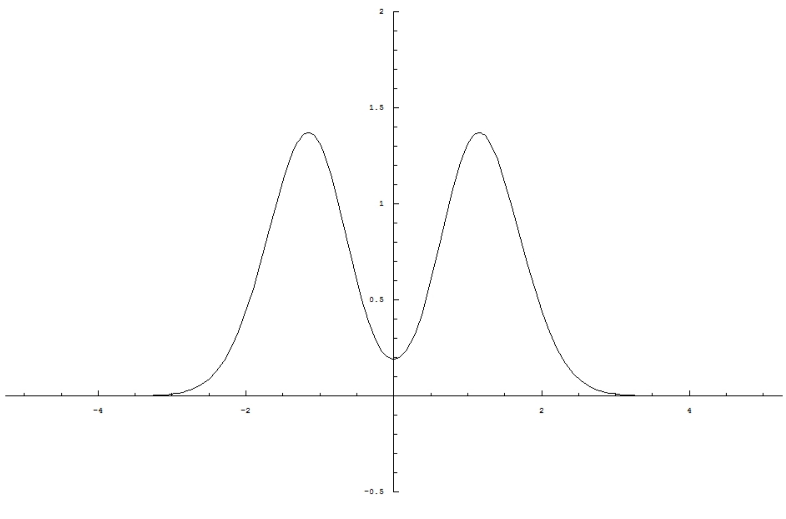
   (a) La funzione è pari, definita su tutto $\mathbb{R}$, inoltre $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   Intersezione asse y: $f(0) = \sqrt{\frac{1}{27}}$.

   $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x^2+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-x^2} = 0^+$$

   Derivata prima:

   $$f'(x) = \frac{4}{3}e^{-x^2}\left(2x^2+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} x(4-3x^2) \qquad \mathcal{D}' = \mathbb{R}$$

   $f'(x) = 0$ ha tre soluzioni $x = 0$, $x_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.
   $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, x_1) \cup (0, x_2)$.
   $f'(x) < 0$ se $x \in (x_1, 0) \cup (x_2, +\infty)$.
   Punti di massimo: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}; \sqrt{27}e^{-\frac{4}{3}}\right)$, punto di minimo $\left(0; \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$.



(b) La funzione è definita su tutto l'asse reale. Non vi sono simmetrie. f si annulla solo per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$.

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim xe^{\frac{\pi}{2}}$, mentre per $x \to -\infty$, $f(x) \sim xe^{-\frac{\pi}{2}}$. È quindi possibile che la funzione ammetta asintoti obliqui.

Per $x \to +\infty$, ricordando che, se $t > 0$ vale: $\arctan t = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{t}$, possiamo scrivere i polinomi di Taylor delle funzioni elementari in potenze di x^{-1}. Si ottiene:

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = x\left(1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$e^{\arctan x} = e^{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}} = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Da cui:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e^{\frac{\pi}{2}}(x-1) + o(1) \qquad \text{per } x \to +\infty. \end{aligned}$$

Per $x \to -\infty$ (si noti che, essendo $\arctan x$ è una funzione dispari, per ogni $x < 0$ vale: $\arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$) si ha:

$$e^{\arctan x} = e^{-\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Allora:

$$f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}}(x-1) + o(1) \qquad \text{per } x \to -\infty.$$

Si deduce che le rette $y = e^{\frac{\pi}{2}}(x-1)$ e $y = e^{-\frac{\pi}{2}}(x-1)$ sono rispettivamente asintoto obliquo destro e sinistro per $f(x)$. La funzione è ovunque derivabile. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2+x+3)}{(1+x^2)^2} e^{\arctan x}$$

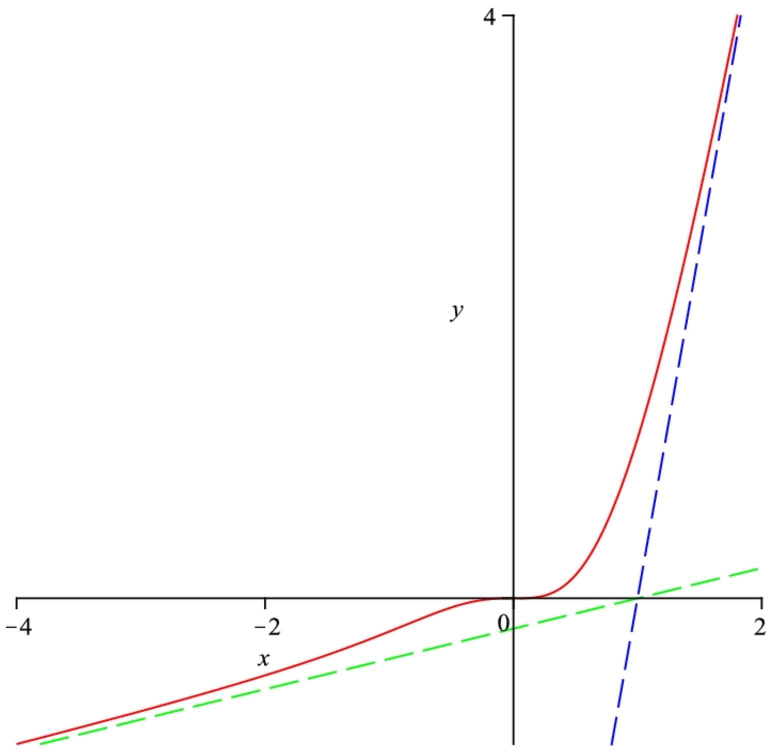
Il polinomio x^2+x+3 è sempre positivo, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e $f'(x) = 0$ se $x = 0$. Derivando ulteriormente si ottiene, ancora per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = -\frac{x(x^2-6x-6)}{(1+x^2)^3} e^{\arctan x}$$

La derivata seconda si annulla nei punti $x = 3 \pm \sqrt{15}$ e $x = 0$. In questi tre punti $f''(x)$ cambia segno, pertanto essi sono tutti punti di flesso. In particolare, in $x = 0$ è un flesso a tangente orizzontale perché si ha $f'(0) = 0$.

Lo studio del segno di f'' è immediato, e mostra che la funzione è convessa separatamente in $(-\infty, 3-\sqrt{15})$ e in $(0, 3+\sqrt{15})$, concava separatamente in $(3-\sqrt{15}, 0)$ e in $(3+\sqrt{15}, +\infty)$.

Il grafico della funzione è dunque il seguente:



(c) Sapendo che $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ per ogni $x \geq 0$, è possibile affermare che l'argomento del logaritmo è strettamente maggiore di zero, pertanto la condizione $x \geq 0$ è sufficiente a garantire che la funzione sia ben definita. Non vi sono simmetrie. Si ha $f(0) = 1$. Posto:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}},$$

si può riscrivere la funzione come: $f(x) = g(x) - \log(g(x)) - 3x$. Inoltre, moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$, la funzione g può essere riscritta nel seguente modo: $g(x) = 2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)}$. Questo permette facilmente di stabilire che g è asintotica alla retta $y = 4x + 2$ per $x \to +\infty$. Infatti:

$$g(x) = 2x+1+2x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 2x+1+2x\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 4x+2+o(1).$$

Per $x \to +\infty$ vale: $f(x) = x + 2 + o(1) - \log(4x + 2 + o(1))$. Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty.$$

Pertanto la funzione non ammette asintoto obliquo.
Lo studio del segno viene posticipato allo studio della derivata.
Per calcolare la derivata prima, chiaramente definita in linea di principio per > 0, notiamo che vale: $f' = g' - \frac{g'}{g} - 3$, e calcoliamo quindi g':

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

Con qualche passaggio algebrico si ottiene:

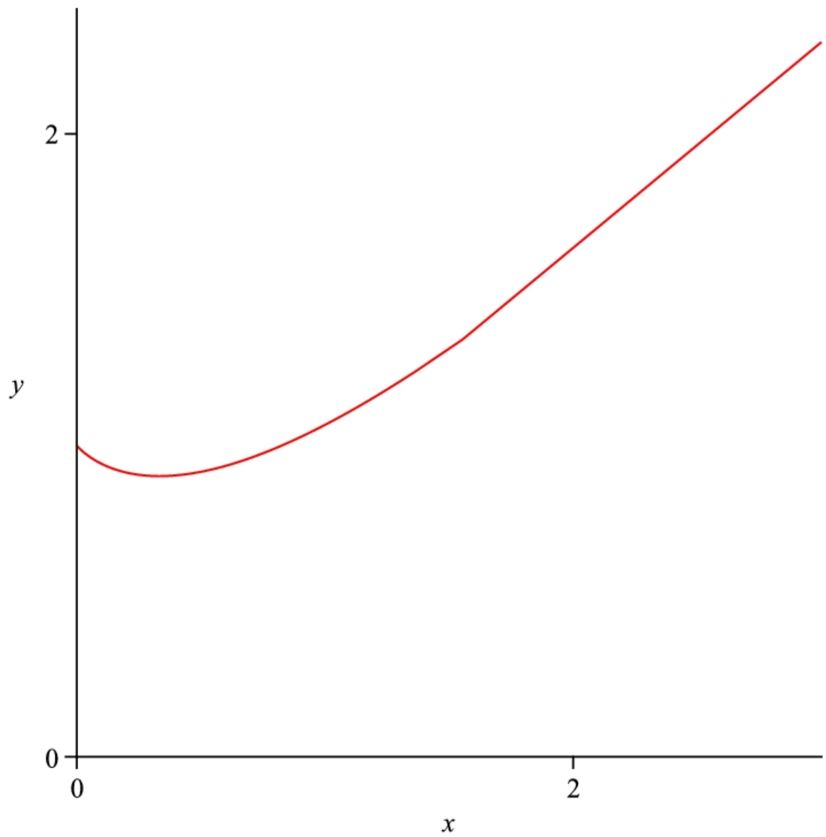
$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}},$$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x(x+1)}} - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} - 3 = 2\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1.$$

Per $x \to 0^+$ si ha: $f'(x) \to -1$, e ciò implica a posteriori che $f'_+(0) = -1$. Ponendo $f'(x) = 0$ si ottiene: $x = \frac{1}{3}$. Inoltre, $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{3}$, dunque f è crescente in tale intervallo, $f'(x) < 0$ se $0 < x < \frac{1}{3}$, dunque f è decrescente in tale intervallo,. In $x = \frac{1}{3}$ la funzione ha un minimo assoluto la cui immagine è: $f(\frac{1}{3}) = 2 - \log 3 > 0$, pertanto possiamo dedurre che $f(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$.
Calcoliamo ora la derivata seconda, sempre per $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}.$$

Ciò mostra che f'' è sempre positiva ove definita, e dunque che f è convessa su $(0, +\infty)$.
Il grafico è il seguente:



(d) Ricordiamo che $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La funzione non presenta particolari simmetrie. Notiamo che $\cosh x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, pertanto $\log(\cosh x) \geq 0$, dunque la funzione è definita su tutto l'asse reale. Inoltre, se $x < 0$, $f(x)$ è somma di termini positivi, da cui: $f(x) > 0$ se $x < 0$. Se $x = 0$, segue banalmente che $f(0) = 0$. Per $x > 0$ sono possibili altre intersezioni con l'asse x. Deve verificarsi che: $\log(\cosh x) = \frac{1}{2}x$, ovvero: $= e^x + e^{-x} = 2e^{\frac{1}{2}x}$. Non cerchiamo di risolvere l'equazione, sebbene possa diventare puramente algebrica con la sostituzione $e^x = t$, perchè è più semplice determinare gli zeri ed il segno della funzione, almeno qualitativamente, dopo avere studiato la derivata prima.
Per $x \to +\infty$ si ha:

$$f(x) = \log e^x + \log(1 + e^{-2x}) - \log 2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \log 2 + \log(1 + e^{-2x})$$

Per $x \to +\infty$ vale: $\log(1 + e^{-2x}) \to 0$, pertanto la retta $y = \frac{1}{2}x - \log 2$ è asintoto obliquo destro della funzione. Per $x \to -\infty$ si ha:

$$f(x) = \log e^{-x} + \log(e^{2x} + 1) - \log 2 - \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}x - \log 2 + \log(e^{2x} + 1)$$

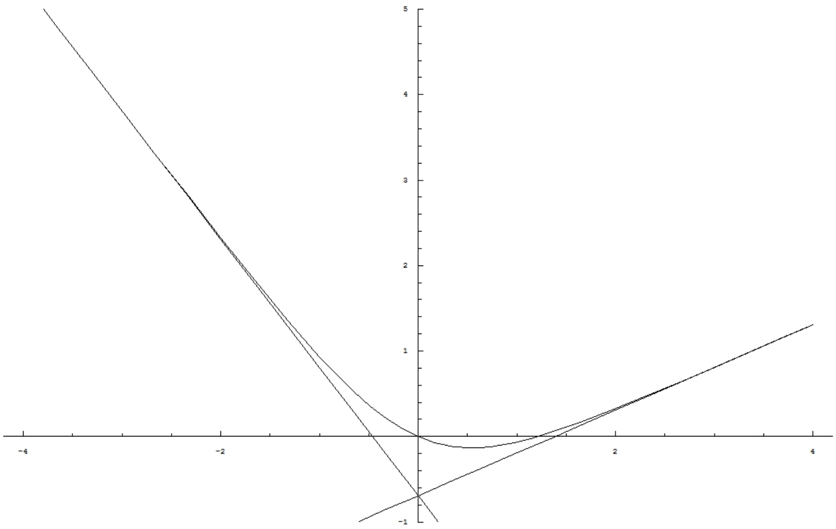
Per $x \to -\infty$ vale: $\log(e^{2x} + 1) \to 0$, pertanto la retta $y = -\frac{3}{2}x - \log 2$ è asintoto obliquo sinistro della funzione.
Il calcolo della derivata prima è immediato:

$$f'(x) = \tanh x - \frac{1}{2}$$

Per determinare il segno della derivata prima si ricordi che: $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ è una funzione crescente e che la sua funzione inversa è $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. Nel nostro caso si ha che $f'(x) > 0$ se $x > \log\sqrt{3}$, $f'(x) = 0$ se $x = \log\sqrt{3}$, $f'(x) < 0$ se $x < \log\sqrt{3}$. Se non si ricordasse la forma esplicita di $\operatorname{arctanh} x$ è possibile risolvere direttamente la disequazione $f'(x) \geq 0$ operando la sostituzione $t = e^x$. Si deduce che la funzione ha un minimo assoluto in $x = \log\sqrt{3}$. Con qualche conto si ottiene che: $f(\log\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(\log 16 - \log 27) < 0$. Poichè $f(x)$ è monotona crescente per $x > \log\sqrt{3}$, si evince che deve necessariamente esistere un unico zero della funzione a destra del minimo assoluto.
Anche il calcolo della derivata seconda è immediato e conduce a:

$$f''(x) = \frac{1}{(\cosh x)^2}$$

La derivata seconda è sempre positiva, pertanto la funzione rivolge la concavità verso l'alto per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Il grafico è il seguente:



2. Asintoti verticali:
Se $\alpha > 0$: $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, non possono esistere asintoti verticali.
Se $\alpha = 0$: $f(x) = \frac{\text{arctg } x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ se $x \to 0$, $x = 0$ è asintoto verticale per $f(x)$.
Se $\alpha < 0$: $x = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono due asintoti verticali.
Asintoti orizzontali:
Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \sim x^{\alpha-2}\text{arctg } x$.
Se $\alpha < 2$: $f(x) \to 0$ se $x \to \pm\infty$. $y = 0$ è asintoto orizzontale.
Se $\alpha = 2$: $f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$ se $x \to \pm\infty$. Abbiamo un asintoto orizzontale destro, $y = \frac{\pi}{2}$ e un asintoto orizzontale sinistro, $y = -\frac{\pi}{2}$.
Se $\alpha > 2$ $f(x) \to \infty$, per $x \to \infty$. E' ancora possibile che ci sia un asintoto obliquo. Ciò può accadere soltanto se $\alpha = 3$. Infatti:

$$\frac{f(x)}{x} \sim x^{\alpha-3}\text{arctg } x$$

Quindi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \alpha = 3$$

.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\text{arctg } x}{x^2+3} - \frac{\pi}{2}x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\text{arctg } x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2}\pi x}{x^2+3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(\text{arctg } x - \frac{\pi}{2}\right)}{x^2+3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(-\text{arctg } \frac{1}{x}\right)}{x^2+3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2+3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{x^2} = -1
\end{aligned}$$

Nel calcolo del limite si è usata la nota relazione $\text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (altrimenti, nello stesso pasaggio, è possibile usare la regola di De l'Hopital).
Si ha quindi un asintoto obliquo destro $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ e, ricordando che per $\alpha = 3$ la funzione è pari, un asintoto obliquo sinistro $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$.