Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es.4	Totale

Analisi Matematica 1		**prova del 28/8/2024**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 6) Determinare, al variare del parametro *reale* α, le soluzioni della seguente equazione nella variabile *complessa* z:

$$z + z|z|^2 = \alpha\overline{z}.$$

Soluzione. Posto $z = x + iy$ l'equazione si riscrive come:

$$x + iy + (x+iy)(x^2+y^2) = \alpha(x-iy) \iff x + x(x^2+y^2) - \alpha x + i\left[y + y(x^2+y^2) + \alpha y\right] = 0$$
$$\iff x\left(1-\alpha+x^2+y^2\right) + iy\left(1+\alpha+x^2+y^2\right) = 0.$$

Ciò accade se e solo se vale uno dei seguenti casi:

- $x = 0, y = 0$, cioè $z = 0$;
- $x = 0$, $y^2 = -1-\alpha$, nel caso $\alpha < -1$, cioè $z = \pm i\sqrt{-1-\alpha}$ appunto se $\alpha < -1$;
- $y = 0$, $x^2 = \alpha - 1$ nel caso $\alpha > 1$, cioè $z = \pm\sqrt{\alpha-1}$ appunto se $\alpha > 1$.

Si noti infatti che non è possibile che valga simultaneamente $x^2+y^2 = \alpha - 1$ e $x^2+y^2 = -1-\alpha$. Dunque le soluzioni sono: per $\alpha < -1$, $z = 0$ e $z = \pm i\sqrt{-1-\alpha}$. Se $\alpha \in [-1,1]$ il solo punto $z = 0$, se $\alpha > 1$, $z = 0$ e $z = \pm\sqrt{\alpha-1}$.

2. (punti 12) Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left[1 + \log(1+e^{-x})\right].$$

Soluzione. La funzione è ovunque definita. Infatti per ogni x vale chiaramente $1+e^{-x} > 1$ e quindi $\log(1+e^{-x}) > 0$, così che entrambi i logaritmi che compaiono nella funzione sono ben definiti per ogni x. Inoltre, essendo $1 + \log(1+e^{-x}) > 1$, si ha anche che $f(x) > 0$ per ogni x. Calcoliamo i limiti a $\pm\infty$. Vale:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Vi è dunque un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Non vi è alcun asintoto obliquo per $x \to -\infty$ in quanto $f(x) \sim \log(-x)$ in tale limite. Calcoliamo la derivata prima. Vale, per ogni x:

$$f'(x) = -\frac{1}{e^x\left[1+\log(1+e^{-x})\right](1+e^{-x})} = -\frac{1}{\left[1+\log(1+e^{-x})\right](1+e^x)},$$

il denominatore essendo, per quanto detto sopra, sempre diverso da zero. Sempre per quanto sopra, si ha chiaramente che il denominatore è sempre strettamente positivo, e quindi che $f'(x) < 0$ per ogni x. Dunque la funzione è monotona strettamente decrescente su $\mathbb{R}$. Resta da calcolare la derivata seconda. Si ha, per ogni x:

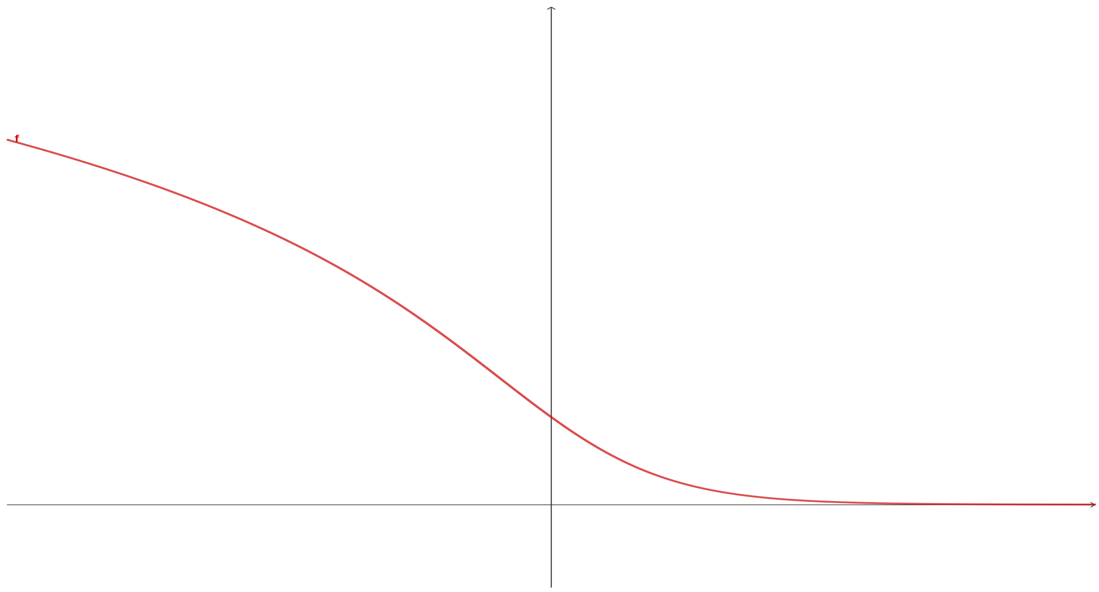
$$f''(x) = \frac{-\frac{e^{-x}(1+e^x)}{1+e^{-x}} + e^x\left[1+\log(1+e^{-x})\right]}{\left[1+\log(1+e^{-x})\right]^2(1+e^x)^2} = \frac{e^x\left[1+\log(1+e^{-x})\right] - 1}{\left[1+\log(1+e^{-x})\right]^2(1+e^x)^2}.$$

Il denominatore è ovviamente sempre strettamente positivo. Quanto al numeratore, esso si riscrive come:

$$e^x\left[1+\log(1+e^{-x})\right] - 1 = e^x\left[1+\log(1+e^{-x}) - e^{-x}\right],$$

che ha il segno di $1 + \log(1+e^{-x}) - e^{-x}$. Posto $t = e^{-x} > 0$ l'ultima quantità scritta diventa $1 + \log(1+t) - t$. Tale quantità è, ad esempio, positiva se e solo se $\log(1+t) > t - 1$. Lo studio grafico di tale disequazione è immediato e mostra che esiste un solo $t_0 > 0$ (in realtà $t_0 > 1$) tale che $\log(1+t) > t-1$ se e solo se $t \in (0, t_0)$, cioè se e solo se $x \in (x_0, +\infty)$, con $t_0 = e^{-x_0}$ cioè $x_0 = -\log t_0 < 0$. Dunque f è convessa per $x \in (x_0, +\infty)$, per un opportuno $x_0 < 0$, e convessa in $(-\infty, x_0)$. Il grafico di f è il seguente:

Il grafico della funzione è il seguente:



3. (punti 8) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

(suggerimento: è opportuno razionalizzare l'integrando). Successivamente, e senza far uso della primitiva calcolata, stabilire se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

esiste finito.

Soluzione. Seguendo il suggerimento scriviamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{1+x-(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integriamo separatamente i due addendi. Vale, con la sostituzione $\sqrt{1+x}=t$, così che $1+x=t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^2-1}2t\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t = 2\int \left(1+\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t + \log|t-1| - \log|t+1| + c = 2\sqrt{1+x} + \log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + c$$

con c costante arbitraria. Analogamente, posto $\sqrt{1-x}=t$, così che $1-x=t^2$ e $\mathrm{d}x = -2t\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t}{1-t^2}2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t,$$

che è l'integrale precedente, e dunque:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1-x} + \log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + c,$$

con c costante arbitraria. In conclusione:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + c,$$

con c costante arbitraria.

Circa la seconda domanda, si noti che $\sqrt{1+x}=\sqrt{1-x}$ se e solo se $x=0$. Dunque l'integrando ha una singolarità solo per $=0$. Si ha, in tale limite:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \sim 1+\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{2}x+o(x) = x+o(x).$$

Dunque l'integranda è asintontica a $\frac{1}{x}$ per $x\to 0$, e dunque l'integrale improprio proposto non converge.

4. (punti 6) Si consideri la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_n(x) = \frac{\log(1 + x^n)}{\log(1 + (2x)^n)}, \quad x > 0, n \in \mathbb{N}$$

Mostrare che la successione di funzioni data converge puntualmente su $(0, +\infty)$ determinandone il limite. Successivamente, mostrare che la convergenza è uniforme sull'intervallo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Soluzione. Si assuma dapprima che $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Si ha allora:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{(2x)^n} = \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x = \frac{1}{2}$ vale:

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\log 2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ vale:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n\log(2x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $x = 1$ vale

$$f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\log 2}{n\log(2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Infine, se $x > 1$ vale:

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\log(x^n)}{\log[(2x)^n]} = \frac{\log x}{\log(2x)}.$$

Dunque la successione di funzioni assegnata converge puntualmente, per $n \to +\infty$, alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1] \\ \frac{\log x}{\log(2x)} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Riguardo alla seconda richiesta, dobbiamo verificare se è vero che

$$\sup_{x\in\left[\frac{2}{3},1\right]} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

in quanto il limite puntuale di f_n nell'intervallo indicato è zero. A tal fine, notiamo in primo luogo che $f_n(x) > 0$ per ogni x, e inoltre che:

$$0 < f_n(x) \le \frac{\log 2}{\log\left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n\right]} \qquad \forall x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

dunque

$$\sup_{x\in\left[\frac{2}{3},1\right]} |f_n(x)| \le \frac{\log 2}{\log\left[1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n\right]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dunque la successione converge uniformemente a zero nell'intervallo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.