Cognome: Nome: Codice persona:

Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti **su questi fogli**, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1 7 punti

Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$f(z) = e^{z^2}.$$

- Determinare, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)|, \operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)$.
- Risolvere, al variare di $c > 0$, l'equazione $|f(z)| = c$, e disegnare l'insieme delle soluzioni nel piano complesso.
- Risolvere l'equazione $f(z) = i$.

Soluzione dell'esercizio 1

- Sia $z = x + iy$. Vale allora $e^{z^2} = e^{x^2-y^2+2ixy}$ e quindi:

$$|f(z)| = e^{x^2-y^2}, \quad \operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy), \quad \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$

- Se $c = 1$, si ha $|f(z)| = 1$ se e solo se $e^{x^2-y^2} = 1$, cioè $x^2 - y^2 = 0$, dunque deve essere $y = \pm x$. Si tratta delle bisettrici dei quadranti cartesiani. Se invece $c \neq 1$, deve valere $e^{x^2-y^2} = c$, cioè $x^2 - y^2 = \log c$. Si tratta, per ogni $c > 0$, $c \neq 1$, di una iperbole con asintoti $y = \pm x$, se $c > 1$ non intersecante l'asse y, se $c \in (0, 1)$ non intersecante l'asse x.

- Vale $i = e^{i\pi/2}$. L'equazione $e^z = i$ si riscrive quindi come:

$$e^{x^2-y^2} e^{2ixy} = e^{i\pi/2},$$

e dunque deve valere

$$e^{x^2-y^2} = 1, \quad 2xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

per un $k \in \mathbb{Z}$. Dalla prima equazione si ottiene, come sopra, $y = \pm x$. Dalla seconda allora si ottiene $x^2 = \pm \left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Se $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, ciò significa

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{\pi}{4} + k\pi}, \quad y = \pm\sqrt{\tfrac{\pi}{4} + k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0,$$

dove si intende che tutte e quattro le possibili combinazioni di segni sono accettabili. Se $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ si ha, scritto $k = -h$ con $h \in \mathbb{N}$, $x^2 = \pm \left(\frac{\pi}{4} - h\pi\right)$, cioè $x^2 = h\pi - \frac{\pi}{4}$, cioè

$$x = \pm\sqrt{h\pi - \tfrac{\pi}{4}}, \quad y = \pm\sqrt{h\pi - \tfrac{\pi}{4}}, \quad h \in \mathbb{N},$$

dove si intende che tutte e quattro le possibili combinazioni di segni sono accettabili.

Esercizio 2 8 punti

Calcolare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, lo sviluppo di Taylor all'ordine quattro della funzione

$$f_a(x) = e^{-\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)} - \cos\left(x\sqrt{1+ax^2}\right).$$

Stabilire in particolare per quale valore di a il termine principale dello sviluppo di f_a è di grado strettamente maggiore di quattro

Soluzione dell'esercizio 2

Sviluppiamo i vari termini. Vale, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{x^2}{2} + o(x^5) \\
e^{-\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)} &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^5) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5). \\
x\sqrt{1+ax^2} &= x\left(1 + \frac{ax^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4) \\
\cos\left(x\sqrt{1+ax^2}\right) &= \cos\left(x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{ax^3}{2} + o(x^4)\right)^4 + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}(1 - 12a) + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ne segue che:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5) - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}(1-12a) + o(x^5)\right] = \frac{1+6a}{12}x^4 + o(x^5).$$

Il termine principale polinomio cercato è quindi, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\frac{1+6a}{12}x^4$. Tale polinomio è identicamente nullo, e quindi il termine principale dello sviluppo è di grado strettamente maggiore di quattro, se e solo se $a = -\frac{1}{6}$.

Esercizio 3 $\qquad$ 10 punti

Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{1/x}\,.$$

Soluzione dell'esercizio 3

La funzione è definita per $x \neq 0$. $f(x) \gtrless 0$ se $x \gtrless 1$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

Per $x \to \pm\infty$ abbiamo $e^{1/x} = 1 + 1/x + 1/(2x^2) + o(1/x^2)$, quindi

$$f(x) = (x-1) + (x-1)/x + (x-1)/(2x^2) + o(1/x) = x + o(1)\,,$$

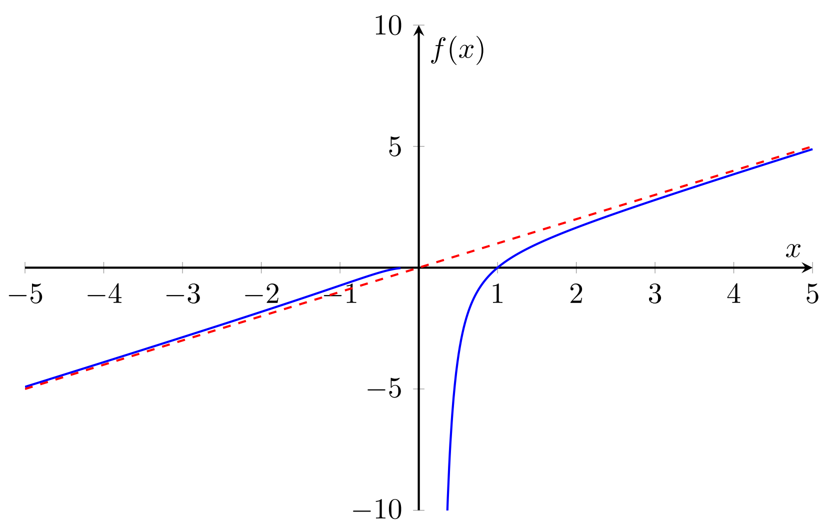
dunque $y = x$ è asintoto obliquo.

$$f'(x) = e^{1/x}\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\,,$$

quindi $f'(x) > 0$ per ogni x nel dominio. Inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.

$$f''(x) = -e^{1/x}\frac{1+x}{x^4}\,,$$

quindi la funzione è convessa in $(-\infty,-1)$ e concava in $(-1,0)$ e in $(0,+\infty)$.



Esercizio 4 7 punti

Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = (x^2 - 1)\arctan(x)\,.$$

Calcolare

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,,$$

determinare se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

esiste in senso improprio, e nel caso calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 4

Per parti

$$\int f(x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 - 3x}{1+x^2}\,dx =$$

$$\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan(x) - \frac{1}{3}\int x - \frac{4x}{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\log(1+x^2)\,.$$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ perché $f(x)$ è dispari e il dominio di integrazione è simmetrico rispetto all'origine. Naturalmente si può arrivare alla stessa conclusione utilizzando la primitiva.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste perché l'integranda diverge per $x \to \pm\infty$.