Marco Contedini

LEZIONE 3

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

01 ottobre 2021

Ingegneria Fisica - Prof. G. Grillo

1 Numeri complessi (ultima parte)

1. Trovare $z \in \mathbb{Z}$ tali che $e^{2z} - 2ie^z + 8 = 0$.

2. Sia $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ definita da $f(z) = e^{iz} - e^{-iz}$.

   (a) Determinare per quali $z \in \mathbb{C}$ si ha $f(z) = 0$.

   (b) Determinare per quali $w \in \mathbb{C}$ si ha $f\left(\frac{2\pi w}{1+w^2}\right) = 0$.

   (c) Determinare, per ciascuno dei w calcolati al punto precedente, quanto vale $|w|$, e rappresentare l'insieme di tali w nel piano complesso.

2 Rette e piani nello spazio

3. Determinare l'equazione cartesiana e parametrica di una retta passante per $P_1 = (1;3)$ e $P_2 = (-3;1)$

4. Determinare l'equazione cartesiana e parametrica di:

   (a) retta passante per $P_1 = (3;0;3)$ e $P_2 = (-1;4;0)$

   (b) retta passante per $P_1 = (2;5;6)$ e $P_2 = (-2;5;0)$

   (c) retta passante per $P_1 = (3;4;-2)$ e $P_2 = (3;4;2)$

5. Determinare l'equazione parametrica di una retta passante per l'origine, perpendicolare alla retta
$$r = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$$
e intersecante la retta r stessa. Trovare inoltre il punto di intersezione delle due rette.

6. Determinare l'equazione cartesiana e parametrica di un piano passante per i punti
$$P_1 = (0;0;-1) \qquad P_2 = (2;0;4) \qquad P_3 = (-2;0;0)$$

7. Deteminare il valore di α per il quale il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$ risulta perpendicolare ad un piano π contenente la retta $r := \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$.
Per tale valore di α determinare l'equazione cartesiana del piano π e la retta s risultante dall'intersezione del piano π e del piano $x + y + z = 0$.

8. Determinare la distanza tra la retta r di equazione $\frac{x-6}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{2-z}{3}$ ed il punto $P = (5;-3;3)$.

9. Verificare che le rette di equazione:

$$r_1 = \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}$$

sono sghembe.
Determinare inoltre l'equazione dell'unica retta che interseca perpendicolarmente sia r_1 che r_2.

10. Dati i vettori $\boldsymbol{v}_1 = (2, -3, 1)^T$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 2)^T$ determinare il valore del parametro t per cui il vettore $\boldsymbol{w} = (t-1, 2, 3t+1)^T$ sia complanare a $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

11. Determinare l'equazione del piano π contenente la retta $x - 2 = \frac{1-y}{2} \quad z = 2$ e parallelo alla retta di equazione $x = z - 1 = 0$.

3 Esercizi proposti

1. Risolvere il seguente sistema, nelle variabili complesse z, w:

$$\begin{cases} e^{w-2z} = i \\ \overline{w} + iz = 1. \end{cases}$$

2. Determinare l'equazione cartesiana e parametrica di una retta passante per

$$P_1 = (7; -3; 3) \qquad P_2 = (7; 3; 0)$$

3. Determinare l'equazione parametrica di una retta passante per $P = (1, -5, 2)$ e parallela alla retta

$$r: \quad x - 2 = \frac{y-3}{2} = 1 - z$$

4. Determinare l'equazione cartesiana di una retta passante per $Q = (-3, 2, -3)$ e perpendicolare alla retta

$$r = \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$$

5. Determinare l'equazione cartesiana e parametrica di un piano passante per l'origine e i punti

$$P_1 = (2; 1; -1) \qquad P_2 = (0; 3; 4)$$

6. Mostrare che i punti

$$P_1 = (0; 0; -1) \qquad P_2 = (2; 0; 4) \qquad P_3 = (-2; 0; 0)$$

non sono allineati.

7. Determinare l'equazione parametrica di un piano passante per il punto $P = (3; 0, -10)$ e ortogonale al vettore $V = (2; -1; 0)$.

8. Determinare l'equazione in forma cartesiana del piano π contenente la retta r di equazione: $\frac{x-1}{2} = z$, $y = 2$ e formante un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con la retta s di equazione $x = z - 1 = 0$.

9. Determinare la distanza tra il punto $P = (3; 9; 5)$ ed il piano π di equazione $2x + 2y + z = 53$. Determinare l'equazione della retta r ortogonale al piano π e passante per P. Determinare il punto di intersezione tra la retta r e il piano π.

4 Soluzioni

NUMERI COMPLESSI

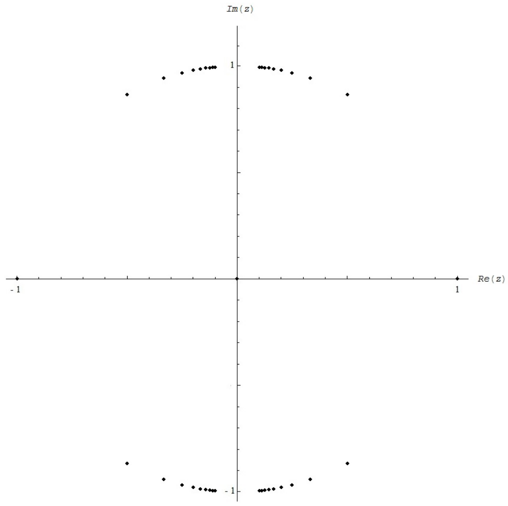
1. Sia $t = e^z$. L' equazione diventa:
$$t^2 - 2it + 8 = 0$$
da cui: $t_1 = 4i$ e $t_2 = -2i$.
Indichiamo nel seguito con log il logaritmo (in base e) nel campo complesso. Si ricordi che tale mappa definisce un *insieme* di valori, e non è dunque una funzione nel senso tradizionale del termine. Ricordiamo inoltre che, se $z = \varrho e^{i\vartheta}$ con $\varrho > 0, \vartheta \in (-\pi, \pi]$, allora i numeri complessi
$$w_k := \log \varrho + i(\vartheta + 2k\pi)$$
dove $\log \varrho$ indica il logaritmo (reale) in base e del numero positivo ϱ, sono tali che $e^{w_k} = z$, dunque ciascuno di essi è definibile come logaritmo di z, dal che la necessità di definire la funzione log nel campo complesso in modo multivoco.
Sia $e^z = 4i$, allora:
$$z = \log 4i = \log\left(e^{\log 4} e^{\frac{\pi}{2}i}\right) = \log 4 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$
Sia $e^z = -2i$, allora:
$$z = \log(-2i) = \log\left(e^{\log 2} e^{-\frac{\pi}{2}i}\right) = \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k'\pi\right) \quad k' \in \mathbb{Z}$$

2.
   - Sia $z = a + ib$. Si ha che $f(z) = 0$ se $e^{2iz} = 1$. Ciò si scrive, posto $z = a + ib$, nella forma $e^{-2b}e^{2ia} = 1 = e^{i0}$. Quindi deve essere $b = 0$ e $a = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto z deve essere reale e uguale a $k\pi$.
   - Dal punto (a) segue che $f\left(\frac{2\pi w}{1+w^2}\right) = 0$ se $\frac{2\pi w}{1+w^2} = k\pi$, dunque w è un numero complesso soluzione dell'equazione:
   $$kw^2 - 2w + k = 0$$
   Se $k = 0$ l'equazione ha un'unica soluzione $w_0 = 0$. Se $k = \pm 1$ risulta $w = \pm 1$. Se $|k| > 1$ abbiamo due soluzioni complesse coniugate per ogni k:
   $$w_{k,1} = \frac{1}{k} + i\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}, \qquad w_{k,2} = \frac{1}{k} - i\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

- Si ha: $|w_{k,1}| = |w_{k,2}| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{k^2-1}{k^2}} = 1$ per ogni k, dunque tutti i punti trovati (salvo $z = 0$) si trovano sulla circonferenza goniometrica. Inoltre $w_{k,1}$ appartiene al primo quadrante se $k > 0$ e al terzo quadrante se $k < 0$, mentre $w_{k,2}$ appartiene al quarto quadrante se $k > 0$ e al secondo quadrante se $k < 0$. Inoltre

$$\begin{array}{ll}
\lim_{k\to+\infty} \text{Re } w_{k,1} = 0 & \lim_{k\to+\infty} \text{Im } w_{k,1} = 1 \\
\lim_{k\to-\infty} \text{Re } w_{k,1} = 0 & \lim_{k\to-\infty} \text{Im } w_{k,1} = -1 \\
\lim_{k\to+\infty} \text{Re } w_{k,2} = 0 & \lim_{k\to+\infty} \text{Im } w_{k,2} = -1 \\
\lim_{k\to-\infty} \text{Re } w_{k,2} = 0 & \lim_{k\to-\infty} \text{Im } w_{k,2} = 1.
\end{array}$$

In conclusione $w_{k,1}, w_{k,2}$ danno luogo quattro successioni sulla circonferenza goniometrica con punti di accumulazione $\pm i$ (a tali punti vanno aggiunti i punti $z = 0$ e $z = \pm 1$). La rappresentazione di tale insieme è la seguente:



RETTE E PIANI

3. Per determinare l'equazione cartesiana utilizziamo la formula:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Otteniamo:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

oppure, in forma implicita:

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Una possibile equazione parametrica la si può ottenere ponendo $x = t$:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \tag{1}$$

Oppure si può partire dalla relazione $\boldsymbol{OP}(t) = \boldsymbol{OP_1} + \boldsymbol{P_1P_2}t$. In questo caso:

$$\boldsymbol{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

pertanto:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases} \tag{2}$$

Da notare che le relazioni (1) e (2) sono due parametrizzazioni diverse della stessa retta.

4. Dati due punti P_1 e P_2, la forma parametrica di una retta nello spazio è: $\boldsymbol{OP}(t) = \boldsymbol{OP_1} + \boldsymbol{P_1P_2}t$.

   (a) In questo caso:

   $$\boldsymbol{OP_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   pertanto, una delle possibili parametrizzazioni della retta è:

   $$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

   Eliminando t si ottiene l'equazione cartesiana della retta (raggruppata su una riga):

   $$\frac{3 - x}{4} = \frac{y}{4} = \frac{3 - z}{3}$$

   che, scritta sotto forma di sistema, è più facile interpretarla come intersezione tra due piani:

   $$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

   (b) Vettori:

   $$\boldsymbol{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

   Equazione parametrica:

   $$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 5 \\ z = 6 - 6t \end{cases}$$

   Equazione cartesiana:

   $$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{z-6}{3} \\ y = 5 \end{cases}$$

(c) Vettori:

$$\boldsymbol{OP_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Equazione parametrica:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

Equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \qquad z \text{ qualsiasi}$$

5. Sia P il punto di intersezione tra le due rette e $\boldsymbol{v}$ il vettore direzione della retta r. Abbiamo che:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{OP} = 0$, ovvero il vettore direzione della retta r deve essere perpendicolare al vettore direzione della retta passante per O e per P. Quindi:

$$-1 \cdot (1 - t) + (-3)(1 - 3t) + 1 \cdot (2 + t) = 0$$

da cui si ricava che:

$$t = \frac{2}{11} \quad \text{e} \quad P = \left(\frac{9}{11}; \frac{5}{11}; \frac{24}{11}\right)$$

La retta da cercare è quindi:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = 24t \end{cases}$$

dopo un'opportuna ridefinizione (*rescaling*) del parametro t.

6. L'equazione parametrica di un piano passante per i punti P_1, P_2 e P_3 (non allineati) è: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{OP_1} + \boldsymbol{P_1P_2}t + \boldsymbol{P_1P_3}s$, dove t e s sono due parametri indipendenti reali.
In questo caso i vettori $\boldsymbol{P_1P_2}$ e $\boldsymbol{P_1P_3}$ risultano non proporzionali fra loro (vedere l'esercizio 2 nella sezione: *esercizi proposti*), quindi non sono allineati. Una possibile parametrizzazione del piano è allora:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} x = 2t - 2s \\ y = 0 \\ z = -1 + 5t + s \end{cases}$$

Questa parametrizzazione non è la più "intelligente". Per esempio si può porre $t' = 2t - 2s$ e $s' = -1 + 5t + s$ ottenendo una nuova parametrizzazione:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} x = t' \\ y = 0 \\ z = s' \end{cases}$$

dalla quale si evince subito che l'equazione cartesiana è $y = 0$.

7. Il vettore $\boldsymbol{v}$ deve essere perpendicolare ai vettori direzione della retta r. Per determinarlo occorre scrivere l'equazione parametrica della retta r. Scegliendo $y = t$,

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

Un vettore direzione della retta è quindi:

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poichè deve valere $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$, si ha che $\alpha = 2$. Per determinare il piano π osserviamo che π è ortogonale alla direzione di $\boldsymbol{v}$ e contiene la retta r, quindi anche il punto $P_0 = (1; 0; 5)$ (per vedere che P_0 appartiene alla retta basta porre $t = 0$).
Per scrivere l'equazione cartesiana di π ci si avvale del fatto che il piano, è il luogo di punti P tali che i vettori $\boldsymbol{P_0P}$ sono ortogonali ad una ben definita direzione $\boldsymbol{v}$. Pertanto, detto $P = (x; y; z)$ un punto generico del piano, si ha che:

$$\boldsymbol{P_0P} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

In questo caso:

$$1(x - 1) + 2(y - 0) + 2(z - 5) = 0$$

che diventa

$$\pi : \quad x + 2y + 2z = 11$$

Infine, la retta s è data dall'intersezione di piani:

$$s : \quad \begin{cases} x + 2y + 2z - 11 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ricava: $x = -11$, pertanto:

$$s : \quad \begin{cases} x = -11 \\ y + z = 11 \end{cases} \quad \text{cartesiana,} \quad \begin{cases} x = -11 \\ y = t \\ z = 11 - t \end{cases} \quad \text{parametrica,}$$

avendo scelto come parametro la variabile y.

8. L'esercizio è banale se si applica la formula della distanza punto-retta:
$$d(P;r) = \frac{|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{P_0P}|}{|\boldsymbol{v}|} \tag{4}$$
dove $\boldsymbol{v}$ è il vettore direzione della retta r e P_0 un suo punto qualsiasi.
In questo caso, anzichè usare la formula (4) credo sia istruttivo determinare dapprima il punto $\bar{P}$ appartenente alla retta r che minimizza la distanza da P. Poichè $\boldsymbol{P\bar{P}}$ deve essere perpendicolare a $\boldsymbol{v}$, il punto $\bar{P}$ risulta univocamente determinato.
Dapprima, per conoscere $\boldsymbol{v}$, occorre scrivere l'equazione parametrica della retta. Scegliendo y come parametro, essa risulta:
$$P_t = \begin{cases} x = -2 + \frac{4}{3}t \\ y = t \\ z = 8 - t \end{cases}$$
da cui
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Inoltre il vettore $\boldsymbol{PP_t}$ che unisce il punto P ad un generico punto della retta è:
$$\boldsymbol{PP_t} = \begin{pmatrix} -7 + \frac{4}{3}t \\ 3 + t \\ 5 - t \end{pmatrix}$$
$\bar{P}$ si determina ponendo $\boldsymbol{PP_t} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, da cui si ricava $t = 3$ e
$$\bar{P} = P_3 = (2; 3; 5)$$
La distanza tra P e $\bar{P}$ risulta:
$$\sqrt{(P_x - \bar{P}_x)^2 + (P_y - \bar{P}_y)^2 + (P_z - \bar{P}_z)^2} \tag{5}$$
Abbiamo pertanto:
$$\sqrt{(5-2)^2 + (-3-3)^2 + (3-5)^2} = 7.$$

9. Due rette sono sghembe se non hanno intersezione comune e non sono parallele. È evidente che non sono parallele perchè i vettori direzione delle rette non sono proporzionali.
L'eventuale soluzione si trova ponendo a sistema le equazioni parametriche delle rette:
$$\begin{cases} 2 + 3t = -1 \\ 1 + t = 2 + t' \\ t = 3 + t' \end{cases}$$
Questo sistema è impossibile perchè dalla prima equazione si evince che $t = -1$, dalla seconda che $t' = -2$, quindi la terza equazione non è mai verificata.

Sia r_3 la retta perpendicolare ad entrambe, allora il suo vettore direzione $\boldsymbol{v}_3$ deve essere perpendicolare sia al vettore direzione $\boldsymbol{v}_1$ della prima retta che al vettore $\boldsymbol{v}_2$ della seconda retta. Un tale vettore può essere scelto proporzionale al prodotto vettore $\boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.
Scegliamo ad esempio $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. L'equazione della retta cercata è del tipo

$$r_3 = \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t'' \\ z = z_0 - t'' \end{cases}$$

Sfruttando l'arbitrarietà della parametrizzazione possiamo pretendere che per $t'' = 0$ la retta r_3 intersechi la retta r_2 (questo è suggerito dal fatto che sia la retta r_3 che la retta r_2 hanno la coordinata x costante), mentre per un generico t'' la retta r_3 interseca la retta r_1.
Ciò equivale a chiedere che:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 + t' \\ z_0 = 3 + t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = 2 + 3t \\ y_0 + t'' = 1 + t \\ z_0 - t'' = t \end{cases}$$

Da cui si ricava che $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 0$, $t = -1$, $t' = -3$ e $t'' = 1$. Pertanto la retta cercata ha equazione:

$$r_3 = \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + t'' \\ z = -t'' \end{cases}$$

ed interseca la retta r_1 nel punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e la retta r_2 nel punto $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esiste anche un metodo *geometrico* per determinare l'equazione della retta r_3: Sia π_2 il piano che contiene le rette r_3 e r_2, e sia $\boldsymbol{v}_\pi$ il vettore ortogonale alle direzioni di r_3 e r_2. Abbiamo già detto che $\boldsymbol{v}_3$, il vettore direzione di r_3, deve essere perpendicolare sia al vettore direzione $\boldsymbol{v}_1$ della prima retta che al vettore $\boldsymbol{v}_2$ della seconda retta ed abbiamo fatto la scelta: $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Il vettore v_π si determina scegliendo un qualsiasi vettore proporzionale a $\boldsymbol{v}_3 \wedge \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{i}$. Scegliamo $v_\pi = \boldsymbol{i}$, dovendo π_2 contenere la retta r_2, conterrà anche il punto di coordinate $(-1, 2, 3)$, pertanto l'equazione del piano π_2 è: $x + 1 = 0$.
La retta r_1 intersecherà il piano π_2 nel punto P_1 che si determina facilmente imponendo che, per un particolare valore del parametro t, i punti della retta r_1 soddisfino l'equazione del piano π_2. Vale a dire: $2 + 3t + 1 = 0$, da cui $t = -1$, pertanto $P_1 = (-1, 0, -1)$. Abbiamo quindi un punto appartenente alla retta r_3 e il suo vettore direzione v_3. L'equazione parametrica della retta r_3 è la seguente:

$$r_3 = \begin{cases} x = -1 \\ y = t'' \\ z = -1 - t'' \end{cases}$$

Si noti che la parametrizzazione di r_3 ottenuta con questo secondo metodo è diversa da quella ottenuta con il metodo algebrico.

10. Metodo 1: Si richiede che $\boldsymbol{w}$ sia ortogonale al vettore normale al piano generato da $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$.

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

$$0 = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}_\perp = -6(t-1) - 3 \cdot 2 + 3(3t+1) = 3t + 3$$

Da cui: $t = -1$.
Metodo 2: si richiede che $\boldsymbol{w}$ sia linearmente dipendente da $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ ponendo uguale a zero il determinante della matrice formata dai tre vettori.

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & t-1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3t+1 \end{vmatrix} = 3t + 3 \Longrightarrow t = -1$$

11. Scegliendo $x = t$, una possibile parametrizzazione della retta r è:

$$r = \begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

da cui si evince che il piano π contiene il punto $P = (0; 5; 2)$ ed è parallelo al vettore:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La retta s si può parametrizzare nel seguente modo (l'unica variabile non vincolata è y):

$$r = \begin{cases} x = 0 \\ y = t' \\ z = 1 \end{cases},$$

pertanto il piano π risulta parallelo anche al vettore

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{j}.$$

Poichè entrambi i vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ appartengono al piano $z = 0$, è evidente che la direzione ortogonale a $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ risulta essere $\boldsymbol{k}$. Quindi, dalla (3) ricaviamo l'equazione cartesiana di π:

$$0(x - 0) + 0(y - 5) + 1(z - 2) = 0$$

vale a dire:

$$z = 2.$$

5 Soluzione degli esercizi proposti

1. Dalla seconda equazione si ha $w = 1 + i\bar{z}$. Notando che $i = e^{i\pi/2}$ la prima equazione diventa allora, posto $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} e^{i\pi/2} &= e^{w-2z} = e^{1+i\bar{z}-2z} = e^{1+i(x-iy)-2(x+iy)} = e^{1+y-2x+i(x-2y)} \\ &= e^{1+y-2x}e^{i(x-2y)}. \end{aligned}$$

   Due numeri complessi in forma esponenziale sono uguali se e solo se i loro moduli coincidono e le loro fasi differiscono di un multiplo intero di 2π. Dunque deve valere:

$$1 + y - 2x = 0,\ x - 2y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

   per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Calcoli elementari mostrano allora che deve essere, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$ (di fatto $h = -k$, e il cambio di notazione ha il solo scopo di mantenere il segno più ai termini coinvolgenti tale intero):

$$x = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{\pi}{2} + 2h\pi\right),\ y = \frac{1}{3}(1 - \pi + 4h\pi),$$

   cosicché $z = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi) + \frac{i}{3}(1 - \pi + 4h\pi)$. I possibili valori di w si calcolano ricordando che $w = 1 + i\bar{z} = 1 + y + ix$ e dunque, essendo $y = 2x - 1$, $w = x(2 + i) = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi)(2 + i)$. Dunque le soluzioni al sistema sono le coppie z, w tali che, per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} z = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi) + \frac{i}{3}(1 - \pi + 4h\pi) \\ w = \frac{1}{6}(4 - \pi + 4h\pi)(2 + i). \end{cases}$$

2. Vettori:

$$\boldsymbol{OP_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   Equazione parametrica:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 + 6t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

   Equazione cartesiana: si elimina t dalle equazioni per le variabili y e z: $t = \frac{y+3}{6} = \frac{3-z}{3}$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

3. Un'equazione parametrica della retta r si può determinare ponendo:

$$x - 2 = \frac{y - 3}{2} = 1 - z = t$$

Pertanto:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Il vettore direzione della retta r è:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La retta cercata, passante per P, ha equazione parametrica:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

4. Sia v il vettore direzione della retta r e sia P un suo punto generico. Allora, se $\boldsymbol{QP} \perp \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{QP}$ sarà il vettore direzione della retta cercata:

$$\boldsymbol{QP} \perp \boldsymbol{v} \quad \text{se: } 0 = \begin{pmatrix} 5 + 2t \\ -1 - 3t \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 13 + 13t \Rightarrow t = -1$$

Pertanto il punto di intersezione è $P = (0, 4, 5)$ ed il vettore direzione è:

$$\boldsymbol{QP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La retta cercata ha equazione parametrica:

$$\boldsymbol{OP}(t) = \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 8t \end{cases}$$

In forma cartesiana:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{8}.$$

5. Scelto $P_1 = O$ (punto di origine), l'equazione diventa: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{OP_2}t + \boldsymbol{OP_3}s$. Esplicitando le coordinate:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 3s \\ z = -t + 4s \end{cases}$$

Per arrivare all'equazione cartesiana ci sono due strade: nella prima si eliminano i parametri t ed s e si perviene ad una relazione chiusa per le coordinate x, y e z.

Nella seconda, che qui utilizziamo, si ultilizza la (3).
Scegliamo come punto P_0 l'origine e per determinare $\boldsymbol{v}$ utilizziamo il fatto che: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{OP_2} \wedge \boldsymbol{OP_3}$.
Abbiamo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

Sia $P = (x; y; z)$ il generico punto del piano. Dalla (3) si ricava l'equazione cartesiana:

$$7x - 8y + 6z = 0$$

6. Per verificare che i tre punti P_1, P_2 e P_3 non sono allineati occorre mostrare che i vettori $\boldsymbol{P_1P_2}$ e $\boldsymbol{P_1P_3}$ non sono proporzionali (non esiste k tale che $\boldsymbol{P_1P_2} = k\boldsymbol{P_1P_3}$). In questo caso:

$$\boldsymbol{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che

$$\begin{cases} 2 = -2k \\ 5 = k \end{cases}$$

non ha soluzione.

7. Dalla (3) ricaviamo subito l'equazione cartesiana del piano:

$$2(x-3) - 1(y-0) + 0(z-10) = 0$$

che diventa:

$$2x - y - 6 = 0$$

Si vede che z è una variabile libera e può essere parametrizzata liberamente, sia $z = s$. Ponendo inoltre $x = t$ si ha che: $y = 2t - 6$. Pertanto, l'equazione parametrica del piano è:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 6 \\ z = s \end{cases}$$

8. La retta r può essere parametrizzata nel seguente modo:

$$r = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases},$$

quindi il piano π contiene il punto $P = (1; 2; 0)$ ed è parallelo al vettore

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La retta s è diretta come $\boldsymbol{j}$. Poichè la retta s forma un angolo di $\pi/6$ con il piano π, formerà un angolo $\pi/3$ con il versore normale al piano π.
Chiamiamo $\hat{\omega}$ il versore normale al piano π.
Vale allora che $\hat{\omega} \cdot \boldsymbol{j} = \cos(\pi/3) = 1/2$ e $\hat{\omega} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.
Poniamo:

$$\hat{\omega} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Da: $\hat{\omega} \cdot \boldsymbol{j} = \cos(\pi/3) = 1/2$ segue che $b = 1/2$ e da $\hat{\omega} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ segue che $2a + c = 0$.
Quindi:

$$a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Dalla (3) si ricavano due soluzioni:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}(x-1) + \frac{1}{2}(y-2) - \sqrt{\frac{3}{5}}(z-0) = 0$$

che diventa:

$$\pi_1 : \quad \sqrt{3}x + \sqrt{5}y - 2\sqrt{3}z - \sqrt{3} - \sqrt{5} = 0$$

e

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}(x-1) + \frac{1}{2}(y-2) + \sqrt{\frac{3}{5}}(z-0) = 0$$

che diventa:

$$\pi_2 : \quad \sqrt{3}x - \sqrt{5}y - 2\sqrt{3}z + \sqrt{3} - \sqrt{5} = 0$$

9. La distanza tra un punto $P = (x_0; y_0; z_0)$ ed un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ si determina facilmente con la formula

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{6}$$

In questo caso, anzichè usare la (6) determineremo dapprima il punto di intersezione $\bar{P}$ tra la retta ortogonale al piano π e passante per P ed il piano stesso. La distanza punto-piano sarà uguale alla distanza tra P e $\bar{P}$. Il vettore ortogonale al piano è:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La rette ortogonali al piano π sono parallele al vettore $\boldsymbol{v}$. In particolare, l'equazione parametrica della retta r passante per P e ortogonale al piano π è:

$$r = \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 9 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Per trovare il punto di intersezione tra r e π basta sostituire le coordinate del punto generico della retta nell'equazione del piano:

$$2(3+2t)+2(9+2t)+5+t=53$$

da cui $t=8/3$. Quindi:

$$\bar{P}=\left(\frac{25}{3};\frac{43}{3};\frac{23}{3}\right)$$

Utilizzando ancora la formula (5) si ricava la distanza punto-piano:

$$d(P,\bar{P})=\sqrt{\left(\frac{25}{3}-3\right)^2+\left(\frac{43}{3}-9\right)^2+\left(\frac{23}{3}-5\right)^2}=8.$$