

Marco Contedini

LEZIONE 8

Esercitazioni A. M. 1 e Geometria

12 novembre 2021

1 Limiti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{5^x - 1} & b. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(3 - 2 \cos x)}{\operatorname{tg} x} \\ c. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x} - \sqrt{x+6}} & d. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x) - \sin x - \sin x^2}{\sin^4 x} \end{array}$$

2 Formula di Taylor

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni più note.

Per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \log(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{Sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \operatorname{Ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \arcsin x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\ \arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\ \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \\ \operatorname{Th} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \end{aligned}$$

Degli ultimi sviluppi (tangente e tangente iperbolica) abbiamo dato gli sviluppi arrestati al settimo ordine in quanto la forma chiusa dell'ordine n -esimo è piuttosto complicata.

3 Applicazione della formula di Taylor: limiti

2. Determinare i primi 4 termini non nulli dello sviluppo di Taylor nel punto x_0 delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad f(x) = e^x \quad x_0 = 2 \quad (b) \quad f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 \quad x_0 = 1$$

$$(c) \quad \frac{1}{1 + 2x + 3x^2} \quad x_0 = 0 \quad (d) \quad f(x) = \log x \quad x_0 = 2$$

$$(e) \quad f(x) = \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} - \log(\cos x)}{x \sin x}$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1 - x^2}{x^3}$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x)) - \cos x - x + 1}{x^3}$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{4 + x^3} - \sqrt[3]{1 + 2x^2 + x^3} \right)$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2e + ex}{(x-1)^2}$$

4 Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll}
 a. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + kx)}{x} & b. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \sin^2 x) \\
 c. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x & d. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sh } x}{x} \\
 e. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ch } x - 1}{x^2} & f. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x} - \cos \sqrt{x-1}) \\
 g. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}\right) & h. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\log(1 + \sin^4 x)} \\
 i. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x+2) - \log_2 2}{x} & j. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} \\
 k. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(e^x + 1)}{x + \sin x} & l. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \text{tg} \left(2x + \text{arctg} \frac{3}{x}\right) \\
 m. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \text{tg } x (e^{\cos x} - 1) & n. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\text{tg } x} \\
 o. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x} & p. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\log x} - 1}{(e^x - \sin x - \cos x) \log x} \\
 q. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \frac{\pi}{2}) \text{tg } x & r. \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(1 + \frac{1}{\text{tg } x}\right)^{\frac{2}{\pi-2x}}
 \end{array}$$

2. Determinare i primi 4 termini non nulli dello sviluppo di Taylor nel punto x_0 delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \quad f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} & x_0 = 0 \\
 (b) \quad f(x) = (1+e^x)^3 & x_0 = 0 \\
 (c) \quad f(x) = \frac{\sin x}{1-x} & x_0 = 0
 \end{array}$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll}
 a. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x^2)) - 2(1 - \cos x)}{\sin^4 x} \\
 b. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x^2)) - 2(1 - \cos x) + \frac{5}{12}x^4}{\sin^6 x} \\
 c. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}} \\
 d. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^2 \text{tg } x^4} \\
 e. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x \text{arctg } x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1} \\
 f. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{Ch } x)^{\sin x} - 1 - \frac{1}{2}x^3}{x^5}
 \end{array}$$

4. Calcolare fino al sesto ordine i coefficienti dello sviluppo di Taylor nel punto x_0 delle seguenti funzioni:

$$(a) \quad f(x) = \frac{\operatorname{Sh}(x^2 + \sin^3 x)}{1 - x^4} \quad x_0 = 0 \qquad (b) \quad f(x) = \sqrt[3]{e^{2x^2 + x^3}} \quad x_0 = 0$$

5 Soluzioni

1. Nella risoluzione dei seguenti limiti verranno utilizzati i seguenti risultati:

$$\begin{array}{ll}
 a. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & b. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \\
 c. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad (a \in \mathbb{R}) & d. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \\
 e. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 & f. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \quad (a > 0) \\
 g. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R}) & h. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1
 \end{array}$$

(a) Applicazione del limite notevole h :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{5^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1 - 2^x + 1}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x \log 3} - 1}{x} - \frac{e^{x \log 2} - 1}{x}}{\frac{e^{x \log 5} - 1}{x}} \\
 &= \frac{\log 3 - \log 2}{\log 5} = \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 5}
 \end{aligned}$$

(b) Applicazione di a , b e e :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(3 - 2 \cos x)}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2(1 - \cos x) + 1)}{\frac{\sin x}{x} \frac{x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2x^2 \frac{1 - \cos x}{x^2} + 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\log(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0
 \end{aligned}$$

(c) Cambio di variabile $x = y + 3$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x} - \sqrt{x+6}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+y} - \sqrt{4+2y}}{\sqrt{9+3y} - \sqrt{9+y}} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \left(\sqrt{1 + \frac{y}{4}} - \sqrt{1 + \frac{y}{2}} \right)}{3 \left(\sqrt{1 + \frac{y}{3}} - \sqrt{1 + \frac{y}{9}} \right)} \\
 &= \frac{2 \frac{1}{8} - \frac{1}{4}}{3 \frac{1}{6} - \frac{1}{18}} = -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(d) In questo caso occorre fare attenzione all'uso di \sim .

Un tipico errore è:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x) - \sin x - \sin x^2}{\sin^4 x} \sim \frac{x^2 + x - x - x^2}{x^4} = \dots 0$$

Quando si cancellano tutti i termini dominanti, bisogna stimare l'infinitesimo residuo. Più corretto sarebbe scrivere il residuo infinitesimo in termini di "o piccolo":

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x) - \sin x - \sin x^2}{\sin^4 x} &= \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + o(x) - x + o(x) - x^2 + o(x^2)}{x^4} &= \frac{o(x)}{x^4}
 \end{aligned}$$

In questo modo non si può determinare il limite: $o(x)$ è una funzione che tende a zero più rapidamente di x , ma non sappiamo se tende a zero come x^4 o più rapidamente di x^4 . Occorrono comunque ulteriori considerazioni per stimare l'infinitesimo residuo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x) - \sin x - \sin x^2}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 \cos x + \cos x^2 \sin x - \sin x - \sin x^2}{\sin^4 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2(\cos x - 1) + \sin x(\cos x^2 - 1)}{\sin^4 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + o(x^4) - \frac{x^5}{2} + o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. Sviluppi di Taylor (primi quattro termini non nulli):

(a) Poichè $e^{2+h} = e^2 \cdot e^h$, allora:

$$e^{(h+2)} = e^2 \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right)$$

(b) Ponendo $x = h + 1$ in $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + 4x^3$ si ottiene:

$$f(h+1) = 4 + 8h + 9h^2 + 4h^3$$

(c) Si utilizza lo sviluppo di $f(z) = \frac{1}{1+z}$ con $z = 2x + 3x^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2x+3x^2} &= 1 - (2x+3x^2) + (2x+3x^2)^2 - (2x+3x^2)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - 2x + x^2 + 4x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

(d) Ponendo $x = h+2$: $f(x) = \log(2+h) = \log 2 \left(1 + \frac{h}{2} \right) = \log 2 + \log \left(1 + \frac{h}{2} \right)$

$$\begin{aligned}\log 2 + \log \left(1 + \frac{h}{2} \right) &= \log 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + o(h^3) = \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

(e) Ponendo $x = h + \frac{\pi}{4}$: $f(x) = \sin \left(h + \frac{\pi}{4} \right) = \sin h \cos \frac{\pi}{4} + \cos h \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin h + \cos h)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin h + \cos h) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right)$$

3. Limiti

(a) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}} &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - (x + o(x^2)) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)}{(1 + x^2 + o(x^2)) - (1 + x^3 + o(x^3))} \\ &= \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}} = 1$$

(b) Poichè per $t \rightarrow 0$: $(1+t)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}t - \frac{2}{25}t^2 + o(t^2)$, per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{1-5x^2+x^4} - 1 + x^2}{x^4} &= \frac{1 + \frac{1}{5}(-5x^2 + x^4) - \frac{2}{25}(-5x^2 + x^4)^2 + o(x^4) - 1 + x^2}{x^4} \\ &= \frac{-\frac{9}{5}x^4 + o(x^4)}{x^4} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1-5x^2+x^4} - 1 + x^2}{x^4} = -\frac{9}{5}$$

(c) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} - \log(\cos x)}{x \sin x} &= \frac{x^{2/3} - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) - x^{2/3} - \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x(x + o(x^2))} \\ &= \frac{-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) - \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2} - \log(\cos x)}{x \sin x} = \frac{1}{3}$$

(d) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)^x - 1 - x^2}{x^3} &= \frac{e^{x \log(1+x)} - 1 - x^2}{x^3} \\ &= \frac{\exp\left[x \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)\right] - 1 - x^2}{x^3} \\ &= \frac{\exp\left[(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3))\right] - 1 - x^2}{x^3} \\ &= \frac{1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right)^2 + o(x^4) - 1 - x^2}{x^3} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1 - x^2}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

(e) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
\sin(\log(1+x)) &= \sin \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right] \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) - \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right)^3 + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \right) + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x)) - \cos x - x + 1}{x^3} &= \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - x + 1}{x^3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(f) Raccogliendo x si può utilizzare lo sviluppo di: $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{4+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3} \right) &= \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{4}{x^3} + 1} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} + 1} \right) &= \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{4}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) &= \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(g) Posto: $x = 1 + h$, ($h \rightarrow 0$ se $x \rightarrow 1$), si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 2e + ex}{(x-1)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{1+h}} - e + eh}{h^2}$$

Inoltre, per $h \rightarrow 0$, vale:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+h}} &= \exp [1 - h + h^2 + o(h^2)] \\
&= e \cdot \exp [-h + h^2 + o(h^2)] \\
&= e \left[1 + (-h + h^2 + o(h^2)) + \frac{1}{2} (-h + h^2 + o(h^2))^2 + o(h^2) \right] \\
&= e \left[1 - h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2) \right]
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{1+h}} - e + eh}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}eh^2 + o(h^2)}{h^2} = \frac{3}{2}e$$

6 Soluzione degli esercizi proposti

1. (a) Applicazione del limite notevole a (vedere pag. 6):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + kx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \pi \cdot \cos kx}{x} + \frac{\cos \pi \cdot \sin kx}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-k \sin kx}{kx} = -k$$

- (b) Criterio del confronto.

Poichè $x^2 - x \leq x^2 - x \sin^2 x \leq x^2 + x$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \sin^2 x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty$$

- (c) Ricordando che x tende a zero più rapidamente del logaritmo di x :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x \log x} = e^{1^+}$$

- (d) Applicazione di h :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sh } x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{2y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

dove si è posto $y = -x$.

- (e) Forma di indecisione $0/0$. (Ch $x \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ch } x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{Ch } x - 1)(\text{Ch } x + 1)}{x^2(\text{Ch } x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sh}^2 x}{x^2} \frac{1}{\text{Ch } x + 1} = \frac{1}{2}$$

- (f) Applicazione formule di prostaferesi:

$$\cos \sqrt{x} - \cos \sqrt{x-1} = -2 \sin \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{2} \cdot \sin \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{2}$$

In questo modo si è separata la parte oscillante dalla parte che tende a zero.

Si ha:

$$-2 \sin \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{2} \leq \underbrace{2 \sin \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{2}}_{\text{compreso tra -1 e 1}} \sin \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{2} \leq 2 \sin \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{2}$$

Poichè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}} = 0$$

Per il criterio del confronto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x} - \cos \sqrt{x-1}) = 0.$$

- (g) Si ha: $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$.
Da $\sqrt{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$ segue anche $\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$.

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{\log(1 + \sin^4 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x+2) - \log_2 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) - \log_2 2}{x} = \frac{\log_2 \left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - (\sqrt{1-x} - 1)}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x) - \left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)}{x} = \frac{3}{2}$$

(k)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(e^x + 1)}{x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 e^x (1 + e^{-x})}{x + \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\log e^x}{\log 2} + \log_2(1 + e^{-x})}{x + \sin x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\log 2}}{x} = \frac{1}{\log 2} \end{aligned}$$

(l) Ricordando che:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

e che: $\operatorname{tg}(\operatorname{artg} \alpha) = \alpha$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{tg} \left(2x + \operatorname{artg} \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot \operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{2x + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot 2x} = -\frac{3}{5}$$

(m)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x (e^{\cos x} - 1) &= \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \left(e^{\cos(y+\pi/2)} - 1 \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi/2)}{\cos(y + \pi/2)} \cdot (-\sin y) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y}{-\sin y} \cdot (-\sin y) = 1 \end{aligned}$$

(n)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{2} + o(\sin x) - \left(-\frac{\sin x}{2}\right) + o(\sin x)}{x} = 1$$

(o)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x - \pi + \pi)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(\cos x - 1) + \pi)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi(\cos x - 1))}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(-\frac{\pi x^2}{2}\right)}{x^2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(p)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\log x} - 1}{(e^x - \sin x - \cos x) \log x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\log x \cdot \log(1 + \sin^2 x)} - 1}{(e^x - 1 - \sin x + 1 - \cos x) \log x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\log x \cdot \log(1 + x^2)} - 1}{(x + x^2/2 - x + x^2/2 + o(x^2)) \log x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2 \log x} - 1}{\frac{x^2}{2} \log x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \log x}{x^2 \log x} = 1\end{aligned}$$

(q)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x &= \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\&= \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\sin(y + \pi/2)}{\cos(y + \pi/2)} \\&= \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\sin y \cos \frac{\pi}{2} + \cos y \sin \frac{\pi}{2}}{\cos y \cos \frac{\pi}{2} - \sin y \sin \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos y}{-\sin y} = -1\end{aligned}$$

(r)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{2}{\pi - 2x}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\cos(y + \pi/2)}{\sin(y + \pi/2)}\right]^{-\frac{1}{y}} \\&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\sin y}{\cos y}\right]^{-\frac{1}{y}} \\&= \lim_{y \rightarrow 0} [1 - \operatorname{tg} y]^{-\frac{1}{y}} \\&= \lim_{y \rightarrow 0} [1 - \operatorname{tg} y]^{\frac{1}{\operatorname{tg} y} \left(-\frac{\operatorname{tg} y}{y}\right)} = e\end{aligned}$$

2. Sviluppi di Taylor (primi quattro termini non nulli):

(a) Dato lo sviluppo $(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{\sqrt{1-x}} &= (1+x) \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)\right) \\&= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{11}{16}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

(b) Si utilizza lo sviluppo di e^x e si eleva al cubo il polinomio, facendo attenzione a non dimenticare i termini di grado minore o uguale a tre.

$$\begin{aligned}(1 + e^x)^3 &= \left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 \\&= 8 + 12x + 12x^2 + 9x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned}
 (1 + e^x)^3 &= 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x} \\
 &= 1 + 3 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + \\
 &\quad + 3 \left(1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) \right) + \\
 &\quad + \left(1 + (3x) + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) \right) \\
 &= 8 + 12x + 12x^2 + 9x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

- (c) La funzione risulta il prodotto di due funzioni elementari: $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$. si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin x}{1-x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \\
 &= x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
 &= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

3. Limiti

- (a) In questo caso e nei prossimi esercizi i limiti notevoli non sono sufficienti a determinare l'ordine di infinitesimo al numeratore. Infatti:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x^2)) - 2(1-\cos x)}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + o(x^2)) - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^4 + o(x^4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^4}
 \end{aligned}$$

Occorre sviluppare in serie di potenze le funzioni al numeratore per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 \log(1+x^2) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
 \sin \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x^2)) - 2(1-\cos x)}{\sin^4 x} &= \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 2 \left[1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right]}{x^4 + o(x^4)} &= \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{12}x^4}{x^4} &= -\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

- (b) In questo caso, occorre spingersi all'ordine successivo di infinitesimo, vale a dire x^6 .

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) - \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right)^3 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \end{aligned}$$

Si osservi che il termine x^2 all'interno della parentesi elevata al cubo NON è un termine trascurabile, vale a dire che non fa parte di $o(x^6)$.

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\log(1+x^2)) - 2(1 - \cos x) + \frac{5}{12}x^4}{\sin^6 x} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) - 2\left[1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right] + \frac{5}{12}x^4}{x^6} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{241}{720}x^4}{x^6} &= \frac{241}{720} \end{aligned}$$

- (c) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}} &= \exp\left[\frac{1}{x \sin 2x} \log\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{x \sin 2x} \log\left(\frac{3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)}{3x}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{x(2x + o(x))} \log\left(1 - \frac{1}{6}(3x)^2 + o(x^2)\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{3}{4} + o(1)\right] \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}} = e^{-3/4}$$

- (d) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^2 \tan x^4} &= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right)}{7x^2(x^4 + o(x^4))} \\ &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^7) - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^7)}{7x^6 + o(x^6)} \\ &= \frac{-\frac{7}{24}x^6 + o(x^7)}{7x^6 + o(x^6)} = -\frac{1}{24} + o(x) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x - \log(1+x^2)}{7x^2 \tan x^4} = -\frac{1}{24}$$

(e) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\log(1+x \cdot \operatorname{arctg} x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = \\ &= \frac{\log\left(1+x\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)\right) + 1 - \left(1+x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)}{1 + \frac{1}{2}(2x^4) + o(x^4) - 1} = \\ &= \frac{\log\left(1+x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \\ &= \frac{\left[x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^2 + o(x^4)\right] - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \\ &= \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = -\frac{4}{3}$$

(f) Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ch} x)^{\sin x} &= e^{\sin x \log(\operatorname{Ch} x)} = \\ &= \exp \left[\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \log \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \right) \right] = \\ &= \exp \left[\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right)^2 + o(x^5) \right) \right] = \\ &= \exp \left[\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5) \right) \right] = \\ &= \exp \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{12}x^5 + o(x^5) \right] \end{aligned}$$

Sviluppando la funzione esponenziale:

$$\exp \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5) \right] = 1 + \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5) \right] + o(x^5)$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cosh x)^{\sin x} - 1 - \frac{1}{2}x^3}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{6}$$

4. Sviluppi di Taylor (sesto ordine):

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\text{Sh}(x^2 + \sin^3 x)}{1 - x^4} &= \frac{\text{Sh}\left(x^2 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^3\right)}{1 - x^4} = \frac{\text{Sh}\left(x^2 + \left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6)\right)\right)}{1 - x^4} \\&= \frac{\left(x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6)\right) + \frac{1}{6}\left(x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^6)\right)^3 + o(x^6)}{1 - x^4} \\&= \frac{x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)}{1 - x^4} \\&= \left(x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\right) (1 + x^4 + o(x^7)) \\&= x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{7}{6}x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{e^{2x^2+x^3}} &= \exp\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \\&= 1 + \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + o(x^6) \\&= 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{9}x^5 + \frac{1}{9}x^6\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{8}{27}x^6 + o(x^6)\right) + o(x^6) \\&= 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^4 + \frac{2}{9}x^5 + \frac{17}{162}x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$