Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		Prova scritta del 06/11/2021
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 9) Risolvere la seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$i\left[z^2 + (\overline{z})^2\right] = 2\,(z - \overline{z}) + i\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} + i.$$

Soluzione. Vale, posto $z = x + iy$, quanto segue:

$$\begin{aligned}
&z^2 + (\overline{z})^2 = x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy = 2(x^2 - y^2);\\
&2\,(z - \overline{z}) = 4iy;\\
&\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} = \frac{x^3}{x+iy} = \frac{x^3(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{x^4 - ix^3y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Dunque deve valere:

$$2i(x^2 - y^2) = 4iy + i\frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{x^3y}{x^2+y^2} + i$$

ovvero:

$$\frac{x^3y}{x^2+y^2} + i\left[4y + \frac{x^4}{x^2+y^2} + 1 - 2(x^2 - y^2)\right] = 0.$$

Affinché la parte reale dell'ultima quantità scritta si annulli occorre che valga $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $x = 0$ anche la parte immaginaria si annulla se e solo se $2y^2 + 4y + 1 = 0$, cioè se e solo se $y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se invece $y = 0$ dovrà valere $x^2 + 1 - 2x^2 = 0$, cioè $x = \pm 1$. In conclusione le soluzioni sono le seguenti:

$$z_1 = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\ z_2 = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\ z_3 = 1, z_4 = -1.$$

2. (punti 16) Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare così definita: posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$

$$f_k(\boldsymbol{v}) = A_k\boldsymbol{v}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k^2 - k \\ -k & -k & -2k \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & k-1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k .
- Determinare una base del nucleo nel caso in cui esso sia monodimensionale.
- Sia π il piano di equazione $x - y + 2z = 0$. Fornire una base di $f_k(\pi)$ per $k = 3$.

Soluzione.

- Per determinare le dimensioni dell'immagine di f_k occorre calcolare il rango della matrice A_k . Il minore di ordine due formato dagli elementi delle ultime due righe e delle prime due colonne è diverso da zero se $k \neq 2$. Sia dunque $k \neq 2$, allora $2 \leq \operatorname{rk}(A_k) \leq 3$. Gli orlati di ordine tre sono i seguenti:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k^2 - k \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & k-1 & k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & k^2 - k \\ 0 & 0 & 6 + 3k - 3k^2 \\ 1 & k-1 & k \end{pmatrix} = 3(k-2)^2(k+1)$$

$$\det\begin{pmatrix}-k & -k & -2k\\ 3 & 3 & 6\\ 1 & k-1 & k\end{pmatrix} = 0 \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

Pertanto, se $k\neq -1 \wedge k\neq 2$, si ha: $\mathrm{rk}(A_k)=3$. Se $k=2$ le tre colonne della matrice sono proporzionali, pertanto $\mathrm{rk}(A_2)=1$. Se $k=-1$, la presenza di almeno un minore di ordine due non nullo implica che $\mathrm{rk}(A_{-1})=2$. Quindi:

(a) se $k\neq -1\wedge k\neq 2$: $\dim \mathrm{Im}(f_k)=3$, $\dim \mathrm{Ker}(f_k)=0$;
(b) se $k=-1$: $\dim \mathrm{Im}(f_{-1})=2$, $\dim \mathrm{Ker}(f_{-1})=1$;
(c) se $k=2$: $\dim \mathrm{Im}(f_2)=1$, $\dim \mathrm{Ker}(f_2)=2$.

- Per il punto precedente occorre porre $k=-1$ e poi risolvere il sistema omogeneo $A_{-1}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. Poichè ad esempio la seconda e la terza riga sono ridondanti, si ha:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Sottraendo la prima riga alla seconda si ottiene:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Da cui, posto $z=t$, segue: $y=-t$, $x=-t$, dove $t\in\mathbb{R}$. Come base del nucleo si può scegliere il vettore $(-1;-1;1)^t$.

- Siano $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ i tre vettori colonna della matrice A_3. Essi risultano linearmente indipendenti per quanto visto precedentemente.
L'immagine del vettore $\boldsymbol{v}=(x,y,z)^t$ attraverso f_3 è: $x\boldsymbol{w}_1+y\boldsymbol{w}_2+z\boldsymbol{w}_3$. Ogni vettore dell'immagine del piano π può essere scritto come: $(y-2z)\boldsymbol{w}_1+y\boldsymbol{w}_2+z\boldsymbol{w}_3$, ovvero: $y(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)+z(\boldsymbol{w}_3-2\boldsymbol{w}_1)$. I vettori

$$\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}2\\ -6\\ 6\\ 3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_3-2\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano l'immagine del piano π. Essi dunque formano una base di $f_3(\pi)$.

3. (punti 7) Sia $h\in\mathbb{R}$. Data la matrice:

$$A_h=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & h-3 & h-1\end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori del parametro h essa è diagonalizzabile.

Soluzione. Occorre calcolare gli autovalori della matrice A_h:

$$\det(A_h-\lambda\mathbb{I})=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & h-3 & h-1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-(2+h)\lambda+2h)=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-h)$$

Gli autovalori sono tutti semplici se $h\neq 1\wedge h\neq 2$. Pertanto, se $h\neq 1\wedge h\neq 2$ la matrice è diagonalizzabile.
Sia $h=1$. In questo caso l'autovalore $\lambda=1$ ha molteplicità algebrica pari a due. Si ha:

$$\mathrm{rk}(A_1-\mathbb{I})=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}=2.$$

Pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore è $3-2=1\neq 2$, dunque la matrice non è diagonalizzabile.
Sia $h=2$. In questo caso è l'autovalore $\lambda=2$ ad avere molteplicità algebrica pari a due. Anche in questo caso questo autovalore non è regolare, infatti:

$$\mathrm{rk}(A_2-2\mathbb{I})=\mathrm{rk}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=2$$

e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se e solo se $h\neq 1\wedge h\neq 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		**Prova scritta del 06/11/2021**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 9) Risolvere la seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$i\left[z^2 + (\overline{z})^2\right] = 4(z - \overline{z}) + i\frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} + 4i.$$

Soluzione. Vale, posto $z = x + iy$, quanto segue:

$$\begin{aligned} & z^2 + (\overline{z})^2 = x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy = 2(x^2 - y^2); \\ & 4(z - \overline{z}) = 8iy; \\ & \frac{(\operatorname{Re} z)^3}{z} = \frac{x^3}{x + iy} = \frac{x^3(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^4 - ix^3y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Dunque deve valere:

$$2i(x^2 - y^2) = 8iy + i\frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^3y}{x^2 + y^2} + 4i$$

ovvero:

$$\frac{x^3y}{x^2 + y^2} + i\left[8y + \frac{x^4}{x^2 + y^2} + 4 - 2(x^2 - y^2)\right] = 0.$$

Affinché la parte reale dell'ultima quantità scritta si annulli occorre che valga $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $x = 0$ anche la parte immaginaria si annulla se e solo se $2y^2 + 8y + 4 = 0$, cioè se e solo se $y = -2 \pm \sqrt{2}$. Se invece $y = 0$ dovrà valere $x^2 + 4 - 2x^2 = 0$, cioè $x = \pm 2$. In conclusione le soluzioni sono le seguenti:

$$z_1 = \left(-2 + \sqrt{2}\right) i, \ z_2 = \left(-2 - \sqrt{2}\right) i, \ z_3 = 2, z_4 = -2.$$

2. (punti 16) Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare così definita: posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$

$$f_k(\boldsymbol{v}) = A_k\boldsymbol{v}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ k & k & 2k \\ 1 & k^2 - 3k + 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

- Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f_k al variare del parametro k.
- Determinare una base del nucleo nel caso in cui esso sia monodimensionale.
- Sia π il piano di equazione $2x - y + z = 0$. Fornire una base di $f_k(\pi)$ per $k = 2$.

Soluzione.

- Per determinare le dimensioni dell'immagine di f_k occorre calcolare il rango della matrice A_k. Il minore di ordine due formato dagli elementi delle prime due righe e delle prime due colonne è diverso da zero se $k \neq 3$. Sia dunque $k \neq 3$, allora $2 \leq \operatorname{rk}(A_k) \leq 3$. Gli orlati di ordine tre sono i seguenti:

$$\det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ k & k & 2k \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & k^2-3k+1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & k-1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & k^2-3k & 0 \end{pmatrix} = -2k(k-3)^2$$

Pertanto, se $k \neq 0 \wedge k \neq 3$, si ha: $\text{rk}(A_k) = 3$. Se $k = 3$ le tre colonne della matrice sono proporzionali, pertanto $\text{rk}(A_3) = 1$. Se $k = 0$, la presenza di almeno un minore di ordine due non nullo implica che $\text{rk}(A_0) = 2$. Quindi:

(a) se $k \neq 0 \wedge k \neq 3$: $\dim \text{Im}(f_k) = 3$, $\dim \text{Ker}(f_k) = 0$;
(b) se $k = 0$: $\dim \text{Im}(f_0) = 2$, $\dim \text{Ker}(f_0) = 1$;
(c) se $k = 3$: $\dim \text{Im}(f_3) = 1$, $\dim \text{Ker}(f_3) = 2$.

- Per il punto precedente occorre porre $k = 0$, e poi risolvere il sistema omogeneo $A_0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Poichè ad esempio la seconda e la terza riga sono ridondanti, si ha:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sommando alla prima riga il doppio della seconda e scambiando le righe, si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui, posto $z = t$, segue: $y = -t$, $x = -t$, dove $t \in \mathbb{R}$. Come base del nucleo si può scegliere il vettore $(-1; -1; 1)^t$.

- Siano $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ i tre vettori colonna della matrice A_2. Essi risultano linearmente indipendenti per quanto visto precedentemente.
L'immagine del vettore $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$ attraverso f_2 è: $x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + z\boldsymbol{w}_3$. Ogni vettore dell'immagine del piano π può essere scritto come: $x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2 + (y - 2x)\boldsymbol{w}_3$, ovvero: $x(\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_3) + y(\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3)$. I vettori

$$\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti e generano l'immagine del piano π. Essi dunque formano una base di $f_2(\pi)$.

3. (punti 7) Sia $h \in \mathbb{R}$. Data la matrice:

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & h-2 & h-3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori del parametro h essa è diagonalizzabile.

Soluzione. Occorre calcolare gli autovalori della matrice A_h:

$$\det(A_h - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & h-2-\lambda & h-3 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - (h+1)\lambda + h) = (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-h)$$

Gli autovalori sono tutti semplici se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$. Pertanto, se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$ la matrice è diagonalizzabile.
Sia $h = 1$. In questo caso l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica pari a due. Si ha:

$$\text{rk}(A_1 - \mathbb{I}) = \text{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore è $3 - 2 = 1 \neq 2$, dunque la matrice non è diagonalizzabile.
Sia $h = 3$. In questo caso è l'autovalore $\lambda = 3$ ad avere molteplicità algebrica pari a due. Anche in questo caso questo autovalore non è regolare, infatti:

$$\text{rk}(A_3 - 3\mathbb{I}) = \text{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi la matrice non è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se e solo se $h \neq 1 \wedge h \neq 3$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria-parte 1, Versione A		**Prova scritta del 11/1/2022**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 20) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{\sqrt[3]{2+x}}{x}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. Determiniamo il dominio di f. Deve ovviamente valere $x \neq 0$. Inoltre va verificata la condizione $\frac{\sqrt[3]{2+x}}{x} > -1$. Tale disuguaglianza è ovviamente soddisfatta per $x > 0$ in quanto in tal caso il membro di sinistra è positivo. Se $x < 0$ deve valere $\sqrt[3]{2+x} < -x$, che equivale a $2 + x < -x^3$ cioè a $x^3 + x + 2 < 0$. Si noti che $x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2 - x + 2)$, e che $x^2 - x + 2 > 0$ per ogni x, quindi il segno di $x^3 + x + 2$ coincide con quello di $x + 1$. Riassumendo, la funzione è definita per $x > 0$ e per $x < -1$. Vale inoltre:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

in quanto l'argomento del logaritmo tende rispettivamente a $+\infty$, a 0^+ e a 1 in tali limiti. Le rette $x = 0$ e $x = -1$ sono asintoti verticali (rispettivamente da destra e da sinistra) per f, la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f se $x \to \pm\infty$.

Lo studio degli zeri e del segno è immediato. Si ha infatti $f(x) = 0$ se e solo se $\frac{\sqrt[3]{2+x}}{x} = 0$ cioè se e solo se $x = -2$, inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{\sqrt[3]{2+x}}{x} > 0$ cioè se e solo se $x > 0$ oppure $x < -2$, e quindi $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (-2, -1)$.

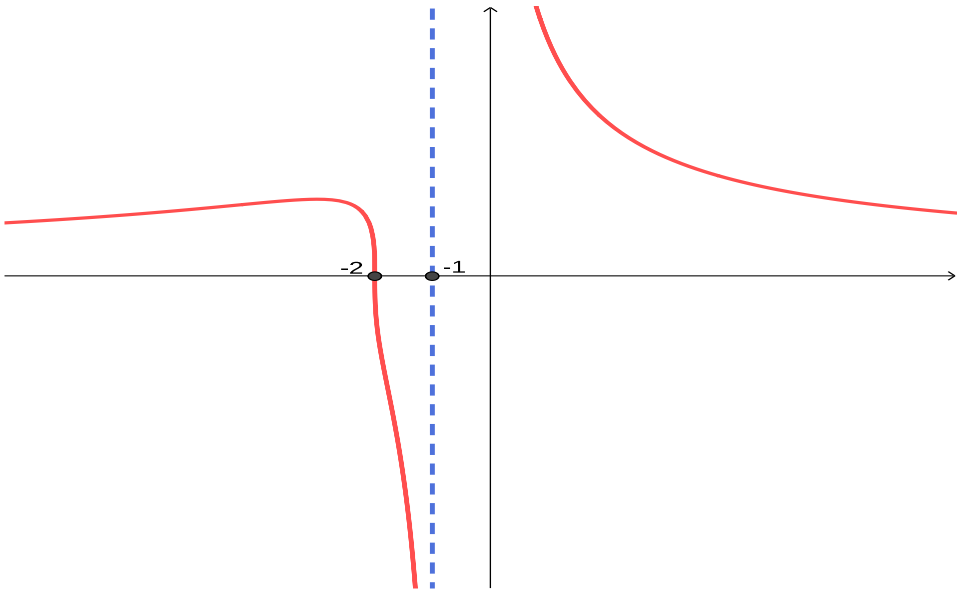
La funzione non è derivabile in $x = -2$ (poiché non lo è $\sqrt[3]{2+x}$). Calcoliamo la derivata prima per $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\left[1 + \frac{\sqrt[3]{2+x}}{x}\right] x^2} \left[\frac{x}{3(2+x)^{2/3}} - \sqrt[3]{2+x}\right] \\ &= -\frac{2(x+3)}{3\left[1 + \frac{\sqrt[3]{2+x}}{x}\right] x^2 (2+x)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Il denominatore non è stato semplificato in modo che sia chiaro che esso è, per gli x considerati, sempre positivo: il primo fattore è l'argomento del logaritmo che è già stato richiesto essere positivo, gli altri due sono evidentemente positivi. Dunque il segno di f' nel proprio dominio coincide con quello di $-(x+3)$. Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = -3$, $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 3)$, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (-3, -1) \cup (0, +\infty)$. Quindi f cresce se $x \in (-\infty, 3)$, decresce se $x \in (-3, -1)$ e se $x \in (0, +\infty)$. Il punto $x = -3$ è di massimo relativo. Per quanto detto sui limiti di f non vi sono punti di estremo assoluto. Si noti infine che

$$\lim_{x\to -2} f'(x) = -\infty.$$

Sebbene non sia possibile dimostrarlo in modo formale senza il calcolo della derivata seconda, il punto $x = -2$ risulta di flesso a tangente verticale. In conclusione il grafico di f è il seguente



2. (punti 12) Determinare il termine principale nello sviluppo di Taylor, per $x \to 0^+$, della funzione

$$g(x) = 3 - e^{\frac{\sin(x^2)}{1-\sin x} - x^2} - 2\cos\left[\log\left(1 + x^{\frac{3}{2}}\right)\right].$$

Successivamente, determinare per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione

$$h(x) = \frac{\tan(x^a)}{g(x)},$$

con g come sopra, è integrabile in un opportuno intorno destro dell'origine.

Soluzione. Calcoliamo, sempre per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x^2)}{1-\sin x} - x^2 &= \frac{x^2 + o(x^4)}{1 - x + o(x^2)} - x^2 = \left[x^2 + o(x^4)\right]\left[1 + x + x^2 + o(x^2)\right] - x^2 = x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) - x^2 \\ &= x^3 + x^4 + o(x^4); \\ e^{\frac{\sin(x^2)}{1+\sin x} - x^2} &= e^{x^3 + x^4 + o(x^4)} = 1 + x^3 + x^4 + o(x^4); \\ 2\cos\left[\log\left(1 + x^{\frac{3}{2}}\right)\right] &= 2\cos\left[x^{\frac{3}{2}} + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right] = 2 - x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

Dunque:

$$g(x) = 3 - 1 - x^3 - x^4 - 2 + x^3 + o(x^4) = -x^4 + o(x^4).$$

Il termine principale dello sviluppo cercato è dunque $-x^4$. Circa la seconda domanda basta notare che, per $x \to 0^+$:

$$\frac{\tan(x^a)}{g(x)} \sim -\frac{x^a}{x^4} = -\frac{1}{x^{4-a}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, applicabile in quanto la funzione integranda ha segno costante in un intorno destro dell'origine (si veda l'ultima formula scritta), si ha che h è integrabile in un opportuno intorno destro dell'origine se e solo se $4 - a < 1$, cioè $a > 3$.

3. (punti 10) Risolvere la seguente equazione nella variabile complessa z :

$$\frac{z^4}{(1-z^2)^2} = -1.$$

Soluzione. Occorre porre $z \neq \pm 1$, condizione da verificare a posteriori sulle soluzioni. Si noti dapprima che le radici quadrate di -1 sono $\pm i$. Dunque l'equazione data è soddisfatta se e solo se:

$$\frac{z^2}{1-z^2} = i \quad \text{oppure} \quad \frac{z^2}{1-z^2} = -i.$$

La prima identità è equivalente a

$$z^2 = \frac{i}{i+1} = \frac{i(1-i)}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dunque essa è soddisfatta se e solo se

$$z = z_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{oppure} \quad z = z_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{9\pi}{8}}.$$

La seconda identità è equivalente a

$$z^2 = -\frac{i}{1-i} = -\frac{i(1+i)}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Dunque essa è soddisfatta se e solo se

$$z = z_3 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad \text{oppure} \quad z = z_4 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

Le soluzioni sono quindi le seguenti (tutte diverse da ± 1 , come da verificare, visto ad esempio che il loro modulo è $2^{-\frac{1}{4}}$):

$$z_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad z_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{9\pi}{8}}, \quad z_3 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad z_4 = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

4. (punti 22) Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare così definita: posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$

$$f_k(\boldsymbol{v}) = A_k \boldsymbol{v}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 3 \\ 3 & 2k & -1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare per quali valori del parametro k il nucleo della funzione è non banale. Per il maggiore di tali valori si determini Ker (f_k) e, inoltre, la retta perpendicolare a Ker (f_k) e passante per il punto $P = (0, 2, 4)$.

- Per il medesimo valore di k calcolare gli autovalori della matrice associata.

- Sia π il piano di equazione $x + y - z = 0$. Determinare, per ogni valore di k, la controimmagine $f_k^{-1}(\pi)$, e stabilire poi per quale valore di k il sottospazio $f_k^{-1}(\pi)$ sia perpendicolare al vettore $\boldsymbol{v} = (0, 1, -1)^t$.

Soluzione.

- Il nucleo è non banale se e solo se $\det A_k = 0$ ovvero se $-5k^2+5k+10 = 0$, e ciò accade solo se $k = -1 \vee k = 2$. Sia $k = 2$. Occorre risolvere il sistema omogeneo $A_2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, osservando che l'ultima riga è ridondante, sottraendo il doppio della seconda riga alla prima, segue: $5y - 5z = 0$, da cui: $y = z$. Inoltre, dalla prima riga si ottiene $x = -y$. Pertanto, il nucleo di f_2 è il sottospazio monodimensionale formato da tutti i vettori proporzionali al vettore $\boldsymbol{\eta} = (-1, 1, 1)^t$.
  Sia r la retta perpendicolare al nucleo passante per P e sia $Q \in \text{Ker } f_2$ tale che $\boldsymbol{PQ}$ sia ortogonale a η. Allora esiste $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $Q = (-\bar{t}, \bar{t}, \bar{t})$ e per cui:
  $$\begin{pmatrix} -\bar{t} \\ \bar{t} - 2 \\ \bar{t} - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
  Si ricava $\bar{t} = 2$, pertanto: Ker $f_2 \cap r = Q = (-2, 2, 2)$.
  Un vettore direzione della retta r è $\boldsymbol{PQ} = (-2, 0, -2)$, quindi una possibile parametrizzazione della retta r è la seguente:
  $$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
- Occorre determinare gli zeri del polinomio caratteristico della matrice A_2:
  $$\det(A_2 - \lambda \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 20\lambda = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 5) = 0$$
  Dunque la matrice ammette tre autovalori semplici: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 4$.
- Dovendone determinare la controimmagine, il piano π deve essere interpretato come un sottospazio dell'insieme di *arrivo*, quindi, se si vuole definire l'azione di f_k avvalendosi della seguente notazione:
  $$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$
  allora deve valere $x' + y' - z' = 0$.
  Esplicitando l'azione della matrice su $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, si ottiene:
  $$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + y + z \\ x - ky + 3z \\ 3x + 2ky - z \end{pmatrix}$$
  Pertanto, deve valere: $(kx + y + z) + (x - ky + 3z) - (3x + 2ky - z) = 0$.
  Dunque $f_k^{-1}(\pi)$ è un piano formato dai vettori $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$ tali che $(k - 2)x + (1 - 3k)y + 5z = 0$.
  Affinchè $f_k^{-1}(\pi)$ sia perpendicolare a $\boldsymbol{v} = (0, 1, -1)^t$, la normale al piano deve essere proporzionale a $\boldsymbol{v}$. Vale a dire che deve esistere $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui:
  $$\begin{pmatrix} k - 2 \\ 1 - 3k \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  e ciò avviene solo per $\alpha = -5$ e $k = 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria-parte 1, Versione B		Prova scritta del 11/1/2022
Cognome:	Nome:	Codice persona:

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 20) Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(1 - \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. Determiniamo il dominio di f. Deve ovviamente valere $x \neq 0$. Inoltre va verificata la condizione $\frac{\sqrt[3]{2-x}}{x} < 1$. Tale disuguaglianza è ovviamente soddisfatta per $x < 0$ in quanto in tal caso il membro di sinistra è negativo. Se $x > 0$ deve valere $\sqrt[3]{2-x} < x$, che equivale a $2 - x < x^3$ cioè a $x^3 + x - 2 > 0$. Si noti che $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$, e che $x^2 + x + 2 > 0$ per ogni x, quindi il segno di $x^3 + x - 2$ coincide con quello di $x - 1$. Riassumendo, la funzione è definita per $x < 0$ e per $x > 1$. Vale inoltre:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

in quanto l'argomento del logaritmo tende rispettivamente a $+\infty$, a 0^+ e a 1 in tali limiti. Le rette $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali (rispettivamente da sinistra e da destra) per f, la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f se $x \to \pm\infty$.

Lo studio degli zeri e del segno è immediato. Si ha infatti $f(x) = 0$ se e solo se $\frac{\sqrt[3]{2-x}}{x} = 0$ cioè se e solo se $x = 2$, inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{\sqrt[3]{2-x}}{x} > 0$ cioè se e solo se $x < 0$ oppure $x > 2$, e quindi $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (1, 2)$.

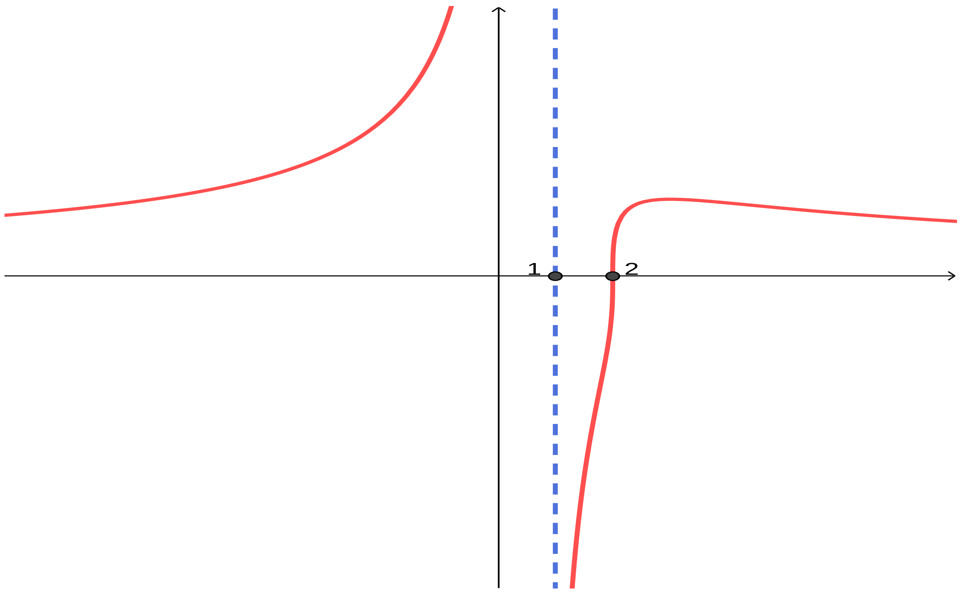
La funzione non è derivabile in $x = 2$ (poiché non lo è $\sqrt[3]{2-x}$). Calcoliamo la derivata prima per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\left[1 - \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x}\right] x^2} \left[\frac{x}{3(2-x)^{2/3}} + \sqrt[3]{2-x}\right] \\ &= \frac{2(3-x)}{3\left[1 - \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x}\right] x^2 (2-x)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Il denominatore non è stato semplificato in modo che sia chiaro che esso è, per gli x considerati, sempre positivo: il primo fattore è l'argomento del logaritmo che è già stato richiesto essere positivo, gli altri due sono evidentemente positivi. Dunque il segno di f' nel proprio dominio coincide con quello di $3 - x$. Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 3$, $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3)$, mentre $f'(x) < 0$ se $x \in (3, +\infty)$. Quindi f cresce se $x \in (-\infty, 0)$ e se $x \in (1, 3)$, decresce se $x \in (3, +\infty)$. Il punto $x = 3$ è di massimo relativo. Per quanto detto sui limiti di f non vi sono punti di estremo assoluto. Si noti infine che

$$\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty.$$

Sebbene non sia possibile dimostrarlo in modo formale senza il calcolo della derivata seconda, il punto $x = 2$ risulta di flesso a tangente verticale. In conclusione il grafico di f è il seguente



2. (punti 12) Determinare il termine principale nello sviluppo di Taylor, per $x \to 0^+$, della funzione

$$g(x) = e^{\frac{\sin(x^2)}{1+\sin x} - x^2} - 2\cos\left[\sin\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right] + 1.$$

Successivamente, determinare per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione

$$h(x) = \frac{\arctan(x^a)}{g(x)},$$

con g come sopra, è integrabile in un opportuno intorno destro dell'origine.

Soluzione. Calcoliamo, sempre per $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x^2)}{1+\sin x} - x^2 &= \frac{x^2 + o(x^4)}{1 + x + o(x^2)} - x^2 = \left[x^2 + o(x^4)\right]\left[1 - x + x^2 + o(x^2)\right] - x^2 = x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4) - x^2 \\
&= -x^3 + x^4 + o(x^4); \\
e^{\frac{\sin(x^2)}{1+\sin x} - x^2} &= e^{-x^3 + x^4 + o(x^4)} = 1 - x^3 + x^4 + o(x^4); \\
2\cos\left[\sin\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right] &= 2\cos\left[x^{\frac{3}{2}} + o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\right] = 2 - x^3 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dunque:

$$g(x) = 1 - x^3 + x^4 - 2 + x^3 + o(x^4) + 1 = x^4 + o(x^4).$$

Il termine principale dello sviluppo cercato è dunque x^4. Circa la seconda domanda basta notare che, per $x \to 0^+$:

$$\frac{\arctan(x^a)}{g(x)} \sim \frac{x^a}{x^4} = \frac{1}{x^{4-a}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, applicabile in quanto la funzione integranda ha segno costante in un intorno destro dell'origine (si veda l'ultima formula scritta), si ha che h è integrabile in un opportuno intorno destro dell'origine se e solo se $4 - a < 1$, cioè $a > 3$.

3. (punti 10) Risolvere la seguente equazione nella variabile complessa z:

$$\frac{z^4}{(4-z^2)^2} = -1.$$

Soluzione. Occorre porre $z \neq \pm 2$, condizione da verificare a posteriori sulle soluzioni. Si noti dapprima che le radici quadrate di -1 sono $\pm i$. Dunque l'equazione data è soddisfatta se e solo se:

$$\frac{z^2}{4-z^2} = i \quad \text{oppure} \quad \frac{z^2}{4-z^2} = -i.$$

La prima identità è equivalente a

$$z^2 = \frac{4i}{i+1} = \frac{4i(1-i)}{2} = 2(1+i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dunque essa è soddisfatta se e solo se

$$z = z_1 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{oppure} \quad z = z_2 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}.$$

La seconda identità è equivalente a

$$z^2 = -\frac{4i}{1-i} = -\frac{4i(1+i)}{2} = 2(1-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Dunque essa è soddisfatta se e solo se

$$z = z_3 = 2^{\frac{3}{4}} e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad \text{oppure} \quad z = z_4 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

Le soluzioni sono quindi le seguenti (tutte diverse da ± 2, come da verificare, visto ad esempio che il loro modulo è $2^{\frac{3}{4}}$):

$$z_1 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad z_2 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}, \quad z_3 = 2^{\frac{3}{4}} e^{-i\frac{\pi}{8}} \quad z_4 = 2^{\frac{3}{4}} e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

4. (punti 22) Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare così definita: posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$

$$f_k(\boldsymbol{v}) = A_k\boldsymbol{v}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & -2 & 3k \\ 3 & 4 & -k \end{pmatrix}.$$

- Determinare per quale valore del parametro k il nucleo della funzione è non banale. Per tale valore si determini Ker (f_k) e, inoltre, la retta perpendicolare a Ker (f_k) e passante per il punto $P = (0, 3, 3)$.

- Per il medesimo valore di k calcolare gli autovalori della matrice associata.

- Sia π il piano di equazione $x - y - z = 0$. Determinare, per ogni valore di k, la controimmagine $f_k^{-1}(\pi)$, e stabilire poi per quale valore di k il sottospazio $f_k^{-1}(\pi)$ risulta ortogonale al vettore $\boldsymbol{v} = (4, 3, 0)^t$.

Soluzione.

- Il nucleo è non banale se e solo se $\det A_k = 0$ ovvero se $10k^2 - 20k + 10 = 0$, e ciò accade solo se $k = 1$.
  Posto $k = 1$, occorre risolvere il sistema omogeneo $A_1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Posto $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, osservando che l'ultima riga è ridondante, sottraendo il doppio della seconda riga alla prima, segue: $5y - 5z = 0$, da cui: $y = z$. Inoltre, dalla prima riga si ottiene $x = -y$. Pertanto, il nucleo di f_1 è il sottospazio monodimensionale formato da tutti i vettori proporzionali al vettore $\boldsymbol{\eta} = (-1, 1, 1)^t$.
  Sia r la retta perpendicolare al nucleo passante per P e sia $Q \in \text{Ker } f_1$ tale che $\boldsymbol{PQ}$ sia ortogonale a η. Allora esiste $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $Q = (-\bar{t}, \bar{t}, \bar{t})$ e per cui:

  $$\begin{pmatrix} -\bar{t} \\ \bar{t} - 3 \\ \bar{t} - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

  Si ricava $\bar{t} = 2$, pertanto: $\text{Ker } f_1 \cap r = Q = (-2, 2, 2)$.
  Un vettore direzione della retta r è $\boldsymbol{PQ} = (-2, -1, -1)$, quindi una possibile parametrizzazione della retta r è la seguente:

  $$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Occorre determinare gli zeri del polinomio caratteristico della matrice A_1:

  $$\det(A_2 - \lambda\mathcal{I}) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 20\lambda = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 5) = 0$$

  Dunque la matrice ammette tre autovalori semplici: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 4$.

- Dovendone determinare la controimmagine, il piano π deve essere interpretato come un sottospazio dell'insieme di *arrivo*, quindi, usando la notazione:

  $$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

  allora deve valere $x' - y' - z' = 0$.
  Esplicitando l'azione della matrice su $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$, si ottiene:

  $$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + ky + z \\ x - 2y + 3kz \\ 3x + 4y - kz \end{pmatrix}$$

  Pertanto, deve valere: $(2x + ky + z) - (x - 2y + 3kz) - (3x + 4y - kz) = 0$.
  Dunque $f_k^{-1}(\pi)$ è un piano formato dai vettori $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^t$ tali che $-2x + (k - 2)y + (1 - 2k)z = 0$.
  Affinchè $f_k^{-1}(\pi)$ sia perpendicolare a $\boldsymbol{v} = (0, 1, -1)^t$, la normale al piano deve essere proporzionale a $\boldsymbol{v}$. Vale a dire che deve esistere $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui:

  $$\begin{pmatrix} -2 \\ k - 2 \\ 1 - 2k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  e ciò avviene solo per $\alpha = -1/2$ e $k = 1/2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 7/2/2022**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 5) Determinare le soluzioni della seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6\left(\sqrt{3}+i\right) = 2|z|^4 + 4|z|^2.$$

Soluzione. Si noti che $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Quindi, posto $z = \rho e^{i\theta}$, deve valere:

$$\rho^6 e^{i\left(6\theta+\frac{\pi}{6}\right)} = \rho^4 + 2\rho^2.$$

Il secondo membro dell'ultima equazione scritta è reale e non negativo, così come il fattore ρ^6 a membro di sinistra. Occorre allora che $e^{i\left(6\theta+\frac{\pi}{6}\right)} = 1$, cioè che $6\theta + \frac{\pi}{6} = 2k\pi$ per un $k \in \mathbb{Z}$, cioè che $\theta = \theta_k := \frac{(12k-1)\pi}{36}$ per un $k \in \mathbb{Z}$. Le soluzioni distinte dell'equazione di partenza si troveranno ad esempio per $k = 1, \ldots, 6$, che corrispondono ai seguenti valori:

$$\theta_1 = \frac{11}{36}\pi, \quad \theta_2 = \frac{23}{36}\pi, \quad \theta_3 = \frac{35}{36}\pi, \quad \theta_4 = \frac{47}{36}\pi, \quad \theta_5 = \frac{59}{36}\pi \quad \theta_6 = \frac{71}{36}\pi. \tag{1}$$

Occorre ora determinare i possibili valori del modulo ρ. Dovrà valere

$$\rho^6 = \rho^4 + 2\rho^2.$$

L'uguaglianza è ovviamente soddisfatta se $\rho = 0$, quindi vi è la soluzione $z = z_0 = 0$. Se $\rho \neq 0$ dovremo avere

$$0 = \rho^4 - \rho^2 - 2 = (\rho^2 - 2)(\rho^2 + 1).$$

L'unica soluzione accettabile di tale equazione è $\rho = \sqrt{2}$ (si ricordi che deve essere $\rho > 0$). Le soluzioni dell'equazione di partenza sono quindi le seguenti: $z_0 = 0$, $z_k = \sqrt{2}e^{i\theta_k}$ con $k = 1, \ldots, 6$ e θ_k come nella formula (1).

2. (punti 9) Sia $k \in \mathbb{R}$. Posto:

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2-2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_k = \begin{pmatrix} k \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Risolvere il sistema $A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_k$ nel caso in cui esso ammetta infinite soluzioni.
- Per il valore di k individuato nel quesito precedente, determinare lo spettro della matrici A_k e A_k^2.
- Stabilire se per il medesimo valore di k la matrice A_k^2 è diagonalizzabile.

Soluzione.

- Si ha: $\det A_k = 4 - k^2$. Pertanto se $k \neq \pm 2$ il sistema ammette un'unica soluzione.
  Sia $k = -2$. La presenza di minori di ordine due non nulli garantisce che $\text{Rk } A_{-2} = 2$. Inoltre vale: $\text{Rk } (A_{-2}|\boldsymbol{w}_{-2}) = 3$, infatti si ha che:
  $$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$
  In questo caso il sistema non ammette soluzioni.
  Sia $k = 2$. Allora: $\text{Rk } A_2 = \text{Rk } (A_2|\boldsymbol{w}_2) = 2$, infatti entrambi gli orlati del minore 2x2 formato dagli

elementi appartenti alle prime due righe e alla seconda e terza colonna hanno determinante nullo. Dunque il sistema ammette ∞^{3-2} soluzioni.
Considerando la prima riga ridondante, il sistema si presenta già *a scala*. Scelgliendo z come parametro libero, segue

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

- Sia $k = 2$. L'equazione caratteristica è la seguente:

$$\det A_2 - \lambda \mathbb{I} = (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 1) + (2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda = 0,$$

le cui soluzioni sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{6}$, $\lambda_3 = \sqrt{6}$. Dunque: Sp $A_2 = \{-\sqrt{6}, 0, +\sqrt{6}\}$
Gli autovalori della matrice A^2 si ottengono elevando al quadrato gli autovalori della matrice A. Dunque: Sp $A_2^2 = \{0, 6^2\}$

- La matrice A_2 è diagonalizzabile perchè è una matrice simmetrica, oppure perchè ammette autovalori semplici. La matrice A_2^2, nonostante ammetta un autovalore con molteplicità algebrica doppia, è diagonalizzabile perchè lo è A_2.
In generale la diagonalizzabiltà di A implica la diagonalizzabilità di A^2. Sia S una matrice di passaggio e Λ la matrice diagonale per cui valga: $S^{-1}AS = \Lambda$. Allora:

$$S^{-1}A^2S = S^{-1}A\left(SS^{-1}\right)AS = \left(S^{-1}AS\right)\left(S^{-1}AS\right) = \Lambda^2$$

Il fatto che anche Λ^2 sia una matrice diagonale prova l'asserto.

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = x\sqrt{|\log(|2x|)|}.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$ ed è dispari. La studieremo dunque solo per $x > 0$, prolungandola poi per simmetria rispetto all'origine. Sia dunque d'ora in poi $x > 0$. La funzione è, per tali x, sempre non negativa, e si annulla solo per $x = \frac{1}{2}$. Quindi possiamo dire fin d'ora che $x = \frac{1}{2}$ è punto di minimo relativo. Si ha poi chiaramente

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

il primo limite essendo valido per la nota gerarchia degli infiniti. Si noti in particolare che la funzione può essere prolungata per continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) := 0$, cosa che faremo nel grafico finale. Si noti anche che, dato il limite a $+\infty$ di f, non vi sono massimi assoluti, e quindi nemmeno minimi assoluti vista la simmetria del grafico di f.

Non vi sono asintoti obliqui in quanto si ha , per $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{|\log(|2x|)|} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La funzione è derivabile se $x > 0$ e $x \neq \frac{1}{2}$. Si noti che, se $x > 0$, $\log(2x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Dunque per calcolare la derivata occorre considerare separatamente i casi $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x > \frac{1}{2}$. Per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ si ha $f(x) = x\sqrt{-\log(2x)}$ e quindi:

$$f'(x) = \sqrt{-\log(2x)} - \frac{x}{2x\sqrt{-\log(2x)}} = \frac{-2\log(2x) - 1}{2\sqrt{-\log(2x)}} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

La derivata si annulla, nell'intervallo studiato, se e solo se $x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$. Essendo per costruzione il denominatore positivo nell'intervallo studiato, il segno di f' coincide con quello del nominatore e quindi $f'(x) > 0$ se $x \in \left(0, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$, $f'(x) < 0$ se $x \in \left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2}\right)$. Il punto $x = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ è quindi di massimo relativo. Si noti infine che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{-\log(2x)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f'(x) = -\infty,$$

dove l'ultimo limite segue dal fatto che, per $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$, il numeratore nell'espressione della derivata tende a -1 mentre il denominatore a 0^+. Completiamo lo studio di f per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ calcolando anche la derivata seconda. Si ha:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{-\log(2x)} - \frac{1}{2\sqrt{-\log(2x)}}\right] = -\frac{1}{2x\sqrt{-\log(2x)}} - \frac{1}{4x\left[-\log(2x)\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2\log(2x) - 1}{4x\left[-\log(2x)\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Il denominatore è per costruzione positivo nell'intervallo studiato. Il numeratore è invece sempre negativo in tale intervallo, lo è infatti nell'intervallo, più grande, $\left(0, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$. Dunque f è concava per $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Avendo prolungato per continuità la funzione f in $x = 0$, per simmetria possiamo concludere che il punto $x = 0$ è di flesso a tangente verticale. Si noti che ovviamente questa affermazione è formalmente corretta solo se si estende f in $x = 0$ (non vi può essere un flesso in un punto in cui f non è definita).

Sia ora $x > \frac{1}{2}$. Vale, per tali x, $f(x) = x\sqrt{\log(2x)}$, e quindi:

$$
f'(x) = \sqrt{\log(2x)} + \frac{x}{2x\sqrt{\log(2x)}} = \frac{2\log(2x) + 1}{2\sqrt{\log(2x)}} \qquad \forall x > \frac{1}{2}.
$$

Sia il numeratore che il denominatore sono evidentemente positivi per $x > \frac{1}{2}$, quindi f è crescente in tale intervallo. Si noti infine che

$$
\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f'(x) = +\infty
$$

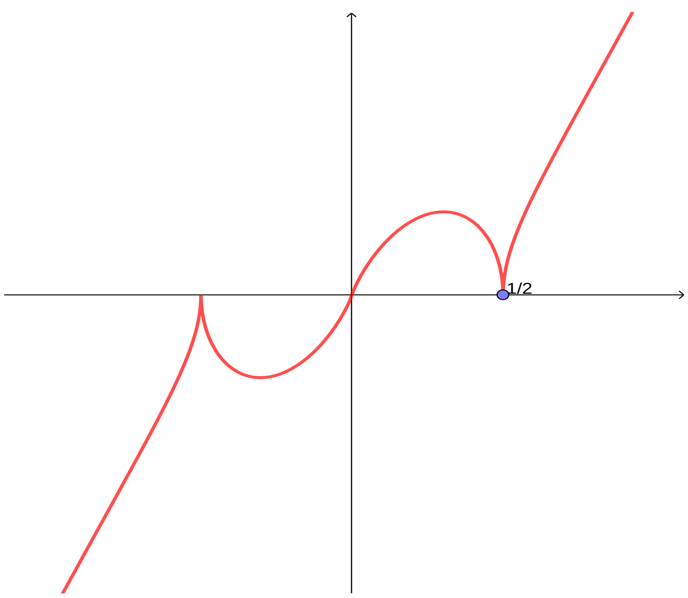
poiché il numeratore tende a 1 mentre il denominatore a 0^+. Abbiamo quindi dimostrato che il punto $x = \frac{1}{2}$, che già sapevamo essere di minimo relativo, è una cuspide.

Calcoliamo infine la derivata seconda per $x > \frac{1}{2}$. Si ha:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\sqrt{\log(2x)} + \frac{1}{2\sqrt{\log(2x)}}\right] = \frac{1}{2x\sqrt{\log(2x)}} - \frac{1}{4x\left[\log(2x)\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2\log(2x) - 1}{4x\left[\log(2x)\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Il denominatore è per costruzione positivo nell'intervallo studiato, mentre il numeratore lo è se e solo se $x > \frac{\sqrt{e}}{2}$. Esso è negativo per $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$, si annulla per $x = \frac{\sqrt{e}}{2}$. Dunque f è convessa nell'intervallo $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}, +\infty\right)$, concava nell'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$, e il punto $x = \frac{\sqrt{e}}{2}$ è di flesso.

Il grafico di f, ottenuto per $x < 0$ per simmetria rispetto all'origine, è il seguente:



4. (punti 8) Calcolare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{e^{4x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}.$$

Successivamente, senza far uso della primitiva calcolata, mostrare che

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{4t} + e^{-t}}{e^{2t} - e^{-t}}\, \mathrm{d}t$$

diverge.

Soluzione. Calcoliamo, ponendo $e^x = t$ cosicché $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$;

$$\int \frac{e^{4x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{e^{5x} + 1}{e^{3x} - 1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{t^5 + 1}{t(t^3 - 1)}\, \mathrm{d}t = \int \frac{t^5 + 1}{t^4 - t}\, \mathrm{d}t.$$

Effettuiamo la divisione di polinomi:

$$\frac{t^5 + 1}{t^4 - t} = t + \frac{t^2 + 1}{t^4 - t}.$$

Occorre ora scomporre in fratti semplici la quantità $\frac{t^2+1}{t^4-t}$. Si noti a tal fine che $t^4 - t = t(t^3 - 1) = t(t-1)(t^2+t+1)$ e che il polinomio $t^2 + t + 1$ non ha radici reali. Si devono quindi determinare costanti a, b, c, d tali che:

$$\frac{t^2 + 1}{t^4 - t} = \frac{at + b}{t^2 + t + 1} + \frac{c}{t} + \frac{d}{t - 1}.$$

Semplificando si ottiene:

$$t^2 + 1 = t^3(a + c + d) + t^2(b - a + d) + t(d - b) - c,$$

che dà immediatamente $c = -1$, $d = b$. Deve allora valere inoltre $a + b - 1 = 0$, $2b - a = 1$, che dà $b = \frac{2}{3}, a = \frac{1}{3}$, e quindi $d = \frac{2}{3}$. Quindi:

$$\frac{t^5 + 1}{t^4 - t} = t + \frac{t^2 + 1}{t^4 - t} = t + \frac{t + 2}{3(t^2 + t + 1)} - \frac{1}{t} + \frac{2}{3(t - 1)}.$$

Ne segue (si ricordi che $t = e^x > 0$):

$$\int \frac{t^5 + 1}{t^4 - t}\, \mathrm{d}t = \int \left(t + \frac{t + 2}{3(t^2 + t + 1)} - \frac{1}{t} + \frac{2}{3(t - 1)} \right) \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \log t + \frac{2}{3} \log |t - 1| + \int \frac{t + 2}{3(t^2 + t + 1)}\, \mathrm{d}t.$$

Per calcolare l'ultimo integrale notiamo che, essendo $t^2 + t + 1 > 0 \quad \forall t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{t + 2}{3(t^2 + t + 1)}\, \mathrm{d}t &= \frac{1}{6} \int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2 + t + 1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{6} \log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6} \log(t^2 + t + 1) + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6} \log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right] + c
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Dunque:

$$\int \frac{t^5 + 1}{t^4 - t}\, \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \log t + \frac{2}{3} \log |t - 1| + \frac{1}{6} \log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right] + c.$$

Tornando alla variabile originaria avremo quindi:

$$\int \frac{e^{4x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{2} - x + \frac{2}{3} \log |e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^{2x} + e^x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x + \frac{1}{2}\right)\right] + c$$

sempre con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Riguardo alla seconda domanda si noti che il denominatore della funzione integranda si annulla se e solo se $e^{3t} = 1$, cioè se e solo se $t = 0$. Dunque va discussa l'integrabilità di tale funzione in un intorno di $t = 0$. Si noti a tal fine che, sviluppando al primo ordine gli esponenziali a denominatore si ha:

$$\frac{e^{4t} + e^{-t}}{e^{2t} - e^{-t}} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{2}{3t}.$$

Ciò implica in particolare ad esempio che l'integranda è positiva in un opportuno intorno destro di $t = 0$, è quindi applicabile il criterio del confronto asintotico e l'ultima formula scritta implica allora che f non è integrabile in senso improprio in alcun intorno dell'origine.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione B		Prova scritta del 7/2/2022
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.

1. (punti 5) Determinare le soluzioni della seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6\left(1+i\sqrt{3}\right) = 4|z|^4 + 6|z|^2.$$

Soluzione. Si noti che $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Quindi, posto $z = \rho e^{i\theta}$, deve valere:

$$\rho^6 e^{i\left(6\theta+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\rho^4 + 3\rho^2.$$

Il secondo membro dell'ultima equazione scritta è reale e non negativo, così come il fattore ρ^6 a membro di sinistra. Occorre allora che $e^{i\left(6\theta+\frac{\pi}{3}\right)} = 1$, cioè che $6\theta + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ per un $k \in \mathbb{Z}$, cioè che $\theta = \theta_k := \frac{(6k-1)\pi}{18}$ per un $k \in \mathbb{Z}$. Le soluzioni distinte dell'equazione di partenza si troveranno ad esempio per $k = 1, \ldots, 6$, che corrispondono ai seguenti valori:

$$\theta_1 = \frac{5}{18}\pi, \quad \theta_2 = \frac{11}{18}\pi, \quad \theta_3 = \frac{17}{18}\pi, \quad \theta_4 = \frac{23}{18}\pi, \quad \theta_5 = \frac{29}{18}\pi \quad \theta_6 = \frac{35}{18}\pi. \tag{2}$$

Occorre ora determinare i possibili valori del modulo ρ. Dovrà valere

$$\rho^6 = 2\rho^4 + 3\rho^2.$$

L'uguaglianza è ovviamente soddisfatta se $\rho = 0$, quindi vi è la soluzione $z = z_0 = 0$. Se $\rho \neq 0$ dovremo avere

$$0 = \rho^4 - 2\rho^2 - 3 = (\rho^2-3)(\rho^2+1).$$

L'unica soluzione accettabile di tale equazione è $\rho = \sqrt{3}$ (si ricordi che deve essere $\rho > 0$). Le soluzioni dell'equazione di partenza sono quindi le seguenti: $z_0 = 0$, $z_k = \sqrt{3}e^{i\theta_k}$ con $k = 1, \ldots, 6$ e θ_k come nella formula (2).

2. (punti 9) Sia $k \in \mathbb{R}$. Posto:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & k^2-2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$$

- Risolvere il sistema $A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_k$ nel caso in cui esso ammetta infinite soluzioni.
- Per il valore di k individuato nel quesito precedente, determinare lo spettro della matrici A_k e A_k^2.
- Stabilire se per il medesimo valore di k la matrice A_k^2 è diagonalizzabile.

Soluzione.

- Si ha: $\det A_k = 1-k^2$. Pertanto se $k \neq \pm 1$ il sistema ammette un'unica soluzione.
  Sia $k = -1$. La presenza di minori di ordine due non nulli garantisce che $\mathrm{Rk}\, A_{-1} = 2$. Inoltre vale: $\mathrm{Rk}\, (A_{-1}|\boldsymbol{w}_{-1}) = 3$, infatti si ha che:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

  In questo caso il sistema non ammette soluzioni.
  Sia $k = 1$. Allora: $\mathrm{Rk}\, A_1 = \mathrm{Rk}\, (A_1|\boldsymbol{w}_1) = 2$, infatti entrambi gli orlati del minore 2x2 formato dagli

elementi appartenti alle prime due righe e alla seconda e terza colonna hanno determinante nullo. Dunque il sistema ammette ∞^{3-2} soluzioni.
Considerando la prima riga ridondante, il sistema si presenta già *a scala*. Scegliendo z come parametro libero, segue

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Sia $k = 1$. L'equazione caratteristica è la seguente:

$$\det A_1 - \lambda \mathbb{I} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 1) - (1 - \lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda = 0,$$

le cui soluzioni sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}$, $\lambda_3 = \sqrt{3}$. Dunque: $\mathrm{Sp}\ A_1 = \{-\sqrt{3}, 0, +\sqrt{3}\}$
Gli autovalori della matrice A^2 si ottengono elevando al quadrato gli autovalori della matrice A. Dunque: $\mathrm{Sp}\ A_2^1 = \{0, 3^2\}$

- La matrice A_2 è diagonalizzabile perchè è una matrice simmetrica, oppure perchè ammette autovalori semplici.
La matrice A_2^1, nonostante ammetta un autovalore con molteplicità algebrica doppia, è diagonalizzabile perchè lo è A_1.
In generale la diagonalizzabiltà di A implica la diagonalizzabilità di A^2. Sia S una matrice di passaggio e Λ la matrice diagonale per cui valga: $S^{-1}AS = \Lambda$. Allora:

$$S^{-1}A^2S = S^{-1}A\left(SS^{-1}\right)AS = \left(S^{-1}AS\right)\left(S^{-1}AS\right) = \Lambda^2$$

Il fatto che anche Λ^2 sia una matrice diagonale prova l'asserto.

3. (punti 10) Studiare la funzione

$$f(x) = -x\sqrt{|\log(|3x|)|}.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x \neq 0$ ed è dispari. La studieremo dunque solo per $x > 0$, prolungandola poi per simmetria rispetto all'origine. Sia dunque d'ora in poi $x > 0$. La funzione è, per tali x, sempre non positiva, e si annulla solo per $x = \frac{1}{3}$. Quindi possiamo dire fin d'ora che $x = \frac{1}{3}$ è punto di massimo relativo. Si ha poi chiaramente

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

il primo limite essendo valido per la nota gerarchia degli infiniti. Si noti in particolare che la funzione può essere prolungata per continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) := 0$, cosa che faremo nel grafico finale. Si noti anche che, dato il limite a $+\infty$ di f, non vi sono minimi assoluti, e quindi nemmeno massimi assoluti vista la simmetria del grafico di f.

Non vi sono asintoti obliqui in quanto si ha , per $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{|\log(|3x|)|} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

La funzione è derivabile se $x > 0$ e $x \neq \frac{1}{3}$. Si noti che, se $x > 0$, $\log(3x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{3}$. Dunque per calcolare la derivata occorre considerare separatamente i casi $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ e $x > \frac{1}{3}$. Per $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ si ha $f(x) = -x\sqrt{-\log(3x)}$ e quindi:

$$f'(x) = -\sqrt{-\log(3x)} + \frac{x}{2x\sqrt{-\log(3x)}} = \frac{2\log(3x) + 1}{2\sqrt{-\log(3x)}} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

La derivata si annulla, nell'intervallo studiato, se e solo se $x = \frac{1}{3\sqrt{e}}$. Essendo per costruzione il denominatore positivo nell'intervallo studiato, il segno di f' coincide con quello del nominatore e quindi $f'(x) < 0$ se $x \in \left(0, \frac{1}{3\sqrt{e}}\right)$, $f'(x) > 0$ se $x \in \left(\frac{1}{3\sqrt{e}}, \frac{1}{3}\right)$. Il punto $x = \frac{1}{3\sqrt{e}}$ è quindi di minimo relativo. Si noti infine che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{-\log(3x)} = -\infty, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-} f'(x) = +\infty,$$

dove l'ultimo limite segue dal fatto che, per $x \to \left(\frac{1}{3}\right)^-$, il numeratore nell'espressione della derivata tende a 1 mentre il denominatore a 0^+ . Completiamo lo studio di f per $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ calcolando anche la derivata seconda. Si ha:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\sqrt{-\log(3x)} + \frac{1}{2\sqrt{-\log(3x)}}\right] = \frac{1}{2x\sqrt{-\log(3x)}} + \frac{1}{4x\left[-\log(3x)\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1-2\log(3x)}{4x\left[-\log(3x)\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall x \in \left(0, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Il denominatore è per costruzione positivo nell'intervallo studiato. Il numeratore è anch'esso sempre positivo in tale intervallo, lo è infatti nell'intervallo, più grande, $\left(0, \frac{\sqrt{e}}{3}\right)$. Dunque f è convessa per $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Avendo prolungato per continuità la funzione f in $x = 0$, per simmetria possiamo concludere che il punto $x = 0$ è di flesso a tangente verticale. Si noti che ovviamente questa affermazione è formalmente corretta solo se si estende f in $x = 0$ (non vi può essere un flesso in un punto in cui f non è definita).

Sia ora $x > \frac{1}{3}$. Vale, per tali x , $f(x) = -x\sqrt{\log(3x)}$, e quindi:

$$f'(x) = -\sqrt{\log(3x)} - \frac{x}{2x\sqrt{\log(3x)}} = \frac{-2\log(3x) - 1}{2\sqrt{\log(3x)}} \qquad \forall x > \frac{1}{3}.$$

Il denominatore è per costruzione positivo per $x > \frac{1}{3}$, mentre il denominatore è evidentemente negativo in tale intervallo, quindi f è decrescente in tale intervallo. Si noti infine che

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f'(x) = +\infty$$

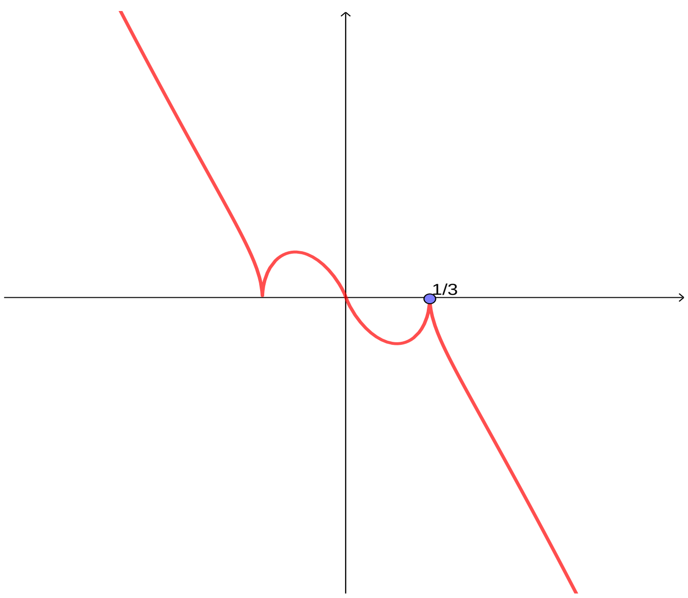
poiché il numeratore tende a -1 mentre il denominatore a 0^+ . Abbiamo quindi dimostrato che il punto $x = \frac{1}{3}$, che già sapevamo essere di minimo relativo, è una cuspide.

Calcoliamo infine la derivata seconda per $x > \frac{1}{3}$. Si ha:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{-\log(3x)} - \frac{1}{2\sqrt{\log(3x)}}\right] = -\frac{1}{2x\sqrt{\log(3x)}} + \frac{1}{4x\left[\log(3x)\right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1-2\log(3x)}{4x\left[\log(3x)\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \forall x > \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Il denominatore è per costruzione positivo nell'intervallo studiato, mentre il numeratore lo è se e solo se $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{e}}{3}\right)$. Esso è negativo per $x > \frac{\sqrt{e}}{3}$, si annulla per $x = \frac{\sqrt{e}}{3}$. Dunque f è concava nell'intervallo $\left(\frac{\sqrt{e}}{3}, +\infty\right)$, convessa nell'intervallo $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{e}}{3}\right)$, e il punto $x = \frac{\sqrt{e}}{3}$ è di flesso.

Il grafico di f , ottenuto per $x < 0$ per simmetria rispetto all'origine, è il seguente:



4. (punti 8) Calcolare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{e^{4x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}.$$

Successivamente, senza far uso della primitiva calcolata, mostrare che

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{4t} + 2e^{-t}}{e^{2t} - e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

diverge.

Soluzione. Calcoliamo, ponendo $e^x = t$ cosicché $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$;

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{5x} + 2}{e^{3x} - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^5 + 2}{t(t^3 - 1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^5 + 2}{t^4 - t}\,\mathrm{d}t.$$

Effettuiamo la divisione di polinomi:

$$\frac{t^5 + 2}{t^4 - t} = t + \frac{t^2 + 2}{t^4 - t}.$$

Occorre ora scomporre in fratti semplici la quantità $\frac{t^2+2}{t^4-t}$. Si noti a tal fine che $t^4 - t = t(t^3 - 1) = t(t-1)(t^2+t+1)$ e che il polinomio $t^2 + t + 1$ non ha radici reali. Si devono quindi determinare costanti a, b, c, d tali che:

$$\frac{t^2 + 2}{t^4 - t} = \frac{at + b}{t^2 + t + 1} + \frac{c}{t} + \frac{d}{t - 1}.$$

Semplificando si ottiene:

$$t^2 + 2 = t^3(a + c + d) + t^2(b - a + d) + t(d - b) - c,$$

che dà immediatamente $c = -2$, $d = b$. Deve allora valere inoltre $a + b - 2 = 0$, $2b - a = 1$, che dà $b = a = 1$, e quindi $d = 1$. Quindi:

$$\frac{t^5 + 2}{t^4 - t} = t + \frac{t^2 + 1}{t^4 - t} = t + \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t - 1}.$$

Ne segue (si ricordi che $t = e^x > 0$):

$$\int \frac{t^5 + 2}{t^4 - t}\,\mathrm{d}t = \int \left(t + \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t - 1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - 2\log t + \log|t - 1| + \int \frac{t + 1}{t^2 + t + 1}\,\mathrm{d}t.$$

Per calcolare l'ultimo integrale notiamo che, essendo $t^2 + t + 1 > 0 \quad \forall t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{t + 1}{t^2 + t + 1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2 + t + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2 + t + 1) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right] + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Dunque:

$$\int \frac{t^5 + 2}{t^4 - t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - 2\log t + \log|t - 1| + \frac{1}{2}\log(t^2 + t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right] + c.$$

Tornando alla variabile originaria avremo quindi:

$$\int \frac{e^{4x} + 2e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{2} - 2x + \log|e^x - 1| + \frac{1}{2}\log(e^{2x} + e^x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x + \frac{1}{2}\right)\right] + c$$

sempre con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Riguardo alla seconda domanda si noti che il denominatore della funzione integranda si annulla se e solo se $e^{3t} = 1$, cioè se e solo se $t = 0$. Dunque va discussa l'integrabilità di tale funzione in un intorno di $t = 0$. Si noti a tal fine che, sviluppando al primo ordine gli esponenziali a denominatore si ha:

$$\frac{e^{4t} + 2e^{-t}}{e^{2t} - e^{-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{3}{3t} = \frac{1}{t}.$$

Ciò implica ad esempio che l'integranda è positiva in un opportuno intorno destro di $t = 0$, è quindi applicabile il criterio del confronto asintotico e l'ultima formula scritta implica allora che f non è integrabile in senso improprio in alcun intorno dell'origine.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 10/6/2022**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 5) Sia $w \in \mathbb{C}$ fissato e tale che $|w| = 1$. Risolvere la seguente equazione nella variabile $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$16\frac{\overline{z}}{z^3} = wz^2,$$

e rappresentare le corrispondenti soluzioni nel piano complesso. Stabilire poi se esistono $w \in \mathbb{C}$ tali che $z = 1+\sqrt{3}i$ sia soluzione della precedente equazione

Soluzione. Vale per ipotesi $w = e^{i\alpha}$ per un opportuno $\alpha \in [0, 2\pi)$. Riscriviamo l'equazione come $16\overline{z} = wz^5$ (si ricordi che $z \neq 0$) e, ponendo $x = \varrho e^{i\vartheta}$, come:

$$16\varrho e^{-i\vartheta} = w\varrho^5 e^{5i\vartheta} = \varrho^5 e^{i(5\vartheta+\alpha)},$$

cioè:

$$16 = \varrho^4 e^{i(6\vartheta+\alpha)}.$$

Per il noto principio sull'identità di numeri complessi scritti in forma esponenziale, si deve allora avere $\varrho^4 = 16$, cioè $\varrho = 2$, e

$$6\vartheta + \alpha = 2k\pi,$$

cioè $\vartheta = \vartheta_k = (2k\pi - \alpha)/6$, ad esempio per $k = 1, \ldots, 6$ (questa scelta garantisce che tutti i ϑ_k appartengano a $[0, 2\pi)$, salvo che per $\alpha = 0$, ma ovviamente ogni altra scelta di sei interi consecutivi fornisce gli stessi punti di $\mathbb{C}$). I punti determinati sono vertici di un esagono regolare, inscritto nella circonferenza centrata nell'origine e di raggio uguale a due, e ad esempio uno di questi vertici corrisponde alla fase $\vartheta_0 = -\alpha/6$.

Il numero complesso $z = 1 + \sqrt{3}i$ ha modulo due e argomento $\pi/3$. Affinché esso sia soluzione occorre e basta quindi verificare che

$$\frac{2k\pi - \alpha}{6} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{cioè che } 2\pi(k-1) = \alpha,$$

dove α per costruzione appartiene a $[0, 2\pi)$, e di nuovo per costruzione $k = 1, \ldots, 6$. Deve quindi valere $\alpha = 0$, cioè a $w = 1$. Era anche possibile procedere senza usare il punto precedente, inserendo $z = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ nell'equazione e notando che ciò fornisce direttamente $w = 1$.

2. (punti 8) Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stabilire se A sia invertibile.
- Determinare gli autovalori di A.

Soluzione.

- Si può verificare direttamente che il determinante di A vale zero, oppure che la somma della prima e terza riga (colonna) è uguale alla somma della seconda e della quarta riga (colonna). Dunque la matrice non è invertibile.

- Per calcolare il polinomio caratteristico conviene applicare lo sviluppo di Laplace partendo dall'ultima riga:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda\mathbb{I}) &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= (1-\lambda)(-\lambda^3+\lambda+2\lambda-1)-(-\lambda^2+\lambda+1)\\ &= \lambda^4-2\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda\\ &= \lambda(\lambda-2)(\lambda^2-2).\end{aligned}$$

  Quindi gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

3. (punti 11) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{(1-2\cos x)^2}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. La funzione è periodica di periodo 2π ed è dispari. Studiamola ad esempio su $[0,2\pi)$. La funzione è definita se x soddisfa $\cos x \neq 1/2$ cioè, nell'intervallo considerato, se $x \neq \pi/3, x \neq 5\pi/3$. Il segno della funzione coincide, nel suo intervallo di definizione, con quello di $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$. Dunque f è positiva se $x \in (0,\pi/3)\cup(\pi/3,\pi/2)\cup(\pi,3\pi/2)$, negativa se $x \in (\pi/2,\pi)\cup(3\pi/2,5\pi/3)\cup(5\pi/3,2\pi)$, si annulla se $x=0, x=\pi/2, x=\pi, x=3\pi/2$. È a questo punto immediato notare che

$$\lim_{x\to\pi/3} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 5\pi/3} f(x) = -\infty.$$

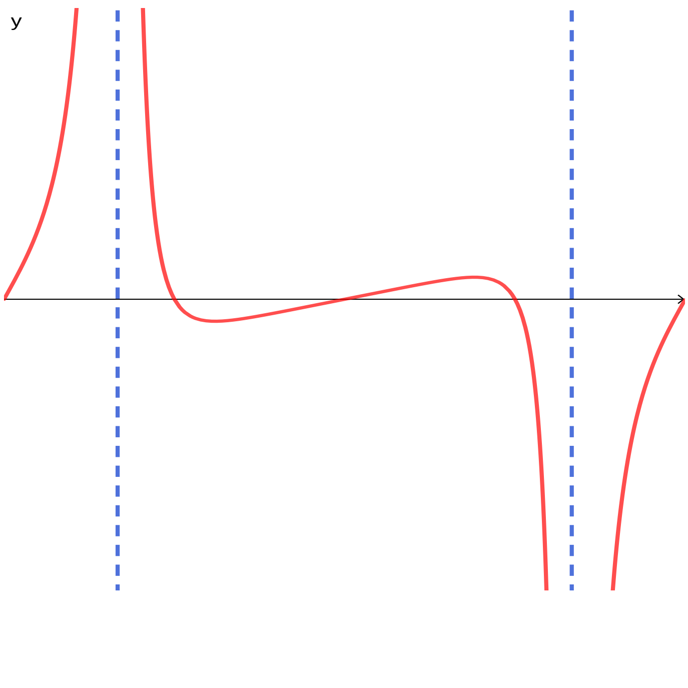
Dunque le rette $x=\pi/3$, $x=5\pi/3$ sono asintoti verticali bilateri per f.

Calcoliamo la derivata prima. Calcoli elementari mostrano che, per $x\neq\pi/3, x\neq 5\pi/3$, si ha:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\,\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)(1-2\cos x)-4\sin^2 x\cos x}{(1-2\cos x)^3} = -2\,\frac{\sin^2 x+2\cos^3 x-\cos^2 x+2\sin^2 x\cos x}{(1-2\cos x)^3}\\ &= -2\,\frac{1-\cos^2 x+2\cos^3 x-\cos^2 x+2(1-\cos^2 x)\cos x}{(1-2\cos x)^3} = 2\,\frac{2\cos^2 x-2\cos x-1}{(1-2\cos x)^3}.\end{aligned}$$

Il numeratore dell'ultima frazione scritta si annulla se e solo se $\cos x = (1\pm\sqrt{3})/2$. Ovviamente $\cos x = (1+\sqrt{3})/2$ non è mai verificato, mentre $\cos x = (1-\sqrt{3})/2$ ha luogo per opportuni $\alpha\in(\pi/2,\pi)$ e $\beta\in(\pi,3\pi/2)$ (si noti che $(1-\sqrt{3})/2\in(-1,0)$, e che α,β sono tra loro simmetrici rispetto al punto $x=\pi$). I punti $x=\alpha, x=\beta$ sono dunque stazionari per f. Il numeratore che compare nell'espressione di f' è positivo se e solo se $\cos x < (1-\sqrt{3})/2$, cioè se e solo se $x\in(\alpha,\beta)$. Il denominatore invece è positivo se e solo se $x\in(\pi/3,5\pi/3)$. Combinando tali informazioni si ottiene quanto segue relativamente al segno di f': $f'(x)>0$ se e solo se $x\in[0,\pi/3)\cup(\alpha,\beta)\cup(5\pi/3,2\pi)$, $f'(x)<0$ se e solo se $x\in(\pi/3,\alpha)\cup(\beta,5\pi/3)$. Dunque il punto $x=\alpha$ è di minimo relativo, mentre il punto $x=\beta$ è di massimo relativo.

Il grafico di f è il seguente:



4. (punti 8) Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x} - 1}.$$

(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 3, centrato in $x = 0$, di f.

(b) Stabilire, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, se il punto $x = 0$ è di massimo, di minimo, o se non è né di massimo né di minimo, per la funzione
$$g(x) = f(x) - ax - bx^2.$$

Soluzione. Vale, per $x \to 0$:

$$(1+\sin x)^2 = \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = 1 + 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
$$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1 - \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2 + \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 + o(x^3) = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3);$$
$$\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x} - 1 = \left[1 + 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right]\left[1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\right] - 1 = 3x + 4x^2 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3).$$

Quindi, ancora per per $x \to 0$:

$$e^{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x} - 1} = e^{3x+4x^2+\frac{7}{2}x^3+o(x^3)} = 1 + \left[3x + 4x^2 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[3x + 4x^2 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)\right]^2 + \frac{1}{6}\left[3x + 4x^2 + \frac{7}{2}x^3 + o(x^3)\right]^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + 3x + 4x^2 + \frac{7}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 12x^3 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) = 1 + 3x + \frac{17}{2}x^2 + 20x^3 + o(x^3).$$

Riguardo alla seconda parte si noti che da quanto svolto risulta, sempre per $x \to 0$:

$$f(x) - ax - bx^2 = 1 + (3-a)x + \left(\frac{17}{2} - b\right)x^2 + 20x^3 + o(x^3).$$

Dunque se $a \neq 3$ il punto $x = 0$ non è di estremo, mentre se $x = 3$ è di massimo se $\frac{17}{2} - b < 0$, cioè se $b > \frac{17}{2}$, di minimo se invece $b < \frac{17}{2}$, mentre se $a = 3$, $b = \frac{17}{2}$ di nuovo il punto $x = 0$ non è nè di massimo né di minimo.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 28/6/2022**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 5) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ così definita: $f(z) = e^{z^2}$.

- Determinare il luogo dei punti tali che $|f(z)| = 1$.
- Risolvere l'equazione $e^{z^2} = 1$.
- Mostrare che se $A \subset \mathbb{C}$ è un insieme limitato, cioè esiste $K > 0$ tale che $|z| \leq K$ per ogni $z \in A$, allora l'immagine $f(A) := \{w \in \mathbb{C}, w = f(z)\text{per qualche } z \in A\}$ è anch'esso un insieme limitato.

Soluzione. Sia $z = x+iy$. Allora $e^{z^2} = e^{x^2-y^2+2ixy} = e^{x^2-y^2}e^{2ixy}$. Quindi $|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2}$. Dunque la condizione $|f(z)| = 1$ ha luogo se e solo se $e^{x^2-y^2} = 1$, cioè se e solo se $x^2 - y^2 = 0$, cioè se e solo se $|y| = |x|$. Ne segue che il luogo cercato è l'unione delle due rette $y = x$ e $y = -x$, si tratta cioè dei numeri complessi del tipo $x + ix$ e $x - ix$ con $x \in \mathbb{R}$.

Circa il secondo punto, l'equazione data si scrive $e^{x^2-y^2}e^{2ixy} = 1$. Per il noto principio sull'identità di numeri complessi in forma esponenziale, ciò corrisponde a $x^2 = y^2$, cioè come sopra a $y = x$ oppure $y = -x$, e alla condizione $2xy = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dunque le soluzioni cercate sono i complessi del tipo $x + ix$ con $x = \pm\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, oppure della forma $x - ix$, sempre con $x = \pm\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, oltre che ovviamente il punto $z = 0$.

Dai calcoli precedenti sappiamo infine che $|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2}$. Se A è limitato, ovviamente è limitato (in $\mathbb{R}$) l'insieme delle parti reali degli $z \in A$, dunque esiste $C > 0$ tale che $|x| \leq C$ se $z = x+iy \in A$. Ma allora $|e^{z^2}| = e^{x^2-y^2} \leq e^{x^2} \leq e^{C^2}$.

2. (punti 9) Si considerino le matrici A_k e B così definite:

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ k & 2 & k \\ -k & 0 & 2-k \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale.

- Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli autovalori di A_k e i corrispondenti autospazi.
- Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che un autospazio della matrice A_k coincida con il nucleo della matrice B.

Soluzione.

- Polinomio caratteristico di A_k:

$$\begin{aligned} \det(A_k - \lambda \mathbb{I}) &= (2-\lambda)\left[(k+1-\lambda)(2-k-\lambda) + k(k-1)\right] = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

Sp $A = \left\{1, 2^2\right\}$. Determiniamo i corrispondenti autospazi.
Autospazio di A_k relativo a $\lambda = 2$: si risolve il sistema omogeneo

$$A_k - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ k & 0 & k \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio è dunque il piano di equazione $x + z = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$.
Autospazio di A_k relativo a $\lambda = 1$: si risolve il sistema omogeneo

$$A_k - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} k & 0 & k-1 \\ k & 1 & k \\ -k & 0 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui, se $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R},$$

mentre se $k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{k} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Per determinare il nucleo di B si risolve il sistema omogeneo

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui

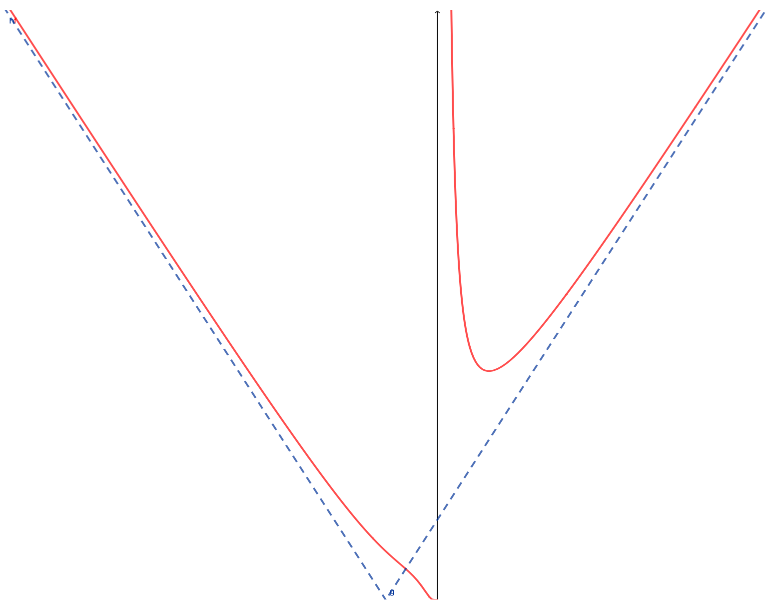
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Pertanto il nucleo di B è monodimensionale. Ricordiamo che l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$ di A_k è bidimensionale per ogni k, dunque esso non potrà mai coincidere con il nucleo di B. Riguardo all'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ di A_k, evidentemente esso non coincide con il nucleo di B per $k = 0$. Se $k \neq 0$, l'espressione esplicita dell'autospazio mostra che esso coincide con il nucleo di B se e solo se $\frac{k-1}{k} = 2$, ovvero se $k = -1$.

3. (punti 10) Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}\, e^{\frac{x+1}{x}}.$$
Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. L'argomento della radice è sempre positivo. Dunque la funzione è definita se e solo se $x \neq 0$. Non vi sono simmetrie evidenti, e la funzione è evidentemente sempre strettamente positiva. Vale:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Dunque la retta $x = 0$ è asintoto verticale destro per f. Verifichiamo l'eventuale esistenza di asintoti obliqui di f:
$$f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}e^{1+\frac{1}{x}} = e|x|\left[1+\frac{2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = e|x|\left[1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$
Dunque
$$f(x) = ex+2e+o(1) \ \text{ se } x\to+\infty$$
$$f(x) = -ex-2e+o(1) \ \text{ se } x\to-\infty.$$
Le rette $y = ex+2e$, $y = -ex-2e$ sono dunque asintoti obliqui per f se $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$ rispettivamente. Per maggior precisione, va notato che se si fosse considerato il termine successivo negli sviluppi precedenti, esso sarebbe stato del tipo c/x^2 per un opportuno $c>0$. Dunque, per $x\to\pm\infty$, la funzione sarà maggiore dei corrispondenti asintoti.

Calcoliamo la derivata di f. Vale, per $x\neq 0$:
$$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x}}\left[\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}} - \frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+2x+4}\right] = e^{\frac{x+1}{x}}\frac{(x+1)x^2-(x^2+2x+4)}{x^2\sqrt{x^2+2x+4}}$$
$$= e^{\frac{x+1}{x}}\frac{x^3-2x-4}{x^2\sqrt{x^2+2x+4}}.$$
Chiaramente il segno di f' coincide con quello del polinomio x^3-2x-4. Notiamo che $x=2$ è radice di tale polinomio e che, effettuando la divisione per $x-2$, si ottiene $x^3-2x-4 = (x-2)(x^2+2x+2)$. Poichè $x^2+2x+2>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, ne segue che $f'(x)>0$ se $x>2$, dunque f è ivi crescente, mentre $f'(x)<0$ per $x<0$ e per $x\in(0,2)$, dunque f è decrescente separatamente in ciascuno di tali intervalli. Il punto $x=2$ è di minimo relativo. Non vi sono minimi assoluti, in quanto $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, ma f non si annulla mai, e ovviamente non vi sono massimi assoluti in quanto f è illimitata dall'alto. Concludiamo notando che
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0,$$
in quanto l'esponenziale prevale sugli altri fattori, dunque il grafico di f si avvicina da sinistra all'origine con tangente che tende a diventare orizzontale. Il grafico di f è il seguente:



4. (punti 8) Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + (1+x)^{\frac{2}{3}}}.$$

- Calcolare le primitive di f .
- Posto
$$F(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s,$$
determinare il dominio di F e, inoltre, stabilire se i limiti di F alla frontiera del proprio dominio di definizione sono, o meno, finiti.

Soluzione. Poniamo $(1+x)^{\frac{1}{6}} = t$. Si ha $1+x = t^6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Quindi:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (1+x)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}t &= \int \frac{6t^5}{t^3+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{6t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \left(6t - 6 + \frac{6}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= 3t^2 - 6t + 6\log|1+t| + c \\ &= 3(1+x)^{\frac{1}{3}} - 6(1+x)^{\frac{1}{6}} + 6\log\left[1 + (1+x)^{\frac{1}{6}}\right] + c,\end{aligned}$$
dove c è una costante arbitraria e dove il modulo non è necessario nell'ultimo logaritmo in quanto il suo argomento è per costruzione positivo.

Sulla seconda domanda notiamo prima di tutto che occorre individuare gli x per cui il denominatore si annulla. Ciò accade, usando la variabile t prima introdotta, se e solo se $t^3 + t^4 = 0$, cioè se e solo se $t = 0$ oppure $t = -1$. Ma $t = (1+s)^{1/6} \geq 0$, dunque $t = -1$ non è accettabile. Rimane il caso $t = 0$, ovvero $s = -1$, che è quindi il solo in cui il denominatore si annulla. Chiaramente, la funzione integranda è definita solo per $s > -1$, dunque non essendoci altri zeri del denominatore ne segue che il dominio di F è l'intervallo $(-1, +\infty$.

Studiamo ora i limiti di F per $x \to -1$ e per $x \to +\infty$. Per $s \to -1$ avremo:
$$\frac{1}{\sqrt{1+s} + (1+s)^{\frac{2}{3}}} \underset{s\to-1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+s}}$$
in quanto $1/2 < 2/3$. La funzione $(1+s)^{-1/2}$ è positiva e integrabile in senso improprio in un intorno destro di $s = -1$, dunque l'integrale improprio
$$\int_{-1}^0 f(s)\,\mathrm{d}s$$
esiste finito per il criterio del confronto asintotico. Quindi F ammette limite finito per $x \to -1$. Se $s \to +\infty$, si ha
$$\frac{1}{\sqrt{1+s} + (1+s)^{\frac{2}{3}}} \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(1+s)^{\frac{2}{3}}}$$
sempre in quanto $1/2 < 2/3$. La funzione $(1+s)^{-\frac{2}{3}}$ non è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$. Essendo essa positiva, di nuovo per il criterio del confronto asintotico si ha
$$\int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s = +\infty,$$
e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi Matematica 1 e Geometria, Versione A		**Prova scritta del 31/08/2022**
Cognome:	**Nome:**	**Codice persona:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova lo studente non può consultare né avere con sé testi, appunti, calcolatrici, telefoni cellulari o altre apparecchiature elettroniche.**

1. (punti 5). Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$:

$$f(z) = z\, e^{-i\overline{z}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Calcolare il modulo di $f(z)$ in termini della rappresentazione cartesiana e, separatamente, di quella trigonometrica di z. Successivamente, calcolare una fase di $f(z)$ in termini della rappresentazione trigonometrica di z.
- Stabilire se l'equazione $f(z) = \overline{z}$ ammette soluzioni reali o soluzioni immaginarie, e in caso affermativo calcolarle.
- Si ponga, per ogni $R > 0$,
$$C_R := \max\{|f(z)|, z \in \mathbb{C}, |z| = R\}.$$
Calcolare il valore di C_R e mostrare che $C_R \to +\infty$ se $R \to +\infty$.

Soluzione.

- Scriviamo, posto $z = x + iy$:
$$|f(z)| = |z\, e^{-i\overline{z}}| = |z|\, |e^{-i(x-iy)}| = |z|\, |e^{-ix-y}| = |z|\, e^{-y} = \sqrt{x^2+y^2}e^{-y}.$$
Da ciò segue anche che, posto $z = \varrho e^{i\vartheta}$, si ha $|f(z)| = \varrho e^{-\varrho \sin\vartheta}$. Per quanto riguarda la fase, in modo simile a quanto sopra si ottiene
$$f(z) = z\, e^{-i\overline{z}} = \varrho e^{i\vartheta}\, e^{-i(x-iy)} = \varrho e^{-y}\, e^{i(\vartheta - x)} = \varrho e^{-\varrho\sin\vartheta}\, e^{i(\vartheta - \varrho\cos\vartheta)}.$$
Dunque, essendo $|f(z)| = \varrho e^{-\varrho\sin\vartheta}$, ne segue che una fase di $f(z)$ è $\vartheta - \varrho\cos\vartheta$.
- Se $z = x \in \mathbb{R}$, allora $\overline{z} = z$ e l'equazione si scrive, per $z \neq 0$ (ovviamente $z = 0$ è soluzione dell'equazione): $e^{-ix} = 1$. Tale equazione è verificata se e solo se $z = x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (si noti che ciò include la soluzione banale $z = 0$ già considerata). Se invece $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$, allora $\overline{z} = -z$ e l'equazione data si scrive, se $z \neq 0$ (soluzione già considerata), come $e^{-i\overline{z}} = -1$, cioè come $e^{-y} = -1$, con $y \in \mathbb{R}$. Ovviamente tale equazione non ha soluzioni.
- Abbiamo calcolato nel primo punto che $|f(z)| = \sqrt{x^2+y^2}e^{-y}$. Se $|z| = R$, allora $z = Re^{i\vartheta}$ per un opportuno $\vartheta \in [0, 2\pi)$, e quindi $|f(z)| = R\, e^{-R\sin\vartheta}$. Fissato $R > 0$, la quantità appena scritta è massima per $\vartheta = 3\pi/2$, in cui vale $R\, e^{R}$. Quindi $C_R = R\, e^{R} \to +\infty$ se $R \to +\infty$.

2. (punti 10) Stabilire per quali valori del parametro reale k la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Soluzione. Scambiando le due righe centrali e le due colonne centrali si ottiene:

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & k^2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - \lambda - 6)\left[(1-\lambda)^2 - k^2\right]$$

ponendo uguale a zero il polinomio caratteristico si ottrengono i seguenti autovalori $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_{3,4} = 1 \pm k$. Si hanno autovalori non semplici solo se vale: $1 \pm k = -2$ oppure se: $1 \pm k = 3$, oppure ancora se $1 + k = 1 - k$ vale a dire se $k = \pm 3 \vee k = \pm 2 \vee k = 0$. Si noti che la matrice dipende segnatamente da k^2 .

Nel caso $k = \pm 3$ (ovvero se $k^2 = 9$) lo spettro di A è $\mathrm{Sp}\, A = \left\{-2^2, 3, 4\right\}$
Relativamente all'autovalore -2 , l'operatore:

$$A - \lambda\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il rango dell'operatore $A + 2\mathbb{I}$ è due (righe proporzionali a due a due), dunque la matrice è diagonalizzabile.

Nel caso $k = \pm 2$ (ovvero se $k^2 = 4$) lo spettro di A è $\mathrm{Sp}\, A = \left\{-2, -1, 3^2\right\}$
Relativamente all'autovalore 3 , l'operatore:

$$A - \lambda\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ancora, il rango dell'operatore $A - 3\mathbb{I}$ è due, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Nel caso $k = 0$ lo spettro di A è $\mathrm{Sp}\, A = \left\{-2, 1^2, 3\right\}$
Relativamente all'autovalore 1 , l'operatore:

$$A - \lambda\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il rango dell'operatore $A - 1\mathbb{I}$ è tre, infatti sono presenti minori di ordine tre non nulli.

Se $k^2 \neq 9 \wedge k^2 \neq 4 \wedge k \neq 0$ gli autolvalori sono tutti semplici pertanto la matrice è diagonalizzabile.

In conclusione la matrice è diagonalizzabile se $k \neq 0$.

3. (punti 10) Studiare la funzione:

$$f(x) = \log \left|2x - \log \left(e^x + 4e^{-x}\right)\right| .$$

Lo studio del segno di f va svolto solo qualitativamente. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione. Determiniamo in primo luogo l'insieme di definizione. Il logaritmo più interno è ovviamente sempre definito, in quanto $e^x + 4e^{-x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. La funzione quindi non è definita solo per gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $2x = \log(e^x + 4e^{-x})$. Tale equazione si riscrive, prendendo gli esponenziali di entrambi i membri (si ricordi che l'esponenziale è iniettivo), come $e^{2x} = e^x + 4e^{-x}$, ovvero come $e^{3x} - e^{2x} - 4 = 0$. Posto $t = e^x$ ciò equivale a $t^3 - t^2 - 4 = 0$. Notando che $= 2$ è soluzione di tale equazione ed effettuando la divisione si ha che deve valere $0 = t^3 - t^2 - 4 = (t-2)(t^2+t+2)$, e ciò accade se e solo se $t = 2$, cioè se e solo se $x = \log 2$. Dunque la funzione è definita per $x \neq \log 2$.

Notiamo, per un uso seguente, che $t^2 + t + 2 > 0$ per ogni t, e quindi il polinomio $t^3 - t^2 - 4 = (t-2)(t^2+t+2)$ ha il segno di $t - 2$, dunque positivo se $t > 2$, negativo per $t < 2$. Quindi, tornando alla variabile x, si ha

$$2x > \log\left(e^x + 4e^{-x}\right) \Longleftrightarrow e^{2x} > e^x + 4e^{-x} \Longleftrightarrow \frac{e^{3x} - e^{2x} - 4}{e^x} > 0 \Longleftrightarrow e^{3x} - e^{2x} - 4 > 0.$$

Ne segue in conclusione che

$$2x - \log\left(e^x + 4e^{-x}\right) > 0 \Longleftrightarrow x > \log 2; \quad 2x - \log\left(e^x + 4e^{-x}\right) < 0 \Longleftrightarrow x < \log 2. \tag{1}$$

Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio di definizione. Poiché dai calcoli precedenti e dalla continuità delle funzioni coinvolte segue che $2x - \log(e^x + 4e^{-x}) \to 0$, si ha che

$$\lim_{x \to \log 2^{\pm}} = -\infty,$$

quindi la retta $x = \log 2$ è asintoto verticale bilatero per f. Inoltre, è immediato verificare che

$$2x - \log\left(e^x + 4e^{-x}\right) \sim \begin{cases} x & \text{se } x \to +\infty \\ 3x & \text{se } x \to -\infty. \end{cases}$$

Ne segue dunque che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

e inoltre che non vi sono asintoti obliqui, perché da quanto svolto segue che $f(x) \sim \log x$ per $x \to \pm\infty$.

Rimandiamo lo studio del segno al termine dei calcoli, ma notiamo almeno che $f(0) = \log\log 5 > 0$.

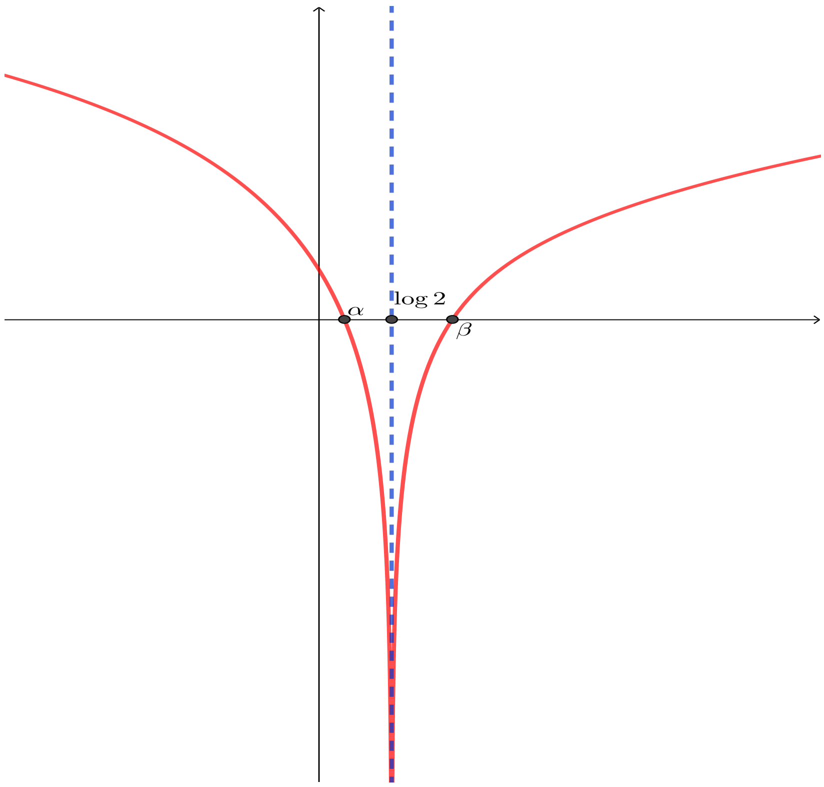
La funzione è derivabile nel suo dominio di definizione, in quanto l'argomento del logaritmo più esterno cambia segno solo nel punto $x = \log 2$ in cui f non è definita. Calcoliamo quindi, per $x \neq \log 2$:

$$f'(x) = \frac{1}{2x - \log(e^x + 4e^{-x})} \left[2 - \frac{e^x - 4e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}}\right] = \frac{1}{2x - \log(e^x + 4e^{-x})} \frac{e^x + 12e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}}.$$

Ciò mostra che il segno di f' coincide con quello della quantità $2x - \log(e^x + 4e^{-x})$, che è però stato determinato in (1). Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x > \log 2$, dunque f è ivi crescente, mentre $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \log 2$, dunque f è ivi decrescente.

Le informazioni sulla monotonia e sui limiti di f permettono infine di effettuare lo studio qualitativo del segno di f. Infatti, essendo f continua dove definita, ne segue che esistono esattamente due punti α, β, con $\alpha < \log 2$ e $\beta > \log 2$, in cui $f(x) = 0$, e che $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1\beta$ oppure $x < \alpha$, mentre $f(x) < 0$ se e solo se $x \in (\alpha, beta)$, $x \neq \log 2$. Si può anche notare che $\alpha \in (0, \log 2)$, in quanto $f(0) > 0$.

Il grafico di f è il seguente:



α
$\log 2$
β

4. (punti 7) Calcolare, al variare del parametro $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 + 12\log\left[3 - \sin(x^2) - 2\cos x\right]}{\sin\left(x^6 + x^a\right)}.$$

Soluzione. Sviluppiamo il numeratore. Vale, per $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
3 - \sin(x^2) - 2\cos x &= 3 - \left[x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^4)\right] - 2\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^4)\right] \\
&= 1 - \frac{x^4}{12} + \frac{61}{360}x^6 + o(x^6); \\
12\log\left[3 - \sin(x^2) - 2\cos x\right] &= 12\log\left[1 - \frac{x^4}{12} + \frac{61}{360}x^6 + o(x^6)\right] = 12\left[-\frac{x^4}{12} + \frac{61}{360}x^6 + o(x^6)\right] \\
&= -x^4 + \frac{61}{30}x^6 + o(x^6); \\
x^4 + 12\log\left[3 - \sin(x^2) - 2\cos x\right] &= \frac{61}{30}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Riguardo al denominatore ovviamente si ha, per $x \to 0^+$, essendo $\sin t \sim t$ per $t \to 0$:

$$\sin\left(x^6 + x^a\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \begin{cases} x^a & \text{se } a \in (0,6) \\ 2x^6 & \text{se } a = 6 \\ x^6 & \text{se } a > 6. \end{cases}$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 + 12\log\left[3 - \sin(x^2) - 2\cos x\right]}{\sin\left(x^6 + x^a\right)} = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in (0,6) \\ \frac{61}{60} & \text{se } a = 6 \\ \frac{61}{30} & \text{se } a > 6. \end{cases}$$