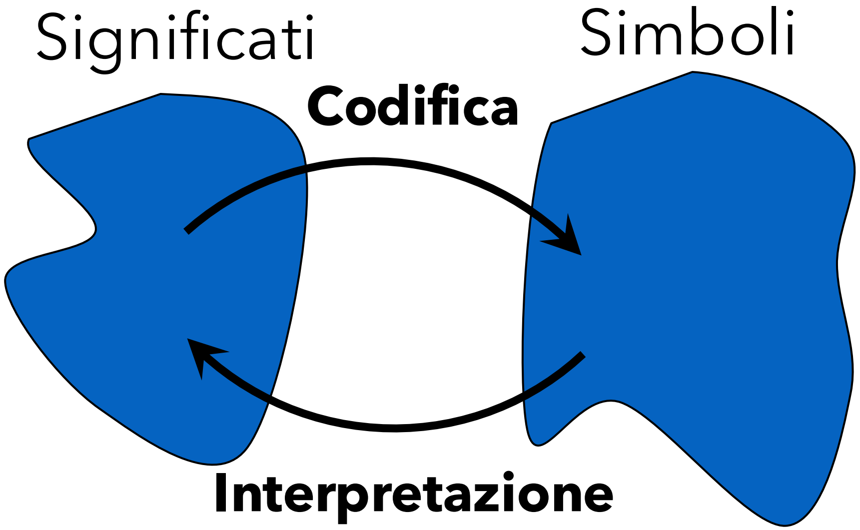
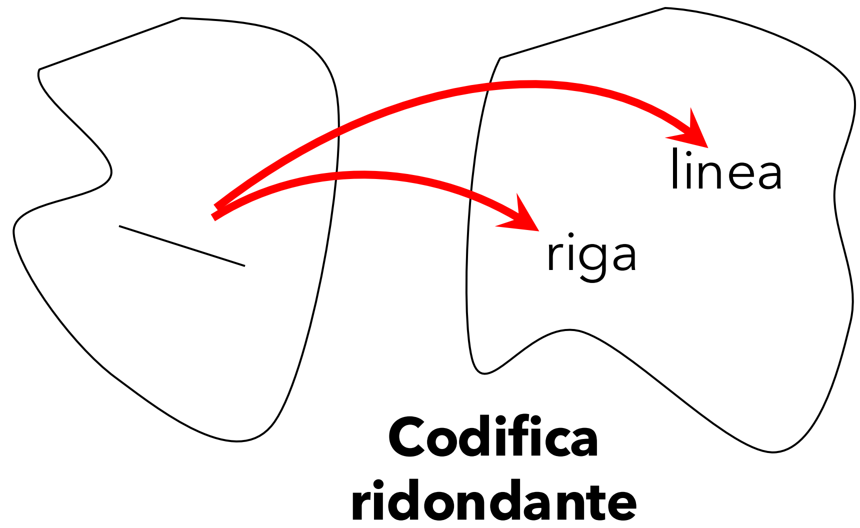
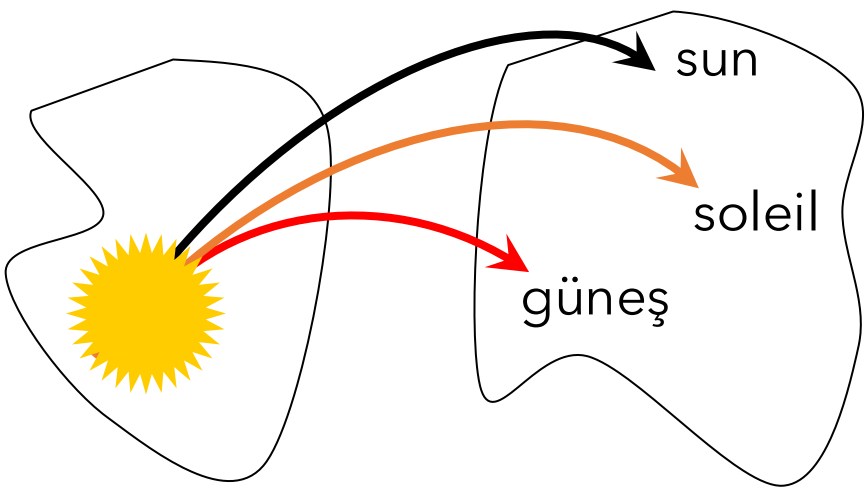
Codifica binaria dell’Informazione Aritmetica del Calcolatore

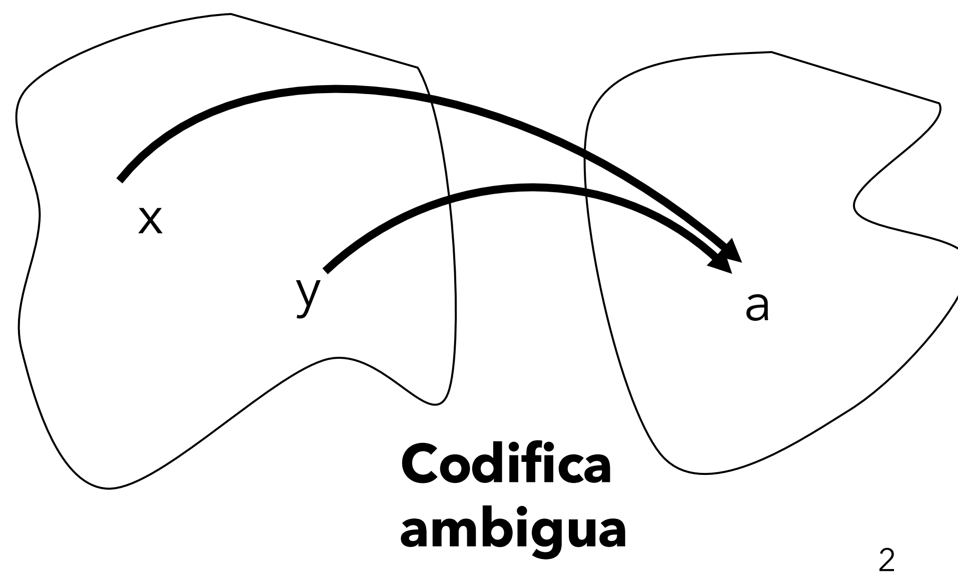
Credits to A. Fuggetta, A. Campi e P. Pinoli

Codificare e interpretare









Codifica dell’informazione

- Rappresentare (codificare) le informazioni
  - con un insieme limitato di simboli (detto *alfabeto* A)
  - in modo non ambiguo (algoritmi di traduzione tra codifiche)
- Esempio: numeri interi
  - Codifica decimale (**dec**, in base dieci)
  - A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, |A| = dieci
    - “sette” : 7_{dec}
    - “ventitre” : 23_{dec}
    - “centotrentotto” : 138_{dec}
  - Notazione *posizionale*
    - dalla cifra più significativa a quella meno significativa
    - ogni cifra corrisponde a una diversa potenza di dieci
    - $138_{dec}=8*10^0 + 3*10^1 + 1*10^2$

Numeri naturali

- *Notazione posizionale*: permette di rappresentare un qualsiasi numero naturale (intero non negativo) nel modo seguente:

  la sequenza di **cifre c_i**:

  $$c_n \; c_{n-1} \; \ldots \; c_1$$

  rappresenta in **base B** ≥ 2 il valore:

  $$c_n \times B^{n-1} + c_{n-1} \times B^{n-2} + \ldots + c_1 \times B^0$$

  avendosi: $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, B-1\}$ per ogni $1 \leq i \leq n$
- La notazione decimale tradizionale è di tipo posizionale (ovviamente con B = dieci)
- Esistono notazioni non posizionali
  - Ad esempio i numeri romani: II IV VI XV XX ~~VV~~

Numeri naturali in varie basi

- Base generica: B
  - A = { ... }, con |A| = B, sequenze di *n* simboli (cifre)
  - $c_n\, c_{n-1} \dots c_2\, c_1 = c_n \times B^{n-1} + \dots + c_2 \times B^1 + c_1 \times B^0$
  - Con n cifre rappresentiamo B^n numeri: da 0 a B^n-1
- "ventinove" in varie basi
  - B = otto A = {0,1,2,3,4,5,6,7} $29_{10} = 35_8$
  - B = cinque A = {0,1,2,3,4} $29_{10} = 104_5$
  - B = tre A = {0,1,2} $29_{10} = 1002_3$
  - B = sedici A = {0,1,...,8,9,A,B,C,D,E,F} $29_{10} = 1D_{16}$
- Codifiche notevoli
  - Esadecimale (sedici), ottale (otto), binaria (due)

Codifica dei numeri naturali

- Considerato un sistema in base $\mathtt{B}$ in cui abbiamo N cifre per rappresentare un numero, quanti elementi (numeri) distinti possiamo rappresentare?

$$\mathtt{B}^{N}$$

- Al contrario, se dobbiamo rappresentare $\mathtt{M}$ numeri distinti, di quante cifre abbiamo bisogno?

$$\lceil log_{B}(M) \rceil$$

$\lceil \ \rceil$ = parte intera superiore

Codifica binaria

- Ogni dato o elemento di un dato è rappresentato come una sequenza di caratteri dell'alfabeto binario A= {0,1}.
- Le principali motivazioni sono:
  - All'inizio dell'informatica applicata, era più semplice costruire computer con due soli valori per ogni elemento (1 = acceso, 0 = spento)
  - Un sistema con solo due stati è molto affidabile
  - Le operazioni logiche sono facili da implementare nei circuiti
- Importante: solitamente i computer usano una sequenza di lunghezza fissa per rappresentare ciascun dato o componente

Codifica binaria

- B = 2, **A = { 0, 1 }**
- **BIT** (crasi di “BInary digIT”):
  - unità **elementare** di informazione
- *Numeri binari naturali:*

  la sequenza di **bit b_i** (cifre binarie):

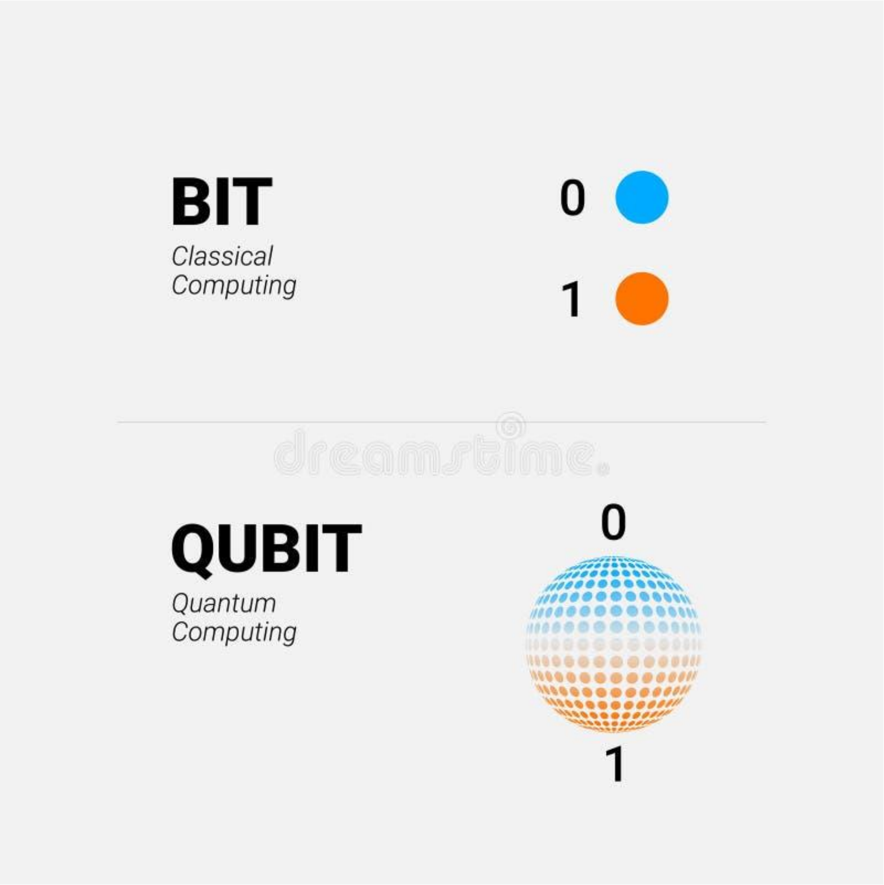
  $$b_n \; b_{n-1} \; \ldots \; b_1 \qquad \text{con } b_i \in \{0, 1\}$$

  rappresenta in base 2 il valore:

  $$b_n \times 2^{n-1} + b_{n-1} \times 2^{n-2} + \ldots + b_1 \times 2^0$$

Quantum bits (qubit)

- Un qubit è l'unità fondamentale di informazione nella computazione quantistica
- Può esistere in una sovrapposizione di entrambi gli stati 0 e 1 contemporaneamente
- Possono elaborare una quantità maggiore di informazioni
- Possono essere fisicamente realizzati tramite vari sistemi, come elettroni, fotoni o atomi



Numeri naturali binari (bin)

- Con n bit codifichiamo 2^n numeri: da 0 a 2^n-1
- Con 1 Byte (cioè una sequenza di 8 bit):
  - $00000000_{bin} = 0_{dec}$
  - $00001000_{bin} = 1 \times 2^3 = 8_{dec}$
  - $00101011_{bin} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 43_{dec}$
  - $11111111_{bin} = \Sigma_{n = 1,2,3,4,5,6,7,8} \; 1 \times 2^{n-1} = 255_{dec}$
- Conversione bin $\rightarrow$ dec e dec $\rightarrow$ bin
  - bin$\rightarrow$dec: $11101_{bin} = \Sigma_i \, b_i 2^{i-1} = 2^4+2^3+2^2+2^0 = 29_{dec}$
  - dec$\rightarrow$bin: ***metodo dei resti***

Conversione dec → bin

Si calcolano i resti delle divisioni per due

In pratica basta:

1. Decidere se il numero è pari (resto 0) oppure dispari (resto 1), e annotare il resto
2. Dimezzare il numero (trascurando il resto)
3. Ripartire dal punto 1. fino a ottenere 0 come risultato della divisione

$$
\begin{aligned}
19 : 2 &\rightarrow 1 \\
9 : 2 &\rightarrow 1 \\
4 : 2 &\rightarrow 0 \\
2 : 2 &\rightarrow 0 \\
1 : 2 &\rightarrow 1
\end{aligned}
$$

si ottiene 1: fine

$$\mathbf{19_{dec} = 10011_{bin}}$$

Ecco un esempio, per quanto modesto, di **algoritmo**

Metodo dei resti

29 : 2 = 14 (1)
14 : 2 = 7 (0)
7 : 2 = 3 (1)
3 : 2 = 1 (1)
1 : 2 = **0** (1)

$29_{dec} = 11101_{bin}$

76 : 2 = 38 (0)
38 : 2 = 19 (0)
19 : 2 = 9 (1)
9 : 2 = 4 (1)
4 : 2 = 2 (0)
2 : 2 = 1 (0)
1 : 2 = **0** (1)

$76_{dec} = 1001100_{bin}$

Del resto 76 = 19x4 = **10011**00
Per raddoppiare, in base due, si aggiunge uno zero in coda, così come si fa in base dieci per decuplicare

N.B. Il metodo funziona con tutte le basi!

$29_{10}=45_6=32_9=27_{11}=21_{14}=10_{29}$

Conversioni rapide bin → dec

- In binario si definisce una *notazione abbreviata*, sulla falsariga del sistema metrico-decimale:

K	$= 2^{10}$	$= 1.024 \approx 10^3$	(Kilo)
M	$= 2^{20}$	$= 1.048.576 \approx 10^6$	(Mega)
G	$= 2^{30}$	$= 1.073.741.824 \approx 10^9$	(Giga)
T	$= 2^{40}$	$= 1.099.511.627.776 \approx 10^{12}$	(Tera)

- È curioso (benché *non* sia casuale) come K, M, G e T in base 2 abbiano valori molto prossimi ai corrispondenti simboli del sistema metrico decimale, tipico delle scienze fisiche e dell'ingegneria
- L'errore risulta $< 10\ \%$ (infatti la seconda cifra è sempre 0)

Ma allora…

- Diventa molto facile e quindi *rapido* calcolare il valore *decimale approssimato* delle *potenze di 2*, anche se hanno esponente grande
- Infatti basta:
  - *Tenere a mente* l'elenco dei valori esatti delle prime dieci potenze di 2 **[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]**
  - *Scomporre* in modo *additivo* l'esponente in contributi di valore 10, 20, 30 o 40, "leggendoli" come successioni di simboli K, M, G oppure T

Tenendo presente che:

$2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$

Vai su **wooclap.com** e usa il codice **DBKUKE**

(In coppia)...

1. 64,000
2. 128,000
3. 17,000

Clicca sullo schermo di proiezione per avviare la domanda

wooclap

100 %

0 / 0

Tenendo presente che:

$2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$,
$2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$

Vai su **wooclap.com** e usa il codice **DBKUKE**

(In coppia)...

$2^{24}=$ 1

$2^{35}=$ 2

$2^{48}=$ 3

Clicca sullo schermo di proiezione per avviare la domanda

wooclap

100 %

0 / 0

Aumento e riduzione dei bit in bin

- ***Aumento*** dei bit
  - premettendo in modo progressivo un bit 0 a sinistra, il valore del numero non muta

$4_{dec} = 100_{bin} = 0100_{bin} = 00100_{bin} = \ldots 000000000100_{bin}$
$5_{dec} = 101_{bin} = 0101_{bin} = 00101_{bin} = \ldots 000000000101_{bin}$

- ***Riduzione*** dei bit
  - cancellando in modo progressivo un bit 0 a sinistra, il valore del numero non muta, *ma bisogna arrestarsi quando si trova un bit* 1!

$7_{dec} = 00111_{bin} = 0111_{bin} = 111_{bin}$ STOP !
$2_{dec} = 00010_{bin} = 0010_{bin} = 010_{bin} = 10_{bin}$ STOP !

Numeri interi in modulo e segno (m&s)

- *Numeri binari interi* (positivi e negativi) *in modulo e segno* (**m&s**)
  - il primo bit a sinistra rappresenta il segno del numero (*bit di segno*), i bit rimanenti rappresentano il valore
    - 0 per il segno positivo
    - 1 per il segno negativo
- Esempi con n = 9 (8 bit + un bit per il segno)
  - $000000000_{m\&s} = +\ 0$
  - $000001000_{m\&s} = +\ 1 \times 2^3 = 8_{dec}$
  - $100001000_{m\&s} = -\ 1 \times 2^3 = -8_{dec}$
  - … e così via …

Osservazioni sul m&s

- Il bit di segno è *applicato* al numero rappresentato, ma non fa propriamente *parte* del numero in quanto tale
  - il bit di segno non ha significato numerico
- *Distaccando* il bit di segno, i bit rimanenti rappresentano il **valore assoluto** del numero
  - che è intrinsecamente positivo

Quiz

Intervallo

Fonte: PlaygroundAI

Il complemento a 2 (C_2)

- *Numeri interi in complemento a* 2: il C_2 è *un* sistema binario, ma il primo bit (quello a sinistra, il più significativo **MSB**) ha *peso negativo*, mentre tutti gli altri bit hanno peso positivo
- La sequenza di bit:

$$b_n\, b_{n-1} \ldots b_1$$

rappresenta in C_2 il valore:

$$-b_n \times 2^{n-1} + b_{n-1} \times 2^{n-2} + \ldots + b_1 \times 2^0$$

Il bit più a sinistra è ancora chiamato *bit di segno*

Numeri a tre bit in C_2

- $000_{C2} = -0\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = \ 0_{dec}$
- $001_{C2} = -0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = \ 1_{dec}$
- $010_{C2} = -0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = \ 2_{dec}$
- $011_{C2} = -0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = \ 2+1 = 3_{dec}$
- $100_{C2} = -1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = -4_{dec}$
- $101_{C2} = -1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = -4+1 = -3_{dec}$
- $110_{C2} = -1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = -4+2 = -2_{dec}$
- $111_{C2} = -1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = -4+2+1 = -1_{dec}$

N.B.: in base al bit di segno lo zero è considerato positivo

Interi relativi in m&s e C_2

Se usiamo 1 Byte (8-bit): da –128 a 127

dec.	m&s	C_2
127	**0**1111111	**0**1111111
126	**0**1111110	**0**1111110
…	…	…
2	**0**0000010	**0**0000010
1	**0**0000001	**0**0000001
+0	**0**0000000	**0**0000000
-0	**1**0000000	**-**
-1	**1**0000001	**1**1111111
-2	**1**0000010	**1**1111110
…	…	…
-126	**1**1111110	**1**0000010
-127	**1**1111111	**1**0000001
-128	**-**	**1**0000000

Il complemento a 2 (C_2): perché?

- Utilizzato anche da Von Neumann (1945)
- Esiste anche il complemento a 1
  - I numeri positivi si rappresentano normalmente
  - I numeri negativi si ottengono invertendo i bit della versione positiva
  - Problema del «doppio zero»
- I **circuiti di addizione e sottrazione** non guardano il segno ma usano un solo circuito (**sommatore**)
- Tecnologie più semplici e con maggiore precisione

Invertire un numero in C_2

- L'*inverso additivo* (o *opposto*) –N di un numero N rappresentato in C_2 si ottiene:
  - Invertendo (negando) ogni bit del numero
  - Sommando 1 alla posizione meno significativa e ignorando l'overflow
- Esempio:
  - $01011_{C2} = 1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0 = 8+2+1 = 11_{dec}$
  - $10100 + 1 = 10101_{C2} = -1\times2^4+1\times2^2+1\times2^0 = -16+4+1 = -11_{dec}$

Invertire un numero in C_2

Esercizio

1. Invertire $11011_{C2} = -5_{dec}$
2. Si verifichi che con due applicazioni dell'algoritmo si riottiene il numero iniziale [–(–N) = N] e che lo zero in C2 è (correttamente) opposto di se stesso [–0 = 0]

Conversione dec $\rightarrow C_2$

- Se $D_{dec} \geq 0$:
  - Converti D_{dec} in binario naturale.
  - Premetti il bit 0 alla sequenza di bit ottenuta.
  - Esempio: $154_{dec} \Rightarrow 10011010_{bin} \Rightarrow 010011010_{C2}$
- Se $D_{dec} < 0$:
  - Trascura il segno e converti D_{dec} in binario naturale
  - Premetti il bit 0 alla sequenza di bit ottenuta
  - Calcola l'opposto del numero così ottenuto, secondo la procedura di inversione in C_2
  - Esempio: $-154_{dec} \Rightarrow 154_{dec} \Rightarrow 10011010_{bin} \Rightarrow$
    $\Rightarrow 010011010_{bin} \Rightarrow 101100101 + 1 \Rightarrow 101100110_{C2}$
- Occorrono 9 bit sia per 154_{dec} che per -154_{dec}

Aumento e riduzione dei bit in C_2

- ***Estensione*** del segno:
  - *replicando* in modo progressivo il bit di segno a sinistra, il valore del numero non muta

$4 = 0100 = 00100 = 00000100 = \ldots$ (indefinitamente)

$-5 = 1011 = 11011 = 11111011 = \ldots$ (indefinitamente)

$-1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0$

$-1\times2^4+1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0$

- ***Contrazione*** del segno:
  - *cancellando* in modo progressivo il bit di segno a sinistra, il valore del numero non muta
  - *purché il bit di segno non abbia a invertirsi* !

$7 = 000111 = 00111 = 0111$ **STOP**! (111 è < 0)

$-3 = 111101 = 11101 = 1101 = 101$ **STOP**! (01 è > 0)

Osservazioni sul C_2

- Il segno è *incorporato* nel numero rappresentato in C_2, non è semplicemente *applicato* (come in m&s)
- Il bit più significativo *rivela* il segno: 0 per numero positivo, 1 per numero negativo (il numero zero è considerato positivo), ma…
- **NON** si può *distaccare* il bit più significativo e dire che i bit rimanenti rappresentano il valore assoluto del numero
  - questo è ancora vero, però, <u>se il numero è positivo</u>

Intervalli di rappresentazione

- Binario naturale a $n \geq 1$ bit: $[0, 2^n-1]$
- Modulo e segno a $n \geq 2$ bit: $[-2^{n-1}-1, 2^{n-1}-1]$
- C_2 a $n \geq 2$ bit: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
    - In modulo e segno, il numero zero ha due rappresentazioni *equivalenti* (00..0, 10..0)
    - L'intervallo del C_2 è *asimmetrico* (-2^{n-1} è compreso, 2^{n-1} è escluso); poco male …

Operazioni – <u>numeri binari naturali</u>

Algorimo di “addizione a propagazione dei riporti”

È l’algoritmo decimale elementare, adattato alla base 2

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto			1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	156_{dec}
Somma	1	1	1	0	1	0	0	1		233_{dec}

addizione naturale (a 8 bit)

Operazioni – numeri binari naturali

overflow (o *trabocco*)

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto 1	1	1	1	1	1					
Addendo 1	0	1	1	1	1	1	0	1	+	125_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	156_{dec}
Somma	0	0	0	1	1	0	0	1		25_{dec} !

Riporto "perduto"

overflow

risultato errato!

addizione **naturale** con overflow

Riporto e overflow (addizione naturali)

- Si ha ***overflow*** quando il risultato corretto dell'addizione eccede il potere di rappresentazione dei bit a disposizione
  - 8 bit nell'esempio precedente
- Nell'addizione tra numeri binari naturali si ha overflow **ogni volta** che si genera un riporto addizionando i bit della colonna più significativa (riporto "perduto")

Operazioni – numeri C_2

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto			1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	1	0	0	1	1	1	0	0	=	-100_{dec}
Somma	1	1	1	0	1	0	0	1		-23_{dec}

addizione ***algebrica*** (a 8 bit)

L'algoritmo è ***identico*** a quello naturale

(come se il primo bit non avesse peso negativo)

Operazioni – numeri C_2

ancora overflow

Pesi	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*		
Riporto	1		1	1	1					
Addendo 1	0	1	0	0	1	1	0	1	+	77_{dec}
Addendo 2	0	1	0	1	1	1	0	0	=	92_{dec}
Somma	1	0	1	0	1	0	0	1		-87_{dec} !

nessun riporto "perduto"

Overflow:
risultato negativo!

risultato errato!

addizione **algebrica** con overflow

Riporto e overflow in C_2 (addizione algebrica)

- Si ha ***overflow*** quando il risultato corretto dell'addizione eccede il potere di rappresentazione dei bit a disposizione
  - La definizione di overflow non cambia
- Si può avere overflow senza "riporto perduto"
  - Capita quando da due addendi positivi otteniamo un risultato negativo, come nell'esempio precedente
- Si può avere un "riporto perduto" senza overflow
  - Può essere un innocuo effetto collaterale
  - Capita quando due addendi discordi generano un risultato positivo

Esercizio

1. Si può avere un "riporto perduto" senza overflow
   - **Si provi a sommare +12 e -7**

Quando non si verifica **mai** l'overflow?

Rilevare l'overflow in C_2

- Se gli addendi sono tra loro ***discordi*** (di segno diverso) non si verifica mai
- Se gli addendi sono tra loro ***concordi***, si verifica se e solo se il risultato è discorde
  - addendi positivi ma risultato negativo
  - addendi negativi ma risultato positivo
- Criterio di controllo facile da applicare!

Intervallo

Fonte: PlaygroundAI

Rappresentazione ottale e esadecimale

- *Ottale* o in base otto (oct):
  - Si usano solo le cifre 0-7

    $534_{oct} = 5_{oct}\times 8_{dec}{}^{2} + 3_{oct}\times 8_{dec}{}^{1} + 4_{oct}\times 8_{dec}{}^{0} = 348_{dec}$
- *Esadecimale* o in base sedici (hex):
  - Si usano le cifre 0-9 e le lettere A-F per i valori 10-15

    $$\begin{aligned} B7F_{hex} &= B_{hex}\times 16_{dec}{}^{2} + 7_{hex}\times 16_{dec}{}^{1} + F_{hex}\times 16_{dec}{}^{0} = \\ &= 11_{dec}\times 16_{dec}{}^{2} + 7_{dec}\times 16_{dec}{}^{1} + 15_{dec}\times 16_{dec}{}^{0} = 2943_{dec} \end{aligned}$$
- Entrambe queste basi sono facili da convertire in binario, e viceversa

Conversioni bin → hex e hex → bin

- Converti: 010011110101011011_{bin} =

  $0001_{bin}\ 0011_{bin}\ 1101_{bin}\ 0101_{bin}\ 1011_{bin}$ =

  = 1_{dec} 3_{dec} 13_{dec} 5_{dec} 11_{dec} =

  = 1_{hex} 3_{hex} D_{hex} 5_{hex} B_{hex} =

  = $13D5B_{hex}$
- Converti: $A7B40C_{hex}$

  A_{hex} 7_{hex} B_{hex} 4_{hex} 0_{hex} C_{hex} =

  = 10_{dec} 7_{dec} 11_{dec} 4_{dec} 0_{dec} 12_{dec} =

  = 1010_{bin} 0111_{bin} 1011_{bin} 0100_{bin} 0000_{bin} 1100_{bin} =

  = $101001111011010000001100_{bin}$
- Provate a convertire anche
  - oct → bin, dec → hex, dec → oct

Numeri frazionari in virgola fissa

- $0{,}1011_{bin}$ (in binario)

  $0{,}1011_{bin} = 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4} = 1/2 + 1/8 + 1/16 =$

  $= 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 0{,}6875_{dec}$

- Si può rappresentare un numero frazionario in *virgola fissa* (o *fixed point*) nel modo seguente:

  $19{,}6875_{dec} = 10011{,}1011_{\text{virgola fissa}}$

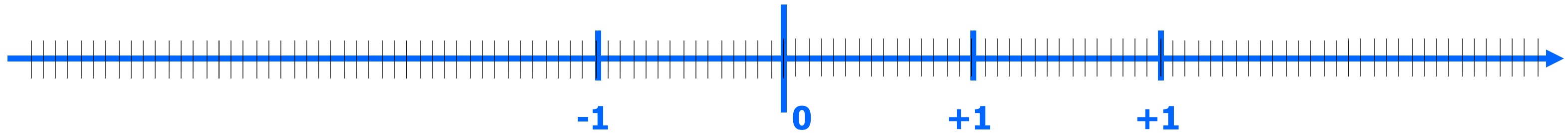
  poiché si ha:

  $19_{dec} = 10011_{bin}$ e $0{,}6875_{dec} = 0{,}1011_{bin}$

proporzione fissa:

5 bit per la parte intera, 4 bit per quella frazionaria

- Avremo 2^9 diversi valori codificati, e avremo 2^4 valori tra 0 e 1, 2^4 valori tra 1 e 2, … e così via, con tutti i valori distribuiti su un asse a distanze regolari



Numeri frazionari in virgola fissa

- La sequenza di bit rappresentante un numero frazionario consta di due parti di lunghezza prefissata
- Il numero di bit a sinistra e a destra della virgola è stabilito a priori, anche se alcuni bit restassero nulli
- È un sistema di rappresentazione semplice, ma poco flessibile, e può condurre a sprechi di bit
- Per rappresentare in virgola fissa numeri molto grandi (o molto precisi) occorrono molti bit
- La precisione nell'intorno dell'origine e lontano dall'origine è la stessa
- Anche se su numeri molto grandi in valore assoluto la parte frazionaria può non essere particolarmente significativa

Numeri frazionari in virgola mobile

- La rappresentazione in *virgola mobile* (o *floating point*) è usata spesso in base 10 (si chiama allora *notazione scientifica*):

  $0{,}137 \times 10^8$ $_{\text{notazione scientifica}}$ per intendere $13.700.000_{dec}$

- La rappresentazione si basa sulla relazione

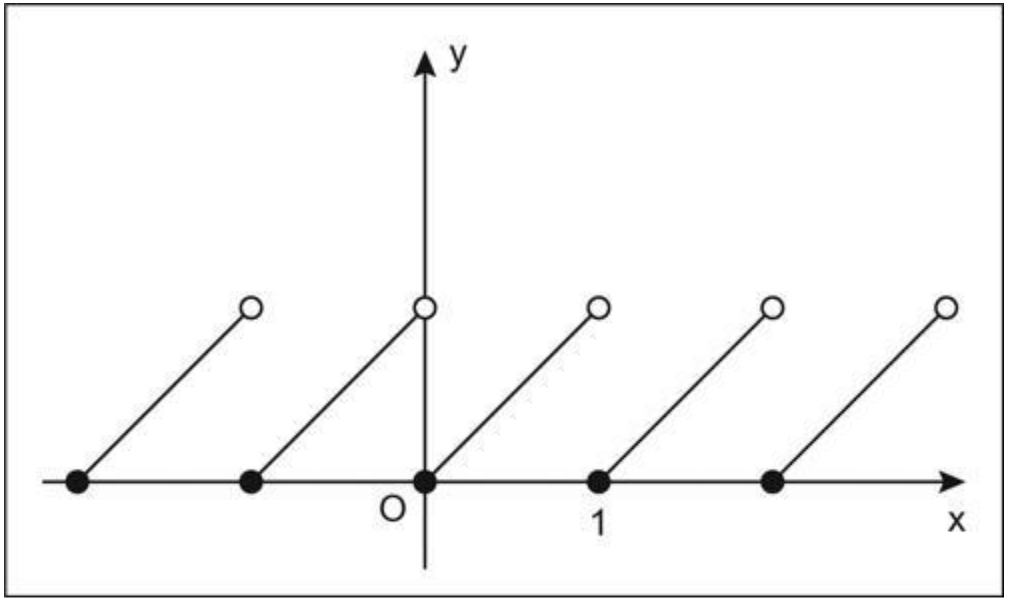
  $$\mathbf{R_{virgola\ mobile} = M \times B^E}$$ [attenzione: ***non*** $(M x B)^E$]

- In binario, si utilizzano **m** ≥ 1 bit per la ***mantissa M*** e **n** ≥ 1 bit per **l'*esponente E***
  - mantissa: un numero frazionario (tra -1 e +1)
  - la base B non è rappresentata (è implicita)
  - in totale si usano m + n bit

Mantissa (o parte frazionaria)

- Funzione reale di variabile reale, indicata con `mant(x)`, definita come differenza tra `x` e la sua parte intera `[x]`:

$$\mathrm{mant}(x) = x - [x]$$



Fonte: Treccani

Numeri frazionari in virgola mobile

- Esempio
  - Supponiamo B=2, m=3 bit, n=3 bit, M ed E in binario naturale
    $M = 011_2$ ed $E = 010_2$
    $R_{\text{virgola mobile}} = 0{,}011 \times 2^{010} = (1/4 + 1/8) \times 2^2 = 3/8 \times 4 = 3/2 = 1{,}5_{dec}$
- M ed E possono anche essere negativi
  - Normalmente infatti si usa il *modulo e segno* per M, mentre per E si usa la rappresentazione cosiddetta *in eccesso*
- **Vantaggi della virgola mobile**
  - si possono rappresentare con pochi bit numeri molto grandi **oppure** molto precisi (cioè con molti decimali)
  - Sull'asse dei valori i numeri rappresentabili si affollano nell'intorno dello zero, e sono sempre più sparsi al crescere del valore assoluto

ATTENZIONE (i pericoli dei *floating points*)

- **Approssimazione**
  - $0{,}375 \times 10^7 + 0{,}241 \times 10^3 = 0{,}3750241 \times 10^7 \approx 0{,}375 \times 10^7$
- Ma, in virgola mobile, *se disponiamo di poche cifre per la mantissa:*
  - $0{,}375 \times 10^7 + 0{,}241 \times 10^3 = 0{,}375 \times 10^7$
  - del resto sarebbe sbagliato approssimare a $0{,}374 \times 10^7$ o $0{,}376 \times 10^7$
- Definiamo un ciclo che ripete la somma un milione di volte…
  - Inizia con $\mathbf{X = 0{,}375 \times 10^7}$
  - Ripeti 1.000.000 di volte $\mathbf{X = X + 0{,}241 \times 10^3}$ (*incremento non intero*)
  - Alla fine **dovrebbe essere** $X = 0{,}375 \times 10^7 + (0{,}241 \times 10^3 \times 10^6) \approx 0{,}245 \times 10^9$
- **Ma**, in virgola mobile…
  - Il contributo delle singole somme (una alla volta) si perde del tutto!
  - Il risultato **resta** $\mathbf{0{,}375 \times 10^7}$, sbagliato di due ordini di grandezza (*underflow*)
  - Scrivendo programmi che trattano valori rappresentati in virgola mobile è **necessario** essere consapevoli dei limiti di rappresentazione
  - Lo stesso è vero con gli interi (rischio di overflow)

Aritmetica standard

- Quasi tutti i calcolatori oggi adottano lo *standard aritmetico* **IEEE 754**, che definisce:
  - I *formati di rappresentazione* binario naturale, C_2 e virgola mobile
  - Gli *algoritmi* di somma, sottrazione, prodotto, ecc, per tutti i formati previsti
  - I metodi di *arrotondamento* per numeri frazionari
  - Come trattare gli *errori* (overflow, divisione per 0, radice quadrata di numeri negativi, …)
- Grazie a IEEE 754, i programmi sono *trasportabili* tra calcolatori diversi senza che cambino né i *risultati* né la *precisione* dei calcoli svolti dal programma stesso

Standard IEEE 754-1985

L'idea e' di rappresentare un numero con virgola nella sua notazione scientifica:

$$13{,}564 = 0{,}\boxed{13564} * 10\text{^}\boxed{(2)}$$

$$0{,}00343 = 0{,}\boxed{343} * 10\text{^}\boxed{(-2)}$$

ESPONENTE

MANTISSA

Nello standard IEEE-754 **a precisione singola** abbiamo:
1 bit per il segno, 8 bit per l'esponente e 23 bit per la matita => totale 32 bit

Gradi di precisione

Previsti tre possibili gradi di precisione: singola, doppia, quadrupla

Campo	Precisione singola	Precisione doppia	Precisione quadrupla
ampiezza totale in bit di cui	32	64	128
Segno	1	1	1
Esponente	8	11	15
Mantissa	23	52	111
massimo E	255	2047	32767
minimo E	0	0	0
K	127	1023	16383

Il valore rappresentato vale quindi $X = (-1)^S \times 2^{E-K} \times 1.M$

Convertire un numero in virgola mobile con precisione singola

Conversione del numero **23,75**

Parte intera:
- Divido per 2
- Prendo il resto
- Fino a che ottengo 0

23 / 2 = 11 resto 1
11 / 2 = 5 resto 1
5 / 2 = 2 resto 1
2 / 2 = 1 resto 0
1 / 2 = 0 resto 1

Risultato 10111

Parte decimale:
- Moltiplico per 2
- Prendo la parte intera
- Fino a che ottengo 1

0,75 * 2 = 1,5 I = 1
0,5*2 = 1 I = 1

Risultato 11

Concateno:
10111,11
Sposto la virgola:
1,011111*2^4

Ottengo:
- **mantissa:** 011111
- **esponente**: 100

Convertire un numero in virgola mobile con precisione singola

Concateno:
10111,11
Sposto la virgola:
1,011111*2^4

Ottengo:
- **mantissa:** 011111
- **esponente**: 100

Il primo bit e' il segno: siccome il numero e' positivo il primo bit sara' **0**

Poi rappresento l'esponente in eccesso K, dove:

$K = 2^{\text{bit esponente} -1} - 1 \rightarrow 2^7 - 1 = 127$

Quindi ottengo 127+4 = 131 -> **10000011**

La mantissa la aggiungo semplicemente e completo gli 0 a destra

0	10000011	01111100000000000000000

Esempio

Esempio di rappresentazione in precisione singola

$X = 42.6875_{10} = 101010.1011_2 = 1.010101011 \times 2^5$

Si ha

$S = 0$ (1 bit)

$E = 5 + K = 5_{10} + 127_{10} = 132 = 10000100_2$ (8 bit)

$M = 01010101100000000000000$ (23 bit)

Da IEEE-754 a decimale

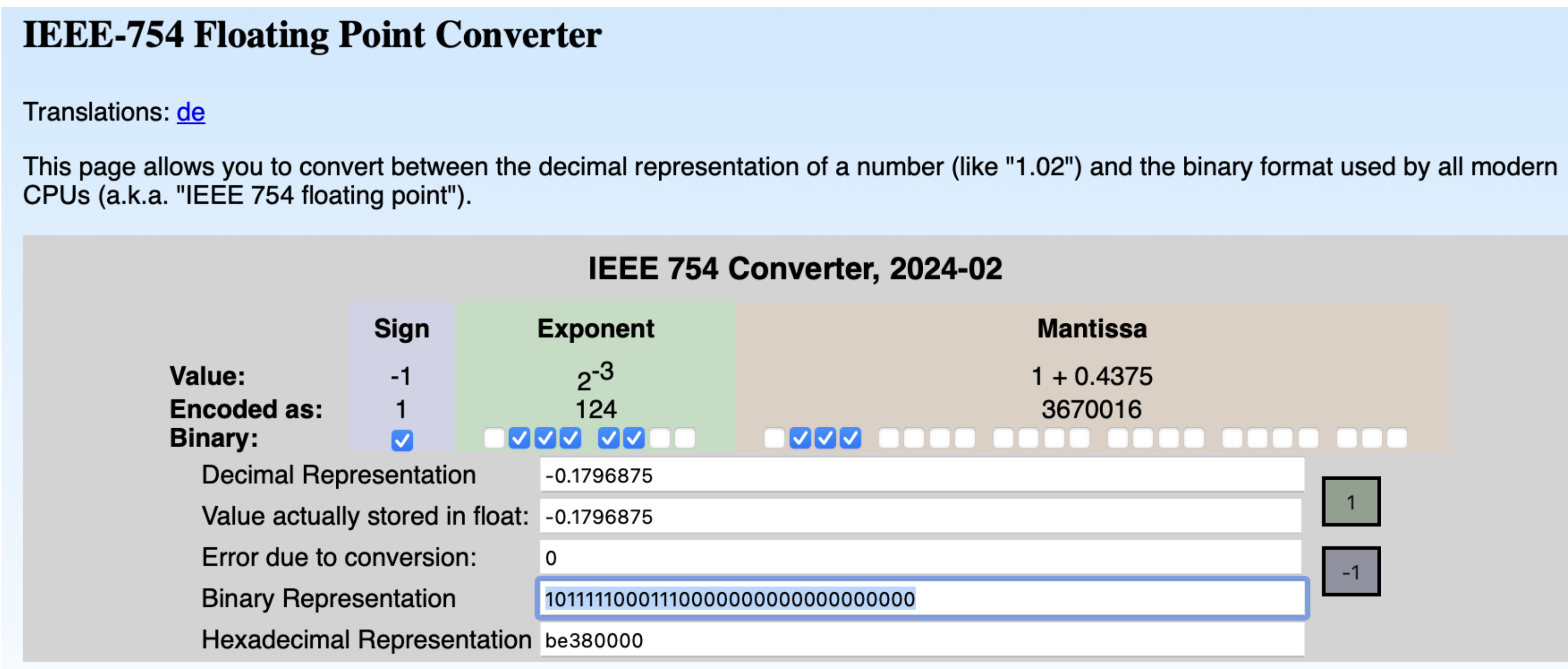
0	10000100	10111001000000000000000

- Risorsa utile: https://numeral-systems.com/ieee-754-converter/

1. Conversione esponente: $10000100_2 = 132_{10}$
   - Sottrazione *bias*: 132 – K = 132 – 127 = 5
2. Estensione della mantissa aggiungendo un "1."
   - 1.10111001000000000000000
3. Spostare il ".":
   - $1.10111001_2 \cdot 2^5 = 110111.001_2 \cdot 2^0$
4. Convertire la mantissa:
   - $110111.001_2 \triangleq 55.125_{10}$
5. Determinare il segno

Risorsa utile

- https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html



Proprietà fondamentali

- I circa 4 miliardi di configurazioni dei 32 bit usati consentono di coprire un campo di valori molto ampio grazie alla distribuzione non uniforme.
- Per numeri piccoli in valore assoluto valori rappresentati sono «fitti»,
- Per numeri grandi in valore assoluto valori rappresentati sono «diradati»

- Approssimativamente gli intervalli tra **valori contigui** sono
  - per valori di 10000 l’intervallo è di un millesimo
  - per valori di 10 milioni l’intervallo è di un’unità
  - per valori di 10 miliardi l’intervallo è di mille

Non solo numeri – codifica dei caratteri

- Nei calcolatori i caratteri vengono *codificati* mediante *sequenze* di $n \geq 1$ bit, ognuna rappresentante un carattere distinto
  - Corrispondenza biunivoca tra numeri e caratteri
- Codice ASCII (*American Standard Computer Interchange Interface*): utilizza $n=7$ bit per 128 caratteri
- Il codice ASCII a 7 bit è pensato per la lingua inglese. Si può estendere a 8 bit per rappresentare il doppio dei caratteri
  - Si aggiungono così, ad esempio, le lettere con i vari gradi di accento (come À, Á, Â, Ã, Ä, Å, ecc), necessarie in molte lingue europee, e altri simboli speciali ancora

Alcuni simboli del codice ASCII

# (in base 10)	Codifica (7 bit)	Carattere (o simbolo)
0	0000000	<terminator>
9	0001001	<tabulation>
10	0001010	<carriage return>
12	0001100	<sound bell>
13	0001101	<end of file>
32	0100000	blank space
33	0100001	!
49	0110001	1
50	0110010	2
64	1000000	@
65	1000001	A
66	1000010	B
97	1100000	a
98	1100001	b
126	1111110	~
127	1111111	·

Tabella ASCII

Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040		Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	$	$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174			|
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Source: www.LookupTables.com

Rilevare gli errori

- Spesso, quando il codice ASCII a 7 bit è usato in un calcolatore avente parole di memoria da un Byte (o suoi multipli), l'ottavo bit del Byte memorizzante il carattere funziona come *bit di parità*
- Il bit di parità serve per *rilevare* eventuali *errori* che potrebbero avere alterato la sequenza di bit, purché siano errori di tipo abbastanza semplice

Bit di parità (*parity bit*)

- Si aggiunge un bit extra, in modo che il numero di bit uguali a 1 sia sempre *pari*:

1100101 (quattro bit 1)	⇒ 11001010	(quattro bit 1)
0110111 (cinque bit 1)	⇒ 01101111	(sei bit 1)

- Se per errore un (solo) bit si *inverte*, il conteggio dei bit uguali a 1 dà valore *dispari*!
- Così si può rilevare l'*esistenza* di un errore da un bit (ma non localizzarne la posizione)
- Aggiungendo *più* bit extra (secondo schemi opportuni) si può anche *localizzare* l'errore
- Il bit di parità *non rileva* gli errori da due bit; ma sono meno frequenti di quelli da un bit

Esempi di trasmissione con parity bit

Trasmissione usando la parità pari:

```
A vuole trasmettere:                          1001
A calcola il bit di parità:                   1^0^0^1 = 0
A aggiunge il bit di parità e spedisce:       10010
B riceve:                                     10010
B calcola la parità totale:                   1^0^0^1^0 = 0
B può dire che la trasmissione è avvenuta correttamente.
```

Trasmissione usando la parità pari:

```
A vuole trasmettere:                          1001
A calcola il bit di parità:                   1^0^0^1 = 0
A aggiunge il bit di parità e spedisce:       10010
*** ERRORE DI TRASMISSIONE ***
B riceve:                                     11010
B calcola la parità totale:                   1^1^0^1^0 = 1
B può dire che è avvenuto un errore durante la trasmissione.
```

Altre codifiche alfanumeriche

- Codifica **ASCII** esteso a 8 bit (256 parole di codice). È la più usata.
- Codifica **FIELDATA** (6 bit, 64 parole codificate) Semplice ma compatta, storica
- Codifica **EBDC** (8 bit, 256 parole codificate) Usata per esempio nei nastri magnetici
- Codifiche **ISO-X** (rappresentano i sistemi di scrittura internazionali). P. es.: ISO-LATIN

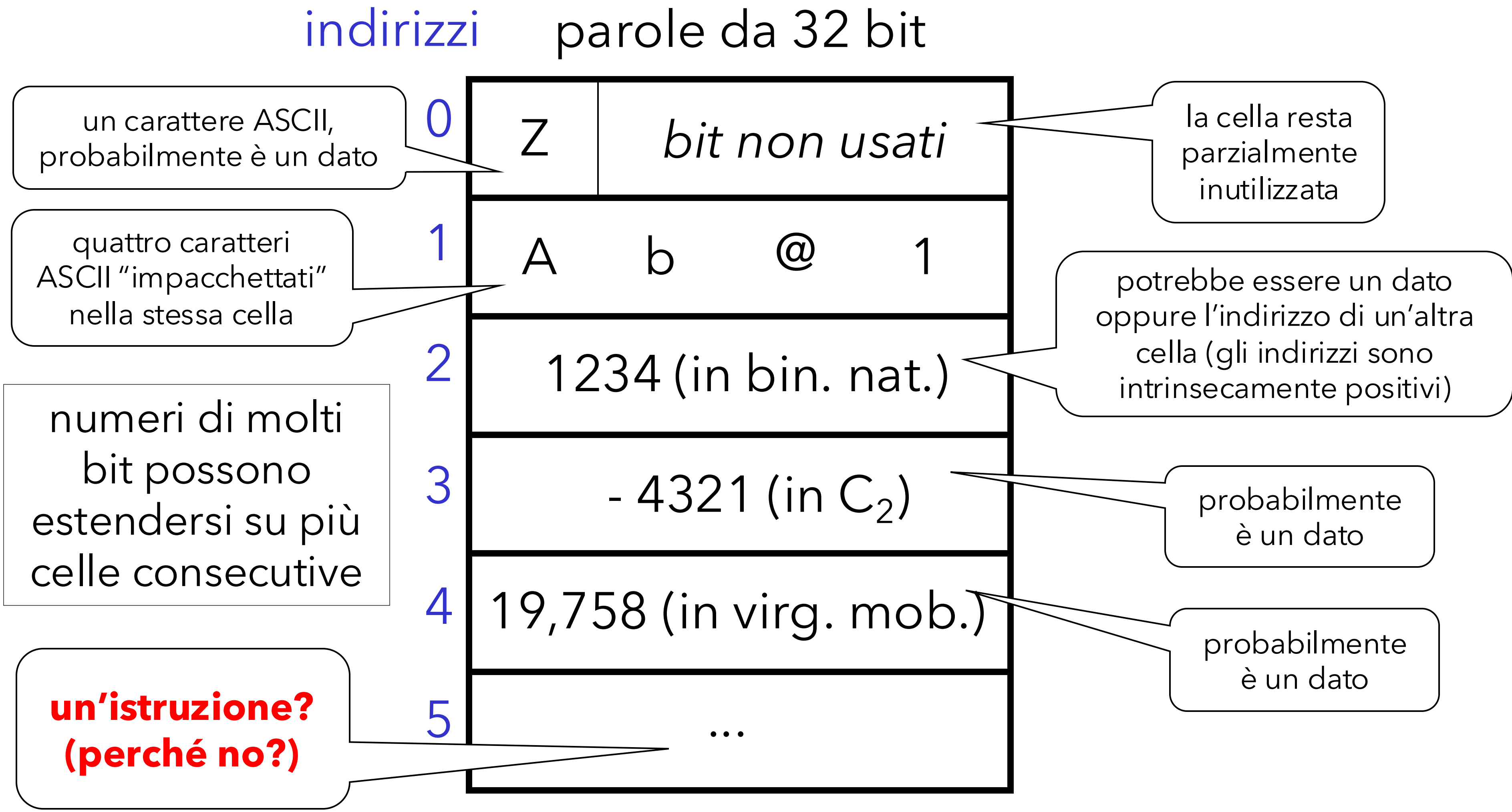
Codifica di testi, immagini, suoni

- Caratteri: sequenze di bit
  - Codice ASCII: utilizza 7(8) bit: 128(256) caratteri
  - 1 Byte (l’8° bit può essere usato per la *parità*)
- Testi: sequenze di caratteri (cioè di bit)
- Immagini: sequenze di bit
  - bitmap: sequenze di pixel (n bit, 2^n colori)
  - jpeg, gif, pcx, tiff, …
- Suoni (musica): sequenze di bit
  - wav, mid, mp3, ra, …
- Filmati: immagini + suoni
  - sequenze di …? … "rivoluzione" digitale

Dentro al calcolatore...informazione e memoria

- Una *parola di memoria* è in grado di contenere una *sequenza* di $n \geq 1$ bit
- Di solito si ha: $n = 8, 16, 32$ o 64 bit
- Una parola di memoria può dunque contenere gli *elementi d'informazione* seguenti:
  - Un carattere (o anche più di uno)
  - Un numero intero in binario naturale o in C_2
  - Un numero frazionario in virgola mobile
  - Alcuni bit della parola possono essere non usati
- Lo stesso può dirsi dei registri della CPU

Esempio


indirizzi
parole da 32 bit
0
Z
bit non usati
1
A
b
@
1
2
1234 (in bin. nat.)
3
- 4321 (in C_2)
4
19,758 (in virg. mob.)
5
...
un carattere ASCII, probabilmente è un dato
la cella resta parzialmente inutilizzata
quattro caratteri ASCII "impacchettati" nella stessa cella
potrebbe essere un dato oppure l'indirizzo di un'altra cella (gli indirizzi sono intrinsecamente positivi)
numeri di molti bit possono estendersi su più celle consecutive
probabilmente è un dato
probabilmente è un dato
un'istruzione? (perché no?)

Recap

- Conversione decimale $\rightarrow$ binario = regola dei resti
- Conversione binario $\rightarrow$ decimale = metodo potenze
- M&S e Complemento a 2 (C_2) per rappresentare numeri negativi
- Numeri frazionari in virgola fissa e mobile
- Codifica dei caratteri (tabella ASCII)