

Mathematics

➤ Lecture (1)

8/9/2017

1. 2nd Order equation

2. Sequences / متتابعات / متتاليات

3. Counting Methods طرق العد

➤ Lecture (2)

15/9/2017

1. Matrices مصفوفات

2. Solving equations using Matrices

➤ Lecture (3)

22/9/2017

1. Limits نهايات

2. Differentiations التفاضل

➤ Exam

29/9/2017

ملحوظة: الامتحان بالانجليزي.

Lecture (1)

➤ 2nd Order equation: معادله من الدرجة الثانية

$$a x^2 + b x + C = 0$$

معامل x^2

معامل x^1

معامل x^0

• أشارة الحد الثالث سالب:

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

1. حاصل ضربهما = الحد الثالث
2. أشارتهما مختلفة أى احدهما موجب والاخرى سالب
- وأشارة الاكبر نفس اشارة الحد الأوسط
3. الفرق حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

• أشارة الحد الثالث موجبة:

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

1. حاصل ضربهما = الحد الثالث
2. أشارتهما متشابهة نفس اشارة الحد الأوسط
3. مجموع حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

EX

Solve: $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ or } x + 3 = 0$$

$$x = -2 \text{ or } x = -3$$

$$S.S = \{-2, -3\}$$

Solve: $x^2 - x - 12 = 0$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ or } x - 4 = 0$$

$$x = -3 \text{ or } x = 4$$

$$S.S = \{-3, 4\}$$

Solve: $x^2 + 3x - 18 = 0$

$$(x - 3)(x + 6) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ or } x + 6 = 0$$

$$x = 3 \text{ or } x = -6$$

$$S.S = \{3, -6\}$$

Solve: $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ or } x - 5 = 0$$

$$x = 2 \text{ or } x = 5$$

$$S.S = \{2, 5\}$$

Rule (1)

- اذا لم يوجد قيمة ل x فى المعادله يتم حساب معادله الدرجة الثانية كما يالى:

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 \text{ جذر} \leftarrow (x-a)(x+a)$$

عكس اشارة المعادلة جذر a^2 نفس اشارة المعادلة

EX

Solve: $x^2 - 4 = 0$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ or } x + 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ or } x = -2$$

$$S.S = \{2, -2\}$$

Solve: $x^2 - 16 = 0$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ or } x + 4 = 0$$

$$x = 4 \text{ or } x = -4$$

$$S.S = \{4, -4\}$$

Rule (2)

إذا كان يوجد رقم بجوار x^2 في المعادلة يتم حساب معادله الدرجة الثانية كما يالى:

- إذا كانت إشارة الحد الثالث موجب يكون إشارة القوسين من نفس النوع الحد الثانى.
- إذا كانت إشارة الحد الثالث سالب يكون إشارة الرقم الأكبر نفس إشارة الحد الثانى و إشارة الرقم الأصغر عكس الإشارة

EX

Solve: $3x^2 + 5x - 2 = 0$

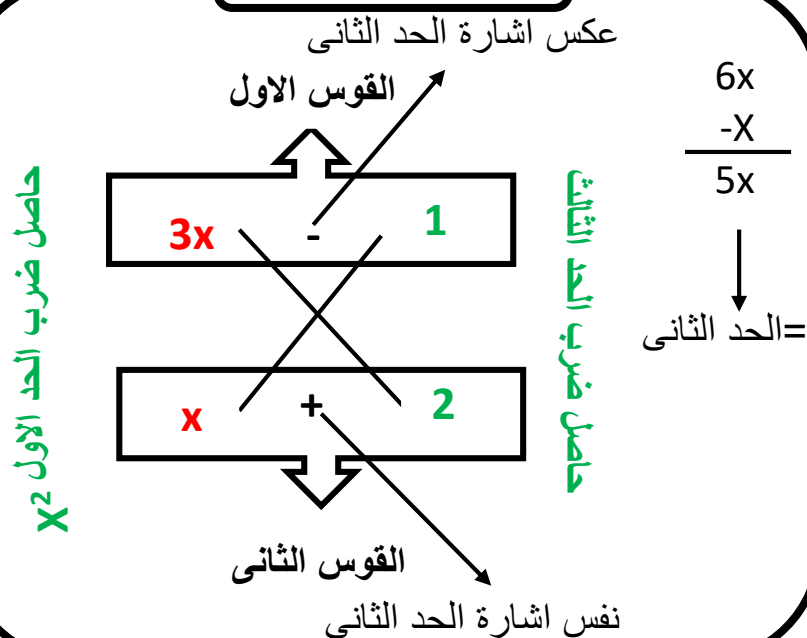
$(3x - 1)(x + 2) = 0$

$3x - 1 = 0$ or $x + 2 = 0$

$x = 1/3$ or $x = -2$

$S.S = \{1/3, -2\}$

الحد الثالث (سالب)



الحد الثالث (موجب)

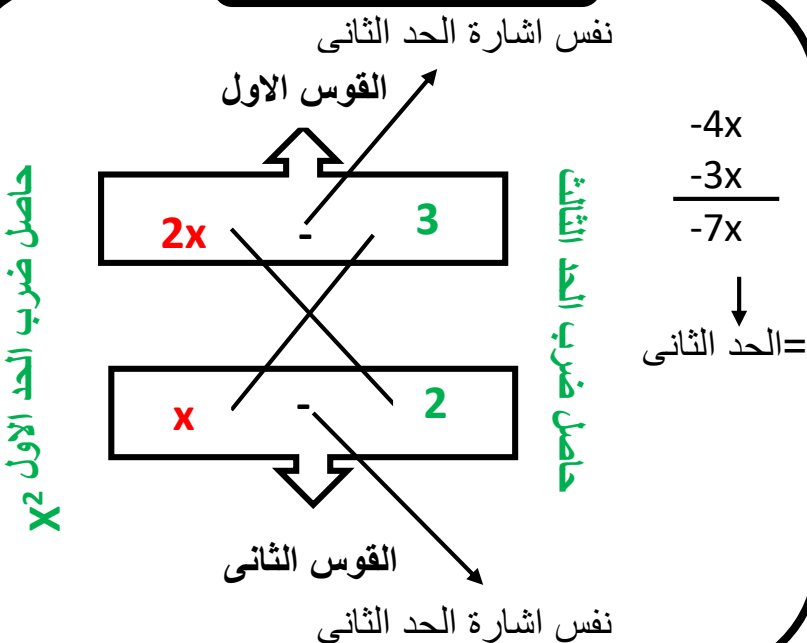
Solve: $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$(2x - 2)(x - 2) = 0$

$2x - 3 = 0$ or $x - 2 = 0$

$x = 3/2$ or $x = 2$

$S.S = \{1/2, 2\}$



Solve: $4x^2 + 5x - 21 = 0$

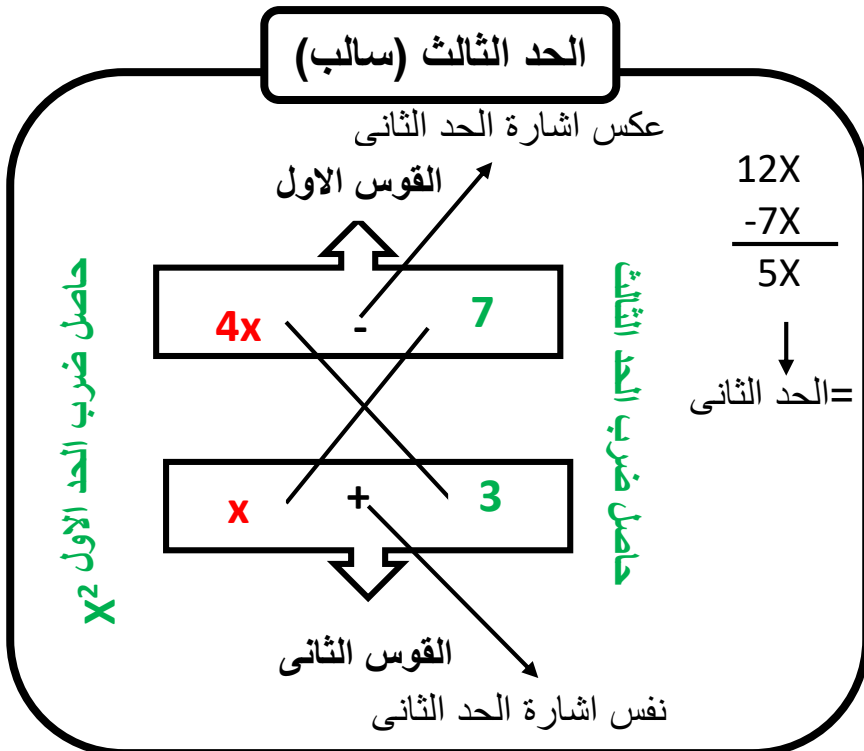
$(4x - 7)(x + 3) = 0$

$3x - 1 = 0$ or $x + 3 = 0$

$x = 1/3$ or $x = -3$

$S.S = \{1/3, -2\}$

الحد الثالث (سالِب)



الحد الثالث (موجب)

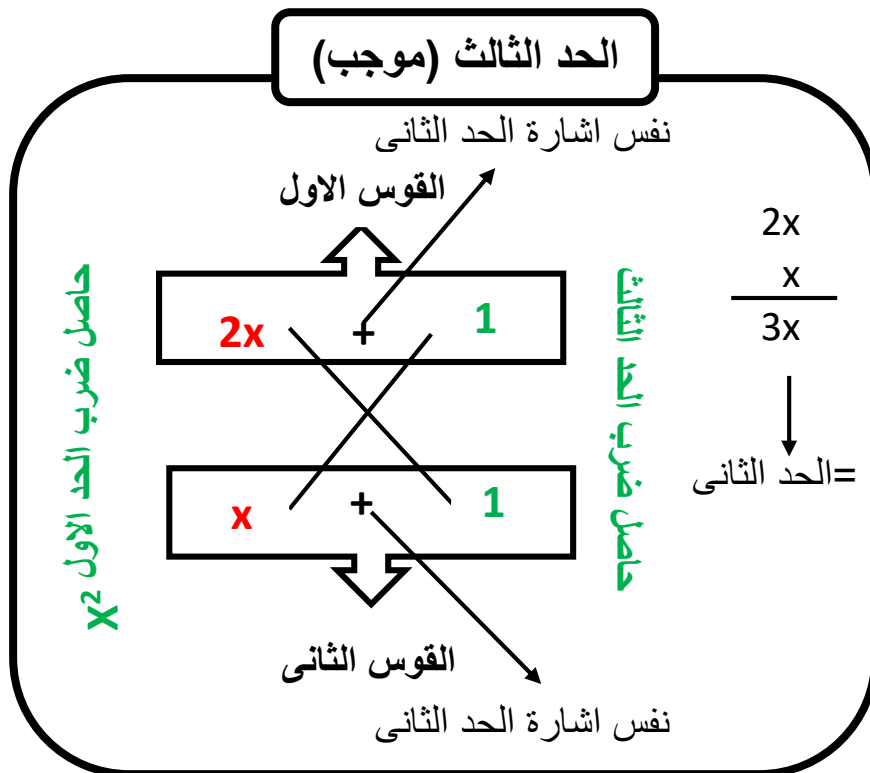
Solve: $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$(2x + 1)(x + 1) = 0$

$2x + 1 = 0$ or $x + 1 = 0$

$x = -1/2$ or $x = -1$

$S.S = \{-1/2, -1\}$



- يمكن حل معادلات الدرجة الثانية باستخدام القانون العام:

Rule (3)

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EX

Solve: $X^2 + 5x + 6 = 0$

$$a=1$$

$$b=5$$

$$c=6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$X = \frac{-5-1}{2}$$

or

$$X = \frac{-5+1}{2}$$

$$X = \frac{-6}{2}$$

or

$$X = \frac{-4}{2}$$

$$X = -3$$

or

$$X = -2$$

$$\{-3, -2\}$$

Solve: $4x^2 + 5x - 21 = 0$

$a=4$

$b=5$

$c=-21$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 4 \times -21}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 336}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{8}$$

$$= \frac{-5 \pm 19}{2}$$

$$x = \frac{-5 - 19}{8}$$

or

$$x = \frac{-5 + 19}{8}$$

$$x = \frac{-24}{8}$$

or

$$x = \frac{14}{8}$$

$x = -3$ or $x = \frac{7}{4}$

$\{-3, \frac{7}{4}\}$

➤ 3rd Order equation:

معادله من الدرجة الثالثة

$$x^3 \pm a^3 = 0$$

$$(x \pm a) (x^2 \pm ax + a^2)$$

\downarrow جذر x^3 \downarrow جذر a^3 \downarrow تربيع x \downarrow تربيع a
 نفس اشارة المعادلة عكس اشارة المعادلة

EX

Solve: $x^3 - 27 = 0$

$$(x - 3) (x^2 + 3x + 9) = 0$$

Solve: $x^3 + 8 = 0$

$$(x + 2) (x^2 - 2x + 4) = 0$$

➤ System of linear equation :

حل معادلات اكثر من مجهول

EX

Method (1)

Read only

Solve: $x + y = 10$

$$2x + y = 15$$

1. $x + y = 10$

$$x = 10 - y$$

2. $2x + y = 15$

$$2(10 - y) + y = 15$$

$$20 - 2y + y = 15$$

$$-y = -5$$

$$y = 5$$

3. $x + y = 10$

$$x + 5 = 10$$

$$x = 5$$

EX

Method (2)

Read only

Solve: $X+Y=10$

$$2X+Y=15$$

1

$$X + Y = 10$$

$$2X + Y = 15$$

$$X=5$$

2

$$X+Y=10$$

$$5+Y=10$$

$$Y=5$$

ملحوظة: لا يتم الحل بالطريقة الاولى او الطريقة الثانية فى الامتحان ، هناك طريقة ثالثة سيتم شرحها فى محاضرة التالية .

**Sequences:****المتواليات**

- 1 , 2 , 3 , 4 ,.....
- -1 , 1 , -1 , 1 ,.....
- 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 ,.....

**Arithmetic Sequences:****المتواليات الحسابيه**

- الفرق بين اى طرفين متتاليين للمتواليه يكون ثابت.

- 2 , 4 , 6 , 8 , 10 ,.....

↓
الحد الاول

First term

a = First term

d = base الفرق بين اى طرفين متتاليين فى المتواليه

- الشكل العام للمتواليه الحسابية:

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots$

1st $a_1 = a$

2nd $a_2 = a+d$

3rd $a_2 = a+2d$

4th $a_2 = a+3d$

- قانون الحد العام للمتواليه الحسابية:

$$a_n = a + (n-1)d$$

n = ترتيب الرقم في المتواليه

EX

• 2, 4, 6, 8, 10,

Find: a_{21} (21st term)

$a = 2$

$d = 2$

$n = 21$

$a_n = a + (n-1)d$

$a_{21} = 2 + (21-1)2$

$a_{21} = 2 + (20)2$

$a_{21} = 2 + 40$

$a_{21} = 42$

- مجموع للمتواليه الحسابية:

Sum of Arithmetic sequences

- لابد من تحديد نهاية المتواليه الحسابية المراد جمعها.

$$S_n = \frac{n}{2} (a + L) \rightarrow L = a + a(n-1)d$$

Frist term last term

OR

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

n = عدد الارقام المراد جمعها

EX

- 2, 4, 6, 8, 10,

Find: sum till 5 terms.

$$a = 2$$

$$d = 2$$

$$n = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} (2 \times 2 + (5-1)2)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} (4 + 4 \times 2)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} (4 + 8)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} \times 12$$

$$S_5 = 30$$

Find: sum till 50 terms.

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} (2 \times 2 + (50-1)2)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} (4 + 49 \times 2)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} (4 + 98)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} \times 102$$

$$S_{50} = 2550$$

EX

- Consider: 10, 7, 4, 1, -2,

Find: 1. 10th term.

2. Sum of the 1st to 30th term.

1

$$a = 10$$

$$d = -3$$

$$n = 10$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_{10} = 10 + (10-1) \cdot (-3)$$

$$a_{10} = 10 + 9 \times (-3)$$

$$a_{10} = 10 - 27$$

$$a_{10} = -17$$

2

$$a = 10$$

$$d = -3$$

$$n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} (2 \times 10 + (30-1) \cdot (-3))$$

$$S_{30} = 15 (20 + 29 \times (-3))$$

$$S_{30} = 15 (20 - 87)$$

$$S_{30} = 15 \times -67$$

$$S_{30} = -1005$$

- Consider: 1, 5, 9, 13,

Find: 1. 51st term.

2. Sum of the 1st to 51st term.

1

$$a = 1$$

$$d = 4$$

$$n = 51$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_{51} = 1 + (50 \times 4)$$

$$a_{51} = 1 + 200$$

$$a_{51} = 201$$

2

$a = 1$

$d = 4$

$n = 7$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$S_7 = \frac{7}{2} (2 + (6 \times 4))$$

$$S_7 = \frac{7}{2} (2 + 24)$$

$$S_7 = 91$$

➤ Geometric Sequences:

المتواليات الهندسية

- 2 , 4 , 8 , 16 , 32 ,

➤ الشكل العام للمتواليه الهندسية:

$$a , a r , a r^2 , a r^3 , a r^4 ,$$

$$1^{st} \quad a_1 = a$$

$$2^{nd} \quad a_2 = a r$$

$$3^{rd} \quad a_2 = a r^2$$

$$4^{th} \quad a_2 = a r^3$$

➤ قانون الحد العام للمتواليه الهندسية:

$$a_n = a r^{n-1}$$

ناتج قسمة اى طرفين متتاليين فى المتوالية = r

EX

- 2 , 4 , 8 , 16 , 32 ,

Find: a_4

$a = 2$

$r = 2$

$n = 4$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_4 = 2 \times 2^{4-1}$$

$$a_4 = 2 \times 2^3$$

$$a_4 = 2 \times 8$$

$$a_4 = 16$$

EX

• 1, 3, 9, 27,

Find: 10th term

$a=1$

$r=3$

$n = 10$

$a_n = a r^{n-1}$

$a_{10} = 1 \times 3^{10-1}$

$a_{10} = 1 \times 3^9$

$a_{10} = 19683$

Sum of Geometric sequences➤ مجموع للمتواليه الهندسية:➤ **Finite:**

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

- يمكن جمع المتواليه الهندسية الى ما لا نهاية اذا كانت قيمة r اقل من 1➤ **Infinite:**

$$S_n = \frac{a}{1 - r}$$

$|r| < 1$

↓
قيمة r بدون الاشارة

EX

• $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ **Find:** 1. 8th term2. Sum of 1th to 12 term

3. Sum of Geometric sequences

1

$$a = 1$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$n = 8$$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_{10} = 1 \times \frac{1}{2}^9$$

$$a_{10} = .0078$$

2

$$a = 1$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$n = 12$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

$$S_{12} = \frac{1(1 - \frac{1}{2}^{13})}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_{12} = \frac{1(1 - \frac{1}{2}^{13})}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{12} = \frac{.999}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{12} = 1.999$$

3

$$S_n = \frac{a}{1 - r}$$

$$S_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_{\infty} = 2$$

EX

• 5, 15, 45,

Find: 1. 7th term.

2. Sum of 1st to 10th term.

1

$$a = 5$$

$$r = 3$$

$$n = 7$$

$$a_n = a r^{n-1}$$

$$a_7 = 5 \times 3^6$$

$$a_7 = 5 \times 729$$

$$a_7 = 3645$$

2

$$a = 5$$

$$r = 3$$

$$n = 10$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

$$S_{12} = \frac{5(1 - 3^{11})}{1 - 3}$$

$$S_{12} = \frac{5(1 - 177147)}{2}$$

$$S_{12} = \frac{885730}{2}$$

$$S_{12} = 442865$$

Counting Methods

1. Multiplication Rule:

- If A_1 performed by "n" ways
- if A_2 performed by "m" way
- A_1 and A_2 could be performed by:

$n \times m$ ways

2. Factorial: $n!$

مضروب العدد

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots 3. 2. 1$$

EX

$$5! = 5.4.3.2.1 = \mathbf{120}$$

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = \mathbf{6(5!)}$$

$$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$$

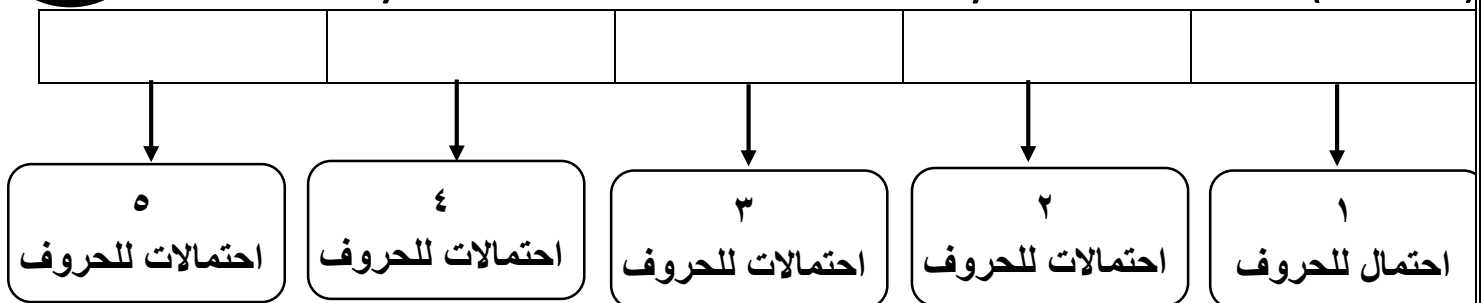
Notes

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

EX

How many words can be written by the letter of (water)



$$5! = 5.4.3.2.1 = \mathbf{120}$$

- لو فيه تكرار لحروف عدد الكلمات سوف يقل = (مضروب عدد حروف الكلمة على مضروب عدد الحروف المكررة)

- Ball : عدد حروف الكلمة (٤) عدد الحروف المكررة (٢)

$$\text{Ball} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

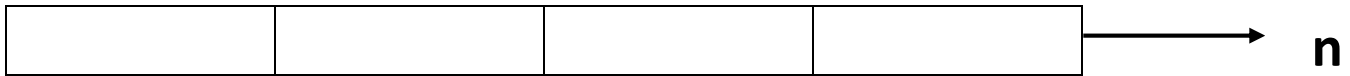
- pepper : عدد حروف الكلمة (٦) عدد الحروف المكررة (٣) و (٢)

$$\text{pepper} = \frac{6!}{3! 2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1 2.1} = 60$$

3. Permutation: تباديل

- مثال: اذا اردنا وضع حرفين فى اربع اماكن مختلفة.

X,O → r



p $n \rightarrow$ الكل
 $r \rightarrow$ المختار فقط

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$p_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

4. Combination: توافق

- مثال: اذا اردنا وضع حرفين متشابهين في اربع اماكن مختلفة.

X,X →

--	--	--	--

$$C_r^n$$

$$C_r^n = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1 \ 2.1} = 6$$

EX

Calculate: $(C_7^{12} - p_2^6)$

$$C_r^n = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

$$1 \quad C_7^{12} = \frac{12!}{7!(12-7)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7! \ 5!} = \frac{12.11.10.9.8.}{5.4.3.2.1} = 11 \times 9 \times 8 = 792$$

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$2 \quad p_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6.5.4!}{4!} = 30$$

Lecture (2)

➤ Matrices : المصفوفات

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

n = No. of Row عدد الصفوف

m = No. of Column عدد الأعمدة

EX

$$A_{1 \times 1} = [3]$$

$$B_{1 \times 2} = [2 \quad 5]$$

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Square Matrix}$$

$$D_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 5 & -1 & 20 \\ 4 & 2 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Square Matrix}$$

Notes

1. $A_{n \times m}$ is $n=m$ Square Matrix

2. $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Zero Matrix

محاييد جمعى للمصفوفات مثل "الصفر" فى الجبر ويكون جميع عناصرها "صفر"

3. $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Identity matrix

EX

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

محاييد ضرب للمصفوفات مثل "الواحد" فى الجبر ويكون جميع عناصر القطر الرئيسى "واحد" وباقى العناصر "صفر"

➤ Matrices Operations : (+ - ×)

1. Matrices Addition and Subtraction : (+ -)

لكى تتم عملية الجمع او طرح مصفوفتين لابد ان يكون لهم نفس الشكل. "نفس عدد الاعمدة و نفس عدد الصفوف".

EX

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Find: $A+B$, $A-B$, $A+0$ (if possible)

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ -5 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 9 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+0 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

2. Matrices multiplication: (×)

- لابد ان يكون **عدد اعمدة** المصفوفة الاولى = **عدد صفوف** المصفوفة الثانية

$$A_{n \times m} \times B_{m \times r} = C_{n \times r} \longrightarrow \text{عدد صفوف واعمة المصفوفة الجديدة}$$

- ناتج يكون مصفوفة مكونه من:

العنصر الاول: حاصل ضرب جميع عناصر **الصف الاول** من المصفوفة الاولى و جميع عناصر **العمود الاول** من المصفوفة الثانية.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times -1 + 1 \times 2 \\ \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

العنصر الثاني: حاصل ضرب جميع عناصر **الصف الاول** من المصفوفة الاولى و جميع عناصر **العمود الثاني** من المصفوفة الثانية.

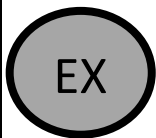
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \times 3 + 3 \times 3 + 1 \times 4 \\ \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 19 \end{bmatrix}$$

العنصر الثالث: حاصل ضرب جميع عناصر **الصف الثاني** من المصفوفة الاولى و جميع عناصر **العمود الاول** من المصفوفة الثانية.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ 4 \times 1 + 5 \times -1 + 2 \times 2 & \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ 3 & \end{bmatrix}$$

العنصر الرابع: حاصل ضرب جميع عناصر **الصف الثاني** من المصفوفة الاولى و جميع عناصر **العمود الثاني** من المصفوفة الثانية.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ 3 & 4 \times 3 + 5 \times 3 + 2 \times 4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ 3 & 35 \end{bmatrix}$$



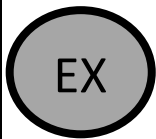
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Find: $A \times B$, $B \times A$ (if possible)

$$A_{2 \times 3} \times B_{2 \times 3} = \text{Not possible}$$

$$B_{2 \times 3} \times A_{2 \times 3} = \text{Not possible}$$



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 25 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Find: $A \times B$, $B \times A$ (if possible)

1

$$A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

Possible

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 5 & 2 \times -3 + 3 \times 7 + 4 \times 4 \\ 1 \times 1 - 2 \times 2 + 5 \times 5 & 1 \times -3 - 2 \times 7 + 5 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 28 & 31 \\ 21 & 3 \end{bmatrix}$$

2

$$B_{3 \times 2} \times A_{2 \times 3} = D_{3 \times 3}$$

Possible

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 - 3 \times 1 & 1 \times 3 - 3 \times -2 & 1 \times 4 - 3 \times 5 \\ 2 \times 2 + 7 \times 1 & 2 \times 3 + 7 \times -2 & 2 \times 4 + 7 \times 5 \\ 5 \times 2 + 4 \times 1 & 5 \times 3 + 4 \times -2 & 5 \times 4 + 4 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -11 \\ 11 & -8 & 43 \\ 14 & 7 & 40 \end{bmatrix}$$

EX

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Find: $A \times B$, $B \times A$

(if possible)

1

$$A_{2 \times 2} \times B_{2 \times 3} = C_{2 \times 3}$$

Possible

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 4 + 3 \times 1 & 2 \times 10 + 3 \times 3 \\ 1 \times 1 + 5 \times 2 & 1 \times 4 + 5 \times 1 & 1 \times 10 + 5 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 29 \\ 11 & 9 & 25 \end{bmatrix}$$

2

$$B_{2 \times 3} \times A_{2 \times 2} = \text{Not possible}$$

EX

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Find: $A \times B$, $B \times A$

(if possible)

1

$$A_{1 \times 3} \times B_{3 \times 1} = C_{1 \times 1}$$

Possible

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{1 \times 1} = [1 \times 3 + 2 \times 5 + 4 \times 1] = [17]$$

2

$$B_{3 \times 1} \times A_{1 \times 3} = D_{3 \times 3}$$

Possible

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 4 \\ 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 4 \\ 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

➤ Matrices Transpose:

مَدَوْر المصفوفات

- تحول الصف للعمود.

- If A a Matrix then A^T is its **transpose**.

EX $A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

➤ Scalar Multiplication: ضرب المصفوفة في رقم ثابت

- يتم ضرب الرقم الثابت في جميع عناصر المصفوفة.

EX $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Find: $4C$

$$4C = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 48 \\ 20 & 40 & 80 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

EX

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Find: $A \times B$, $B \times A$, $A + 5B^T$ (if possible)

$$A_{1 \times 3} \times B_{3 \times 1} = C_{1 \times 1}$$

Possible

$$1 \quad A \times B = A_{1 \times 3} \times B_{3 \times 1} = C_{1 \times 1} \quad \text{Possible}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$C_{1 \times 1} = [2 \times 1 + 3 \times 2 + 6 \times 4] = [32]$$

$$2 \quad B_{3 \times 1} \times A_{1 \times 3} = D_{3 \times 3} \quad \text{Possible}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 1 \times 3 & 1 \times 6 \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 6 \\ 4 \times 2 & 4 \times 3 & 4 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 12 \\ 8 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad A + 5B^T$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5B^T = 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

$$A + 5B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 26 \end{bmatrix}$$

➤ Determinants:

المحددات

$$\det(A) = |A|$$

الناتج رقم واحد فقط

- Matrix "A" must be square.

Matrix 1×1

$$A_{1 \times 1} = [a]$$

$$|A| = a$$

EX

$$A = [13]$$

Find: $|A|$

$$|A| = 13$$

Matrix 2×2

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Find: $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= ad - cb$$

القطر الفرعي - القطر الرئيسي

EX

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Find: $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = 2 \times 10 - 3 \times 6 = 20 - 18 = 2$$

EX

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Find: $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times -5 = 4 + 15 = 19$$

Matrix 3×3

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Find: $|A|$

$$|A| = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ \overset{-}{2} & \overset{+}{5} & \overset{-}{1} \\ \overset{+}{4} & \overset{-}{3} & \overset{+}{2} \end{bmatrix}$$

- يتم اختيار صف واحد من المصفوفة وحفظ الاشارات الخاصة به.
- ملحوظة: سيتم استخدام الصف الاول في جميع الامثلة.

$$|A| = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

يتم وضع الرقم الاول في الصف ثم حذف الصف والعمود الموجود به وكتابه باقى الارقام كمصفوفة 2×2 بجانبها.

$$|A| = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

يتم وضع الرقم الثانى في الصف ثم حذف الصف والعمود الموجود به وكتابه باقى الارقام كمصفوفة 2×2 بجانبها.

$$|A| = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{3} \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

يتم وضع الرقم الثالث في الصف ثم حذف الصف والعمود الموجود به وكتابه باقى الارقام كمصفوفة 2×2 بجانبها.

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(10-3) - 2(4-4) + 3(6-20)$$

$$|A| = 1 \times 7 - 2 \times 0 + 3 \times -14 = 7 - 42 = \underline{\underline{-35}}$$

EX $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Find: $|A|$

$$A = \begin{bmatrix} \overset{+}{-1} & \overset{-}{-3} & \overset{+}{2} \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1(1+9) + 3(4-15) + 2(-12-5)$$

$$|A| = -1 \times 10 + 3 \times -11 + 2 \times -17 = -1 - 22 - 34 = \underline{\underline{-77}}$$

➤ Matrix Inverse:

- $a \times \frac{1}{a} = 1$
- $3 \times \frac{1}{3} = 1$
- $A \text{ Matrix inverse} = A^{-1}$

➤ Such that:

$$A \times A^{-1} = I_n$$

$$A^{-1} \times A = I_n$$

➤ So:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

adj(A)

يتم تبديل اماكن عناصر القطر الرئيسي وباقي العناصر تظل كما هي مع تبديل اشارتها فقط.

EX

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Find: A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2 \times 5) - (3 \times 1) = 10 - 3 = \underline{7}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \\ &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

➤ Solving system of linear equations:

Two Unknown and Two Equation

$$a_{11} X + a_{12} Y = b_1$$

$$a_{21} X + a_{22} Y = b_2$$

- Solve using Matrix inverse.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

EX

$$X + Y = 10$$

$$2X + Y = 15$$

- Solve using Matrix inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times 1) = 1 - 2 = \underline{\underline{-1}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 10 + 1 \times 15 \\ 2 \times 10 - 1 \times 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 + 15 \\ 20 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \underline{\underline{5}}$$

$$Y = \underline{\underline{5}}$$

EX

$$3X + 5Y = 4$$

$$2X - 7Y = 13$$

- Solve using Matrix inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = (3 \times -7) - (2 \times 5) = -21 - 10 = \underline{\underline{-31}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-31} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$= \frac{1}{-31} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-31} \begin{bmatrix} -7 \times 4 - 5 \times 13 \\ -2 \times 4 + 3 \times 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{-31} \begin{bmatrix} -28 - 65 \\ -8 + 39 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-31} \begin{bmatrix} -93 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \underline{\underline{3}}$$

$$Y = \underline{\underline{-1}}$$

Three Unknown and Three Equation

$$a_{11} X + a_{12} Y + a_{13} Z = b_1$$

$$a_{21} X + a_{22} Y + a_{23} Z = b_2$$

$$a_{31} X + a_{32} Y + a_{33} Z = b_3$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta}$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta}$$

$$Z = \frac{\Delta Z}{\Delta}$$

EX

$$X - 2Y - 3Z = -1$$

$$X - Y - 2Z = 1$$

$$-X + 3Y + 5Z = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-5+6) + 2(5-2) - 3(3-1) = 1 \times 1 + 2 \times 3 - 3 \times 2 = \underline{\underline{1}}$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} -1^+ & -2^- & -3^+ \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-5+6) + 2(5+4) - 3(3+2) = 1 \times 1 + 2 \times 9 - 3 \times 5 = \underline{\underline{3}}$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 1^+ & -1^- & -3^+ \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(5+4) + 1(5-2) - 3(2+1) = 1 \times 9 + 1 \times 3 - 3 \times 3 = \underline{\underline{3}}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta Z &= \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{-1} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 1(-2-3) + 2(2+1) - 1(3-1) = 1 \times -5 + 2 \times 3 - 1 \times 2 = \underline{\underline{1}}
 \end{aligned}$$

$$X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

$$Z = \frac{\Delta Z}{\Delta} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Lecture (3)

➤ الأعداد:

١. الأرقام الطبيعية:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

٢. الأرقام الصحيحة:

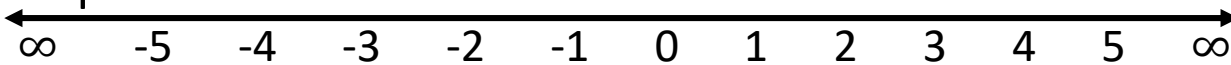
$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

٣. الأرقام النسبية:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \right\} \quad a, b \in Z, b \neq 0$$

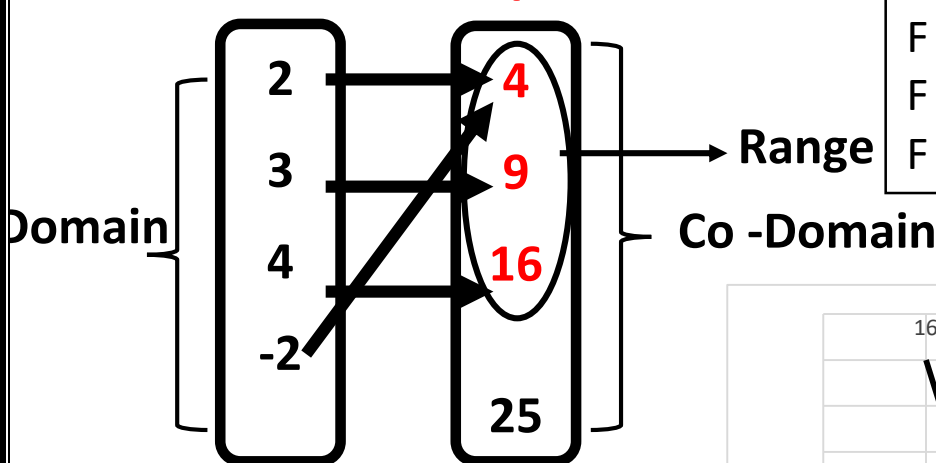
٤. الأرقام الحقيقية:

R = all point on the number line.



➤ Function :

الدوال
X Y



$$F(X) = X^2$$

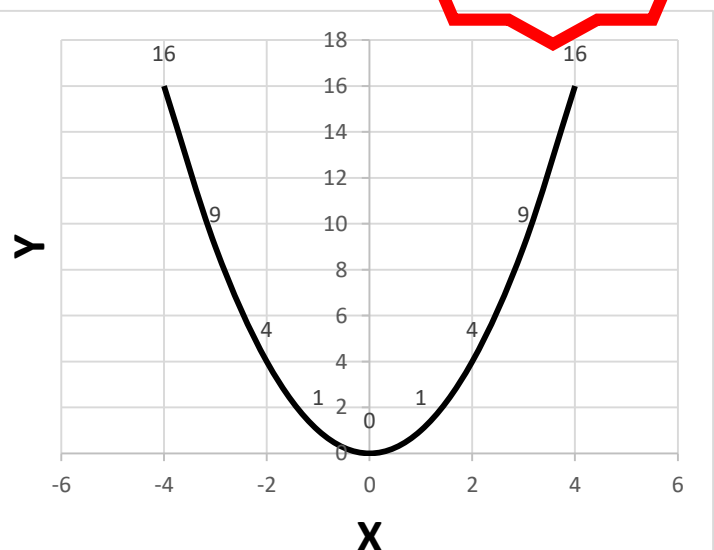
$$F(2) = 4$$

$$F(3) = 9$$

$$F(4) = 16$$

$$F(-2) = 4$$

الرسمات
للتوضيح فقط



"X" → Domain = R الأرقام الحقيقية

"Y" → Co - Domain = $[0, \infty[$

Range = R قيمة الجزء المستخدم من "Y"

EX

$$F(X) = 2X + 3$$

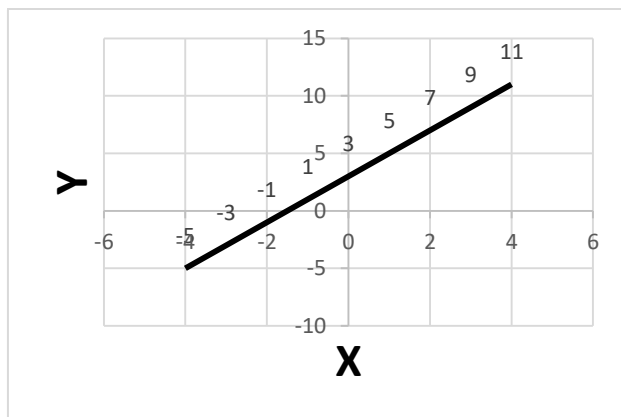
Find: $F(5)$, $F(-100)$

$$F(5) = 2(5) + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$F(5) = 2(-100) + 3 = -200 + 3 = -197$$

Domain = \mathbb{R}

Range = \mathbb{R}



EX

$$F(X) = \frac{1}{X}$$

Find: $F(2)$, $F(-3)$, $F(0)$

$$F(2) = \frac{1}{2}$$

$$F(-3) = \frac{1}{-3}$$

$$F(0) = \frac{1}{0} \quad \times$$

Domain = $\mathbb{R} - \{0\}$

Range = \mathbb{R}

EX

$$F(X) = \sqrt{X - 1}$$

Find: $F(2)$, $F(-3)$, $F(0)$

$$F(2) = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1}$$

$$F(-3) = \sqrt{-3 - 1} = \sqrt{-4} \quad \times$$

$$F(0) = \sqrt{0 - 1} = \sqrt{-1} \quad \times$$

Domain $[1, \infty[$

Range = \mathbb{R}

EX

$$F(X) = \sin X$$

Domain \mathbb{R} Range $=]-1, 1[$

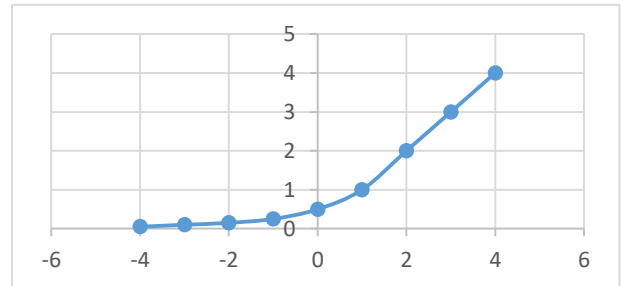
EX

$$F(X) = \cos X$$

Domain \mathbb{R} Range $=[-1, 1]$

• Exponential Function: $e \cong 2.71$

$$F(x) = e^x$$



$$\log_{10} = 100$$

$$100 = 10^2$$

$$\log_{10} = 100 = 2$$

$$\log_{10} = 1000000$$

$$1000000 = 10^6$$

$$\log_{10} = 1000000 = 6$$

$$\log_2 = 8$$

$$8 = 2^3$$

$$\log_2 = 8 = 3$$

$$\log_{10} = 1000$$

$$1000 = 10^3$$

$$\log_{10} = 1000 = 3$$

$$\log_2 = 4$$

$$4 = 2^2$$

$$\log_2 = 4 = 2$$

$$\log_5 = 25$$

$$25 = 5^2$$

$$\log_5 = 25 = 2$$

$$\log_e(x) = \ln x$$

$$F(X) = \ln x$$

➤ Limits:

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow A} Fx$$

الدالة

تعويض بالرقم في الدالة

EX

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} e^x + 5 = e^3 + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+4}{x^2+2} = \frac{5+4}{5^2+2} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x + x^3 = \ln 1 + 3 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2+2x+1} = \frac{4-4}{16+8+1} = \frac{0}{25} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 4 - 4 = \frac{0}{0} \quad \text{✗ يتم تحليل المعادله قبل التعويض}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{9+15+6}{9-9} = \frac{0}{0} \quad \text{✗}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + x - 6} = \frac{-27 + 27}{9 - 3 - 6} = \frac{0}{0} \quad \times$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + x - 6} &= \frac{(x-3)(x^2 - 3x + 9)}{(x-2)(x+3)} = \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 - 3x + 9)}{(x-2)\cancel{(x+3)}} = \frac{9+9+9}{-5} \\ &= \frac{27}{-5} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{4 - 4}{8 - 8} = \frac{0}{0} \quad \times$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{1}{3}$$

Rule

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow A} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \\ = \frac{m}{n} a^{m-n} \end{aligned}$$

EX

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x^3 - 2^3} = \frac{2}{3} 2^{2-3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^4 - 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^4 - 2^4} = \frac{5}{4} 2^{5-4} = \frac{5}{4} \times 2 = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^4 - 624}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5^2}{x^4 - 5^4} = \frac{2}{4} 5^{2-4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{50}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \frac{0}{0} \quad \times$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \frac{(h+1)^{1/2} - 1^{1/2}}{h+1-1} = \frac{(h+1)^{1/2} - 1^{1/2}}{(h+1)-1}$$

$$\lim_{h+1 \rightarrow 1} \frac{(h+1)^{1/2} - 1^{1/2}}{(h+1)-1} = \frac{1/2}{1} 1^{1/2} = \frac{1}{2}$$

Another answer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{h+1} + 1}{\sqrt{h+1} + 1} \longrightarrow \text{مرافق البسط}$$

$$= \frac{h+1-1}{h\sqrt{h+1}+1} = \frac{h}{h\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

➤ Differentiation:

التفاضل

$F'(x)$ or y'

Rule (1)

$$Y = C \rightarrow y' = 0$$

تفاضل الدالة الثابته = 0

Ex

$$Y = 5 \rightarrow y' = 0$$

$$Y = 10 \rightarrow y' = 0$$

Rule (2)

$$Y = x^n \rightarrow y' = n x^{n-1}$$

Ex

$$Y = x^8 \rightarrow y' = 8 x^7$$

$$Y = x^{20} \rightarrow y' = 20 x^{19}$$

$$Y = \sqrt{x} \rightarrow Y = x^{1/2} \rightarrow y' = 1/2 x^{-1/2}$$

$$Y = \frac{1}{x^3} \rightarrow Y = x^{-3} \rightarrow y' = -3 x^{-4}$$

$$Y = \sqrt[5]{x^7} \rightarrow Y = x^{7/5} \rightarrow y' = 7/5 x^{2/5}$$

Rule (3)

$$Y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

Rule (4)

$$Y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

Rule (5)

$$Y = c \times f(x) \rightarrow y' = c \times f'(x)$$

Ex

$$Y = 4x^3 \rightarrow y' = 4 \times 3x^2 = y' = 12x^2$$

$$Y = 10e^x \rightarrow y' = 10 \times e^x = y' = 10e^x$$

$$Y = 5 \ln x \rightarrow y' = 5 \times \frac{1}{x} = y' = \frac{5}{x}$$

Rule (6)

$$Y = f \pm g \rightarrow y' = f' \pm g'$$

Ex

$$Y = x^2 + 4e^x + x^3 + \ln x + x + 5$$

$$y' = 2x + 4e^x + 3x^2 + \frac{1}{x} + 1 + 0$$

Ex

$$Y = \sqrt[3]{x^2} + 3 \ln x + 2x + 12$$

$$Y = x^{2/3} + 3 \ln x + 2x + 12$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{3}{x} + 2 + 0$$

Rule (7)

$$Y = f \times g \rightarrow y' = f' \times g + f \times g'$$

Ex

$$Y = (10x^2 + 5x^3 + 7) \ln x$$

$$y' = (20x + 15x^2 + 0) \ln x + (10x^2 + 5x^3 + 7) \frac{1}{x}$$

Ex

$$Y = x^3 e^x$$

$$y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$$

Rule (8)

$$Y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{g'f - f'g}{g^2}$$

Ex

$$Y = \frac{x^2 - 3x}{\ln x}$$

$$y' = \frac{(\ln x)^2 (2x - 3) - (x^2 - 3x) \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$Y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2}$$

$$y' = \frac{(x^3 + 3x^2 + 2)(2x + 2 + 0) - (x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 6x + 0)}{(x^3 + 3x^2 + 2)^2}$$

Ex

$$Y = \frac{5x^3 + e^x}{2x^2 + 4}$$

$$y' = \frac{(2x^2 + 4)(15x^2 + e^x) - (5x^3 + e^x)(2x + 0)}{(2x^2 + 4)^2}$$

Ex

$$Y = \frac{3x^2 + 2x}{4x^3 + 2x^2 + 5}$$

$$y' = \frac{(4x^3 + 2x^2 + 5)(6x + 2) - (3x^2 + 2x)(12x^2 + 4x + 0)}{(4x^3 + 2x^2 + 5)^2}$$

Binomial Theorem

➤ Theorem statement:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

Where: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

➤ EX: $(x+y)^3$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^{3-1} y^1 + \binom{3}{2} x^{3-2} y^2 + \binom{3}{3} x^{3-3} y^3$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Where: $\binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!0!} = 0$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{(2!)1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{(1!)2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = 3$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!} = 0$$

➤ EX: $(x+y)^4$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} x^4 y^0 + \binom{4}{1} x^{4-1} y^1 + \binom{4}{2} x^{4-2} y^2 + \binom{4}{3} x^{4-3} y^3 + \binom{4}{4} x^{4-4} y^4$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Where: $\binom{4}{0} = \frac{4!}{(4!-0!)0!} = 0$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{(4!-1!)1!} = \frac{4!}{(3!)1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 1} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4!-2!)2!} = \frac{4!}{(2!)2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4!-3!)3!} = \frac{4!}{(1!)3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 2 \times 1} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4!-4!)4!} = 0$$