Page: (MS 521)
Date:

د/مروة عبدالله

المحاضرة (1) - (2017/3/2)

* Reference:- Discrete Mathmatics with Application
by: Susanna S.Epp (4) th edition

* Topics:-

1)- The logic
2)- set theory
3)- Mathmatical induction
4)- Recursion
5)- difference equations
6)- Functions
7)- Graph theory

* Degree → 75 final + 15 midterm + 10 Assignment

1)- The logic

* Definition:-

* Statement:- is a declarative sentence that is either (true) or (false) but not both.

* Examples:-
- ahmed is happy (statement - true)
- Grass is Green (statement - true)
- the year is 266 days (statement - False)
- he is smart (not statement) لانه يحتمل الاحتمالين
- $x+y>0$ (not statement) ممكن صح او خطأ

Page: ....
Date: ....

* Statement truth-value → True (T)
→ False (F)

* Symbolic Representation: p , q , r
* Types of statements:

1)_ simple statement جملة بسيطة
Ex:- p = Cairo is the Capital of Egypt

2)_ Compound statement جملة مركبة
اذا كانت الجملة تحتوي على اكثر من معلومة ،
وباستخدام مجموعة من الروابط .

Connective	Meaning	Symbol	Called	EX.
Negation	not	$\sim$	Tild	$\sim p$
Conjunction	and	$\wedge$	hat	$(p \wedge q)$
Disjunction	OR	$\vee$	Vel	$(p \vee q)$
Conditional	if ... then	$\rightarrow$	arrow	$p \rightarrow q$
BiConditional	.... if and only if	$\leftrightarrow$	double arrow	

Page: ....
Date: ....

* Examples :-

* $\sim p$ = Cairo isn't the Capital of Egypt
وتدل على جملة واحدة .

* p = it is hot
q = it is sunny

* translate the following statements to symbolic form

1)_ it is not hot $\longrightarrow \sim p$
2)_ it is hot sunny $\longrightarrow p \wedge q$
3)_ it is not hot but sunny $\longrightarrow \sim p \wedge q$
but $\longrightarrow$ تترجم بالـand (و)
4)_ it is neither hot nor sunny $\longrightarrow \sim p \wedge \sim q$

H.W (1)

let h = Hany is healthy صحي
w = Hany is wealthy ثري
s = Hany is wise حكيم

* translate the following Compound statements to symbolic form.

1)_ Hany is healthy and wealthy but not wise.
2)_ Hany is not wealthy, but he is healthy and wise
3)_ Hany is neither healthy, wealthy nor wise.

1)_ $h \wedge w \wedge \sim s$ 2)_ $\sim w \wedge h \wedge s$
3)_ $\sim h \wedge \sim w \wedge \sim s$

* Truth Table

الأولويات عند التنفيذ (Priority)
1)_ Negation
2)_ AND , OR
3)_ if , if and only if

1)_ Negation

P	~P
T (True)	F
F (False)	T

* تستخدم مع جملة واحدة
* استبدال الحالة بالعكس.

2)_ AND

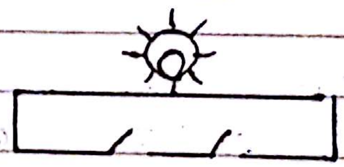
P	q	P∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

* معتمد على جملتين او اكثر
* عدد النتائج هو

$2^{\#\text{ of simple statements}}$

ex: $2^2 = 4$

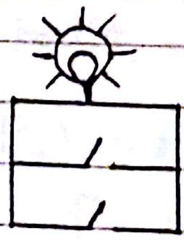
* يستخدم في التوصيل على التوالي في الدوائر الكهربائية



3)_ OR

P	q	PVq
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

* يستخدم في التوصيل على التوازي في الدوائر الكهربائية



4)_ if statement $p \to q$ — لو انا مصري، اذن انا افريقي

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

* الحالة الوحيدة (False) عند اثبات الاولى، ونفي الثانية

5)_ Bi Condition

p	q	p↔q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$p \leftrightarrow q = p \to q \wedge q \to p$$

* اثبات، عند تشابه الحالتين

* Tautology :- is a statement Form, that is always (True), regardless of the truth Values of the statement Variables.
* Contradiction :- التناقض _ نفس التعريف ولكن (False)

p	~p	p ∨ ~p	p ∧ ~p
T	F	T	F
F	T	T	F
		Tautology (t)	Contradiction (c)

Page: ....
Date: ....

EX1) $\sim p \wedge q \vee r$

جدول (truth table) يتكون من عدد من الصفوف $S = 2^3$

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \wedge q \vee r$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F

EX2) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)$
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F

Page: ....
Date: 16/3/2017

المحاضرة (2)

* Logical Equivelence التكافؤ المنطقي

* two Compound statement, that have the same True/false Column

* $x = 3$ $\quad x + y = 5$

$2^7 = 128$, $3 + 2 = 5$, $5 * 2 = 10$

* بعمل مقارنة بين جميع الجمل ، وفي الاخر اقول متساويتين ، اذا كانت جميع الجمل متساويه .

EX1) Show that $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ are logical Equivelence

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

متساويتين في كل الجمل

* اقارن بين كل الجمل في العمودين

Page: ....
Date: ....

EX2) Show that $(p \vee q \to r) \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$ are Logical Equivalent

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \to r$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

* لا بد من كتابة تعليق

* always have the same truth values so the two statements are logically Equivalent.
$\therefore (p \vee q \to r) \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

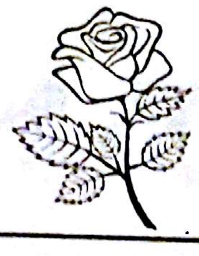
EX3)

* $p \equiv \sim(\sim p)$
$p =$ not not p (نفي النفي اثبات)

$p =$ I'am happy
$\sim p =$ I'am not happy
$\sim(\sim p) =$ I'am happy
(it's not true, that I'am not happy)

$p \equiv \sim(\sim p)$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F



Page: ....
Date: ....

EX4) 1) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (Demorgan)

2) $\sim(p \wedge q) \not\equiv \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	
T	T	T	F	F	F	F ✓	F ✓	✓
T	F	F	T	F	T	T ✓	F ✗	✓
F	T	F	T	T	F	T ✓	F ✗	✓
F	F	F	T	T	T	T ✓	T ✓	✓

* يكتب نفس التعليق والاثبات ←

1) always have the same truth values, so the two statements are logically Equivelent
∴ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

2) because the rows 2 and 3 have different truth values then $\sim(p \wedge q) \not\equiv \sim p \wedge \sim q$

Check $p \to q \equiv \sim p \to \sim q$
$p \to q \equiv q \to p$
$p \to q \equiv \sim p \to \sim p$

H.W 2

Using truth table

العزيز

Page: ....
Date: ....

Inverse , Converse , Contrapositive
معكوس — على العكس — متعادل

يستخدموا مع جملة (if then)

* Inverse: $p \to q \xrightarrow{\text{Iverse}} \sim p \to \sim q$
* Converse: $p \to q \xrightarrow{\text{Converse}} q \to p$
* Contrapositive: $p \to q \xrightarrow{\text{Contrapositive}} \sim q \to \sim p$

نفي النتيجة ثم نفي السبب

EX1) if today is easter, then tomorrow is monday
* write down the inverse, converse, and contrapositive

* Inverse: ($\sim p \to \sim q$)
  if today is not easter, then tomorrow isn't monday
* Converse: ($q \to p$)
  if tomorrow is monday, then today is easter
* Contrapositive: ($\sim q \to \sim p$)
  if tomorrow isn't monday, then today isn't easter

* write Inverse, Converse and Contrapositive For:

H.W 3

1) if john can swim across the lake, then john can swim to the Island
2) if today is Friday, then (2+3=5 and it is hot)

Page: ....
Date: ....

4)- $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$ (if then) اذا اردت نفي جمله

EX)- write the negation of the following

1)- if Ali lives in Egypt, then he lives in Cairo.
Ali lives in Egypt, and ~~then~~ he doesn't live in Cairo.

2)- if my Car is in the repair shop, then I Can't got to Class.
my Car is in the repair shop, and I Can get to Class.

Page: ....

Date: ....

Logical Equivelence

قواعد هامة للتكافؤ المنطقي

Law			
1) Commutative Law التبادلي	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$	2 (مراية)
2) Associative law ترابطي	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	3 (معامل واحد)
3) Distributive law التوزيع	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	3 (2 معامل)
4) Identity law الهوية	$p \wedge t \equiv p$ $(t) = (\text{all true})$	$p \vee c \equiv p$ $(c) = (\text{all False})$	$1 + t, c \rightarrow (p)$
5) Negation law النفي	$p \vee \sim p \equiv t$	$p \wedge \sim p \equiv c$	$(1) \sim \rightarrow t, c$
6) Double negation Law نفي النفي	$\sim(\sim p) \equiv p$		$(1) \sim\sim \rightarrow (p)$
7) Idempotent Law	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$	$(1) \rightarrow (p)$
8) universal bound Law	$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$	$1 + t, c \rightarrow t, c$
9) Demorgans Law	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$2 + \sim$
10) Absorption Law	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$2^2 \rightarrow 1\ (p)$
11) Negation of t&C	$\sim t \equiv c$	$\sim c \equiv t$	t, c

Page: ....
Date: ....

* عند الحل، ابدء من الجزء الأيسر وانتهي بالأيمن.
ولا استخدم اكثر من قانون في الخطوة الواحدة.
ويتم كتابة اسم القاعدة.

EX1) verify the following logical equivelance.

$$\sim(\sim p\wedge q)\wedge(p\vee q)\equiv p$$

$\sim(\sim p\wedge q)\wedge(p\vee q)\equiv(\sim(\sim p)\vee\sim q)\wedge(p\vee q)$ Demorgan Law

$\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\vee q)$ double negation

$\equiv p\vee(\sim q\wedge q)$ distributive law

$\equiv p\vee(q\wedge\sim q)$ Commutative law

$\equiv p\vee c$ Negation Law

$\equiv p$ Identity Law

EX2) $\sim(p\vee\sim q)\vee(\sim p\wedge\sim q)\equiv\sim p$

$\sim(p\vee\sim q)\vee(\sim p\wedge\sim q)\equiv(\sim p\wedge\sim(\sim q))\vee(\sim p\wedge\sim q)$ Demorgan

$\equiv(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$ double negation Law

$\equiv\sim p\wedge(q\vee\sim q)$ distributive Law

$\equiv\sim p\wedge(t)$ Negation Law

$\equiv\sim p$ Identity Law

المحاضرة (3) - (2017/3/23)

* Valid and Invalid Argument

مقدمات { Stat1 } Argument
- Premesis { Stat2
- there for ∴
- نتائج Conclusion

EX1) $p \to q$] premesis مقدمات (ماقبل ∴)
p ∴ (there for) ∴
∴ q Conclusion (مابعد ∴)

- Check whether this Argument is valid simple statement.

الخطوات
1) - Truth table
2) - تحديد النتائج والمقدمات
3) - تحديد (Critical rows)
من الصفوف التي تحتوي (T) في المقدمات
ونقارنها مع النتائج.

p	q	$p \to q$	p	q
T	T	T	T	T ✓
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

(premesis) Conclusion

* this is a valid Argument
- since all the true premesis tends to a true Conclusion.

Page: ....

Date: ....

EX2) Show that the following argument form is valid.

$p \vee (q \vee r)$

$\sim r$

$\therefore p \vee q$

(Premesis) (Conclusion)

p	q	r	q∨r	p∨(q∨r)	∼r	p∨q
T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T ✓
T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	T	T ✓
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	T ✓
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

this is a valid argument

2,4,6 critical rows

Page: ....
Date: ....

EX3) Show that the following argument form is valid or invalid

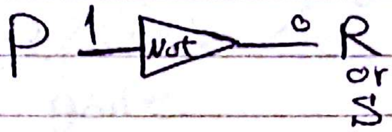
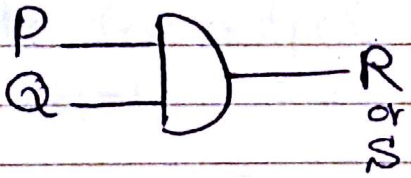
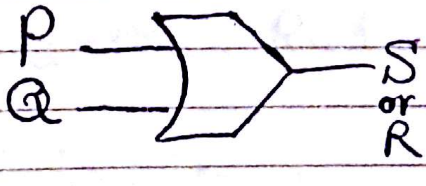
$$p \to q \vee \sim r$$
$$q \to p \wedge r$$
$$\therefore\ p \to r$$

(Premesis) Con

p	q	r	$\sim r$	$q\vee\sim r$	$p\to q\vee\sim r$	$p\wedge r$	$q\to p\wedge r$	$p\to q\vee\sim r$	$p\to r$	
T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	✓
T	T	F	T	T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	T	T	F	T	
T	F	F	T	T	T	F	T	T	F	x
F	T	T	F	T	T	F	F	T	T	
F	T	F	T	T	T	F	F	T	T	
F	F	T	F	F	T	F	T	T	T	✓
F	F	F	T	T	T	F	T	T	T	✓

this is invalid argument, since in the fourth row, we have true premesis, and false conclusion.

* Logical Circuts

type of gate	symbolic Representation	Action (input) ⟶ (output)
Not		P R 1 0 0 1
AND		P Q R 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0
OR		P Q R 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0

Page: ....
Date: ....

* ملاحظات هامة

1)_ never Combine two input wires, without a gate

لا يتم ربط مدخلين الا من خلال بوابة

2)_ a single input wire can be split partway, and used as input for two separate gates.

السلك الواحد يمكن تقسيمه واستخدامه كمدخل لبوابتين مختلفتين

3)_ an output wire can be used as input

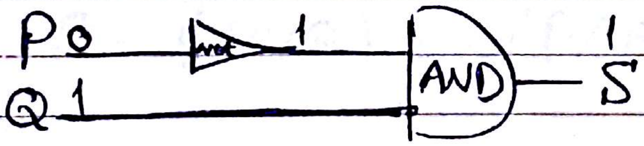
يمكن استخدام المخرج كمدخل لبوابة اخرى

4)_ No output of a gate can eventually feedback into that gate

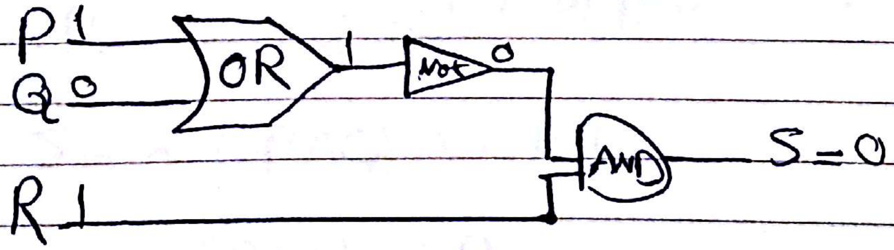
لا يمكن للمخرج ان يكون مدخل مرة ثانية على نفس البوابة

EX1) Indicate the output for the following circuits.

1)_ P=0 Q=1 S=?



2)_ P=1 Q=0 R=1 S=?



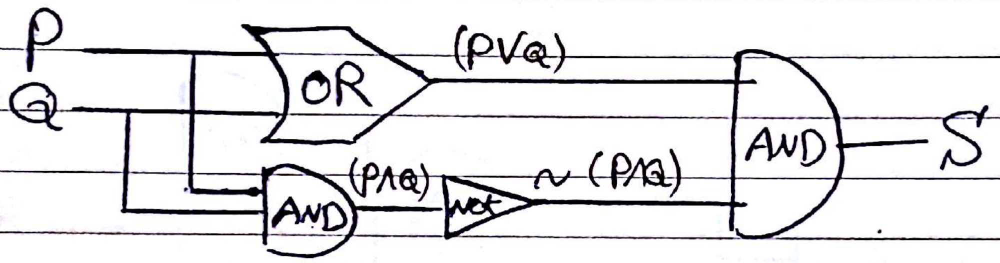
Page: ....
Date: ....

* the Boolean expression

المطلوب كتابة الجملة من خلال الرسم

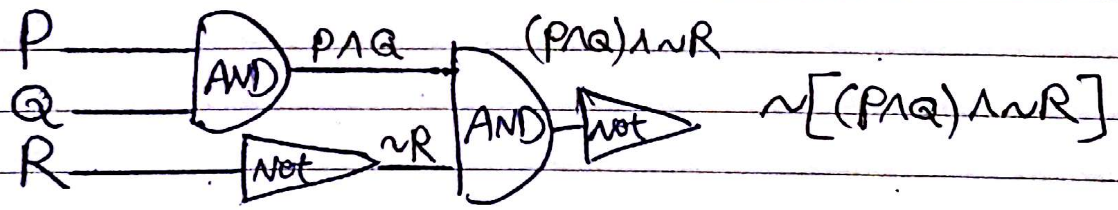
- any expression Composed of (Boolean variables) and (Connectives $\sim, \wedge, \vee$) is Called Boolean expression.

EX1) Write the Boolean expression Corresponding to the above circute.



$$S = (P \vee Q) \wedge \sim(P \wedge Q)$$

EX2)



$$S = \sim[(P \wedge Q) \wedge \sim R]$$

$$= \sim(P \wedge Q) \vee R$$

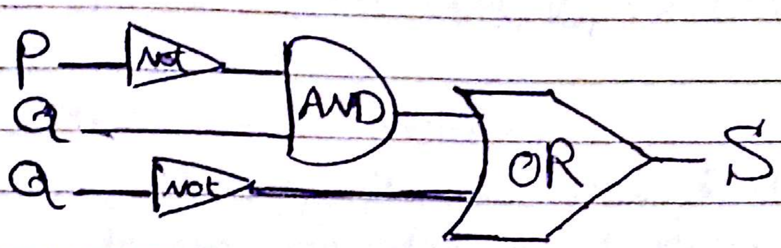
$$= \sim P \vee \sim Q \vee R$$

Scanned by CamScanner

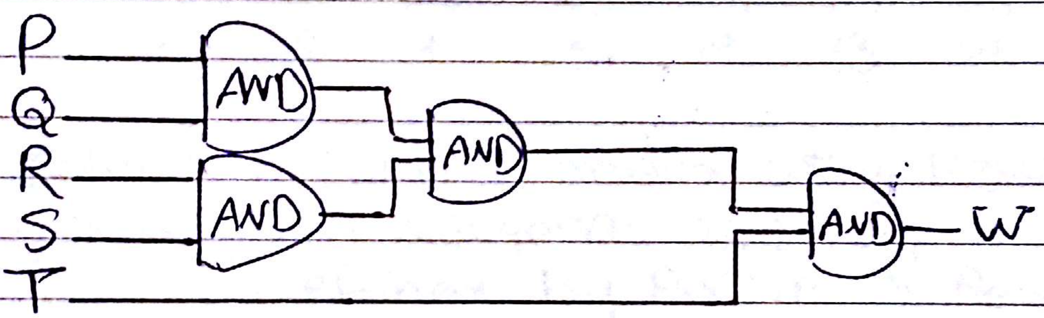
Page: ....
Date: ....

(مثال بالعكس)

* Construct circuts for the following Boolean expressions $(\sim p \wedge Q) \vee \sim Q$



2)- $((p \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \wedge T$



Page: ....

Date: ....

المحاضرة (4) - (2017/3/30)

* Recursion

- Sequence ex (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...).

- Recurrence Relation

علاقة رياضية تعني ايجاد رقم معين بمعلومية الرقمين السابقين

is an equation that recursivery بشكل متكرر

EX) $b_k = b_{k-1} + b_{k-2}$ $\quad b_0 = 1, \; b_1 = 2$

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	...
1	2	3	5	8	13	21	...

* Solving Recurrence Relation using Iteration

(steps)

* given a seqence $a_0, a_1, a_2, \ldots$ defined by Recurrence Relation & initial condition.

1) start from initial conditions & Calculate successive terms of the sequence, untill you see a pattern (recommended #4)

2) guess an Explicit formula

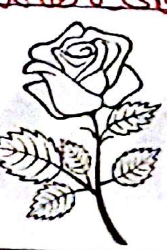
لا تعتمد على الترتيبات السابقة فيما بعد

قاعدة هامة (عامة)

تستخدم (Arithmetic Sequence)

$a_k = a_{k-1} + d$ $\quad$ d is Constant (ثابت)

$a_n = a_0 + d \cdot n$ $\quad$ ولكن لابد من الخطوات، تابع المثال التالي



العزيز

Arithmetic Sequence

EX1) let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be the sequence defined Recursively as follows

1)- $a_k = a_{k-1} + 2 \quad \forall\, k \geq 1$
2)- $a_0 = 1$

Use Iteration Method to guess an Explicit Formula for that sequence.

Solution

* الهدف هو تكوين علاقة اخرى لايجاد اى (Term) ، دون الاعتماد على اى عنصر سابق

* (recurrence Relation) تعرف ب 1) العلاقة 2) القيم الابتدائية

Solution

$a_k = a_{k-1} + 2 \longleftarrow$ Arithmetic Sequence

$a_0 = 1$
$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2$
$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 + 2$
$a_3 = a_2 + 2 = 1 + 2 + 2 + 2$
$a_4 = a_3 + 2 = 1 + 2 + 2 + 2 + 2$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1 + 2(1)$
$a_2 = 1 + 2(2)$
$a_3 = 1 + 2(3)$
$a_4 = 1 + 2(4)$

$\therefore a_n = 1 + 2(n)$

Solution of Recurrence Relation
(Explicit Formula)

* يتم تكوين (pattern) بدون اجراء جمع الاعداد
ومن هذا الشكل يمكن التعويض عن اى رقم مثل الف
$a_{1000} = 1 + 2(1000)$

Scanned by CamScanner

Page: ....

Date: ....

Geometric sequence

EX2)

let $a_K = 5\, a_{K-1}$, $K \geq 1$, $a_0 = 1$

Find a explicit form for that sequence.

Solution:

$a_0 = 1$ $\qquad (1)(5)^0$

$a_1 = 5\, a_0 = 5(1)$ $\qquad (1)(5)^1$

$a_2 = 5\, a_1 = 5 * 5(1)$ $\qquad (1)(5)^2$

$a_3 = 5\, a_2 = 5 * 5 * 5(1)$ $\qquad (1)(5)^3$

$a_4 = 5\, a_3 = 5 * 5 * 5 * 5(1)$ $\qquad (1)(5)^4$

$a_n = (1)(5)^n = 5^n$

solution $\longrightarrow a_n = 5^n$

Sum Geometric sequence

EX3) Find explicit form for $m_K = 2\, m_{K-1} + 1 \;\forall\; K \geq 2$

$m_1 = 1$

Solution:

$m_1 = 1$

$m_2 = 2m_1 + 1 = 2(1) + 1 = 2 + 1$

$m_3 = 2m_2 + 1 = 2(2+1) + 1 = 2(2) + 2 + 1$

$m_4 = 2m_3 + 1 = 2(2(2) + 2 + 1) + 1$

$= 2(2)(2) + 2(2) + 2 + 1$

$= 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ ترتيب من الصغير للكبير

$(m_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})$

وتسمى مجموع متوالية هندسية

sum geometric sequence

Page:
Date:

* قاعدة هامة لحساب

* SUM of finit geometric seqence

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

* الاساس r = base

* تعني اضافه واحد $(n+1)$ على اس الحد الاخير.

* ح المثال السابق $M_4 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$

تطبيق القانون $S_4 = \frac{2^{3+1} - 1}{2-1} = \frac{2^4 - 1}{1} = 16 - 1 = 15$

* Geometric seqence

* هو عبارة عن متسلسله،
وكل رقم داخل المتسلسله هو عبارة عن الرقم الذى قبله مضروب في عدد معين.

* مجموع المتواليه الهندسيه من قاعدة $S_n = \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}$

SUM Geometric Seqence

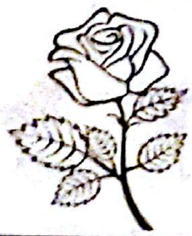
واذا كان الاساس (2) اصبح $S_n = (r^n - 1)$

قاعدة هامة (عامة)
تستخدم (Geometric seqence)

$a_k = d\,a_{k-1}$ d is Constant (ثابت)

$$a_n = a_0 (d)^n$$

- ولكن لابد من اتباع الخطوات
- مثال للتابعه (EX2)



Page: ....
Date: ....

EX4) Find Explicit form for $e_k = 4e_{k-1} + 5$

$\forall\ k \geq 1 \ , \ e_0 = 2$

-solution

$e_0 = 2$

$e_1 = 4e_0 + 5 = 4(2) + 5$

$e_2 = 4e_0 + 5 = 4[4(2)+5]+5$

$= 4(4)(2) + 4(5) + 5$

$e_3 = 4e_2 + 5 = 4[4(4)(2) + 4(5) + 5] + 5$

$= 4(4)(4)(2) + 4(4)(5) + 4(5) + 5$

$e_4 = 4e_3 + 5 = 4[4(4)(4)(2) + 4(4)(5) + 4(5) + 5] + 5$

$= 4(4)(4)(4)(2) + 4(4)(4)(5) + 4(4)(5) + 4(5) + 5$

$= 4^4(2) + 5(4^3 + 4^2 + 4^1 + 1)$

$= 4^4(2) + 5(1 + 4^1 + 4^2 + 4^3)$

$$= 2(4)^n + 5(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1})$$

$$= 2(4)^n + 5\left(\frac{4^{n-1+1} - 1}{4-1}\right)$$

$$= 2(4)^n + 5\left(\frac{4^n - 1}{3}\right)$$

Ex5) $b_k = \dfrac{b_{k-1}}{1+b_{k-1}}$, $k \geq 1$, $b_0 = 1$

- use iteration method to guss an explicit formula for that sequence.

Solution

$b_0 = 1$

$$b_1 = \frac{b_0}{1+b_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{b_1}{1+b_1} = \frac{1/2}{1+1/2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{2+1}$$

$$b_3 = \frac{b_2}{1+b_2} = \frac{\left(\frac{1}{2+1}\right)}{1+\left(\frac{1}{2+1}\right)} = \frac{1/3}{1+1/3} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{3+1}$$

$$b_4 = \frac{b_3}{1+b_3} = \frac{\left(\frac{1}{3+1}\right)}{1+\left(\frac{1}{3+1}\right)} = \frac{1/4}{1+1/4} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{4+1}$$

$$b_n = \frac{1}{(n+1)}$$

H.W.4

$S_k = S_{k-1} + 2k \quad \forall\, k \geq 1$

$S_0 = 3$

Page:
Date:

المحا.(5) - (2017/4/6)

* Second order linear Homogeneous Recurrence Relations with Constant Coefficients

Recurrence relation

Homogeneous — $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$

non Homogeneous — $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n - 6$

* is a recurrence relation of the form

(الحد السابق * A) (الحد قبل السابق * B)

$$a_K = A\, a_{K-1} + B\, a_{K-2} \quad \forall\ K \geq \text{some Fixed integer}$$

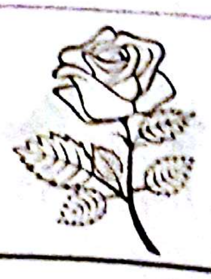
(number)

* where A & B are fixed real numbers with $B \neq 0$ ← من الدرجة الثانية

الفرق بين أعلى ترتيب واقل ترتيب في المعادلة (2).

* Constant: because A, B don't depend on K

* Second: because it contains the previous terms a_{K-1} , a_{K-2}



العزيز

Scanned by CamScanner

* Solution steps.

1)_ Find characteristic equation.

في هذة الخطوة، نقوم بتحويل صورة (Recurrence Relations)

$$a_k = A a_{k-1} + B a_{k-2}$$

الى صورة معادلة من الدرجة الثانية

$$Ar^2 \pm Br + C = 0$$

حتى احصل على قيم (2 roots)، ثم كتابة الحد العام.

2)_ Solve characteristic equation.

عند حل المعادلة من الدرجة الثانية، فيمكن الحصول على (2 roots) متشابهين او مختلفين.

2 real different roots r_1, r_2

$$a_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n$$

2 similar roots

$$a_n = C_1(r)^n + C_2 n(r)^n$$

$$a_n = (r)^n(C_1 + nC_2)$$

* هذه هي صورة الحد العام، في حالتي الجذور المتشابهة او المختلفة.

Page: ....
Date: ....

EX1) Solve the recurrence relation

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} \quad , \quad K \geq 2$$

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 8$$

solution

1) تحويل العلاقة الى معادلة من طرف واحد.

$a_k - a_{k-1} - 2a_{k-2} = 0 \leftarrow$ Characteristic equation

$r^2 - r - 2 = 0 \leftarrow$ ثم التعامل مع معادلة من الدرجة الثانية * وايجاد قيمة (roots)

$$(r+1)(r-2) = 0$$

$r+1=0 \Longrightarrow r_1 = -1$

$r-2=0 \Longrightarrow r_2 = 2$

* ثم التعويض من قانون الحد العام

$$a_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n$$

at $a_0 = 1 \quad , \quad n=0$

$1 = C_1(\underset{r_1}{-1})^0 + C_2(\underset{r_2}{2})^0$ $\qquad 1 = C_1 + C_2$ eq1

at $a_1 = 8 \quad , \quad n = 1$

$8 = C_1(-1)^1 + C_2(2)^1$ $\qquad 8 = -C_1 + 2C_2$ eq2

Page: ....
Date: ....

* ثم بحل المعادلتين

$$c_1 + c_2 = 1$$
$$-c_1 + 2c_2 = 8$$

- يمكن هنا جمع المعادلتين مباشرة

$$3c_2 = 9$$

- ومنها $c_2 = 3$

- وبالتعويض المباشر اى المعادلتين $c_1 = -2$

* ثم كتابة الحل من هيئة الحد العام

$$a_n = -2(-1)^n + 3(2)^n$$

ومن خلال الحد العام ، يمكنك الحصول على اي حد ، فيما بعد ، مثل

$$a_{100} = -2(-1)^{100} + 3(2)^{100}$$

وهكذا .

Page: ....
Date: ....

EX2) $y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n \quad , y_0 = 1 \; , y_1 = 1$

اعلى حد   اقل حد

solution

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$(r-3)(r-2) = 0$$

$$r-3=0 \Longrightarrow r_1 = 3$$
$$r-2=0 \Longrightarrow r_2 = 2$$

$$y_n = C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n$$

at $y_0 = 1 \; , \; n = 0$

$$1 = C_1(3)^0 + C_2(2)^0 \longrightarrow 1 = C_1 + C_2 \leftarrow eq_1$$

at $y_1 = 1 \; , \; n = 1$

$$1 = C_1(3)^1 + C_2(2)^1 \Longrightarrow 1 = 3C_1 + 2C_2 \quad eq_2$$

$C_1 + C_2 = 1$ بالضرب في (-2)

$3C_1 + 2C_2 = 1$

Page: ....
Date: ....

$$-2C_1 + 2C_2 = -2$$
$$3C_1 + 2C_2 = 1$$ والطرح

$$C_1 = -1$$

ثم التعويض في اي معادلة

$$C_2 = 2$$

$$y_n = -(3)^n + 2(2)^n$$ ← قانون الحد العام

وللتأكد

$$y_0 = -(3)^0 + 2(2)^0 = -1 + 2 = 1$$
$$y_1 = -(3)^1 + 2(2)^1 = -3 + 4 = 1$$

EX3) Find an explicit formula for the sequence.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad , \quad x_0 = 0 \; , \; x_1 = 1$$

Solve

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Page: ....
Date: ....

Rule

$ax^2 + bx + c = 0$

has the following Roots

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n$$

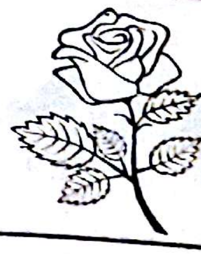
at $x_0 = 0$, $n = 0$

$$0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \longrightarrow 0 = C_1 + C_2$$

at $x_1 = 1$, $n = 1$

$$1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \longrightarrow eq_2$$



وبنحل المعادلتين معا 1 ، 2

* نضرب المعادلة الاولى ب $-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ فتصبح

$$-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_2=0 \longrightarrow \text{new } eq_1$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)C_2=1 \longrightarrow eq_2$$

* وبجمع المعادلتين معاً (adding 1,2)

$$\left[-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]C_2=1$$

$$\left(\frac{\cancel{-1}-\sqrt{5}\cancel{+1}-\sqrt{5}}{2}\right)C_2=1$$

$$\left(\frac{-2\sqrt{5}}{2}\right)C_2=1 \longrightarrow -\sqrt{5}\,C_2=1 \qquad C_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$C_1+C_2=0$$

$$C_1+\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)=0 \longrightarrow C_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$X_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Page:

Date:

Ex 4) $g_{n+2} - 4g_{n+1} + 4g_n = 0$ $\quad g_0 = 1$, $g_1 = 1$

Sol

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)(r-2) = 0 \Longrightarrow r_1, r_2 = 2$$

$$g_n = r^n(c_1 + nc_2)$$

$$g_n = 2^n(c_1 + nc_2)$$

* في حاله عدم وجود (initial) سأقف عند هذا الحد
لكن لو أعطاني (initial) سأكمل عادي وأعوض في القانون.

at $g_0 = 1$, $n = 0$

$$1 = 2^0(c_1 + 0(c_2)) \longrightarrow 1 = 1(c_1) \longrightarrow c_1 = 1$$

at $g_1 = 1$, $n = 1$

$$1 = 2^1(c_1 + c_2) \Longrightarrow c_1 + c_2 = 1/2 \qquad c_2 = -1/2$$

$$g_n = 2^n\left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

$(a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n)$ H.W

Page: ....
Date: ....

المحاضرة (6) - (2017/4/13)

* Mathematical induction

طريقة للتحقق من صحة قانون معين، او قاعدة معينة، بعدة خطوات

Steps

Step 1: initial step

Show that the rule is true, of the initial value,
show that $P(a)$ is true, where (a) is the initial value.

Step 2: hypothesis step

the rule is true at a general value (K)
$P(K)$ is true, where $K \geq a$

Step 3: induction step

we have to show that the rule is true at $(K+1)$
$P(K+1)$ is true.

EX1) Sum of the first n integers.
Use the Mathematical induction to prove that.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\ n \geq 1$$

Sol

1) initial step at $n=1 \longrightarrow P(1)$ is true ??

$L.H.S = 1$

$R.H.S = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{(2)} = 1$

then $L.H.S = R.H.S$
then the rule is true of the intial value.

2) hypothesis step.

suppose that

$$1+2+3+\dots+K=\frac{K(K+1)}{2}$$

3) Induction step

We have to show that the rule is true at $(K+1)$

عايز اضع $(K+1)$ مكان كل (K)

$$1+2+3+\dots+K+K+1=\frac{(K+1)((K+1)+1)}{2}$$

L.H.S from the hypothesis step

* هذا القانون اريد اثباته عند $(K+1)$ ، بنفذ الخطوة 3.

From step 2 $\quad 1+2+3+\dots+K=\frac{K(K+1)}{2}$

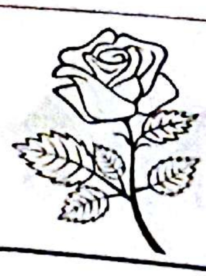
then $L.H.S=\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)=\frac{K(K+1)}{2}+\frac{2(K+1)}{2}$

$$=\frac{K^2+K+2K+2}{2}=\frac{K^2+3K+2}{2}$$

$$R.H.S=\frac{(K+1)[(K+1)+1]}{2}=\frac{(K+1)(K+2)}{2}=\frac{K^2+3K+2}{2}$$

the L.H.S = R.H.S at K+1.

then the rule is true at all.



Page: ....
Date: ....

Ex2) Sum of geometric sequence..

Proof that $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad \forall\, n \geq 0$

$(r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^n)$

Sol

1)_ initial step at $n=0$

$$L.H.S = \sum_{i=0}^{0} r^0 = r^0 = 1$$

$$R.H.S = \frac{r^{0+1}-1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$$

then $L.H.S = R.H.S$

then the rule is true at the initial value

2)_ hypothesis step.

suppose that $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$

3)_ Induction step: we have to show that

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+1+1}-1}{r-1} \Rightarrow \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$$

Page:
Date:

$$L.H.S = \sum_{i=0}^{k+1} r^i \Rightarrow \underbrace{r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \dots + r^k}_{} + r^{k+1}$$

From the hypothesis step

$$= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + \frac{(r-1)(r^{k+1})}{(r-1)}$$

$$= \frac{\cancel{r^{k+1}} - 1 + r.r^{k+1} - \cancel{r^{k+1}}}{r-1} = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$$

L.H.S = R.H.S then the rule is true at all

EX3) Use Mathematical induction to prove that

$$1+6+11+16+\dots+(5n-4) = \frac{n(5n-3)}{2}, \quad n \geq 1.$$

sol

1) initial step at $n=1$

L.H.S = 1

$$R.H.S = \frac{1(5(1)-3)}{2} = \frac{(5-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

L.H.S = R.H.S then the rule is true at the initial value.

Page: ....
Date: ....

2)- hypothesis step:

suppose that

$$1+6+11+16+\dots+(5K-4)=\frac{K(5K-3)}{2}$$

3)- Induction step

we have to show that the rule is true at $(K+1)$

$$\underbrace{1+6+11+16+\dots+(5K-4)}_{1}+(5(K+1)-4)=\frac{(K+1)[5(K+1)-3]}{2}$$

From hypothesis $=\frac{K(5K-3)}{2}$

$$L.H.S=\frac{K(5K-3)}{2}+(5(K+1)-4)=\frac{5K^2-3K}{2}+\frac{2(5K+5-4)}{2}$$

$$=\frac{5K^2-3K+10K+2}{2}=\frac{5K^2+7K+2}{2}$$

$$R.H.S=\frac{(K+1)[5(K+1)-3]}{2}=\frac{(K+1)(5K+5-3)}{2}$$

$$=\frac{(K+1)(5K+2)}{2}=\frac{5K^2+7K+2}{2}.$$

then L.H.S = R.H.S

then the Rule is true at all.

العزيز

Page: ....
Date: ....

* Prove on Inequality

EX1) Use Mathematical Induction to prove

$$2n+1 < 2^n \quad \forall \; n \geq 3$$

Sol

1)- initial step at $n=3$

$L.H.S = 2(3)+1 = 6+1 = 7$

$R.H.S = 2^3 = 8$

$L.H.S < R.H.S$

then the rule is true at initial

2)- hypothesis step

assume that $2K+1 < 2^K$

3)- Induction step

we have to prove that

$$2(K+1)+1 < 2^{(K+1)}$$

$$2K+2+1 < 2^{(K+1)}$$

$$2K+3 < 2^{(K+1)}$$

* هذا ما اريد اثباته

* ابدأ بالخطوة الثانية واضربها حتى الوصول للخطوة الثالثة

Page: ....

Date: ....

From the hypothesis step we have

$$2K+1 < 2^K$$

adding (2) to both sides

$$2K+1+2 < 2^K+2$$

$$2K+3 < 2^K+2^1$$

* بما ان الطرف الايمن اكبر من الطرف الايسر

فيمكن استبدال مقدار كبير محل مقدار صغير من الطرف الايمن، وتظل المتباينة قائمة

Since $2^K > 2$

Replacing 2 by 2^K in the R.H.S

$$2K+3 < 2^K+2^K$$

$$2K+3 < 2(2^K)$$

$$2K+3 < 2^{(K+1)}$$

then the rule is true

Ex2) $n^3 > 2n+1 \quad \forall\ n \geq 2$

sol

1) initial step at $n=2$

$L.H.S = 2^3 = 8$

$R.H.S = 2(2)+1 = 5$

$L.H.S > R.H.S$ then this rule is true at initial value.

2) hypothesis step

suppose that $K^3 > 2K+1$

3) Induction step

we need to prove that: $(K+1)^3 > 2(K+1)+1$

$(K+1)^3 > 2K+3$

$$L.H.S = (K+1)^3 = (K+1)(K+1)(K+1)$$
$$= (K+1)(K^2+2K+1)$$
$$= K^3+2K^2+K+K^2+2K+1$$
$$= K^3+3K^2+3K+1$$

prove $\left(K^3+3K^2+3K+1 > 2K+3 \right)$

* From hypothesis step

$K^3 > 2K+1$ adding $(3K^2+3K+1)$ to sides

$$K^3+3K^2+3K+1 > 2K+1+3K^2+3K+1$$
$$K^3+3K^2+3K+1 > 2K+(3K^2+3K+2)$$

باستبدال قيمة اصغر من قيمة موجودة في الطرف الايمن تظل المتباينة قائمة

Replacing $3K^2+3K+2$ by (3) on R.H.S

$$K^3+3K^2+3K+1 > 2K+3$$

then the rule is true

Page: ....
Date: ....

* Assignment

H.W.6

Use Mathematical induction to prove that $n^2 < 2^n$; $n \geq 5$

Page:
Date:

المحاضرة (7) - (الأخيرة) - (2017-4-20)

Graph theory

* وهو عبارة عن شكل توضيحي، يوضح العلاقة بين مجموعة من النقاط بعضها وبعض.

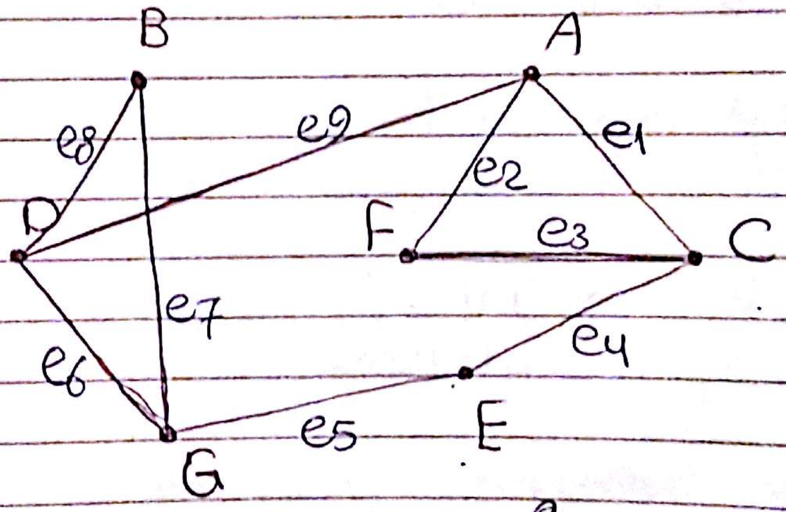
* (Graph) يتكون من مجموعتين مهمتين.

1) Set of vertices. رؤوس (Vertex) نقط ثابتة

2) Set of edges.

* تستخدم ع شبكة الطرق، الطيران، ...

Ex1)

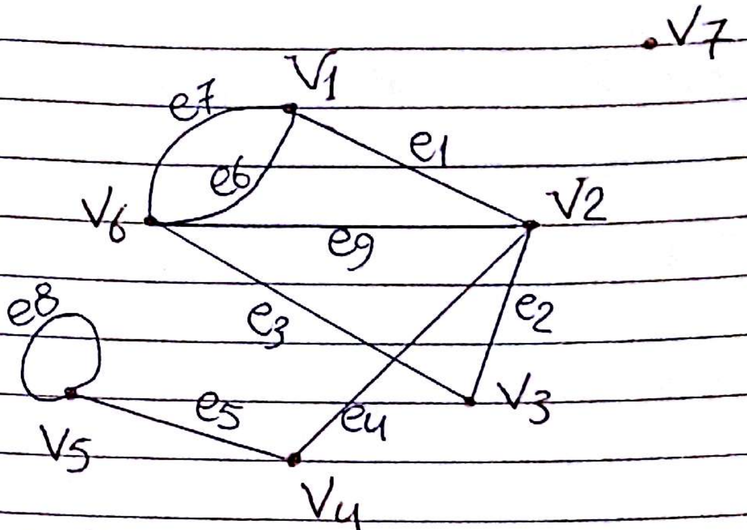


Set of vertices = {A, B, C, D, E, F, G}

set of edges = {$e_1, e_2, e_3, \dots, e_9$}

Page: ....
Date: ....

EX2)



* the set of vertices.

$V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7\}$

* the set of edges.

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

edge	end points
e_1	$\{V_1, V_2\}$
e_2	$\{V_2, V_3\}$
e_3	$\{V_3, V_6\}$
e_4	$\{V_2, V_4\}$
e_5	$\{V_4, V_5\}$
e_6	$\{V_1, V_6\}$
e_7	$\{V_1, V_6\}$
e_8	V_5
e_9	$\{V_2, V_6\}$

* مفاهيم هامة.

V_7 (isolated vertex) معزول

مثل بيت غير متصل بشبكة الغاز.

$\{e_1, e_9, e_4, e_2\}$ = incident V_2

لانه كلها خطوط متصلة بالنقطة (V_2)

$\{V_1, V_3, V_4, V_6\}$ = adjacent V_2

لانها نقاط لها علاقة بالنقطة (V_2)

e_8 Loop طالع وداخل على نفس النقطة

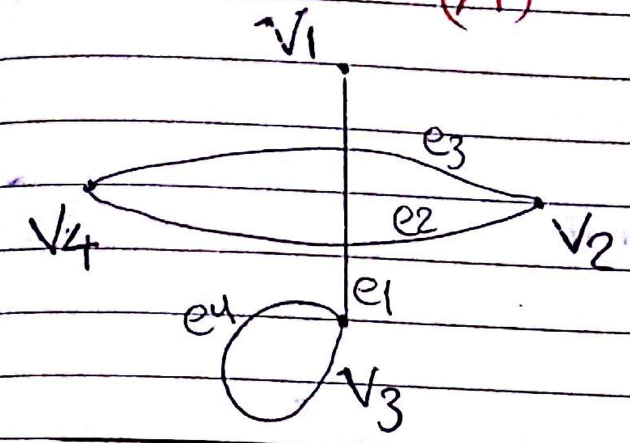
$\{e_6, e_7\}$ = parallel edges نقاط بدايتهم ونهايتهم شبه بعض

Page: ....
Date: ....

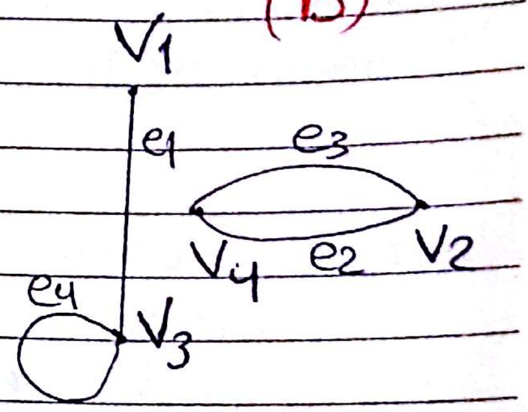
الاشكال المتكافئه ، تكون لها نفس العلاقات ونفس النظام

EX1)

(A)

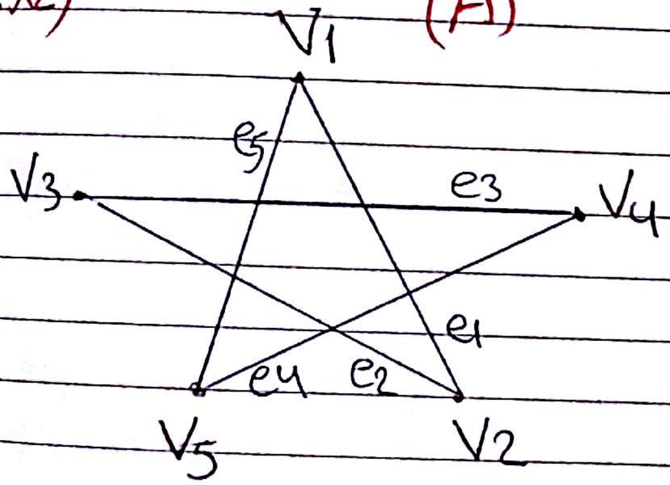


(B)

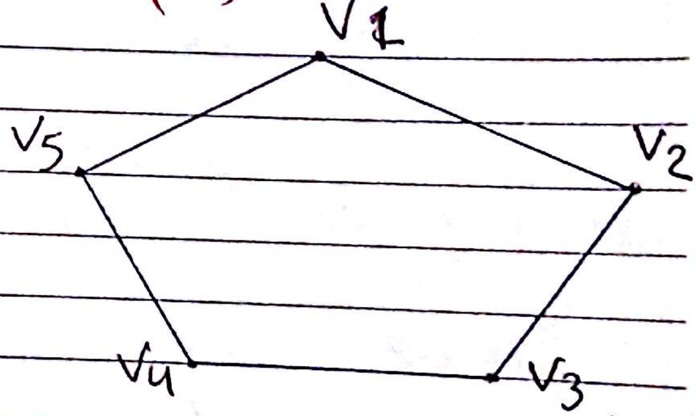


EX2)

(A)



(B)



$e_1 = \{V_1, V_2\}$
$e_2 = \{V_2, V_3\}$
$e_3 = \{V_3, V_4\}$
$e_4 = \{V_4, V_5\}$
$e_5 = \{V_1, V_5\}$

متكافئات

Page: ....
Date: ....

* Simple Graph Vs Complete Graph

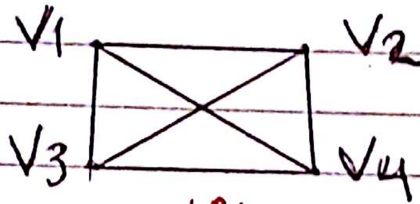
1)_ **Simple Graph:** is a graph that doesn't have any loops or parallel edges but can have isolated vertices.

2)_ **Complete Graph:**_ that any two distinct vertices have only one edge connecting them.

*كل النقاط لها علاقة بكل النقاط

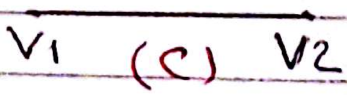
* اى نقطتين مختلفتين يجب ان يكون بينهما على الاقل علاقة واحدة.

(A)

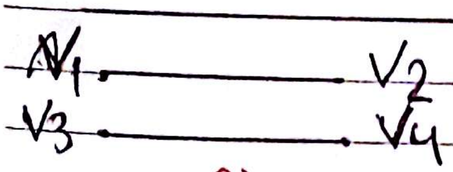


(B)

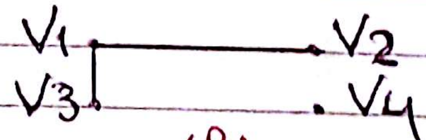
Simple ✓
Complete ✓



(C)

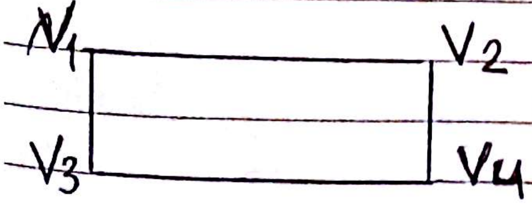


(A)



(B)

Simple ✓



(C)

no relation V_1, V_4
no relation V_2, V_3

Page: ....
Date: ....

* Complete bipartite graph $K_{n,m}$ (ذو قسمين)

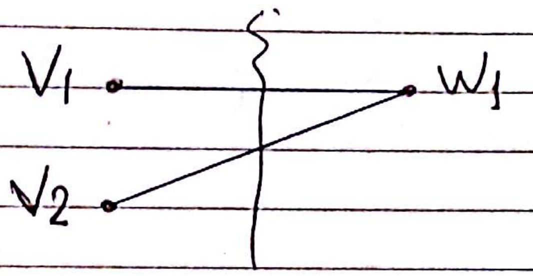
وهو أن نستطيع تقسيم الرسمة الى قسمين (مجموعتين)، بشرط

أن المجموعة الاولى، لا توجد بين نقاطها اى علاقات،

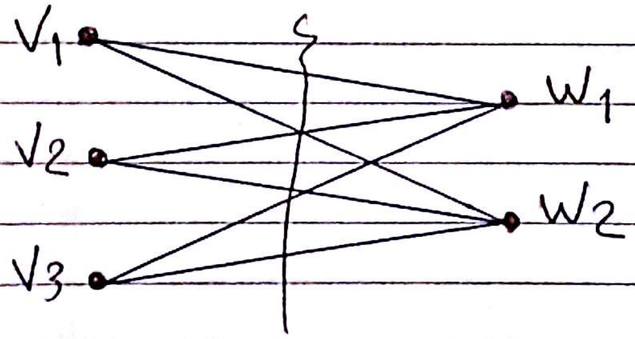
كذلك المجموعة الثانية، لا توجد بين نقاطها اى علاقات.

ولكن كل النقاط في المجموعة الاولى، لها علاقة بالمجموعة الثانية والعكس

EX1)



EX2)



$W = \{W_1, W_2\}$
$V = \{V_1, V_2\}$

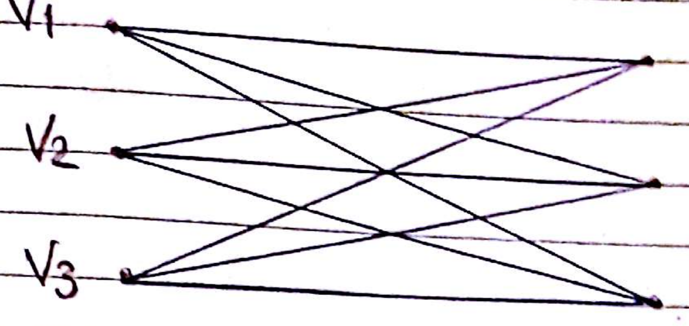
* مجموعتين الاولى ليس بينها علاقات، والثانية ليس بينها علاقات

ولكن المجموعة (1)، (2) بينهما علاقات كاملة.

$K_{2,3}$

(W) عدد النقاط في المجموعة الاولى ← ← عدد النقاط في المجموعة الثانية (V)

Exs)



$K_{3,3}$

$V = \{V_1, V_2, V_3\}$

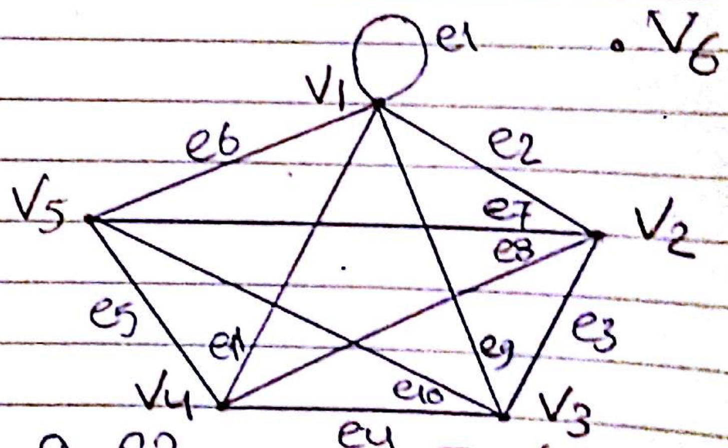
$W = \{W_1, W_2, W_3\}$

* degree of vertex & degree of graph

* **degree of vertex:** deg(V) is the number of edges that are incident on V, the loop Counted twice(2).

* **degree of graph:** is the sum of the degrees of all vertices deg(G)

$\deg(V_1) = 6$ (loop = 2)
$\deg(V_2) = 4$
$\deg(V_3) = 4$
$\deg(V_4) = 4$
$\deg(V_5) = 4$
$\deg(V_6) = 0$



$\deg(G) = 6 + 4 + 4 + 4 + 4 + 0 = 22$
(even number) لابد ان يكون الرقم زوجي
$\deg(G) = 2 \times$ number of edges
$= 2 \times 11 = 22$ ✓

* قد يكون للعنصر الواحد رقم فردي ، ولكن المجموع زوجي

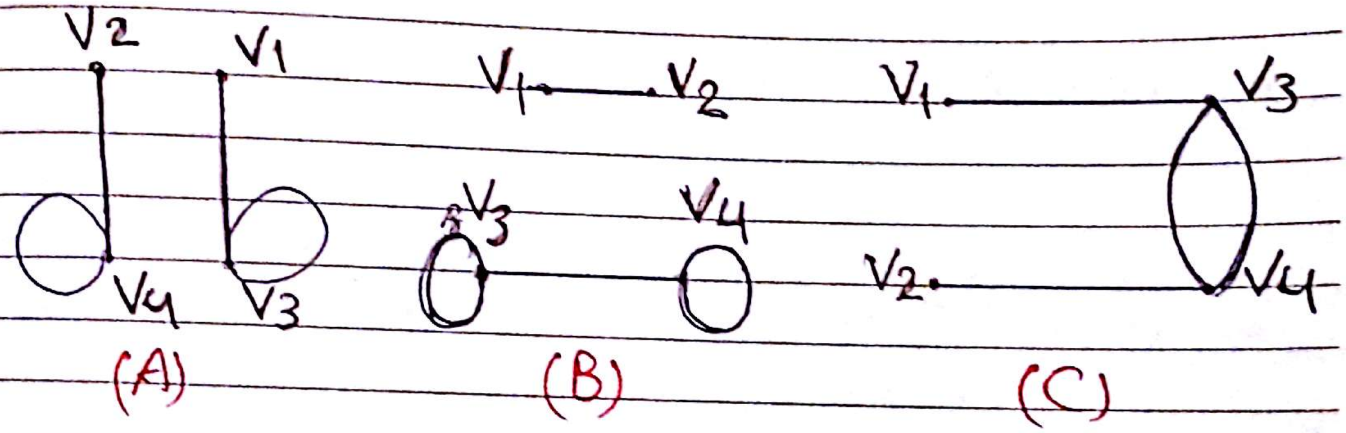
Scanned by CamScanner

Page: ....
Date: ....

EX2) Draw a graph with four vertices of degrees 1,1,2,3 & 1,1,3,3

1,1,2,3 → no graph, the total degrees not even

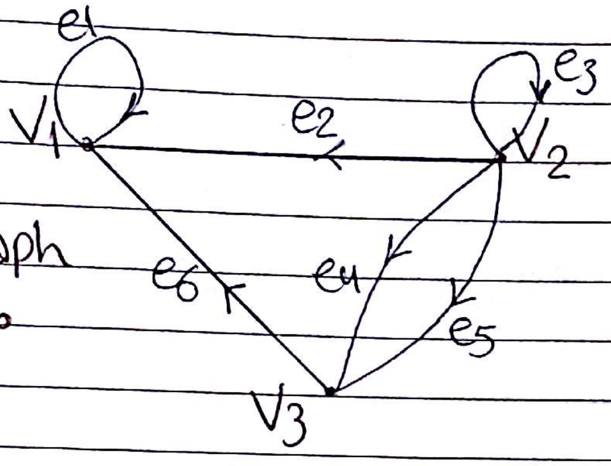
1,1,3,3



Page: ....
Date: ....

* Matrix Representation of Graph

مصفوفة مربعة، عدد الاعمدة = عدد الصفوف = عدد النقاط



directed graph
موجه (بها اسهم)

عدد النقاط (3)

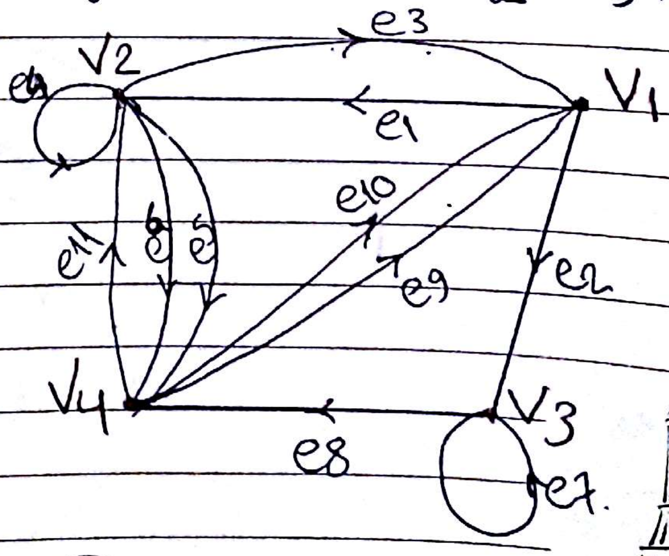
$$\begin{array}{c|ccc} & V_1 & V_2 & V_3 \\ \hline V_1 & 1 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 1 & 2 \\ V_3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

* الاتجاه يحسب بواحد
* تتم القراءة من الصف الى العمود.
* المصفوفة الموجهة (بها اسهم) اما ان تماثلية او غير تماثلية.
* المصفوفة الغير موجهة دائما تماثلية.

EX1) Draw a directed graph for A

* المصفوفة غير متماثلة لابد ان تكون موجهة.

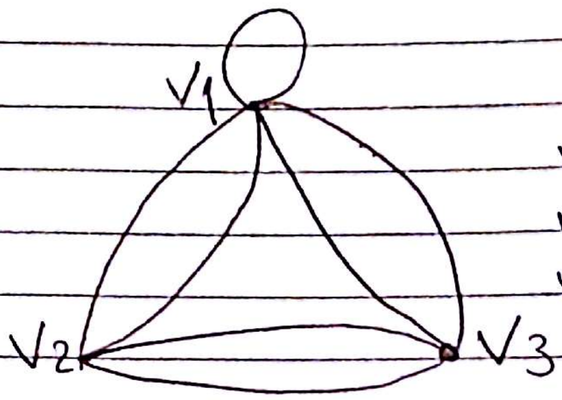
let $A = \begin{array}{c|cccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ V_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$



Page: ....
Date: ....

* Write down the adjacency Matrix for the graph

1) -



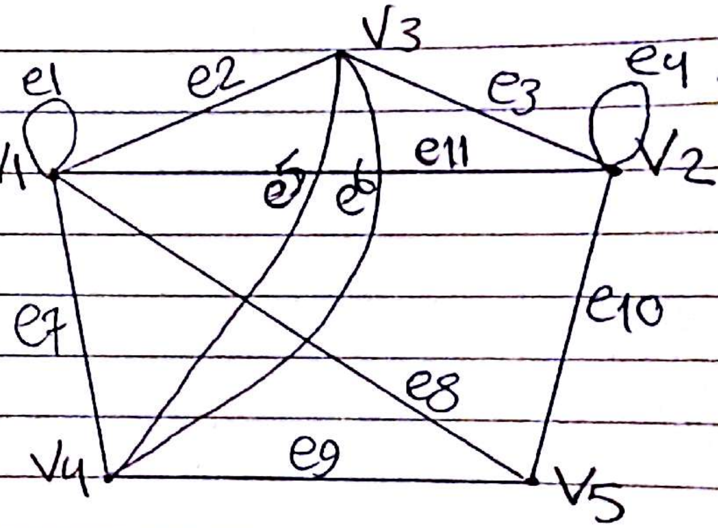
$$\begin{array}{c|ccc} & V_1 & V_2 & V_3 \\ \hline V_1 & 1 & 2 & 2 \\ V_2 & 2 & 0 & 2 \\ V_3 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

تماثلية

غير موجهة

2) -

$$\begin{array}{c|ccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ V_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ V_4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ V_5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



مع تمنياتي بالتوفيق والسداد

إسلام سليم

اللهم وفقنا لما تحب وترضى