MS521 (DISCRETE MTHEMATICS)

Lecture ONE

Course content:

---

1) Introduction and logic and statements:

First: Introduction (What is discrete Mathematics?).

What is difference between discrete mathematic and continuous mathematics?

A variable:

First let's know what is a variable?

A variable **is just a symbol or word working as a placeholder when you want to talk about something and its value can be changed.**

For example, a dice has 6 numbers. We can give a symbol for a dice value. Let's say (D). so, (D) is a variable representing the dice value and it can be changed every time we throw the dice.

هدف جزء المقدمة انه يعرفنا ايه هو ال discrete math ... كلمة discrete معناها متقطع ... بس خلينا الأول نعرف يعني ايه variable او متغير ... ودي سهلة ... الكلام المكتوب معناه ان المتغير ما هو الا placeholder بيعبر عن حاجة معينة او يعنى كلمة او حرف تنوب عن حاجة معينة بحيث كل ما أحب أتكلم عن الحاجة المعينة دي استخدم ال variable اللى ينوب عنها والمتغير نقدر نغير قيمته ...

ذي مثلا ... لو قولت حجر النرد او الزهر ليه ٦ ارقام ... ممكن اعبر عن قيمة الزهر في كل مرة هرمي فيها الزهر برمز وليكن D ... فكل مرة هرمى فيها الزهر هقول ان D بيساوي كذا ... مشلازم أقول ان قيمة الزهر في هذه المرة بيساوي كذا ولكن اقدر اعبر عن الجملة دي كلها بحرف الD ... وطبعا في كل مرة الD بياخد قيمة مختلفة حسب قيمة الزهر وبالتالي هو قيمته بتتغير عشان كدة سمناه متغير.

Discrete and continuous variables

The variable can take a discrete value or a continuous value. **What is the difference?**

To understand the difference, look at the following example:

- If we say that **(A)** is a variable that represents the weight of students in a class room. The weight can be integer numbers or decimal numbers. It can take 50.1, 60.5 for example. So, its values are in a continuous range of values
- If we say that **(B)** is a variable that represents the number of students in each class room. It cannot take decimal numbers because you can't have a piece of a student. It always takes integers.

What is the difference between variables (A) and (B)? (A) takes continuous values and it is called continuous variable and (B) takes discrete values and it is called discrete variable.

هنا عايز يقول الفرق بين كلمة discrete وكلمة continuous ... ودي اخدناها في الاحصا ... الفرق بين المتغير المتقطع والمتغير المتصل ... خلينا نقولها بامثلة ... لو فرضا قولت ان فيه متغير وليكن A بيعبر عن اوزان الطلبة في الفصل ... المتغير ده يقدر ياخد قيم فيها كسور يعنى فعلا ممكن الاقي وزن ٥٠,٥ مثلا يعنى اقدر أقول ان الاوزان تتراوح في مدى متصل من القيم ...

ولو فرضنا عندي متغير وليكن B يعبر عن عدد الطلاب في كل فصل ... مقدرش أقول ان عدد اللاب مثلا ٥,٣ ... ال٠,٣ دي هتكون دراع مثلا ... فالبتالي المتغير B مشبياخد قيم في مدى متصل ولكن بياخد قيم محددة

وبيسموا المتغير A متغير متصل وB متغير متقطع ... بمعنى اخر المتغير المتقطع بياخد القيم ١و٢و٣ ومبياخدش الأرقام بين ١ و٢ مثلا لكن المتغير المتصل بياخد كل الأرقام الصحيحة وما بينها.

Discrete and continuous Mathematics

Form the definition of discrete and continuous variable, you can understand the difference between discrete and continuous mathematics.

Continuous mathematics:

- ✓ It considers objects that vary **continuously**.
- ✓ ***Real number system*** is the core of continuous mathematics.
- ✓ Continuous mathematics uses models and tools for analyzing real-world phenomena that change smoothly over time.

Discrete mathematics:

- ✓ It considers objects that vary in **a discrete way**.
- ✓ ***Integers*** is the core of continuous mathematics.
- ✓ Discrete mathematics uses models and tools for analyzing real-world phenomena that change smoothly over time.

هنا عايز يقول من الاخر ان الdiscrete math بيتعامل مع المتغيرات او الحاجات اللى بتاخد قيم محددة يعنى متغيرات متقطعة وبالتالي الاعداد الصحيحة او الintegers هي اللى بيتعامل معاها الdiscrete math والعكس بالنسبة للcontinuous math.

Why Discrete mathematics?

- ✓ Mathematics is the heart of problem solving.
- ✓ Defining a problem requires mathematical rigor دقة (i.e. developing rigorous treatment).
- ✓ Use and analysis of models, data structures, algorithms requires a solid foundation of mathematics.
- ✓ To justify WHY a particular way of solving a problem is current or efficient (i.e. better than another way) requires analysis with a well-defined mathematical model.

Everyone knows that proofs are important throughout mathematics, but many people find it surprising how important proofs are in computer science. In fact, proofs are used to verify that computer programs produce the correct output for all possible input values, to show that algorithms always produce the correct result, to establish the security of a system, and to create artificial intelligence. Furthermore, automated reasoning systems have been created to allow computers to construct their own proofs.

Second: The logic and statements.

Logic is the background of discrete mathematics because the rules of logic specify the meaning of mathematical statements.

These rules are used in the design of computer circuits, the construction of computer programs, the verification of the correctness of programs, and in many other ways. Furthermore, software systems have been developed for constructing some, but not all, types of proofs automatically

المنطق هو أساس الdiscrete math لان قواعد المنطق الرياضي هي اللى بتدي معنى للعلاقات الرياضية ... وبيقول ان القواعد دي بتستخدم في تصميم الدوائر الكهربية في الكومبيوتر وتصميم برامج الكومبيوتر وتطبيقات تانية كتير.

عموما في الكومبيوتر احنا بنتعامل مع حاجة تتعد وواضحة ... يعنى مثلا لو انت بتصمم موقع عالنت ... بتتعامل مع objects كاملة يعنى مثلا بتتعامل مع الheadling بتقول مثلا عندي ٤ headling ولا تقدر تقول مثلا عندي ٤,٥ ... متقدرش اكيد ... والdiscrete mathematics مفيدة في مجال علوم الحاسب لأننا بنتعامل مع discrete objects.

Statements (propositions)

The rules of logic give precise meaning to mathematical statements. These rules are used to distinguish between valid and invalid mathematical arguments.

Our discussion begins with an introduction to the basic building blocks of logic—propositions.

A statement (A proposition)

is a declarative sentence (that is, a sentence that declares a fact) that is either true or false, but not both.

هنا من الأخر عايز يقول .. ان أي حاجة فالدنيا بتمشى على خطوات اللى منها هقدر أقول ان الحاجات دي منطقية او مشمنطقية .. وفالرياضة الmathematical arguments او العلاقات الرياضية مثلا هقدر برضو أقول انها منطقية او لا طبقا لقواعد الlogic ...

وبالتالي هنبدأ بالكلام عن الstatements اللى هي وحدة بناء الlogic وخلينا نشوف معنى الstatement من شرح الأمثلة التالية.

Examples:

Example	Statement or not	WHY
Logic is interesting	Statement	TRUE or FALSE (not both)
Today is hot	Statement	TRUE or FALSE (not both)
He is student	**NOT** statement	Because He is not defined and the statement can take both TRUE or FALSE depends on He
$-1 > 0$	Statement	only FALSE
$x + y > 0$	**NOT** statement	Because x and y are not defined and the statement can take both TRUE or FALSE. If x = 3 and y = 4 then the statement is TRUE but if x = -1 and y = -2 then it is FALSE
The year is 266 days	Statement	only FALSE

خلينا نفهم الأمثلة دي ...

تعريف الstatment ... انها جملة بتاخد قيمتين ... اما true او false ولكن مينفعش تاخد ال٢ مع بعض ... او بمعنى اخر ... هي جملة تحمل الإجابة بصح او غلط لكن مينفعش تبقى صح وغلط فنفس الوقت ... اول جملة بيقول المنطق شيق ... دي جملة ممكن يتقال عليها صح او غلط لكن مش ال٢ مع بعض لان المنطق اما شيق او مش شيق ...

نفس الكلام الجملة التانية ... انهردة اما حر او مش حر مينفعش نقول انهردة حر ومشحر في نفس الوقت.

طيب المثال التالت ... مينفعش يتقال عليه statement ... ليه ... ان اقولت ان هو يكون طالب ... لكن انا محددتش مين هو ده ... فالجملة دي لو انا قولتها على شخ هو مشطالب فعلا هتاخد false يعني هتبقى غلط ولو قولتها عل حد انا عارف انه طالب هتبقى true وفالحالة دي هي جملة ممكن تاخد true او false على حسب انا بقصد مين بHe... وبالتالي هي مش statement

من الاخر اقدر أقول statement في حالة ان الجملة لا تحمل معنين ... معنى يخليها true و معنى يخليها false ... طيب امتى اخلى المثال التالت statement ... لو شلت he وحددت شخ معين ... برضو المثال الأول لو كان مثلا it is interesting مشهتبقى statement لاني مشعارف مين ال it ده.

المثال الرابع مينفعش يتقال عليه غير غلط بس لان فعلا -١ مشاكبر من الصفر.

المثال الخامس ...نفس الكلام بتاع التالت .... انا معرفش مين الx ومين الy ... فالبتالي ممكن تبقى true او false على حسب قيمة الx والy فالبتالي مينفعش تبقى statement ... لاني مثلا لو كان x=2 وy=3 هيبقى المجموع ٥ وبالتالي دي اكبر من صفر يعنى هتاخد true ولكن ممكن تبقى الx=-5 والy-1 وبالتالي المجموع هيبقى -٤ وده مشاكبر من الصفر يعنى هتبقى false ... وبالتالي قدرت اديها true وfalse بالتالي متبقاش statement

والمثال السادس ذي الرابع ... مينفعش ياخد غير false ..

من الاخر ... لازم الstatement تعبر عن fact ... ذي ما قال في التعريف.

TRUTH values of Simple Statements

The truth value of a proposition is

- ✓ **TRUE**: denoted by (T), if it is a true proposition,
- ✓ **False**: denoted by (F), if it is a false proposition.

ذي ما قولنا ان الstatement ليها قيمتين ... اما ture وهنرمزلها بالرمز T او false وهنرمزلها بالرمز F

Symbolic representation:

We use letters to denote propositional variables (or statement variables), that is, variables that represent propositions (statements), just as letters are used to denote numerical variables.

The conventional letters used for propositional variables are p, q, r, s, ...

هنا بيقول اننا بنستخدم الحروف للتعبير عن المتغيرات اللى بتعبر عن الstatements وبيقول ان الحروف المتفق على استخداماها هما p, q, r,s

For example:

p = “Cairo is the capital of Egypt” q = “17 is divisible by 3”

ذي هنا مثلا p تعبر عن جملة او statement والq تعبر عن statement تانية خال ... فلو حبيت استخدم الجملة الأول اللى فيها cairo يبقى هستخدم حرف p فقط وكذلك فالجملة التانية

Compound Statements

Compound statements are simple statements connected with one or more of the following connectives.

الجمل المركبة او الcompound statements ... عبارة عن اكتر من جملة مربوطين مع بعض ببعض الروابط ذي و او او وخلافه ...

Connective	Meaning	symbols	Called
Negation	Not	$\sim$, $\neg$	Tilde
Conjunction	And (but)	$\wedge$	Hat
Disjunction	Or	$\vee$	Vel
Conditional	If …. Then …..	$\rightarrow$	Arrow
Biconditional	….. if and only if ….	$\leftrightarrow$	Double arrow

Our goal is to convert compound statements to symbols using these connectives.

هدفنا اننا نحول الstatements لرموز ... طبعا هنستخدم الرموز اللى قولنا عليها فوق مع الروابط اللى في الجدول

For example:

Let p = "it is hot", and q = "it is sunny". **Translate from English to symbols:**

Statement	Symbolic form
1) It is not hot	$\sim p$
2) it is hot and sunny	$p \wedge q$
3) It is hot or sunny	$p \vee q$
4) It is not hot but sunny	$\sim p \wedge q$
5) It is neither hot nor sunny	$\sim p \wedge \sim q$

HOWEWORK:

Question 1:

Let h = "Zia is healthy", w = "Zia is wealthy" and s = "Zia is wise"

Translate the following compound statements to symbolic form

1) Zia is healthy and wealthy but not wise.
2) Zia is not wealthy but he is healthy and wise.
3) Zia is neither healthy, wealthy nor wise.

SOLUTION

1) $h \wedge w \wedge \sim s$
2) $\sim w \wedge h \wedge s$
3) $\sim h \wedge \sim w \wedge \sim s$

Question 2:

Let m = "Ali is good in Mathematics" and c = "Ali is a CS student"

Translate the following statement forms into plain English

1) $\sim c$
2) $c \vee m$
3) $m \wedge \sim c$

SOLUTION

1) Ali is **not** a CS student.
2) Ali is a CS student **or** good in Mathematics.
3) Ali is good in mathematics **but** he is **not** a CS student.

Third: Truth table.

A **truth table** specifies the truth value of a compound statement proposition for all possible truth values of its constituent propositions and all possible false values.

The number of possibilities depends on the number of the simple statements and it is calculated from the following relation:

$$no.of\ possibilites = 2^n$$

(n) is the number of the simple statements.

ايه قصة الtruth table ... دلوقتى احنا قولنا ان أي simple statement يعنى أي جملة واحدة اما بتاخد true or false ... طيب لو عندي compound statement مكونة من اكتر من جملة ... دي اكيد هيكون فيه عدد احتمالات اكبر لقيم الtrue or false ... في الtruth table بتحسب كل احتمالات ال true والfalse اللى ممكن تاخدها أي compound statement ... يعنى من الاخر الموضوع شبه الاحتمالات.

ذي مثلا لو قولت انا هرمى قطة نقود معدنية ١٠ مرات وعايز اعرف عدد الاحتمالات اللى ممكن تديني ملك وعدد الاحتمالات اللى ممكن تطلع كتابة ... نفس الكلام هنا عايز اعرف هيبقى كام مرة الcompound statement ممكن تبقى true وكام مرة ممكن تبقى false.

واللى هيحدد الموضوع ده الراوابط اللى شوفناها فوق ... يعنى لازم اعرف الtruth values لكل رابط ممكن تتعمل اذاي الأول. وده اللى هنشوفه دلوقتى.

وبالنسبة لعدد الاحتمالات هنحسبها من العلاقة 2^n والn دي هي عدد الجمل البسيطة ... هنثبتها قدام واحنا ماشيين

1) Negation

If p is a statement variable, then negation of p, "$\textbf{not}\ p$", is denoted by "$\sim p$". It has opposite truth value from p. (i.e. if p is true, then $\sim p$ is false and vice versa).

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^1 = 2$$

The truth table for (p)

p	$\sim p$
T	F
F	T

هنا بيقول لما استخدم النفي او علامة الnot هتقلب حالة الجملة وليكن p .... فلو p مثلا كانت true يبقى P~ او يسموها p NOT اكيد هتبقى العكس يعنى هتبقى false

احنا قولنا في الtruth table اننا بنجيب كل الاحتمالات اللى ممكن يكون فيها الجملة او التعبير كله true وكل الاحتمالات الfalse... طيب يا ترى هعرف منين كام احتمال ...

مثلا هنا انا عندي جملة واحدة فقط ... فاكيد اما true او false مفيش احتمال تاني غير كدة ... يعنى عندي احتمالين وممكن أقول ان عددهم بيساوي 2^1 بحيث ان ال٢ هي عدد الاحتمالات للجملة الواحدة و١ عدد الstatement او الجمل.

2) Conjunction (AND) ($\wedge$):

If p and q are statements, then the conjunction of p and q is "p and q", denoted by "$p \wedge q$".

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

The truth table for ($p \wedge q$)

p	q	$p \wedge q$
T	**T**	**T**
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Notes:

- ✓ ($p \wedge q$) is **always FALSE** and **<u>true</u>** only if both $p\ and\ q$ are true.
- ✓ If either p **or** q is false, or both are false, then ($p \wedge q$) is false.

هنا لو هربط بين جملتين بعلامة الand ... عشان الexpression او الجملة على بعضها تبق TRUE لازم الp والq هما ال٢ يبقوا TRUE ... غير كدة هيبقى FALSE يعنى لو واحدة فيهم او ال٢ بقوا FALSE يبقى اكيد الجملة المركبة على بعضها هتبقى FALSE.

ذي مثلا لو قولت انا هذاكر لو لقيت المحاضرات والكتاب مع بعض ... طيب لو لقيت واحدة منهم بس هذاكر ...اكيد لا ... يبقى الexpression على بعضه هيبقى FALSE يعنى مشهذاكر ... طيب امتى هذاكر يعنى امتى ال expression يبقى TRUE ... اكيد لما الاقي المحاضرات والكتاب مع بعض.

طيب هنا لاحظ ان كل جملة لوحدها ليها احتمالين فقط اما true او false لكن انا عندي هنا جملتين مع بعض يعنى ممكن ال٢ يبقو true وممكن واحدة منهم تبق true والتانية false يعنى كدة ٣ احتمالات وممكن ال٢ يبقو false يبقى كدة عندي ٤ احتمالات يعنى اقدر اقولها 2^2 والاس ده هو عدد الجمل البسيطة وهكذا بق فكل الجاي.

3) Disjunction (OR) (∨) or inclusive OR:

If p and q are statements, then the disjunction of p and q is "p or q", denoted by "$p \vee q$".

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

The truth table for ($p \vee q$)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Note:

- ✓ ($p \vee q$) is **always TRUE** and **false** only if both p *and* q are **false**.

هنا الor ... دايما بتخلي الجملة على بعضها بtrue ومتبقاش false غير لما الجملتين p وq يبقوا false.

يعنى مثلا لو قولت انا هذاكر لو لقيت المحاضرات او الكتاب ... يبقى لو لقيت ال٢ هذاكر يعنى TRUE ولو لقيت المحاضرات بس هذاكر ولو لقيت الكتاب بس برضو هذاكر يعنى فكل الأحوال هذاكر يعنى TRUE لكن مشهذاكر فحالة انى ملاقيش ال٢ ووقتها هيبقى FALSE.

4) Conditional Statements:

If p and q are statements, then the conditional of p by q is "*If* p **then** q", denoted by "$p \to q$".

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

The truth table for ($p \to q$)

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Note:

- ✓ ($p \to q$) is **always TRUE** and **false** only if (p) *is* ***TRUE*** *and* (q) *is* ***FALSE***.
- ✓ The arrow (→) is the conditional operator.

الconditional statement اسمها الجملة الشرطية واسمها شرطية لان فيه حاجة بتحصل بشرط حدوث حاجة تانية عشان كدة التعبير الإنجليزي اسمه if p then q يعني لو حصل p هيحصل q ... وهنا الif then دايما ture وميبقاش false غير لما يبقى الجملة اللى بعد if بtrue واللى بعد then تبقى بfalse يعنى الجملة اللى قبل السهم بtrue واللى بعد راس السهم بfalse ... خلينا نقولها بمثال بالعربي احسن

ذي مثلا ان تذاكر تنجح ... خلينا ناخد كل الحالات

لو ذاكرت يبقى هتنجح ... الجملة الأولى اللى هي الp هي كلمة ذاكرت والq هتبقى هتنجح

الحالة الأولى: لو قولت هتذاكر يبقى هتنجح ... هل التعبير ده صحيح يعنى TURE ... اه صحيح ... يبقى على بعضه TURE

الحالة التانية: لو ذاكرت مشهتنجح ... هل ده تعبير صحيح ... لا ... يبقى كله على بعضه FALSE وهتلاحظ ان الجملة الأولى اللى هي p اللى هي ذاكرت TURE والتانية FALSE فبقى التعبير كله FALSE.

الحالة التالتة: لو مذاكرتش هتنجح ... بتحصل مع ناس ... هتبقى TRUE برضو... هتلاحظ ان التعبير الأول FALSE والتاني TRUE فبقى كله على بعضه TURE

الحالة الرابعة: لو مذاكرتش مشهتنجح ... اكيد طبعا والجملة على بعضها TRUE ... مع ان الجملتين FALSE

يبقى كدة الجملة الشرطية دايما TRUE الا اذا كانت الجملة الأولى TURE والتانية FALSE.

5) Biconditional Statements: (exclusive NOR – XNOR)

If $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{q}$ are statements, then the biconditional of $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{q}$ is "$\boldsymbol{p\ If\ and\ only\ if\ q}$", denoted by"$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$".

"... $\boldsymbol{If\ and\ only\ if}$ ...." Is abbreviated as iff.

The double headed arrow "↔" is the biconditional operator.

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

The truth table for ($\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$)

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$
T	T	T
T	**F**	**F**
F	T	F
F	F	T

Note:

- ✓ ($\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$) is **TRUE** only when $(p)\ and\ (q)$ both are true or both are false.
- ✓ ($\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$) is **false** when either $(p)\ or\ (q)$ is false.

الجملة الشرطية المزدوجة ودي عشان تبق True لازم الجملتين اما يبقوا true اما يبقو false غير كدة الجملة على بعضها هتبقى FALSE ... ذي الXNOR

خلينا نتخيلها بمثال بالعربي:

مثلا ممكن أقول لو سحبت عينة الدم هعمل التحليل ... هنخلي p هي لو سحبت عينة الدم والq هتبقى هعمل التحليل ... طيب لو قولتها هعمل التحليل لو سحبت عينة الدم ... هل اختلفت ... لا ... عشان كدة سموها biconditional يعنى تنفع بالشكلين دول.

خلينا بقى ناخد كل الاحتمالات:

الاحتمال الأول: أقول مثلا لو سحبت العينة هعمل التحليل ... هل دي جملة منطقية ... اكيد طبعا ... وهنا الp والq هما ال٢ بtrue والجملة كلها على بعضها منطقية وبالتالي هتبقى true.

الاحتمال الثاني: أقول مثلا لو **مش** سحبت العينة **مش** هعمل التحليل ... هل دي جملة منطقية ... اكيد طبعا ... بس هنا لاحظ انى نفيت الجملتين يعنى الp والq هما ال٢ بfalse ولكن الجملة كلها على بعضها منطقية وبالتالي هتبقى true بالرغم ان الp والq هما ال٢ بfalse.

الاحتمال الثالث والرابع: لو قولت لو **مش** سحبت العينة هعمل التحليل ... هل ده منطقى ... اكيد لا ... لانك هتعمل التحليل اذاي من غير عينة يبقى الجملة على بعضها بFALSE ولو قولت لو سحبت العينة **مش** هعمل التحليل ... برضو مشمنطقى لانك هتسحب العينة ليه لو مشهتعمل تحليل ... يبقى برضو false ... تلاحظ هنا ان في الحالتين مرة الp كانت false والq بtrue والعكس فالحالة التانية وفالحالتين الجملة على بعضها بfalse.

يبقى اذن فحالة الbiconditional ... لازم الP والq يبقوا ال2 true او ال٢ false عشان يبقى الجملة على بعضها بtrue غير كدة يبقى false.

Fourth: Hierarchy of operations for logical connectives (precedence).

In evaluating a mathematical statement such as $(2 \times 5 + 6)$, the multiplying process has a high priority than summation.

Also, in evaluating the statement connected with the logical connectives, there is a hierarchy of operations for logical connectives:

- ✓ Brackets ( ).
- ✓ $(\sim)$ negation.
- ✓ $(\wedge)$ conjunction, $(\vee)$ disjunction.
- ✓ $(\rightarrow)$ conditional, $(\leftrightarrow)$ biconditional.

هنا بيتكلم عن الاسبقية في تقييم الجملة المركبة ... ذي نظام الاسبقية في عمليات الجمع والطرح والقسمة والضرب ... كنا بنقول ان الاسبقية للاقواس يعنى بعمل العمليات الحسابية اللى بين الاقواس الأول وبعد كدة كنا بنقول الأولوية للضرب والقسمة وبعد كدة الجمع والطرح ...

هنا بقى بنقول برضو ان الأولوية للاقواس وبعد كدة النفي او علامة الnot اللى هي $(\sim)$ وبعدها في الاولولية الand والOr في نفس الأولوية وبعد كدة الif then والif and only if ... طيب لو ٢ ليهم نفس الأولوية ... يبقى من الشمال لليمين.

EXAMPLE 1:

Construct a truth table for statement form

$$\sim p \wedge (q \vee \sim r)$$

Solution:

$$no.\,of\ possibilites\ =\ 2^n = 2^3 = 8$$

p	q	r	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$\sim p$	$\sim p \wedge (q \vee \sim r)$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F
F	F	F	T	T	T	T

الجدول بيتعمل اذاي:

طبعا اول حاجة هنفكر فيها هي اننا نجيب عدد الاحتمالات من العلاقة 2^n ... وبعد كدة نبدا نكتب الجمل البسيطة لوحدها اللى هي p والq والr .... من الشمال في ٣ عواميد ...

بعد كدة بيدأ من العمود اللى على اليمين اللى هو الr هنا وبيدأ يكتب مرة T ومرةF وT وF لحد ما اخد □ ٨ صفوف لاني انا عندي هنا في المثال ده 2^3 ب٨

بعد كدة بروح للعمود اللى جنبه اللى هو الq وبضرب الT في ٢ هيبقى عندى 2T يعنى هعملى صفين ورا بعض T وصفين F لحد ما اخد □ ال٨ صفوف

وبعد كدة اروح للعمود التالت اللى هو الp ... هشوف الq في اول صفين 2T هضربهم في ٢ فهيبقى عندي 4T يعني هعملى ٤ صفوف ورا بعض T و٤ ورا بعض Fب ... وكدة ابقى خلصت ال٨ صفوف

بعد كدة هعمل تقييم لباقي الجمل ذي ما اتعلمنا بس مع مراعاة الأولويات.

EXAMPLE 2:

Construct a truth table for statement form

$$p \vee \sim q \rightarrow \sim p$$

Solution:

$$no.\,of\ possibilites\ =\ 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \vee \sim q$	$p \vee \sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T

EXAMPLE 3:

Construct a truth table for statement form

$$(p \to q) \land (\sim p \to r)$$

Solution:

$$no.\,of\ possibilites = 2^n = 2^3 = 8$$

p	q	r	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \to r$	$(p \to q) \land (\sim p \to r)$
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F

Fifth: Tautology and Contradiction.

Tautology

Tautology

A tautology is a statement form that is always TRUE regardless of the truth values of the statement variables.

A tautology is represented by the symbol **"t"**.

EXAMPLE:

The statement for $p \lor \sim p$ is tautology.

p	$\sim p$	$p \lor \sim p$
T	F	T
F	T	T

ال tautology معناها تكرار المعنى ... بمعنى ايه هنا ... هنا بيقول ان الجملة عشان أقول عليها tautology يبقى لازم تبق دايما TRUE مهما كانت الtruth value بتاعة الجمل البسيطة بتاعتها ... وطبيعي لما يبقى فيه جملة دايما صح باي شكل من اشكالها يبقى لو قولتلها باي شكل هتديك نفس المعنى وهتبقى true عشان كدة سموها tautology بمعنى تكرار المعنى.

Contradiction:

Contradiction

A contradiction is a statement form that is always FALSE regardless of the truth values of the statement variables.

A **contradiction** is represented by the symbol **"c"**.

EXAMPLE:

The statement for $p \wedge \sim p$ is contradiction.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

الContradiction يعنى تناقض ... وهنا بيقول ان الجملة المركبة دايما false مهما كانت الtruth value بتاعة الجمل البسطية ... وده معناه ان الجملة مهما قولتها بشكل مختلف هتبقى متناقضة يعنى هتبقى بfalse ...

Lecture TWO

2) Logical equivalence:

Logical equivalence

Compound propositions that have the same truth values in all possible cases are called logically equivalent.

We can also define this notion as follows:

The compound propositions (Statement) (p) and (q) are called logically equivalent if $(p \leftrightarrow q)$ is a tautology.

The notation $(p \equiv q)$ denotes that (p) and (q) are logically equivalent.

الlogical equivalence معناها التساوي المنطقي يعنى يقصد بيها ان يكون عندي جملتين متساويين في كل الtruth values بتاعتهم …

طيب هو هنا بيقول ان الجلمتين p وq يبقوا متساويين منطقيا لما يكون ال$q \leftrightarrow p$ تبقى tautology او دايما كل الtruth values بتاعتها بtrue… برضو يعنى ايه … دلوقتى احنا في الbiconditional قولنا انها تبقى true لما الجملتين P وq يكونوا اما ال٢ true او ال٢ false … طيب تخيل ان ال٢ ليهم نفس الtruth value … يعنى ال٢ اما true او ال٢ اما false ومفيش واحدة فيهم false والتانية true … فده معناه كل الtruth value بتاعة $p \leftrightarrow q)$ كلها هتبقى true … او نقدر نقولها بشكل مختلف ان لو p والq كل الtruth values بتاعتهم متساوية بالظبط او متطابقة بالظبط يبقى الجملة المركبة $p \leftrightarrow q$ هتبقى كل الtruth values بتاعتها TRUE يعنى هتبقى tautology.

بنعبر عن الequivalence بالرمز ≡ يعنى لما أقول ان $p \equiv q$ هيبقى معناها ان الp هتكون equivalent للq.

NOTE:

- ✓ The symbol $(\equiv)$ is not a logical connective, and $(p \equiv q)$ is not a compound proposition but rather is the statement that $(p \leftrightarrow q)$ is a tautology.
- ✓ Logical equivalence is important in the design of digital circuits. Several circuits may be logically equivalent, in that they all have identical truth tables. The goal of the engineer is to find the circuit that performs the desired logical function using the least possible number of gates. This will result in optimal operating efficiency, reliability, and speed.

هنا فالملاحظات دي بيقول ان الرمز ≡ مش Logical connective يعنى مشرابط بيربط جملتين ذي الand والor وان الجملة $p \equiv q$ مشجملة مركبة ولكن مجرد تعبير عن التساوي المنطقي للجملتين p وq ومعناها ان ال$(p \leftrightarrow q)$ هيكون tautology.

والملاحظة التانية بيقول الLogical equivalence مهم في تصميم الدواير الكهربية بتاعة الأجهزة الرقمية او الdigital.

One way to determine whether two compound propositions are equivalent is to use a truth table.

In particular, the compound propositions (p) and (q) are equivalent if and only if the columns giving their truth values agree.

Let's take examples:

هنا بيقول ان عشان تعرف هل الجملتين المركبتين هيكونوا equivalent لبعض ولا لا يبقى لازم تعمل truth table وتشوف لو كل الtruth values بتاعتهم متساوية ومتطابقة يبقى اذن الجملتين هيكون equivalent

1) Double negativity property:

The negation of the negation of a statement is logically equivalent to the statement, which means that:

$$\boldsymbol{p} \equiv \sim(\sim \boldsymbol{p})$$

ال**double negation** دي اللى بنقلها بالعربي نفي النفي اثبات وخلينا نشوفها بمثال

EXAMPLE:

$\boldsymbol{p} = \ I'm\ happy$

$\sim\boldsymbol{p} = \ I'm\ not\ a\ happy.$

$\sim(\sim\boldsymbol{p})$ = it's not true that I'm not happy; which means that I'm happy.

هنا لما أقول انا سعيد ... دي جملة ... نفيها ... انا مش سعيد ... طيب لو قولت لا مشصح انى مشسعيد يعنى معناها انى سعيد ... فالجملة الأخيرة انا نفيت النفي وبالتالي نفي النفي اثبات ... اعتبر كانى بقول سالب في سالب بموجب ... خلينا نشوفها في الtruth table

Let's confirm that with a truth table.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	**T**
F	T	**F**

Comment:

These 2 statements are logically equivalent since they have the same truth value in each row.

لاحظ في الtruth table العمود بتاع الp والعمود بتاع $\sim(\sim\boldsymbol{p})$ .... هتلاقي ال٢ الtruth values متطابقين تماما ولو فكرت مثلا اعمل $\sim(\sim\boldsymbol{p}) \leftrightarrow \boldsymbol{p}$ هتطلع كل القيم **TURE** يبقى فعلا اقدر أقول ان ال**p** وال$\sim(\sim\boldsymbol{p})$ هيبقوا **equivalent** لبعض.

في الامتحان لازم تكتب الكومنت اللى مكتوب فالاخر عشان تقول ان الجملتين equivalent عشان ليهم نفس الtruth values ...

2) De Morgan laws:

The De Morgan laws are

1) **1st law:**

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

2) **2nd law:**

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \ \wedge \sim q$$

دي قوانين لعالم اسمه ديمورجان ... القانون الأول بينفي جملة p and q على بعضها ويقول لما النفي يدخل عالقوس بيحول الand لor ... والقانون التاني النفي لما بيدخل على الor بيحولها لand ... ومطلوب مننا نثبت الكلام ده صح ولا غلط بالtruth tables ذي المثال الفات

كل الأمثلة الجاية مشهيكون فيها شرح بالعربي لان كلهم شبه الفات

Let's confirm this using the truth tables

Confirming of the first law:

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	**F**	**F**
T	F	F	T	F	**T**	**T**
F	T	T	F	F	**T**	**T**
F	F	T	T	F	**T**	**T**

Comment:

These 2 compound statements are logically equivalent since they have the same truth values in each row.

Confirming of the second law:

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	**F**	**F**
T	F	F	T	T	**F**	**F**
F	T	T	F	T	**F**	**F**
F	F	T	T	F	**T**	**T**

Comment:

These 2 compound statements are logically equivalent since they have the same truth values in each row.

EXAMPLE 1:

- ✓ If you get ≥ 50, then you will succeed $(p \to q)$
- ✓ Let $p =$ *you get* ≥ 50 & $q =$ *you will succeed*
- ✓ $\sim q \to \sim p \equiv$ If you failed, then you got < 50

Show that $(p \to q) \equiv \sim q \to \sim p$ are equivalent.

SOLUTION

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**
T	F	F	T	**F**	**F**
F	T	T	F	**T**	**T**
F	F	T	T	**T**	**T**

Comment:

These 2 compound statements are logically equivalent since they have the same truth value in each row.

EXAMPLE 2:

Are the following two statements equivalent

$$(p \vee q) \to r \ and \ (p \to r) \wedge (q \to r)$$

SOLUTION

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^3 = 8$$

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \vee q) \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
T	T	T	T	T	T	**T**	**T**
T	T	F	T	F	F	**F**	**F**
T	F	T	T	T	T	**T**	**T**
T	F	F	T	F	T	**F**	**F**
F	T	T	T	T	T	**T**	**T**
F	T	F	T	T	F	**F**	**F**
F	F	T	F	T	T	**T**	**T**
F	F	F	F	T	T	**T**	**T**

Comment:

These 2 compound statements are logically equivalent since they have the same truth value in each row.

EXAMPLE 3:

Are the following two statements equivalent

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

SOLUTION

$$no.\,of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	**F**	**F**
T	F	F	T	**T**	**F**
F	T	T	F	**T**	**F**
F	F	T	T	**T**	**T**

Comment:

These 2 compound statements are **not** logically equivalent since they have different truth values in row 2 and 3.

3) Representation of if-then as or:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$p = you\ don't get\ to\ work\ on\ time$

$q = you\ are\ fired$

$p \rightarrow q = \boldsymbol{if}\ you\ don't\ get\ to\ work\ on\ time\ \boldsymbol{then}\ you\ are\ fired$

$\sim p \vee q = either\ you\ get\ to\ work\ on\ time\ or\ you\ are\ fired$

دي ذي قانون ... فدي حاجة ثابته

Check the previous equivalent.

$$no.\,of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	**T**	**F**	**T**	**T**
T	F	F	**F**	**F**
F	T	T	**T**	**T**
F	F	T	**T**	**T**

Comment:

These 2 compound statements are logically equivalent since they have the same truth value in each row.

4) The negation of a conditional statement:

The negation of *"if p then q"* equivalent to *"p and not q"*

$$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

ودي برضو حاجة ثابته والمثالين اللى جايين عليها بس بالكلام مشtruth tableبال

EXAMPLE 4:

Write the negation of:

If Ali lives in Egypt then he lives in Cairo.

SOLUTION

Ali lives in Egypt ***and*** *he doesn't live in Cairo*

EXAMPLE 5:

Write the negation of:

If my car is in the repair shop, then I cannot get to class.

SOLUTION

My car is in the repair shop ***and*** *i can get to class*

5) The inverse, converse and contrapositive of a conditional statement:

One of the most fundamental laws of logic is the equivalence between a conditional statement and its contrapositive.

Two other variants of a conditional statement are not logically equivalent to the statement.

هنا بيقول ان واحدة من قوانين الLogic الأساسية هي الequivalence بين الجملة الشرطية (if then) وبين الcontrapositive بتاعها ... يعنى ايه contrapositive .... contra معناها مضاد وpositive معناها إيجابي ... يعنى ايه المضاد الايجابي ... يعنى جملة هتبقى نفي الجملة الشرطية يعنى مضادها ولكن تدي نفس المعنى بالظبط ... ده من الاخر يعنى

فيه بقى الinverse ... ودي المعكوس بتاع الجملة الشرطية يعنى هننفي الp والq من غير ما نغير أماكنهم وعندي المقلوب اللى هو الconverse وده من اسمه مقلوب ... يعنى بقلب أماكن الp والq ... الinverse والconverse مفيش equivalence بينهم وبين الجملة الشرطية.

بالنسبة للcontrapositive عبارة عن نفي الconverse يعنى بنفي الp والq بس بغير اماكنهم

Definition

Suppose a conditional statement of the form "If p then q" is given.

1) The converse is "If q then p." $[(\boldsymbol{p \to q})\ \boldsymbol{is}\ (\boldsymbol{q \to p})]$
2) The inverse is "If ~p then ~q." $[(\boldsymbol{p \to q})\ \boldsymbol{is}\ (\boldsymbol{\sim p \to \sim q})]$

The Contrapositive of a Conditional Statement

The contrapositive of a conditional statement of the form "If p then q" is

If $(\sim q)$ then $(\sim p)$.

$$(p \to q)\ is\ (\sim q \to \sim p)$$

The fact is that A conditional statement is logically equivalent to its contrapositive.

EXAMPLE 5:

check whether the conditional statement is equivalent to its inverse, converse, contrapositive using truth table.

SOLUTION

$$no.of\ possibilites = 2^n = 2^2 = 4$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$\sim p \to \sim q$	$q \to p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T
				If then	**Contrapositive**	**Inverse**	**Converse**

Comment:

The if-then statement and its contrapositive are logically equivalent since they have the same truth value in each row.

However, the if-then statement and its inverse and its converse are not logically equivalent since they have different truth values in rows 2 and 3.

But the inverse and converse of the if-then statement are equivalent since they have the same truth value in each row.

ذي ماحنا شايفين الcontrapositive فيه equivalence بينه وبين الجملة الشرطية والinverse والconverse مفيش equivalence بينهم وبين الجملة الشرطية ولكن ال٢ مع بعض equivalent لبعض

EXAMPLE 6:

Write the inverse, converse and contrapositive of each of the following statements:

a) If Howard can swim across the lake, then Howard can swim to the island.
b) If today is Easter, then tomorrow is Monday.

SOLUTION

a) If Howard can swim across the lake, then Howard can swim to the island.

- ✓ ***Inverse:*** $(\sim p \rightarrow \sim q)$ If Howard cannot swim across the lake, then Howard cannot swim to the island.
- ✓ ***Converse:*** $(q \rightarrow p)$ If Howard can swim to the island, then Howard can swim across the lake.
- ✓ ***Contrapositive:*** $(\sim q \rightarrow \sim p)$ If Howard cannot swim to the island, then Howard cannot swim across the lake.

b) If today is Easter, then tomorrow is Monday.

- ✓ ***Inverse:*** $(\sim p \rightarrow \sim q)$ If today is not Easter, then tomorrow is not Monday.
- ✓ ***Converse:*** $(q \rightarrow p)$ If tomorrow is Monday, then today is Easter.
- ✓ ***Contrapositive:*** $(\sim q \rightarrow \sim p)$ If tomorrow is not Monday, then today is not Easter.

---

3) Logical Circuits:

I) Principle of logical circuits:

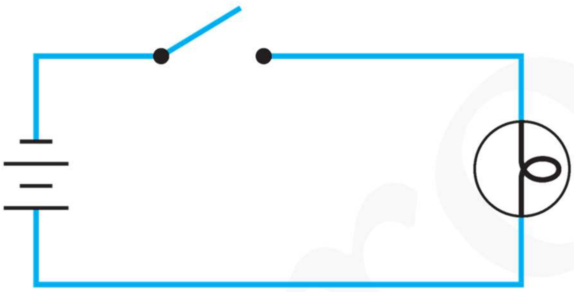
- ✓ Claude Shannon noticed an analogy between the operations of switching devices, such as telephone switching, circuits, and the operations of logical connectives.
- ✓ He used this analogy with striking success to solve problems of circuit design and wrote up his results in his master's thesis

هنا بيقول ان فيه عالم اسمه Claude Shannon لقي تشابه بين الأجهزة اللى فيها مفتايح غلق وفتح للأجهزة وبين الراوبط بتاعة الlogic اللى هي ال and والor والnot ... وبيقولو هو استخدم التشابه ده فانه حل مشاكل في تصميم بعض الدواير وكتب ده في رسالة الماجستير بتاعته.

The following drawing shows the appearance of the two positions of a simple switch. When the switch is closed, current can flow from one terminal to the other; when it is open, current cannot flow.

هنا بيقول ان الكهربة مشهتمر في السلك غير لما نقفل الswitch او المفتاح ده وده باين من الرسم

Imagine that such a switch is part of the circuit shown in the following figure. The light bulb turns on if, and only if, current flows through it. And this happens if, and only if, the switch is closed.

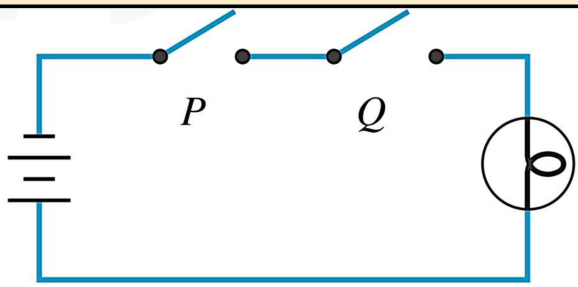


The symbol  denotes a battery and the symbol  denotes a light bulb.

بيقولك تخيل ان الswitch ده جزء من دايرة كهربية وفيها لمبة ... بيقول ان اللمبة مشهتنور غير لما يمر فيها التيار الكهربي والتيار الكهربي مشهيمر غير لما الswitch او المفتاح يتقفل ... وبالتالي هيكون عندنا احتمالين توصيل ذي اللى جايين

Now consider the more complicated circuits of the following figures:

a) Figure (a):



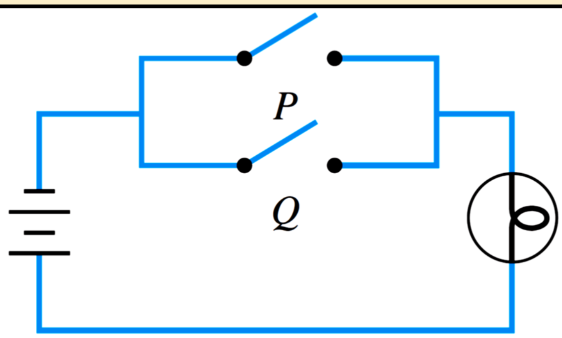
Switches "in series"

(a)

In this circuit, the current flows and the light bulb turns on if, and only if, both switches (P) and (Q) are closed. The switches in this circuit are said to be in series.

هنا بيقول ان عندي مفتاحين كهربة وال٢ متوصلين عالتوالي ... بالتالي التيار الكهربي مشهيمر غير لما ال٢ يتقفلو واكيد دول شبه الand بتاعة الlogic

b) Figure (b):



Switches "in parallel"

(b)

In this circuit, the current flows and the light bulb turns on if, and only if, at least one of the switches (P) or (Q) is closed. The switches in this circuit are said to be in **parallel**

هنا بيقول ان عندي مفتاحين كهربة وال٢ متوصلين عالتوازي ... بالتالي التيار الكهربي هيمر لو أي واحد فيهم اتقفل الp او الq .... واكيد ده شبه الor بتاعة الlogic

c) All possible behaviors of these circuits

(a) Switches in Series

Switches		Light Bulb
Closed	Closed	On
Closed	Open	Off
Open	Closed	Off
Open	Open	Off

(b) Switches in Parallel

Switches		Light Bulb
Closed	Closed	On
Closed	Open	On
Open	Closed	On
Open	Open	Off

Observe that if the words $\boldsymbol{closed}$ and $\boldsymbol{on}$ are replaced by $(\boldsymbol{T})$ and $\boldsymbol{open}$ and $\boldsymbol{off}$ are replaced by $(\mathbf{F})$, Table (a) becomes the truth table for $(\boldsymbol{and})$ and Table (b) becomes the truth table for $(\boldsymbol{or})$.

Consequently, the switching circuit of Figure (a) is said to correspond to the logical expression $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$, and that of Figure (b) is said to correspond to $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$.

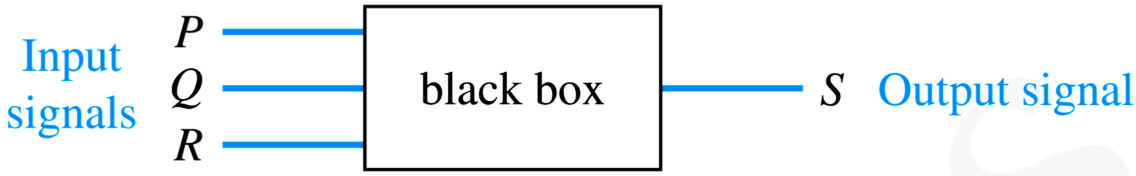
هنا جايب الجدول لكل احتمالات الغلق والفتح للمفاتيح في الدايرتين اللى على التوالي واللى على التوازي .. وبيقول لو شلت كل كلمة closed وكل on وحطيت مكانها T وشلت كل open وoff وحطيت مكانها F هتلاقي ان الجداول a اللى فيه التوصيل على التوالي هيشبه الtruth table بتاع الand والتاني هيشبه الtruth table بتاع الor

This correspondence has been used extensively in the design and study of circuits.

This led to the development of modern digital systems such as electronic computers, electronic telephone switching systems, traffic light controls, electronic calculators, and the control mechanisms used in hundreds of other types of electronic equipment.

2) Black Boxes and Gates

Because a variety of different technologies are used in circuit construction, computer engineers and digital system designers find it useful to think of certain basic circuits as black boxes. The inside of a black box contains the detailed implementation of the circuit and is often ignored while attention is focused on the relation between the **input** and the **output** signals.



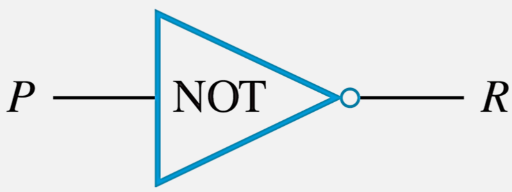
هنا بيقول ان مهندسين الكومبيوتر بداو يفكرو في بعض الدواير الكهربية على انه ذي الصندوق الأسود ... بداخل الصندوق بعض التفاصيل عن طريقة عمل الدايرة ولكن بيهملو التفاصيل في حالة انهم عايزين يعرفوا العلاقة بين المدخلات او الinputs وبين المخرجات او الoutputs

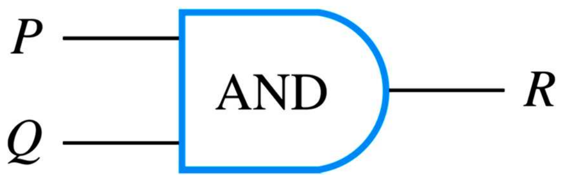
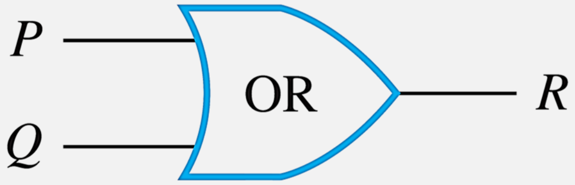
An efficient method for designing more complicated circuits is to build them by connecting less complicated black box circuits. Three such circuits are known as $NOT-, AND-, and\ OR-gates$.

- ✓ $\boldsymbol{A\ NOT - gate}$ $(\boldsymbol{or\ inverter})$ is a circuit with **one input** signal and one output signal. If the input signal is (1), the output signal is (0). Conversely, if the input signal is 0, then the output signal is (1).
- ✓ $\boldsymbol{An\ AND - gate}$ is a circuit with **two input** signals and one output signal. If both input signals are (1), then the output signal is (1). Otherwise, the output signal is (0).
- ✓ $\boldsymbol{An\ OR - gate}$ also has **two input** signals and one output signal. If both input signals are (0), then the output signal is (0). Otherwise, the output signal is (1).

بيقول عشان نعمل دواير معقدة هنعملها من توصيل دواير بسيطة من ٣ أنواع من الدواير بنسميها gates وهما الand والor والnot .. وبيقول ان الnot-gate بتاخد مدخل واحد فقط وبتعكس ال1 لصفر والصفر ل١ ... وعندنا الand gate ودي بتاخد مدخلين وبتدي ١ فقط في حالة ان المدخلين كل واحد فيهم ب١ غير كدة هيدي صفر وعندنا الor-gate بتاخد مدخلين وبتبقى ٠ لو المدخلين اصفار غير كدة يبقى ١

The actions of $NOT-, AND-, and\ OR-gates$ are summarized in the following table, where (P) and (Q) represent input signals and (R) represents the output signal.

<table>
<tr><th>Type of Gate</th><th>Symbolic Representation</th><th>Action</th></tr>
<tr><td>NOT</td><td>
</td><td><table>
<tr><th>Inputs</th><th>Outputs</th></tr>
<tr><th>P</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>AND</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Inputs</th><th>Outputs</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>OR</td><td>
</td><td>
<table>
<tr><th colspan="2">Inputs</th><th>Outputs</th></tr>
<tr><th>P</th><th>Q</th><th>R</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

It should be clear from the previous table that the actions of the $NOT-, AND-, and\ OR-gates$ on signals correspond exactly to those of the logical connectives $\sim, \wedge, and\ \vee$ on statements, if the symbol (1) is identified with (T) and the symbol (0) is identified with (F).

طبعا في الجدول ده ... فيه جدول لكل احتمالات الاصفار والوحايد لكل دايرة وبيقول طبعا لو بدلت ال١ ب T وال٠ بF هتلاقيه شبه الtruth table بالظبط

Gates can be combined into circuits in a variety of ways. If the rules shown next are obeyed, the result is a combinational circuit, one whose output at any time is determined entirely by its input at that time without regard to previous inputs

بيقول ان الgates دي ممكن نوصلها ببعض بطرق مختلفة ولو قواعد التوصيل التالية التزمنا بيه هيكون النتيجة معانا دايرة معقدة

Rules for a Combinational Circuit

1) Never combine two input wires.
2) A single input wire can be split partway and used as input for two separate gates.
3) An output wire can be used as input.
4) No output of a gate can eventually feed back into that gate.

القاعدة الأولى بتقول ... متوصلش سلكين لinput 2 فبعض وبعد كدة تدخلهم على الgate ... لكن هتدخل كل واحد لوحده في الgate ... القاعدة التاينة بتقول انك ممكن تاخد تفريعة من الinput وتوصلها في gate تانية ... القاعدة التالتة بتقول ممكن السلك الخارج من الgate تدخله كinput في gate تانية .... القاعدة الرابعة بتقول ان مينفعش تاخد سلك خارج من gate وتلفه وترجع تدخله تاني في نفس الgate

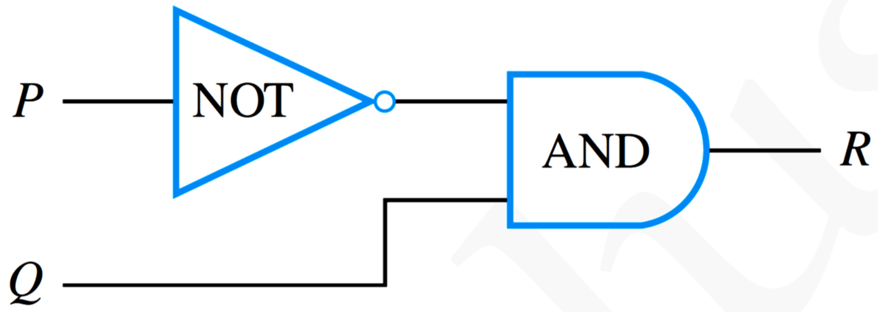
The Input/Output Table for a Circuit

If you are given a set of input signals for a circuit, you can find its output by tracing through the circuit gate by gate.

هنا بيقول لو انت عندك مدخلات وانت عارف كل مدخل هل هو ١ ولا ٠ هتقدر تعرف المخرج بتاع الدايرة هيكون ايه ... ذي الأمثلة الجاية.

EXAMPLE 7:

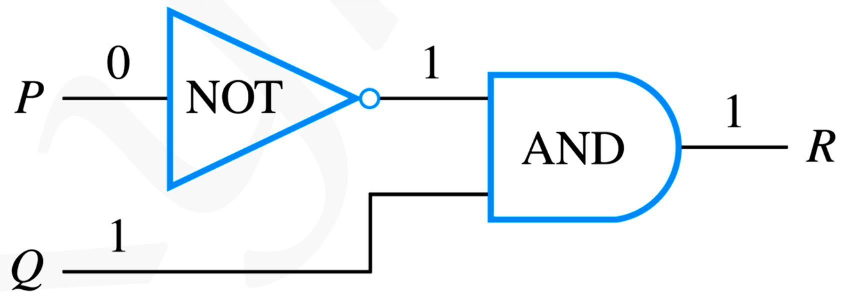
Indicate the output of the circuits



If the Input signals: $P = 0$ and $Q = 1$

SOLUTION

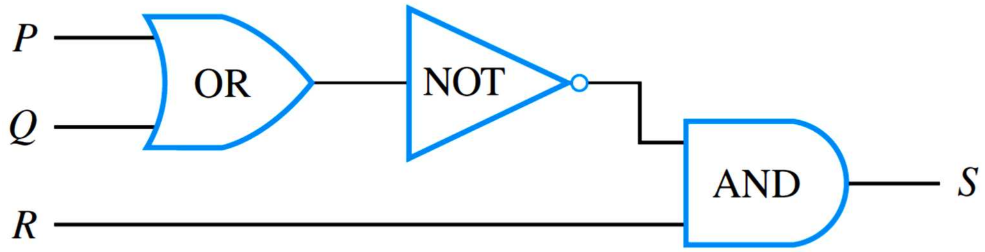
Move from left to right through the diagram, tracing the action of each gate on the input signals. $The\ NOT - gate$ changes $P = 0$ to 1, so both inputs to the AND-gate are 1; hence the output $R\ is$ 1. This is illustrated by annotating the diagram as shown below.



طبعا الكلام الإنجليزي عبارة عن شرح اذاي تحل المسالة ... والموضوع بسيط ... هتطبق Not الأول على الP فهتتقلب لـ١ وهيبقى المدخلات على الand هما ال١ واحدة والناتج هيكون ١ برضو ... وهنحل كل الأمثلة بنفس الطريقة

EXAMPLE 8:

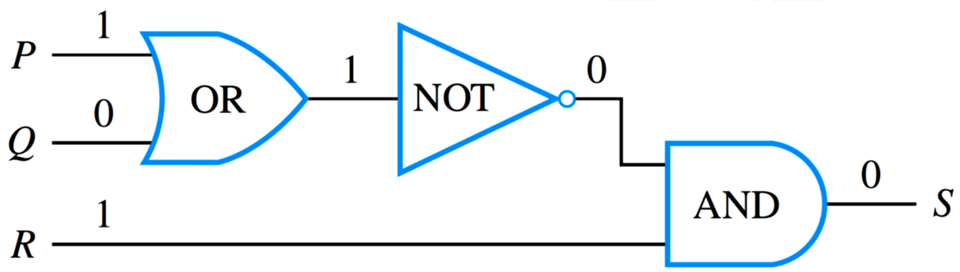
Indicate the output of the circuits



If the Input signals: Input signals: $P = 1$, $Q = 0$, $R = 1$

SOLUTION

The output of the $OR - gate$ is 1 since one of the input signals, P, is 1. The $NOT - gate$ changes this 1 into a 0, so the two inputs to the AND-gate are 0 and R = 1. Hence the output S is 0. The trace is shown below.



The Boolean Expression for a Circuit

In logic, variables such as p, q and r represent statements, and a statement can have one of only two truth values: T $(true)$ or F $(false)$. A statement form is an expression, such as $p \wedge (\sim q \vee r)$, composed of statement variables and logical connectives.

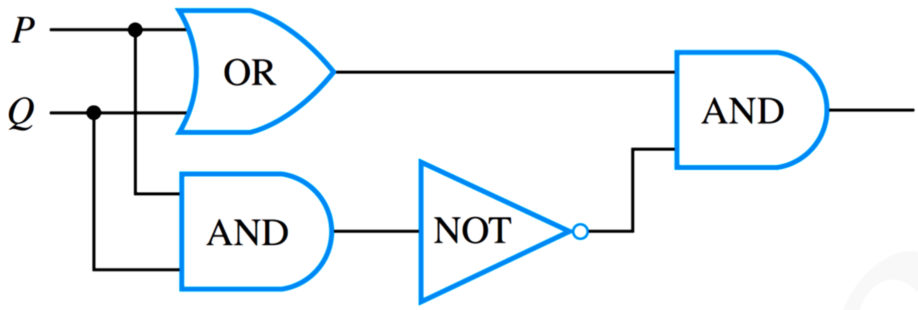
As noted earlier, any variable, such as a statement variable or an input signal, that can take one of only two values is called a **Boolean variable**. An expression composed of Boolean variables and the connectives $\sim$, $\wedge$, and $\vee$ is called a **Boolean expression**.

Given a circuit consisting of combined $NOT-$, $AND-$, and $OR - gates$, a corresponding Boolean expression can be obtained by tracing the actions of the gates on the input variables.

هنا من الاخر مشعايزك تطلع النتيجة ب٠ او ١ ولا تطلع أي نتيجة أساسا ... كل اللى عايزه منك ان تكتب العلاقة بالand والor ... ذي مثلا $p \vee q$ مشاكتر من كدة

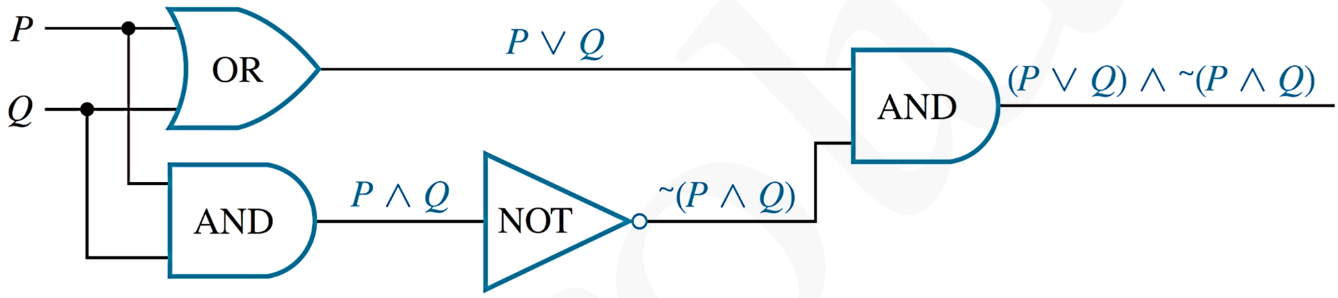
EXAMPLE 9:

Find the Boolean expressions corresponding to the circuits



SOLUTION

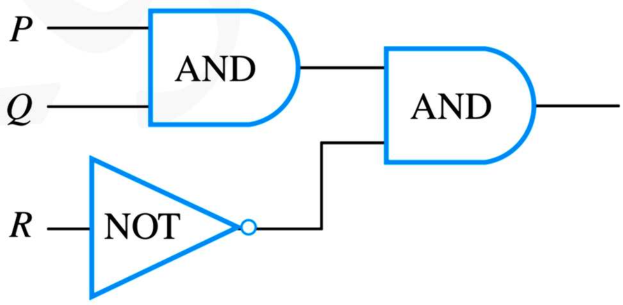
Trace through the circuit from left to right, indicating the output of each gate, as shown below.



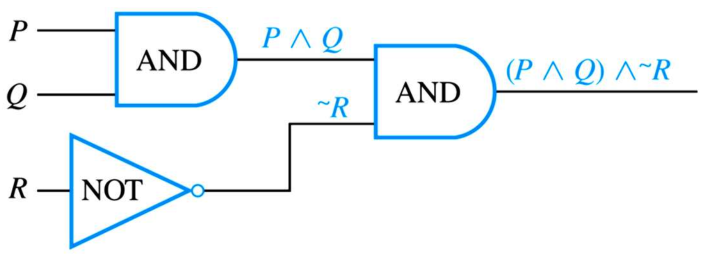
The final expression obtained, $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \sim (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$, is the expression for exclusive or: *P or Q but not both.*

EXAMPLE 10:

Find the Boolean expressions corresponding to the circuits



SOLUTION



The Boolean expression corresponding to the circuit is $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \wedge \sim \boldsymbol{R}$

Constructing Circuits for Boolean Expressions

The preceding examples showed how to find a Boolean expression corresponding to a circuit. The following example shows how to construct a circuit corresponding to a Boolean expression.

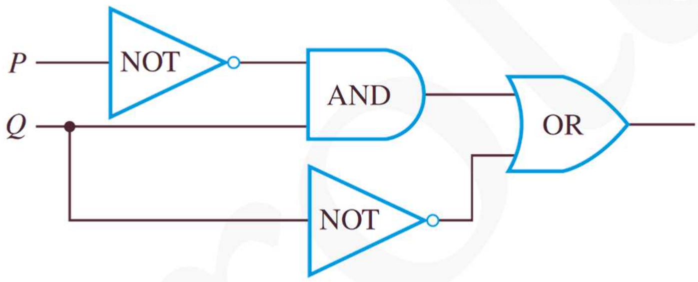
هنا عايز يديلك الexpression او الجملة المركبة وانت اللى تعمل الدايرة

EXAMPLE 11:

Construct circuits for the following Boolean expression

$$(\sim \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \vee \sim \boldsymbol{Q}$$

SOLUTION



How to draw a logical circuit:

Write the input variables in a column on the left side of the diagram. Then go from the right side of the diagram to the left, working from the outermost part of the expression to the innermost part.

Since the last operation executed when evaluating $(\sim P \wedge Q) \vee \sim Q$ is $\vee$, put an $OR - gate$ at the extreme right of the diagram.

One input to this gate is $\sim P \wedge Q$, so draw an $AND - gate$ to the left of the $OR - gate$ and show its output coming into the $OR - gate$.

Since one input to the $AND - gate$ is $\sim P$, draw a line from P to a $NOT - gate$ and from there to the $AND - gate$.

Since the other input to the $AND - gate$ is Q, draw a line from Q directly to the $AND - gate$. The other input to the $OR - gate$ is $\sim Q$, so draw a line from Q to a $NOT - gate$ and from the $NOT - gate$ to the $OR - gate$.

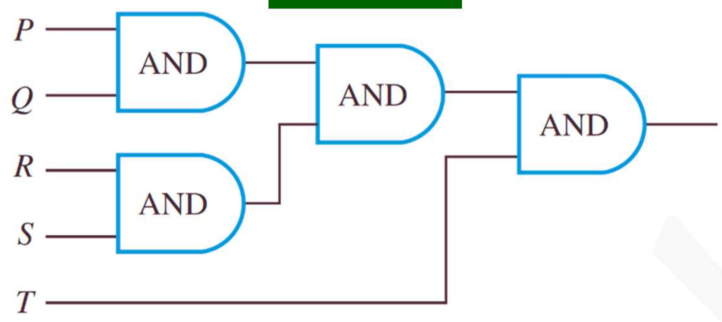
ده شرح لطريقة الرسم ... وباختصار ... كل الموضوع انك هتكتب المدخلات تحت بعض عالشمال وهتشوف اخر operator من الand والor فالstatement من ناحية اليمين ... وهنا هو الor وهيبقى هو برضو اللى على اليمين ... من الاخر هتلاقي ترتيب الgates في الرسم هو نفسه ترتيبهم في الجملة المكتوبة.

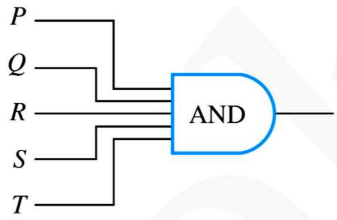
EXAMPLE 12:

Construct circuits for the following Boolean expression

$$((P \wedge Q) \wedge (R \wedge S)) \wedge T$$

SOLUTION





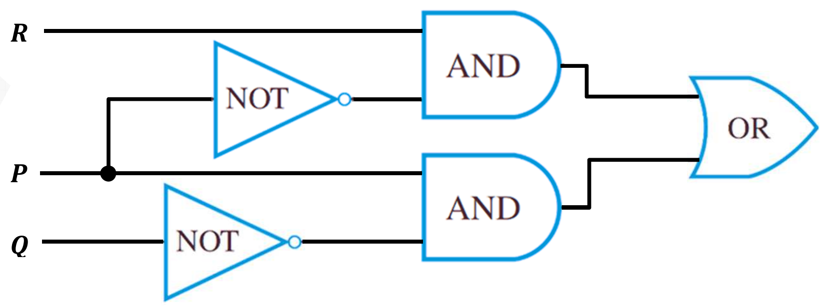
هنا بيقول لو فكرت تعمل truth table مثلا ... هتلاقي ان الرسمة اللى فوق ممكن تعملها بشكل الرسمة اللى تحت

HOMEWORK 2:

Construct circuits for the following Boolean expression

$$(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge R)$$

SOLUTION



Lecture THREE

3) Valid and Invalid Arguments:

In mathematics and logic, an argument is not a dispute. It is a sequence of statements ending in a conclusion. In this section we show how to determine whether an argument is valid—that is, whether the conclusion follows necessarily from the preceding statements.

We will show that this determination depends only on the form of an argument, not on its content.

For example, the argument

If Socrates is a man, then Socrates is mortal.

– Socrates is a man (p).
∴ Socrates is mortal (q).

has the abstract form

If p then q

p
∴ q

When considering the abstract form of an argument, think of p and q as variables for which statements may be substituted. An argument form is called valid if, and only if, whenever statements are substituted that make all the premises true, the conclusion is also true.

الargument عبارة عن مجموعة statements تنتهي بconclusion او استنتاج .... ذي مثلا لو سقراط انسان يبقى اكيد فاني ... الجملة الشرطية اقدر اكتبها فجملتين وأقول بما ان سقراط انسان .. وهعتبر دي premises يعنى مقدمات منطقية او تقدر تقول معطيات ... طيب نتيجة المعطيات دي ايه ... ان سقراط فاني وهقولها اذن سقراط فاني ... يبقى عندي الجملة والاستنتاج دول على بعض اسمهم argument ..

هدفنا في المحاضرة دي اننا نقول هل الargument دي valid يعنى صحيحة او منطقية ولا لا ... طيب امتى تبقى منطقية ... لما يبقى المعطيات والاستنتاج كلهم true يبقى الargument هنقول انها valid ولو المعطيات كانت true والاستنتاج كان false يبقى الargumanet هيكون invalid

I) Definition

An argument is a sequence of statements, and an argument form is a sequence of statement forms. All statements in an argument and all statement forms in an argument form, except for the final one, are called premises (or assumptions or hypotheses).

The final statement or statement form is called the conclusion. The symbol ∴, which is read “therefore,” is normally placed just before the conclusion.

To say that an argument form is valid means that no matter what particular statements are substituted for the statement variables in its premises, if the resulting premises are all true, then the conclusion is also true. To say that an argument is valid means that its form is valid.

It is impossible to have a valid argument with true premises and a false conclusion. When an argument is valid and its premises are true, the truth of the conclusion is said to be inferred or deduced from the truth of the premises.

خلاصة كل الكلام ده ... ان الargument عبارة عن statements وconclusion واخر جملة خال اللى قبلها علامة ال∴ هتبقى هي الconclusion وان الargument تبقى valid لما الpremises والconclusion يبقى كلهم true

2) Testing an Argument Form for Validity

1) Identify the premises and conclusion of the argument form.

2) Construct a truth table showing the truth values of all the premises and the conclusion.

3) A row of the truth table in which all the premises are true is called **a critical row**.

If there is a critical row in which the conclusion is false, then it is possible for an argument of the given form to have true premises and a false conclusion, and so the argument form is invalid. If the conclusion in every critical row is true, then the argument form is valid.

هنا عايز يقولك ايه الخطوات اللى هتعملها عشان تقدر تحدد ان الargument هتبقى valid ولا invalid ...

بيقول اول حاجة هتحدد مين الpremises ومين الconclusion وطبعا احنا قولنا الconclusion هو اللى قبل علامة ال∴ ...

بعد كدة هعمل truth table لكل الجمل والconclusion ... وبعد كدة هشوف الصفوف بتاعة الpremises ولو لقيت صف كل الpremises فيه true .. يبقى هحدد الصفوف دي وهيبقى اسمها critical rows ...

بعد كدة هشوف هل ال conclusion في الcritical rows هو كمان true ولا false ... ولو كان الconclusion على كل الcritical rows هو كمان true يبقى الargument هيكون valid ... ولكن لو critical row واحد منهم فيه الconclusion كان false يبقى الargument مش valid

---

EXAMPLE 1:

Determine whether the following argument form is valid or invalid

$$p \to q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

SOLUTION

p	q	$p \to q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

This argument form is valid since all the critical rows have true conclusion.

ملحوظة ... لازم في الامتحان نحدد الاعمدة بتاعة الpremises والconlusion ونكتب عليهم بنفس الطريقة دي ونكتب كمان السطر الأخير والى بيقول ان الvaild argument عشان كل الcrtical rows فيهم true conclusion

---

EXAMPLE 2:

Determine whether the following argument form is valid or invalid

$$p \vee (q \vee r)$$

$$\sim r$$

$$\therefore\ p \vee q$$

SOLUTION

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\sim r$	$p \vee q$
T	T	T	T	T	F	**T**
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	**T**
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	**T**
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F

This argument form is valid since all the critical rows have true conclusion.

EXAMPLE 3:

Determine whether the following argument form is valid or invalid

$$p \to q \lor \sim r$$

$$q \to p \land r$$

$$\therefore\ p \to r$$

SOLUTION

Premises Conclusion

p	q	r	$\sim r$	$q \lor \sim r$	$p \land r$	$p \to q \lor \sim r$	$q \to p \land r$	$p \to r$
T	T	T	F	T	T	***T***	***T***	***T***
T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	***T***	***T***	***F***
F	T	T	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	***T***	***T***	***T***
F	F	F	T	T	F	***T***	***T***	***T***

The argument is invalid since in row 4 there is true premises and false conclusion.

لاحظ ان الargument هيكون invalid عشان فيه critical row واحد فقط فيه الfalse conclusion

---

4) Mathematical Induction:

1) Introduction

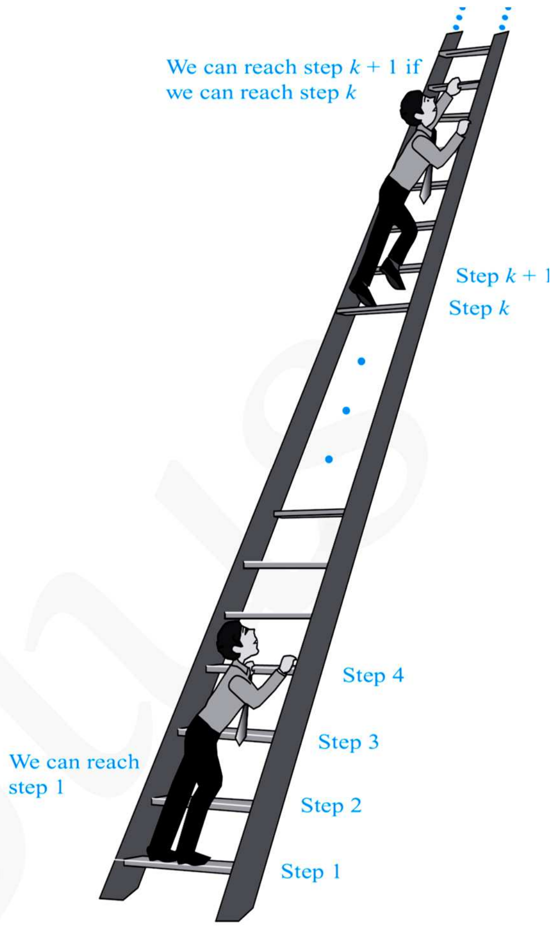
- ✓ Many mathematical statements assert that a property is true for all positive integers.
- ✓ Examples of such statements are that for every positive integer n: $n! \le n^n$, $n^3 - n$ is divisible by 3; a set with n elements has 2^n subsets; and the sum of the first n positive integers is $\frac{n(n+1)}{2}$.
- ✓ A major goal of this subject, is to give the student a thorough understanding of mathematical induction, which is used to prove results of this kind.

Suppose that we have an infinite ladder and we want to know whether we can reach every step on this ladder, we know two things

1) We can reach the first rung of the ladder.

2) If we can reach a particular rung of the ladder, then we can reach the next rung.

can we conclude that we are able to reach every rung of this infinite ladder?



By (1), we know that we can reach the first rung of the ladder. Moreover, because we can reach the first rung, by (2), we can also reach the second rung; it is the next rung after the first rung.

Applying (2) again, because we can reach the second rung, we can also reach the third rung. Continuing in this way, we can show that we can reach the fourth rung, the fifth rung, and so on. Continuing in this way, we can show that we can reach the fourth rung, the fifth rung, and so on.

But can we conclude that we are able to reach every rung of this infinite ladder? The answer is yes, something we can verify using an important proof technique called **mathematical induction**.

mathematical induction is used extensively to prove results about a large variety of discrete objects. For example, it is used to prove results about the complexity of algorithms, the correctness of certain types of computer programs, theorems about graphs and trees, as well as a wide range of identities and inequalities.

In this lecture, we will describe how mathematical induction can be used and why it is a valid proof technique.

It is extremely important to note that **mathematical induction** can be used only to prove results obtained in some other way. It is *not* a tool for discovering formulae or theorems.

باختصار ... الmathematical induction عبارة عن طريقة تثبت بيها صحة علاقة رياضة ولكن مشهتعمل بيها برهان لعلاقة رياضية ... ومدي مثال السلم ... وبيقول انت لو قدرت تطلع السلمة الأولى هتقدر تطلع التانية وهتقول بما انك طلعت الرابعة يبقى اكيد هتوصل الخامسة وهكذا وهي دي نفس الطريقة بتاعة ال mathematical induction ... انك هتجرب العلاقة الرياضية على اول حد وبعد كدة هتعمل القانون عند حد هيكون اسمه k وبعد كدة هتثبت ان القانون صحيح عن k+1 ... بس كدة

2) Principle of Mathematical Induction:

In general, mathematical induction can be used to prove statements that assert that $P(n)$ is true for all positive integers n, where $P(n)$ is a propositional function.

Proving this by mathematical induction has Three steps:

1) **Initial step**: we need to show that $P(1)$ is true (i.e. prove that the rules is true at $n = 1$).
2) **Hypothesis step:** we need to show that for all positive integers $k, p(k)$ is true (i.e. prove that the rule is true at $n = k$).
3) **Inductive step**: we need to prove that if $P(k + 1)$ is true because $p(k)$ is true.

الخطوات اللى هنعمل بيها الكلام ده ايه ..

الخطوة الأولى انك هتعوض عند اول حد وليكن الحد ده عبارة عن n=1

الخطوة التانية هفرض ان العلاقة صحيحة عند n=k

الخطوة التالتة هثبت ان العلاقة صحيحة عن k+1

In case of Equality:

EXAMPLE 4:

Use mathematical induction to prove that

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}\ ; \quad for\ all\ integers\ n \geq 1.$$

SOLUTION

$P(n)$ is the equation $\left(1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

The initial step:

At $n = 1$, $\frac{n(n+1)}{2}$ should equal (1), which means $P(1) = 1$

$$P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P(1) is\ true$$

او حد عندي هو ال١ هعوض بيه عادي ... وهشوف هل النتيجة هي ١ ولا لا ... لان مجموع اول حد هو ال١

Hypothesis step:

At $n = k$,

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

هنا هعمل العلاقة عند n=k

Inductive step:

At $n = k + 1$,

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\therefore RHS\ of\ P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

From the hypothesis step:

If

$$LHS\ of\ P(k) = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

By adding $(k+1)$

$$LHS\ of\ P(k+1) = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$LHS\ of\ P(k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = (k+1)\left[\frac{k+2}{2}\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\therefore LHS\ of\ P(k+1) = RHS\ of\ P(k+1)$$

Thus, the two sides of $P(k+1)$ are equal to each other.

Therefore, the equation $P(k+1)$ is true *Since we have proved both the initial step and the inductive step, we conclude that the theorem is true.*

هنا كل اللى عملته قولت ان المعادلة عند k+1 بتساوي كذا

وبعد كدة قولت من الخطوة التانية الlhs اللى هي الleft hand side كان كذا ولو ضفت عليه k+1 هيبقى كذا وهحاول أوصل شكل العلاقة من الخطوة الافتراضية لنفس الشكل بتاع المعادلة اللى جبتها من k+1

EXAMPLE 5:

Use mathematical induction to prove that

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{i+1} - 1}{r - 1}; \quad for\ all\ integers\ n \geq 0.$$

SOLUTION

$P(n)$ is the equation $\left(\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{i+1}-1}{r-1}\right)$

The initial step:

At $n = 0$, $\frac{(r^{i+1}+1)}{r-1}$ should equal (0), which means $P(0) = 1$

$$P(0) = \frac{r^{i+1}+1}{r-1} = \frac{r^{0+1}+1}{r-1} = \frac{r-1}{r-1}$$

$$P(0) is\ true$$

Hypothesis step:

At $n = k$,

$$\sum_{i=0}^{k} r^k = \frac{r^{(k+1)}+1}{r-1}$$

Inductive step:

At $n = k+1$,

$$\sum_{i=0}^{k+1} r^{k+1} = \frac{r^{(k+1)+1}+1}{r-1} = \frac{r^{(k+2)}-1}{r-1}$$

$$\therefore RHS\ of\ P(k+1) = \frac{r^{(k+2)}-1}{r-1}$$

From the hypothesis step:

If

$$LHS\ of\ P(k) = \sum_{i=0}^{k} r^k = \frac{r^{(k+1)}-1}{r-1}$$

By adding $(k+1)$

$$LHS\ of\ P(k+1) = \sum_{i=0}^{k} r^k + r^{k+1} = \frac{r^{(k+1)}-1}{r-1} + r^{k+1}$$

$$LHS\ of\ P(k+1) = \frac{r^{(k+1)}+1}{r-1} + r^{k+1} = \frac{r^{(k+1)} - 1 + (r^{k+1})(r-1)}{r-1}$$

$$LHS\ of\ P(k+1) = \frac{\cancel{r^{(k+1)}} - 1 + r(r^{k+1}) - \cancel{(r^{k+1})}}{r-1}$$

$$LHS\ of\ P(k+1) = \frac{(r^{k+2})-1}{r-1}$$

$$\therefore LHS\ of\ P(k+1) = RHS\ of\ P(k+1)$$

Thus, the two sides of $P(k\ +\ 1)$ are equal to each other.

Therefore, the equation $P(k\ +\ 1)$ is true *Since we have proved both the initial step and the inductive step, we conclude that the theorem is true.*

Lecture FOUR

4) Mathematical Induction:

In case of Equality:

EXAMPLE 1:

Use mathematical induction to prove that

$$1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + (5n - 4) = \frac{n(5n - 3)}{2} ; \forall\, n \geq 1$$

SOLUTION

The initial step:

At $n = 1$,

$$LHS = 1$$

$$RHS = \frac{1(5 \times 1 - 3)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$so, LHS = RHS \text{ at the initial term}$$

Hypothesis step:

We assume that the rule is true at k

At $n = k$,

$$LHS = 1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + (5k - 4)$$

$$RHS = \frac{k(5k - 3)}{2}$$

Inductive step:

Prove that the rule is true at $k + 1$

At $n = k + 1$,

$$LHS = 1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + (5k - 4) + (5(k + 1) - 4)$$

$$RHS = \frac{(k + 1)[5(k + 1) - 3]}{2}$$

From the hypothesis step:

$$LHS = 1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + (5k - 4) + (5(k + 1) - 4)$$

$$LHS = \frac{k(5k-3)}{2} + (5(k+1)-4)$$

هنا ايه اللى حصل ... فالخطوة التانية احنا جبنا لحد الk ومجموعهم هو $\frac{k(5k-4)}{2}$ ... طيب عند k+1 اكيد هيبقى المجموع ده مضاف عليه الحد بتاع الk+1 وده اللى عمله هنا وهيبدا يبسط الكلام ده.

$$LHS = \frac{k(5k-3) + 2[5(k+1)-4]}{2}$$

$$LHS = \frac{5k^2 - 3k + 2[5k+5-4]}{2}$$

$$LHS = \frac{5k^2 - 3k + 2[5k+1]}{2}$$

$$LHS = \frac{5k^2 - 3k + 10k + 2}{2}$$

$$LHS = \frac{5k^2 + 7k + 2}{2}$$

هنا بقى الLHS مشهنعرف نجيبه بنفس شكل الRHS فالحل اننا نحور الRHS ونفكه ونشوف هل هيساوي الRHS ولا لا.

$$RHS = \frac{(k+1)[5(k+1)-3]}{2}$$

$$RHS = \frac{(k+1)[5k+2]}{2}$$

$$RHS = \frac{5k^2 + 2k + 5k + 2}{2}$$

$$RHS = \frac{5k^2 + 7k + 2}{2}$$

$$\therefore LHS = RHS$$

Therefore, the equation is true *Since we have proved both the initial step and the inductive step, we conclude that the theorem is true.*

In case of Inequality:

EXAMPLE 2:

Use mathematical induction to prove that

$$2n + 1 < 2^n, n \geq 3$$

SOLUTION

The initial step:

At $n = 3$,

$$LHS = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$RHS = 2^3 = 8$$

$$so, LHS < RHS \text{ at the initial term}$$

Hypothesis step:

We assume that the rule is true at k

At $n = k$,

$$LHS = 2k + 1$$

$$RHS = 2^k$$

$$2k + 1 < 2^k$$

Inductive step:

Prove that the rule is true at $k + 1$

At $n = k + 1$,

$$LHS = 2(k + 1) + 1 = 2k + 2 + 1 = 2k + 3$$

$$RHS = 2^{k+1}$$

$$2k + 3 < 2^{k+1}$$

From the hypothesis step:

هنا بقي عايزين ناخد الكلام اللى في الhyposis step ونلعب فيه لحد ما يوصل للشكل الأخير اللى عملناه في الinduction step. ... هنعملها اذاي

$$2k + 1 < 2^k$$

By adding 2 to both sides

$$2k + 1 + 2 < 2^k + 2$$

$$2k + 3 < 2^k + 2$$

دلوقتى الطرف الشمال عرفنا نوصله لنفس الشكل اللى جبناه في الinduction step ... طيب الطرف اليمين هنعمل فيه ايه ... دلوقتى لو شلت ال2 خالد ⍰ وحطيت مكانه حد اكبر منه وليكن 2k ... هيتغير حاجة .... اكيد لا ... لان المتابينة هتبقى ذي ما هي بمعنى لو قولت

2<3

ده حقيقي ... وشلت ال٣ وحطيت مكانها ٥ ...

2<5

متغيرش حاجة برضو لان فالاخر المتباينة فالنهاية TRUE وده المنطق اللى هنشتغل بيه.

Replacing 2 from the RHS by 2^k

$$2k + 3 < 2^k + 2^k$$

$$2k + 3 < 2 \times 2^k$$

$$2k + 3 < 2^{k+1}$$

$$\therefore LHS < RHS$$

EXAMPLE 3:

Use mathematical induction to prove that

$$\boldsymbol{n^2 < 2^n, \qquad \forall\, n \geq 5}$$

SOLUTION

The initial step:

At $n = 5$,

$$LHS = 5^2 = 25$$

$$RHS = 2^5 = 32$$

$$so, LHS < RHS \text{ at the initial term}$$

Hypothesis step:

We assume that the rule is true at k

At $n = k$,

$$LHS = k^2$$

$$RHS = 2^k$$

$$k^2 < 2^k$$

Inductive step:

Prove that the rule is true at $k + 1$

At $n = k + 1$,

$$LHS = (k+1)^2$$

$$RHS = 2^{k+1}$$

$$(k+1)^2 < 2^{k+1}$$

$$k^2 + 2k + 1 < 2^{k+1}$$

From the hypothesis step:

$$k^2 < 2^k$$

By adding $(2k + 1)$ to both sides

$$k^2 + 2k + 1 < 2^k + 2k + 1$$

دلوقتی انا عايز الطرف اليمين يبقى 2^{k+1} طبيعي اني هشيل ال$2k+1$ وهحط حاجة اكبر منها والمفروض الحاجة دي تكون 2^k عشان نوصل ل2^{k+1} بنفس الطريقة في المثال اللى فات ... بس لازم نتاكد ان

$$2k + 1 < 2^k$$

هنجرب مرة الk ب٥ مرة ب٦ مرة ٧ هنلاقي ان المتاباينة دي صح ... يبقى اذن اقدر اشيل $2k+1$ واحط مكانها 2^k

Replacing $(2k + 1)$ from the RHS by 2^k

$$k^2 + 2k + 1 < 2^k + 2^k$$

$$k^2 + 2k + 1 < 2 \times 2^k$$

$$k^2 + 2k + 1 < 2^{k+1}$$

$$\therefore LHS < RHS$$

EXAMPLE 4:

Use mathematical induction to prove that

$$\boldsymbol{n^3 > 2n + 1, \qquad \forall\ n \geq 2}$$

SOLUTION

The initial step:

At $n = 2$,

$$LHS = 2^3 = 8$$

$$RHS = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$so, LHS > RHS \text{ at the initial term}$$

Hypothesis step:

We assume that the rule is true at k

At $n = k$,

$$LHS = k^3$$

$$RHS = 2k + 1$$

$$k^3 > 2k + 1$$

Inductive step:

Prove that the rule is true at $k + 1$

At $n = k + 1$,

$$LHS = (k+1)^3$$

$$RHS = 2(k+1) + 1$$

$$(k+1)^3 < 2(k+1) + 1$$

$$(k+1)(k+1)(k+1) < 2(k+1) + 1$$

$$(k^2 + 2k + 1)(k+1) < 2k + 3$$

$$k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + 1 < 2k + 3$$

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 < 2k + 3$$

From the hypothesis step:

$$k^3 > 2k + 1$$

By adding $(3k^2 + 3k + 1)$ to both sides

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > 2k + 1 + 3k^2 + 3k + 1$$

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > 2k + 2 + 3k^2 + 3k$$

نفس الكلام ... هنشيل ال$3k^2 + 3k$ ونحط مكانه ١ ولازم نتأكد ان

$$1 < 3k^2 + 3k$$

ليه ... عشان هنا المتباينة لازم فيها الطرف اليمين اقل من الشمال يعنى لو شلت ال$3k^2 + 3k$ وحطيت مكانها ١ ايه المشكلة ... هيفضل برضو اليمين اقل من الشمال وجرب الk ب١ و٢ و ٣ هتلاقي فعلا الكلام صح

Replacing $(3k^2 + 3k)$ from the RHS by 1

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > 2k + 2 + 1$$

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 > 2k + 3$$

$$\therefore LHS > RHS$$

5) Recursion:

One of the most important tasks of mathematics is to discover and characterize regular patterns, such as those associated with processes that are repeated. The main mathematical structure used in the study of repeated processes is the sequence, and the main mathematical tool used to verify conjectures about sequences is **mathematical induction**. In this topic we introduce the notation and terminology of sequences, illustrate the various ways recursively defined sequences arise, describe a method for obtaining an explicit formula for a recursively defined sequence.

من الاخر الrecursion معناها ايه ... ان عندي حاجة بتكرر بنظام او بشكل او بpattern معين فبعملها انا معادلة تمشى على التكرار ده ... في الأمثلة اللى اخدناها في الinduction كان فيه متسلسلات بتمشى بشكل معين واحنا كنا بنثبت ان العلاقة دي صح بالinduction ... هنا في الrecursion احنا بنجيب التسلسل ده.

I) Sequences

A sequence is a discrete structure used to represent an ordered list. For example, 1,2,3,5,8 a sequence with five terms and 1, 3, 9, 27, 81, ...,3n,... is an infinite sequence.

الsequence معناها التسلسل وبيقول ان التسلسل ده عبارة عن لستة او تسلسل مرتب وبيكون discrete وممكن يكون تسلسل محدود او تسلسل غير محدود

Imagine that a person decides to count his ancestors. He has two parents, four grandparents, eight great-grandparents, and so forth, These numbers can be written in a row as

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

To express the pattern of the numbers, suppose that each is labeled by an integer giving its position in the row.

Position in the row	1	2	3	4	5	6	7 . . .
Number of ancestors	2	4	8	16	32	64	128 . . .

The number corresponding to position 1 is 2, which equals 2^1. The number corresponding to position 2 is 4, which equals 2^2. For positions 3, 4, 5, 6, and 7, the corresponding numbers are 8, 16, 32, 64, and 128, which equal $2^3, 2^4, 2^5, 2^6, and\ 2^7$, respectively. For a general value of (n), let a_n be the number of ancestors in the n^{th} generation back. The pattern of computed values strongly suggests the following for each (n):

$$a_n = 2^n$$

هنا بقى بيتكلم على ان اللى اكتشف الموضوع بدا معاه بانه كان عايز يحسب عدد اجداده فقال ابوه وامه كل واحد عنده اب وام يعنى كدة ٤ جدود والاربع جدود دول كل واحد عنده اب وام يعنى كدة ٨ جدود كمان وهكذا

فلقى ان اول بداية العد عنده اب وام يعنى٢ ودي عن عبارة عن ٢١ والموقع التاني ال٤ عبارة عن ٢٢ والموقع التالت فيه ٨ جدود عبارة عن ٢٣ ... نلاحظ ان الاس هو رقم الحد يعنى اقدر أقول عند الموقع n عندي 2^n جدود ... دي الفكرة

طيب السؤال ... انا هعمل ده اذاي لاي تسلسل بالشكل ده ...

اما اني اكتب التسلسل وأرقام الحدود بنفس الطريقة اللى فالجدول دي واجيب علاقة كدة مباشرة بنفس الطريقة اللى عملها الراجل اللى بيحسب عدد جدوده ودي اسمها الexplicit form ... او اني استعمل ال recurrence relation

2) 1st order Recurrence relation:

Arithmetic sequence:

Let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be the sequence defined recursively as follows: For all integers $k \geq 1$

$$a_k = a_{k-1} + 2 \qquad \textit{Recurrence relation}$$

$$a_0 = 1 \qquad \textit{initial condition}$$

Use iteration to guess an explicit formula for the sequence.

هنا بيقول ان عندي تسلسل عبارة عن $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ودي رموز للحد الأول والتاني والتالت الى ما لا نهاية ... ومديني الrecurrence relation واللى هي $a_k = a_{k-1} + 2$ ودي معناها ان كل حد بنجيبه باننا بنضيف ٢ على الرقم اللى قبله ... وعندي الa_0 او الحد الأول ... وبالتالي اقدر اجيب التسلسل بانى اضيف ٢ يعنى اقدر اعمل كدة

$$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 7 + 2 = 9$$

يبقى اذن اقدر اكتب التسلسل كدة

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

... بس برضو فيه مشكلة .. انا لو عايز اعرف الحد رقم ١٠٠ هيبقى بكام هعرف اجيبه اذاي وانا مشعارف الحد اللى قبله ...عشان كدة لازم اجيب الrecurrence rule بتاعته ... وعشان نعمل ده هنشوف الخطوات:

Steps:

1) Start from the initial
2) Calculate the successive terms of the sequence until you see a pattern.
3) Stop after 4^{th} term.
4) No parenthesis:
   a. (5×2) instead of $2 + 2 + 2 + 2 + 2$
   b. (2^5) instead of $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

الخطوات بتقول انى هبدا من الحد الأول خال ⍰ اللى هو الa_0 وبعد كدة احسب الحدود اللى بعده لحد الحد رقم ٤ يعنى لحد a_4 او لحد ما اشوف تتابع معين ... وبالنسبة للنقطة الرابعة دايما لما الاقي حاجة جمع اضرب الرقم في عدده ولو عندي رقم مضروب في نفسه اكتر من مرة يبقى هجمع الأسس.

هنكمل بقى باقي المثال اللى شغالين عليه ... المفروض هنعمله اذاي ... بدل مانا بجمع واعمل الطريقة اللى فاتت هعمل الاتي

$$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2$$

$$a_2 = a_1 + 2 = (1 + 2) + 2 \qquad = 1 + \mathbf{2} \times 2$$

$$a_3 = a_2 + 2 = (1 + 2 + 2) + 2 \qquad = 1 + \mathbf{3} \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 = (1 + 2 + 2 + 2) + 2 \qquad = 1 + \mathbf{4} \times 2$$

انا عندي ال٢ بتتجمع على نفسها اكتر من مرة ... ولو تلاحظ ان رقم الحد هو نفسه عدد تكرار ال٢ ذي ما مكتوب قدام كل سطر يبقى اقدر اكتب الاتي

$$a_n = (1 + n \times 2) = (1 + 2n)$$

Geometric sequence:

دي بقى المتسلسلة الهندسية .... ايه الفرق بين المتسلسلة الحسابية والهندسية ... الحسابية بيبقى تتابع ناتج من جمع حاجة على كل term مثلا .... اما المتسلسلة الهندسية بيجي عن طريق ضرب كل term في رقم تاني.

Let $a_0, a_1, a_2, \dots$ be the sequence defined recursively as follows: For all integers $k \geq 1$

$$a_k = 5a_{k-1} \qquad \textit{Recurrence relation}$$

$$a_0 = 1 \qquad \textit{initial condition}$$

Use iteration to guess an explicit formula for the sequence.

1) **Start at initial:**

$$a_0 = 1$$

2) **Calculate the successive terms:**

$$a_1 = 5a_0 = 5 \times 1 \qquad 5^1 \times 1$$

$$a_2 = 5a_1 = 5 \times (5 \times 1) \qquad 5^2 \times 1$$

$$a_3 = 5a_2 = 5 \times (5 \times 5 \times 1) \qquad 5^3 \times 1$$

$$a_4 = 5a_3 = 5 \times (5 \times 5 \times 5 \times 1) \qquad 5^4 \times 1$$

The recurrence relation will be:

$$\boldsymbol{a_n = 5^n \times 1 = 5^n}$$

والطبيعي ان أي متسلسلة هندسية هتبقى عبارة عن رقم مرفوع لاس n.

EXAMPLE 5:

Bank pays interest = 4% and the initial amount is 100,000.

No withdraw or no deposits.

How much the account will be at the end of 21 years?

In how many years the account will be 1 million?

SOLUTION

1) **Start at initial:**

$$a_0 = 100000$$

لما بنحسب الفايدة المفروض بنضرب الرقم في ٠,٠٤ وبنجمع الرقم الناتج على الرقم الأساسي ولكن عشان اختصر دي ممكن اضرب الرقم في ١,٠٤

2) **Calculate the successive terms:**

$$a_1 = 1.04\, a_0 = 1.04 \times 100000$$

$$a_2 = 1.04\, a_1 = 1.04 \times (1.04 \times 100000)$$

$$a_3 = 1.04\, a_2 = 1.04 \times (1.04 \times 1.04 \times 100000)$$

$$a_4 = 1.04\, a_3 = 1.04 \times (1.04 \times 1.04 \times 1.04 \times 100000)$$

$$\boldsymbol{The\ recurrence\ relation\ will\ be}:$$

$$\boldsymbol{a_n = 1.04^n \times 100000}$$

The account will be at the end of 21 years

$$at\ n = 21$$

$$a_{21} = 1.04^{21} \times 100000 = 227876.8069$$

The account will be 1 million in:

$$a_n = 1.04^n \times 100000 = 1000000$$

$$1.04^n = \frac{1000000}{100000} = 10$$

$$\log(1.04^n) = \log(10)$$

$$n\ \log(1.04) = \log(10)$$

$$n = \frac{\log(10)}{\log(1.04)} = 58.7\ years$$

EXAMPLE 6:

Find explicit form for.

$$m_k = 2m_{k-1} + 1, \qquad \forall \geq 2, m_1 = 1$$

SOLUTION

1) **Start at initial:**

$$m_1 = 1$$

2) **Calculate the successive terms:**

$$m_2 = 2m_1 + 1 = 2(1) + 1 = 2 + 1$$

$$m_3 = 2m_2 + 1 = 2(2+1) + 1 = 2(2) + 2 + 1 = 2^2 + 2 + 1$$

$$m_4 = 2m_3 + 1 = 2(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$$\boldsymbol{The\ explicit\ form\ will\ be}:$$

$$\boldsymbol{m_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1}$$

This is called sum of geometric series which can be calculated from the following relation:

in case of finite geometric series is:

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a}\,(1 - \boldsymbol{r^n})}{\boldsymbol{1 - r}} \qquad or \qquad \frac{\boldsymbol{r^{n+1} - 1}}{\boldsymbol{r - 1}}$$

in case of infinite geometric series is:

$$\boldsymbol{S_\infty} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1 - r}}$$

In this example the $r = 2$

$$m_n = \frac{2^{n-1+1} - 1}{2 - 1} = \frac{2^n - 1}{1} = 2^n - 1$$

$$\therefore m_n = 2^n - 1, \qquad \forall n \geq 1$$

هنا عوضنا عن الn ب1-n عشان تلاحظ ان مثلا m_2 الاس بتاع ال٢ فيها ب١ يعنى لما الn كانت ب٢ الاس كان ب1-n

Lecture FIVE

5) Recursion:

3) 2nd order Recurrence relation:

ال1st order ... عبارة عن تسلسل كل رقم فيه بيعتمد على رقم واحد من اللى قبل ... لكن ال2nd order عبارة عن تسلسل بيعتمد على رقمين قبله ... وهنشوف دلوقتى مثال توضيحي واذاي فيبوناتشى اكتشفها

The Fibonacci Numbers

One of the earliest examples of a recursively defined sequence arises in the writings of Leonardo of Pisa, commonly known as Fibonacci.

Fibonacci posed the following problem:

A single pair of rabbits (male and female) is born at the beginning of a year. Assume the following conditions:

1) Rabbit pairs are not fertile during their first month of life but thereafter give birth to one new male/female pair at the end of every month.
2) No rabbits die.

How many rabbits will there be at the end of the year?

ايه حكاية فيبوناتشى ... فيبوناتشى جاب جوز ارانب واكيد طبعا male and female ... الارانب اول شهر مبيخلفوش وبيخلفو من الشهر التاني .... وهو افترض ان مفيش ارانب هتموت او ارانب هيجيبها يحطها معاهم من برة ... فالسؤال دلوقتى ... يا ترى على اخر السنة هيكون معاه كام ارنب؟؟؟ ياترى حلها اذاي

Solution

One way to solve this problem is to plunge right into the middle of it using recursion.

He makes the following observations in the next table:

Month	Reproducing pairs	Old pairs	Total pairs
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

The he conclude that: The number of rabbit pairs alive at the end of month k equals the ones alive at the end of month $k - 1$ plus the pairs newly born at the end of the month.

He found that this relation can be written as follow:

من الجدول ده فهم ان عدد الأزواج في نهاية كل شهر بيكون عبارة مجموع الأزواج في الشهرين اللى قبله ... ذي مثلا في الشهر التالت فيه زوجين وده عبارة عن مجموع الشهرين اللى قبل اللى كان في كل واحد فيهم زوج واحد فقط ... وفي الشهر الرابع عبارة عن مجموع الأزواج في الشهرين اللى قبل وهكذا ... وبالتالي هو لقي ان ده يتلخ في العلاقة التالية:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

This means that if I want to know the number of pairs at the end of the year, I should know the number of pairs at the last 2 months in the years. This means I should calculate the number of pairs at all months.

So, I should find the way to make a recurrence relation that makes me calculate the number of pairs at each year or month without knowing the number of pairs at the end of the previous 2 months.

هنا بيقول انه عشان يعرف عدد الأزواج فاخر السنة لازم يعرف عدد الأزواج في اخر شهرين من السنة وده معناه انه لازم يحسب العدد في شهور السنة كلها ... طيب افرض لو عايز يعرف في الشهر رقم ٢٤ يعنى بعد سنتين ... هيفضل يحسب كل ده ... كتير بصراحة ... طيب ايه العمل؟؟؟ الحل اننا نوصل لـrecurrence relation تمكنا من حساب العدد بمجرد معرفة رقم الشهر بدون ما نعرف عدد الأزواج في الشهرين اللى قبله.

Second order linear homogenous recurrence relation with constant coefficient:

It is a recurrence relation of the form:

$$\boldsymbol{a_k = Aa_{k-1} + Ba_{k-2}, \qquad \forall\, k \geq some\ fixed\ integers.}$$

Where (A) and (B) are fixed real numbers with $(B \neq 0)$

It is called:

- ✓ Second because it contains the previous terms (a_{k-1}, a_{k-2})
- ✓ Linear because $(a_{k-1} \& \ a_{k-2})$, first power.
- ✓ Constant because $(A\&B)$ don't depend on k.

هنا يقصد هنجيب القاعدة العامة اللى بتخلينا نجيب الـrecurrence relation اللى فيها كل term بيعتمد على الـ2 terms اللى قبله.

المعادلة اللى فوق معادلة عامة ومن العنوان قولنا انها second order عشان بتعتمد على 2terms ... وقولنا عليها linear ... عشان الـ2 terms مرفوعين لاس ١ وعندي الـA&B دول ثوابت لا يعتمدو على الk او رقم الـterm.

Steps for finding a solution for 2nd recurrence relation:

1) Find a **characteristic equation** using the following equation:

$$\boldsymbol{r^2 - Ar - B = 0}$$

2) Solve characteristic equation. Because the quadratic equation gives 2 values for (r) which is the root of the equation, so, we have 2 cases:

Case one: Similar roots: **the recurrence relation will be:**

$$a_n = C_1(r)^n + C_2\, n(r)^n$$

Or

$$a_n = r^n(C_1 + nC_2)$$

Case Two: different roots: **the recurrence relation will be:**

$$a_n = C_1(r_1)^n + C_2\, (r_2)^n$$

r_1, r_2 2 real different roots of the characteristic equation

C_1, C_2 will be found from the 1st 2 terms (See the following examples)

خلينا نشوف الشرح بتاعة الخطوات في الأمثلة احسن.

EXAMPLE 1:

Solve the following recurrence relation.

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$$

$$Where \quad a_0 = 1 \quad a_1 = 8$$

SOLUTION

1) **Find the characteristic equation:**

$$r^2 - Ar - B = 0$$

$$A = 1 \qquad B = 2$$

هنا بنجيب المعادلة اللى قولناها في الخطوة الأولى وبنجيب الA والB من المعامل بتاع الحدين اللى في المسألة.

$$r^2 - 1(r) - (2) = 0$$

$$r^2 - r - 2 = 0$$

2) **Solve characteristic equation.**

هنحلل المعادلة

$$(r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1 \qquad r_2 = 2$$

(2 different roots) so, the recurrence relation will be as the following:

$$a_n = C_1(-1)^n + C_2\,(2)^n$$

Using the 1st 2 terms:

At $a_0|_{n=0} = 1$

$$a_0 = C_1(-1)^0 + C_2\,(2)^0$$

$$a_0 = C_1 \times 1 + C_2 \times 1 = 1$$

$$\therefore \boldsymbol{C_1 + C_2 = 1 ====> (1)}$$

At $a_1|_{n=1} = 8$

$$a_1 = C_1(-1)^1 + C_2\,(2)^1$$

$$a_1 = C_1 \times -1 + C_2 \times 2 = 8$$

$$\therefore \boldsymbol{-C_1 + 2C_2 = 8 ====> (2)}$$

هنا كل اللى عملناه اننا احدنا الحد الأول اللى هو الa_0 ... لأننا نعرف انه بيساوي ١ وهنا الحد الأول ده ال$n = 0$ ... هنعوض عن الn=0 وهيبقى عندنا معادلة فيها الC_1 والC_2 ... وهنعمل معادلة تانية بالحد التاني اللى هو الa_1 وهنعوض عن الn=1 وهكذا وبعد كدة هنحل المعادلتين مع بعض باننا نجمعهم على بعض او نطرحهم او أيا كان بس المهم اننا نجيب قيم الC_1 والC_2 ...

$$\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{-C_1 + 2C_2 = 8} \quad \textbf{ADD}$$

$$\boldsymbol{0 + 3C_2 = 9}$$

$$\boldsymbol{C_2 = \frac{9}{3} = 3}$$

Substituting in equation (1)

$$\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{C_1 + 3 = 1}$$

$$\boldsymbol{C_1 = 1} - 3 = -2$$

So, the recurrence relation will be:

$$\boldsymbol{a_n = -2(-1)^n + 3\,(2)^n}$$

EXAMPLE 2:

Solve the following recurrence relation.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

$$Where \quad x_0 = 0 \quad x_1 = 1$$

SOLUTION

1) **Find the characteristic equation:**

$$r^2 - Ar - B = 0$$

$$A = 1 \qquad B = 1$$

$$r^2 - 1(r) - (1) = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

2) **Solve characteristic equation.**

هنحلل المعادلة باستخدام المعادلة العامة

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -1$$

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(2 different roots) so, the recurrence relation will be as the following:

$$x_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Using the 1st 2 terms:

At $x_0|_{n=0} = 1$

$$x_0 = C_1\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^0 + C_2\left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^0$$

$$x_0 = C_1 \times 1 + C_2 \times 1 = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{C_1 + C_2 = 0} ====> (\mathbf{1})$$

At $\boldsymbol{x_1|_{n=1} = 1}$

$$x_1 = C_1\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^1 + C_2\left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)^1$$

$$x_1 = \left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_1 + \left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_2 = 1$$

$$\therefore \left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{C_1} + \left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{C_2} = \mathbf{1} ====> (\mathbf{2})$$

$$\boldsymbol{C_1 + C_2 = 0} \qquad \times -\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$-\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_1 - \left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_2 = 0$$

$$\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_1 + \left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_2 = 1$$

ADD

$$\left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_2 - \left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)C_2 = \mathbf{1}$$

$$C_2\left[\left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right) - \left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)\right] = \mathbf{1}$$

$$C_2\left[\left(\frac{\cancel{\mathbf{1}}-\sqrt{\mathbf{5}}-\cancel{\mathbf{1}}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)\right] = \mathbf{1}$$

$$C_2\left[\left(\frac{-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}\right)\right] = \mathbf{1}$$

$$-\sqrt{\mathbf{5}}C_2 = \mathbf{1}$$

$$C_2 = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

Substituting in equation (1)

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

So, the recurrence relation will be:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

EXAMPLE 3:

Solve the following recurrence relation.

$$g_{n+2} - 4g_{n+1} + 4g_n = 0$$

$$Where \quad g_0 = 1 \quad g_1 = 1$$

SOLUTION

$$g_{n+2} = 4g_{n+1} - 4g_n$$

1) **Find the characteristic equation:**

$$r^2 - Ar - B = 0$$

$$A = 4 \qquad\qquad B = -4$$

$$r^2 - 4(r) - (-4) = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

2) **Solve characteristic equation.**

$$(r-2)(r-2) = 0$$

$$r = 2$$

(similar roots) so, the recurrence relation will be as the following:

$$g_n = 2^n(C_1 + nC_2)$$

Using the 1st 2 terms:

At $g_0|_{n=0} = 1$

$$g_0 = 2^0(C_1 + (0)C_2)$$

$$\therefore \boldsymbol{C_1 = 1 ====> (1)}$$

At $\boldsymbol{g_1|_{n=1} = 1}$

$$g_1 = 2^1(C_1 + (1)C_2)$$

$$g_1 = 2(C_1 + C_2) = 2C_1 + 2C_2$$

$$\therefore \boldsymbol{2C_1 + 2C_2 = 1 ====> (2)}$$

Substitution $\boldsymbol{C_1}$ in equation (2)

$$\boldsymbol{2(1) + 2C_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{2 + 2C_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{2C_2 = 1 - 2 = -1}$$

$$\boldsymbol{C_2 = -\frac{1}{2}}$$

So, the recurrence relation will be:

$$\boldsymbol{g_n = 2^n\left(1 + n\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{g_n = 2^n\left(1 - \frac{n}{2}\right)}$$

EXAMPLE 4:

Solve the following recurrence relation.

$$\boldsymbol{y_{n+2} = 5y_{n+1} - 6y_n}$$

$$\boldsymbol{Where \quad y_0 = 1 \quad y_1 = 1}$$

SOLUTION

1) **Find the characteristic equation:**

$$r^2 - Ar - B = 0$$

$$A = 5 \qquad B = -6$$

$$r^2 - 5(r) - (-6) = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

2) Solve characteristic equation.

$$(r-3)(r-2)=0$$

$$\boldsymbol{r_1=3 \qquad r_2=2}$$

(2 different roots) so, the recurrence relation will be as the following:

$$y_n = C_1(3)^n + C_2\,(2)^n$$

Using the 1st 2 terms:

At $\boldsymbol{y_0|_{n=0}=1}$

$$y_0 = C_1(3)^0 + C_2\,(2)^0$$

$$y_0 = C_1 \times 1 + C_2\ \times 1 = 1$$

$$\therefore \boldsymbol{C_1 + C_2 = 1 ====> (1)}$$

At $\boldsymbol{y_1|_{n=1}=1}$

$$y_1 = C_1(3)^1 + C_2\,(2)^1$$

$$y_1 = C_1 \times 3 + C_2\ \times 2 = 8$$

$$\therefore \boldsymbol{3C_1 + 2C_2 = 1 ====> (2)}$$

Solving Equation (1) and (2)

$$\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1 \qquad \times -3}$$

$$\boldsymbol{-3C_1 - 3C_2 = -3}$$

$$\boldsymbol{3C_1 + 2C_2 = 1} \qquad \textbf{ADD}$$

$$\boldsymbol{0 - 1C_2 = -2}$$

$$\boldsymbol{C_2 = 2}$$

Substituting in equation (1)

$$\boldsymbol{C_1 + C_2 = 1}$$

$$\boldsymbol{C_1 + 2 = 1}$$

$$\boldsymbol{C_1 = 1} - 2 = -1$$

So, the recurrence relation will be:

$$\boldsymbol{y_n = -1(3)^n + 2\,(2)^n}$$

$$\boldsymbol{y_n = (2)^{n+1} - (3)^n}$$

Lecture SIX

1) Graph Theory:

Graph theory is the way to visualize the relationships between certain data or operations. For example, it can be used to say the shortest way you should take to reach in shortest time.

هنا منقصدش بالgraph الرسم البياني اللى نعرفه كلنا لكن يقصد اننا بنوضح علاقات بين حاجات معينة بالرسم ... بمعنى لو انت عايز عندك مشوار وعايز تعرف اقصر طريق تاخده بترسم الطريق قدامك او من الخريطة بتبدا تحدد نقاط وترسم الخطوط بتربطهم واللى هتبقى الشوارع وهتشوف اقصر طريق ... واصلا دي كانت بداية اكتشاف الgraph theory. ده كل الموضوع

1) Definitions and Basic Properties

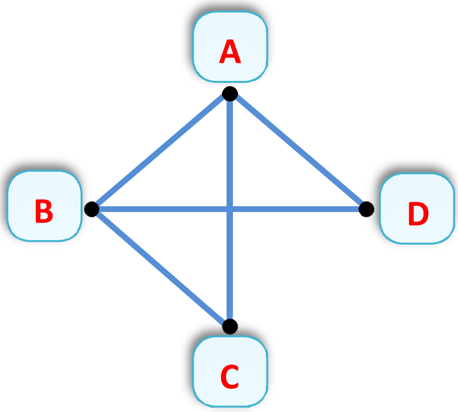
Imagine an organization that wants to set up teams of three to work on some projects. In order to maximize the number of people on each team who had previous experience working together successfully, the director asked the members to provide names of their past partners. This information is displayed below both in a table and in a diagram.

Name	Past Partners
A	B, C
B	A, D
C	B, A
D	A, B

Do you can determine the pest 3 persons that can form a team from this table? Of course, it is hard.

هنا هنشرح الفكرة بمثال ... بنقول لو فيه شركة وعايزين يعملوا اكتر من فريق يشتغلوا على مشروع معين ... وكل فريق يكون مكون من ٣ اشخاص ... بس طبعا عايزين الفريق يتكون من ٣ اشخاص يكونوا اشتغلوا مع بعض قبل كدة عشان يكونوا منسجمين ومتحصلش مشاكل بينهم تعطل المشروع. فطلبو من كل واحد انه يكتب اشتغل مع مين قبل كدة ... وعملوا الجدول السابق.. هل هتقدر تحدد فعليا وبسهولة مين ال٣ اللى هيقدروا يشتغلوا مع بعض خصوصا لو انت عايز اكتر من فريق.

So, let’s see the following graph:



From the graph, it is easy to determine the persons that can work together as a team.

Drawings such as those shown previously are illustrations of a structure known as a graph.

<u>The dots</u> are called *vertices* (plural of *vertex*) and the line segments joining vertices are called *edges*.

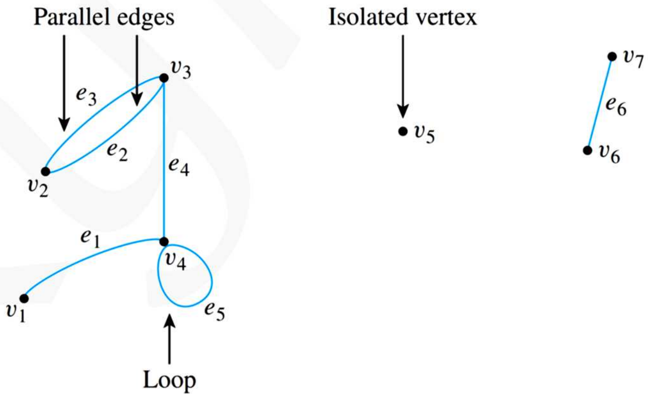
As you can see from the drawing, it is possible for two edges to cross at a point that is not a vertex.

ذي مانت شايف من الشكل ده ... هتقدر تحدد مين من الموطفين اللى يقدروا يشتغلوا مع بعض ويشكلوا فريق واحد واكيد لاحظت بسهولة ان الD والC ... مشتغلوش مع بعض قبل كدة ... ودي فايدة الgraphs اللى هنتكلم عنها

طيب نتكلم عن تركيب الgraph ... بيتكون من نقط هنسميها vertices ومفردها vertex وتقدر تسميها بالعربي راس ... وخطوط بتوصل النقط دي وهنسميها edges ومفردها edge طبعا.

وبيقول كمان تلاحظ ان الedges ممكن تتقاطع في نقطة ولكن النقطة دي مش vertex.

In general, a graph consists of a set of vertices and a set of edges connecting various pairs of vertices. The edges may be straight or curved and should either connect one vertex to another or a vertex to itself, as shown below.



In this drawing, the vertices have been labeled with $(v’s)$ and the edges with $(e’s)$. When an edge connects a vertex to itself (as e_5 does), it is called ***a loop***.

When two edges connect the same pair of vertices (as e_2 and $e_3$do), they are said to be ***parallel***.

It is quite possible for a vertex to be unconnected by an edge to any other vertex in the graph (as v_5 is), and in that case the vertex is said to be ***isolated***. The formal definition of a graph follows.

هنا هنتكلم عن بعد المسميات والرموز ... النقط احنا سمناها vertices وهندي كل نقطة رمز الv والedges اكيد هنديها e.

لو عندي edge بتوصل نقطة واحدة يعني لفت ورجعت لنفس النقطة ذي الe_5 موصلة لv_4 لنفسها ... فهنسميها LOOP ...

ولو عندي 2 edges ... هما ال٢ موصلين نفس ال٢ vertices .... هنسميهم **parallel edges** ... ذي الe_2 والe_3 موصلين الv_2 والv_3.

ممكن تلاقي vertex مشمتوصلة باي حاجة أصلا ... لوحدها كدة ذي الV_5 هنسميها isolated vertex يعني معزولة ... هنشوف التعريف الرسمي برضو هيكون مختصر كل ده.

Formal Definition:

A graph (G) consists of two finite sets: a non-empty set $V(G)$ of vertices and a set $E(G)$ of edges, where each edge is associated with a set consisting of either one or two vertices called its endpoints.

هنا بيقول ان الgraph بيتكون من مجموعتين المجموعة الأولى هي الvertices ويرمز للgraph نفسه بحرف الG ولمجموعة الvertices ب$V(G)$ والمجموعة التانية هيا الedges ويرمزلها بالرمز $E(G)$.

An edge with just one endpoint is called **a loop**, and two or more distinct edges with the same set of endpoints are said to be **parallel**. An edge is said to connect its endpoints; two vertices that are connected by an edge are called ***adjacent***; and a vertex that is an endpoint of a loop is said to be ***adjacent to itself***.

An edge is said to be ***incident*** on each of its endpoints, and two edges ***incident*** on the same endpoint are called ***adjacent***. A vertex on which no edges are incident is called ***isolated***.

لو عندي edge مرتبطة بنقطة واحدة فقط يعني بتلف وترجع تاني لنفس النقطة يبقى اسمها loop ولو عندي 2 edges موصلين نفس الvertices 2 يبقى اسمهم parallel

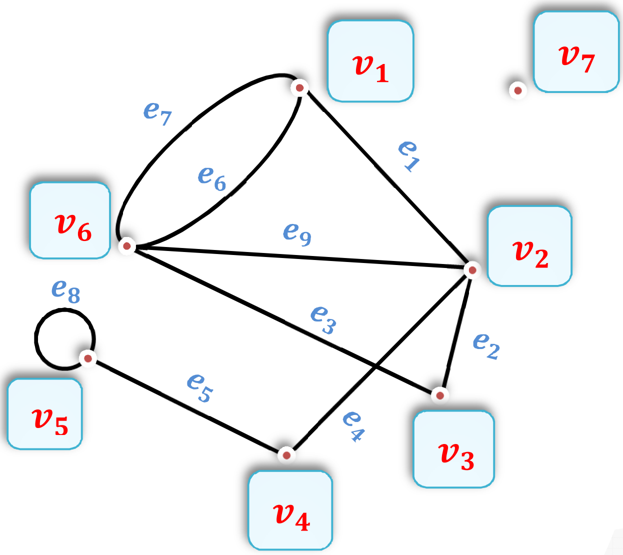
والvertices 2 اللى متوصلين مع بعض بedge بنقول عليهم adjacent vertices يعني متجاورين ولو فيه vertex متوصلة بنفسها بloop بنقول عليها adjacent to itself ... يعني مجاورة لنفسها.

والedge بنقول عليها Incident على الend points بتاعتها او بمعنى اخر بنقول عليها واقعة على الendpoints بتاعتها .... بمعنى مثلا لو عندي edge وصلة بين v1 و v2 يبقى هقول ان الedge دي incident on V1 وincident on v2 بمعنى انها بتمر بيهم ... ولو عندي اكتر من edge هما ال٢ بيكونو incident على نفس الvertex بنقول عليهم adjacent edges والvertex اللى مشمتوصلة بحاجة اسمها isolated او معزولة.

خلينا ناخد مثال يوضح كل الكلام ده

EXAMPLE 1:

From the following graph, define the set of vertices, the set of edges and show the endpoints of each edge and write your comment.



SOLUTION

1) Set of vertices:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

2) Set of edges:

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

3) End points of each edge:

Edge	End points
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_3, v_6\}$
e_4	$\{v_2, v_4\}$
e_5	$\{v_4, v_6\}$
e_6	$\{v_1, v_6\}^*$
e_7	$\{v_1, v_6\}^*$
e_8	$\{v_5\}$ (loop)
e_9	$\{v_2, v_6\}$

v_7 is isolated vertex (has no edges)

$\{e_1, e_9, e_4, e_2\}$ are all incident on v_2

كلهم متصلين بالvertex رقم ٢ اللى هي v_2

$\{v_1, v_6, v_4, v_3\}$ are all adjacent to v_2

يعنى كل الvertices دي متصلة بالv_2 يبقى كلهم مجاورين ليها.

e_8 is a loop.

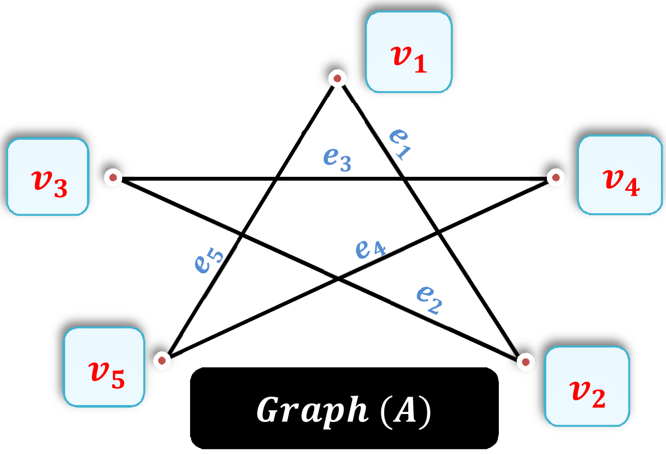
e_6 *and* e_7 are parallel (has the same start and end points).

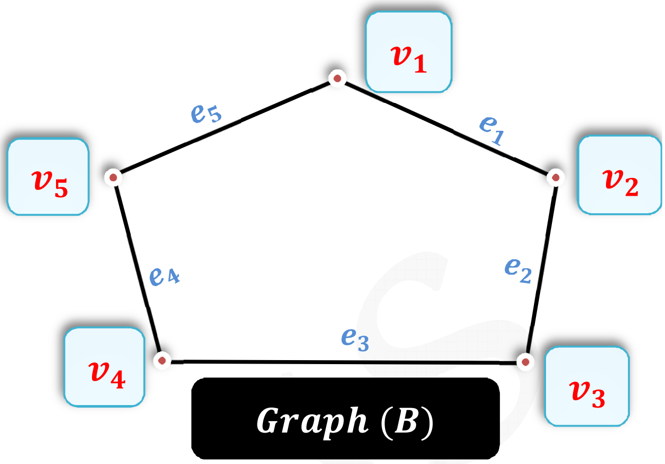
v_5 is adjacent to itself.

فالمثال ده كدة وضحت كل المصطلحات والرموز.

EXAMPLE 2:

The following pictorial representations (graphs) show the end points of each graph and comment.





SOLUTION

Edge	End points (Graph A)	End points (Graph B)
e_1	$\{v_1, v_2\}$	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2, v_3\}$	$\{v_2, v_3\}$
e_3	$\{v_3, v_4\}$	$\{v_3, v_4\}$
e_4	$\{v_4, v_5\}$	$\{v_4, v_5\}$
e_5	$\{v_1, v_5\}$	$\{v_1, v_5\}$

انا بكتب راس السؤال من عندي لكن الدكتورة كانت بتدي المثال عشان تشرح عليه

Questions that arise in the design of such systems involve choosing connecting edges to minimize cost, optimize a certain type of service.

الدكتورة قالت عالمثال ده ان عندي 5 vertices و5 edges والedges ليهم نفس الend points في الشكلين ومع ذلك الشكلين مختلفين ... طيب مين اللى بيحدد ده ... هدفي ... يعنى مثلا لو عايز احدد اقل تكلفة مثلا هيكون معايا شكل معين ... ولو عايز احدد هستخدم انهي محرك بحث مثلا هيديني شكل تاني خال .

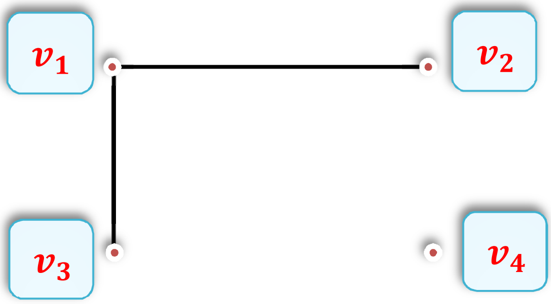
2) Types of graphs

1) Simple graph:

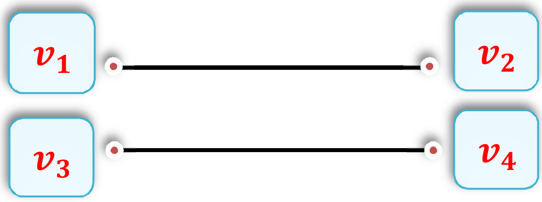
It is a graph that doesn't have any loops or parallel edges but can have isolated vertices.

الجراف لو مفهوش أي parallel edges او loops يبقى نوعه simple وممكن يكون فيه isolated vertex.

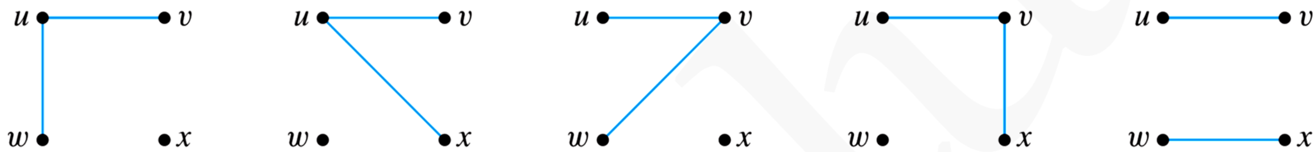
Examples of simple graphs:



It is simple graph because it has one isolated vertex



It can be simple or complete graph

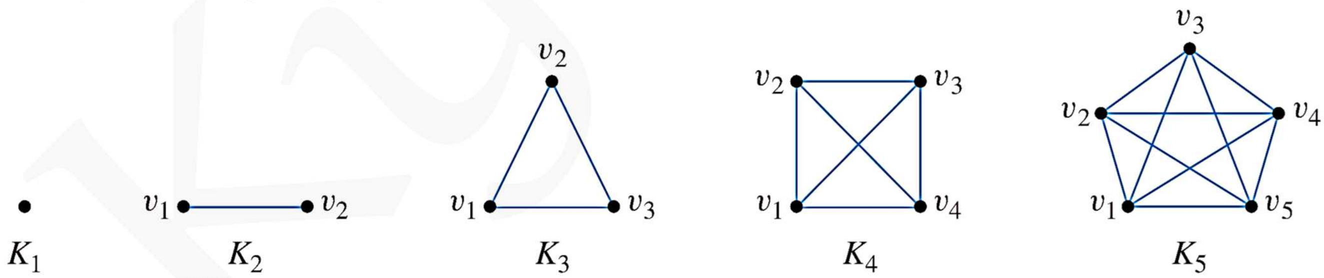


2) Complete graph:

It is the graph in which any two vertices each have only one edge connecting them, no loops, no parallel edges and no isolated vertex.

الcomplete بيكون فيه كل حاجة متاحة من loops من parallel ماعدا الisolated vertex مفهوش يعنى لازم كل نقطة تكون متصلة بحاجة.

Examples of complete graphs:



(Any complete graph can be simple graph if it has not any parallel edges or loops)

الجملة دي معناها أي complete graph ممكن يبقى Simple طالما مفهوش parallel edges او loops

هنا هتلاحظ ان الk_1 لوحدها فهتقول انها طالما isolated مينفعش تبقى complete ... لكن دي هنا مش isolated عشان ده جراف مكون من vertex واحدة فقط ... والcomplete لازم يكون كل vertex متوصل بedge وطالما هنا الشكل مجرد vertex واحدة هتتوصل بايه ؟؟!! اكيد مفيش ... فالبتالي ده complete وفنفس الوقت ينفع أقول simple برضو لانهم فهوش لا parallel ولا loops.

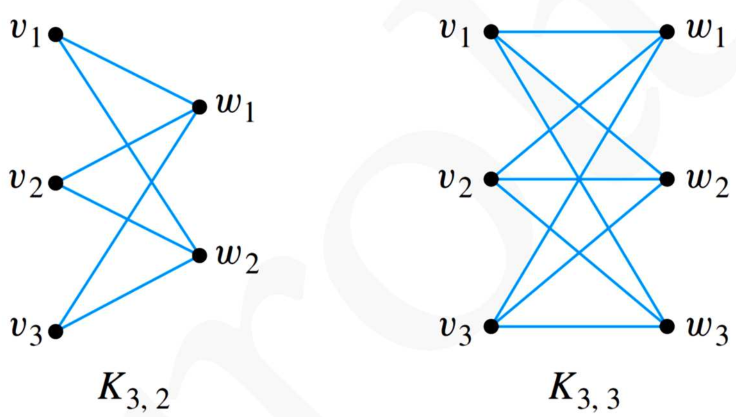
3) A complete bipartite graph:

Let (m) and (n) be positive integers. A complete bipartite graph on (m, n) vertices, denoted $K_{m,n}$, is a simple graph with distinct vertices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ and $w_1, w_2, \ldots, w_n$ that satisfies the following properties: For all $i, k = 1, 2, \ldots, m$ and for all $j, l = 1, 2, \ldots, n$,

1. There is an edge from each vertex v_i to each vertex w_j.
2. There is no edge from any vertex v_i to any other vertex v_k .
3. There is no edge from any vertex w_j to any other vertex w_l .

الكلام ده بالعربي معناه ان النوع ده من الجراف بيكون مكون من مجموعتين من الverticesوليكن مجموعة هنرمزلها بالرمز v وهيكون فيها v_1 و v_2 وهكذا والمجموعة التانية هنرمزلها بالرمز w وهيكون فيه w_1 وw_2 ... ولكن الفكرة كلها فان الvertices اللى في نفس المجموعة ملهومش علاقة ببعض ولكن كل vertex متصل بكل الvertices اللى في المجموعة التانية

The complete bipartite graphs $K_{3,2}$ and $K_{3,3}$ are illustrated below.



هتلاحظ في أي شكل فيهم ان مفيش علاقة بين الv وبعضها وبين الw وبعضها ولكن كل v متصلة بكل w والعكس.

3) Degree of the vertex and degree of graph:

Degree of vertex:

$deg(v)$ is the number of edges that are incident on v and the loop counted twice.

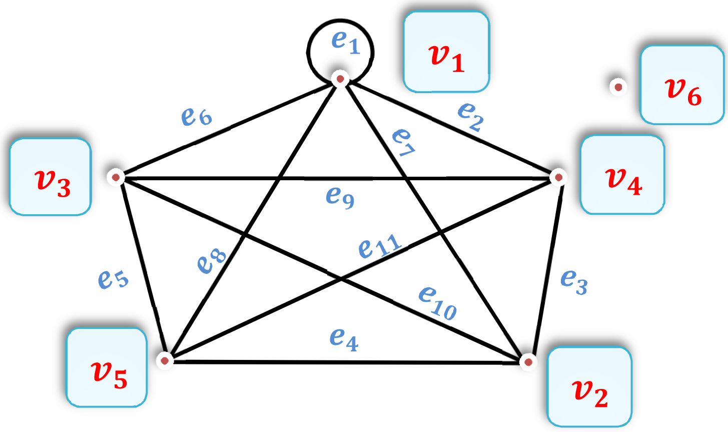
Degree of graph:

Is the sum of the degrees of all vertices.

$$\deg(G) = 2 \times (no.\ of\ edges)$$

EXAMPLE 3:

Find the degree of the following graph.



SOLUTION

First, we should find the degree of each vertex:

اول حاجة هنجيبها هي ال degree لكل vertex ... ودي بتساوي عدد الedges المتصلة بالvertex. ولو متصل بيه loop بنعده ب٢ يعني مثلا اول vertex اللى هو v_1 متصل بيه ٤ edges وواحد loop يبقى الdegree بتاعته عبارة عن ٤ +٢ = ٦

$$\deg(v_1) = 6$$

$$de\ g(v_2) = 4$$

$$de\ g(v_3) = 4$$

$$deg(v_4) = 4$$

$$deg(v_5) = 4$$

$$deg(v_6) = 0$$

Then we can find the degree of the graph which equals the sum of the degrees of all vertices.

$$\deg(G) = 6 + 4 + 4 + 4 + 0 = 22$$

$$\deg(G) = 2 \times (no.\ of\ edges) = 2 \times 11 = 22$$

The degree of the graph should be an even number

EXAMPLE 4:

Draw a graph that has 4 vertices of degrees (1, 1, 2, 3).

SOLUTION

$$\deg(g) = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

Because the degree of the graph is an odd number, then there is no such graph.

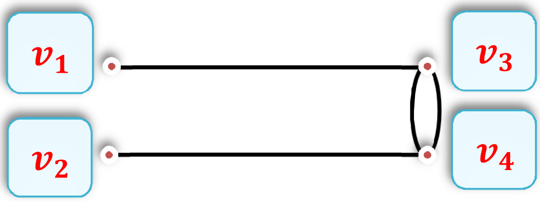
احنا قولنا مينفعش يكون الdegree للجراف رقم فردي بالتالي الحل هيكون ان مينفعش نرسم الجراف ده

EXAMPLE 5:

Draw a graph that has 4 vertices of degrees (1, 1, 3, 3).

SOLUTION

$$\deg(g) = 1 + 1 + 3 + 3 = 8$$



OR

4) Directed and undirected Graphs:

In directed graph, the edges have direction (drown by arrows) and thus, the arrangement of vertices is important because this means that each edge has a start point and end point.

هنا بس عايزين نقول معلومة ان فيه directed graph يعني الedges فيه بيكون على شكل سهم يعني ليه بداية ونهاية وبالتالي لازم اراعي ترتيب الvertices وانا بكتب الendpoints وده كمان هيفرق معايا وانا بعمل الmatrix من الرسم.

The parallel edges in direct graph should have the same direction.

يعني مقدرش أقول على 2 edges انه parallel او متوازين غير لما يكونو في نفس الاتجاه.

طبعا مشمحتاجين نتكلم عن الundirected لأن كل اللى شوفناه من اول المحاضرة undirected.

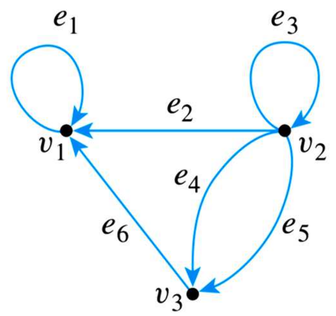
5) Matrix representation:

How to represent the graph by a matrix?

First, the matrix is always a square matrix.

Second, the number of rows or columns = the number of vertices.

For directed graph:



Directed Graph G

خلينا الأول نقول ملاحظات ... ده direct graph عشان الedges فيها اسهم ... فخلينا مثلا لو هتكلم عن ال end point بتاعة مالe_2 ... مقدرش اكتبها كدة $\{v_1, v_2\}$ ليه ... عشان بداية السهم هي v_2 ولكن المفروض اكتبها $\{v_2, v_1\}$ ....

كمان عندي الe_4 والe_5 هيبقوا parallel عشان الأسهم في نفس الاتجاه ... لكن لو كانوا مشفي نفس الاتجاه مشهيبقو parallel.

How to represent this graph using matrices:

1) The number of rows = the number of vertices = 3. So, we can represent this graph by 3×3 matrix
2) Create the matrix (the matrix is called adjacency matrix):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Adjacency Matrix

طيب ليه فيه صفر في العنصر رقم ٢ في الصف الأول ... تحت الv_2 .... عشان احنا بنقول الedges من v_1 الى v_2 يعنى من الصف للعمود ... ولو شوفت فالرسم هتلاقي ان فيه edge فعلا بين الv_1 والv_2 ولكن الاتجاه بتاعها من v_2 لv_1 يبقى من v_1 لv_2 مفيش edges يبقى هنكتب صفر.

المصفوفة هنسميها adjacency matrix.

NOTES:

The matrix that represent a directed graph is always asymmetric matrix, however, the symmetric matrix can be a representation of direct or undirected graph

If any element on the diagonal = 1, then, this a loop.

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Symmetric matrix

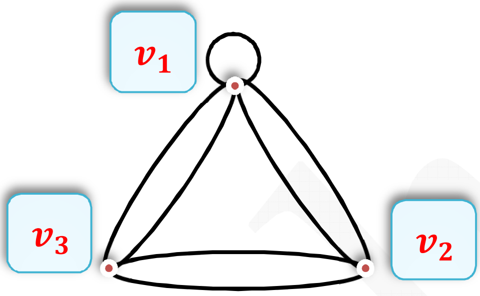
للناس اللى مشعارفة يعنى ايه asymmetric matrix .... المصفوفة اللى مكتوبة بالرموز دي مصفوفة symmetric او يعنى متماثلة ... نقول عليها متماثلة لما يكون الأرقام اللى جوة المثلثات ذي بعض بالظبط ... لكن لو مختلفين

هيبقى اسمها asymmetric ... ولو لاحظت فالمصفوفة اللى كتبناها من الgraph السابق هتلاقيها asymmetric يعنى غير متماثلة.

بالنسبة للملحوظة التانية ... كلمة diagnol في الmatrix يقصد بيها العناصر اللى على القطر بتاع المصفوفة الى هي العناصر الc b a اللى باللون الأحمر ... لو أي حاجة فيهم بواحد يبقى ده loop .. يعنى مثلا شوف المصفوفة اللى عملناها من الgraph ... هتلاقي عند v_1 فيه ١ ده معناه ان فيه edge خارج من v_1 وراجع لv_1 برضو اللى هو loop يعنى ... وكذلك عند v_2 لv_2 فيه ١ عشان فيه loop.

فيه حاجة أخيرة ... الsymmetric matrix او المصفوفة المتماثلة ممكن تكون معمولة من direct graph او Undirected.

For Undirected graph:



This is undirected graph, so, we can represent it by symmetric matrix

The number of rows = the number of vertices = 3. So, the we can represent this graph by 3×3 matrix

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EXAMPLE 5:

Let

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

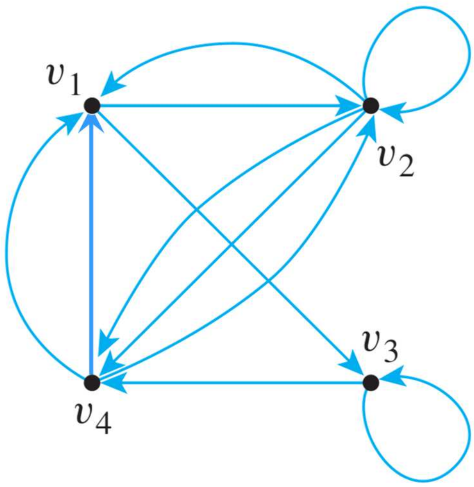
Draw a directed graph for A

SOLUTION

دي asymmetric matrix عشان كدة هنعملها directed.

نلاحظ هنا ان ال٢ في العنصر رقم ٢ في العمود الرابع يعنى تحت v_4 ... معناها ان فيه 2 edges بيطلعو من v_2 متجهين الى v_4. ... دي معنى ال٢. يعنى هيكون فيه 2 parallel.

ونفس الكلام في الصف الأخير عند v_4 فيه ٢ .... معناها ان فيه 2 edges ... خارجين من v_4 لـv_1 ... يعنى برضو 2 parallel edges.



EXAMPLE 6:

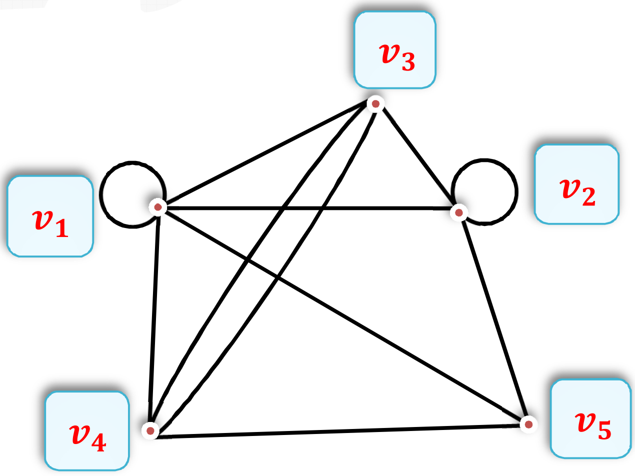
Let

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Draw a graph for A

SOLUTION

Because A is a symmetric matrix, then the graph will be undirect graph.



Lecture SEVEN

Logical Equivalence laws:

عرفنا اذاي نثبت الlogical equivalenceبال truth tables قبل كدة لكن المحاضرة دي هنتعلم اذاي نثبتها من خلال ١١ قانون

No.	Law name	The rule
1	Commutative law	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
2	Associative law	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3	Distributive law	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4	Identity law	$p \wedge t \equiv p$ $p \vee c \equiv p$ $t = tautology, \quad c = contradiction$
5	Double negative law	$\sim(\sim p) \equiv p$
6	Negation law	$p \vee \sim p \equiv t$ $p \wedge \sim p \equiv c$ $t = tautology, \quad c = contradiction$
7	Idempotent law	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
8	Universal law	$p \vee t \equiv t$ $p \wedge c \equiv c$ $t = tautology, \quad c = contradiction$
9	DE Morgan's law	$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim q \vee \sim p)$ $\sim(p \vee q) \equiv (\sim q \wedge \sim p)$
10	Absorption law	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
11	Negation of (t) and (c)	$\sim t \equiv c$ $\sim c \equiv t$

طريقة الحل فالامتحان ... هنكتب كل خطوة فسطر لوحدها جنبها اسم القانون اللى استخدمناه ... ممنوع اننا نعمل خطوتين فخطوة واحدة كاختصار

EXAMPLE 1:

Verify the following logical equivalence

$$\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

SOLUTION

No.	Step	Law name
1	$\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ $\equiv (\sim(\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$	DE Morgan's law
2	$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$	Double negative law
3	$\equiv p \vee (\sim q \wedge q)$	Distributive law
4	$\equiv p \vee c$ هنا هو خلي ال$q \wedge \sim q$ ب c	Negation law
5	$\equiv p$	Identity law

ناخد بالنا ان القانون بتاع الخطوة التانية هو نفذ العملية على الناتج بتاع الخطوة الأولى والقانون بتاع التالتة نفذ العملية على الناتج بتاع الخطوة التانية وهكذا.

EXAMPLE 2:

Verify the following logical equivalence

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

SOLUTION

No.	Step	Law name
1	$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$	DE Morgan's law
2	$\equiv \sim p \wedge (\sim(\sim p) \vee \sim q)$	DE Morgan's law
3	$\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q)$	Double negative law
4	$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Distributive law

5	$\equiv c \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Negation law
6	$\equiv (\sim p \wedge \sim q)$	Identity law

EXAMPLE 3:

Verify the following logical equivalence

$$\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p$$

SOLUTION

No.	Step	Law name
1	$\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ $\equiv (\sim p \vee \sim(\sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	DE Morgan's law
2	$\equiv (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Double negative law
3	$\equiv \sim p \wedge (q \vee \sim q)$	Distributive law
4	$\equiv \sim p \wedge t$	Negation law
5	$\equiv \sim p$	Identity law