MS517 (NUMERICAL ANALYSIS)

Lecture ONE

Course content:

1) Errors.
2) Solving non-linear equation:
    a. Bisection Method.
    b. Newton-Raphson Method.
    c. Secant Method.
    d. Fixed point Method.
3) Solving linear equations.
4) Interpolation.
5) Numerical differentiation.
6) Numerical integration.
7) Statistical approximations.

---

1) Introduction:

First: What is Numerical analysis?

Numerical analysis is a branch of Mathematics that deals with devising efficient methods for obtaining approximate solutions to difficult Mathematical problems.

Most of the problems that arise in science and engineering are solved by making mathematical models for them, however most mathematical problems in science and engineering are very hard and sometime impossible to solve exactly.

Thus, an approximation to a difficult Mathematical problem is very important to make it easier to solve. Due to the immense development in the computational technology, numerical approximation has become more popular and a modern tool for scientists and engineers.

Approximate solution means that there is an error. So, the role of numerical analysis is problem solving by analysis of errors of the approximate mathematical solutions to make it approaches the true value.

أولا خلينا نعرف ايه هدف الnumerical analysis؟

في العلوم او الهندسة او أيا كان المجال ... لما نحب نعمل problem solving او تحل مشكلة ما، بتفكر انك تعمل mathematical model يعنى تحلها بطرق رياضية ... وفي الحالة دي بتطلع بحل ولكن بيكون اما exact solution يعنى مثلا اقدر أوصل للقيمة الحقيقية واما بيكون approximate solution او يعنى حل تقريبي ...

في الحقيقة دايما اغلب التجارب العلمية او المشاكل عموما مشبتحلها بexact solution او يعنى مشبتوصل للقيمة الحقيقية ولكن بتحلها بحل تقريبي وده معناه ان دايما فيه هيكون نسبة خطأ صغيرة في القيمة اللى بتطلعها ...

ومهمة الnumerical analysis انها توصل للقيمة التقريبية وتقيم الخطأ اللى فيها ولو كان الخطأ بعيد عن القيمة الحقيقة يبقى نكرر التجربة تاني بحيث انك توصل لقيمة تقريبية اقرب للحقيقة.

طيب هتستفاد ايه منها فالحياة العملية ... هي كل الفكرة ان في مجالات كتير بتستعمل الرياضة في حل حاجات كتير فيها ذي الهندسة مثلا والعلوم .... ولازم العمليات الحسابية اللى بيستخدموها يكون فيه برامج عالكومبيوتر تنفذها ... وذي ما قولنا ان صعب انك توصل للقيمة الحقيقية مهما كانت خصوصا لو قيمة هتكون فيها رقم عشري الى مالا نهاية لان ده يتطلب كومبيوتر ليه ذاكرة بتزيد الى مالانهاية وده مستحيل فطبيعي انك دايما هتوصل لنتيجة تقريبية وبالتالي هيكون دايما فيه خطا في الرقم اللى هتوصله.... فانت كمبرمج لما يتطلب منك برنامج فيه عمليات حسابيه او رياضية لازم تكون فاهم انك هتبرمج طبقا لمعادلة معينة فيها نسبة خطا مسموح بيه ... دي كل الفكرة

يعنى مثلا لو فشركة ادوية ... الخطا المسموح بيه في تركيز مادة معينة أحيانا بيكون ٠,٠٠١% وطبعا هما بيعتمدوا على برامج عالكومبيوتر للحسابات وخلافه فالبتالي انت لازم تبقى عارف نسبة الخطا اللى هما سامحين بيها وتبرمج البرنامج بتاعهم طبقا لنسبة الخطا المسموح بيها.

Second: Some definitions.

I) Accuracy of numbers:

a) Approximate numbers.

There are two types of numbers: **exact** and **approximate**.

Exact numbers are 2, 4, 9, $\frac{7}{2}$, 6.45, ... etc. but there are numbers such that $\frac{4}{3}$ $(= 1.333\ldots\ldots), 2\ (=\ 1.414213\ldots)\ and\ \pi\ (=\ 3.141592\ldots\ldots)$ which cannot be expressed by a finite number of digits. These may be approximated by numbers 1.3333, 1.4141, and 3.1416, respectively.

Such numbers, which represent the given numbers to a certain degree of accuracy, are called approximate numbers.

هنا هناخد بعض التعريفات البسيطة ... اول حاجة ال approximate numbers او الأرقام التقريبية ... فيه نوعين من الأرقام exact numbers يعنى ارقام بالظبط وملهاش رقم عشري الى مالانهاية ذي مثلا ٢، ٤ ، ٥ ، $\frac{7}{2}$ ... حتى $\frac{7}{2}$ يعتبر exact عشان قيمته ٣,٥ .. هل الرقم العشري ممتد الى ما لانهاية ... اكيد لا ... يبقى اسمه exact numbers

اما الرقم التقريبي بيكون ذي مثلا $\frac{4}{3}$ ودي بتساوي ١,٣٣٣٣٣ وطبعا الرقم العشري ممتد الى مالانهاية وطبعا مفيش جهاز كومبيوتر هيحسبلك الرقم الى مالانهاية لان الكومبيوتر دايما الذاكرة بتاعته محدودة وبالتالي الكومبيوتر هيديلك رقم تقريبي على حسب ذاكرته او امكانيته فمثلا ممكن يخليه ١,٣٣٣ فقط ... فيبقى ده اسمه رقم تقريبي

b) Significant digits.

Significant digits are the number of digits that are used to represent a number reliably.

As more significant digits are used, the number is more accurately represented. Hence more significant digits reduce the error in number representation.

The digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 are significant digits. ‘0’ is also a significant digit except when it is used to fix the decimal point or to fill the places of unknown or discarded digits (i.e. before numbers).
الSignificant digits عبارة عن الأرقام المهمة او سميها الأرقام الخطيرة اللى بتدخل فحساب أي قيمة تانية ... وهما الأرقام من ١ ل٩ ... طيب الصفر ايه نظامه ... الصفر ليه حالات بيكون فيها significant وحالات لا ... وهنشوف دلوقتى ايه هي الحالات اللى بتحدد عليها الsignificant numbers عموما

وبنقول ان كل ما عدد الsignificant digits يزيد الخطأ هيقل.

There are three rules on determining how many significant figures are in a number:

1) Non-zero digits are always significant.
   For example, each of the numbers 7845, 3.589, and 0.4758 contains 4 significant figures
2) Any zeros between two significant digits are significant.
   For example, each of the numbers 705, 3.089, and 0.4008 contains 4 significant figures
3) A final zero or trailing zeros in the decimal portion ONLY are significant.

Here are two examples of this rule with the zeros this rule affects in boldface:

0.005**00**
0.0304**0**

الحالات اللى فيها الأرقام بنعتبرها significant numbers ....

الحالة الأولى: الأرقام من ١ ل٩ كلها ارقام Significant يعنى مثلا لو قالك ٧٨٤٥ فيه كام رقم significant هتقوله ٤ .... طيب ٣,٥٨٩ فيه ٤ برضو وهكذا.

الحالة التانية: الصفر لو كان بين رقمين significant هنعتبره significant بمعنى مثلا ٧٠٥ فيه ٣ ارقام significant ... ٣,٠٨٩ فيه ٤ ارقام significant عشان مقدرش أقول ان الصفر ملوش لازمة مثلا.

الحالة الثالثة: الصفر اللى في الجزء العشري اللى على اليمين خالص هيبقى Significant يعنى مثلا ٠,٠٠٥٠٠ الصفرين اللى بعد العلامة العشرية علطول مشهيبقوا significant وهنشوف الحالات اللى فيها الصفر مش significant دلوقتى ... لكن الاصفار اللى على يمين ال٥ هيبقوا Significant يبقى اذن فالرقم ده عندي ٣ ارقام Significant ... طيب لو قولت ٠,٠٣٠٤٠ فيها كام رقم Significant ... فيها ٤ هما ال ٣٠٤٠.

What Zeros are Not significant?

Zero Type #1: Space holding zeros on numbers less than one.

Here are the first two numbers from just above with the digits that are NOT significant in boldface:

0.**00**500

0.**0**3040

These zeros serve only as space holders. They are there to put the decimal point in its correct location. They DO NOT involve measurement decisions. Upon writing the numbers in scientific notation ($5.00\ x\ 10^{-3}$ and $3.040\ x\ 10^{-2}$), the non-significant zeros disappear.

هنتكلم عن الحالات اللى فيها الصفر مينفعش يبقى significant.

اول حالة هي ان الصفر يكون على يمين العلامة العشرية ومفيش أي ارقام غير الصفر في الجزء الinteger ... طيب ليه ... لان الصفر هنا مهمته هي انه بيحدد العلامة العشرية فيه او الرقم مكانه فين بعد العلامة العشريه ... وممكن اشيله خالص واكتب بالطريقة العلمية ... يعنى مثلا ٠,٠٠٥٠٠ اقدر اكتبها 5.00×10^{-2} يعنى انا شلتهم وكتبته مكانهم 10^{-2} يبقى مينفعش اعتبرهم significant ...

وعموما لو أي اصفار قدرت اشيلها واكتبها بصيغة الscientific notation متبقاش significant.

Zero Type #2: The zero to the left of the decimal point on numbers less than one.

When a number like 0.00500 is written, the very first zero (to the left of the decimal point) is put there by convention. Its sole function is to communicate unambiguously that the decimal point is a decimal point. If the number were written like this, $.00500$, there is a possibility that the decimal point might be mistaken for a period.

الحالة التانية ان الصفر يكون في الجزء الinteger في الأرقام اللى اقل من ١ يعنى من الاخر يكون الصفر بس محطوط عشان نوضح العلامة العشرية يعنى مثلا اكتر ٠,٠٠٥٠٠ بدل مكتب 00500.

Zero Type #3: Trailing zeros in a whole number.

200 is considered to have only ONE significant figure while 25,000 has two.

This is based on the way each number is written. When whole number are written as above, the zeros, BY DEFINITION, did not require a measurement decision, thus they are not significant.

However, it is entirely possible that 200 really does have two or three significant figures. If it does, it will be written in a different manner than 200.

Typically, scientific notation is used for this purpose. If 200 has two significant figures, then $2.0\ x\ 10^2$ is used. If it has three, then $2.00\ x\ 10^2$ is used. If it had four, then 200.0 is sufficient.

How will you know how many significant figures are in a number like 200? If you were doing an experiment, the context of the experiment and its measuring devices would tell you how many significant figures to report to people who read the report of your work.

الحالة التالتة ... ان اصفار على اليمين في الرقم الصحيح يعنى مثلا ٢٠٠ هقول فيها رقم واحد significant واللى هو ال٢ .... طيب والصفرين لا ليه ... لاني ممكن اكتب ٢٠٠ كدة 2×10^2 ....

ولكن امتى اعتبرهم significant ... لو كتبت ال٢٠٠ كدة 2.00×10^2 .... في الحالة دي اصبح الصفرين Significant.

Zero Type #4: leading zeros in a whole number.

00250 has two significant figures. 5.00×10^{-4} has three.

هنا يقصد ان الصفر اللى على الشمال ملوش لازمة من الاخر ... ودي كلنا عارفينها

NOTES:

1) The significant figure in a number written in scientific notation (e.g., $M \times 10^k$) consists of all the digits explicitly in M. For example: 5.00×10^{-4} has three.
2) Significant digits are counted from left to right starting with the non-zero digit on the left.
3) The total significant number is the number of significant numbers before and after the decimal point.

ملاحظات مهمة .... أي رقم مكتوب بصيغة $M \times 10^k$ .... كل الأرقام اللى في الm بما فيهم الصفر هيبقوا Significant.

الأرقام الsignificant بتتعد من الشمال لليمين بدا من اول رقم غير الصفر.

Types of significant numbers:

1) **Total significant digits:** These are the number of digits that are present in the number. For ex. 2.314 has four significant digits.
2) **Significant digits after decimal point:** These are the number of significant digits after decimal point. For Ex. 2.314 has three significant digits after decimal point.

فيه نوعين ... لو قالك total significant number دي يقصد بيها عدد الsignificant digits الموجودة في الجزء الصحيح والعشري مع بعض يعنى مثلا ٢,٣١٤ فيها ٤ significant digits

ولو قال عايز الsignificant digits after decimal point يقصد بيها عايز عدد الsignificant اللى في الجزء العشري بعد العلامة يعنى لو هقول ٢,٣١٤ فيه كام رقم significant بعد العلامة العشرية .. هنقول ٣

Examples of significant number:

Number	Significant digits	Number of significant digits
3969	3, 9, 6, 9	4
3060	3, 0, 6	3
3900	3, 9	2
39.69	3, 9, 6, 9	4
0.3969	3, 9, 6, 9	4
39.00	3, 9, 0, 0	4
0.00039	3, 9	2
0.00390	3, 9, 0	3
3.0069	3, 0, 0, 6, 9	5
3.9×10^{6}	3, 9	2
3.909×10^{5}	3, 9, 0, 9	4
6.0×10^{-2}	6, 0	2

c) Rounding-off.

There are numbers with many digits, e.g., $\frac{22}{7} = 3.142857143$. In practice, it is desirable to limit such numbers to a manageable number of digits, such as 3.14 or 3.143. This process of dropping unwanted digits is called rounding-off.

Numbers are rounded-off according to the following rule:

To round-off a number to n significant digits, discard all digits to the right of the n^{th} digit and if this discarded number is

1) less than 5 in $(n + 1)^{th}$ place, leave the n^{th} digit unaltered. e.g., 7.893 to 7.89.
2) greater than 5 in $(n + 1)^{th}$ place, increase the n^{th} digit by one, e.g., 6.3456 to 6.346.
3) exactly 5 in $(n + 1)^{th}$ place, increase the n^{th} digit by one if it is odd, otherwise leave it unchanged. e.g., 12.675 ~ 12.68 and 12.685 ~ 12.68

The number thus rounded-off is said to be correct to n significant figures.

هنا بيشرح عملية التقريب ... ذي ما كلنا عارفين لو هاخد ٣ ارقام عشرية مثلا ... هشوف الرقم الرابع لو كان اكبر من ٥ يبقى هزود واحد على الرقم العشري التالت ولو اقل من ٥ مشهزود ولو ٥ هزود لو كان الرقم التالت فردى.

يعنى مثلا ٧,٨٩٣ لو عايز اقرب لرقميين عشريين هيبقى ٧,٨٩ ولو مثلا عندي ٦,٣٤٥٦ وعايزه لاقرب ٣ ارقام عشرية هيبقى ٦,٣٤٦.

دي القواعد اللى عارفينها كلنا.

2) Accuracy and precision:

a) Accuracy:

It is defined as closeness of calculated value form the exact value.

Example: if the exact value = 4.2138, then:

- ✓ The value 4.1182 is less accurate value.
- ✓ The value 4.2146 is the most accurate value.
- ✓ The value 3.9392 is the least accurate value.

b) Precision:

It is defined as the repetitiveness of the value

Example: if the exact value = 4.213, then:

- ✓ The values, 4.1182, 4.1183, 4.1181, 4.1182 are more precision but less accurate.
- ✓ The values, 4.2137, 4.2136, 4.2139 are more precision and more accurate.

هنا بيتكلم عن الفرق بين الaccuracy والprecsion ... ال٢ معناهم دقة ولكن accuracy يقصد بيها هل الرقم اللى طلعته قريب من القيمة الحقيقة اللى انا عايزها ولا لا... والprecision يقصد بيها هل لما اعيد التجربة اكتر من مرة بحصل على نفس النتيجة تقريبا في كل مرة او حتى بفروقات بسيطة حتى لو كانت مش accurate ....

طيب هل ممكن القيمة تبقى precise ومش accurate ... اه ممكن ... ممكن أكون بعمل تجربة ما وبتديني نتيجة غير دقيقة مش accurate يعنى مشقريبة خالص من القيمة الحقيقية ولكن كل ما اعيد التجربة بحصل على نفس النتيجة البعيدة دي يعنى القيم precise وبقولها more precision but less accurate.

---

2) ERRORS.

First: Sources of errors.

Following are the broad sources of errors in numerical analysis:

1) Input errors.

The input information is rarely exact since it comes from the experiments and any experiment can give results of only limited accuracy. Moreover, the quantity used can be represented in a computer for only a limited number of digits.

هنا هنتكلم عن مصادر الاخطا ... متشرحتش في المحاضرة ولكن معلومات كويسة.

اول مصدر هو الinput errors يعنى انا بدخل نتايج غلط للكومبيوتر او بدخل القيم التقريبية الناتجة من التجارب اللى بتديني قيم ولكن بدقة محدودة او ممكن انا معايا قيمة بتتكتب وليكن في ١٠ ارقام ولكن البرنامج اللى شغال عليه وبيعملي الحسابات بيقبل ٨ ارقام فقط مثلا فبالتالي هيحصل error.

2) Algorithmic errors.

If direct algorithms based on a finite sequence of operations are used, errors due to limited steps don't amplify the existing errors, but if infinite algorithms are used, exact results are expected only after an infinite number of steps. As this cannot be done in practice, the algorithm has to be stopped after a finite number of steps and the results are not exact.

تاني مصدر خطا في الalgorithm

هنا بيقول ان لو انا عندي تجربة او عملية بتم طبقا لعدد محدود من العمليات الحسابية مثلا ... وقتها مشهيكون فيه خطأ كبير ولكن لو التجربة او العملية الحسابية بتتم بعدد غير محدود من الخطوات وده مستحيل عمليا يبقى اذن في الحالة دي لازم أوقف عند عدد معين من العمليات او الخطوات وبالتالي مشهحصل على exact value وبالتالي هيكون فيه error.

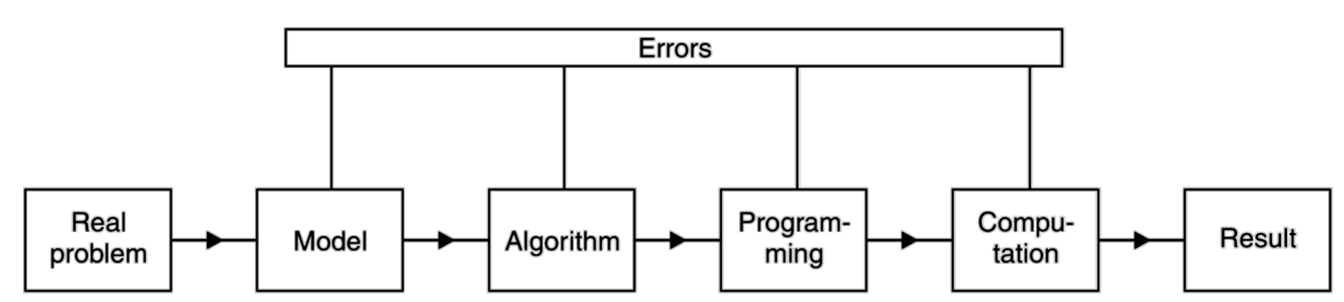
3) Computational errors.

Even when elementary operations such as multiplication and division are used, the number of digits increases greatly so that the results cannot be held fully in a register available in a given computer. In such cases, a certain number of digits must be discarded.

هنا بيقول ان حتى في عمليات الضرب والقسمة العادية الأرقام بتزيد يعنى بيكون فيه رقم كبير جدا وبالتالي النتيجة مشهتبقى موجودة كلها كاملة في الregister بتاع الmemory وبالتالي في الحالة دي لازم عدد من الأرقام يتشال

The following diagram gives a schematic sequence for solving a problem using a digital computer pointing out the sources of errors.

Our effort will be to minimize these errors so as to get the best possible results.



Second: Types of errors.

We know that a computer has a finite word length, so only a fixed number of digits is stored and used during computation. Hence, even in storing an exact decimal number in its converted form in the computer memory, an error is introduced so, we should use approximation value rather than a true value. **This error is machine dependent**.

$$Error = True\ value - Approximate\ value$$

هنا بيقول ان الذاكرة بيكون فيها finite word length ... فاكرين في الcs500 لما كنا بنسمى الmemory cell بword ... فهنا بيقول ان ذاكرة الكومبيوتر بيكون فيها حجم الword او الcell محدود وبالتالي عدد معين من الأرقام ينفع يتخزن وبالتالي عشان تخزن exact number فيه علامة عشرية وماشي الى ما لانهاية في الذاكرة هيبقى لازم يكون في error وبالتالي لازم تستخدم قيمة تقريبية بدل من القيمة الحقيقية وبالخطا ده متعلق بالكومبيوتر

In any numerical computation, we come across the following types of errors:

1) Rounding errors.

Rounding errors arise from the process of rounding-off the last significant digit during the computation. They are also called procedural errors or numerical errors. Such errors are unavoidable in most of the calculations due to limitations of computing aids.

For example:

1) If the exact value of $\frac{10}{6} = 1.6666666 \ldots \ldots$, approximation to 6 significant digits after the decimal point will be 1.666667 and the error will be calculated as follow:

$$\boldsymbol{Error = 1.66666666 \ldots . - 1.666667 = 0.0000003333 \ldots .}$$

2) If the exact value is 0.003581, the approximation to 3 significant digits will be 0.00358

دي الأخطاء الناتجة عن التقريب لاقرب رقم عشري وده خطا مينفعش نتلاشاه نتيجة لان ذاكرة الكومبيوتر محدودة. يعنى مثلا $\frac{10}{6} = 1.666$ وعايز اعمله approximation لحد 6 significant digits بعد العلامة العشرية هيبقى ١,٦٦٦٦٦٧ وبالتالي الخطة هيكون عبارة عن ...1.6666666....-1.666667 = 0.0000003333

2) Truncation errors (chopping error)

Truncation are generated when the last significant digits are discarded

- ✓ If we are using a decimal computer having a fixed word length of 4 digits, rounding-off of 13.658 gives 13.66, whereas truncation gives 13.65.
- ✓ Truncation errors are caused by using approximate results or by replacing an infinite process with a finite one.
- ✓ **Truncations is used in series expansion**

الخطا ده كل اللى بيحصل فيه ان بيحذف كام رقم بعد العلامة العشرية بدون تقريب لاقرب رقم عشري مشاكتر

والخطا ده بيستخدم في الseries expansion ذي ما هنشوفه قدام

For example:

If the exact value of $\frac{10}{6} = 1.666666 \ldots \ldots$, truncate after 6 digits after decimal point and after 2 total digits.

Truncation after 6 digits after decimal point means that $\frac{10}{6} = 1.666666$

Truncation after 2 total digits means that $\frac{10}{6} = 1.6$

في المثال ده لو قالك truncate after 6 digits بعد العلامة العشرية معناه هتقطع بعد ٦علامات عشرية فقط اما لو قال truncate to 2 total digits يبقي يقصد عدد الأرقام في الجزء الصحيح والعشري مع بعض ... يعنى مثلا $\frac{10}{6}$ بتساوي ١,٦٦٦٦٦٦٦ فلو قال اقطع بعد ٦علامات عشرية هيبقى الرقم كدة ١,٦٦٦٦٦٦ او لو truncate after 2 total digits يقصد بيها ١,٦

من الاخر في الامتحان لو مقالش كلمة total يبقى العدد اللى قالك عليه يقصد بيه عدد الأرقام في الجزء العشري فقط اما لو قالtotal يبقى الرقم كله بيتكون من الرقم اللى قالك عليه في السؤال.

Truncation errors also occur in the series expansion. For example, $e^x, cos\ x, sin\ x$...etc terms are evaluated in computers by series expansions. These series contain infinite number of terms. But computers can evaluate only limited number of terms in series. Hence truncation of series is done. This introduces error in the value being evaluated.

For example:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \infty$$

This is an infinite series expansion for e^x and suppose the value of the infinite series is X and if it is truncated to:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

And this equal to X', then the truncation error will be:

$$\boldsymbol{Truncation\ Error} = |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X'}|$$

ده هنشوفه بمثال أكبر في المحاضرة التانية

Lecture TWO

1) Analysis and Estimation of Error.

First: Ways to express errors.

هنا هنتكلم عن كيفية حساب الخطأ وتحليله

There are 3 ways to express errors:

1) Absolute error:

We know that error can be calculated as,

$$Error = True\ value - Approximate\ value$$

The above error is also called true error (ϵ_t). Always the magnitude of the error is considered. Then it is called *absolute error* i.e.

$$Abolute\ error\ (\epsilon_a) = |True\ value - approximate\ value|$$

So,

$$(\epsilon_a) = |Error| = |\epsilon_t|$$

هنا بيقول ان الخطا عارفين انه بيتحسب من طرح القيمة الحقيقية من القيمة التقريبية وده بنسميه الخطا الحقيقي او الtrue error ولكن احنا يهمنا مقدار الخطأ فقط بدون اشارته وفي الحالة دي هتحط الخطأ بين علامة الabsolute وبالتالي هنجيب الabsolute value بتاعة الtrue error وبالتالي هنسميه الabsolute error او الخطأ المطلق يبقى الخط المطلق هو الخط الحقيقي بس محطوط بين علامة الabsolute

2) Relative error:

The absolute error depends upon magnitudes of actual and approximate values.

Hence only absolute error does not provide complete information. Hence it is normalized with respect to actual value. Then it is called relative error i.e.,

$$Relarive\ error\ (\epsilon_r) = \left|\frac{True\ value - approximate\ value}{True\ value}\right|$$

$$Relarive\ error(\epsilon_r) = \left|\frac{Abolute\ error}{True\ value}\right|$$

هو هنا يبقول ان الخطأ المطلق مبيديش أي معلومات واضحة وميتفعش حتى فالمقارنة بين خطأين ذي ما هنشوف بمثال قدام والمقارنة بتنفع لما اعمل نسبة مئوية او يعنى نسبة الخطأ ده من القيمة الحقيقة وبالتالي لما نقسم

الabsolute error على الtrue value هنلاقي اننا وصلنا لنسبة تمكنا من المقارنة لانه ده بيشوف الرقم اللى اتشال وكان السبب في نسبة الخطأ نسبته كام من القيمة الحقيقية وده طبعا شيء بيوضح مدى قيمة الخطا ومدى الدقة طبعا

3) Percentage error:

Percentage error is defined as

$$\boldsymbol{Percentage\ error = 100 \times \left|\frac{True\ value - approximate\ value}{True\ value}\right|}$$

$$\boldsymbol{Percentage\ error = 100 \times Relarive\ error(\epsilon_r)}$$

الخطا بالنسبة المئوية وده عبارة عن ال**relative** مضروب في ١٠٠ وده بيوضح نسبة الخطبة بالنسبة المئوية وده برضو مؤشر ممتاز للدقة

ملحوظة مهمة: لو الحاجة اللى بيقسها ليها وحدة قياس يبقى الabsolute error هيكون طبعا ليه نفس وحدة القياس اما الrelative والpercentage طبعا ملهومش وحدة قياس أصلا.

Example **1**:

Calculate the absolute error and relative error for the following cases:

1) **Case 1:** The true value = 1×10^{-6} and the approximate value = 0.5×10^{-6}
2) **Case 2:** The true value = 1×10^{6} and the approximate value = 0.99×10^{6}

Solution:

1) **Case 1:**

$$\boldsymbol{Error\ = True\ value - Approximate\ value} = 1 \times 10^{-6} - 0.5 \times 10^{-6} = 0.5 \times 10^{-6}$$

$$\boldsymbol{Abolute\ error\ (\epsilon_a) = |True\ value - approximate\ value| = |Error|} = |1 \times 10^{-6} - 0.5 \times 10^{-6}| = 0.5 \times 10^{-6}$$

$$\boldsymbol{Relarive\ error} = \left|\frac{\boldsymbol{Abolute\ error}}{\boldsymbol{True\ value}}\right| = \left|\frac{0.5 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}}\right| = 0.5$$

2) **Case 2:**

$$\boldsymbol{Error\ = True\ value - Approximate\ value} = 1 \times 10^{6} - 0.99 \times 10^{6} = 10000$$

$$\boldsymbol{Abolute\ error\ (\epsilon_a) = |True\ value - approximate\ value| = |Error|} = |1 \times 10^{6} - 0.99 \times 10^{6}| = 10000$$

$$\boldsymbol{Relarive\ error} = \left|\frac{\boldsymbol{Abolute\ error}}{\boldsymbol{True\ value}}\right| = \left|\frac{10000}{1 \times 10^{6}}\right| = 0.01$$

ده مثال بسيط وتعويض مباشر في القوانين السابقة ... هو بس مدينا الtrue value والapproximate وعايزنا نحسب الerror ... بس المهم عايزين نشوف تحليل الخطأ او تقديره

Second: Analysis of errors.

Let's compare errors of the 2 cases from the previous example:

Case no.	True value	Approximate value	Absolute error	Relative error
Case 1	1×10^{-6}	0.5×10^{-6}	0.5×10^{-6}	0.5
Case 2	1×10^{6}	0.99×10^{6}	10000	0.01

If we compare the absolute error in each case, we can say that

- ✓ The error in **case 1** is too small and therefore its approximate value is best and approaches the true value.
- ✓ The error in **case 2** is 10000 and it is too big and therefore its approximate value is not good.

But if we compare the relative errors, we can find that:

- ✓ The error in **case 1** is not best while the error in **case 2** is best because the relative errors tells us that,
  - ➢ In case 1, the approximate value is far from the true value by 50% from the true value
  - ➢ In case 2, the approximate value is far from the true value by only 1% which of course is best.

هنقارن الerrors بتاعة المسالة السابقة ... هنقارن طبقا للabsolute error هنقول ان في الcase الأولى القيمة بتاعة الabsolute error يعني القيمة المقطوعة من الtrue value صغيرة جدا فالبتالي دى نسبة خطا كويسة وبالنسبة للcase التانية قيمة الerror هي ١٠٠٠٠ ... فهنقول يااااه ده كتير قوي ... يبقى مشحلو

طيب خلينا نقارن بالrelative error ... ولو كمان ضربته في ١٠٠ هيبقى افضل ... هتلاقي ان في الحالة الأولى قيمة الخطأ القليلة دي هي عبارة عن خطأ بنسبة ٥٠٪ يعني تقريبا الtrue value ناقصة النص وطبعا دي نسبة خطأ كبيرة جدا وبالنسبة لل١٠٠٠٠ هتلاقي انها عبارة عن ١٪ فقط من الtrue value ودي نسبة خطأ مقبولة طبعا ... وده نتيجة لان في الحالة التانية انت بتتكلم في مليون فلما تاخد منه ١٠٠٠٠ مشحاجة يعنى لكن بالنسبة للحالة الأولى هتلاقي الtrue value أصلا قيمة قليلة فلما تاخد منها قيمة قليلة هتبقى نسبة الخطأ كبيرة.

In exam you will be asked to write your comment:

Comment: We can't compare using absolute error.

في الامتحان هيطلب منك تكتب تعليق وده التعليق اللى كتبه الدكتور في المحاضرة

Third: Approximate and Relative Approximate Errors.

How to calculate errors in real life while you don't know the true value?

Oftentimes the true value is unknown to us, especially in numerical computing. In this case, we will have to quantify errors using approximate values only. So, we use an iterative method in which we repeat the measurements and we get an approximate value at the end of each iteration.

The approximate error is defined as the difference between the present approximate value and the previous approximation (i.e. the change between the iterations).

$$\textit{Absolute Approximate error} = |\textit{Current approximation} - \textit{previous approximation}|$$

Similarly, we can calculate the relative approximate error by dividing the approximate error by the present approximate value.

$$\textit{Relative approximate error} = \left|\frac{\textit{approximate error}}{\textit{Current approximation}}\right|$$

$$\textit{Percentage approximate error} = \left|\frac{\textit{approximate error}}{\textit{Current approximation}}\right| \times 100$$

احنا قولنا ان من الصعب معرفة القيمة الحقيقية وقولنا ان قيمة الخطأ هي عبارة عن القيمة الحقيقية مطروح منها القيمة التقريبية .... طيب هحسب الخطأ اذاي وانا أصلا مشعارف القيمة الحقيقية ....

هنحسبها بالقيمة التقريبية ... اذاي بقى .... هنعمل مثلا التجربة بتاعتنا وهناخد قيمة منها وطبعا هتكون تقريبية وهنكرر التجربة تاني وهناخد قيمة تقريبية تانية ... هنطرح القيمة الحالية من القيمة السابقة هيدينى قيمة خطأ تقريبية وهنكرر التجربة تاني وناخد قيمة ونطرحها من اللى قبلها وهكذا لحد ما نلاقي نسبة او قيمة الخطأ اللى بينتج في كل مرة قليلة جدا وقتها نقدر نقول اننا وصلنا تقريبا للقيمة الحقيقية

وفي الحالة دي هنسمى قيمة الخطأ الناتج بـapproximate error يعنى الخطأ التقريبي وممكن برضو نحسب نسبة الخطأ التقريبي وهنسميها relative approximate error

---

Example **2**:

Obtain the value of expression $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}}$ by two methods using 4 digits floating point arithmetic for $\boldsymbol{x} = \mathbf{0.5129}$ and calculate the relative error in two methods.

Solution:

$$\textit{True value} = (1+x)^2 = (1+0.5129)^2 = 2.28886641 = 0.228886641 \times 10$$

هنا لما حسبنا القيمة الtrue طلعت بالرقم الكبير ده ولكن هو قال في السؤال نحسبها بطريقتين ولكن باستخدام ال4 digits floating point arithmetic ... يقصد ايه بيها ... فاكرين الIEEE بتاع الCS500 واننا كنا بنحول الرقم لfloating point ونضرب في exponent ... هو ده اللى يقصده بالظبط وهنلاقي فالمرجع شارح ال floating point representation اللى اخدناها في الcs500 ولما قال 4 digits يعنى عايز اننا نحول الرقم لشكل floating ونضرب في الexponent ولكن هنستخدم 4 floating point digits يعنى هنستخدم ٤ ارقام بعد العلامة العشرية فقط

Method one:

$$(1+x)^2 = (1+x)(x+x) = (1+0.5129)(1+0.5129) = (1.5129)(1.5129)$$

The number 1.5129 should be represented by four-digit floating point arithmetic. It will be (0.1512×10^1). Hence the expression becomes,

$$(1+x)^2 = (0.1512 \times 10)(0.1512 \times 10) = 0.02286144 \times 10^2$$

At 4 digits floating point arithmetic:

$$(1+x)^2 = 0.0228 \times 10^2 = 0.2280 \times 10$$

الطريقة الأولى اننا هنكتب القوسين جنب بعد ... بس هو قال عايز نخلي الأرقام في نظام الfloating point يعنى ال1.5129 مينفعش يبقى كدة ولكن لازم نكتبه 0.15129×10 بس فيه حاجة ... هو عايز مننا نستخدم ٤ ارقام في الfloating point يعنى ٤ ارقام بعد العلامة العشرية يعنى هيبقى كدة 0.1512×10 تلاحظ اننا شلنا ٠,٠٠٠٠٩ فاكيد لازم يكون فيه error ... فعايزين نحسبه بقى ....

وكمان لما عمل الحسبه بالرقم ده 0.1512×10 الناتج اللى هيطلع لازم يتحط في الfloating point والexponent ... طيب ليه هو بعد ما عمل 10^2 رجع خلاها ١٠ بس وضرب في ١٠ ... عشان الرقم الtrue مضروب في ١٠ مش ١٠٢ فلازم يخليهم ذي بعض

$$\boldsymbol{Relarive\ error} = \left|\frac{\boldsymbol{True\ value - approximate\ value}}{\boldsymbol{True\ value}}\right|$$

$$\boldsymbol{Relarive\ error} = \left|\frac{0.228886641 \times 10 - 0.2280 \times 10}{0.228886641 \times 10}\right| = 3.873712315 \times 10^{-3}$$

Method Two:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + (2 \times 0.5129) + (0.5129 \times 0.5129)$$

The numbers in above equation are first converted to 4-digit floating point arithmetic. i.e.,

$$(1+x)^2 = (0.1000 \times 10) + (0.2000 \times 10 \times 0.5129) + (0.5129 \times 0.5129)$$

$$(1+x)^2 = (0.1000 \times 10) + (0.1025 \times 10) + 0.2630$$

نفس الفكرة ... بس هنا ال١ وال٢ اللى أصلا في المعادلة حطهم في نظام الfloating point والexponent ولكن فيه حاجة ... عشان اعرف اجمع لازم اخد ١٠ عامل مشترك ولكن الرقم التالت مضروب في 10^0 وبالتالي مشهينفع ... طيب نعمل ايه ... الرقم ٠,٢٦٣٠ نخليه 0.0263×10

To perform this addition, we have to equalize exponents

$$(1+x)^2 = (0.1000 \times 10) + (0.1025 \times 10) + (0.0263 \times 10)$$

$$(1+x)^2 = (0.1000 + 0.1025 + 0.0263) \times 10$$

$$(1+x)^2 = 0.2288 \times 10$$

كدة بقى سهل نحسب الerror.

Now relative error will be:

$$\boldsymbol{Relarive\ error} = \left|\frac{\boldsymbol{True\ value - approximate\ value}}{\boldsymbol{True\ value}}\right|$$

$$\boldsymbol{Relarive\ error} = \left|\frac{0.228886641 \times 10 - 0.2288 \times 10}{0.228886641 \times 10}\right| = 3.785323583 \times 10^{-4}$$

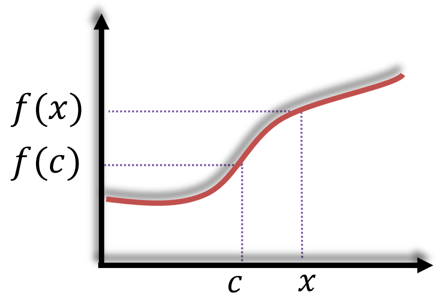
Comment:

Method of evaluation	Relative error
$(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x})$	$3.873712315 \times 10^{-3}$
$\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$	$3.785323583 \times 10^{-4}$

The relative error in the second method is less than the first metho, so, doing the calculation with the second method is accurate.

هنا طبعا فالاخر بنحلل الخطا وبنعمل تعليق عليه وبنقول ان الrelative error في الطريقة التانية احسن بكتير من الأولى لانه اقل وبالتالي استخدام الطريقة التانية في الحساب هيبقى ادق.

Fourth: Taylor's Series for Approximation of Functions.



Taylor's series are used to get approximate value for non-polynomial functions such as e^x, $\sin x$ by converting it to polynomials.

فالاول لازم نفهم ايه هي taylor series ... هدف متسلسلة taylor انك توصل لقيمة تقريبية لدالة ما صعب انك تعرف قيمتها. عن طريق انك بتحول الدالة الى دالة كثيرة الحدود

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})}{\mathbf{0}!} + \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})}{\mathbf{1}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) + \frac{\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{c})}{\mathbf{2}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2 + \frac{\boldsymbol{f}'''(\boldsymbol{c})}{\mathbf{3}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^3 + \cdots + \frac{\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{n}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}.$$

ناخد بالنا ان مضروب الصفر ب١

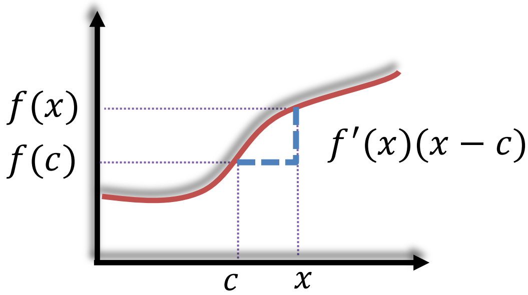
The main idea:

The main idea is that we have an infinite function that we can't get its exact value at x however, we can get it's a guess value as initial value $x = a$ which will give us an approximate value for $f(x)$ which will equal $f(c)$.

كل الفكرة ان عندنا دالة عند x ولكن صعب تجيب القيمة الحقيقية للدالة عند x ولكن عايزين نجيب طبعا القيمة الapproximate هنعمل ايه ... هنبدا بقيمة للx من عندنا ... هنخمنها يعنى وهنبدا بعد كدة نعمل تجارب لحد ما نوصلها لاقرب قيمة للx بنسبة خطأ قليلة

القيمة اللى هنخمنها هنسميها c وهو فالامتحان لازم يديهالك ...

What if we get the slope of the line between $f(x)$ and $f(c)$:



$$the\ slope = \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)}$$

And we know that the slope is the derivative of the $f(x)$, so:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)}$$

So,

$$f(x) = f(c) + f'(x)(x - c)$$

انا كدة جبت الميل ذي ما شوفناه في التفاضل قبل كدة ولكن انا عندي المعادلة بتاعة الpolynomial مشكدة ومفهاش تفاضل خالص ... فايه علاقة الderivative بالpolynomial وفي المعادلة فوق مقسوم على مضروبn ... جاب المضروب منين ... ده اللى هنشوفه دلوقتى.

The idea behind the Taylor expansion is that we can re-write every smooth function as an infinite sum of polynomial terms. The first step is therefore to write down a general n^{th}-degree polynomial. Here it is:

$$f(x) = a_0(x - c)^0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \cdots$$

هنا بيقول ان الفكرة بتاع *taylor expansion* ان أي دالة نقدر نكتبها بمجموع عدد لا نهائي من *polynomial* *terms* او بالدوال كثيرة الحدود

Where a_0, a_1, … are coefficients on each polynomial term, and (c) is a constant that represents where along the $x - axis$ we want to start our approximation (if we don't care where we start, just let $c = 0$, which is technically known as a Maclaurin rather than a Taylor). This series known as a "power series"

والa1 والa2 دول عبارة عن معاملات والc هو مجرد رقم على محور الx بيمثل القيمة التقريبية اللى بدانا بيها … ولو انت مشفارق معاك الc هتخليها بصفر وفي الحالة دي هنبقى عملنا maclaurin series … ده الفرق بين taylor وmaclaurin

The goal here is to find a clever way to find the coefficients a_0, a_1, … in that equation, given some function (f) and an initial value of (c). Here is the logic for doing that. Polynomials are smooth, so that guarantees they're differentiable. That is, we can calculate the first, second, third and so on derivatives of them.

So, starting with our polynomial above, let's take the first few derivatives of it, like this:

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + 4a_4(x - c)^3 + \cdots$$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3(x - c) + 12a_4(x - c)^2 + 20a_5(x - c)^3 + \cdots$$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 6a_3 + 24a_4(x - c) + 60a_5(x - c)^2 + 120a_5(x - c)^3 \ldots$$

And so on

هدفنا دلوقتى اننا نلاقي طريقة نجيب بيها قيم المعاملات a_0, a_1 في المعادلة دي … المنطق هنا بيقول ان الpolynomials اكيد ليها تفاضل … واحنا اتفقنا ان التفاضل هو الميل… ونقدر نجيب التفاضل الأول والتاني والتالت وهكذا …. فهنفاضل المعادلة الpolynomial اللى فوق

Clearly, we're seeing a pattern already. We'll use that in a minute. Now that we have (n) derivatives of (f), let's evaluate them for some number that will cause most of their terms to drop away. This is the key step. If we're clever, we'll notice that if we evaluate them at $x = c$, most of their terms will go to zero. That will leave behind only the coefficients a_1, a_2, … multiplied by some constant. So here's that step:

احنا هنا عايزين نعوض بقيمة تخلي معظم الحدود بصفر … مفيش غير اننا نخليى الc = x عشان يبقى أي حد فيه x-c بصفر

$$f(c) = a_0 = a_0 0!$$

$$f'(c) = a_1 = a_1 1!$$

$$f''(c) = 2a_2 = 2 \times 1 \times a_2 = a_2 2!$$

$$f'''(c) = 6a_3 = 3 \times 2 \times 1\ a_3 = a_3 3!$$

Now we have a set of simple equations we can solve for a_1, a_2 … Simply divide both sides by $n!$. That gives us the following:

لاحظت هنا ان الرقم اللى مضروب في a هو أصلا مضروب حاجة تانية ... يعنى ال٦ مضروب ال٣ ولو كملت للتفاضل الرابع هتلاقي الرقم المضروب في الa هو مضروب ال٤ وهكذا

$$a_0 = \frac{f(c)}{0!}$$

$$a_1 = \frac{f'(c)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(c)}{3!}$$

The pattern here is beautiful. The n^{th} coefficient is just the n^{th} derivative of the original function, evaluated at c, divided by (n) factorial. Now we have our (n) coefficients. The next step is to plug them back into our beginning expression for a general n^{th}-degree polynomial, like this:

دلوقتى الموضوع بسيط هنعوض بس عن قيم الa

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{f(c)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}\,(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}\,(x - c)^3 + \cdots.}$$

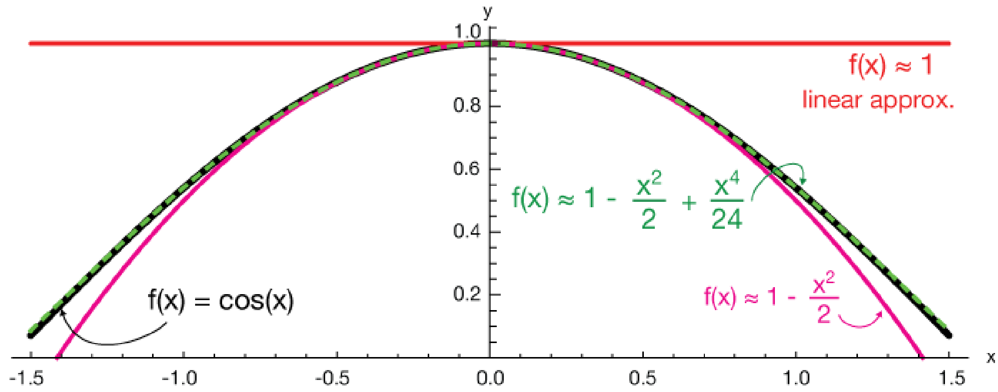
This equation is what we're looking for. It gives a polynomial expansion for every smooth function (f). We just need to calculate the first (n) derivatives of (f), evaluate them at (c), divide each one by $n!$, and sum up these terms. The result will be a good approximation to our original function.

The more terms we add on, the more accurate the polynomial approximation will be.

And this is the Taylor Formula

$$\boldsymbol{f(x) = f(c) + (x - c)\, f'(c) + \frac{(x - c)^2}{2!}\, f''(c) + \cdots + \frac{(x - c)^{(n-1)}}{(n-1)!}\, f^{(n-1)}(c)}$$

Each term you add makes the approximate value close to the true value, for example, see the graph for $cos\ x$ by using 2 terms only comparing to the true value by using 3 terms



شوف مدى تطابق رسمة الcos x مع الf(x) بمعادلة taylor لما استخدم ٣ حدود والرسم بعيد عن الحقيقة لما استخدم حدين فقط

<u>How to find the errors using Taylor series:</u>

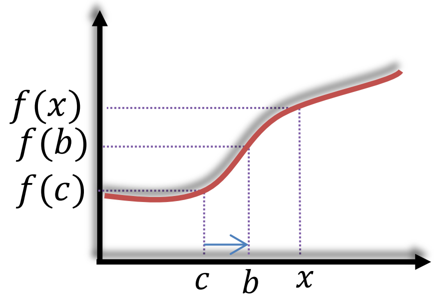
We know that, the more terms we add on, the more accurate the polynomial approximation will be.

So, if the true value of the function can be calculated from:

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} f''(c) + \cdots + \frac{(x-c)^{(n)}}{(n)!} f^{(n)}(c) + R_{n+1}(x)$$

where $R_{n+1}(x)$ is remainder term, can be expressed in the form

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-c)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(b)\ , c < b < x.$$



What is the point (b)?

if you add more terms, you will get closer to the true value and b is the point between c *and* x when you add more terms and get close to x.

The approximate value is:

$$p(x) = f(c) + (x-c)f''(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} f''(c) + \cdots + f^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}$$

Then, the error will be calculated as follow:

$$Error = f(x) - p(x) = R_{n+1}(x) = \frac{(x-c)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

ايه فكرة الحوار ده ... دلوقتي اتفقنا ان كل ما ازود term يبقى انا بقرب من القيمة الحقيقة تمام ... طيب بعد الحد اللى فيه كل حاجة اس n اكيد هيكون فيه بعده حد تاني عشان أصلا عندنا عدد لانهائي من الحدود يعنى هيكون عندي حد فيه n+1 وده بيسموه الerror او الreminder لو فرضا ان القيمة الحقيقة $f(x)$ فيها الR_{n+1} الحد

اللى بعد الحد اللى فيه الn وان ال$p(x)$ هي القيمة التقريبية اللى فيها الحد الn بس مش الn+1 ... يبقى الخطا هجيبه باني اطرح ال٢ من بعض

Commonly Used Taylor Series

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

عشان توصل لاي صيغة ذي دي هتخلي الc اللى في القانون بصفر وهتجيب المشتقات او الderivative وهتعوض فيها عن ال0 = x ... هنشوفها في مثال قدام

Example **3**:

Using the Taylor's series, find the value of e^x at $x = 0$.

Solution:

$$f(x) = f(0) + (x-0)f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f^3(0) + \cdots$$

Where $f(0) = e^0 = 1 \quad f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1$$

هو المفروض يديك القيمة الافتراضية لوحدها ويديك قيمة الx اللى مفروض تجيب القيمة التقريبية بتاعة الدالة بتاعتها وتحسب

Example **4**:

Find the approximate value of e^x at $x = 1$ up to first five terms and estimate the truncation error.

Solution:

The exponential series, e^x by Taylor's series using first five terms of the series we get,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} = 2.7083333 \ (approximate\ value)$$

Actual value of e^x at $x = 1$ will be,

$$True\ value = e^1 = 2.7182818$$

$$Truncation\ error = True\ value - Approximate\ value = 2.7182818 - 2.7083333 = 0.0099485$$

هو هنا المفروض يقولك ان الc او القيمة الافتراضية هتبقى بصفر وهات قيمة الe عند x = 1 باستخدام ٥ حدود فقط واحسب الtruncation error ... طيب ليه الخطا هنا عبارة عن truncation مش rounding عشان انت لما بتشيل حد بتلغى بعض الأرقام العشرية بدون تقريب

بس فكل الأحوال الe شكلها بtaylor ثابت ومعروف

هنا ممكن تقول مانا هجيب الtrue value بالالة الحاسبة يبقى اذاي مبعرفش اجيب الtrue value ... ومين قالك ان الالة الحسابة بتديلك الtrue value .... أساسا الرقم الى مالانهاية والالة الحسابة هتشيل منه كتير وهتديك الرقم اللى بتشوفه فالمفروض أصلا نسميه approximate value مش true value

How to get the approximate value in Taylor's series expansion:

You will try the value of the expansions starting from the zero order (1st term) which means:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) \qquad (zero\ order\ approximation)$$

Then estimate the error (I.e. true value – zero order approximation). If the error is too far from the true value, then use the first order approximation which means:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (1^{st}\ order\ approximation)$$

Then estimate the error (I.e. true value – zero order approximation). If the error is too far from the true value, then use the second order approximation and so on.

الكلام ده معناه ايه من الاخر .... معناه انى لو بستخدم taylor عشان اجيب قيمة تقريبية لدالة ما ولكن مطلوب منى انى معديش نسبة خطأ معين ... هعمل ايه ...

هحسب قيمة الدالة وليكن باستخدام اول حد من taylor series ... وهنسميها الzero order approximation وهشوف نسبة الخطأ لو لقيناها كبيرة يبقى نزود term يعنى نحسب الدالة باستخدام 2terms وهنسميها 1st order approximation ونحسب الخطا ولو اكبر من المسموح بيه يبقى نزود term وهكذا.

طيب انا لو عرفت عدد الحدود اللى هقدر استخدمها هيبقى سهل انى احسب علطول القيمة الapproximate بدل ما افضل اجرب وكل مرة ازود term ... احنا قولنا ان الerror في taylor series هو الreminder ... فلما يديك نسبة error وعايز منك القيمة الapproximate يبقى هنستخدم الreminder عشان نحب الn ونبقى عرفنا في الحالة دي عدد الحدود.... هنشوف ده في المثال الجاي.

Example **5**:

Find the approximate value of e^x using the expansion

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ For $x = 0.5$ with absolute error less than 0.005.

Solution:

هنا عايز منى احسب قيمة الe^x عند ٠,٥ بس نسبة الخطا متعديش ٠,٠٠٥ ... هعمل ايه ... هستخدم ال$R_{n+1}(x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) for\ e^x = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

So,

$$R_{n+1}(x) < 0.005$$

$$\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} < 0.005$$

$$log\ \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} < log\ 0.005$$

$$log\ x^{(n+1)} - log\ (n+1)! < log\ 0.005$$

$$(n+1)\log x - \log(n+1)! < -2.30102999566$$

$$log\ (n+1)! - (n+1) log\ x > 2.30102999566$$

هنا قدرنا نوصل لمعادلة نقول فيها لازم نعوض عن الn بقيمة بحيث تكون اكبر من ٢,٣ ... فلما جربنا n=3 اللى حصل ان فيه القيمة بقت اكبر من ٢,٣ ..... ده معناه ان كل ما n تزيد عن ٣ نسبة الخطا تبقى اقل

At $n = 3$

$$log\ (3+1)! - (3+1) log\ 0.5 = 2.58433122437$$

So, $log\ (3+1)! - (3+1) log\ 0.5 > 2.30102999566$

Knowing that $the\ true\ value\ of\ e^{0.5} = 1.6487212707$, let's calculate the error an $n = 3$ (i.e. using 3 terms only = 3rd order approximation)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2!} = 1.625$$

$$\boldsymbol{Absolute\ error} = True\ value - approximate\ value = 1.6487212707 - 1.625 = 0.023721707$$

طيب هنا لما خلينا الn=3 وجيبنا قيمة الe^0.5 لقينا الخطا اكبر بكتير من ٠,٠٠٥ فالبتالي هنزود term يعنى هنخلي الn=4

This error value is greater than the allowed error value which is 0.005, so, we have to increase one term:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2!} + \frac{0.5^3}{3!} = 1.645833333$$

$$\boldsymbol{Absolute\ error} = 1.6487212707 - 1.645833333 = 0.002888$$

The error value now is less that the allowed one, so, the approximate value for e^x at $x = 0.5$ with absolute error less than 0.005 is 1.645833333

دلوقتى لما زودنا term وحسبنا الe^0.5 لقينا نسبة الخطأ اقل من ٠,٠٠٥ وده المطلوب بالظبط

Example **6**:

Find the approximate value of $\boldsymbol{sinx}$ at $\boldsymbol{x = 0.5}$ with absolute error less than 0.005.

Solution:

هنا مطلوب مننا مسالة ذي اللى فاتت بالظبط ولكن الدالة عبارة عن sin x

Using taylor series, if $f(x) = \sin x$, $and\ c = 0\ then$

$$\boldsymbol{\sin x} = f(c) + (x - c)f''(c) + \frac{(x-c)^2}{2!} f''(c) + \cdots + \frac{(x-c)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$f(x) = \sin x$	$f(0) = \sin 0 = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = -\sin 0 = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^4(x) = \sin x$ $f^5(x) = \cos x$ $f^6(x) = -\sin x$ $f^7(x) = -\cos x$		$f^4(0) = \sin 0 = 0$ $f^5(0) = \cos 0 = 1$ $f^6(0) = -\sin 0 = 0$ $f^7(0) = -\cos 0 = -1$

ذي ما قولنا عشان نجيب صيغة معينة هنخلي ال**c** بصفر ... وهنجيب المشتقات وهنعوض عن ال**x** في **f(X)** ومشتقاتها بصفر وهنعوض فمعادلة **taylor**

$$\boldsymbol{\sin x = 0 + (x-0)(1) + \frac{(x-0)^2}{2!}(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}(-1) + \frac{(x-0)^4}{2!}(0) + \cdots}$$

$$\boldsymbol{\sin x = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}$$

وهنلاحظ ان الأسس الموجبة مشموجودة وكمان هيمشى حد موجب وحد سالب

To get the approximate value of sin (0.5) with error less than 0.005, we do the following

$$\boldsymbol{R_{n+1}(x)} = \frac{\boldsymbol{x^{(n+1)}}}{\boldsymbol{(n+1)!}}$$

So,

$$\boldsymbol{R_{n+1}(x)} < 0.005$$

$$\frac{\boldsymbol{x^{(n+1)}}}{\boldsymbol{(n+1)!}} < 0.005$$

$$\boldsymbol{log}\ \frac{\boldsymbol{x^{(n+1)}}}{\boldsymbol{(n+1)!}} < log\ 0.005$$

$$\boldsymbol{log\ x^{(n+1)} - log\ (n+1)!} < log\ 0.005$$

$$\boldsymbol{(n+1)\log x - \log(n+1)!} < -2.30102999566$$

$$\boldsymbol{log\ (n+1)! - (n+1) log\ x} > 2.30102999566$$

At $n = 4$

$$\boldsymbol{log\ (4+1)! - (4+1) log\ 0.5} = 2.88536122$$

So, $\boldsymbol{log\ (4+1)! - (4+1) log\ 0.5} > 2.88536122$

Knowing that *the true value of* $\sin 0.5 = 0.4794255386$, let's calculate the error an $n = 3$ (i.e. using 3 terms only = 3rd order approximation)

$$\boldsymbol{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} = 0.5} - \frac{0.5^3}{6} = 0.4791666667$$

$$\boldsymbol{Absolute\ error} = True\ value - approximate\ value$$
$$= 0.4794255386 - 0.4791666667 = 0.0002588719$$

The error value now is less that the allowed one, so, the approximate value for $\sin x$ at $x = 0.5$ with absolute error less than 0.005 is 0.4791666667

نفس الطريقة السابقة ولكن هنا ليه اخدنا n=4 او الحد الرابع يعنى ... لان الحد التالت فيه x^2 وفي الsin x هيكون بصفر اصلا

---

2) Root of equation

First: Introduction.

In the science and engineering applications we always come across the equations of the form,

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

When this equation is quadratic, then standard methods are available to find roots of such equation. That is,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

This can be done by analytical method which includes factorization, Completing the Square or quadratic formula which is:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

هنا بنقول في العلوم والهندسة معظم المعادلات بتبقى محتاجين نحلها او نجيب قيمة x لما تكون الf(x) بصفر او يعنى قيم x اللى تخلي المعادلة تساوي صفر وبنسمي x اللى هتخلي المعادلة بصفر root of equation... فلو فكرنا في الدالة التربيعية هيكون امرها سهل وممكن نجيبها بالطرق التحليلية عادي جدا سواء بالتحليل او اننا نستخدم المعادلة العامة وفي الحالة دي ممكن توصل للقيمة الexact أصلا ... طيب خلينا نشوف كدة المعادلة التكعيبية واللى بعدها

Consider the following equation,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Such equation cannot be easily solved using standard methods or direct formulae are not available find roots of such equation. Sin, cos etc. functions are called transcendental functions. Equations involving such functions are called transcendental equations.

$$f(x) = x^2 - 2\sin x + 3 = 0$$

is a transcendental equation. There is no direct· formula available to obtain roots of transcendental equations. In above discussion we considered polynomial equations and transcendental equations. The roots of those equations can be obtained with the help of recursive methods or numerical methods.

طيب الدالة التكعيبية مشهل انك تجيبها بالطرق المباشرة ذي الدالة التربيعية واصلا الطرق المباشرة مشموجودة أصلا عشان تجيب قيم الx اللى تخلي المعادلة بصفر وكمان الدوال اللى بتكون عبارة عن sin x او cos x دي دوال غير جبرية ومشسهل انك تجيبها يا طريقة مباشرة لكن ممكن نجيب الroot او قيم x اللى تخلي المعادلة بصفر باستخدام التحليل العددي او الnumerical techniques.

Second: Numerical Methods used to find the roots of the equations.

There are 2 types of methods:

1) Bracketing methods
2) Open methods

Bracketing methods	Open method
There are 2 initial values	There is one or more initial values
Always convergent	Sometimes divergent
More number of iterations are required	Less iterations are required
Bracketing methods are: **Bisection method** **Regular false method**	Open methods are: Newton method. Secant method.

فيه عندي طرقتين طريقة اسمها Bracketing والتانية اسمها open

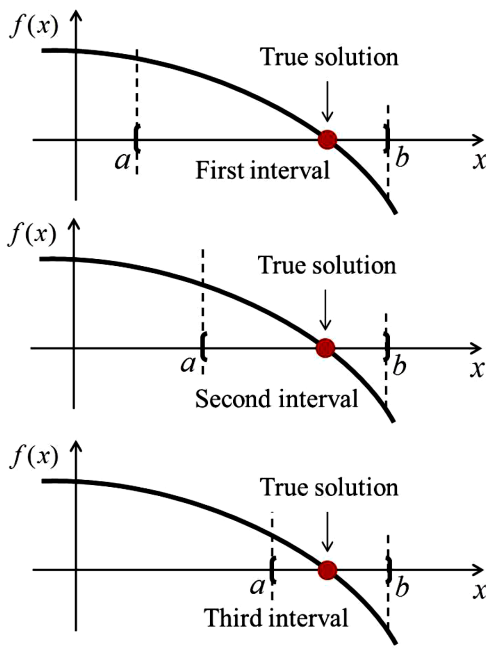
طبعا المقارنة واضحة

1) Bracketing methods

The figure illustrates the basic idea of bracketing method–that is guessing an interval containing the root(s) of a function.

Starting point of the interval is a lower bound, $x_l = a$. End point of the interval is an upper bound, $x_u = b$.

By using bracketing methods, the interval will split into two subintervals and the size of the interval is successively reduced to a smaller interval.



The subintervals will reduce the range of intervals until its distance is less than the desired accuracy of the solution

There are two types bracketing methods; bisection method and false position method.

ايه هي الفكرة العامة بتاعة الbracketing ... كل الفكرة انى باخد قيمتين افتراضيتين لـx وهسمي القليلة بالحد الادني والx الكبيرة بالحد الأعلى وهجيب الf(x) لكل واحدة منهم ... وهاخد قيمة ما بين الx اللى هتفرض انها هي الroot او الx اللى عندها الy = 0 ... وهفضل اضيق الفترة ما بين الx الادني والاعلى لحد ما أوصل لاقرب قيمة للx بتاعة الroot ... والرسم موضح كويس

خلينا نشوف اول طريقة اللى هي الbisection هنفهمها أكتر...

a) BISECTION METHOD

Bisection method is the simplest bracketing method.

Steps of finding the root:

الخطوات اللى بنوصل بيها للroot او الx اللى عندها قيمة الدالة بصفر في طريقة الbisection

1) We start by using a 2 guessing values that represent the interval in which the $x - root$ point is present. There 2 values are:
   - ✓ The lower value, ($\boldsymbol{a}$) and
   - ✓ The upper value, ($\boldsymbol{b}$)

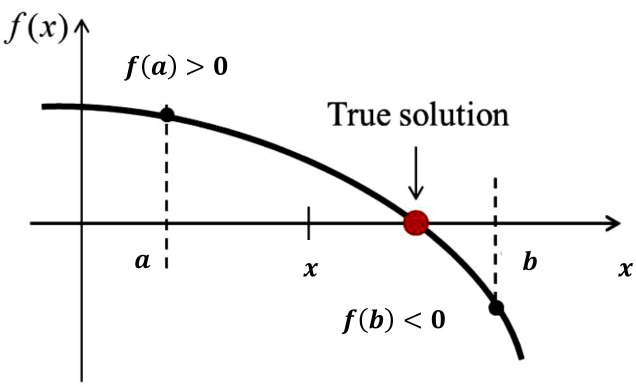
اول خطوة هخمن قيمتين للx وهسمي القليلة x_l يعنى x lower والتانية x_u اللى هي الx upper

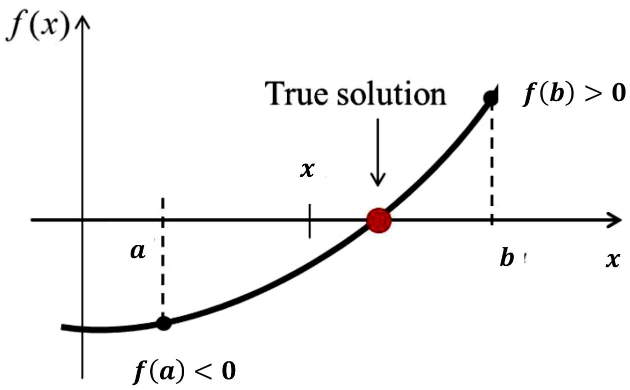
2) Then, we find $f(a) and\ f(b)$ and if

$$f(a) \times f(b) < 0$$

Then the root exists in this interval.

This means that one of the $f(a) or f(b)$ should be negative but not both





هجيب ال$f(a) and\ f(b)$ يعنى هجيب قيمة الدالة عند القيم اللى خمنتها ... وهضرب القيمتين في بعض .... لو كان الناتج اقل من صفر يبقى القيمتين اللى خمنتهم هما الفترة اللى فيهم الx اللى هتبقى هي الroot وهنسميها x

وطبعا بما ان حاصل ضربهم اقل من صفر يبقي لازم واحدة فيهم هتبقى سالب ... وده منطقى لان الy لازم يكون جاي من الموجب ويبقل ناحية السالب فهيعدي على الصفر وبالتالي هيكون فيه x عندها الy = 0 او تكون الدلة جاية من السالب ورايحة عالموجب

3) If the roost exists in the $[a\ ,\ \ b]$ interval, then, we can find an initial value of the $x-root$ value (x) as follow:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

بعد كدة هجيب المتوسط بتاع القيمتين اللى اختارتهم وهعتبر المتوسط ده هو الroot -x لان ده معناه اني باخد القيمة اللى بين القيمتين اللى خمتهم يعنى باخد القيمة اللى بينهم بفترض انها هي الroot

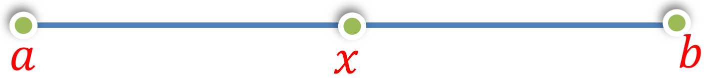
4) Then find $f(x)$: Use the following evaluations to identify the subinterval that the root lies
   - ✓ If $f(a) \times f(x) < 0$, then the root lies in the lower subinterval. Therefore, set $b = x$ and repeat Step 3.
   - ✓ If $f(a) \times f(x) > 0$, then the root lies in the upper subinterval. Therefore, set $a = \ x$ and repeat Step 3.
   - ✓ If $f(a) \times f(x) = 0$, then the root is equal to x_r. Terminate the computation.

هجيب بقى ال$f(x)$ يعنى هجيب قيمة الدالة عند قيمة الx اللى هقول عليها هي الroot وهضربها فقيمة ال$f(a)$ يعنى هضربها في قيمة الدالة عند القيمة الافتراضية القليلة ولو كانت النتيجة اقل من صفر يبقى هضيق الفترة شوية وهخلي قيمة b هي قيمة الx وهرجع من اول الخطوة رقم ٣ يعنى اجيب المتوسط لقيم الفترة الجديدة

ولو كان حاصل الضرب اكبر من صفر يبقى هخلي الa او الlower x هي اللى بقيمة الx نفس الكلام في الحالة دي هرجع للخطوة رقم ٣

ولو كان حاصل الضرب بصفر يبقى الx هي القيمة اللى عايز اوصلها او قيمة الroot

طيب هو هنا عمل كدة ليه ... انا دلوقتي جبت المتوسط بين ال$[a\ ,\ \ b]$ يعنى بقى عندي قيمة في النص بين ال٢ يعنى كان عندي فترتين جداد ... يعنى كدة:



فانا دلوقتي هختبر كل فترة لوحدها ... فالفترة الكبيرة كنا بنجيب $f(a)$ و$f(b)$ ونضرب ال٢ فبعض ولو كان الناتج اقل من صفر يبقى الفترة دي فيها الroot ...

فهنعمل نفس الكلام ... هنجيب ال$f(x)$ ونضربها مرة في ال$f(a)$ ولو كان الناتج اقل من صفر يبقى اذن الroot في الفترة $[a, x]$ وبالتالي هعتبر الx هي الupper limit يعنى هتبقى هي الb .... ونفس الكلام هنضرب ال$f(x)$ في ال$f(b)$ ولو كانت اقل من صفر يبقى الroot في الفترة$[x, b]$ وبالتالي هنتبقى الx هي الa وهكذا ...

اما لو ضربت ال$f(x)$ في ال$f(a)$ اوال$f(b)$ وكان الناتج بصفر يبقى ده معناه ان ال$f(x)$ بتساوي صفر وبالتالي ده معناه ان الx هي الroot. دي كل الفكرة

5) Calculate the approximate error,

$$\boldsymbol{approximate\ error}\ (\epsilon) = |x^{current} - x^{previous}|$$

Or the percentage the approximate percent relative error

$$\boldsymbol{approximate\ percent\ relative\ error} = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| \times 100$$

هحسب نسبة الخطأ في كل مرة

6) Compare approximate error from each iteration with the previous one until you reach the required allowed error or accuracy then stop the computation. Otherwise go to Step 3 and repeat the process by using the new interval.

هقارن نسبة الخطا كل مرة بنسبة الخطا في المرة السابقة لحد ما أوصل لاقل نسبة خطا او لحد ما أوصل لنسبة الخطأ المسموح بيها ولو موصلتش ارجع اعيد من اول خطوة رقم ٣.

Lecture THREE

2) Root of equation

Second: Numerical Methods used to find the roots of the equations.

1) Bisection method

Example 1:

Obtain the root of the following equation correct to three decimal places using bisection method. Give the steps in detail.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 7 = 0$$

Noting that, the root is in the interval $[-2, -3]$

SOLUTION

Step (1): determine the interval in which the root (x) is found:

$$a = -2 \quad \text{and} \quad b = -3$$

المفروض اننا بنخمن الفترة وبنجرب وبنجيب ال$f(a)$ وال$f(b)$ وبنضربهم في بعض ولو كان الناتج اقل من صفر يبقى هي دي الفترة اللى فيها الroot ... لكن الدكتور سهل علينا الحل واادالنا الفترة ... مشاكتر

Step (2): check if (x) is found in this interval:

$$f(a) = f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) + 7 = 1$$

$$f(b) = f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 7 = -14$$

$$f(a) \times f(b) < 0$$

$$1 \times -14 < 0$$

طبعا طالما طلع واحدة بسالب وواحدة بموجب فاكيد حاصل الضرب هيكون سالب يعنى اقل من الصفر.

Step (3): Start iterations:

Iteration (1):

1) Determine (a) and (b):

$$a = -2 \quad \text{and} \quad b = -3$$

2) Determine the root (x_1):

$$x_1 = \frac{(-2) + (-3)}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

3) Calculate the approximate error:

No error in the 1st iteration because there is not previous iteration

4) Define new interval [Find $f(x_1)$ and check $f(a) \times f(x_1)$]:

$$f(x_1) = f(-2.5) = (-2.5)^3 + (-2.5)^2 + (-2.5) + 7 = -4.875$$

$$f(a) \times f(x_1) = f(-2) \times f(-2.5) = 1 \times -2.5 = -2.5$$

$$\textbf{So}, \boldsymbol{b = -2.5}$$

$$\boldsymbol{New\ interal : [-2, -2.5]}$$

Iteration (2):

1) Determine (a) and (b):

$a = -2$ and $b = -2.5$

2) Determine the root (x_2):

$$x_2 = \frac{(-2) + (-2.5)}{2} = -\frac{4.5}{2} = -2.25$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_2 - x_1| = |-2.5 - (-2.25)| = 0.25$$

4) Define new interval [Find $f(x_2)$ and check $f(a) \times f(x_2)$]:

$$f(x_2) = f(-2.25) = (-2.25)^3 + (-2.25)^2 + (-2.25) + 7 = -1.518125$$

$$f(a) \times f(x_2) = f(-2) \times f(-2.25) = 1 \times -1.518125 = -1.518125$$

$$\textbf{So}, \boldsymbol{b = -2.25}$$

$$\boldsymbol{New\ interal : [-2, -2.25]}$$

Iteration (3):

1) Determine (a) and (b):

$a = -2$ and $b = -2.25$

2) Determine the root (x_3):

$$x_3 = \frac{(-2) + (-2.25)}{2} = -\frac{4.25}{2} = -2.125$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_2 = |x_3 - x_2| = |-2.125 - (-2.25)| = 0.125$$

4) Define new interval [Find $f(x_3)$ and check $f(a) \times f(x_3)$]:

$$f(x_3) = f(-2.125) = (-2.125)^3 + (-2.125)^2 + (-2.125) + 7 = -0.205078$$

$$f(a) \times f(x_3) = f(-2) \times f(-2.25) = 1 \times -1.518125 = -0.205078$$

$$\textbf{So}, \boldsymbol{b = -2.125}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\mathbf{-2, -2.125}]$$

Iteration (4):

1) Determine (a) and (b):

$a = -2$ and $b = -2.125$

2) Determine the root (x_4):

$$x_4 = \frac{(-2) + (-2.125)}{2} = -\frac{4.125}{2} = -2.0625$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_4 - x_3| = |-2.0625 - (-2.125)| = 0.0625$$

4) Define new interval [Find $f(x_4)$ and check $f(a) \times f(x_4)$]:

$$f(x_4) = f(-2.0625) = (-2.0625)^3 + (-2.0625)^2 + (-2.0625) + 7 = 0.417724609$$

$$f(a) \times f(x_4) = f(-2) \times f(-2.25) = 1 \times 0.417724609 = 0.417724609$$

$$\textbf{So}, \boldsymbol{a = -2.0625}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\mathbf{-2.0625, -2.125}]$$

Iteration (5):

1) Determine (a) and (b):

$a = -2.0625$ and $b = -2.125$

2) Determine the root (x_5):

$$x_5 = \frac{(-2.0625) + (-2.125)}{2} = -\frac{4.1875}{2} = -2.09375$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_4 = |x_5 - x_4| = |-2.09375 - (-2.0625)| = 0.03125$$

4) Define new interval [Find $\boldsymbol{f(x_5)}$ and check $\boldsymbol{f(a) \times f(x_5)}$]:

$$f(x_5) = f(-2.09375) = (-2.09375)^3 + (-2.09375)^2 + (-2.09375) + 7$$
$$= 0.111481$$

$$f(a) \times f(x_5) = f(-2.0625) \times f(-2.09375) = 0.417724609 \times 0.111481$$
$$= 0.04656835714$$

$$\text{So}, \boldsymbol{a = -2.09375}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\boldsymbol{-2.09375, -2.125}]$$

Iteration (6):

1) Determine ($\boldsymbol{a}$) and ($\boldsymbol{b}$):

$$a = -2.09375 \quad \text{and} \quad b = -2.125$$

2) Determine the root ($\boldsymbol{x_6}$):

$$x_6 = \frac{(-2.09375) + (-2.125)}{2} = -\frac{4.21875}{2} = -2.109375$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_5 = |x_6 - x_5| = |-2.109375 - (-2.09375)| = 0.015625$$

4) Define new interval [Find $\boldsymbol{f(x_6)}$ and check $\boldsymbol{f(a) \times f(x_6)}$]:

$$f(x_6) = f(-2.109375) = (-2.109375)^3 + (-2.109375)^2 + (-2.109375) + 7$$
$$= -0.045498$$

$$f(a) \times f(x_6) = f(-2.09375) \times f(-2.109375) = 0.111481 \times -0.045498$$
$$= -0.005072$$

$$\text{So}, \boldsymbol{b = -2.109375}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\boldsymbol{-2.09375, -2.109375}]$$

Iteration (7):

1) Determine ($\boldsymbol{a}$) and ($\boldsymbol{b}$):

$$a = -2.09375 \quad \text{and} \quad b = -2.109375$$

2) Determine the root ($\boldsymbol{x_7}$):

$$x_7 = \frac{(-2.09375) + (-2.109375)}{2} = -\frac{4.203125}{2} = -2.1015625$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_6 = |x_7 - x_6| = |-2.1015625 - (-2.109375)| = 0.0078125$$

4) Define new interval [Find $f(x_7)$ and check $f(a) \times f(x_7)$]:

$$f(x_7) = f(-2.1015625) = (-2.1015625)^3 + (-2.1015625)^2 + (-2.1015625) + 7$$
$$= 0.033315$$

$$f(a) \times f(x_7) = f(-2.09375) \times f(-2.1015625) = 0.111481 \times 0.033315$$
$$= 0.004714$$

$$\text{So}, \boldsymbol{a = -2.1015625}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\mathbf{-2.1015625, -2.109375}]$$

Iteration (8):

1) Determine (a) and (b):

$$a = -2.1015625 \text{ and } \quad b = -2.109375$$

2) Determine the root (x_8):

$$x_8 = \frac{(-2.1015625) + (-2.109375)}{2} = -\frac{4.2109375}{2} = -2.10546875$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_7 = |x_8 - x_7| = |-2.10546875 - (-2.1015625)| = 0.00390625$$

4) Define new interval [Find $f(x_8)$ and check $f(a) \times f(x_8)$]:

$$f(x_8) = f(-2.10546875)$$
$$= (-2.10546875)^3 + (-2.10546875)^2 + (-2.10546875) + 7$$
$$= -0.0060102$$

$$f(a) \times f(x_8) = f(-2.1015625) \times f(-2.10546875) = 0.033315 \times -0.0060102$$
$$= -0.0002002$$

$$\text{So}, \boldsymbol{b = -2.10546875}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\mathbf{-2.1015625, -2.10546875}]$$

Iteration (9):

1) Determine (a) and (b):

$$a = -2.1015625 \text{ and } \quad b = -2.10546875$$

2) Determine the root (x_9):

$$x_9 = \frac{(-2.1015625) + (-2.10546875)}{2} = -\frac{4.20703125}{2} = -2.103515625$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_8 = |x_9 - x_8| = |-2.103515625 - (-2.10546875)| = 0.001953125$$

4) Define new interval [Find $f(x_9)$ and check $f(a) \times f(x_9)$]:

$$f(x_9) = f(-2.103515625)$$
$$= (-2.103515625)^3 + (-2.103515625)^2 + (-2.103515625) + 7$$
$$= 0.013672$$

$$f(a) \times f(x_9) = f(-2.1015625) \times f(-2.103515625) = 0.033315 \times 0.013672$$
$$= 0.00045548$$

$$\text{So}, \boldsymbol{a = -2.103515625}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\boldsymbol{-2.103515625, -2.10546875}]$$

Iteration (10):

1) Determine $(\boldsymbol{a})$ and $(\boldsymbol{b})$:

$$a = -2.103515625 \quad \text{and} \quad b = -2.10546875$$

2) Determine the root $(\boldsymbol{x_{10}})$:

$$x_{10} = \frac{(-2.103515625) + (-2.10546875)}{2} = -\frac{4.208984375}{2} = -2.104492188$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_9 = |x_{10} - x_9| = |-2.104492188 - (-2.103515625)| = 0.000977163$$

4) Define new interval [Find $f(x_{10})$ and check $f(a) \times f(x_{10})$]:

$$f(x_{10}) = f(-2.104492188)$$
$$= (-2.104492188)^3 + (-2.104492188)^2 + (-2.104492188) + 7$$
$$= 0.0038363$$

$$f(a) \times f(x_{10}) = f(-2.103515625) \times f(-2.104492188) = 0.013672 \times 0.0038363$$
$$= 0.00005245$$

$$\text{So}, \boldsymbol{a = -2.104492188}$$

$$\boldsymbol{New\ interal} : [\boldsymbol{-2.104492188, -2.10546875}]$$

Iteration (11):

1) Determine $(\boldsymbol{a})$ and $(\boldsymbol{b})$:

$$a = -2.104492188 \quad \text{and} \quad b = -2.10546875$$

2) Determine the root (x_{10}):

$$x_{10} = \frac{(-2.104492188) + (-2.10546875)}{2} = -\frac{4.209961538}{2} = -2.104980769$$

3) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_{10} = |x_{11} - x_{10}| = |-2.104980769 - (-2.104492188)| = 0.000488581$$

4) Define new interval [Find $f(x_{10})$ and check $f(a) \times f(x_{10})$]:

We don't need to define new interval because we reach to the desired precision (i.e. correct to three decimal places)

في iteration 10 احنا وصلنا برضو لـ0.000 ولكن في المرجع موصلش ليها غير في الـiteration 11 لانه مكانش بيستخدم قيمة الـx كلها ولكن كان بيقربها لكن انا استخدمت قيمة الـx نفسها من الالة بدون تقريب.

Value of x in 10^{th} iteration = - 2.104492
Value of x in 11^{th} iteration = - 2.104980

Here we observe that values repeat upto 3 digits after decimal point. Since x is the center of interval $[a, b]$ and represents root, we can say that

- ✓ Root of $f(x)$ correct upto '3' digits after decimal point = - 2.104980
- ✓ Root = - 2.104980 correct to 3 decimal places is the answer.

---

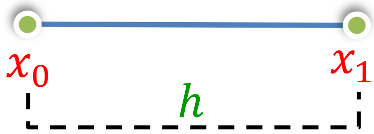
2) Newton-Raphson Method

a) Proof using Taylor series:

Let (x_0) be an approximate root of $f(x) = 0$. Let actual value of root (x_1) is given as,

$$x_1 = x_0 + h ======> (1)$$

ايه معنى اول سطر ده ... لما اتكلمنا عن الـTaylor series ... قولنا اننا بناخد نقطة قريبة من النقطة الـexact وسميناها c ... قولنا ان دي نقطة حول النقطة الـexact يبقى فلو النقطة الـexact اللى هي هنا الـroot هسميها x_1 ولو النقطة اللى قريب من النقطة الحقيقية اسمها x_0 ... واكيد بين الـ٢ فيه فرق ... فلو رسمتها هرسمها كدة:



فالبتالي اقدر أقول ان الـx_1 اللى هي القيمة الـexact عبارة عن القيمة الـapproximate مجموع عليها الفرق بين الـ٢ ... ده معنى السطر ده.

And

$$f(x_1) = 0$$

And hence

$$f(x_0 + h) = 0$$

$f(x_0 \ + \ h)$ can be expanded using Taylor's series as:

$$f(x_1) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\, f''(x_0) + \cdots = 0 \;======> (2)$$

Since value of (h) is very very Small, we can neglect all the terms above 2nd term in previous equation. Thus, second and higher order derivatives are neglected in previous equation. Therefore, the previous equation becomes:

لو مستغرب الh جوة taylor series افتكر ان كان بدالها x-c اللى هي الفرق بين النقطة الexact والنقطة الافتراضية او اللى حواليها ... اللى هنا مفروض نكتبها $x_1 - x_0$ بس احنا الفرق ده سمناه الh يعنى فعليا ال$h = x_1 - x_0$ ... بس كدة

طيب بالنسبة للh قيمتها هتقل وهتبقى قريبة من الصفر كل ما الاس زاد يعنى مثلا لو قولنا ان الh = 0.00001 هتربعها هتبقى 0.000000001 اللى هي تقريبا صفر فالبتالي ممكن نعملها بدءأ من الsecond order اللى يقصد بيها ال$\frac{h^2}{2!}\ f''(x_0)$ فالبتالي المعادلة هتبقى كالتالي:

$$f(x_1) = f(x_0) + h\, f'(x_0) = 0$$

$$f(x_0) + h\, f'(x_0) = 0$$

$$h\, f'(x_0) = -f(x_0)$$

$$\therefore h \ = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Putting this value of (h) in equation (1), we get:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Thus, (x_1) is the next approximation and obtained from(x_0). If (x_2) is the actual root and (x_1) is approximate root, then:

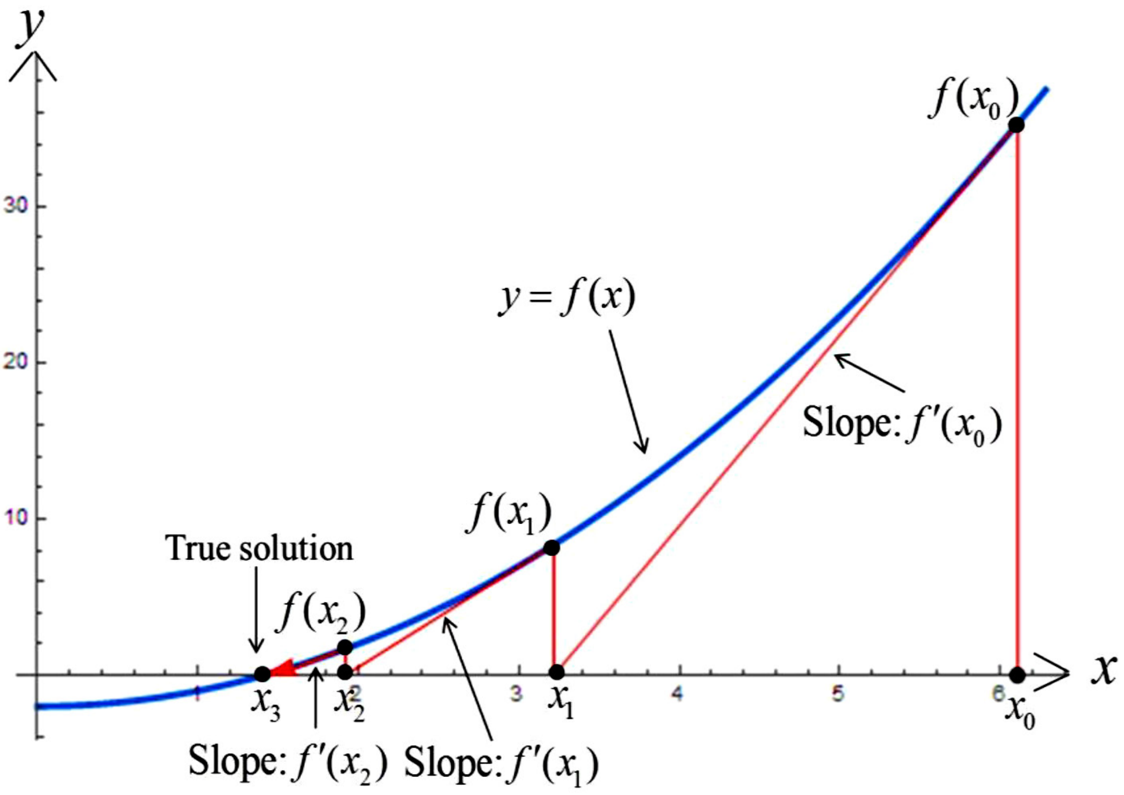
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Thus a generalized recursive relation can be written as,

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

This equation is called Newton Raphson formula.

b) Proof graphically:



Numerical scheme starts by choosing the initial point, (x_0) as the first estimation of the solution. The improvement of the estimation of (x_1) is obtained by taking the tangent line to $f(x)$ at the point $[x_0, f(x_0)]$ and extrapolate the tangent line to find the point of intersection with an x–axis.

هنختار نقطة كبداية وهنسميها x_0 ... وهنعمل مماس عند النقطة دي يتقاطع مع محور x عند النقطة x_1 وهجيب الميل بتاع المماس او الtangent ...

$$Slope = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

فكرة ان المماس يتقاطع مع x_1 ان يكون ال0 = $f(x_1)$ يعنى تبقى هي الroot وده اللى عايزينه ونفضل نعمل كدة لحد ما نوصل للx اللى عندها ال0 = y فعليا

$$f(x_1) = 0$$

The slope is the first derivative for $f'(x_0)$, so:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1}$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0) - 0}{f'(x_0)}$$

$$-x_1 = -x_0 + \frac{f(x_0) - 0}{f'(x_0)}$$

Multiply by (-1)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) - 0}{f'(x_0)}$$

Thus, Newton Raphson method approximates the curve as a tangent and next approximation is the point where tangent intersects x-axis.

Then, the error is calculated and if is too high, then, we say that (x_1) is not the root and we should find (x_2) by getting the slope of the tangent line at x_1 and that tanget is intersect with x_2 and so on.

كل الفكرة مبنية على انه بيعمل مماس او tangent عند نقطة هو بيبدا بيها وبيمد المماس لحد ما يتقاطع مع المحور x ... اشمعنى ... لان نقطة تقاطع المماس مع المحور هي النقطة اللى عندها الـ y = 0 يعنى هتبقى هي الـroot ... والميل لما بنحسبه بيبقى فيه المقام عبارة عن $x_0 - x_1$ ... والميل هو تفاضل الدالة يبقى ببساطة اقدر اعرف الـx_1 اللى هي المفروض هتكون الـroot ... بعد كدة هحسب الـerror .... ولو عالي يبقى هعمل مماس تاني عند x_1 يتقاطع مع نقطة تاني على محور الـx وهتبقى اسمها x_2 وهكذا.

Few important things to be followed using Newton Raphson method:

1) For this method, $f'(x_0)$ should not be equal to zero, otherwise the method fails. If $f'(x_0) = 0$, then change initial approximation (x_0).
2) For better convergence of the method select (x_0) such that, $f(x_0) \cdot f''(x_0)$ product will be positive.

هنا بيقول ملاحظات مهمة على طريقة نيوتن ... يقول ان الميل او المشتقة الأولى مينفعش تساوي صفر ولو بيساوي صفر يبقى نغير القيمة الابتدائية او الـx_0

وبيقول كمان عشان تتاكد ان النقطة الابتدائية اللى اخترتها هتوصلك للحل بسرعة الأفضل انك تتاكد ان

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

---

c) Modified Newton method:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}}$$

d) Algorithm:

Step (1):

Get

$f'(x)$ and $f''(x)$

Step (2): Select the interval in which the root exists:

Try:

$$f(0), f(1)$$

Then, check

$$f(0) \times f(x) < 0$$

If not

Try:

$$f(2), f(3)$$

And so on

Step (3): Select (x_0) from the selected interval and check its convergence:

Select (x_0) from the interval and check if:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Step (4): start iterations:

Compute the next estimate, x_{n+1} by using Newton Raphson formula:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Step (5): calculate the approximate error:

Calculate the approximate error after each iteration

$$\boldsymbol{approximate\ error\ (\epsilon) = |x_{n+1} - x_n|}$$

Or the percentage the approximate percent relative error

$$\boldsymbol{approximate\ percent\ relative\ error} = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| \times 100$$

Step (6): Compare errors:

If we reached the allowed error percentage, then stop iterations, else, repeat from step 4

Example 2:

Find the smallest positive root of

$$x^3 - 5x + 3 = 0$$

using Newton Raphson method and correct to 3 decimal points.

SOLUTION

Step (1): find the first and second derivative:

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

$$f''(x) = 6x$$

Step (2): Select the interval in which the root exists:

$$f(0) = 3$$

$$f(1) = -1$$

$$\therefore f(0) \times f(1) < 0$$

Therefore, root lies between 0 and 1.

Step (3): Select (x_0) from the selected interval and check its convergence:

Let $x_0 = 0$

$$f(0) = 3 \quad and\ f''(0) = 0$$

$$\therefore f(x_0) \cdot f''(x_0) = 3 \times 0 = 0$$

$$f(x_0) \cdot f''(x_0)\ should\ be\ more\ than\ 0$$

Let $x_0 = 1$

$$f(1) = -1 \quad and\ f''(1) = 6$$

$$\therefore f(x_0) \cdot f''(x_0) = -1 \times 6 = -6$$

$$f(x_0) \cdot f''(x_0)\ should\ be\ more\ than\ 0$$

So, lets choose a value between 0 and 1:

Let $x_0 = 0.3$

$$f(0.3) = 1.527 \quad and\ f''(0.3) = 1.8$$

$$\therefore f(x_0) \cdot f''(x_0) = 1.527 \times 1.8 = 2.7486$$

$$\therefore f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Thus, this is a good convergent initial point

Step (4): start iterations:

Iteration (1): get (x_1)

1) Get (x_1):

$$f(0.3) = 1.527$$

$$f'(0.3) = 3(0.3)^2 - 5 = -4.73$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.3 - \frac{1.527}{-4.73} = 0.622833$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_1 - x_0| = |0.622833 - 0.3| = 0.322833$$

Iteration (2): get (x_2)

1) Get (x_2):

$$f(x_1) = f(0.622833) = 0.127445$$

$$f'(x_1) = f'(0.622833) = 3(0.622833)^2 - 5 = -3.836237$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.622833 - \frac{0.127445}{-3.836237} = 0.656054$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_2 = |x_2 - x_1| = |0.656054 - 0.622833| = 0.033221$$

Iteration (3): get (x_3)

1) Get (x_3):

$$f(x_2) = f(0.656054) = 0.127445$$

$$f'(x_2) = f'(0.656054) = 3(0.656054)^2 - 5 = -3.708778$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.656054 - \frac{0.002100}{-3.708778} = 0.656620$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_3 - x_2| = |0.656620 - 0.656054| = 0.000566$$

So, (x_3) is the approximate root where:

$$f(x_3) = f(0.656620) = 0.000001597 \approx 0$$

Example 3:

Find the smallest positive root of

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

using Newton Raphson method and correct to 3 decimal points.

SOLUTION

Step (1): find the first and second derivative:

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f''(x) = 2$$

Step (2): Select the interval in which the root exists:

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = -2$$

$$\therefore f(0) \times f(1) < 0$$

Therefore, root lies between 0 and 1.

Step (3): Select (x_0) from the selected interval and check its convergence:

Let $x_0 = 0$

$$f(0) = 2 \quad and\ f''(0) = 2$$

$$\therefore f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Thus, this is a good convergent initial point

Step (4): start iterations:

Iteration (1): get (x_1)

1) Get (x_1):

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = 2(0) - 5 = -5$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{2}{-5} = 0.4$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_1 - x_0| = |0.4 - 0| = 0.4$$

Iteration (2): get (x_2)

1) Get (x_2):

$$f(x_1) = f(0.4) = 0.16$$

$$f'(x_1) = f'(0.4) = 2(0.4) - 5 = -4.2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.4 - \frac{0.16}{-4.2} = 0.438095$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_2 = |x_2 - x_1| = |0.438095 - 0.4| = 0.038095$$

Iteration (3): get (x_3)

1) Get (x_3):

$$f(x_2) = f(0.438095) = 0.001452$$

$$f'(x_2) = f'(0.438095) = 2(0.438095) - 5 = -4.12381$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.438095 - \frac{0.001452}{-4.12381} = 0.438447$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_3 - x_2| = |0.438447 - 0.438095| = 0.000352$$

So, (x_3) is the approximate root where:

$$f(x_3) = f(0.438447) = 0.000000771809 \approx 0$$

في المحاضرة الدكتور قالنا اذاي نحدد الفترة في المثال ده وكمان قالنا هنبدا ب٠,٥ ولكن الفكرة فانك اذاي تعرف ان ال٠,٥ هتنفع فعلا ... ده الموجود في المرجع فاننا نشوف

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

وفي المرجع بعد ما حدد الفترة اختر اقل نقطة واكبر نقطة ... ولو لقي مثلا اقل نقطة تنفع هيكمل بيها وده اللى انا عملته في المثال ده عشان كدة هنلاقي ان الx_3 في المحاضرة 0.436 مش0.438

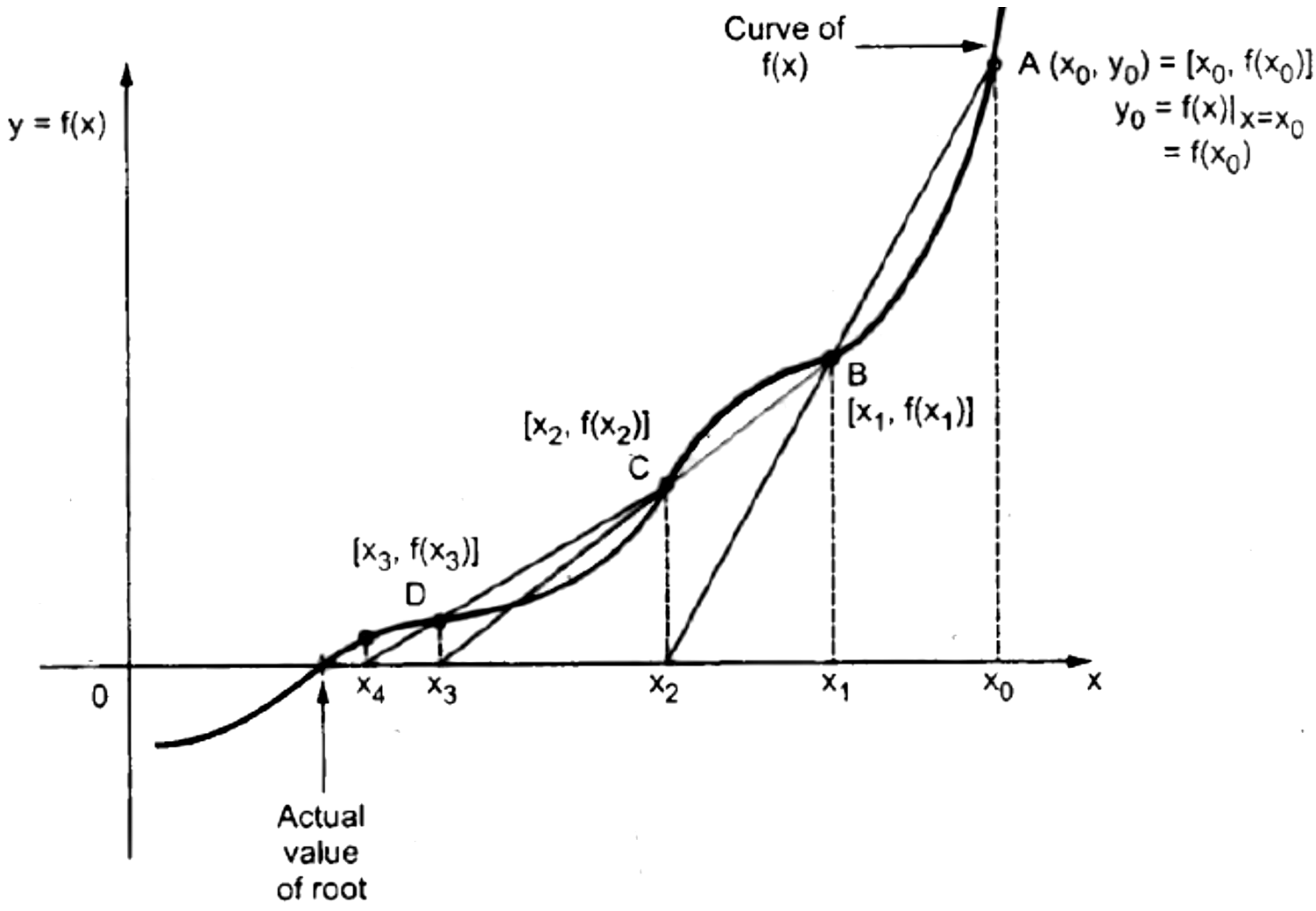
Lecture FOUR

2) Root of equation

Second: Numerical Methods used to find the roots of the equations.

3) Secant Method

a) Proof:



Let's consider the curve of $f(x)$ as shown in previous figure. We know that $f(x)$ contains a polynomial equation or transcendental equation.

When we approximate $f(x)$ by a first-degree equation (i.e. maximum power of x is one in first degree equation), then it can be written as,

$$f(x) = a_0x + a_1 =====> (1)$$

Here RHS is first degree equation. LHS is the polynomial or transcendental equation. Thus, RHS is approximation of $f(x)$.

When $f(x) = 0$, then, $a_0x + a_1 = 0$

Then the root of this first–degree equation is given as:

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

The first–degree equation:

$f(x) = a_0x + a_1$ takes the form of straight–line equation

$y = mx + c$

This means, $y = f(x)$, $m = a_0 = slope$, and $c = intercept$

Consider that curve (AB) of $f(x)$ in the previous figure is approximated to a chord (AB) (first degree approximation). Then we can write first degree equation at point (A) for this chord using equation (1) as:

$$f(x_0) = a_0x_0 + a_1 =====> (2)$$

At point (B), we can write similar equation using equation (1) as,

$$f(x_1) = a_0x_1 + a_1 =====> (3)$$

Note that since both equations represent same chord (line AB), a_0 & a_1 remain

هنا الفكرة شبه فكرة نيوتن بس بدل من tangent line هتبقى secant line وبدل ما هنستخدم التفاضل في طريقة نيوتن مشهنستخدمه هنا وهنجيب الميل بالf(x) وقيم الx وبالتالي لو دالة ملهاش تفاضل او مينفعش تتفاضل يبقى متنفعش بطريقة نيوتن وتنفع بالSecant

هو هنا بيعمل ايه ... انا عندي الf(x) هي دالة كثيرة الحدود وقد تكون فيها sin x او e^x أيا كان يعنى ... لما تترسم مشهاخد مماس عند نقطة واخليه يتقاطع لكن هاخد secant line يقطع الرسم في نقطتين ... وليكن ذي AB الرسم ... ده معناه اني عملت تقريب للدالة الصعبة اللى ممكن يكون فيها sin x مثلا ... وعوضت عنها بدالة من الدرجة الأولى اللى فيها اكبر اس للx بيساوي ١ ... يعني دالة خطية وده طبيعي لان الsecant line عبارة عن خط

طبعا المعادلة الخطية من الدرجة الأولى بتبقى عبارة عن

$$f(x) = a_0x + a_1$$

ولو احنا بندور عالroot يبقى لازم الf(x) اللى مهما كانت عبارة عن ايه هتساوي صفر وبالتالي المعادلة من الدرجة لازم تساوي صفر

$$f(x) = a_0x + a_1 = 0$$

طيب المعادلة دي شبه المعادلة العامة بتاعة الخط المستقيم اللى هي

$$y = mx + c$$

بالتالي الy=f(x) والm اللى هي الميل وبتساوي a_0 والc اللى هي الintercept او الجزء المقطوع من المحور y واللى هي عبارة عن الa_1

طيب في الرسم عند النقطة A لو حبيت اجيب الf(x) يبقى فعليا انا بجيب ال$f(x_0)$ وعند النقطة B بجيب ال$f(x_1)$ وبالتالي المعادلة رقم ١ عند x_0 وعند x_1 هتبقى كدة

$$f(x_0) = a_0 x_0 + a_1$$

$$f(x_1) = a_0 x_1 + a_1$$

طيب ليه احنا مغيرناش الa_0 والa_1 يعنى ليه الميل ثابت والintercept ثابته برضو .. لان الA والB على نفس الخط المستقيم فطبيعي لازم يبقو ثابتين.

Subtracting equation (3) from equation (2) gives:

$$f(x_1) - f(x_0) = a_0 x_1 \cancel{+ a_1} - a_0 x_0 \cancel{- a_1} = a_0(x_1 - x_0)$$

$$\therefore m = a_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} =====> (4)$$

Consider equation (3)

$$a_1 = f(x_1) - a_0 x_1 =====> (5)$$

هنا فعليا هو جاب الميل اللى هو المشتقة الأولى والintercept بدلالة الدوال او قيم الy وقيم الx.

Putting value of (a_0) from equation (4) in equation (5),

$$a_1 = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} x_1$$

نوحد مقامات ونضرب الx_1 في البسط

$$a_1 = f(x_1) - \frac{x_1\, f(x_1) - x_1\, f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$a_1 = \frac{[f(x_1)(x_1 - x_0)] - [x_1\, f(x_1) - x_1\, f(x_0)]}{(x_1 - x_0)}$$

$$a_1 = \frac{\cancel{x_1 f(x_1)} - x_0 f(x_1) - \cancel{x_1\, f(x_1)} + x_1\, f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$a_1 = \frac{x_1\, f(x_0) - x_0 f(x_1)}{(x_1 - x_0)} =====> (6)$$

بعد كدة في المعادلة بتاعة الintercept عوض عن الميل بالمعادلة اللى جابها للميل يعنى المعادلة رقم ٥

Chord AB also passes through (x_2), Therefore we can write:

$$f(x_2) = a_0 x_2 + a_1 =====> (7)$$

Observe that this equation is similar to equation (2) and equation (3). In this equation we have to substitute values of slope (a_0) and intercept (a_1) obtained earlier. Putting values of a_0 & a_1 in equation (7).

$$f(x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} x_2 + \frac{x_1\, f(x_0) - x_0 f(x_1)}{(x_1 - x_0)}$$

Line (AB) crosses x axis at x_2, hence $f(x_2) = 0$ at x_2. Therefore, above equation becomes:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} x_2 + \frac{x_1\, f(x_0) - x_0 f(x_1)}{(x_1 - x_0)} = 0$$

$$x_2 = -\frac{\frac{x_1\, f(x_0) - x_0 f(x_1)}{(x_1 - x_0)}}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}$$

$$x_2 = -\frac{x_1\, f(x_0) - x_0 f(x_1)}{\cancel{(x_1 - x_0)}} \times \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = -\frac{x_1\, f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1\, f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

نفس الكلام بتاع نيوتن لما خلى الtangent يتقاطع مع محور x عند نقطة واللى عندها الy=0 يعنى النقطة اللى هي المفروض تبقى الroot ... ونفس الكلام هنا هنخلي الSecant يتقاطع مع محور x عند النقطة اللى هنعتبرها أصلا الroot ...

وفي الرسم الخط الAB بيتقاطع مع محور x عند الx$_2$ اللى هي المفروض تبقى الroot ... او هنختبرها هل هي الroot ولا لا ... واكيد هنعوض عنها بمعادلة الدرجة الأولى يعنى الf(x$_2$) وهتساوي الصفر برضو يعنى هتبقى كدة:

$$f(x_2) = a_0 x_2 + a_1 = 0$$

طيب عرفنا نجيب الa$_0$ والa$_1$ في المعادلة ٤ و٥ وسهل نعوض عنهم وهنخلي الx$_2$ في طرف لوحدها عشان نجيب الx$_2$ اللى الدالة عندها بصفر. ذي المعادلات اللى فوق.

Let's rearrange numerator of this equation:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1\, f(x_0) - x_1 f(x_1) + x_1 f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

هنا احنا ضفنا وطرحنا $x_1 f(x_1)$ ... ليه ... فالاثبات لما وحدنا المقامات الحد ده اتشطب فاحنا رجعناه تاني عشان نرجع نفك توحيد المقام تاني

$$x_2 = \frac{x_1 f(x_1) - x_1\, f(x_0) + x_0 f(x_1) - x_1 f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = \frac{x_1[f(x_1) - \ f(x_0)] - [-x_0 f(x_1) + x_1 f(x_1)]}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = \frac{x_1[f(x_1) - \ f(x_0)] - f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = \frac{x_1\cancel{[f(x_1) - \ f(x_0)]}}{\cancel{f(x_1) - f(x_0)}} - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

This equation gives the root of first-degree equation defined by equation (7). Thus, if we approximate curve AB of $f(x)$ by a straight line, then point x_2 gives the root of $f(x)$. That is using x_0 and x_1, we have obtained next approximation to the root at x_2.

On the same lines, using $x_2\ and\ x_1$, we can obtain next approximation to the root at x_3 This can be done by approximating curve BC by straight BC. The equation for this approximation also remains of the same form i.e.,

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

∴ We can write recursive equation for secant method as follows:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)}$$

هنا من الاخر بيقول اننا عشان نوصل للx₂ اللى هي المفروض الroot هنستخدم نقطتين x_1 وx_0 ... ولو طبعا الx₂ منفعتش لازم نشوف النقطة اللى بعدها اللى هي x_3 يعني عند عند الخطBC بالتالي هنغير المعادلة ... بالشكل اللى كاتبينه وبالتالي ممكن نعمل معادلة ذي المكتوبة بخط عريض.

---

b) Algorithm:

Step (1): Select the interval in which the root exists:

Try:

$$f(0), f(1)$$

Then, check

$$f(0) \times f(x) < 0$$

If not

Try:

$$f(2), f(3)$$

And so on

Step (2): start iterations:

Compute the next estimate, x_{n+1} by secant method formula:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)}$$

Step (3): calculate the approximate error:

Calculate the approximate error after each iteration

$$\boldsymbol{approximate\ error\ (\epsilon) = |x_{n+1} - x_n|}$$

Or the percentage the approximate percent relative error

$$\boldsymbol{approximate\ percent\ relative\ error} = \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}}\right| \times 100$$

Step (4): Compare errors:

If we reached the allowed error percentage, then stop iterations, else, repeat from step 2

Example 1:

Use the secant method to find approximate root of the following equation

$$\boldsymbol{x^3 - 2x - 1 = 0}$$

and correct to 3 decimal points.

SOLUTION

Step (1): Select the interval in which the root exists:

$$f(0) = -1$$

$$f(1) = -2$$

$$\therefore f(0) \times f(1) > 0$$

Therefore, root doesn't lie in the interval [0,1].

$$f(2) = 3$$

$$\therefore f(1) \times f(2) < 0$$

Therefore, root lies in the interval [1,2].

Step (2): start iterations:

Iteration (1): get (x_2)

1) Get (x_2):

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$$

$$f(x_0) = f(1) = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = 3$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$x_2 = 2 - \frac{(2-1)}{3-(-1)} 3 = 1.25$$

2) Calculate the approximate error:

No error in the 1st iteration because there is not previous iteration

---

Iteration (2): get (x_3)

1) Get (x_3):

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1.25$$

$$f(x_1) = f(2) = 3$$

$$f(x_2) = f(1.25) = -1.546875$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

$$x_3 = 1.25 - \frac{(1.25-2)}{-1.546875-(3)} \times (-1.546875) = 1.505155$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_3 - x_2| = |1.505155 - 1.25| = 0.255155$$

Iteration (3): get (x_4)

1) Get (x_4):

$$x_2 = 1.25 \qquad x_3 = 1.505155$$

$$f(x_2) = f(1.25) = -1.546875$$

$$f(x_3) = f(1.505155) = -0.600394$$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} f(x_3)$$

$$x_4 = 1.505155 - \frac{(1.505155 - 1.25)}{-0.600394 - (-1.546875)} \times (-0.600394) = 1.667011$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_2 = |x_4 - x_3| = |1.667011 - 1.505155| = 0.161856$$

Iteration (4): get (x_5)

1) Get (x_5):

$$x_3 = 1.505155 \qquad x_4 = 1.667011$$

$$f(x_3) = f(1.505155) = -0.600394$$

$$f(x_4) = f(1.667011) = 0.298478$$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} f(x_4)$$

$$x_5 = 1.667011 - \frac{(1.667011 - 1.505155)}{0.298478 - (-0.600394)} \times (0.298478) = 1.613265$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_5 - x_4| = |1.613265 - 1.667011| = 0.053746$$

Iteration (5): get (x_6)

1) Get (x_6):

$$x_4 = 1.667011 \qquad x_5 = 1.613265$$

$$f(x_4) = f(1.667011) = 0.298478$$

$$f(x_5) = f(1.613265) = -0.027808$$

$$x_6 = x_5 - \frac{(x_5 - x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} f(x_5)$$

$$x_6 = 1.613265 - \frac{(1.613265 - 1.667011)}{-0.027808 - (0.298478)} \times (-0.027808) = 1.6178455$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_4 = |x_6 - x_5| = |1.6178455 - 1.613265| = 0.0045805$$

Iteration (6): get (x_7)

1) Get (x_7):

$$x_5 = 1.613265 \qquad x_6 = 1.6178455$$

$$f(x_5) = f(1.613265) = -0.027808$$

$$f(x_6) = f(1.613265) = -0.00110326$$

$$x_7 = x_6 - \frac{(x_6 - x_5)}{f(x_6) - f(x_5)} f(x_6)$$

$$x_6 = 1.6178455 - \frac{(1.6178455 - 1.613265)}{-0.00110326 - (0.027808)} \times (-0.00110326) = 1.618035$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_5 = |x_7 - x_6| = |1.618035 - 1.6178455| = 0.0001895$$

So, (x_7) is the approximate root where:

$$f(x_7) = f(0.438447) = 0.00000591997 \approx 0$$

في المحاضرة الدكتور بدا بالفترة من ١,٥ ل٢ عشان يختصر الiterations لكن هنا بتعامل على اني معرفش المفروض ابدا من كام وبنتعامل عادي ... والنقطتين اللى بنستخدمهم هو اقل رقم في الفترة اللى فاختارناها واكبر رقم.

Example 2:

Let

$$f(x) = x - e^{-x}$$

Use the secant method to find zero of $f(x)$ using $x_0 = 1$ and $x_1 = 2$ and correct to 5 decimal digits.

SOLUTION

Step (2): start iterations:

Iteration (1): get (x_2)

1) Get (x_2):

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$$

$$f(x_0) = f(1) = 0.632121$$

$$f(x_1) = f(2) = 1.864665$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

$$x_2 = 2 - \frac{(2-1)}{1.864665 - (0.632121)} \times 1.864665 = 0.487141$$

2) Calculate the approximate error:

No error in the 1st iteration because there is not previous iteration

---

Iteration (2): get (x_3)

1) Get (x_3):

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 0.487141$$

$$f(x_1) = f(2) = 1.864665$$

$$f(x_2) = f(0.487141) = -0.127239$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

$$x_3 = 0.487141 - \frac{(0.487141 - 2)}{-0.127239 - (1.864665)} \times (-0.127239) = 0.583779$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_3 - x_2| = |0.583779 - 0.487141| = 0.096638$$

Iteration (3): get (x_4)

1) Get (x_4):

$$x_2 = 0.487141 \qquad x_3 = 0.583779$$

$$f(x_2) = f(0.487141) = -0.127239$$

$$f(x_3) = f(0.583779) = 0.025992$$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} f(x_3)$$

$$x_4 = 0.583779 - \frac{(0.583779 - 0.487141)}{0.025992 - (-0.127239)} \times (0.025992) = 0.567387$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_2 = |x_4 - x_3| = |0.567387 - 0.583779| = 0.016392$$

Iteration (4): get (x_5)

1) Get (x_5):

$$x_3 = 0.583779 \qquad x_4 = 0.567387$$

$$f(x_3) = f(0.583779) = 0.025992$$

$$f(x_4) = f(0.567387) = 0.000382$$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} f(x_4)$$

$$x_5 = 0.567387 - \frac{(0.567387 - 0.583779)}{0.000382 - (0.025992)} \times (0.000382) = 0.567142$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_5 - x_4| = |0.567142 - 0.567387| = 0.000245$$

Iteration (5): get (x_6)

1) Get (x_6):

$$x_4 = 0.567387 \qquad x_5 = 0.567142$$

$$f(x_4) = f(0.567387) = 0.000382$$

$$f(x_5) = f(0.567142) = -0.00000202$$

$$x_6 = x_5 - \frac{(x_5 - x_4)}{f(x_5) - f(x_4)} f(x_5)$$

$$x_6 = 0.567142 - \frac{(0.567142 - 0.567387)}{-0.00000202 - (0.000382)} \times (-0.00000202) = 0.567143$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_4 = |x_6 - x_5| = |0.567143 - 0.567142| = 0.000001$$

So, (x_6) is the approximate root where:

$$f(x_6) = f(0.567143) = 0.0000004551 \approx 0$$

Lecture FIVE

2) Root of equation

Second: Numerical Methods used to find the roots of the equations.

4) Fixed point iteration method:

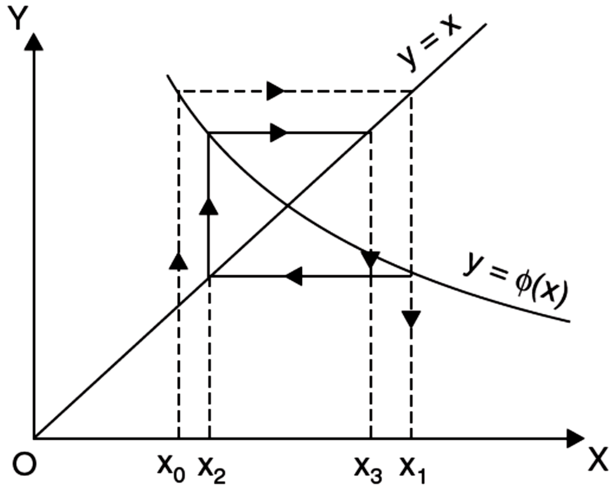
a) Method:

To find the roots of the equation $f(x) = 0$ by successive approximations, we write it in the form

$$x = g(x)$$

The roots of $f(x) = 0$ are the same as the points of intersection of the straight-line $y = x$ and the curve representing

$$y = g(x)$$



Let $x = x_0$ be an initial approximation of the desired root α, then first approximation x_1 is given by

$$x_1 = g(x_0)$$

Now, treating x_1 as the initial value, the second approximation is

$$x_2 = g(x_1)$$

Proceeding in this way, the nth approximation is given by

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

كل الفكرة بتاعة الطريقة دي ... اننا بنجيب الx فطرف وباقي المعادلة فطرف تاني فيبقى عندك دالة جديدة عبارة عن

$$x = g(x)$$

فلو رسمت الg(x) هتبقى هي كانها الy فالبتالي تقدر تقول ان

$$y = g(x)$$

او ال

$$y = x$$

والy=x ده الخط اللى بيمر بالنقطة 0,0 ... ونقطة تقاطع الخط ده مع الg(x) هي هتكون الroot بتاع المعادلة الاصلية اللى هي الf(x) ... ده كل الموضوع ... فانت خطتك هنا انك تجيب نقطة التقاطع دي ...

هنعمل ايه ... هنحدد الفترة اللى فيها الroot ذي ما عملنا في الطرق اللى فاتت وبعد كدة هنحدد الx_0 اللى هي الرقم الافتراضي اللى هنبدا بيه وبعد كدة هنعوض بيه في الg(x) ... فهتطلع قيمة للx هنخليها x_1 وهنرجع نعوض بيها تاني في الg(x) وهكذا.

الكلام ده بيوضحه الرسم اللى فوق بس هنخلي علامة الϕ هي الg ... وهنشوف بمثال عشان نفهم اكتر

b) CONDITION FOR CONVERGENCE OF ITERATIONS

Let (x_0) be is the actual root of $f(x) = 0$ and

1) I is the interval containing the root x_0
2) $|g'(x)| < 1$ for all x is I

If $[a, b]$ is the interval containing the root, then:

$$g(a) \in [a, b]$$

$$g(b) \in [a, b]$$

هنا بيقول ان لما احدد الفترة ... هعوض باقل قيمة واكبر قيمة فال الg(x) ولازم الرقم يكون جوة الفترة اللى اختارناها ولازم التفاضل بتاع الg(X) يكون اقل من ال١ ولازم ينتمى للفترة دي.

خلينا نشوف بمثال احسن

الطريقة دي ليها اسامي تاني ... ممكن تلاقيها باسم iteration method او general iteration method او الfixed point iteration.

Example 1:

Solve the equation

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 - 4 = 0}$$

Correct to 3 decimal point.

SOLUTION

Step (1): Select the interval in which the root exists:

$$f(0) = -4$$

$$f(1) = -5$$

$$\therefore f(0) \times f(1) > 0$$

Therefore, root doesn't lie in the interval [0,1].

$$f(2) = -4$$

$$\therefore f(1) \times f(2) > 0$$

Therefore, root doesn't lie in the interval [1,2].

$$f(3) = 5$$

$$\therefore f(2) \times f(3) < 0$$

Therefore, root lies in the interval [2,3].

فيه ملحوظة مهمة جدا ... الفترة من ٢ ل٣ لو بدانا الiteration من عند ال٢ هنوصل للحل بس هناخد iterations كتير ولكن فالامتحان لو عايز تختصر .... تعمل ايه ... ضيق الفترة ... اذاي ... خد نقطة جوة الفترة دي وعوض بيها في الدالة الاصلية ... ولنفرض هناخد ٢,٥ لو عوضت بيها هتلاقي ان الf(2.5)=-0.875 ... يعنى سالب وهتلاقي ان ال ...

$$\therefore f(2.5) \times f(3) < 0$$

يعنى الفترة من ٢,٥ ل٣ هتنفع ... وبالتالي انت اختصرت الحل شوية ... لكن هنا فالحل انا هبدا من ٢ للتدريب مشاكتر ... ونفس الفكرة في كل الطرق الفاتت تنفع.

Step (2): Get g(x):

هنا بقى هنحول الf(x) الى x=g(x) ... يعنى كدة

First method:

$$x^3 - 2x^2 - 4 = 0$$

$$x^3 = 2x^2 + 4$$

$$x = (2x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{g_1(x) = (2x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}}$$

$$g_1'(x) = \frac{1}{3}(2x^2+4)^{\frac{-2}{3}} \times 4x = \frac{4x}{3}(2x^2+4)^{\frac{-2}{3}}$$

Second method:

$$x^3 - 2x^2 - 4 = 0$$

$$2x^2 = x^3 - 4$$

$$x^2 = \frac{x^3-4}{2}$$

$$x = \left(\frac{x^3-4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_2(x) = \left(\frac{x^3-4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$g_2'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3-4}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times 3x^2 = \frac{3x^2}{2}\left(\frac{x^3-4}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Step (3): Check g(x) for convergence:

هل الشكلين اللى جبناهم للg(x) ... هينفعوا .... ممكن وممكن لا ... يبقى لازم نشوف هل هتنطبق عليهم الشروط اللى قولناها فوق:

Checking for $g_1(x) \in [2,3]$ and $g_1'(x) < 1$:

At $x = 2$

$$g_1(2) = (2(2)^2+4)^{\frac{1}{3}} = 2.289$$

$$g_1'(2) = \frac{4(2)}{3}(2(2)^2+4)^{\frac{-2}{3}} = 0.5$$

At $x = 3$

$$g_1(3) = (2(3)^2+4)^{\frac{1}{3}} = 2.802$$

$$g_1'(3) = \frac{4(3)}{3}(2(3)^2+4)^{\frac{-2}{3}} = 0.33964$$

$$\therefore g_1(2) and\ g_1(3) \in [2,3]$$

$$\therefore g_1'(2)\ and\ g_1'(3) < 1$$

$$\text{So, } g_1(x) \textit{ is converging}$$

Checking for $g_2(x) \in [2, 3]$ and $g_2'(x) < 1$:

At $x = 2$

$$g_2(2) = \left(\frac{2^3 - 4}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.414$$

At $x = 3$

$$g_2(3) = \left(\frac{3^3 - 4}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.39$$

$$\therefore g_1(2) \text{ and } g_2(3) \in [2,3]$$

$$\text{So, } g_2(x) \textit{ is not converging}$$

Step (4): start iterations:

Iteration (1): get (x_1)

1) Get (x_1):

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = (2x_0^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_1 = (2 \times 2^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.289428$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_1 - x_0| = |2.289428 - 2| = 0.289428$$

Iteration (2): get (x_2)

1) Get (x_2):

$$x_1 = 2.289428$$

$$x_2 = (2x_1^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_2 = (2 \times (2.289428)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.437544$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_2 = |x_2 - x_1| = |2.437544 - 2.289428| = 0.148116$$

Iteration (3): get (x_3)

1) Get (x_3):

$$x_2 = 2.437544$$

$$x_3 = (2x_2^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_3 = (2 \times (2.437544)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.513698$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_3 - x_2| = |2.513698 - 2.437544| = 0.076154$$

Iteration (4): get (x_4)

1) Get (x_4):

$$x_3 = 2.513698$$

$$x_4 = (2x_3^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_4 = (2 \times (2.513698)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.552866$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_4 = |x_4 - x_3| = |2.552866 - 2.513698| = 0.039168$$

Iteration (5): get (x_5)

1) Get (x_5):

$$x_4 = 2.552866$$

$$x_5 = (2x_4^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_5 = (2 \times (2.552866)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.573007$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_5 = |x_5 - x_4| = |2.573007 - 2.552866| = 0.020141$$

Iteration (6): get (x_6)

1) Get (x_6):

$$x_5 = 2.573007$$

$$x_6 = (2x_5^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_6 = (2 \times (2.573007)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.583362$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_6 = |x_6 - x_5| = |2.583362 - 2.573007| = 0.010355$$

Iteration (7): get (x_7)

1) Get (x_7):

$$x_6 = 2.583362$$

$$x_7 = (2x_6^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_7 = (2 \times (2.583362)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.588684$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_7 = |x_7 - x_6| = |2.588684 - 2.583362| = 0.005322$$

Iteration (8): get (x_8)

1) Get (x_8):

$$x_7 = 2.588684$$

$$x_8 = (2x_7^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_8 = (2 \times (2.588684)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.591420$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_8 = |x_8 - x_7| = |2.591420 - 2.588684| = 0.002736$$

Iteration (9): get (x_9)

1) Get (x_9):

$$x_8 = 2.591420$$

$$x_9 = (2x_8^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_9 = (2 \times (2.591420)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.592826$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_9 = |x_9 - x_8| = |2.592826 - 2.591420| = 0.001406$$

Iteration (10): get (x_{10})

1) Get (x_{10}):

$$x_9 = 2.592826$$

$$x_{10} = (2x_9^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_{10} = (2 \times (2.592826)^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = 2.593549$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_{10} = |x_{10} - x_9| = |2.593549 - 2.592826| = 0.000723$$

So, (x_{10}) is the approximate root where:

$$f(x_{10}) = f(0.567143) = 0.0000004551 \approx 0$$

Example 2:

Find the cube root of 48. Correct to 4 decimal using iteration method

SOLUTION

هنا فيه فكرة جديدة ... هنا فين الf(x) ... او فين المعادلة ... هو هنا بيقولك هاتج الجزر التكعيبي ل٤٨ يعنى كدة

$$x = \sqrt[3]{48}$$

برضو فين الf(x) ... انا اقدر اعمل الاتي

$$x^3 = 48$$

$$x^3 - 48 = 0$$

وانا أصلا بدور عالroot يعنى الf(x) لازم تساوي صفر يبقى اقدر أقول

$$f(x) = x^3 - 48$$

Step (1): Select the interval in which the root exists:

خلينا نختصر شوية ... احنا عايزين فترة تكون فيها القيمة القليلة تكعيبها اقل من ٤٨ عشان تبقى بالسالب والرقم الكبير اللى فيها يكون تكعيبه اكبر من ٤٨ عشان يبقى بالموجب وتبقى هي دي الفترة ... عندي ال٣ وال٤

$$f(3) = -21$$

$$f(4) = 16$$

$$\therefore f(3) \times f(4) < 0$$

هنا خلينا نجرب الاختصار ممكن يعمل ايه ... خلينا نجرب f(3.5)

$$f(3.5) = -5.125$$

$$\therefore f(3.5) \times f(4) < 0$$

Therefore, root lies in the interval [3.5,4].

Step (2): Get g(x):

طيب انا هنا هجيب اذاي g(x) مانا لو خليت الx فطرف هرجع للمعادلة بتاعة x بتساوي الجزر التكعيبي ل٤٨ .. يبقى معملتش حاجة ... طيب ايه العمل ... هخلق g(x) ... اذاي ... هضيف حد تاني يكون الx فيه باس اقل من ٣ على الطرف اليمين والشمال طبعا ... فالمحاضرة ضفنا 50x ... طيب اشمعنا ٥٠ ... عشان يبقى رقم قريب من ٤٨ ويبقى الأرقام الناتجة صغيرة شوية

$$x^3 - 48 + 50x = 50x$$

$$x = \frac{50x + 48 - x^3}{50}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{50}(50x + 48 - x^3) = \frac{50x + 48 - x^3}{50}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{50} \times 1 \times (50 - 3x^2) = \frac{50 - 3x^2}{50}}$$

Step (3): Check g(x) for convergence:

Checking for $\boldsymbol{g(x) \in [3.5, 4]}$ and $\boldsymbol{g'(x) < 1}$:

At $x = 3.5$

$$\boldsymbol{g(3.5)} = \frac{50(3.5) + 48 - (3.5)^3}{50} = 3.6025$$

$$\boldsymbol{g'(3.5) = \frac{50 - 3(3.5)^2}{50} = 0.265}$$

At $x = 4$

$$\boldsymbol{g(4)} = \frac{50(4) + 48 - (4)^3}{50} = 3.68$$

$$\boldsymbol{g'(4) = \frac{50 - 3(4)^2}{50} = 0.04}$$

$$\therefore g(3.5) and\ g(4) \in [3.5,4]$$

$$\boldsymbol{\therefore g'(3.5)\ and\ g(4) < 1}$$

So, $\boldsymbol{g(x) is\ converging}$

Step (4): start iterations:

Iteration (1): get (x_1)

1) Get (x_1):

$$x_0 = 3.5$$

$$x_1 = \frac{50x_0 + 48 - x_0^3}{50}$$

$$x_1 = \frac{50(3.5) + 48 - (3.5)^3}{50} = 3.6025$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_1 - x_0| = |3.6025 - 3| = 0.6025$$

Iteration (2): get (x_2)

1) Get (x_2):

$$x_1 = 3.6025$$

$$x_2 = \frac{50x_1 + 48 - x_1^3}{50}$$

$$x_2 = \frac{50(3.6025) + 48 - (3.6025)^3}{50} = 3.627435$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_1 = |x_1 - x_0| = |3.627435 - 3.6025| = 0.024935$$

Iteration (3): get (x_3)

1) Get (x_3):

$$x_2 = 3.627435$$

$$x_3 = \frac{50x_2 + 48 - x_2^3}{50}$$

$$x_3 = \frac{50(3.627435) + 48 - (3.627435)^3}{50} = 3.632819$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_3 = |x_3 - x_2| = |3.632819 - 3.627435| = 0.005384$$

Iteration (4): get (x_4)

1) Get (x_4):

$$x_3 = 3.632819$$

$$x_4 = \frac{50x_3 + 48 - x_3^3}{50}$$

$$x_4 = \frac{50(3.632819) + 48 - (3.632819)^3}{50} = 3.633946$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_4 = |x_4 - x_3| = |3.633946 - 3.632819| = 0.001127$$

Iteration (5): get (x_5)

1) Get (x_5):

$$x_4 = 3.633946$$

$$x_5 = \frac{50x_4 + 48 - x_4^3}{50}$$

$$x_5 = \frac{50(3.633946) + 48 - (3.633946)^3}{50} = 3.634180$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_5 = |x_5 - x_4| = |3.634180 - 3.633946| = 0.000234$$

Iteration (6): get (x_6)

1) Get (x_6):

$$x_5 = 3.634180$$

$$x_6 = \frac{50x_5 + 48 - x_5^3}{50}$$

$$x_6 = \frac{50(3.634180) + 48 - (3.634180)^3}{50} = 3.634228$$

2) Calculate the approximate error:

$$\epsilon_6 = |x_6 - x_5| = |3.634228 - 3.634180| = 0.000048$$

So, (x_6) is the approximate root where:

$$f(x_6) = f(3.634228) = 0.0005224 \approx 0$$

Lecture SIX

3) Interpolation:

First: Definition:

According to Theile,

'Interpolation is the art of reading between the lines of the table'.

It also means insertion or filling up intermediate terms of the series.

Suppose we are given the following values of $y = f(x)$ for a set of values of (x):

x	x_0	x_1	x_2	………	x_n
y	y_0	y_0	y_2	………	y_n

Thus, the process of finding the value of y corresponding to any value of $x = x_i$ between (x_0) and (x_n) is called interpolation.

Hence interpolation is the technique of estimating the value of a function for any intermediate value of the independent variable, while the process of computing the value of the function outside the given range is called extrapolation.

الInterpolation اسمه الاستكمال الخطى ... وكله مهمته او فايدته اننا نوصل لمعادلة او function من بعض البيانات موجودة في جدول بحيث اننا لو غيرنا الx تدينا قيمة الy ... ولكن مشمجرد معادلة ... لازم المعادلة لو ادتلها مثلا أي x من اللى معروضة في الجدول تديني الy بالظبط .... وده اللى هنشوفه في الأمثلة الجاية

Second: Linear Lagrange Interpolation:

One of the most useful and well-known classes of functions mapping the set of real numbers in itself "Algebraic polynomial".

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

Where, $n \geq 0$ and

$a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ are constants or coefficients.

من الاخر كل الدوال ينفع اعوض عنها بدالة كثيرة الحدود من أي درجة والدرجة تعتمد على الdata اللي عندي. واي الset of data ليها دالة واحدة فقط ...

a) Proof:

Let $y = f(x)$ be a function which takes $(n+1)$ values, $y_0, y_1, \dots, y_n$ corresponding to $x_0, x_1, \dots, x_n$

Let us consider the polynomial of the form:

$$y = L_0(x)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+\cdots+(x-x_n)$$
$$+L_1(x)(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)+\cdots+(x-x_n)$$
$$+L_2(x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)+\cdots+(x-x_n)+\cdots$$
$$+L_n(x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+(x-x_{n-1})$$

لحد هنا وعايزين نفهم ايه ده ... احنا كل الى عملناه اننا كتبنا الشكل العام للمعادلة الpolynomial ... بس ده شكل مشمتعودين عليه للأسف ... وال$L(x)$ ده هو الcoefficient اللى تقدر تعتربه مكان الa يعنى مثلا $L_0(x)$ مكان الa_0.

بس نلاحظ حاجة ... لما كتبت $L_0(x)$ مكتبناه في الاقواس اللى جنبها $(x-x_0)$ ليه لان مينفعش لان الx لما بتساوي x_0 اكيد الterm هيساوي صفر ومشده اللى احنا عايزينه ... كذلك فاي term تاني ... يعنى في ال$L_1(x)$ شلنا ال$(x-x_1)$ وهكذا

Let $x = x_0$

لو خلينا ال$x=x_0$ كل الterms هتساوي صفر ماعدا الterm الأول ... ليه ... لان كل الterms فيهم $(x-x_0)$ ماعدا الterm الأول.

$$y_0 = L_0(x)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)+\cdots+(x_0-x_n)$$

$$L_0(x) = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)+\cdots+(x_0-x_n)}$$

Let $x = x_1$

نفس الكلام كل الterms بصفر ماعدا الterm التاني اللى فيه L_1 عشان كل الterms فيهم $(x-x_1)$

$$y_1 = L_1(x)(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)+\cdots+(x_1-x_n)$$

$$L_1(x) = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)+\cdots+(x_1-x_n)}$$

Let $x = x_2$

نفس الكلام كل الterms بصفر ماعدا الterm التالت اللى فيه L_2 عشان كل الterms فيهم $(x-x_2)$

$$y_2 = L_2(x)(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)+\cdots+(x_2-x_n)$$

$$L_2(x) = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)+\cdots+(x_2-x_n)}$$

Let $x = x_n$

$$y_n = L_n(x)(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$

$$L_n(x) = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})}$$

Using value of $L_0(x), L_1(x), L_2(x), \dots, L_n(x)$ is the polynomial form:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+\cdots+(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)+\cdots+(x_0-x_n)} y_0$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)+\cdots+(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)+\cdots+(x_1-x_n)} y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)+\cdots+(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)+\cdots+(x_2-x_n)} y_2+\cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})} y_n$$

This is the Lagrange interpolation formula

We can write it in general formula

$$\boldsymbol{P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k}$$

$$\boldsymbol{L_k(x)=\Pi_{i=0}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\,, \qquad k\neq i}$$

مثال على العلاقة دي:

$$\boldsymbol{L_k(x)=\Pi_{i=0}^{2}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}}$$

$$\boldsymbol{L_0(x)=\Pi_{i=0}^{2}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}$$

$$\boldsymbol{L_1(x)=\Pi_{i=0}^{2}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}$$

Example 1:

Find the polynomial of degree three which takes the values as shown below.

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$
y	$y_0 = 1$	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 5$

SOLUTION

اول حاجة نفكر فيها اننا نحدد الpolynomial or degree ... هنحددها اذاي

$$The\ degree\ of\ polynomial = n - 1$$

الn هو عبارة عن عدد النقط اللى عندنا ... عندنا في الجدول ٤ نقط يعنى عندي ٤ حدود بيبدأو من ٠ ل٣ يعنى الn من ٠ ل٣ عشان كدة قولنا n-1. وبالتالي بنقول عليها polynomial من الدرجة التالتة

هدفنا اننا نجيب معادلة لما نديها الx تدينا الy

هنجيب معادلة lagrange ... فيها الn من ٠ ل٣ يعنى كدة

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

هنبدأ نعوض من الجدول في المعادلة دي

$$y = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 4)} 1 + \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 4)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 4)} 1$$

$$+ \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 4)}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 4)} 2 + \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(4 - 0)(4 - 1)(4 - 2)} 5$$

$$y = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-8} + \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{3} + \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{-4} + \frac{5x^3 - 15x^2 + 10x}{24}$$

$$y = \frac{-3x^3 + 21x^2 - 42x + 24 + 8x^3 - 48x^2 + 64x - 12x^3 + 60x^2 - 48x + 5x^3 - 15x^2 + 10x}{24}$$

$$y = \frac{-2x^3 + 18x^2 - 16x + 24}{24} = \frac{2(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)}{24}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)}$$

لو عوضنا في المعادلة دي باي قيمة x من الجدول هتديني قيمة الy اللى في الجدول.

Example 2:

For the following data find $\sqrt{1.1}$ using Lagrange's interpolation. Determine the accuracy of interpolation.

x	1	1.2	1.3	1.4
y	1	1.095	1.140	1.183

SOLUTION

اول حاجة نفكر فيها اننا نحدد الpolynomial or degree ... هنحددها اذاي

$$The\ degree\ of\ polynomial = n - 1$$

الn هو عبارة عن عدد النقط اللى عندنا ... عندنا في الجدول ٤ نقط يعنى عندي ٤ حدود بيبدأو من ٠ ل٣ يعنى الn من ٠ ل٣ عشان كدة قولنا n-1. وبالتالي بنقول عليها polynomial من الدرجة التالتة

هدفنا اننا نجيب معادلة لما نديها الx تدينا الy

هنجيب معادلة lagrange ... فيها الn من ٠ ل٣ يعنى كدة

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

هنبدأ نعوض من الجدول في المعادلة دي ... بس هنا فالسؤال هو مديني قيمة الx اللى هي ال$\sqrt{1.1}$ وعايز قيمة الy اللى هي قيمة الجذر فعلا ... فاحنا مشهتبقى منضطرين اننا نضرب الاقواس في بعض ونجيب المعادلة لانه مشمحتاجها في السؤال

$$y = \frac{(1.1-1.2)(1.1-1.3)(1.1-1.4)}{(1-1.2)(1-1.3)(1-1.4)}1 + \frac{(1.1-1)(1.1-1.3)(1.1-1.4)}{(1.2-1)(1.2-1.3)(1.2-1.4)}1.095$$

$$+ \frac{(1.1-1)(1.1-1.2)(1.1-1.4)}{(1.3-1)(1.3-1.2)(1.3-1.4)}1.140 + \frac{(1.1-1)(1.1-1.2)(1.1-1.3)}{(1.4-1)(1.4-1.2)(1.4-1.3)}1.183$$

$$\boldsymbol{y = 0.25 + 1.6425 - 1.14 + 0.29575 = 1.04825}$$

لو عوضنا في المعادلة دي باي قيمة x من الجدول هتديني قيمة الy اللى في الجدول.

$$\boldsymbol{\therefore \sqrt{1.1} = 1.04825}$$

$$\boldsymbol{True\ value = 1.04880}$$

$$\boldsymbol{Error\ in\ interpolation\ =\ 1.04880\ -\ 1.04825 = 0.00055}$$

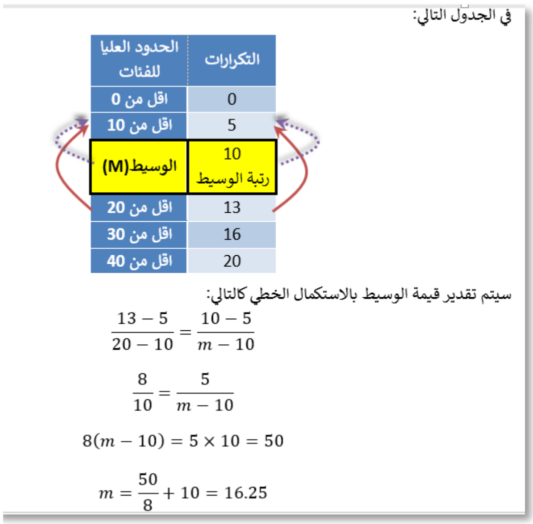
لو كنا زودنا في الجدول نقطة تانية هيقل الخطأ.

Lecture SEVEN

3) Interpolation:

First: Newton Divided difference:

This technique uses divided differences for interpolation. This interpolation method can be used with any type of data irrespective of the spacing between values of (x).


في الجدول التالي:

الحدود العليا للفئات	التكرارات
اقل من 0	0
اقل من 10	5
الوسيط(M)	10 رتبة الوسيط
اقل من 20	13
اقل من 30	16
اقل من 40	20

سيتم تقدير قيمة الوسيط بالاستكمال الخطي كالتالي:

$$\frac{13-5}{20-10}=\frac{10-5}{m-10}$$

$$\frac{8}{10}=\frac{5}{m-10}$$

$$8(m-10)=5\times 10=50$$

$$m=\frac{50}{8}+10=16.25$$

دي طريقة تانية اننا نجيب بيها قيمة جوة جدول ... الطريقة دي هي نفسها طريقة الاستكمال الخطي اللى اخدناها في الإحصاء ولكن مع اختلاف انها بقانون. (الصورة للتذكرة).

في الاحصا كنا بنجيب قيمة واحدة وخلاص فالنص لكن مكناش بنوصل للمعادلة اللى بيها اقدر اجيب بيها أي قيمة بمجرد معرفة الحد الأعلى مثلا ... لكن هنا هنستخدم نفس الطريقة عشان نجيب معادلة polynomial اقدر اجيب بيها أي قيمة انا عايزها

نلاحظ في الصورة اننا طرحنا الحدود العليا وقسمناها على طرح التكرارت ... يعنى عندي رقمين مطروحين هقسمهم على رقمين مطروحين برضو ... عشان كدة سماها الdivided difference.

1) How to get the divided difference:

The first divided difference:

The first divided difference of $f(x)$ is defined as:

$$[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$[x_1, x_2]$ can be written as $f(x_0, x_1)$ or $\Delta_{x_1} f(x_0)$

طبعا الكلام واضح مشمحتاج شرح.

$$f(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_2, x_3) = [x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

So, the general formula of the first divided difference is

$$f(x_{n-1}, x_n) = [x_{n-1}, x_n] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

The Second divided difference:

The first divided difference is defined as:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

من الاخر هو كدة هنا عمل ايه ... جاب الفرق بين النقطتين x_0 وx_1 وجاب الفرق بين x_1 وx_2 وبعد كدة جاب الفرق بين القيمتين اللى طلعوله ... يعنى هيجيب الفرق بين كل قيمتين ويجيب الفرق للنواتج وهكذا

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

The third divided difference:

The first divided difference is defined as:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0}$$

So, how many divided differences we have?

If you have the following points:

x_0	x_1	x_2	x_3
y_0	y_1	y_2	y_3

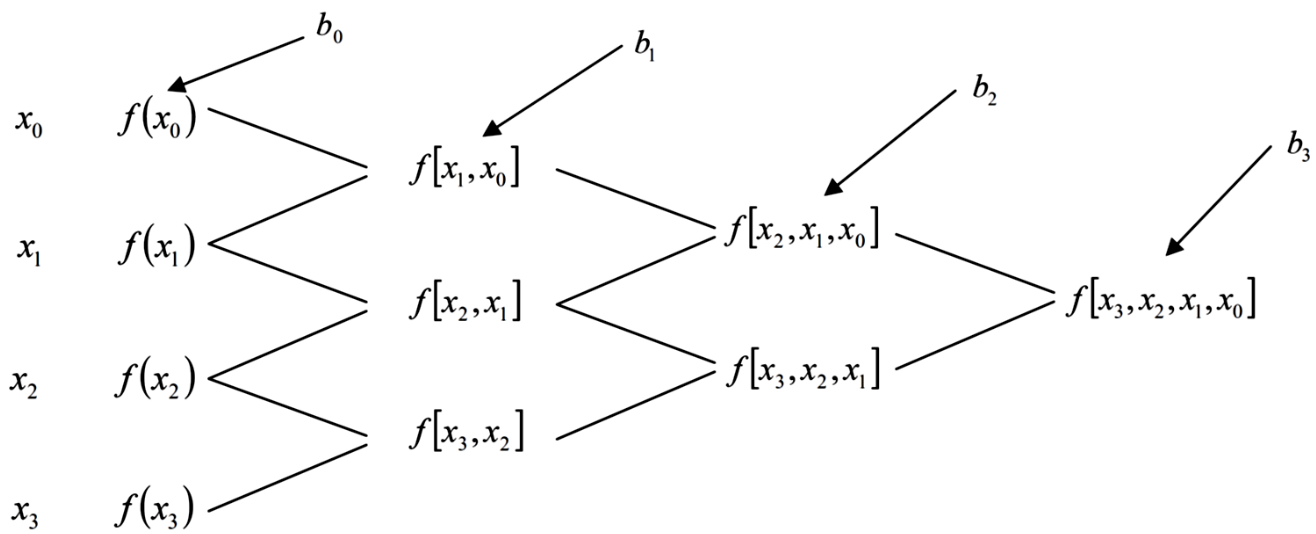
These are 4 points, when you get the difference between each 2 points, then you will get 3 differences, this means if we have (n) points, then we will have $(n-1)$ divided difference.

كل الفكرة لو عندي ٤ قيم مثلا .... اقدر اجيب الفرق بين الأولى والتانية والفرق بين التانية والتالتة والفرق بين التالتة والرابعة يعنى كدة عندي ٣ فروق فقط يبقى عدد الdivided difference بيساوي عدد القيم ناقص ١

Divided difference table:

x	$f(x)$	1^{st}divided dif	2^{nd}divided dif	3^{rd}divided dif	4^{th}divided diff
x_0	$f(x_0)$				
		$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$		
		$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1,x_2,x_3)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4$
		$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2,x_3,x_4)$		
		$\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$			
x_4	$f(x_4)$				

هو كل الموضوع بجيب الdivided difference بين كل قيمتين ... هيطلع عندي قيم ... هجيب بينهم هما كمان divided difference وهكذا لحد ما يبقى عندي رقم واحد فقط ... لو متلخبط من الجدول شوف الصورة الجاية



سيبك من الb لكن هو ده نفس الجدول بالظبط.

What's next?

After getting all the divided differences, we will use them to find the polynomial equation that represent the data in the table.

We will substitute the divided difference values in the following equation:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2) \\ + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3) + \cdots \\ + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$$

Example 1:

Find the polynomial of degree three which takes the values as shown below using Newton divided difference.

x	2	4	9	10
y	4	56	711	980

SOLUTION

Step (1): Create the divided difference table:

x	$f(x)$	1^{st} divided diff	2^{nd} divided diff	3^{rd} divided diff
2	4			
		$f(x_0,x_1)=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\dfrac{56-4}{4-2}=26$		
4	56		$f(x_0,x_1,x_2)=\dfrac{131-26}{9-2}=15$	
		$f(x_1,x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{711-56}{9-4}=131$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\dfrac{23-15}{10-2}=1$
9	711		$f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{269-131}{10-4}=23$	
		$f(x_2,x_3)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\dfrac{711-980}{10-9}=269$		
10	980			

Step (2): Get the polynomial equation:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0,x_1,x_2,x_3)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$$

$$f(x)=4+(x-2)26+(x-2)(x-4)15+(x-2)(x-4)(x-9)1$$

$$f(x)=4+26x-52+(x^2-4x-2x+8)15+(x^2-4x-2x+8)(x-9)$$

$$f(x)=4+26x-52+(x^2-6x+8)15+x^3-6x^2+8x-9x^2+36x+18x-72$$

$$f(x)=4+26x-52+15x^2-90x+120+x^3-6x^2+8x-9x^2+36x+18x-72$$

$$f(x)=x^3-2x$$

جرب أي قيمة من الجدول هتلاقيها مظبوطة ... يعني لو خليت الاكس ب٢ ال f(x) هتكون ب٤

Lecture EIGHT

4) Numerical differentiation:

First: Basic Concept:

This lecture deals with approximations of derivatives. The first questions that comes up to mind is: why do we need to approximate derivatives at all? After all, we do know how to analytically differentiate every function. Nevertheless, there are several reasons as of why we still need to approximate derivatives:

- ✓ Even if there exists an underlying function that we need to differentiate, we might know its values only at a sampled data set without knowing the function itself.
- ✓ There are some cases where it may not be obvious that an underlying function exists and all that we have is a discrete data set. We may still be interested in studying changes in the data, which are related, of course, to derivatives.
- ✓ There are times in which exact formulas are available but they are very complicated to the point that an exact computation of the derivative requires a lot of function evaluations. It might be significantly simpler to approximate the derivative instead of computing its exact value.

هنا هنتكلم عن اننا بنجيب التقريب لقيمة التفاضل ... طيب انا هحتاج ليه اجيب التفاضل بالتقريب مانا بفاضل المعادلة او الدالة واعوض وخلاص ...

الحقيقة ان أحيانا أصلا مبنكونش عارفين الدالة أصلا ولكن عندنا مجرد قيم فجدول وخلاص ... القيم دي هنكون جايبينها من دالة ما ولكن احنا مشعارفينها وعايزين التفاضل بتاعها عشان نقيس التغير في الdata دي ... لان التفاضل بيقيس معدل التغير.

كلنا عارفين ان لو الدالة موجودة وجبنا التفاضل بتاعها وعوضنا، هنجيب الexact solution مشالapproximate ... بس أحيانا الدالة بتكون موجودة ومعقدة جدا لدرجة انك ممكن أصلا متعرفش تفاضلها وبرضو عايز تقيس معدل التغير يعنى عايز تجيب التفاضل ... هتعمل ايه ... هتجيب ال approximation of derivate يعنى هتبقى مضطر تجيب القيمة التقريبية.

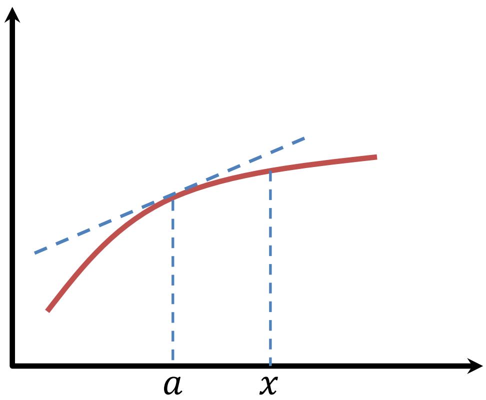
يعنى كل الفكرة ان ممكن يكون عندي قيم لx وy لنوع معين من الdata ومعنديش الدالة او الfunction اللى تربطهم وعايز اقيس معدل التغير اللى هو يعنى اجيب قيمة التفاضل للدالة وهي مشعندي أصلا وانا مقدرش افاضل ارقام ... فالبتالي هستخدم الnumerical differentiation عشان اجيب قيمة قريبة للتفاضل من القيم اللى عندي

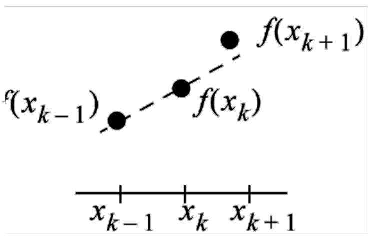
According to the set of tabled data, we have 2 types:

1) Equally spaced data in which we use the finite difference approximation which differs according to the number of points used:
    a. In case of 2 points, the methods used are:
        i. Forward.
        ii. Backward.
        iii. Center.
    b. In case of 3 points, the methods used are:
        i. Backward.
        ii. Forward.
2) Not equally spaced data in which we use Lagrange polynomial exact formula.

احنا اتفقنا اننا هيكون عندنا بيانات في جدول عايزين نجيب التفاضل بتاعهم ... هنا بيقول لو الفرق بين الx ثابت يعنى مثلا قيم الx تكون ٢ ٤ ٦ ٨ .... ماشين بمعدل ثابت هنستخدم الfinite difference approximation ودي ليها أنواع وهنفهم بعد شوية ليه اسمها difference ... بس دي بتختلف على حسب ... هو بيعتمد فالحل على نقطتين ولا ٣ نقط ... ولو كان الفروق بين الx متغيرة هنستخدم طريقة Lagrange اللى كانت بتجيب ال exact value.

Graphical representation of the concept:



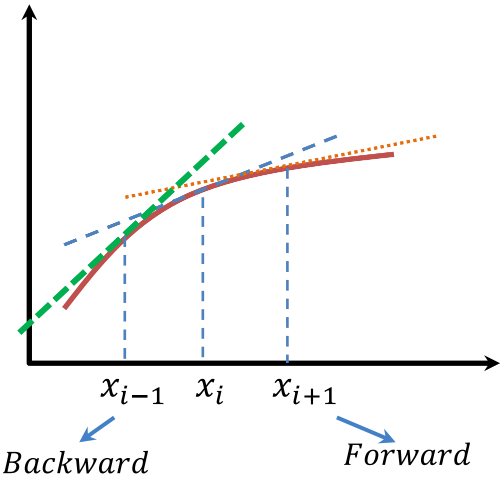


كل الموضوع ان عندي النقطة a هي اللى عايز اجيب المشتقة بتاعتها ... وطبعا التفاضل هو الميل عند نقطة ... بس انا فعليا معنديش الدالة ذي ما قولنا ... فبنعمل ايه ... بنختار نقطة مثلا وبنجيب التفاضل بتاعها وبنجيب الفرق في التفاضل بينها وبين النقطة a يعنى حاجة شبه اللى فالصورة دي.

Second: Finite Difference approximation:

1) Using 2 points:

Forward difference approximation:



احنا هنا بنستخدم نقطتين .. يقصد بيهم النقطة اللى عايزين نجيب التفاضل بتاعها ونقطة تانية ...

وليكن النقطة اللى عايزين نجيب التفاضل بتاعها هي ال x_i فلو هيستخدم نقطة بعدها اللى هي الx_{i+1} يبقى الطريقة اسمها forward difference

ولو كانت قبلها اللى هي الx_{i-1} يبقى اسمها backward difference

ولو اخدنا النقطتين لى هنحل بيهم هما الx_{i+1} والx_{i-1} يبقى الطريقة اسمها center difference لان الx_i في النص

The rule:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Backward difference approximation:

The rule:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Central difference approximation:

The rule:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Example 1:

If $f(x) = x^3$, find $f'(x)$ at $x = 3$ numerically with forward, backward and central difference using the following data.

Cas 1: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

Cas 2: $\boldsymbol{x = 2.75,\ x = 3,\ x = 3.25}$

SOLUTION

For $f(x) = x^3$, the analytical (exact solution) at $f'(x)$ at $x = 3$, will be:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 3 \times 3^2 = 27$$

احنا هنا جبنا ليه الexact للمشتقة الاولى... عشان عندنا الf(x) فلما نحسب الnumerical solution ... نجيب قيمة الerror

Numerical solution for case 1:

First, we should find $f(x)$ for each x and put them in a table:

x	2	3	4
$f(x)$	8	27	64

ليه عملنا الجدول ... لأننا أصلا لازم يكون عندنا الf(x) عشان نستخدم القانون .. فاما انه هيدينا الجدول أصلا في السؤال ومشهيدينا الf(x) اما انه هيدينا الx والf(x) واحنا نجيب الf(x) وطبيعي هنعملهم فجدول.

Forward difference approximation:

طبعا هنا الforward يقصد بيها القيمة اللى بعد الx ... وانا عندي الx في السؤال اللى هي ال٣ يبقى لما اخد من الجدول القيمة اللى هتكون بعد ال3 هي ال٤ يبقى اذن الx_{i+1} هي ال٤

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{64 - 27}{4 - 3} = 37$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27 - 37}{27}\right| \times 100 = 37.04\%$$

Backward difference approximation:

طبعا هنا الbackwoad يقصد بيها القيمة اللى قبل الx ... والقيمة اللى هتكون قبل ال3 هي ال٢ يبقى اذن الx_{i-1} هي ال٢

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{27 - 8}{3 - 2} = 19$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27 - 19}{27}\right| \times 100 = 29.63\%$$

Central difference approximation:

طبعا هنا الcentral يقصد بيها القيمة اللى قبل واللى بعد الx ... والقيمة اللى هتكون قبل وبعد ال3 هي ال٢ وال٤

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{64-8}{4-2} = \frac{56}{2} = 28$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27-28}{27}\right| \times 100 = 3.7\%$$

Numerical solution for case 2:

First, we should find $f(x)$ for each x and put them in a table:

x	2.75	3	3.25
$f(x)$	20.796875	27	34.328125

Forward difference approximation:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{34.328125 - 27}{3.25 - 3} = 29.3125$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27-29.3125}{27}\right| \times 100 = 8.6\%$$

Backward difference approximation:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{27 - 20.796875}{3 - 2.75} = 24.8125$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27-24.8125}{27}\right| \times 100 = 8.1\%$$

Central difference approximation:

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{34.328125 - 20.796875}{3.25 - 2.75} = \frac{56}{2} = 27.0625$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27-27.0625}{27}\right| \times 100 = 0.23\%$$

طبعا هنا نلاحظ ان كل ما كانت الأرقام اللى بناخدها بعد او قبل الx قريبة من الx كل ماكان قيمة الخطأ اقل يعني كل ما كان النتيجة ادق

2) Using 3 points:

طبعا ال٣ نقط يقصد بيهم الx ونقطتين كمان ... والنقطتين دول ... اما يكونوا بعد الx والطريقة يبقى اسمها forward او يكونوا قبل الx ويكون اسمها backward ولكن عشان مفيش central لان انا لو هستخدم ٣ نقط غير الx والx فوسهم هتبقى اذاي ... هحط الx فوسط ٣ نقط اذاي ... فعشان كدة مفيش central ... وطبعا هناخد القوانين فقط.

Forward difference approximation:

The rule:

$$f'(x_i) = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h}$$

Where $h = x_{i+1} - x_i$

Backward difference approximation:

The rule:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) + 3f(x_i)}{2h}$$

Where $h = x_i - x_{i-1s}$

Example 2:

If $f(x) = x^3$, find $f'(x)$ at $x = 3$ numerically with forward difference using the following data.

Cas 1: $x = 3,\ x = 4,\ x = 5$

Cas 2: $x = 3,\ x = 3.25,\ x = 3.5$

SOLUTION

For $f(x) = x^3$, the analytical (exact solution) at $f'(x)$ at $x = 3$, will be:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 3 \times 3^2 = 27$$

Numerical solution for case 1:

First, we should find $f(x)$ for each x and put them in a table:

x	3	4	5
$f(x)$	27	64	125

Forward difference approximation:

$$\boldsymbol{f'(x_i) = \frac{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{2h} = \frac{-3 \times 27 + 4 \times 64 - 125}{2(4-3)} = 25}$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27 - 25}{27}\right| \times 100 = 7.41\%$$

Numerical solution for case 2:

First, we should find $f(x)$ for each x and put them in a table:

$\boldsymbol{x}$	**3**	**3.25**	**3.5**
$\boldsymbol{f(x)}$	27	34. 328125	42.875

Forward difference approximation:

$$\boldsymbol{f'(x_i)} = \frac{\boldsymbol{-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}}{\boldsymbol{2h}} = \frac{\boldsymbol{-3 \times 27 + 4} \times 34.328125 - 42.875}{\boldsymbol{2(3.25-3)}} = \boldsymbol{26.875}$$

$$Percentage\ error = \left|\frac{True\ value - \ Approx\ error}{True\ value}\right| \times 100 = \left|\frac{27 - 26.875}{27}\right| \times 100 = 0.46\%$$

Lecture NINE

5) Numerical Integration:

First: Basic Concept:

Integration operation is required in large number of calculations, however, sometimes it is difficult to find explicit formula to evaluate integration. So, the solution is to get approximate value using numerical techniques.

When we have a set of points in table and the function $f(x)$ that is connect these points is not known, numerical techniques are used to find approximate solution to $f(x)$ using straight lines, parabola or higher order polynomials.

Different methods can be used to get such approximation such as:

1) Trapezoidal $\frac{1}{3}$ rule.
2) Composite trapezoidal rule.
3) Simpson $\frac{1}{3}$ rule
4) Simpson $\frac{3}{8}$ rule

هنا بنقول ان التكامل بيستخدم في تطبيقات او عمليات حسابية كتير ولكن احنا مشهنتكلم عنها ولكن أحيانا بيكون من الصعب اننا نوصل للexact value لقيمة التكامل والحل انى احصل على قيمة تقريبية بواسطة التحليل العددي او الnumerical techiques واللى هو أساسا هدف الكورس.

كل الموضوع ان بيكون عندي بيانات في جدول ولكن الfunction او الدالة اللى جات منها البيانات دي مشعندي وعايز اجيب التكامل بتاع الدالة اللى هي مشعندي دي ولكن من خلال النقط اللى في الجدول فلو رسمت النقط دي هبقى عايز اجيب المساحة اللى تحت الرسم اللى هي التكامل نفسه ولكن أحيانا بيكون صعب حساب المساحة تحت الرسم لبعض الدوال وعشان أوصل لحل تقريبي لقيمة التكامل للf(x) هعمل تقريب للدالة بواسطة الخط المستقيم او parabola اللى هي الشكل اللى بيكون عامل كدة (∪) او (∩) او انى اوصلها لhigher polynomial يعنى اوصلها لx باس اعلى. يعنى من الاخر بخلي الرسم على شكل رسم انا اعرف اجيب المساحة بتاعته

فيه طرق كتير نقدر نوصل لقيمة تقريبية لقيمة التكامل لدالة معينة ذي ال٤ اللى مكتوبين دول.

Newton-Cotes Integration Formulas

الاثبات ده الدكتور مقالش انه جاي ولكن لازم نفهمه ضروري جدا

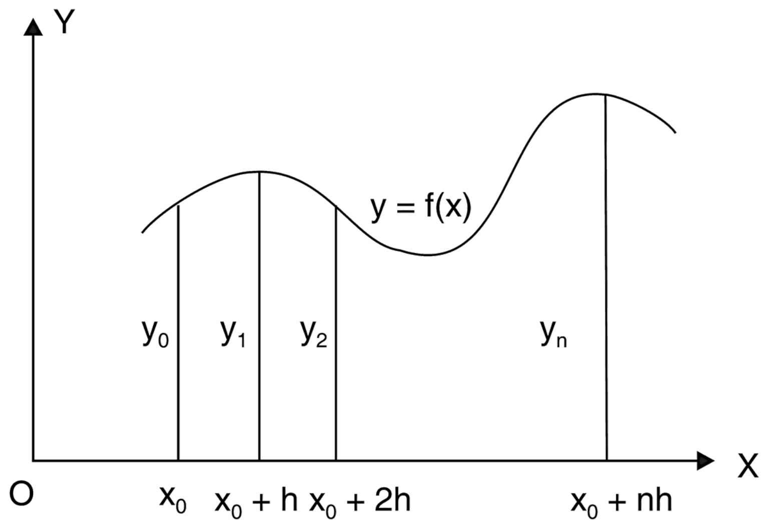
Suppose we have a function

$$y = f(x)$$

And assume that we have the following points that corresponds to $f(x)$

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Let $\int_a^b f(x)\,dx$ can be calculated from the following curve:



Let the interval of integration (a, b) be divided into n sub-intervals of equal width (h) that can be calculated from the equation:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

So that:

$$x_0 = a \text{ and } x_n = b$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h$$

Substituting x_1

$$x_2 = x_0 + 2h$$

So,

$$x_n = x_0 + nh$$

$$\therefore I = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx$$

لحد هنا هو بيقول فرضا ان عندي دالة $f(x)$ والدالة دي عملت منها قيم ذي اللى فالجدول اللى فوق .. ورسمتها وكان الرسم ذي اللى مرسوم ده ... وعايز اجيب التكامل بتاع الدالة دي يعنى عايز مساحة الرسم ولكن ده تكامل محدود يعنى محددلي فترة من a لـb... احنا اخدنا في الترم الأول عشان اجيب التكامل بدقة لازم اقسم المساحة الى فترات واجيب كل مساحة كل فترة لوحدها وبعد كدة اجمع.

فهنا نفس الكلام بيقول انى هقسم المساحة اللى بين a وb تحت الـcurve الى اقسام متساوية وعشان اعمل ده لازم اطرح المسافة بين الـa وb واقسم على عدد الفترات اللى عايز أقسم المساحة ليها ... يعنى لو عايز اقسم المساحة

ل٥ فترات يبقى هطرح وهقسم على ٥ يعني مثلا فرضا المسافة بين a وb كانت ٣ وانا عايز اقسم المساحة ل٣ فترات فهقسم على ٣ فهيبقى عرض كل فترة عبارة عن ١ وبكدة تبقى مسافات متساوية وهنرمز لعرض كل فترة بالرمز h.

طيب لو خلينا الa هي الx_0 والb هي الx_n والفترة الأولى تنتهي عند x_1 واللى هي تعتبر بداية الفترة التانية بالتالي اقدر أقول ان ال$x_1=x_0+h$ اللى والx_2 هتساوي $x_1 = x_1+h$ طيب لو عايز x_2 بدلالة x_0 انا بالفعل بعدت عن الx_0 بفترتين يبقى اقدر اكتب $x_2 = x_0 + 2h$ يعني اقدر اكتب $x_n = x_0 + nh$ وفالاخر هنكتب التكامل تاني بس هنشيل والa والb ونحطهم بدلالة الx_0

Since any x is given by $x = x_0 + uh$ and $dx = h\,du$

Where

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

ثانية بقى نقف عند السطر ده .... يعني ايه الكلام ده:

فرضا انا عندي بيانات في جدول ذي الجدول التالي:

x	0	5	10	15	20
y	1	1.6	3.8	8.2	15.4

تلاحظ ايه هنا ... دي متقسمة لفترات متساوية ومتقسمة ل٤ فترات وطول كل فترة عبارة عن ٥ اللى هي الh... صح كدة

وبنجيب الh باننا بنقول $h = \frac{20-0}{4} = 5$ ... طيب سؤال هنا ... لو انا قولتلك انا عايز f(6) هتعمل ايه .... يعني مثلا بين ال0 اللى هو يعتبر الx_0 وال5 فيه كام n فيه واحدة وبين ال10 والصفر فيه 2 طيب السؤال بقى ... من 0 ل٦ فيه كام n ؟؟؟ فيه واحدة وحتة ... فلو انت عرفت الn وضربت في الh هتعرف المسافة بين ال0 وال6 كام وبالتالي الn وحتة دي احنا هنسميها u وبالتالي هنقول ان ال$x = x_0 + uh$ ونقدر طبعا نطلع العلاقة اللى نجيب منها الu ...

بس الفكرة مشفاننا نحسب المسافة بين الx_0 وال٦ مثلا لكن الفكرة فاننا نجيب التكامل بتاعها يعنى نحسب مساحة الرسم في الفترة من الx_0 الى x_0+uh ...

طيب مانا ممكن اقولك ليه معتبرش الx_0 هي نفسها ال٥ مثلا واعتبر ان الرسم هو أصلا عبارة عن فترة واحدة ومعنديش غير n واحدة والu هتبقى بين ال$n=0$ وn يعنى التكامل ينفع يتكتب كدة وليه هنجيب الdx لان عندك الx_0 هي أصلا ثابتة ومعروفة والh نفس الكلام لكن المجهول الوحيد هو الu فالبتالي التكامل بالنسبالنا هيكون على الu

$$\therefore I = \int_0^n f(x)\,dx$$

So, at $x = x_0 + uh$ and $dx = h\,du$

$$I = \int_0^n f(x_0 + uh)\,h du = h\int_0^n f(x_0 + uh)\,du$$

طيب السؤال هنا ... نعمل ايه كدة ... هنستخدم Newton’s forward interpolation formula دي اللى مفروض بنجيب بيها الf(x) لبيانات في جدول في الInterpolation بس احنا ماخدنهاش فالبتالي هنكتب الformula علطول

$$I = h\int_0^n \left[y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{u(u-1)(u-2)\Delta^3 y_0}{3!} + \cdots\right] du$$

أولا علامة الΔ معناها first difference والΔ^2 معناها second difference ... طيب بنجيبهم اذاي ... فاكرين في الdivided difference كنا بنجيب الfirst difivided diff اذاي:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

لكن في *newton forward* بنجيب الـ*first diff* باننا بنطرح بس $f(x_1) - f(x_0)$ فقط ... والـ$\Delta^2 y_0$ او الـ*second diff* باننا الـ*first difference* التاني من الأول وهكذا.

وبالنسبة للformula عشان تجيب الterm اللى بعد كدة هتلاحظ انك هتزود قوس فيه u-3 مثلا للterm اللى بعد كدة وهتزود الاس بتاع الΔ وهيبقى الاس هو نفسه المضروب اللى في المقام ... والاس بيساوي عدد الu اللى في الterm

بعد كدة هنكامل عادي جدا ... باننا نكامل كل term لوحده فهيبقى كدة

$$I = h\left[uy_0 + u^2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{u^4}{4} - u^3 + u^2\right)\Delta^3 y_0 + \cdots\right]_0^n$$

عشان تعرف التكامل حصل اذاي ... كل الموضوع هتضرب الاقواس في بعضها وهتكامل عادي جدل وهتخرج الحاجات الثابتة اللى هي فيها الΔ هتلاقيها بالشكل ده

بعد كدة المفروض انت فالتكامل المحدد بتعوض مكان الu بn وهتصرح منها التعويض ب0 وطبعا التعويض بصفر هيبقى كله بصفر ف في النهاية هتعوض بn فقط وهيبقى العلاقة كالتالي:

$$I = h\left[ny_0 + n^2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

ولو اخدت n عامل مشترك وبسطت المعادلة شوية هتبقى كدة

$$\boldsymbol{I = nh\left[y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]}$$

Proof without Arabic explanation:

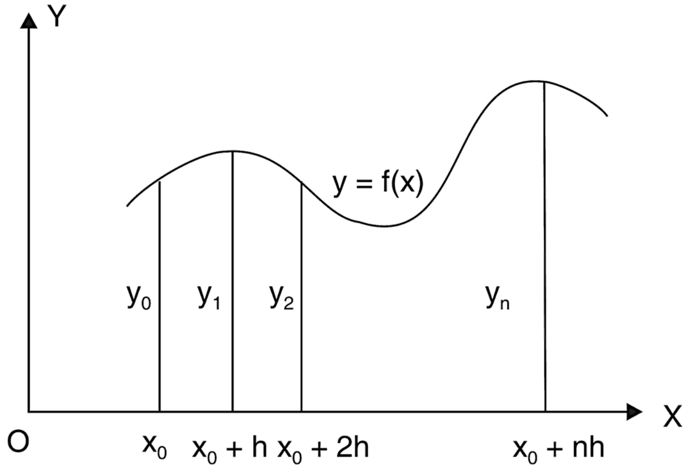
Suppose we have a function

$$y = f(x)$$

And assume that we have the following points that corresponds to $f(x)$

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Let $\int_a^b f(x)\,dx$ can be calculated from the following curve:



Let the interval of integration (a, b) be divided into n sub-intervals of equal width (h) that can be calculated from the equation:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

So that:

$x_0 = a$ and $x_n = b$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_1 + h$$

Substituting x_1

$$x_2 = x_0 + 2h$$

So,

$$x_n = x_0 + nh$$

$$\therefore I = \int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx$$

Since any x is given by $x = x_0 + uh$ and $dx = h\,du$

Where

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\therefore I = \int_0^n f(x)\,dx$$

So, at $x = x_0 + uh$ and $dx = h\,du$

$$I = \int_0^n f(x_0 + uh)\,hdu = h\int_0^n f(x_0 + uh)\,du$$

$$I = h\int_0^n [y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{u(u-1)(u-2)\Delta^3 y_0}{3!} + \cdots]\,du$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$I = h\left[uy_0 + u^2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{u^3}{4} - u^3 + u^2\right)\Delta^3 y_0 + \cdots\right]_0^n$$

$$I = h\left[ny_0 + n^2\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{n^3}{4} - n^3 + n^2\right)\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

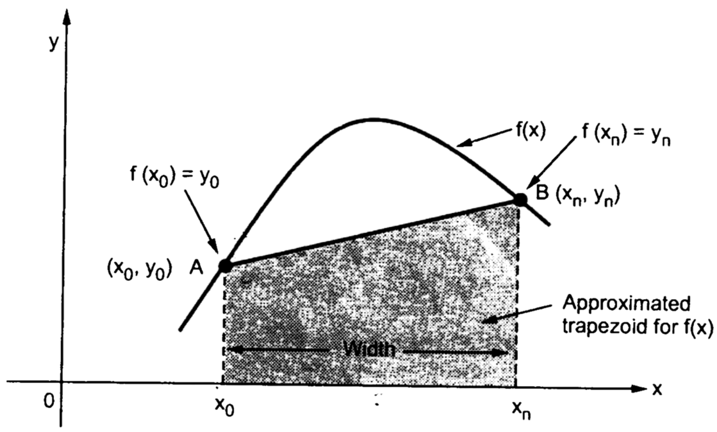
$$\boldsymbol{I = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]}$$

Second: TRAPEZOIDAL RULE (n = 1):

ذي مانت شايف العنوان ... مكتوب n=1 ... يعنى من الاخر الnewton cote’s هو الأساس والباقيين مشتقين منه يعنى القاعدة اللى هنتكلم فيها دلوقتي بيخلي الn=1 يعنى يعتبر مقسمهاش لintervals

Principle:

Trapezoidal rule approximates the curve i.e. $f(x)$ between the limits of integration by a straight line. In following figure observe that the curve $f(x)$ is approximated by a straight-line AB. The integration of $f(x)$ is equal to shaded area under the line AB. This area is within the trapezoid formed by $AB\ x_0\ x_n$. Hence the name trapezoidal rule is given.



هنا كل الفكرة ايه ... دلوقتى انا بجيب التكامل المحدد عند نقطتين اللى هما الa والb واللى هما بالظبط x_0 وx_n ... طيب هو كل اللى عمله انه اعتبر المساحة كلها فترة واحدة يعنى الn=1 وبالتالي لما وصل النقطتين y_0 وy_n كان الناتج شكل شبه منحرف اللى هو اسمه بالانجليزي trapezoidal

ويعتبر فعليا كانه هيجيب قيمة الدلة بدلالة polynomical function of 1st degree يعنى كانه حول الدالة دي لدالة خطية فيها الاكس باس واحد. بس ممكن تقول ولكن هيكون فيه error عشان هو ساب مساحة مشهيحسبها ... اوك وايه المشكلة ما احنا بنقول اننا بنجيب قيمة تقريبية مشبنجيب الexact فطبيعي انه هيكون فيه error

وفعليا تقدر تعوض في قانون newton cotes بال n بواحد وتجيب العلاقة بتاعة مساحة الtrapezoidal او شبه المنحرف ولكن في المحاضرة الدكتورة اثبته بشكل مختلف وقال انه علينا فالامتحان.

Derivation of Trapezoidal Rule

The line AB can be represented as,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}(x - x_0)$$

Or

$$y = y_0 + \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}(x - x_0)$$

كل الفكرة انه استخدم المعادلة العامة للخط المستقيم بس وصل ليها اذاي

احنا عارفين ان الميل بيساوي ايه

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

خلي الy في طرف لوحدها هتبقى

$$y = y_0 + m\,(x - x_0)$$

ودي هتبقى شكل تاني للمعادلة العامة لل*f(x)* او ال*y* طيب الميل للخط المستقيم في الدالة بتاعتنا بدلالة ال x_n والx_0 عبارة عن ايه

$$m = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

عوض في المعادلة العامة

$$y = y_0 + \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}\,(x - x_0)$$

بس كدة

Integrating above equation from x_0 to x_1 we get,

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}(x - x_0)\right] dx$$

فك القوس

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x - \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x_0 \right] dx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x + y_0 - \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x_0 \right] dx$$

معملش حاجة غير انه بدل مكان الy_0 بالterm اللى بعده

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x + y_0 - \frac{x_0 y_n - x_0 y_0}{x_n - x_0} \right] dx$$

ضرب الx_0 في البسط بتاعها والخطوة الجاية هيوحد مقامات

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x + \frac{(x_n - x_0) y_0 - (x_0 y_n - x_0 y_0)}{x_n - x_0} \right] dx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x + \frac{x_n y_0 - \cancel{x_0 y_0} + x_0 y_n \cancel{+ x_0 y_0}}{x_n - x_0} \right] dx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left[\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . x + \frac{x_n y_0 - x_0 y_n}{x_n - x_0} \right] dx$$

هنكامل عادي بقى مع ملاحظ ان $\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$ وال$\frac{x_n y_0 - x_0 y_n}{x_n - x_0}$ هو أصلا يعتبرو ثوابت ليه .. لان انت أصلا المفروض عارف قيمة الx_0 والx_nوالبتالي الy_0 والy_n فتقدر تقولي ايه اللى مشمعروف في المعادلة او يعتبر متغير غير الx مفيش وبالتالي لما بنكامل أي ثابت مثلا وليكن 2 التكامل بتاعها 2x لانك بتعمل تفاضل ال2x ب٢

$$I = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . \left(\frac{x^2}{2} \right) |_{x_0}^{x_n} + \frac{x_n y_0 - x_0 y_n}{x_n - x_0} \; x \; |_{x_0}^{x_n}$$

كدة كاملنا فقط ولكن بما انه تكامل محدد يبقى كل term هنعوض فيه بx_n مرة ومرة بx_0 ونطرح ال٢ من بعض يعنى كدة

$$I = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . \left(\frac{x_n^2}{2} \right) - \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . \left(\frac{x_0^2}{2} \right) + \frac{x_n y_0 - x_0 y_n}{x_n - x_0} \; x_n - \frac{x_n y_0 - x_0 y_n}{x_n - x_0} \; x_0$$

خد عالعوامل المشتركة

$$I = \frac{1}{2} . \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} . (x_n^2 - x_0^2) + \frac{x_n y_0 - x_0 y_n}{\cancel{x_n - x_0}} \cancel{(x_n - x_0)}$$

$$I=\frac{1}{2}.\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}.(x_n^2-x_0^2)+x_ny_0-x_0y_n$$

الجزء $x_n^2-x_0^2$ عبارة عن فقط فرق بين مربعين يعنى هيبقى كدة

$$I=\frac{1}{2}.\frac{y_n-y_0}{\cancel{x_n-x_0}}.\cancel{(x_n-x_0)}(x_n+x_0)+x_ny_0-x_0y_n$$

$$I=\frac{1}{2}(y_n-y_0)(x_n+x_0)+x_ny_0-x_0y_n$$

$$I=\frac{1}{2}(x_ny_n+x_0y_n-x_ny_0-x_0y_0)+x_ny_0-x_0y_n$$

$$I=\frac{x_ny_n+\cancel{x_0y_n}-\cancel{x_ny_0}-x_0y_0+\cancel{2}x_ny_0-\cancel{2}x_0y_n}{2}$$

$$I=\frac{x_ny_n-x_0y_0+x_ny_0-x_0y_n}{2}$$

$$I=\frac{x_ny_n+x_ny_0-x_0y_n-x_0y_0}{2}$$

بدلنا بس الterms وهناخد x_n عامل مشترك من اول ترمين و $-x_0$ من تاني ترمين

$$I=\frac{x_n(y_n+y_0)-x_0(y_n+y_0)}{2}$$

خد (y_n+y_0) عامل مشترك

$$I=\frac{(y_n+y_0)(x_n-x_0)}{2}$$

ممكن نكتبها ايه

$$\boldsymbol{I=(x_n-x_0)\left(\frac{(y_n+y_0)}{2}\right)=h\left(\frac{(y_n+y_0)}{2}\right)}$$

The general form

$$\boldsymbol{I=\int_{x_{(n-1)}}^{x_n}f(x)\,dx=(x_n-x_{(n-1)})\left(\frac{y_n+y_{n-1}}{2}\right)=h\left(\frac{y_n+y_{n-1}}{2}\right)}$$

Trapezoidal Rule from Newton-Cote's principle:

ملحوظة مهمة: الجزء ده من عندي للفهم فقط

$$I = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

Trapezoidal Rule just make the area under curve as one interval which means at $n = 1$, so, this means that we have only 2 (x,y) points, which means that all the degree of polynomial is $n - 1 = 2 - 1 = 1$ where is n is the number of points which means we only have one difference (i.e. we have Δy_0 only and $\Delta y_0 = y_1 - y_0$)

$$I = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0\right]$$

$$I = 1 \times h\left[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right] = h\left[\frac{2y_0 + y_1 - y_0}{2}\right] = h\left[\frac{y_0 + y_1}{2}\right]$$

Where

$$h = \frac{x_1 - x_0}{n} = \frac{x_1 - x_0}{1} = x_1 - x_0$$

$$I = (x_1 - x_0)\left[\frac{y_0 + y_1}{2}\right]$$

هنا انا الجزء ده من عندي للفهم ... عشان نفهم بس ان الأساس هو قانون newton cotes .... وجبنا قانون الtrapezoidal منه ... فهنا بنقول ان معنى ان يكون عندي فترة واحدة فقط يبقى انا معتمد على نقطتين (x,y) وفي الinterpolation كنا بنقول ان المعادلة اللى بنجيبها بنحدد هي هتبقى polynomial من الدرجة الكام عن طريق عدد النقط وكنا بنقول ال1- degree of polynomial = n والn هي عدد النقط ...

وبنا ان الtrapezoidal بتعتمد فقط على نقطتين يبقى اذن الfunction اللى بنتكلم عنها هتبقى كانها عبارة عن function of 1st degree او من الدرجة الأولى وكمان مشهيكون عندنا غير on difference يعنى مفيش غير انى اطر y_1-y_0 واللى هي Δy_0 فقط واي حاجة تاني غيرها اعتبرها بصفر

فلو جبت علاقة newton cote's وعوضت بالn وشلت أي term بعد ال$\frac{n}{2}\Delta y_0$ هتوصل لنفس العلاقة بتاعة الtrapezoidal.

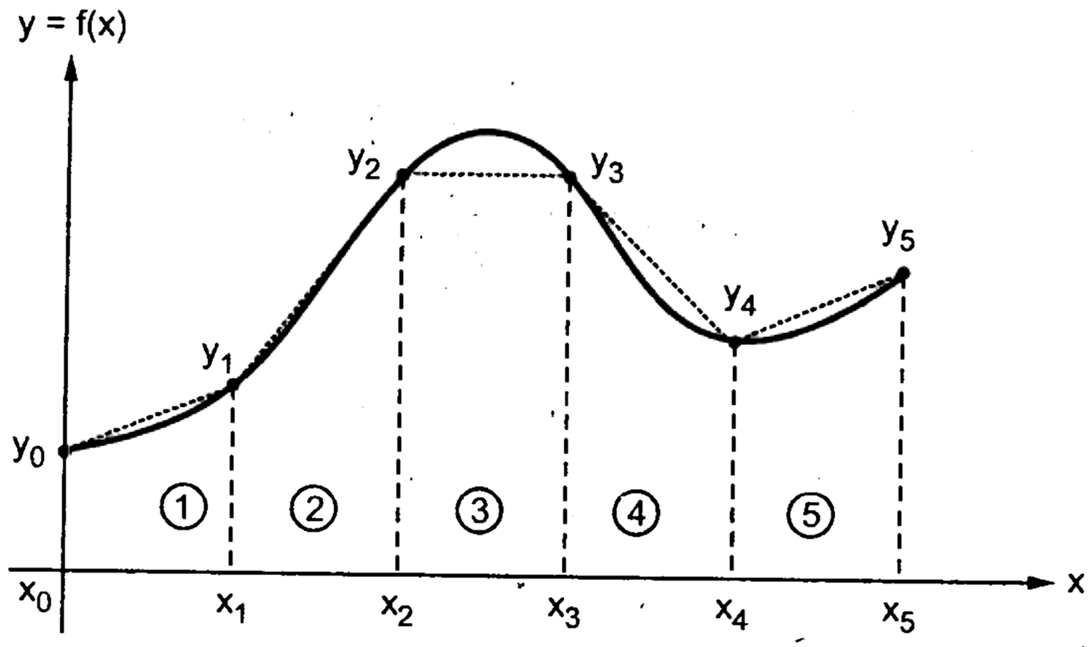
Second: Composite TRAPEZOIDAL RULE (n > 1):

We approximated the complete area under $f(x)$ by single trapezoid. Hence there is large area in the result. This error can be reduced by using trapezoids of smaller width. The following figure shows this concept. In this figure observe that the complete integration interval $[x_0, x_n]$ is divided into small intervals of equal width. Let this width be denoted by h. i.e.:

$$h = x_5 - x_4 = x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = \ldots = x_1 - x_o$$

هنا بيقول ان لما جبنا المساحة تحت الcurve بالtrapezoidal اعتبرنا المساحة كلها كانها Inverval واحدة والنتيجة اننا اهملنا مساحة كبيرة وده طبعا عامل error كبير ... فلو عايزين نقلل الerror ده ومنسبش مساحة كبيرة يبقى الأفضل اننا هنقسم المساحة تحت الcurve لاكتر من trapezoidal وبالتالي المساحة المهملة هتكون اقل بكتير ... وهيكون المساحة تحت الcurve عبارة عن مجموعة مساحات الtrapezoidals يعنى كانك هتجمع تكامل ده + تكامل ده وهكذا ..

انا هكتب طريقة الاستنتاج عشان سهلة بس هي مشعلينا



Let's take the previous curve as an example in which the curve is divide into 5 intervals

$$I = \int_{x_0}^{x_5} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_5} f(x)\,dx$$

Where the integration for each trapezoidal can be given by the following relation

$$I = \int_{x_{(n-1)}}^{x_n} f(x)\,dx = \left(x_n - x_{(n-1)}\right)\left(\frac{y_n + y_{n-1}}{2}\right) = h\left(\frac{y_n + y_{n-1}}{2}\right)$$

where

$$x_n - x_{(n-1)} = h$$

So,

$$I = \int_{x_0}^{x_5} f(x)\, dx$$

$$= h\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + h\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + h\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + h\left(\frac{y_3 + y_4}{2}\right) + h\left(\frac{y_4 + y_5}{2}\right)$$

هناخد $\frac{h}{2}$ عامل مشترك

$$I = \int_{x_0}^{x_5} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + y_3 + y_4 + y_4 + y_5]$$

$$I = \int_{x_0}^{x_5} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5]$$

$$I = \int_{x_0}^{x_5} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_5 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)]$$

This equation is derived for five trapezoids. If can be generalized as follows:

$$\boldsymbol{I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]}$$

Example 1:

Fin the following integration using Trapezoidal Rule at $\boldsymbol{n = 1}$ and at $\boldsymbol{n = 4}$

$$\int_0^2 x^2 dx$$

SOLUTION

The exact solution is

$$I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

Using trapezoidal Rule at $\boldsymbol{n = 1}$

$$I = \int_0^2 x^2 dx = h\left(\frac{y_1 + y_0}{2}\right)$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{x_1 - x_0}{1} = \frac{2-0}{1} = 2$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x_0 = 0}$	$\boldsymbol{x_1 = 2}$
$\boldsymbol{y}$	$y_0 = 0$	$y_1 = 2^2 = 4$

$$\therefore I = \int_0^2 x^2 dx = 2\left(\frac{4+0}{2}\right) = 4$$

$$\varepsilon_{abs} = |True\ value - approximate| = \left|4 - \frac{8}{3}\right| = 1.33$$

هنا كل اللى عملناه حسبنا الh وطبعا حسبنا الy_0 والy_n من الfunction اللى جوة التكامل يعنى من الx^2 وناخد بالنا من دي كويس. وبعد كدة عوضنا في المسالة علطول.

Using trapezoidal Rule at $\boldsymbol{n = 4}$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$$

$$I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$$

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{x_4 - x_0}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x_0 = 0}$	$\boldsymbol{x_1 = 0.5}$	$\boldsymbol{x_2 = 1}$	$\boldsymbol{x_3 = 1.5}$	$\boldsymbol{x_4 = 2}$
$\boldsymbol{y}$	$y_0 = 0$	$y_1 = \mathbf{0.5}^2 = 0.25$	$y_2 = 1^2 = 1$	$y_3 = 1.5^2 = 2.25$	$y_4 = 2^2 = 4$

$$I = \int_{x_0=0}^{x_4=2} x^2\, dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)]$$

$$I = \int_{x_0=0}^{x_4=2} x^2\, dx = \frac{0.5}{2}[0 + 4 + 2(0.25 + 1 + 2.25)] = 2.75$$

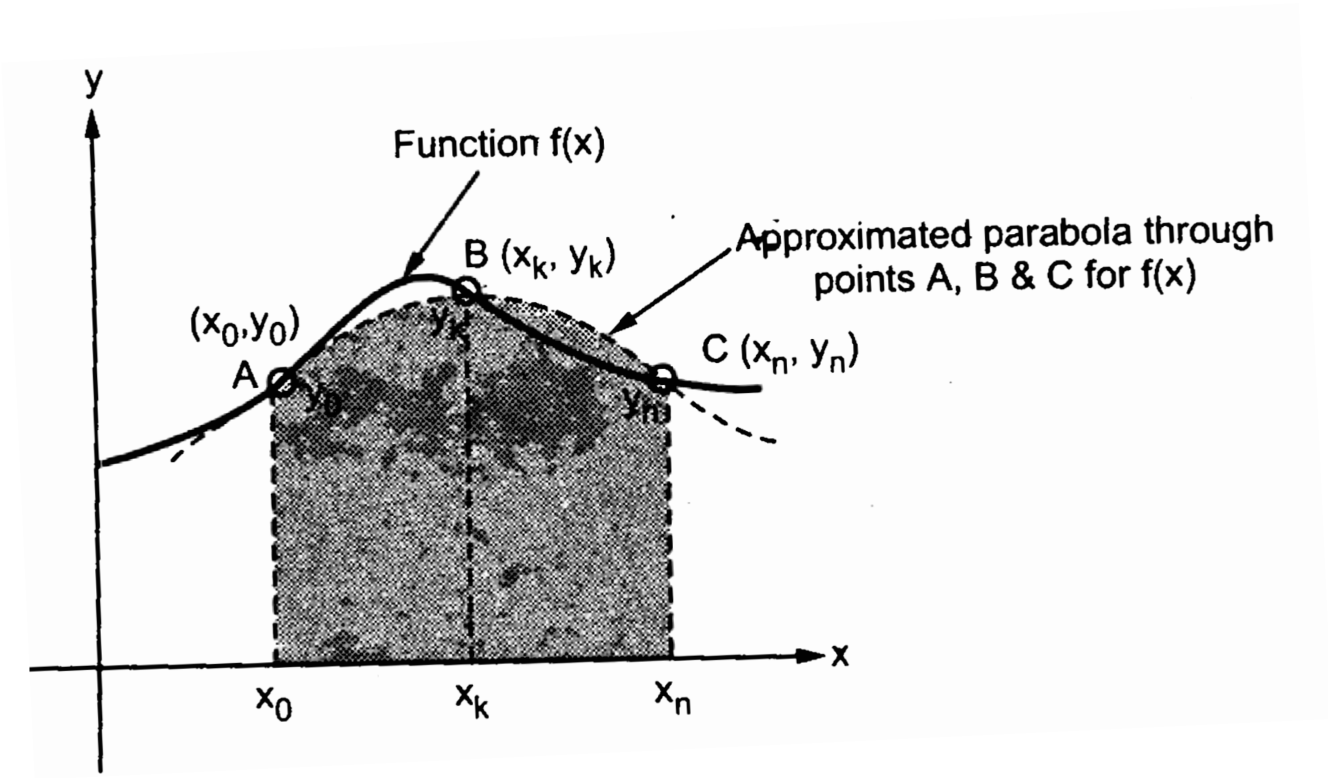
$$\varepsilon_{abs} = |True\ value - approximate| = \left|2.75 - \frac{8}{3}\right| = 0.0833$$

طبعا نلاحظ اننا لما قسمنا الدالة ل٤ فترات الerror بقى قليل

Third: Simpson $\frac{1}{3}$ Rule $(n = 2)$:

Principle

In trapezoidal rule we approximate the curve by straight line between two points. To be more accurate a parabola can be used. One more point is taken at the center of (x_0, y_0) and (x_n, y_n). These three points are then approximated by a parabola. The area under this parabola approximately gives the integration of the function.



احنا قولنا من الأول اننا بنجيب القيمة التقريبية للمساحة تحت الcurve اما انى استخدم الخط المستقيم ذي الtrapezoidal او انى استخدم الparabola اللى هي ∩ .... صح كدة ... كل الموضوع ان الtrapezoidal بيعتمد على انه بيحول المساحة تحت الcurve الى شبه منحرف او trapezoidal لكن simpson بيحولها الparabola بس كدة

كمان الtrapezoidal كان بيحول المساحة تحت الcurve الى شبه منحرف وبيعتبره فترة واحدة لكن simpson بيحولها لparabola وبيقسمها ٢ يعنى بيخليها فترتين يعنى الn=2 وطبعا ليها برهان بطريقة واحدها او اني استخدم الnewton cote's واعوض طبعا عن الn = 2 وطبعا ده معناه انى بعتمد على ٣ نقط فقط وده معناه انى عندي 2 differences يعنى عندي $y_1 - y_0$ ودي اللى هي Δy_0 وعندي ال$y_2 - y_1$ ودي اللى هي $\Delta^2 y_0$ وهتجيب التكامل منها وهنشوفها دلوقتى بس البرهان مشعلينا لكن للفهم فقط

Derivation of Simpson $\frac{1}{3}$ Rule from Newton-Cote's principle:

ملحوظة مهمة: الجزء ده من عندي للفهم فقط

$$I = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

Simpson $\frac{1}{3}$ Rule just make the area under curve as 2 interval which means at $n = 2$, so, this means that we have only 3 (x,y) points, which means that the degree of polynomial is $n - 1 = 3 - 1 = 2$ where is n is the number of points which means we only have 2 differences difference (i.e. we have

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \text{ and}$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0\right]$$

$$I = 2 \times h\left[y_0 + \frac{2}{2}(y_1 - y_0) + \frac{2(2 \times 2 - 3)}{12}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$I = 2h\left[y_0 + (y_1 - y_0) + \frac{2}{12}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$I = 2h\left[y_0 + (y_1 - y_0) + \frac{1}{6}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right]$$

$$I = 2h\left[y_0 + y_1 - y_0 + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{6}\right]$$

معملتش حاجة فاخر خطوة غير اني حطيت الاقواس عالبسط عادي عشان تبقى واضحة وبعد كدة هنوحد المقامات على ٦

$$I = 2h\left[\frac{6y_0 + 6(y_1 - y_0) + y_2 - 2y_1 + y_0}{6}\right]$$

$$I = 2h\left[\frac{\cancel{6y_0} + 6y_1 \cancel{- 6y_0} + y_2 - 2y_1 + y_0}{6}\right]$$

$$I = 2h\left[\frac{4y_1 + y_2 + y_0}{6}\right] = 2h\left[\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}\right]$$

$$I = \frac{2h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\boldsymbol{I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

So,

$$I = \int_{x_{(n-2)}}^{x_n} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Composite Simpson $\frac{1}{3}$ Rule:

The result given by the equation of Simpson $\frac{1}{3}$ Rule is quite approximate, since only one parabola approximates the complete range of integration. Hence many such parabolas are approximated over the complete range of integration. Each approximated parabola is then integrated independently. The individual results of integration are added to give · the final result. i.e.,

في الcomposite trapezoidal كنا بنقسم المساحة تحت الcurve الى اكتر من شبه منحرف وكل واحد عبارة عن one interval لكن في الsimpson كل الفكرة اننا بنقسم الشكل لاكتر من parapola وكل واحدة مقسومة الى فترتين يعنى لو عندي شكل متقسم الى 2 parapola وكل واحدة مقسومة ٢ يبقى كاني عندي ٤ فترات

طيب هنحسبها اذاي دي ... لو عندي مثلا 2 parabola يبقى كانى بجمع العلاقة اللى فاتت مرتين لان مساحة كل parabola هجيبها من العلاقة اللى فاتت ذي ما عملنا في الtrapezoidal وجمعنا مساحات كل شبه منحرف على بعض.

Suppose that we have a curve and the area under curve is approximated by 3 parabolas which means we have x_0 to x_6

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)\, dx$$

طيب ليه التكامل اللى بعد يساوي مكتوب من x_0 لx_2 مثلا لو هتكلم على اول واحد عشان احنا قولنا ان كل parabola متقسمة لفترتين يعني كل واحدة فيها 3 x يعني ٣ نقط يعني مثلا الأولى من x_0 لx_2 والتانية من x_2 لx_4 وهكذا

Where the integration for each parabola can be given by the following relation

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)\, dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)\, dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)\, dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_6 + 4y_1 + 4y_3 + 4y_5 + 2y_2 + 2y_4]$$

$$I = \int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]$$

So,

$$\boldsymbol{I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx}$$
$$\boldsymbol{= \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})\right]}$$

Here n is the number of intervals taken over (x_0, x_n). h is the spacing between two nearby points. They are related as,

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

The above integration formula can be written as,

$$\boldsymbol{I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[(Sum\ of\ first\ and\ last\ ordinated)\right.}$$
$$\boldsymbol{+4(sum\ of\ odd\ ordinates)}$$
$$\boldsymbol{\left. +\ 2(sum\ of\ even\ ordinates)\right]}$$

This formula is used when there are even number of segments and an odd number of points.

الكلام ده معناه لما يكون عندي عدد فردي من النقاط وعدد المسافات اللى بينهم مزدوج يعنى مثلا انا لما يكون عندي ٥ نقط الفروق اللى بينهم او المسافات اللى بينهم عبارة عن ٤ مسافات فاقدر بين كل ٣ نقط احط parabola

Fourth: Simpson $\frac{3}{8}$ Rule $(n = 3)$:

Principle

In Simpson's $\frac{1}{3}$ Rule, the area between 3 points is approximated by one parabola that is divided into 2 intervals, in Simpson's $\frac{8}{3}$ Rule, the area between 4 points that is through $x_0, x_1, x_2, and\ x_3$ is approximated by one parabola that is divided into 3 intervals between the points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

This means that 4 points is interpolated by a polynomial of degree 3 (i.e. n-1 = 4 – 1 = 3) and this means we have 3 differences.

في قاعدة سيمبسون ٣/١ كنا بنعمل تقريب للمساحة تحت الشكل بين كل ٣ نقطتين ب parabola واحدة فقط وبنقسم كل parabola لفترتين وبالتالي كاننا بنعمل Interpolation بمعادلة من الدرجة التانية

لكن في سيمبسون ٣/٨ بنعمل تقريب للمساحة تحت الشكل بين ٤ نقط بparabola واحدة وبنقسم كل واحدة ل٣ فترات وبالتالي هنا بنعمل interpolation من الدرجة التالتة وعندنا ٣ فروق

وبالتالي ممكن نجيبها برضو من newton cotes وانا هنا بعمل الاثبات للفهم مشاكتر ... لكن احنا علينا المعادلة النهائية.

Derivation of Simpson $\frac{8}{3}$ Rule from Newton-Cote's principle:

ملحوظة مهمة: الجزء ده من عندي للفهم فقط

$$I = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

Simpson $\frac{8}{3}$ Rule just make the area under curve as 3 interval which means at $n = 3$ between 3 points, so, this means that we have only 4 (x,y) points, which means that the degree of polynomial is $n - 1 = 4 - 1 = 3$ where is n is the number of points which means we only have 3 differences difference

$$\boldsymbol{\Delta y_0 = y_1 - y_0}$$

$$\boldsymbol{\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0}$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0)$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = [(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)] - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = [y_3 - 2y_2 + y_1] - (y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - y_2 + 2y_1 - y_0$$

$$\boldsymbol{\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}$$

So, at $\boldsymbol{n = 3}$

$$I = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = nh\left[y_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0\right]$$

$$I = 3 \times h\left[y_0 + \frac{3}{2}\Delta y_0 + \frac{3(2\times 3-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{3(3-2)^2}{24}\Delta^3 y_0\right]$$

$$I = 3 \times h\left[y_0 + \frac{3}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{24}\Delta^3 y_0\right]$$

$$I = 3 \times h\left[y_0 + \frac{3}{2}\Delta y_0 + \frac{3}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{8}\Delta^3 y_0\right]$$

$$I = 3h\left[y_0 + \frac{3}{2}(y_1 - y_0) + \frac{3}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{1}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right]$$

$$I = 3h\left[y_0 + \frac{3(y_1 - y_0)}{2} + \frac{3(y_2 - 2y_1 + y_0)}{4} + \frac{1(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)}{8}\right]$$

معملتش حاجة فاخر خطوة غير انى حطيت الاقواس عالبسط عادي عشان تبقى واضحة وبعد كدة هنوحد المقامات على٨

$$I = 3h\left[\frac{8y_0 + 12(y_1 - y_0) + 6(y_2 - 2y_1 + y_0) + (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)}{8}\right]$$

$$I = 3h\left[\frac{8y_0 + 12y_1 - 12y_0 + 6y_2 - 12y_1 + 6y_0 + y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{8}\right]$$

$$I = \frac{3h}{8}\left[\cancel{8}y_0 + \cancel{12y_1} - \cancel{12y_0} + \cancel{6}y_2 \cancel{- 12y_1} + \cancel{6y_0} + y_3 - \cancel{3y_2} + 3y_1 - \cancel{y_0}\right]$$

$$I = \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right]$$

So,

$$\boldsymbol{I = \int_{x_{(n-3)}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left(y_{n-3} + 3y_{n-2} + {+3}y_{n-1} + y_n\right)}$$

Composite Simpson $\frac{3}{8}$ Rule:

Here, we will approximate the curve by making a parabola for each 4 points

نفس اللى عملناه في سيمبسون ٣/١ هنعمله هنا ... يعنى هنعمل بين كل ٤ نقط parabola واحدة وكل واحدة مقسمة ٣ فترات وطبعا هنجيب مساحة كل parabola لوحدها ونجمعهم على بعض

Suppose that we have a curve and the area under curve is approximated by 3 parabolas which means we have x_0 to x_9

$$I = \int_{x_0}^{x_9} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)\,dx + \int_{x_6}^{x_9} f(x)\,dx$$

انا هنا بفرض عندي شكل مكون من ١٠ نقط وانا هعمل عمل تقريب للمساحة اللى تحته ب٣parabola بس بين كل ٤ نقط ... طيب اذاي بقى ؟؟؟ يعنى هيكون فيه Parabola بين النقط x_0, x_1, x_2, x_3 ومجيش تقول والتانية هتبدا من x_4 طيب وبالنسبة للمسافة بين الx_3 وx_4 هتعمل فيها ايه ؟؟؟ يبقى الparabola التانية هتبقى بين x_3, x_4, x_5, x_6 وهكذا

Where the integration for each trapezoidal can be given by the following relation

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \frac{3h}{8}(y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$I = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 + y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 + y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9]$$

$$I = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9]$$

$$I = \frac{3h}{8}[y_0 + y_9 + 3y_1 + 3y_2 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_7 + 3y_8 + 2y_3 + 2y_6]$$

$$I = \frac{3h}{8}[y_0 + y_9 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8) + 2(y_3 + y_6)]$$

So,

$$\boldsymbol{I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[y_0 + y_n + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + \cdots) + 2(y_3 + y_6 + y_{9+\ldots})\right]}$$

Here n is the number of intervals taken over (x_0, x_n). h is the spacing between two nearby points. They are related as,

$$n = \frac{x_n - x_0}{h}$$

The above integration formula can be written as,

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \\ &= \frac{3h}{8}\,[(Sum\ of\ first\ and\ last\ ordinated) \\ &+ 3(sum\ of ordinates\ that\ are\ not\ dividable\ by 3) \\ &+\ 2(sum\ of ordinates\ that\ are\ dividable\ by 3)] \end{aligned}$$

هنا العلاقة الأخيرة معناها ايه .... ان اللى بين القوسين عبارة عن مجموع اول واخر رقم + ٣ مضروبة في الy اللى ارقامها لاتقبل القسمة على ٣ + ٢ مضروبة في مجموع الy اللى ارقامها تقبل القسمة على ٣

Fifth: Midpoint Rule:

احنا ماخدناهاش بالتفصيل ولكن اخدنا العلاقة بتاعتها فقط ومشعارف جابها منين ولكن العلاقة عبارة عن

$$I = \int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times (b-a)$$