Alberto Coto

$\sqrt{fm}=$

fortalece² tu mente

Entrena tu cerebro con:

juegos de lógica e ingenio, problemas de cálculo y matemáticos, paradojas y pensamiento lateral, criptogramas y enigmas, cuadrados mágicos, sudokus…

EDAF

ALBERTO COTO

FORTALECE TU MENTE²

**Entrena tu cerebro con
juegos de lógica e ingenio, problemas
de cálculo y matemáticos, paradojas
y pensamiento lateral, criptogramas y
enigmas, cuadrados mágicos, sudokus…**

EDAF

MADRID - MÉXICO - BUENOS AIRES - SAN JUAN - SANTIAGO - MIAMI

2007

ISBN de su edición en papel: 978-84-414-1986-5

Diseño de la cubierta: © Ricardo Sánchez

Primera edición en libro electrónico (epub): mayo de 2010

ISBN: 978-84-414-2837-9 (epub)

Conversión a libro electrónico: Kiwitech Company

A mi sobrino Daniel, que con sus siete años de edad me recuerda en cada encuentro la importancia de aprender jugando.

Índice

Agradecimientos

DE la misma forma que es importante hacer ejercicio físico, también lo es hacer ejercicio mental, aunque esta segunda idea no esté tan extendida en nuestra sociedad como la primera. Por este motivo, he querido escribir el presente libro con el objetivo de que disfrutes de las «aventuras» propuestas, ejercites tu mente y te procures beneficios varios.

Era una necesidad escribirlo, y quiero mostrar mi agradecimiento a todos los que me habéis animado en esta tarea.

Un primer agradecimiento para Chari Aparici, por leer con atención el borrador y darme su valiosa opinión.

Mi gratitud a todos mis alumnos, tanto a los que asistís a mis cursos y charlas, como a los que hacéis el curso a través de mi página web.

A mi amigo Paco González, que, aparte de ser un gran matemático y un excelente mago, domina el arte de los cuadrados mágicos como nadie.

A todos los amigos del continente americano, que en la gira de mi anterior libro, *Entrenamiento mental*, me habéis mostrado un afecto que me ha calado muy hondo.

Y a ti, querido lector, deseando que disfrutes con la presente obra, y siendo siempre consciente de que eres y serás lo más importante y mi mayor motivación.

Introducción del autor

Si cuidas tu cerebro, tu cerebro cuidará de ti.

LA matemática habría que presentarla con toda su belleza y no como algo simplemente memorístico, que implica ejercicios sobre pizarra y exámenes. Que es una materia muy bonita lo saben todas aquellas personas que la han descubierto, pero evidentemente hay que levantar ese velo que la oculta para poder apreciar tanta belleza y majestuosidad.

En mi anterior libro, *Entrenamiento mental*, exponía las mejores técnicas para potenciar el cálculo, así como muchas situaciones de la vida diaria en las que interviene la matemática. Con este nuevo libro pretendo que hagas gimnasia mental para que obtengas beneficios en todo aquello que te propongas: mejorar tu toma de decisiones, plano económico, ventajas en exámenes tipo oposición, o simplemente ver el mundo también con ojos matemáticos, que no sería poca cosa, te lo aseguro.

Pues bien, sabemos de la importancia de hacer ejercicio físico para mejorar o mantener un buen estado físico, pero no está tan extendida, ni mucho menos, la realización de gimnasia mental para gozar de una mejor salud mental.

Por esta razón he querido escribir el presente libro, con el que espero puedas ejercitar tu cerebro enfrentándote a cada reto con la mente bien despierta, y con el objetivo de tratar de resolver los enigmas que se van planteando. Y con los que no podamos, analizando también las soluciones y tomando nota de las mismas.

El libro consta de un total de siete capítulos, y en todos ellos ejercitarás tu mente, tu capacidad de concentración, tu imaginación y, por añadidura, tu espíritu.

Un primer capítulo nos lleva por el mundo de los problemas de lógica e ingenio. Algunos son clásicos y su resolución requiere mucha astucia y agilidad mental.

Un segundo capítulo lo he querido dedicar al pensamiento lateral. Esto es, a tratar de buscar caminos distintos a los habituales en la resolución de los pequeños enigmas. Muchas veces resultarán graciosos y un tanto peculiares, pero también se trata de arrancar una sonrisa.

El tercer gran apartado trata sobre problemillas más «numéricos»: en forma de series numéricas, criptogramas y ejercicios de cálculo. Todo ello es muy importante para potenciar tu capacidad en cálculo mental y agilizar tu cerebro. Además, son problemas que muchas veces aparecen en exámenes para acceder a puestos de trabajo, con las consiguientes ventajas que este entrenamiento en concreto te reportará.

El cuarto capítulo lo he dedicado a las paradojas. Tema este que nos lleva a caer en contradicciones lógicas, que incluso pusieron en jaque a los más grandes pensadores y matemáticos. No dejes de analizarlas.

El quinto nos conduce hacia los cuadrados mágicos, unas maravillas numéricas que han apasionado a matemáticos y artistas, convirtiéndose en mucho más que simples pasatiempos numéricos. Te hablaré de sus historias, de cómo resolverlos, y tendrás numerosos ejercicios para que intentes solventarlos, fortaleciendo así tu cálculo mental.

Un sexto capítulo versa sobre los populares sudokus, unos pasatiempos que se han puesto muy de moda en los últimos años y con los que también podrás ejercitarte.

Y en el último capítulo hablaremos brevemente de los kakuros, que aunque no hayan alcanzado la popularidad de los sudokus, tienen el atractivo añadido de que también hay un cierto ejercicio aritmético.

Ah, y un toque personal al final de cada uno de los capítulos; siempre he considerado importante conocer un poquito de la vida de los genios, para que disfrutes con siete biografías de otros tantos héroes de la matemática y del pensamiento lógico.

Este libro, en definitiva, es pura vitamina para tus neuronas. Con él fortalecerás tu pensamiento matemático y ganarás mucha agilidad mental. Podrás sorprender a tu familia y amigos con los juegos ingeniosos que te encontrarás, además de conocer muchas cosas relacionadas con el pensamiento matemático y con la historia de la madre de las ciencias.

CAPÍTULO 1
Juegos de lógica e ingenio

La casualidad favorece a las mentes entrenadas.

CHARLES BABBAGE

1.1. LA IMPORTANCIA DE ESTOS JUEGOS

PARA llegar a aficionarse a la matemática y disfrutar con ella, no solo hay que empezar por enfrentarse a la abstracción que la materia conlleva, conviene antes divertirse y exprimirse un poco el cerebro, de esta forma adquiriremos una mente matemática mucho más potente.

Por este motivo, considero que es fundamental tratar de resolver todos esos problemas de lógica que muchas veces tenemos delante y que no atacamos por pereza. Son ejercicios que nos abren la mente, haciéndonos pensar y poniendo nuestras neuronas a tope. Además, resolverlos produce una gran satisfacción.

A continuación, te propongo una serie de ejercicios, alguno de los cuales quizá ya lo conozcas, pero no por ello dejan de ser interesantes. Ah, y aunque al final del libro tienes las soluciones, intenta resolverlos sin acudir a ellas antes de tiempo.

Y una última cosa, vete poco a poco, trata de solventarlos uno a uno y sin prisas, analizando detenidamente las soluciones. Recuerda, tu cerebro te lo agradecerá.

1.2. PREPARADO, LISTO… ¡YA!

1. EL CAZADOR CAZADO

En muchas ocasiones nos encontramos con personas que hacen sus apuestas en la calle, de forma semiclandestina. Pues bien, uno de estos apostadores tenía en un recipiente varias bolas de dos colores diferentes: blancas y negras. La apuesta que propuso al público es que colocaría dos bolas en una pequeña bolsa, una de color blanco y la otra de color negro.

A continuación pidió un voluntario que se animase a apostar. Si extraía de la bolsa la bola negra, él mismo ganaría la apuesta, que consistía en 100 euros. Si, por el contrario, elegía la blanca, sería el voluntario quien ganase los 100 euros en juego.

Nadie parecía querer salir, a sabiendas de que era extraño el hecho de que aquel apostador se jugase tal apuesta a un 50%. Pero de pronto apareció un joven que aceptó el reto propuesto.

El tramposo cogió dos bolas, una de cada color, y se dispuso a introducirlas en la bolsa, pero, en un alarde de destreza absoluta, dio el cambiazo e introdujo dos bolas de color negro.

Nuestro hábil joven intuyó que eso iba o podía suceder, pero no dijo nada al respecto, a sabiendas de que ganaría la apuesta pese a que parecía imposible.

Y ahí va la pregunta: ¿Sabrías cómo consiguió ganar la apuesta nuestro héroe?

2. LOS TRES CONDENADOS

Para este problema tienes que concentrarte, poner a tope tus neuronas, y a cavilar.

Tres ladrones (A, B y C) fueron condenados a diez años de prisión por robo. El rey, que adoraba la astucia y la inteligencia, propuso el siguiente reto con el objetivo de liberar al que mayor pericia intelectual demostrase:

Os muestro cinco tiras de tela, dos son negras, y tres de color blanco. Cada uno de vosotros llevará pegada en la espalda una de las cinco tiras. Una vez hecho esto, podréis ver la tira que lleva cada uno de los otros dos, pero no os comunicaréis. Pues bien, el primero que sepa decir de qué color es la tira que lleva pegada en su propia espalda y lo razone de forma adecuada quedará liberado de la pena impuesta.

El preso A vio que las tiras de B y C eran blancas y a los pocos segundos pidió ser llevado ante el monarca. El preso A acertó el color de la tira que llevaba y lo expuso de forma muy adecuada.

¿Sabrías decir qué es lo que dijo y cómo lo razonó?

3. LAS DOS TRIBUS

En el Amazonas existen dos tribus, los zipis y los zopes, con peculiaridades únicas. Una de ellas es que los zipis mienten siempre, mientras que los zopes nunca mienten.

Un buen día, un explorador navegaba por un río con un indígena de una de las dos tribus. En la orilla se divisó a otro indígena, que se apreciaba que era de la tribu contraria a la del indígena que iba en la barca.

—*¿De qué tribu eres tú?* — preguntó el explorador al indígena que estaba en la orilla.

El indígena de la orilla respondió, pero el explorador no pudo oírlo por la lejanía. Le preguntó entonces al que iba en la barca sobre lo que había dicho, y este le respondió:

—*Ha dicho que es un zope.*

Y ahí va la pregunta que te propongo: ¿Sabrías decir a qué tribu pertenece cada uno de los dos indígenas?

4. A CRUZAR EL RÍO

Vamos a imaginarnos la siguiente situación:

Un barquero tiene que atravesar un río en su pequeña barca llevando consigo un lobo, una oveja y una col. Pero en cada viaje solo caben o él y el lobo, o él y la oveja, o él y la col. Y, además, en ningún caso puede dejar solos en la orilla al lobo y a la oveja (el primero se comería a la segunda), ni a la oveja y la col (la primera se comería a la segunda).

¿Cómo crees que el barquero ha conseguido el objetivo de pasar a los tres a la otra orilla?

5. UN PROBLEMA EN TELEVISIÓN

Que en todo hay matemáticas es algo de lo que no me cabe la menor duda. Figúrate que muchas veces ni lo percibimos, pero incluso en concursos de televisión, teniendo una cierta soltura y agilidad matemática, podemos jugar con ventaja. Valga de ejemplo el siguiente problema que se da con cierta frecuencia en la tele y que, de hecho, generó mucha polémica en un concurso norteamericano, de nombre *Monty Hall.*

En España tuvimos un famoso programa que nos va a servir para ilustrarlo, y en el que el premio malo era la calabaza, se trataba del «UN DOS TRES».

Imagina que te encuentras en el «UN DOS TRES» de televisión y se te ofrece la posibilidad de escoger entre tres puertas. Detrás de una de ellas está un espléndido apartamento en el Mediterráneo. Y detrás de las otras dos puertas hay una calabaza en cada una de ellas.

Eliges, por ejemplo, la puerta número 1, pero, el presentador, que sabe lo que hay tras las otras dos puertas, abre la puerta número 2, tras la que hay… una hermosa calabaza. En este momento el presentador te pregunta:

—*¿Mantienes tu elección o prefieres cambiar a la puerta número 3?*

Y mi pregunta es:

¿Qué es mejor para ti?

a) Mantener tu primera elección, es decir, abrir la puerta número 1.

b) Cambiar tu elección y aceptar la propuesta del presentador, es decir, cambiar a la número 3.

c) Piensas que ambas opciones son iguales.

6. LOS OCHO PANES

Cuenta la leyenda que vagaban dos beduinos por el desierto, camino de Bagdad, cuando encontraron a un jeque tumbado en la arena con síntomas evidentes de hambre y sed. Cuando se acercaron a preguntarle qué le había sucedido y a ofrecerle un trago de agua, este les dijo:

—*Fui asaltado y robado por unos ladrones que me arrebataron todo lo que llevaba. Ahora estoy muerto de hambre y sed, pero si me socorréis, os prometo que os recompensaré tan pronto como lleguemos a destino, pues soy un hombre rico.*

Los beduinos juntaron su comida; uno de ellos llevaba cinco panes, mientras el otro llevaba tres. Ante esto, el hombre les dijo:

—*Si compartimos los ocho panes a partes iguales, yo os prometo que tan pronto lleguemos a Bagdad os recompensaré con ocho monedas de oro, una por cada pan compartido y proporcional a los panes que habéis puesto cada uno.*

Así lo hicieron y, al llegar a Bagdad, el hombre entregó cinco monedas de oro al primer beduino y tres monedas de oro al segundo beduino, pues así de fácil se hacía el cálculo.

—*El reparto no es correcto* — dijo el primer beduino—, *yo aporté cinco panes y me corresponden por tanto siete monedas. Mi compañero solo aportó tres panes y le corresponde una moneda.*

¿Se te ocurre qué explicación se le pudo ocurrir para justificar lo que parece injustificable?

7. LAS TRES HIJAS DE JUAN

Hacía muchos años que Pedro y Juan no se veían, habían sido muy amigos durante su etapa en el instituto y siempre estaban dispuestos a plantearse problemas lógicos.

—*¿Qué tal, Juan, cuántos años sin verte? Cuéntame, ¿te has casado, tienes hijos?*

A lo que Juan le respondió:

—*Sí, me casé y tengo tres hijas.*

—*¿Y qué edades tienen?* —continuó Pedro.

—*El producto de las edades de las tres es 36, y su suma es el número del portal que tienes tras de ti* —continuó Juan.

—*Hmmm, me falta un dato* —requirió Pedro.

—Pues… la mayor toca el piano.

¿Sabrías decir cuál es la edad de cada una de las tres hijas de Juan?

8. El caracol y el pozo

Este problemilla es muy popular, a ver si consigues resolverlo.

Un caracol se cayó dentro de un pozo de diez metros de profundidad. Durante el día consigue a duras penas escalar dos metros, pero durante la noche resbala y retrocede un metro. Y ahí va la pregunta:

¿Cuántos días tardará en subir hasta lo alto del pozo?

9. La balanza sin pesas

Imagínate que tenemos 27 bolas de billar de un peso aparentemente igual, y digo aparente, porque hay una que está defectuosa y pesa un poquito más que el resto. Ahora, imagínate que tenemos una balanza para poder pesarlas, pero no disponemos de pesas. Y ahí va la pregunta:

¿Sabrías con solo tres pesadas determinar cuál es la bola que está defectuosa?

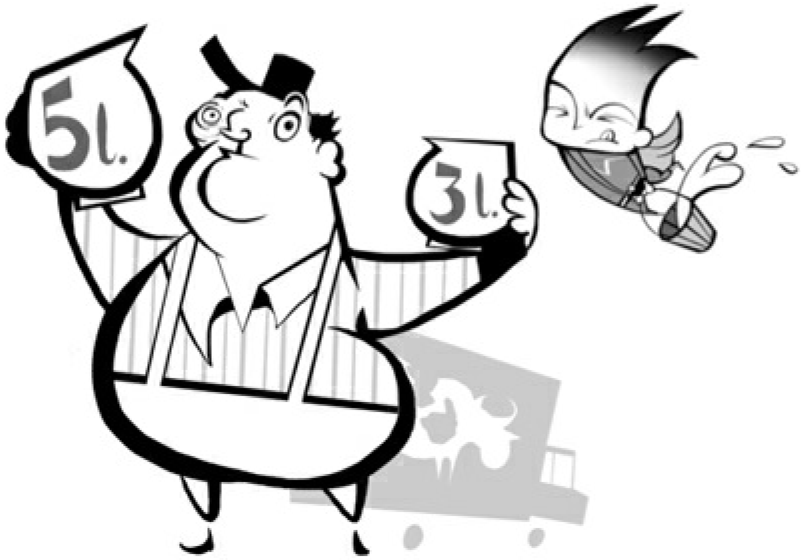
10. El mendigo y las colillas

Un mendigo, empedernido fumador, necesita 5 colillas para hacerse un cigarrillo, y hasta el momento ha recogido 25 colillas. Y ahí va la pregunta del millón:

¿Cuántos cigarrillos podrá acabar fumándose con esas 25 colillas que tiene?

11. El lechero

Un lechero se encuentra ante un dilema: tiene que medir un litro de leche pero solamente tiene dos jarras, una con capacidad para tres litros y otra con capacidad para cinco litros. ¿Cómo podría conseguirlo utilizando estos recursos y sin desperdiciar la leche?



12. El número de cuatro dígitos

Mario Pérez era un famoso buscatesoros. Un buen día se encontró con una caja que contenía un importante botín, pero no había forma de abrirla. Entonces pudo ver una nota que decía:

La combinación para abrir la caja es un número de 4 dígitos. Como tendrías 10.000 combinaciones distintas y quiero que sea tu astucia la que abra el cofre, te proporciono las siguientes pistas:

Número	**Perfecto**	**Casi**
2053	1	1
9215	0	2
5168	0	1
2089	2	0

En la columna *Número* puedes ver números de cuatro dígitos de las características del que tienes que encontrar.

La columna *Perfecto* indica el número de dígitos que forman parte del número por descubrir y que están en su sitio.

La columna *Casi* indica el número de dígitos que forman parte del número secreto pero que no están en su justo lugar.

¿Te atreverías a intentar ser tú quien abra la caja y acceda al tesoro encontrando, al menos, una combinación válida?

13. Los novios de Isabel

Isabel tiene dos pretendientes, Carlos y Luis, y a ella le gustan por igual. Para visitar a Carlos tiene que tomar un determinado tren que pasa cada 10 minutos, mientras que para visitar a Luis tiene que tomar otro tren que va en sentido contrario y que también pasa cada 10 minutos.

Como le da igual visitar a uno u otro, lo que hace es tomar el tren que pase primero. Sin embargo, aun tomando el tren de esta forma, visita a Carlos un 90% de las veces, y a Luis solo un 10%. Y ahí va la pregunta que has de intentar resolver:

¿Sabrías decir por qué visita mucho más a Carlos que a Luis si el número de trenes en una y otra dirección es el mismo?

14. El oráculo

Los antiguos griegos depositaban en los oráculos de los dioses tanta fe que era muy difícil que, ante cualquier decisión importante, no lo consultasen con los oráculos para recibir su aprobación.

Un buen día, un campesino acudió ante el oráculo para saber si la compra de una oveja y un cordero resultarían propicios para él. Ante la consulta, el oráculo le hizo situarse frente al espejo sagrado y le dio respuesta:

Ambos animales se reproducirán de tal forma que llegarán hasta que los corderos multiplicados por las ovejas den un producto que, reflejado en el sagrado espejo, muestre el número del rebaño completo.

Dicho esto, te hago la siguiente pregunta:

¿Cuántas ovejas y corderos llegará a poseer el campesino?

15. REPARTO DE CARTAS

Siempre he tenido debilidad por los juegos de cartas, siendo el tute mi juego favorito y que, a buen seguro, desarrolló mi pasión por los números y la habilidad para calcular.

Un buen día, estábamos jugando una partida de cuatro y me tocaba repartir, pero antes de terminar el reparto recibí una llamada telefónica y tuve que atenderla. Al volver a la mesa, nadie recordaba quién había recibido la última carta. ¿Sabrías decir cómo terminé el reparto, sin que cada uno cuente las cartas que lleva recibidas, de tal forma que cada uno tengamos el mismo número?

16. REPRODUCCIÓN DE LAS AMEBAS

Un determinado tipo de ameba se reproduce duplicándose cada día. Es decir, el día siguiente habrá dos, pasado cuatro, el tercer día ocho, y así sucesivamente. Si después de treinta días llenamos una determinada superficie de amebas, ¿cuántos días tardarían en llenar la misma superficie si empezamos con dos amebas?

17. ¿DÓNDE ESTÁ EL EURO QUE FALTA?

La siguiente situación es curiosa y bastante popular, yo conocí una versión de la misma hace bastantes años (por supuesto, aún hablábamos en pesetas), y desde el primer momento me resultó muy interesante y digna de análisis. Espero que, como tantas cosas que te encuentres en este libro, no dejes de retar a tus amigos y familiares y los hagas partícipes de estos «comederos de cabeza» a los que te estoy sometiendo. De hecho, a buen seguro que, pese a la explicación que te doy en las soluciones, le vas a seguir dando vueltas. Ahí está su gracia.

Eran tres amigos que cierto día estaban tomando algo en un bar. Al pedir la cuenta al camarero, este les dijo 25 euros. Cada amigo paga con un billete de 10 euros y le dicen al camarero que se quede con dos euros de propina.

En este momento, el camarero les devuelve tres euros, un euro a cada amigo, lo que implica que cada uno de los tres habría pagado nueve euros (diez que entregan al camarero, menos uno que les devuelve).

Análisis de la situación:

Si cada amigo aporta nueve euros y le dan dos de propina al camarero:

$$9 \times 3 = 27 \text{ euros}$$

A lo que añadimos los dos euros de propina.

$$27 + 2 = 29 \text{ euros}$$

Con lo que tenemos 29 euros, y sin embargo pagaron 30.
Y ahora la pregunta del millón:
¿Dónde está el euro que falta?

KURT GÖDEL

Kurt Friedrich Gödel nació el 28 de abril de 1906 en Brno (entonces Austria-Hungría).

Fue uno de los fundadores del conocido como Círculo de Viena, formado por un grupo de matemáticos cuya principal premisa era que lo que no es verificable empíricamente no tiene sentido.

Por su condición de judío, abandonó su país durante la ocupación nazi y emigró a los Estados Unidos, país en el que se nacionalizó. En Princeton conoció a Einstein, con el que entabló una estrecha amistad y compartió los aspectos filosóficos y matemáticos de la «Teoría General de la Relatividad».

Si Gödel ha pasado a la historia es sobre todo por su «Teorema de Incompletitud», basado en la paradoja de «El mentiroso» (ver página 60). Gödel trató de trasladar esta paradoja a las matemáticas, llegando a probar que este teorema no tiene demostración. Lo verdaderamente increíble es que probó el teorema diseñando para ello su propio lenguaje lógico. En definitiva, descubrió que existían afirmaciones verdaderas que no podían ser probadas dentro del sistema.

Gödel probó que todo sistema formal que contuviera a la aritmética elemental (un ejemplo de este sistema serían las matemáticas como un todo) es incompleto. Además, por el camino encontró que la consistencia de dichos sistemas era imposible de probar.

De todo esto derivan consecuencias muy importantes: sus descubrimientos minaron los fundamentos sobre los que las matemáticas se sustentaron hasta el siglo XX, generando un vivaz debate filosófico sobre la naturaleza de la verdad.

Gödel batalló durante toda su vida contra su salud física y mental, desarrollando en sus últimos años signos clásicos de depresión y paranoia, que lo llevaron a dejar de comer por creer que querían envenenarlo, y a llevar una máscara para evitar la contaminación de Princeton. Murió en esta ciudad el 14 de enero de 1978, víctima de desnutrición e inanición.

CAPÍTULO 2

El pensamiento lateral

No me gustaría pertenecer a ningún club que estuviera dispuesto a admitirme como miembro.

GROUCHO MARX

2.1. QUÉ ES EL PENSAMIENTO LATERAL

EL concepto *pensamiento lateral* fue creado por el psicólogo Edward de Bono, y podemos definirlo como un proceso mental diferente al deductivo.

Dos preguntas son clave para definir la idea de pensamiento lateral:

¿Por qué tenemos que pensar «de frente» a la hora de enfocar los problemas de lógica o de matemática en general?

¿Es el camino más fácil siempre el camino «correcto» en el enfoque de cualquier problema?

De Bono analiza las limitaciones que el pensamiento lógico, al que también denominó como «pensamiento vertical», puede llegar a tener cuando se trata de buscar soluciones a problemas que necesiten nuevos enfoques.

Para tratar de resolver estos problemas o crear nuevas soluciones, acuñó el concepto «pensamiento lateral», con el que quiere buscar soluciones aparentemente extrañas y absurdas, caminos diferentes por los que nuestro cerebro no está acostumbrado a transitar.

Mi opinión es que pensar «de frente» ante un problema es lo más rápido, y en un buen porcentaje de casos estaremos ante la respuesta correcta, pero no siempre. De lo que no me cabe duda es de que el pensamiento lateral nos abre la mente y nos estimula muchísimo la imaginación, y estos dos beneficios son algo realmente importante y a tener en cuenta.

Una de mis expresiones favoritas es la importancia de «adaptarse al medio», por ello he querido incluir un capítulo sobre pensamiento lateral. Y cuando digo adaptación al medio, me refiero a una actitud darwinista, es decir, a saber moldear y flexibilizar nuestro pensamiento ante la situación puntual en la que nos encontremos, huyendo del prejuicio y la rigidez.

Por todo ello, te propongo una serie de ejercicios de pensamiento lateral. Recuerda, has de estar abierto a una forma distinta de pensar, siendo astuto y creativo en cada momento.

También te recomiendo que no dejes de plantear los ejercicios a familiares o amigos. En este caso, sería muy interesante que a la persona a la que le hagas los juegos le permitieses que te hiciera alguna pregunta genérica, y tú respondieses con un sí o un no, aceptando así el dar alguna pista y hacer el juego más dinámico.

2.2. A JUGAR CON EL PENSAMIENTO LATERAL

1.1 EQUIPO DE FÚTBOL

Un equipo de fútbol, formado por integrantes de gran fuerza física, se disponía a subir al avión para jugar su partido del domingo. Sin embargo, quien ejercía de capitán del equipo sufrió un desmayo y se desplomó justo antes de iniciar el viaje. Ya en el hospital, se le hizo una revisión y los médicos percibieron que llevaba ropa interior femenina. No obstante, nadie mostró su asombro. ¿Sabrías decir por qué?

2. EL NIÑO DEL ASCENSOR

El siguiente ejercicio de pensamiento lateral es uno de los más conocidos. A ver qué tal se te da su resolución.

Un niño de diez años vive en un décimo piso. Por las mañanas pulsa en el ascensor hasta la planta baja para ir al colegio. Sin embargo, a la vuelta pulsa hasta el séptimo piso, subiendo hasta el décimo a pie. Hay una excepción cuando coincide con su vecino del décimo, entonces sí que se apea en este último.

¿Sabrías decir por qué todos los días pulsa en el séptimo piso cuando vive en un décimo?

3. UNO DE FAMILIA

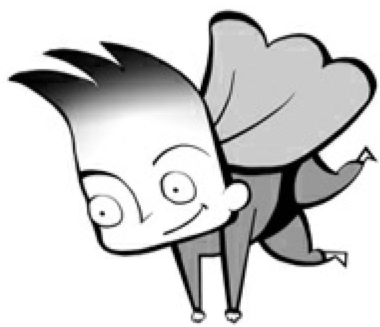
Dos personas, aficionadas al fútbol, se encuentran en la fila para comprar las entradas de un partido de rivalidad local. Una de ellas es el padre del hijo de la otra persona.

Este ha sido el planteamiento, ahora tienes quince segundos para resolver cómo puede ser posible esta situación.

4. LOS HIJOS DE DOÑA FERMINA

Doña Fermina tuvo dos hijos en el mismo parto, sin embargo, no eran ni mellizos ni gemelos.

¿Cómo fue esto posible?



5. KARPOV Y KASPAROV

Karpov y Kasparov, dos de los más grandes genios del ajedrez, jugaron cinco partidas en un campeonato. Cada uno ganó el mismo número de partidas, pero ninguna de ellas terminó en tablas.

¿Sabrías decir cómo es posible?

6. EL LORO

Una señora compró un loro en una pajarería. Al preguntarle al dueño si el loro hablaba, este le respondió que «era capaz de repetir todo lo que oyese».

Días después, la señora volvió a la pajarería para protestar ante el dueño, ya que el loro no decía ni una sola palabra. Sin embargo, el vendedor no le había mentido, ¿sabrías decir por qué?

7. EL PROBLEMA DE LAS RAMAS

En lo alto de un monte hay ocho castaños de cuatro metros de altura. Por cada metro tiene cinco ramas y por cada rama hay cuatro bellotas.

¿Cuántas bellotas tiene en total?

8. LAS TRUCHAS DEL RÍO NALÓN

Un buen día, dos padres y dos hijos fueron a pescar truchas al río Nalón. Pescaron un total de tres truchas y, sin embargo, tocaron a una trucha cada uno.

¿Te atreves a decir por qué?

9. JUAN Y LA LLUVIA

Juan estaba paseando por la calle cuando de repente comenzó a llover. No llevaba paraguas, ni capucha, ni nada para protegerse. Sin embargo, no se mojó ni un solo pelo, pese a que no estaba en ningún lugar protegido de la lluvia.

¿Sabrías decir por qué?

10. EL ERROR DE LA POLICÍA

Dos policías estaban de paisano observando a unos malhechores que entraban y salían de su escondite.

El guardián dijo catorce y el primer delincuente dijo siete. Inmediatamente el guardián lo dejó pasar.

Se acerca el segundo delincuente y el guardián dice ocho. El malo dice cuatro, y también accede al local.

Los dos policías, que estaban escuchándolo todo, ya creen tener la clave de acceso al local. Se acerca uno de ellos, el guardián dice cuatro, y el policía dice dos. En este momento el malo saca una pistola y dispara al policía.

¿En qué falló el policía?

11. PARTIDO DE TENIS

Paco y Pepe están jugando un partido de tenis al mejor de cinco sets. El partido es duro y muy intenso. Al final del mismo, ambos han ganado tres sets.

¿Cómo es esto posible?

12. EL PELUQUERO DE MI PUEBLO

En Lada de Langreo, el pueblo donde vivo, hay gente muy inteligente. Figúrate si esto es así, que el peluquero prefiere cortar el pelo a diez gordos antes que a un flaco.

¿Sabrías decir por qué?

13. EL ENVENENAMIENTO

Mi amigo Pepito celebró una fiesta con un grupo de amigos. Al finalizar la misma todos se tomaron una última copa, pero mi amigo tenía que irse y la tomó de un trago. Al día siguiente fue informado de que todos sus compañeros de fiesta habían muerto envenenados. ¿Por qué todos murieron menos Pepito?

14. SOBRE AGUJEROS

El siguiente problema se las trae. Has de ser rápido y eficaz en tu razonamiento lógico. Vamos con él:

Si una persona hace un agujero en una hora, y dos personas hacen dos agujeros en dos horas. ¿Cuánto tardará una persona en hacer medio agujero?

15. EL PROBLEMA DE VILLAVIEJA

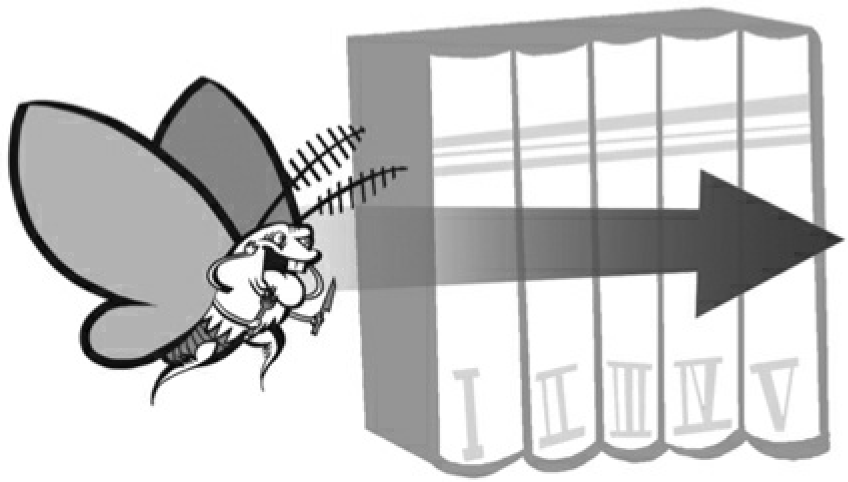
Este problemilla es muy «viejo». Si lo conoces, lo recordarás con agrado, y si no… seguro que te divertirá.

Yendo yo para Villavieja
me cruce con siete viejas,
cada vieja llevaba siete sacos,
cada saco siete ovejas.

¿Cuántas viejas y ovejas iban para Villavieja?

16. LA POLILLA DEVORADORA

Mi primo Antonio tenía una hermosa enciclopedia de cinco volúmenes, perfectamente alineados en su estantería. Sin embargo, una polilla hambrienta empezó a comer desde la cubierta anterior del volumen número I y hasta la cubierta posterior del volumen V. Si cada tomo tiene cuatro centímetros de grosor y están colocados de izquierda a derecha en orden creciente, ¿qué distancia ha recorrido la polilla en su destrozo?



17. EL ASCENSOR EN JAPÓN

Vamos con una pregunta breve y de complicadísima respuesta. Solo acepto que seas rápido en la misma.

¿Cómo se llama a un ascensor en Japón?

18. PENDIENTE EN EL CAFÉ

A la tía Enriqueta se le cayó esta mañana un pendiente dentro de una taza de café. Sin embargo, no se le mojó. ¿Sabrías decir por qué?

19. EL REPARTO DE PATATAS

Manuela tiene cuatro hijos y va a darles la cena. Sin embargo, se encuentra ante un dilema, y es que solo tiene tres patatas.

¿Cómo puede darles la misma cantidad de patatas? (No vale darles 0,75 patatas. Ah, y tampoco cero patatas.)

20. La arena y el hoyo

Imagínate que tenemos un hoyo de 40 centímetros de profundidad por 30 centímetros de diámetro. ¿Sabrías decir cuánta arena hay en el hoyo?

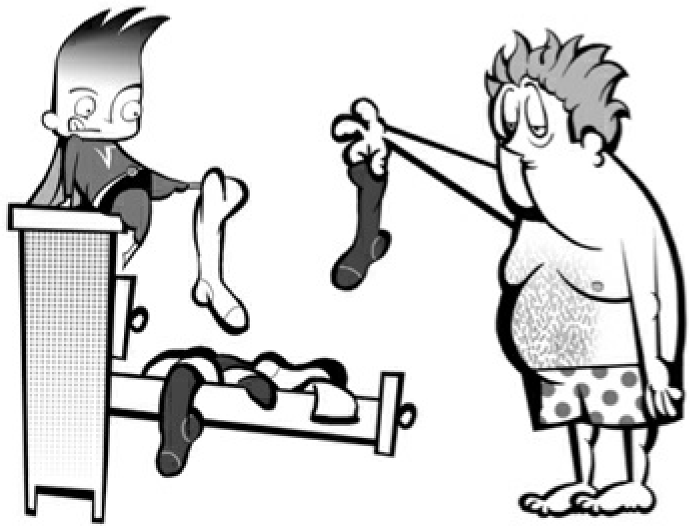
21. El carné de conducir

Un buen día, Rogelio Pérez se olvidó en casa el carné de conducir. Durante el trayecto a su trabajo recorrió tres calles en sentido contrario a la circulación e incluso se saltó una señal de Stop. Todo esto fue observado por un policía de tráfico, quien, sin embargo, no hizo ningún amago de impedírselo.

¿Por qué el policía no tuvo en cuenta todo esto?

22. Los calcetines

Esta noche me tuve que levantar a la carrera y a oscuras. Si en mi cajón tengo 20 calcetines negros y 20 calcetines blancos, ¿cuántos calcetines tuve que coger para asegurarme de que al menos dos son del mismo color?

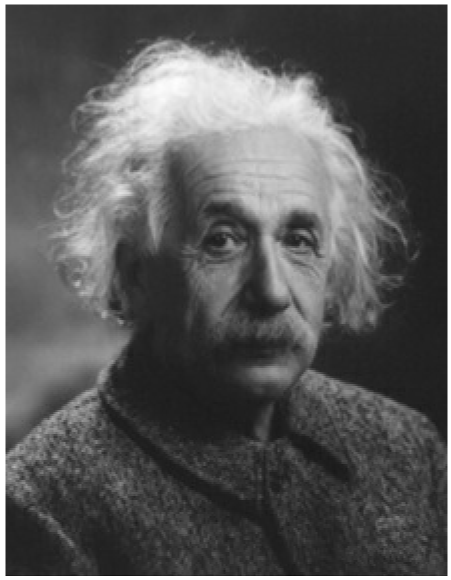


23. EL PASTOR Y SUS OVEJAS

Si un pastor tiene doce ovejas y se le mueren todas menos siete, ¿cuántas le quedan vivas?

ALBERT EINSTEIN

Soy en verdad un viajero solitario y los ideales que han iluminado mi camino y han proporcionado una y otra vez nuevo valor para afrontar la vida han sido la belleza, la bondad y la verdad.



Albert Einstein (1879-1955) nació en Ulm, Alemania. De origen judío, fue un niño tímido y retraído, con dificultades en el aprendizaje; de hecho, pasó su educación secundaria con unos resultados bastante mediocres.

… Como alumno no fui ni muy bueno ni muy malo. Mi punto débil era mi mala memoria, sobre todo cuando había que memorizar palabras y textos.

Su vocación científica le vino de uno de sus tíos, que le proporcionó libros de divulgación que el joven Einstein devoraba.

… A los doce años empecé a estudiar a Euclides, fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida.

Con veintiséis años publicó cuatro trabajos científicos de suma importancia. Uno de ellos destaca sobre el resto: *Acerca de la* *electrodinámica de los cuerpos en movimiento,* donde expone la relatividad especial. En él plantea dos postulados de inmensas consecuencias:

1) Todos los observadores que se mueven entre sí con velocidad constante son equivalentes en lo que a las leyes de la física se refiere. Este es el principio de relatividad que excluye la noción de espacios y tiempos absolutos.

2) La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, 299 792 kilómetros por segundo, y es independiente del movimiento relativo entre la fuente de luz y el observador. En esos primeros años, Einstein plantea su famosa relación E = m x c2, el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad de la luz dan la energía asociada a una masa m. Masa y energía son dos formas equivalentes. Esto produjo una revolución en nuestra comprensión de la física del Sol y las estrellas, y constituye la base de la energía nuclear.

Recibió el Nobel de Física en el año 1921 por sus investigaciones sobre el efecto fotoeléctrico y sus aportaciones en el terreno de la física teórica.

En los años 30, con la llegada de los nazis al poder, las expresiones de odio hacia Einstein alcanzaron niveles muy elevados. Fue acusado por el régimen de crear una física judía, en contraposición a la física alemana o aria.

Se instaló en EE. UU., donde trabajó en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y se nacionalizó estadounidense en 1940.

Einstein siempre tuvo gran interés por la política y por las cuestiones sociales, y fue un gran activista por la paz. Pese a ello, apoyó el proyecto de Oppenheimer para la creación de armas nucleares (Proyecto Manhattan), con el objetivo de poder frenar el avance de los nazis. Sin embargo, siempre se mostró partidario de que esas armas no se utilizasen.

En 1952 recibió una oferta para presidir el Gobierno de Israel, algo que rechazó con la siguiente frase:

> *Estoy profundamente conmovido por el ofrecimiento del Estado de Israel y a la vez tan entristecido que me es imposible aceptarlo.*

En sus últimos años se recrudeció su vena pacifista y abogó por el establecimiento de un utópico «Gobierno Mundial», que permitiría a las naciones trabajar juntas y abolir la guerra. También lanzó el conocido manifiesto «Russell-Einstein», que hacía una llamada a los científicos en la lucha por la desaparición de las armas nucleares.

En cuanto a sus creencias religiosas, se pueden resumir con las siguientes frases suyas:

> *Creo en un Dios que se revela en la armonía de todo lo que existe, no en un Dios que se interesa en el destino y las acciones del hombre.*

> *Mi religión consiste en una humilde admiración del ilimitado espíritu superior que se revela en los más pequeños detalles que podemos percibir con nuestra frágil y débil mente.*

En cierta ocasión se le preguntó a Einstein si creía o no en un Dios, a lo que el genio respondió:

> *Creo en el Dios de Espinosa, que es idéntico al orden matemático del universo.*

Por último, es muy agradable pensar que no solo hablamos de uno de los grandes genios que ha dado la humanidad, sino de una personalidad con mucho encanto y de un hombre con una buena dosis de simpatía.

CAPÍTULO 3

Entrenamiento numérico

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo.

GALILEO GALILEI

3.1. INTRODUCCIÓN

EN este capítulo vamos a potenciar más la parte relacionada con el cálculo, de tal forma que te plantearé problemillas con un contenido más numérico, en forma de series, criptogramas, o cálculo mental. Todo ello resulta muy útil si estás preparando oposiciones o exámenes de ingreso, con lo que el beneficio que puedas obtener también dependerá de tus objetivos.

Recuerda siempre una máxima: se progresa practicando y con la constancia por bandera, un buen entrenamiento te llevará a la mejora continuada y a un buen dominio de lo entrenado.

Con estos ejercicios seguirás dándole vitaminas a tus neuronas y agilizando tu mente.

3.2. SERIES NUMÉRICAS Y EJERCICIOS

Tan solo te plantearé trece ejercicios de series numéricas, muy típicas en exámenes, y cuya práctica implica potenciar la destreza y rapidez de pensamiento. Se trata de que encuentres el número o números que van a continuación:

Ejercicio 1

¿Qué dos números van a continuación?

0 - 16 - 64 - 144 - X - X

Ejercicio 2

Encuentra el número que sigue:

0 - 8 - 64 - 216 - 512 - X

Ejercicio 3

Trata de encontrar las dos incógnitas de esta serie:

X - 142 - 129 - 114 - 97 - 78 - Y

Ejercicio 4

Tienes que descubrir el número que sigue esta secuencia y el porqué. Es realmente complicado; si consigues resolverlo, sería de matrícula de honor. Y una pista, aunque sean números, esta serie no tiene nada que ver con el cálculo.

24, 31, 34, 45, 51, 52, 55…

Ejercicio 5

Descubre qué dos números continúan la serie:

6 - 29 - 10 - 52 - 15 - 75 - 21 - 98 - X - X

Ejercicio 6

Intenta descubrir qué número falta en la siguiente serie:

3 - 7 - 16 - 31 - 53 - X - 122 - 171

Ejercicio 7

Vamos con esta serie, nota alta si la descubres:

8 - 64 - 216 - 512 - 1000 - X

Ejercicio 8

Descubre el número que falta:

421 - 420 - 409 - X - 357 - 316 - 265

Ejercicio 9

¿Cuál va a continuación?

1 - 2 - 6 - 24 - 120 - 720 - X

Ejercicio 10

Vamos con otra serie numérica. Encuentra los dos números que siguen:

13 - 25 - 50 - 62 - 124 - 136 - 272 - X - X

Ejercicio 11

Encuentra el número siguiente en números «milenarios»:

3457 - 3667 - 3877 - 4087 - 4297 - X

Ejercicio 12

La siguiente serie representa números con mucho valor matemático, a ver si encuentras el siguiente:

19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43 - 47 - X

Ejercicio 13

La agilidad de cálculo es básica para las series numéricas. Descubrir nuestra decimotercera y última serie es un ejemplo.

48 - 111 - 174 - 237 - 300 - 363 - 426 - X

3.3. CRIPTOGRAMAS Y… ¡A DESCIFRAR SECRETOS!

Podemos definir un criptograma como un mensaje sin significado aparente pero que tiene un contenido oculto. Por extensión, sería un rompecabezas cuyo objetivo es recuperar el mensaje original a partir de un texto cifrado.

En nuestro caso, tendrás que sustituir las letras por números, de tal forma que se cumplan las igualdades. Y, por supuesto, a una misma letra solo le puede corresponder un mismo número.

Estos ejercicios no son fáciles de resolver, por lo que significan un reto de altura.

Ejercicio 14

El siguiente mensaje se lo envió un chico a sus padres de forma cifrada. El hijo, de viaje por Asia, necesitaba que le enviasen más dinero, y quiso que sus padres supiesen la cantidad exacta resolviendo el siguiente criptograma. ¿Sabrías decir la cantidad de dólares que necesitaba, sabiendo que S y M no pueden ser cero?

SEND + MORE = MONEY

Ejercicio 15

Reconstruir la siguiente resta:

PLAYA - NADAR = 31744

Ejercicio 16

Resolver la siguiente suma, teniendo en cuenta que el 0 y el 1 no intervienen:

SI + SI + SI + SI + SI = ASI

Ejercicio 17

Elevando al cuadrado, resuelve el siguiente enigma:

$(ZOO)^2 = TOPAZ$

Ejercicio 18

Trata de buscar la solución a esta señal:

IS + SO = SOS

Ejercicio 19

Intenta resolver el enigma de esta multiplicación, de solución única:

ABCDE x 4 = EDCBA

Ejercicio 20

Intenta reconstruir la siguiente suma:

3A2ABC + C8A4DD = E1DE19

Ejercicio 21

Trata de resolver el siguiente criptograma con fecha relevante. Recuerda que una palabra no puede empezar por cero y, como pistas, te diré que la S = 4, y que SEIS es divisible por 6.

SEIS + DE + ENERO = REYES

3.4. PARA QUE PIENSES Y CALCULES

A continuación te planteo una serie de ejercicios en los que tendrás que pensar y calcular a la vez. No te desesperes, paso a paso y sin prisas.

Ejercicio 22

Tienes que resolver el valor de X en las siguientes sumas:

$$21 + 13 + 8 + 15 + 12 + X + 13 = 91$$
$$15 + 24 + 7 + 18 + X + 23 + 10 = 139$$
$$8 + 13 + 5 + 17 + X + 4 + 3 + 7 = 58$$

Ejercicio 23

El siguiente ejercicio es que consigas llegar a 1 000 utilizando ocho 8 y con cualquiera de los signos matemáticos.

Ejercicio 24

Ahora tienes que utilizar cuatro veces 4 y obtener los resultados del 0 al 10. Es decir, primero obtener 0 con los cuatro 4, luego obtener 1, y así hasta conseguir el 10 de resultado. Puedes sumar, restar, multiplicar y dividir (y utilizar paréntesis).

Ejercicio 25

Te propongo que llegues al resultado de 100 utilizando los números del 1 al 9 y colocados en este orden (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Puedes utilizar un dígito y signo, dos dígitos y signo, tres dígitos y signo, etc., pero siempre empezando por el 1 y terminando por el 9.

Ejercicio 26

Tienes que conseguir con tres unos (1, 1, 1) y utilizando cualquier signo matemático, incluyendo paréntesis, que el resultado sea igual a 6.

Ejercicio 27

Si nací en 1970 y solo cumpliese años los años bisiestos que acaban en 2, ¿cuántos años llevaría cumplidos en 2007? (ten en cuenta que los años bisiestos son los múltiplos de 4).

Ejercicio 28

¿Cuál es el producto de la siguiente serie?

$$(x-a)(x-b)(x-c) \ldots (x-z)$$

Ejercicio 29

En el sorteo de la Lotería de ayer salió un número muy curioso, a ver si consigues descifrarlo:

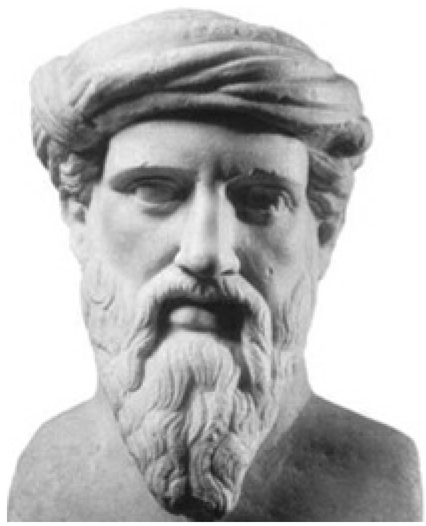
Se trata de un número de cinco dígitos, que sumados uno a uno dan el mismo resultado que si los multiplico.

El dígito de la izquierda es la edad de mi hermana pequeña, los dos siguientes son la edad de la mediana, y los dos dígitos de la derecha son la edad de mi hermana mayor (que le lleva dos años a la mediana).

¿Sabrías decir qué número de la Lotería salió ayer?

PITÁGORAS

Pitágoras (572-497 a. de C.) nació en la isla griega de Samos. Fue uno de los grandes filósofos y matemáticos griegos. No se tienen muchas noticias fidedignas de su biografía, ya que su condición de fundador de una secta religiosa propició la temprana aparición de una tradición legendaria en torno a su persona.



Los primeros años los pasó en Samos, y luego viajó a Mileto, Fenicia y Egipto; en este último país, cuna del conocimiento esotérico, se le atribuye haber estudiado los misterios, así como geometría y astronomía. También viajó a Babilonia con Cambises, para aprender allí los conocimientos aritméticos y musicales de los sacerdotes. Se habla también de viajes a Delos, Creta y Grecia antes de establecer, por fin, su famosa escuela en Crotona, donde gozó de considerable popularidad y poder.

El pitagorismo fue un estilo de vida, inspirado en un ideal ascético y basado en la comunidad de bienes, cuyo principal objetivo era la purificación ritual (catarsis) de sus miembros a través del cultivo de un saber en el que la música y las matemáticas desempeñaban un papel importante. El camino de ese saber era la filosofía, término que, según la tradición, Pitágoras fue el primero en emplear en su sentido literal de «amor a la sabiduría». La escuela pitagórica estaba abierta a hombres y mujeres y las conductas discriminatorias estaban prohibidas.

Los pitagóricos creían en la transmigración de las almas, por lo que eran estrictamente vegetarianos. Entre sus principios también figuraban una conducta basada en la mutua amistad, el altruismo y la honestidad.

La escuela pitagórica daba mucha importancia a la educación, resumiéndose uno de los lemas del sabio de Samos con la siguiente frase: «Educad a los niños y no será necesario castigar a los hombres».

Para l os pitagóricos, el universo era un cosmos, es decir, un conjunto ordenado en el que los cuerpos celestes guardaban una disposición armónica que hacía que sus distancias estuvieran entre sí en proporciones similares a las correspondientes a los intervalos de la octava musical. En un sentido sensible, la armonía era musical; pero su naturaleza inteligible era de tipo numérico, y si todo era armonía, el número resultaba ser la clave de todas las cosas.

Contemplaban al hombre como un verdadero microcosmos en el que el alma representaba la armonía del cuerpo. Y como la música era para ellos el instrumento por excelencia para la purificación del alma, la consideraban como una medicina para el cuerpo.

Por lo que es más conocido Pitágoras es por la demostración de su famoso Teorema, que dice que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Otras importantes aportaciones a las matemáticas fueron: invención de la tabla de multiplicar; construcción del pentágono regular y los cinco poliedros regulares; formación de los números cuadrados partiendo de la unidad y agregando la serie ascendente de los números impares; demostró que los intervalos entre notas musicales pueden ser representadas mediante razones de números enteros utilizando una especie de guitarra con una sola cuerda, llamada monocordio; descubrió la relación que existe entre la armonía de un intervalo de tono y las proporciones de las cuales producen dicho tono, etc.

CAPÍTULO 4

Paradojas matemáticas

Si el cerebro humano fuese tan simple que pudiésemos entenderlo, entonces seríamos tan simples que no podríamos entenderlo.

ANÓNIMO

4.1. INTRODUCCIÓN

EN este libro hay muchísima matemática, a través de juegos y de lógica, a través de ejercicios variados, que espero te estén haciendo pensar y disfrutar. La matemática no es necesariamente pizarra y fórmulas y más fórmulas, la matemática implica pensar y razonar sobre temas que están presentes en tu vida, reflexionar y ejercitar la mente, tratar de resolver el problema y disfrutar a tope si lo consigues. Y si no lo consigues, aceptarlo con deportividad, mirar la solución (que tienes al final) y disfrutar de la forma en que estaba escondida la respuesta.

Este capítulo de paradojas lo he querido incluir porque han representado mucho en el pensamiento lógico-matemático. Creo que son muy dignas de tu análisis, y también con ello harás ejercicio y podrás apreciar toda la trascendencia que han tenido y tienen, con lo que también se aportará un enfoque histórico.

4.2. CONCEPTO DE PARADOJA

La palabra paradoja deriva del griego —*para* y *doxos*— y significa «más allá de lo creíble». Es decir, una paradoja sería una declaración en apariencia verdadera, pero que en realidad conlleva a una contradicción lógica o a una situación que contradice el sentido común.

Pues bien, la muestra de paradojas ha significado a lo largo de la historia el impulso de importantes avances en la ciencia, la filosofía y, por supuesto, la matemática.

Uno de los más claros ejemplos de la importancia que las paradojas han tenido en la matemática es que ya a los pensadores griegos les resultaba insoportable que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no pudiera ser medida con exactitud por finas que se hicieran las graduaciones de la regla. Este hecho tan paradójico y tan desolador abrió el camino de los números irracionales y supuso un terremoto en el pensamiento de los grandes clásicos griegos.

En las próximas páginas nos adentraremos en algunas de estas contradicciones lógicas, varias de ellas bastante populares, pero que conllevan una magia implícita muy digna de analizar. Todas ellas, no lo dudes ni un momento, han tenido una importante repercusión y han servido para el avance del pensamiento humano.

4.3. LAS GRANDES PARADOJAS

1. PARADOJA DEL MENTIROSO

Precisamente, una de las primeras paradojas que surgieron fue la atribuida a Epiménides de Creta, y dice lo siguiente:

«Todos los cretenses son unos mentirosos», dijo el propio Epiménides.

Sabiendo que él mismo era de Creta, ¿decía Epiménides la verdad?

Te encuentras en un camino sin salida, y es que estás viviendo una situación paradójica, ante la que no puedes encontrar una respuesta satisfactoria. Pues bien, estás ante la esencia de las situaciones paradójicas, que tanta trascendencia han tenido y tienen en el mundo de la matemática.

2. PARADOJAS DE ZENÓN: AQUILES Y LA TORTUGA

Zenón de Elea vivió en el siglo V a. de C. y fue uno de los grandes filósofos griegos.

Entre sus legados destaca la invención de la conocida demostración por «reducción al absurdo», mediante la cual toma como hipótesis las afirmaciones del adversario y muestra los absurdos a los que se llegaría si esa hipótesis fuese verdadera, obligando de esta forma al interlocutor a cambiar su postura y aceptar en última instancia la tesis opuesta a la que sostuvo en un principio.

Zenón también es muy conocido por su serie de *paradojas* o *aporías*, creadas para demostrar que no siempre la razón tiene la respuesta.

De las paradojas de Zenón, la más conocida es la de **Aquiles y la tortuga**, que paso a explicarte a continuación:

El héroe Aquiles decide competir en una carrera contra una tortuga. Para ello, y viendo que la tortuga es mucho más lenta, le deja una buena ventaja.

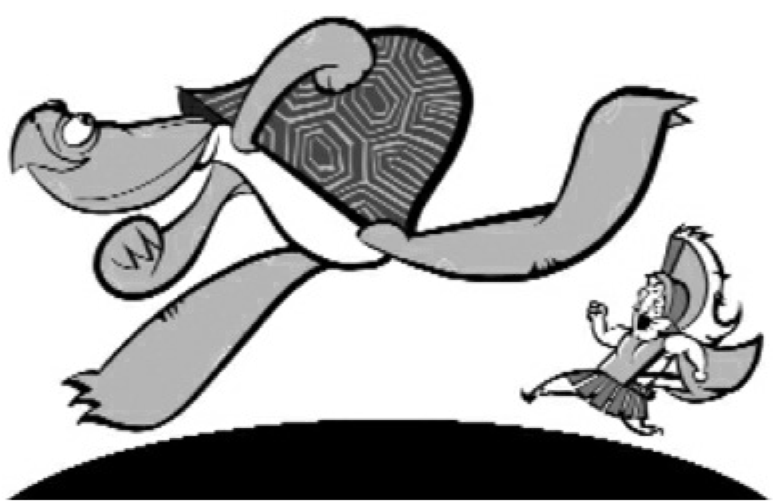
Aquiles tarda poco tiempo en recorrer la distancia que los separaba, pero se da cuenta de que la tortuga ya no está, ha recorrido un pequeño trayecto. Sigue Aquiles corriendo para llegar al punto hasta donde la tortuga había avanzado, pero vuelve a descubrir que la tortuga ha vuelto a recorrer otro pequeño trecho.

De esta forma, Aquiles nunca va a poder alcanzar a la tortuga, ya que cuando llegue al punto donde esta se encontraba, siempre habrá recorrido una pequeña cantidad.

Actualmente se sabe que Aquiles sí que alcanzará a la tortuga, ya que se puede fijar un punto de llegada que esté por delante de la tortuga en vez del punto donde ella se encuentra. De esta forma no tendremos cantidades infinitas, sino dos cantidades finitas con las que se podrá calcular un espacio finito de tiempo en el cual Aquiles sí adelantará a la tortuga.

Las paradojas de Zenón pertenecen a la categoría de falsídicas o sofismas, o sea, no solo llegan a un resultado que parece ser falso, sino que además lo es. Y esto es así por la falta de conocimientos sobre el concepto de infinito en la época en la que fueron formuladas.

Podríamos decir que los razonamientos de Zenón representan la huella más vieja del pensamiento infinitesimal, que daría lugar a la creación del cálculo diferencial, ideado a la par por Leibniz y Newton ya en el siglo XVII.



3. PROBABILIDAD DEL CUMPLEAÑOS

En mi anterior libro, *Entrenamiento mental*, sugería una cuestión probabilística que contradice el sentido común, y que por ello se plantea una situación paradójica, aunque no sea una paradoja en sentido estricto, ya que no contradice la lógica sino la intuición (es una verdad matemática).

Vamos con ella:

¿Cuántas personas, como mínimo, ha de haber en un grupo para que la probabilidad de que dos de ellas compartan cumpleaños supere el 50%?

La respuesta es: solo 23 personas (se llega con esta cantidad al 50,7% de probabilidad).

Ya sé que esto nos resulta sorprendente y que no parece ser así, pero la realidad es que entre 23 personas se pueden formar 253 parejas posibles.

$$23 \times 22/2 = 23 \times 11 = 253$$

Si eres amante de las apuestas, ten por seguro que apostando a que en un partido de fútbol dos de los integrantes (22 jugadores más el árbitro) cumplen los años el mismo día, tienes una probabilidad superior de ganar a si eliges cara o cruz en el lanzamiento al aire de una moneda.

Si el grupo es de 40 personas, estamos ante un 90% de que dos **cualesquiera** cumplan años el mismo día.

Si el grupo de personas supera las 60, la probabilidad de que dos de ellas cumplan los años el mismo día ya supera el 99%.

Como es evidente, para llegar al 100% tiene que haber un total de 367 personas (teniendo en cuenta los años bisiestos y a que alguien puede haber nacido el 29 de febrero).

La fórmula para calcularlo es la siguiente, donde «p» es la probabilidad, y «n» es el número de personas:

$$p = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!}$$

La «paradoja» del cumpleaños tiene sus aplicaciones prácticas, por ejemplo, en criptografía (protección de datos secretos) y en estadística.

Esta aplicación nos indica, entre otras cosas, que para generar colisiones en una función aleatoria perfecta (en concreto funciones *hash)* de ***n*** bits, con una probabilidad del 50% aproximadamente, se requieren $\mathbf{2^{n/2}}$ intentos.

4. PARADOJA DE GALILEO

Galileo Galilei (1564-1642) nació en Pisa, Italia. Pasa por ser el pionero del método científico experimental, reduciendo el problema a una serie de relaciones basadas en la experiencia, la lógica y el sentido común. Después lo analiza y resuelve con formulaciones matemáticas simples. Este método suyo abrió el camino a la matemática moderna y a la física experimental.

Pues bien, en su último trabajo científico, *Dos Nuevas Ciencias*, Galileo puso en entredicho el principio de que el todo es mayor que sus partes. Para ello hizo dos afirmaciones aparentemente distintas. Vamosa verlo tras las siguientes premisas:

Llamaremos cuadrado al número natural que se obtiene multiplicando un número natural por sí mismo: 1, 4, 9, 16… Siendo los números que los generan sus raíces: 1 (raíz de 1), 2 (raíz de 4), 3 (raíz de 9), 4 (raíz de 16)…, y así sucesivamente.

Pues bien, las dos afirmaciones contradictorias serían:

1. Si cada raíz genera un cuadrado y todo cuadrado tiene, evidentemente, su raíz, eso implica que **hay tantas raíces como cuadrados**.
2. Si todo número es raíz de su cuadrado (por ejemplo, 4 es raíz de 16), podemos concluir con que **hay tantas raíces como números naturales.**

CONCLUSIÓN: Con estas dos afirmaciones es fácil deducir que hay tantas raíces como números naturales. Estamos, pues, ante una situación paradójica, pues no todos los números son cuadrados. De hecho, cuanto mayores son los números, menor es la cantidad de raíces (y de cuadrados). Por ejemplo, de los primeros 100 números hay un total de 10 raíces (y 10 cuadrados). De los primeros 10 000 números naturales hay 100 raíces. Y del primer millón de números naturales hay solo 1000 raíces.

Esta paradoja constituye una de las sorprendentes propiedades de los conjuntos infinitos. Galileo llegó a la conclusión de que los conceptos menor, igual o mayor solo son aplicables a los conjuntos finitos, nunca a los infinitos. En el siglo XIX, el padre de la teoría de conjuntos, Georg Cantor, llegó a la conclusión de que esto era cierto si se aplicaba a los números enteros, pero no era cierto en otros ámbitos:

Algunos conjuntos infinitos son mayores que otros, ya que no se pueden relacionar en una correspondencia uno a uno.

5. PARADOJA DE RUSSELL O DEL BARBERO

Esta paradoja fue ideada por el gran lógico Bertrand Russell (cuya biografía puedes ver al final de este capítulo), y nos cuenta lo que sucedió en un barco en alta mar, donde un marinero, que a la vez ejercía de barbero, no estaba cumpliendo sus funciones de manera satisfactoria.

—¡Marinero!, en vista de que los hombres presentan un aspecto un tanto desaseado, quiero que se encargue de afeitar a todo aquel que no se afeite por sí mismo. A los que quieran afeitarse solos, deje que lo hagan por sí solos. Usted ocúpese solo de los que no lo hagan para que ningún hombre quede sin afeitar. A partir de ahora ejercerá usted de barbero. Es una orden.

—Así se hará, mi capitán —dijo con voz firme el barbero.

A la mañana siguiente se dispuso a cumplir la orden recibida por el capitán, pero antes acudió al baño para asearse. Cuando se disponía a afeitarse se dio cuenta de que no podía hacerlo, puesto que la orden del capitán era que solo podía afeitar a aquellos que no lo hicieran por sí mismos. Por lo tanto, debería dejarse la barba para no infringir la orden de afeitar solo a los que no se afeitan por sí mismos. Pero, si se dejaba la barba, también estaría infringiendo la norma que decía que no debiera quedarse ningún hombre sin afeitar.

Con este dilema, llegó a la conclusión de que no podía afeitarse ni podía dejarse barba, con la lógica conclusión de que hiciera lo que hiciera estaría infringiendo la orden impuesta por el capitán.

6. Paradoja del enunciado y su contrario

«Esta frase consta de siete palabras.»

Está muy claro que este enunciado es falso, puesto que consta de seis palabras. Pues bien, si es falso, se supone que su contrario debería ser verdadero, por puro criterio lógico. Sin embargo, no es así, ya que su contrario sí consta de siete palabras:

«Esta frase no consta de siete palabras.»

7. Paradoja de los tres enunciados falsos

La siguiente situación paradójica la dejo para que la resuelvas. No te resultará complicado.

Nos encontramos aquí ante tres enunciados falsos. ¿Sabrías decir cuáles?

$$2 + 1 = 3$$
$$3 + 3 = 5$$
$$4 \times 7 = 28$$
$$15 - 7 = 6$$
$$21 : 3 = 7$$

8. Paradoja del hotel infinito

La paradoja del Hotel Infinito constituye una brillante metáfora creada por el excelente matemático alemán David Hilbert (1862-1943). De esta forma, Hilbert explica de una forma sencilla las paradojas relacionadas con el infinito, que fueron descubiertas por el también matemático Georg Cantor.

Hilbert lo explicó, más o menos, de esta forma:

Un prestigioso hotelero tuvo un sueño, «crear el hotel más grande del mundo». Al despertar, así se lo hizo saber a su mujer:

—Quiero construir el hotel más grande jamás creado.

—¿Cuántas habitaciones piensas construir? —preguntó su mujer.

—¿Podrían ser 5 000 habitaciones?

—¿Y si alguien construyese otro hotel con 6 000?, entonces ya no sería el hotel más grande…

—Hmmm, tienes razón. Y si construimos el hotel con 40000 habitaciones…, el nuestro sería enorme, pero siempre podría alguien construir otro hotel mayor…

Marido y mujer llegaron a la conclusión obvia de que siempre alguien podría construir un hotel más grande, salvo que… ¡construyesen un hotel con habitaciones infinitas!

En este punto, una vez construido este hotel con habitaciones infinitas, se plantean las siguientes paradojas:

Infinito más uno

De repente, el hotel se encontraba lleno de infinitos huéspedes.

Para solucionar un más que presumible problema, se llegó al acuerdo de que cada vez que llegaba un nuevo huésped, los que ya estaban alojados tendrían que cambiar de habitación (no olvidemos que teníamos infinitas habitaciones). De esta forma, siempre tendríamos habitación asegurada para todo aquel que llegase.

Llegó entonces un nuevo huésped, pero no hubo problema para resolver su alojamiento. El recepcionista avisó por megafonía para que todos los huéspedes cambiasen de habitación. Para ello, sumarían uno al número de la misma, y esa sería su nueva habitación. El huésped de la última habitación no tendría problema porque había infinitas. De esta forma, la habitación número 1 quedaría para el nuevo huésped.

Dos infinitos

Una nueva paradoja se cernía sobre el Hotel Infinito.

El representante de una agencia de viajes llegó para comunicar al recepcionista que le había surgido un problema de difícil solución:

«Acababan de llegar infinitos turistas que necesitarían hospedarse esa noche en el hotel».

El recepcionista, totalmente relajado, no tuvo problema en aceptar a los infinitos nuevos huéspedes. Para ello, por megafonía, avisó a todos los huéspedes de que tendrían que cambiar de habitación. Su nueva habitación sería el resultado de multiplicar por 2 el número de la actual. De esta forma, todos los huéspedes estarían en una habitación con número par (hay infinitos números pares), quedando libres todas las habitaciones con número impar, que, al ser también infinitas, albergarían a los infinitos nuevos huéspedes.

Infinito número de infinitos

Otro problema más se cernía sobre nuestro hotel; un nuevo problema que parecía irresoluble, pero que, una vez más, no inmutó al recepcionista:

A través del representante de viajes se hizo llegar a un infinito número de excursiones con un número infinito de turistas cada una. ¿Cómo podrían hospedarlos en esta ocasión?

El recepcionista tranquilamente tomó el micrófono y se comunicó solamente con las habitaciones cuyo número fuera primo o alguna potencia de número primo, les pidió elevaran el número 2 al número de la habitación (n) en la que encontraban (2*n*) y se cambiaran a esa nueva habitación.

Entonces asignó a cada una de las excursiones un número primo (mayor de 2), a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número impar, de manera que la habitación de cada uno de los turistas se calculaba tomando el número primo de su excursión (p) y elevándolo al número que les tocó dentro de su excursión (t), lo que da *pt*.

Como se sabe que existe un número infinito de números primos y un número infinito de números impares, fácilmente se logró hospedar a un número infinito de infinitos huéspedes dentro de un hotel que tiene un número infinito de habitaciones.

Estas paradojas nos llevan irremediablemente a hablar de la figura del matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), que dio explicación a este complejo tema.

Cantor llegó a la conclusión, que anteriormente he comentado, de que los conjuntos infinitos no siempre tienen el mismo tamaño, es decir, hay unos infinitos más grandes que otros.

Empezó a interpretar el infinito absoluto (reunión de todos los infinitos, y por lo tanto el último de ellos). Este infinito no es comprensible para la mente humana, lo que supuso un desafío para una persona tan religiosa como el propio Cantor.

Su mente luchaba contra varias paradojas de la teoría de los conjuntos, que parecían invalidar toda su teoría (hacerla inconsistente o contradictoria, en el sentido de que una cierta propiedad podría ser a la vez cierta y falsa). Todo esto lo llevó a ser internado en hospitales psiquiátricos en numerosas ocasiones, por sufrir depresiones y recaídas.

Aunque en su época fue muy atacado por sus colegas, hoy en día la comunidad matemática reconoce plenamente su trabajo y admite que supone un salto cualitativo importante en el raciocinio lógico.

9. PARADOJA SORITES O DEL MONTÓN DE ARENA

Siempre me han fascinado los pensadores griegos, puesto que no partían de cero, pero sí de reducidos conocimientos en comparación con lo que ahora sabemos. Por esta misma razón, eran observadores y se cuestionaban absolutamente todo.

A uno de estos sabios, Eubúlides de Mileto, se le atribuye la siguiente pregunta, cuyo razonamiento se conoce como «razonamiento de sorites» (que en griego significa pila o montón):

¿En qué momento un montón de arena deja de serlo cuando se van quitando granos?

Pues bien, el razonamiento del sabio fue:

Si un millón de granos de arena forman un montón, si sustraemos un granito de arena…, seguirá siendo un montón. Y si vamos sustrayendo granito a granito, ¿en qué momento dejaría de ser un montón?

La paradoja se produce porque el sentido común sugiere que el montón de arena tiene las siguientes propiedades:

1. Dos, tres, cuatro o cinco granos de arena no son un montón de arena.
2. Cien mil granos de arena sí son un montón.
3. Si «n» granos de arena (por ejemplo, 5) no forman un montón, tampoco lo serán (n + 1, o sea, 6) granos de arena.
4. Si «n» granos de arena (en este caso, por ejemplo, 100 000) son un montón, también lo serán (n – 1, o sea, 99 999) granos de arena.

Por inducción matemática, se comprueba que la tercera propiedad junto con la primera implica que 100 000 granos de arena *no* forman un montón, contradiciendo la segunda propiedad. De modo análogo, combinando la segunda y la cuarta propiedades se demuestra que dos o tres granos *sí* son un montón, contradiciendo la primera propiedad.

Un razonamiento matemático que nos hace concluir que no existen cosas con un concepto tan vago como *montones de arena*.

La *paradoja de sorites* nos muestra que no es fácil determinar con nitidez dónde un objeto se convierte en algo distinto, dónde empieza la línea de la altura, de la gordura o de tantas otras cosas como a buen seguro nos podemos imaginar.

10. EL PROBLEMA DE SANCHO PANZA

En el *Quijote*, Cervantes también introduce una paradoja de la que caben numerosas variantes. Considero, no obstante, que será bonito reproducir el texto que aparece, por cierto, en el episodio donde Sancho Panza gobierna la ínsula Barataria.

Este es el dilema al que se vio sometido el gobernador Sancho:

—Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío… Y esté vuesa merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso. Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella una horca y una casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban por la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era de esta manera:

«Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde va y a qué va; y si jurare la verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna».

Sabida esta ley y la rigurosa condición della, pasaban muchos, que luego *en lo que juraban se echaba de ver que decían la verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente.*

Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo, que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa.

Repararon los jueces en el juramento y dijeron:

—Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y conforme a la ley debe morir; y habiendo jurado la verdad, por la misma ley debe ser libre. Pídese a vuesa merced, señor gobernador, ¿qué harán los jueces de tal hombre?, que aun agora están dudosos y suspensos; y habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de vuesa merced, me enviaron a mí a que suplicase a vuesa merced de su parte, diese su parecer en tan intrincado y dudoso caso.

A lo que respondió Sancho:

—Por cierto que esos señores jueces, que a mí os envían, lo pudieran haber excusado; porque yo soy un hombre que tengo más de mostrenco que de agudo; pero, con todo eso, repetidme otra vez el negocio de modo que yo lo entienda; quizá podría ser que diese en el hito.

Volvió otra y otra vez el preguntante a referir lo que primero había dicho, y Sancho dijo:

—A mi parecer, este negocio en dos paletas le declararé yo si es así: el tal hombre jura que se va a morir en la horca; y si muere en ella juró la verdad, y por la ley puesta merece ser libre, y que pase la puente; y si no le ahorcan juró mentira, y por la misma ley merece que le ahorquen.

—Así es como vuesa merced dice, dijo el mensajero; y en cuanto a la entereza y entendimiento del caso, no hay más que pedir ni que dudar.

Sancho Panza se encuentra, pues, ante una decisión que no se puede tomar, ya que si la frase es falsa, debe ser colgado, lo cual implica que la frase es cierta. Y si la frase es cierta, entonces deberá ser colgado, pero solo ha de ser colgado si la frase es falsa, lo cual es una contradicción.

Vamos a ver cómo procede Sancho en su sentencia:

—Venid acá, señor buen hombre, respondió Sancho; este pasajero que

decís, o yo soy un porro, o él tiene la misma razón para morir que para vivir y pasar la puente; porque so la verdad le salva, la mentira le condena igualmente; y siendo eso así como lo es, soy de parecer que digáis esos señores solverle, que le dejen pasar libremente, pues siempre es alabado más el hacer bien que mal; y esto le diera firmado en mi nombre, si supiera mejor firmar; y yo en este caso no he hablado de mío, sino que se me vino a la memoria un precepto, entre otros muchos, que me dio mi amo don Quijote, antes que viniese a ser gobernador de esta ínsula, que fue cuando la justicia estuviese en duda, me decatase y acogiese a la misericordia; y ha querido Dios que agora me acordase, por venir en este caso como de molde.

¡Buen Sancho Panza!… Podíamos alabar, después de esta lectura, la no fingida modestia que sus contestaciones transparentan, y también su fidelidad al cristiano y cabal precepto que don Quijote le diera; pero lo que a cualquier matemático debe resultar simpático es su buen deseo de declarar «en dos paletas» el planteo de una cuestión cuando, como sucede muchas veces, viene estorbada en su comprensión por una multitud de detalles no esenciales.

11. El gato de Schrödinger

La paradoja de «El gato de Schrödinger» hay que vivirla en el siempre complicado mundo de la mecánica cuántica, con lo que no es fácil entenderla, simplemente es así.

Erwin Schrödinger (1887-1961) fue uno de los grandes físicos del siglo XX. Nacido en Austria, recibió el premio Nobel de Física en 1933 por la llamada «ecuación de Schrödinger».

No obstante, lo que más popularidad le dio al físico austriaco fue su experimento imaginario conocido como «el gato de Schrödinger», en el que se revela uno de los aspectos más curiosos de la mecánica cuántica.

Este experimento mental consiste en imaginar una caja que contiene un gato, una partícula radiactiva y un frasco de veneno. La partícula radiactiva tiene un 50% de probabilidades de desintegrarse en el plazo de una hora, en cuyo caso el veneno se libera y el gato moriría.

Hay que destacar que, en un sistema cuántico, la partícula y el gato están descritos por una función de onda.

La pregunta que Schrödinger se hizo fue: *¿Estará el gato vivo o muerto?*

Siguiendo la interpretación clásica de la cuántica conocida como *interpretación de Copenhague*, que establece que los fenómenos cuánticos necesitan la presencia de un observador para, sencillamente, existir, Schrödinger afirma que mientras el gato está dentro de la caja se encontraría en un curioso estado de **vivo y muerto a la vez**. Solo el hecho de observar el interior de la caja alteraría el sistema y rompería la superposición de estados, haciendo que el sistema se decantase por uno de los dos estados posibles: vivo o muerto (como es lógico, con una probabilidad del 50%).

Sé que no es fácil de entender, porque el sentido común nos indica que el gato no puede estar vivo y muerto a la vez; pero la mecánica cuántica dice que mientras nadie mire en el interior de la caja el gato se encuentra en una superposición de los dos estados: vivo y muerto.

Esta superposición de estados es consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la materia y su aplicación a la descripción mecánicocuántica de los sistemas físicos, lo que permite explicar el comportamiento de las partículas elementales y de los átomos.

Esta paradoja sirve para describir un «pequeño» desarreglo en la teoría cuántica cuando pasa de sistemas subatómicos a sistemas macroscópicos.

12. PARADOJAS DE LA PSICOLOGÍA HUMANA

Muchas situaciones paradójicas las crea el propio ser humano dentro de sí mismo. Vamos a ver dos ejemplos de las mismas.

1. Observa la siguiente situación con dos supuestos diferentes:

A) Vamos a suponer que tienes dos entradas para ver el cine, que te han costado un total de 20 euros. Cuando llegas, con tu pareja, a la puerta del cine, descubres que has perdido las entradas.

¿Qué harías en este caso: sacas dos nuevas entradas o directamente renuncias a entrar en el cine y te vas a tomar algo?

B) Ahora, imagínate que llegas al cine y descubres que has perdido 20 euros.

¿Sacarías dos entradas?

La situación paradójica que se produce es que en ambos casos la persona ha perdido 20 euros, en un caso por el valor de las entradas, y en el segundo por el de un billete de 20 euros; sin embargo, actuamos, en general, de manera distinta ante las dos situaciones:

La mayoría de la gente ve más grave la situación de perder las entradas, ya que está demostrado que en este caso solo el 50% de las personas saca dos nuevas entradas. Por el contrario, si lo que han perdido es un billete de 20 euros, el 90% de las personas sacarán dos entradas para el cine.

Esta es una de las muchas paradojas que se producen en nuestro día a día dentro del marco de la «contabilidad mental»: **las dos situaciones son económicamente iguales** (perdiste 20 euros), pero la primera *parece* mucho peor que la segunda.

2. Vamos a ver un segundo caso de «paradoja psicológica»:

Imagínate que eres el jefe de una expedición por el Ártico, en la que llevas a 50 personas de una población a otra. A la mitad del camino se produce una gran tormenta y debes elegir entre dos opciones:

A) Volver por el camino andado para regresar al punto de partida. En este caso se espera que mueran 25 personas.

B) Seguir el camino hasta la población de destino, en cuyo caso lograrían salvarse la mitad de las personas de la expedición.

En este caso hay una gran mayoría de personas que eligen la opción B), aunque las dos tienen el mismo resultado (mueren 25 y viven 25), pero la primera opción está enunciada de forma negativa: mueren 25; mientras que la segunda opción da una visión positiva: sobreviven la mitad. Además de esto, en la primera opción se retrocede, y en la segunda se avanza, teniendo para nuestra psicología la palabra retroceder unas connotaciones negativas y avanzar positivas.

13. El problema de los camellos

En mi anterior libro, *Entrenamiento mental*, contaba la preciosa historia del reparto de camellos por parte de un sabio matemático. Quiero recordarla aquí, dentro del marco de las situaciones paradójicas.

Vamos con ella:

Vagaban por el desierto un hombre mayor, conocido como el matemático, y su ayudante a lomos de un solo camello; habían sufrido la pérdida del segundo camello y de esta forma penosa consiguieron llegar a un albergue donde poder descansar.

A la mañana siguiente fueron testigos de la discusión acalorada de tres hombres.

El matemático preguntó entonces al mayor de ellos por el motivo de la misma, y este pasó a contarle.

—Somos tres hermanos y recibimos como herencia 35 camellos, voluntad expresa de nuestro padre. A mí, por ser el mayor, me corresponden la mitad de los camellos; a mi hermano el mediano le corresponden una tercera parte de los 35 camellos, y al pequeño de los tres le corresponden la novena parte de los camellos.

—No sabemos cómo hacer la partición, ya que la mitad de los 35 serían 17,5 camellos, y no es posible partir un camello por la mitad. Al mediano le corresponderían un tercio, y eso son 11,66 camellos, algo que tampoco es posible. Mientras que al pequeño de los tres le corresponde la novena parte, y 35:9 es casi 3,9 camellos…

—Hemos ensayado varias particiones pero ninguno está de acuerdo, ninguna nos resulta satisfactoria.

—Yo soy calculador, me comprometo a mediar en la disputa y vosotros diréis si aceptáis la partición que os propongo —intervino el matemático.

—Adelante —dijeron los tres hermanos—, nada tenemos que perder.

—Permitidme, pues, que el camello que nos ha traído a este lugar forme parte de vuestro grupo de camellos, de esta forma tendríais 36 camellos y uno más para que podáis repartir.

Los tres hombres se miraron asombrados por tal majadería, pero no dijeron nada.

—Ahora tenemos 36 camellos y vamos a proceder al justo reparto de los mismos…

Se dirigió entonces al mayor de los tres hombres, y le dijo:

—Tendrías que recibir la mitad de 35 camellos, que son 17,5, pues bien, recibirás la mitad de 36, que son 18 camellos, y de esta forma sales ganando.

Se dirigió al segundo de los hermanos, y le dijo:

—Te corresponden un tercio de 35 camellos, que es menos de 12 camellos. Pues bien, recibirás un tercio de 36 camellos, que son 12, y también saldrás ganando.

Por último, le dijo al menor de los hermanos:

—La voluntad de tu padre es que recibas la novena parte de los 35 camellos, o sea, menos de cuatro camellos. Pues bien, recibirás la novena parte de 36 y tendrás tus cuatro camellos.

Miró entonces a los tres hombres para comprobar que estaban de acuerdo. Los tres asintieron complacidos, cómo no iban a estar de acuerdo si los tres ganaban con el reparto…

—Pues bien —concluyó el matemático—, el mayor de los tres recibirá 18 camellos, el mediano 12 y el pequeño 4. Y 18 + 12 + 4 son 34 camellos. De los 36 camellos sobran, por lo tanto, dos. Uno lo hemos puesto mi amigo y yo, el otro, si me permitís, es de justicia que me corresponda por haber resuelto vuestro problema y haberos dejado satisfechos con el reparto.

Los tres hermanos, satisfechos plenamente, asintieron elogiando el talento y agradeciendo al matemático su brillante intervención.

De esta forma, el matemático y su amigo continuaron ruta por el desierto, cada uno en su camello.

	35 camellos	**36 camellos**
Hermano mayor	1/2 (17,5)	1/2 (18)
Hermano mediano	1/3 (11,66)	1/3 (12)
Hermano pequeño	1/9 (3,9)	1/9 (4)
		+ 2

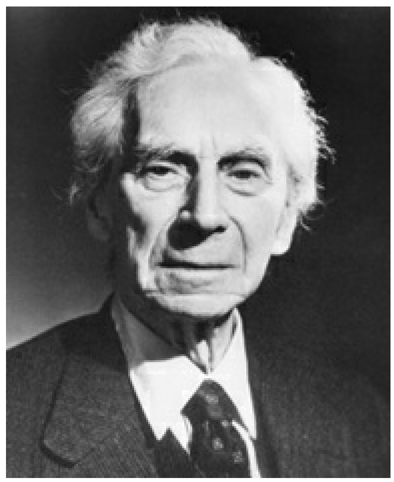
4.4. EN RESUMEN

Como decía al principio, las paradojas han ayudado a entender y avanzar algunas áreas concretas del conocimiento. Quizá nos encontramos con que la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas. Todas ellas pertenecen a la lógica, base de la matemática, convirtiéndose por sí mismas en un verdadero reto, fuente de inspiración y creación. Las paradojas han permitido adquirir un alto grado de desarrollo, obligando a la madre de las ciencias a revisar sus conceptos de rigor y precisión.

No hay que olvidar nunca que la ciencia implica un flujo continuo, de tal forma que lo que en el pasado fue herejía, se convierte en el evangelio del presente y en el fundamento del mañana.

BERTRAND RUSSELL

Bertrand Russell (1872-1970) fue una de las mentes más brillantes y a la vez controvertidas del siglo XX. Russell nació en Inglaterra en el seno de una familia acomodada, emparentada con la realeza británica.



Sin embargo, la vida puede resultar cruel incluso para los que nacen en buena familia. Russell perdió a sus padres a la edad de cuatro años y pasando una infancia solitaria y deprimida. Como cuenta en su autobiografía:

> *En mi etapa adolescente flirteé con el suicidio. Si no lo hice, fue porque quería aprender más matemáticas.*

Pero de esta infancia solitaria, Russell comprendió una lección que lo acompañaría hasta el final de su vida. Se trataba del pasaje bíblico favorito de su abuela:

> *No seguirás la multitud de los que obran mal.*

Estudió en Cambridge, donde descubrió su verdadera pasión por la lógica y por la matemática. Posteriormente también fue profesor de dicha

Universidad, además de las de Harvard y Berkeley.

En 1903 Russell publicó un libro de 500 páginas, *Los principios de las matemáticas*, y más tarde él y Whitehead escribieron los enormes tres volúmenes de los *Principia Mathematica*, que aparecieron en 1910, 1912 y 1913. Este fue su intento definitivo de reducir todas las matemáticas a las ideas básicas e irrefutables de la lógica. Los *Principia* estaban tan llenos de símbolos lógicos y eran tan complicados de entender, que el historiador de las matemáticas Ivor Grattan-Guinness describió acertadamente una página típica como si fuera semejante a «papel pintado».

> *Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero.*

Su vida fue tan intensa que casi podríamos decir que vivió varias vidas en una. A lo largo de la misma alcanzó fama como filólogo y crítico social, como escritor (fue Nobel de Literatura en 1950) y educador (creó su propia escuela para luchar contra el autoritarismo en las aulas), como miembro de la Cámara de los Lores o como interno en la cárcel de Brixton (estuvo preso varias veces por sus protestas contra la guerra).

Se opuso a la proliferación de armas nucleares, a la falta de libertades en la URSS, a la guerra del Vietnam… y defendió el derecho al voto de la mujer, el control de la natalidad o la liberación en materia sexual.

Su vida en el plano sentimental no le fue a la zaga, ya que se casó cuatro veces y tuvo multitud de encuentros amorosos.

> *Temer al amor es temer a la vida, y los que temen a la vida ya están medio muertos.*

También fue un ateo convencido, abogando constantemente contra la religión y contra cualquier manifestación religiosa.

> *Cuanto más intensa ha sido la religión en cualquier periodo y más profunda la creencia dogmática, tanto mayor ha sido la crueldad y peor el estado de los negocios públicos.*

Es difícil, en un balance final, resumir su larga vida. Tuvo una fuerza intelectual irresistible, y fue el gran malandrín del siglo XX. Se desesperó con la condición humana y, sin embargo, luchó por mejorarla. Fue considerado un villano con la misma frecuencia con que fue proclamado un héroe. Pero ni sus peores enemigos le pueden negar que fue un hombre leal a sus convicciones.

CAPÍTULO 5

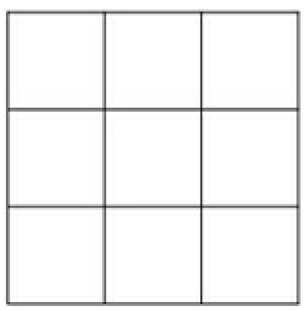
El fascinante mundo de los cuadrados mágicos

No es bueno ponerse furioso si te quedas atascado. Lo que yo hago es continuar pensando en el problema pero trabajar en algo más.

STEPHEN HAWKING

5.1. INTRODUCCIÓN

ES muy probable que alguna vez alguien te haya planteado el siguiente ejercicio lógico para que tratases de resolverlo: tienes que colocar los números del 1 al 9 dentro de un cuadrado de 3 × 3 casillas, de tal forma que si lo sumas en vertical, horizontal o diagonal te sumen lo mismo.



Pues bien, si esto te ha sucedido, has de saber que no es el acertijo de moda ni lo último en pasatiempos, estamos hablando de un cuadrado mágico de 3 × 3.

Por tanto, un cuadrado mágico se define como un cuadrado con celdillas en el que se disponen números, de tal forma que la suma de cualquiera de sus filas, columnas, y las dos diagonales principales, dan siempre el mismo resultado. Al número resultante de esta suma se lo denomina *constante mágica*, y al número de filas y columnas se lo llama *orden* del cuadrado (en nuestro ejemplo sería de orden 3).

Nuestro cuadrado mágico, ya resuelto, tendría esta forma. Podemos observar que la constante mágica es 15 (la suma de sus filas, columnas y diagonales es igual a 15).

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Pues bien, hablar de un cuadrado mágico es hacerlo de una de las maravillas numérico-mateáticas más interesantes que pueda haber. Su historia se remonta a más de cuatro mil años y se ha utilizado desde un punto de vista mágico-místico en culturas como la china, la egipcia (predecían con ellos el futuro), la india, la griega, la árabe, etcétera.

Además, los cuadrados mágicos también han servido para la resolución de importantes teoremas matemáticos, aparte de inspirar trabajos arquitectónicos y diseños industriales.

En este capítulo te contaré un poquito de su historia, sus peculiaridades, alguna técnica para poder construir tus propios cuadrados y un buen número de ejercicios para que practiques tu cálculo mental, además de potenciar tu visión lógica. Y digo que te contaré un poquito, porque los cuadrados mágicos tienen tal cantidad de posibilidades que darían para varios libros.

5.2. HISTORIA DE LOS CUADRADOS MÁGICOS

Los cuadrados mágicos son mucho más que un pasatiempo. Estos rompecabezas numéricos tienen detrás una apasionante historia que merece la pena ser contada. Así que vamos allá, adentrémonos en su fabulosa historia.

Origen chino

Cuenta la leyenda que el primer cuadrado mágico nació en el siglo XXIII a. de C., y que fue encontrado por el emperador chino de la época en el caparazón de una tortuga que habitaba en el río Amarillo.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Con este peculiar origen, no sorprende que los chinos les diesen un significado cabalístico y mágico (que en otras culturas se ha mantenido o incluso ampliado).

Los chinos creían que esto era un símbolo que reunía los principios básicos que formaron el universo:

— Los números pares simbolizan para los chinos el principio femenino o Yin.

— Los números impares simbolizan entonces lo masculino o Yang.

— El número 5 representa la Tierra, estando a su alrededor distribuidos adecuadamente los cuatro elementos principales: el agua (1 y 6), el fuego (2 y 7), la madera (3 y 8) y los metales (4 y 9).

En la India

En otras culturas también han fascinado desde tiempos antiguos. En la ciudad de Khajuraho (India) existe un templo con un pilar rodeado por una cuadrícula con un cuadrado mágico de orden 4, el cual sería equivalente a la siguiente imagen:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

En este cuadrado podemos observar cómo todas sus filas y todas sus columnas suman 34. Igualmente, también podemos observar que sus diagonales suman la misma cantidad. Pero no solo eso, sus cuatro cuadrantes y el cuadrado central también suman 34.

Los árabes

Los matemáticos árabes también se sintieron atraídos por estos cuadrados, siendo quienes los difundieron por Occidente durante la Edad Media.

Utilizaron cuadrados mágicos de orden impar, con el 1 en el centro, número que sería la única representación de Alá. Ellos crearon un cuadrado mágico cuyas filas, columnas y diagonales suman 66 (que podemos ver en la figura), cifra que en el islam corresponde al valor numérico de Alá.

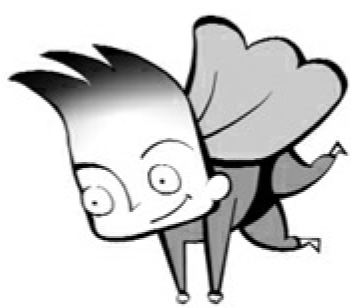
18	38	10
14	22	30
34	6	26

Cuadrado mágico de Alá.

Edad Media

Los cuadrados mágicos fueron utilizados durante la Edad Media como amuletos para buenos o malos encantamientos. Se asociaron a la religión, la astrología y la alquimia. También se grababan en láminas de plata, utilizándolos como amuletos, con la creencia de que mantendrían alejada la peste negra.

El matemático Cornelio Agrippa (1486-1535) también trabajó con cuadrados mágicos. En su obra *Filosofía oculta* los llamó «tabula in abaco». Agrippa creó cuadrados de órdenes 3 a 9 y les dio un significado astronómico. Para Agrippa, dichos cuadrados, en sus sumas, representaban simbólicamente a cifras asociadas a los planetas: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno, más el Sol y la Luna, respectivamente.



Continuando con estas creencias, cada uno de ellos jugaría un papel importante en movilizar, hacer presentes y captar las influencias y propiedades benéficas de los planetas, con lo que cualquier persona expuesta al influjo de estos cuadrados mágicos podría beneficiarse de las virtudes atribuidas a los planetas.

5.3. CUADRADOS MÁGICOS EN EL ARTE

La Melancolía, de Durero

Uno de los más famosos cuadrados mágicos es el creado por el gran artista y matemático Alberto Durero (1471-1528), en su obra *La Melancolía.*

Este es un claro ejemplo de las creencias de la época. En la obra se puede apreciar un cuadrado mágico de orden 4, formado por los números del 1 al 16. La suma de los números en horizontal, vertical o diagonal suma 34. Esta cifra está asociada a Júpiter y, por tanto, capaz de conferir a quien se exponga a su influjo las virtudes atribuidas a este planeta: buena suerte, felicidad, prosperidad, y longevidad.

La Melancolía, *de Alberto Durero.*

Detalles del cuadrado mágico.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Cuadrado mágico en La Melancolía.

Resulta extraordinario observar la gran variedad de detalles que aparecen en este grabado. Detalles que hacen pensar en la incapacidad del conocimiento humano para profundizar en los secretos de la naturaleza.

En este cuadrado mágico aparece también un dato insólito, ya que aparece grabado en su parte inferior el año en el que Durero pintó el cuadro (1514).

El cuadrado mágico de La Sagrada Familia

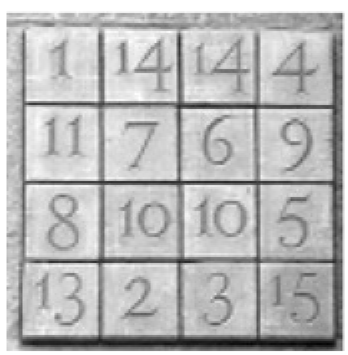
Siguiendo con cuadrados mágicos en el arte, podemos observar otro cuadrado mágico en «La Fachada de la Pasión», de La Sagrada Familia, en Barcelona.

Aunque Gaudí no dejó muy claro cómo tenía que quedar recubierta dicha fachada, cuando el escultor Josep María Subirachs aceptó el encargo le dio su toque personal.

Este cuadrado mágico es de orden 4, siendo la suma obtenida en vertical, horizontal, diagonal, o en sus cuatro cuadrantes, de 33, o sea, la edad de Jesucristo en *La Pasión.*

Se puede ver que es muy similar al de *La Melancolía*, pero dos de los números del cuadrado (el 12 y el 16) están disminuidos en dos unidades (10 y 14), apareciendo de esta forma repeticiones, rebajándose la constante mágica en 1.

Fachada de La Sagrada Familia.



El cuadrado de La Sagrada Familia.

5.4. TIPOS DE CUADRADOS MÁGICOS

Tenemos diferentes tipos de cuadrados mágicos, dependiendo del número de columnas y filas que posean. Es decir, dependiendo del orden. Vamos a ver unos cuantos ejemplos.

Cuadrado mágico de orden 3

El cuadrado mágico de orden 3, que consta de 3 filas y de 3 columnas, para un total de 9 casilleros, es el más pequeño que se puede construir (no es posible construir cuadrados mágicos de orden 2).

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Como puedes observar, la constante mágica es 15.
Esto es, la suma de sus filas es igual a 15:

$$8 + 3 + 4 = 15$$
$$1 + 5 + 9 = 15$$
$$6 + 7 + 2 = 15$$

La suma de sus columnas también da 15 como resultado:

$$8 + 1 + 6 = 15$$

$$3 + 5 + 7 = 15$$
$$4 + 9 + 2 = 15$$

E incluso si sumas en diagonal, también obtenemos el mismo resultado:

$$8 + 5 + 2 = 15$$
$$4 + 5 + 6 = 15$$

Una de las primeras preguntas que podemos formularnos es:

¿Cuántos cuadrados de orden 3 se pueden construir con las cifras del 1 al 9?

La respuesta es fácil si tenemos nociones de combinatoria, ya que cada uno de los cuadrados es una permutación de los nueve dígitos, es decir, 9! (9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1), que son 362 880 cuadrados diferentes.

Pues bien, de esta importante cantidad, solamente ocho son cuadrados mágicos (en realidad solo se puede construir uno, los siete restantes se obtienen rotando el primero). Esto nos hace comprender lo excepcionales que son, pues solo 1 de cada 45 360 cumple la condición para ser un cuadrado mágico.

Otros cuadrados mágicos con números distintos

A continuación, vamos a exponer otros dos cuadrados mágicos de orden 3, lo que nos da idea de que son infinitos los cuadrados mágicos que se pueden crear tomando nueve números consecutivos y agrupándolos de la forma correcta.

13	18	11
12	14	16
17	10	15

22	27	20
21	23	25
26	19	24

Un ejercicio muy interesante y que agilizará tu cálculo mental será que compruebes por ti mismo la constante mágica de cada uno de estos cuadrados, es decir, cuánto suman cada fila, columna y diagonal.

Cuadrado mágico de orden 4

Los cuadrados mágicos de orden 4 constan de cuatro filas y de cuatro columnas, como su nombre indica.

En el siguiente cuadrado mágico de orden 4 observemos cómo hemos colocado todos los números del 1 al 16 de tal forma que suman lo mismo cada fila, cada columna y en diagonal (en este caso 34).

3	6	12	13
10	15	1	8
5	4	14	11
16	9	7	2

Suma de sus filas:

$$3 + 6 + 12 + 13 = 34$$
$$10 + 15 + 1 + 8 = 34$$
$$5 + 4 + 14 + 11 = 34$$
$$16 + 9 + 7 + 2 = 34$$

Suma de sus columnas:

$$3 + 10 + 5 + 16 = 34$$
$$6 + 15 + 4 + 9 = 34$$
$$12 + 1 + 14 + 7 = 34$$
$$13 + 8 + 11 + 2 = 34$$

Suma de sus diagonales:

$$3 + 15 + 14 + 2 = 34$$
$$13 + 1 + 4 + 16 = 34$$

De la misma forma que hicimos con el cuadrado mágico de orden 3, también se podrían crear numerosos cuadrados mágicos de orden 4. En este caso, hablamos de 16 números distintos, que aplicando la combinatoria nos daría una cantidad total para los números del 1 al 16 de 16!, cuyo resultado es 20 922 789 888 000 (o sea, cerca de 21 billones de combinaciones posibles).

Al escuchar estas cantidades tan enormes, no solemos ser conscientes de su magnitud. Para ilustrar este numerito, baste decir que si alguien escribiera los 16 números en un cuadrado de 4 × 4 en 10 segundos, para escribir todas las combinaciones posibles tardaría 6 616 446 años, sin parar a dormir ni a comer.

Pero, como la mente humana es maravillosa, Frénicle de Bessy, matemático francés, publicó póstumamente, en 1693, que de esta enorme cantidad, tan solo 1 de cada 23 775 897 600 es un cuadrado mágico, con lo que se pueden obtener un total de 880 cuadrados mágicos distintos con los números del 1 al 16.

Cuadrado mágico de orden 5

Este es un cuadrado mágico de orden 5, con un total de 25 casilleros. Como son números consecutivos, para saber su constante mágica tenemos que hacer lo siguiente:

Hallamos la media aritmética: para ello sumamos el mayor y el menor de los números y lo dividimos entre 2. Esto es:

$$25 + 1 = 26$$

$$26 : 2 = 13$$

Una vez que tenemos la media aritmética, lo multiplicamos por el orden del cuadrado mágico, en este caso por 5. Y nos queda:

$$13 \times 5 = 65$$

Con lo cual, la constante mágica ha de ser 65.

Esto mismo lo puedes hacer, por supuesto, para cuadrados mágicos de cualquier orden.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Suma de sus filas:

$$17 + 24 + 1 + 8 + 15 = 65$$
$$23 + 5 + 7 + 14 + 16 = 65$$
$$4 + 6 + 13 + 20 + 22 = 65$$
$$10 + 12 + 19 + 21 + 3 = 65$$
$$11 + 18 + 25 + 2 + 9 = 65$$

Suma de sus columnas:

$$17 + 23 + 4 + 10 + 11 = 65$$
$$24 + 5 + 6 + 12 + 18 = 65$$
$$1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65$$
$$8 + 14 + 20 + 21 + 2 = 65$$
$$15 + 16 + 22 + 3 + 9 = 65$$

Suma de sus diagonales:

$$17 + 5 + 13 + 21 + 9 = 65$$

$$15 + 14 + 13 + 12 + 11 = 65$$

Importante ejercicio mental es que compruebes las sumas por ti mismo.

Cuadrado mágico de orden 6

En este cuadrado de orden 6 tenemos distribuidos todos los números del 1 al 36, de tal forma que da el mismo resultado si sumamos cada columna, cada fila o en diagonal.

No dejes de comprobarlo y, recuerda, prohibido utilizar la calculadora.

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Cuadrado mágico de orden 7

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Cuadrado mágico de orden 8

64	2	3	61	60	6	7	57
56	55	11	12	13	14	50	59
17	47	46	20	21	43	42	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	23	22	44	45	19	18	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	58	59	5	4	62	63	1

Vamos a parar aquí, porque podríamos seguir indefinidamente, ya que hay cuadrados mágicos de diferente orden. A continuación te expondré algún cuadrado mágico que resulta realmente curioso.

5.5. CUADRADOS MÁGICOS CURIOSOS

Dígitos repetidos

El siguiente cuadrado mágico está compuesto por los números 11, 16, 18, 19, 61, 66, 68, 69, 81, 86, 88, 89, 91, 96, 98 y 99. Esto es, no tiene más dígitos que 1, 6, 8 y 9.

96	11	89	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

Cuadrado mágico satánico

¡Aquí hay sabiduría! El que tiene entendimiento, cuente el número de la Bestia; pues es número de un hombre. Y su número es 666.

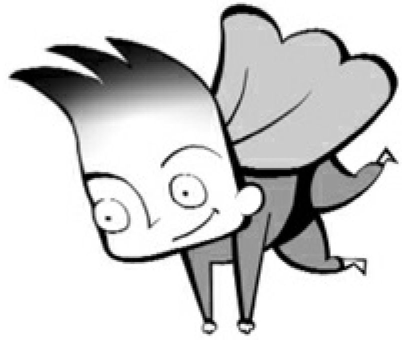
Como ya hemos dicho, los cuadrados mágicos se utilizaron en toda clase de supersticiones; observa este cuadrado mágico de orden 6. Todas sus filas, columnas y diagonales suman 666, es decir, el número del diablo, por eso es conocido como Cuadrado mágico satánico.

186	180	108	114	72	6
30	156	102	138	48	192
204	54	126	90	168	24
18	60	132	96	162	198
12	174	120	84	66	210
216	42	78	144	150	36

Satánico y… ¡Primo!

Ricemos el rizo de la fantasía y de la magia, porque el siguiente cuadrado mágico no solo es satánico, sino que además todos los números que lo integran son números primos.

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47



De números impares

Nuestro próximo cuadrado mágico es de orden 12 y está compuesto por todos los números impares del 1 al 287.

1	267	19	271	15	277	275	9	281	5	285	23
263	27	259	31	255	35	37	249	41	245	45	241
71	237	53	223	63	227	229	57	233	67	219	49
215	75	211	79	207	83	85	201	89	197	93	193
119	171	115	185	105	179	181	111	175	101	189	97
167	123	163	127	159	131	133	153	137	149	141	145
121	165	125	161	135	155	157	129	151	139	147	143
169	117	173	113	177	109	107	183	103	187	99	191
73	213	91	199	81	205	203	87	209	77	195	95
217	69	221	65	225	61	59	231	55	235	51	239
47	243	29	257	33	253	251	39	247	43	261	25
265	21	269	17	273	13	11	279	7	283	3	287

Cuadrado mágico doble

Otro peculiar es el llamado cuadrado mágico doble, ya que posee otro en su interior.

3	4	21	22	25
20	18	11	16	10
23	13	15	17	7
24	14	19	12	6
5	26	9	8	27

Cuadrado mágico de Benjamín Franklin

Nuestro siguiente cuadrado mágico, además de ser peculiar, tiene la particularidad de que fue creado, nada más y nada menos, que por Benjamin Franklin, muy aficionado a los mismos. Y es que el inventor del pararrayos y gran hombre de Estado era muy aficionado a estos mágicos pasatiempos (puedes ver su biografía al final del capítulo).

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Entre las propiedades del cuadrado mágico de Franklin podemos observar las siguientes:

1. Cada fila suma 260.
2. Cada columna suma 260.
3. La primera mitad de cualquier fila suma 130.
4. La segunda mitad de cualquier fila suma 130.
5. La primera mitad y la segunda mitad de cada columna suman 130.
6. Los cuatro números de las esquinas más los cuatro números del centro suman 260.
7. La suma de los cuatro números de cualquier cuadrado de 2×2 es 130.
8. Los cuatro números de una diagonal que sube más los cuatro números de la diagonal respectiva que bajan suma 260.

Ya sabes, no dejes de comprobarlo por ti mismo, haciendo los cálculos y las comprobaciones mentalmente.

5.6. MÉTODOS PARA CREAR CUADRADOS MÁGICOS

El objetivo de este apartado es exponerte alguna de las muchas técnicas que hay para crear cuadrados mágicos. Insisto en que el tema que estamos tratando daría para mucho más que un libro, con lo cual solo te contaré tres métodos de la forma más sencilla posible.

Cuadrados mágicos de orden impar: Método de La Loubère

El primer método para la construcción de cuadrados mágicos de orden impar se debe a Simon de La Loubére, que fue embajador de Luis XIV en Siam los años 1687 y 1688, y publicó en 1691 *Du Royaume de Siam*, en el que dio a conocer su método de construcción de cuadrados impares.

Veamos en qué consiste construyendo un cuadrado mágico de orden 5. Para comprender mejor el método, vamos a llamar a cada celda por su fila y columna, es decir:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

Nos imaginamos que nuestro cuadrado es un cilindro «imposible», es decir, nos imaginamos que las filas 1 y 5 están unidas, así como las columnas 1 y 5. Y empezamos colocando primero el 1 en la posición central de la fila superior (1,3) y vamos rellenando en diagonal, es decir, el 2 se coloca en la posición (5,4) (fila 5, columna 4), el 3 en la posición (4,5), el 4 en la (3,1), y así sucesivamente. Cuando al intentar colocar un número en la posición que debe ocupar nos la encontramos ya ocupada, colocamos ese número justo debajo del último que hemos colocado y continuamos colocando en diagonal. Veámoslo en varios pasos:

Paso 1

		1		
	5			
4				
				3
			2	

Paso 2

		1	8	
	5	7		
4	6			
10				3
			2	9

Paso 3

		1	8	15
	5	7	14	16
4	6	13		
10	12			3
11			2	9

Paso 4

17		1	8	15
	5	7	14	16
4	6	13	20	
10	12	19	21	3
11	18		2	9

Paso 5

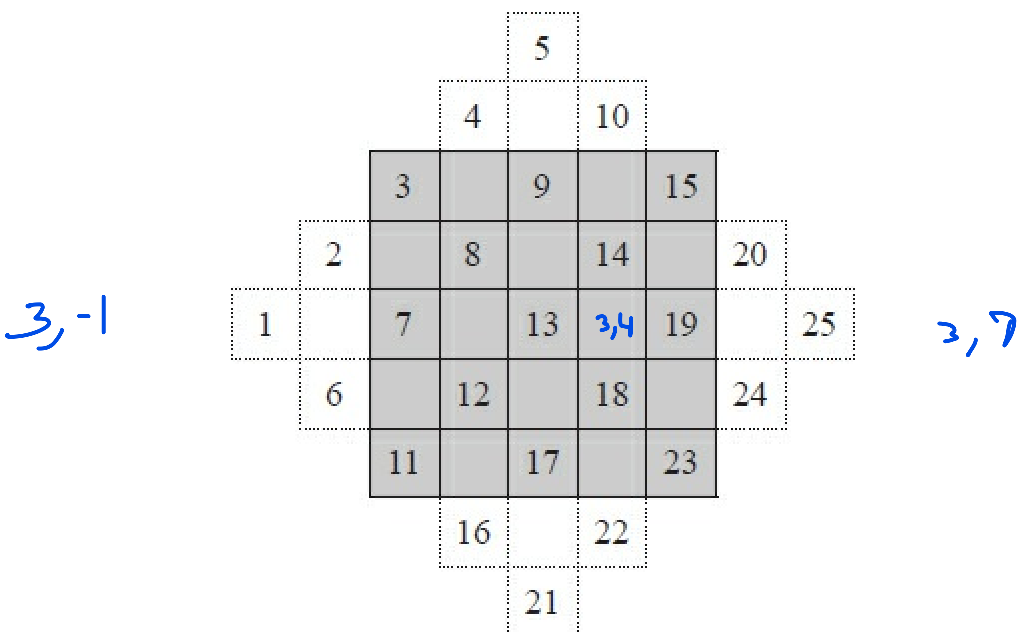
17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Como ejercicio, te propongo que crees un cuadrado mágico con los números del 26 al 50 utilizando este método.

Cuadrados mágicos de orden impar: Método de Bachet

Otro método para construir cuadrados mágicos de orden impar es el **método de Bachet**, diseñado por el matemático francés Claude-Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638); es un método muy visual y sencillo. Vamos a utilizarlo para construir un cuadrado mágico de orden 5.

Tenemos que crear el siguiente dibujo y distribuir los números de forma consecutiva y de esta forma:



Los números que han quedado dentro del cuadrado de 5 por 5 los dejamos, y colocamos los números que han quedado fuera del cuadrado en las posiciones opuestas que quedaron libres. De esta forma nos quedará el siguiente cuadrado mágico de orden 5 (puedes comprobar que las sumas de filas, columnas y diagonales dan 65).

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Como ejercicio para dominar este método, te propongo que crees un cuadrado mágico de orden 5 con los números del 26 al 50.

Y otro ejercicio más, que intentes construir con este método cuadrados mágicos de orden 3 y de orden 7.

Cuadrados mágicos de orden 4k

Vamos a construir un cuadrado mágico de orden 4k y lo rellenamos con los números del 1 al (4k)2 dispuestos de forma consecutiva (en nuestro ejemplo, el valor de k es 2, y los números serán, por lo tanto, del 1 al 64).

A la vez dividimos el cuadrado grande en submatrices cuadradas de orden 4, tal como se muestra en la figura.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

A continuación tachamos cada submatriz con una X.

Fil+col+3

5

1+1+3=5

9

5+1+3

1,1			1,4	1,5			1,8
1	2	3	**4**	**5**	6	7	**8**
9	2,2 **10**	2,3 **11**	12	13	2,6 **14**	2,7 **15**	16
17	3,2 **18**	3,3 **19**	20	21	3,6 **22**	3,7 **23**	24
4,1 **25**	26	27	4,4 **28**	4,5 **29**	30	31	4,8 **32**
5,1 **33**	34	35	5,4 **36**	**37**	38	39	**40**
41	6,2 **42**	**43**	44	45	**46**	**47**	48
49	**50**	7,3 **51**	52	53	**54**	**55**	56
57	58	59	8,4 **60**	**61**	62	63	**64**

9 -> 1+5+3

13 -> 5+5+3

Los números que están situados en celdas por donde no pasan las X se mantienen en su lugar, y por los que sí pasa la X los vamos a intercambiar con su simétrico, invirtiendo de esta forma el orden en que han sido colocados en el cuadrado.

64	2	3	**61**	**60**	6	7	**57**
9	**55**	**54**	12	13	**51**	**50**	16
17	**47**	**46**	20	21	**43**	**42**	24
40	26	27	**37**	**36**	30	31	**33**
32	34	35	**29**	**28**	38	39	**25**
41	**23**	**22**	44	45	**19**	**18**	48
49	**15**	**14**	52	53	**11**	**10**	56
8	58	59	**5**	**4**	62	63	**1**

Y de esta forma ya hemos construido un cuadrado mágico de orden 8, que a su vez tiene en su interior otros cuadrados mágicos de orden 4.

5.7. GIMNASIA CON CUADRADOS MÁGICOS

En el apartado anterior hemos vistos alguna de las técnicas para crear cuadrados mágicos. En el que estamos, te propongo un buen número de cuadrados para que, rellenándolos, los conviertas en mágicos. Con ello potenciarás tu parte lógica y, sobre todo, estás ante uno de los ejercicios más apropiados para agilizar tu cálculo mental.

Ejercicio 1

Antes comentábamos que a partir de un cuadrado mágico de orden 3, utilizando los números del 1 al 9, alcanzaríamos la posibilidad de construir ocho distintos. Pues bien, este puede ser un reto interesante al que te enfrentes: construir los ocho cuadrados mágicos posibles con los números del 1 al 9.

Una pequeña ayuda es decir que no hay cuadrados mágicos de orden 3 que empiecen por cifra impar (ya hemos reducido los casos a la mitad). Además, solo hay dos que empiezan por la misma cifra par (es decir, hay dos que empiezan con el 2, dos que empiezan con 4, dos con 6 y dos con 8), y una última ayuda (y definitiva) es que todos ellos son equivalentes bajo rotaciones.

Ejercicio 2

Rellena el siguiente cuadrado mágico de orden 3 para que su constante mágica sea 69.

11		
	23	
22		

Ejercicio 3

Completa el siguiente cuadrado de 3 × 3 para que sea mágico.

		5
	8	
11		

Ejercicio 4

Resuelve el siguiente de orden 3 para que su constante mágica sea 516.

Ejercicio 5

Construye otro cuadrado mágico de orden 3 con los 9 primeros números impares.

Ejercicio 6

Intenta rellenar este cuadrado de 4 × 4 para que sea mágico.

6	33	21	
44			
	20	32	7
9	30	18	45

Ejercicio 7

Rellena el siguiente cuadrado para que sea mágico.

6		11	
13		12	
	9	7	
		0	15

Ejercicio 8

Otro de orden 4 a rellenar.

8	5		
		7	10
	2	12	
		0	1

Ejercicio 9

Este se complica un poquito, ¡ánimo!

16			
	10		
		7	
			1

Ejercicio 10

Otro más de orden 4 que tendrás que rellenar.

	2		16
	14	3	5
13			
		6	9

Ejercicio 11

Y otro… tus neuronas te lo están agradeciendo, no lo dudes.

	5		16
		6	
	8		2
4		7	

Ejercicio 12

Construye el siguiente cuadrado mágico de orden 4 con los números del 0 al 15.

4	2		
		0	14
12			
	5	8	

Ejercicio 13

Vamos a subir a orden 5. Has de colocar los números del 1 al 25 para que el cuadrado sea mágico.

1		18	25	
20				8
12		10		21
	16	22		
23		4		17

Ejercicio 14

Rellena ahora el siguiente cuadrado mágico.

1	20		23	
24		2		10
17		25	14	
15	4		7	21
	22	11		19

Ejercicio 15

Resuelve el siguiente cuadrado mágico.

1	7	13		25
	20		2	8
22		9		
	11	17	23	4
18		5		12

Ejercicio 16

Seguimos con los de orden 5.

		15		24
20	23			12
9		17	25	
22			14	16
		21	2	

Ejercicio 17

Trata de construir este cuya constante mágica es 132.

4	26		15	37
48	13	40		
		27	46	16
	49		41	3
17	39	1		47

Ejercicio 18

Rellenar el siguiente sabiendo que la constante mágica es 540.

		96	103	110
118		102	109	
99	101		115	117
105		114		
	113		97	104

Ejercicio 19

Cuadrado mágico de orden 5. Desde el 0 al 24 has de colocar.

0	8		19	
16	24		5	
7		18		4
	1	9		15
14		20		6

Ejercicio 20

Vamos a tratar de rellenar uno de orden 6.

	4	13	31		
35	34	8		10	2
17	14		26		20
		27	3		
25		21	23	19	12
5		24		7	

Ejercicio 21

Seguimos con los de 36 celdillas. Te dejo 14 a rellenar.

1					32
35	34	6	24	10	2
	16			14	20
28	13	27	3	31	9
	11				
5		22		7	36

Ejercicio 22

Cuadrado mágico de orden 6.

1		27	10	9	
	26	25	12		2
3			16	15	34
33	24	23		13	4
		8		31	
19	5		30		18

Ejercicio 23

Vamos a pasar a orden 7. Te dejo 18 de las 49 celdillas para que intentes rellenarlas. De constante mágica, 175.

	18		9	45		6
20	35	11			3	40
4			31	12		28
33	13	49		1	37	
	2		19	34	14	
10		27	7	39		30
	24	5		21		8

Ejercicio 24

Otro de orden 7. Aquí pones en jaque tu cálculo mental, pues las sumas se hacen grandotas. Recuerda, poco a poco es como se llega lejos.

	42	23	16		48	7
1		36		26	31	47
44	38		22	33		11
10		20		30	13	40
39	32	17	28		12	
3		24	21	14		49
43	2	46	34	27	8	

Ejercicio 25

Te propongo ahora un cuadrado mágico de orden 8, cuya constante mágica es 260. Aquí tendrás que trabajar tu cálculo mental de forma intensa.

	61		13	20		36	45
14	3	62	51	46	35		19
53	60		12	21		37	44
	6	59		43	38	27	22
55	58	7	10	23	26		42
9	8	57	56	41		25	24
	63	2	15	18	31		47
16	1	64		48		32	17

Ejercicio 26

Otro de orden 8 y con 18 celdillas a rellenar. Solo apto para los más valientes.

1		6			3	63	8
56	10	54		13	51		49
	47		44	45	22		17
40	26		28	29	35	31	
25	39	30		37		34	32
41		43	21	20	46		48
16	50	11		52	14	55	
57		59	5	4		2	64

Ejercicio 27

El siguiente ejercicio consiste en situar los números primos del 31 al 101 para que el cuadrado sea mágico. Su constante es 258.

	83	97	41
53	61		73
	67	59	
79	47		101

Ejercicio 28

El siguiente cuadrado mágico utiliza los números primos consecutivos desde el 107 al 239. Su constante mágica es 865. ¿Te atreves a rellenarlo?

107	229		239	109
233		191	137	
149	139	223	127	
		113	211	163
197	167	157		193

Ejercicio 29

También existen cuadrados mágicos multiplicativos, es decir, multiplicas las filas, columnas y diagonales y dan el mismo resultado. Vamos a poner uno solo, para que sirva de ejemplo. Recuerda, ahora tienes que multiplicar.

18	1	
	6	9
3	36	

BENJAMÍN FRANKLIN

Benjamín Franklin (1706-90) nació en Boston en el seno de una familia de diecisiete hermanos, aunque la mayor parte de su vida la pasó en Pensilvania. Solo pudo cursar estudios elementales, y a los doce años se puso a trabajar en una imprenta propiedad de uno de sus hermanos. Pese a ello, no dudó en aplicarse a sí mismo su famosa frase:

> *Invertir en conocimientos produce siempre los mejores beneficios.*

Además de estudioso y creador de cuadrados mágicos, tuvo una vida pública muy activa: fundó el periódico *La Gaceta de Pensilvania*, el cuerpo de bomberos, la biblioteca pública o la Universidad de dicho Estado, así como la Sociedad Filosófica Americana.

No obstante, vamos a distinguir dos aspectos fundamentales en la polifacética vida de Franklin:

Por una parte, su **vida política**. Participando activamente en el proceso que condujo a la independencia de las colonias británicas en Norteamérica, interviniendo en la redacción de la Declaración de Independencia de 1776.

También contribuyó, una vez finalizada la guerra, en el tratado de paz y en la creación de la Constitución estadounidense.

Por otra parte, su **actividad científica**, paralela a la primera. En 1752, durante su estancia en Francia, llevó a cabo el famoso «experimento de la cometa» que le permitió demostrar que las nubes están cargadas de electricidad y que, por lo tanto, los rayos son esencialmente descargas de tipo eléctrico. Este arriesgado experimento consistió en utilizar una cometa dotada de un alambre metálico unido a un hilo de seda. Durante la tormenta acercó la mano a una llave que pendía del hilo de seda y observó que saltaban chispas, lo que demostraba que se había cargado con la electricidad captada por el alambre.

Este descubrimiento le permitió inventar el **pararrayos**, cuya eficacia hizo que tuviese una gran acogida ya en la época. Sus trabajos acerca de la electricidad lo llevaron a formular importantes conceptos en este campo, enunciando también el principio de conservación de la carga eléctrica.

Su curiosidad científica lo condujo a inventar, entre otras cosas, las lentes bifocales. Además, estudió las tormentas que se forman en el continente americano, y fue el primero en analizar la corriente cálida que discurre por el Atlántico norte y que hoy conocemos como corriente del Golfo.

Podemos concluir que Benjamín Franklin no solo fue el único norteamericano de la época colonial británica que alcanzó fama y notoriedad en la Europa de su tiempo, sino que estamos ante un genio polifacético que dejó un gran legado para la humanidad.

CAPÍTULO 6

Los sudokus

Si el conocimiento puede crear problemas, no será a través de la ignorancia que podamos resolverlos.

ISAAC ASIMOV

NO pretendo, ni mucho menos, que este sea un libro de «sudokus». Creo que la fiebre que han generado es suficiente como para no entrar yo a saco también en el tema. Eso sí, considero que toda su popularidad y sus fundamentos merecen su parcelita dentro de este libro, por lo que voy a contar un poco sobre los mismos, antes de ponerte a prueba con los correspondientes ejercicios.

6.1. CONCEPTO Y REGLAS DEL SUDOKU

El sudoku es un rompecabezas numérico formado por un cuadrado de 9 × 9 casillas y un total de 9 celdillas de 3 × 3.

Las reglas del sudoku son muy simples, no se trata de sumar ni de realizar ninguna operación aritmética, pero sí se utilizan números (aunque podrían ser letras o figuras). Se trata de colocar los números del 1 al 9 de tal forma que no se repita ninguno ni en sus filas, ni en sus columnas, ni en las celdas de 3 × 3.

Un sudoku está bien planteado si la solución es única. La resolución del problema requiere paciencia y ciertas dotes lógicas.

Veamos un ejemplo de sudoku sin resolver (partimos de unos números dados), y otro con el mismo sudoku ya resuelto:

7							5	8
		8	2	5		1		9
								7
			4	2	6	7		
9	4	7	5		8	6	2	3
		1	7	9	3			
8								
2		6		8	1	4		
5	9							6

Sudoku planteado.

7	6	9	1	3	4	2	5	8
4	3	8	2	5	7	1	6	9
1	5	2	8	6	9	3	4	7
3	8	5	4	2	6	7	9	1
9	4	7	5	1	8	6	2	3
6	2	1	7	9	3	5	8	4
8	1	3	6	4	5	9	7	2
2	7	6	9	8	1	4	3	5
5	9	4	3	7	2	8	1	6

Mismo sudoku ya resuelto.

6.2. ORIGEN Y POPULARIZACIÓN DEL SUDOKU

Este rompecabezas matemático, que tanto furor está causando, se creó a partir de los trabajos de uno de los más grandes matemáticos habidos, Leonhard Euler (al final del capítulo puedes ver su biografía).

Euler, si bien no creó el juego, utilizó el sistema conocido como cuadrado latino para realizar cálculos de probabilidades. Pues bien, dichos trabajos parece ser que sirvieron de inspiración para la creación de este popular pasatiempo.

Y esta inspiración parece ser que se inició en Nueva York en 1979. Por aquel entonces, la empresa *Dell Magazines* publicó en sus páginas de entretenimiento el primero de estos pasatiempos, bajo el nombre de *number place* (el lugar de los números), ideado por Howard Garns.

No obstante, donde realmente se hicieron populares fue en Japón en 1984, donde la empresa Nikoli los hizo suyos a través de su creador Maki Koji, llevando a cabo algunas modificaciones sobre el pasatiempo original, y donde ya tomaron el nombre de sudoku, que significa «número solo».

En diciembre de 2004 el diario británico *The Times*, verdadera institución en la popularización de pasatiempos, publicó su primer sudoku en las páginas de entretenimiento. Poco después, muchos otros periódicos de todo el mundo publicaron en sus páginas sudokus a diario, convirtiéndose en un verdadero fenómeno entre la población.

6.3. EL ÉXITO DE LOS SUDOKUS

Es digno de análisis el porqué del éxito de los sudokus.

Simplicidad: Yo creo que uno de los factores fundamentales de su abrumadora irrupción es su simplicidad en cuanto a las reglas de resolución se refiere, lo que lo hace muy fácil para los principiantes. Solo se utilizan los números del 1 al 9, con lo que no se requiere un determinado conocimiento del idioma ni de conocimientos en general. Tampoco se requiere aritmética mental ni conocimientos matemáticos. Lo que en el sudoku se pone en juego es cierta concentración y mucha imaginación.

Generan satisfacción: Los sudokus son un absorbente desafío que, cuando se resuelven, generan una gran satisfacción.

Rápida mejora en las habilidades: Cuando se empiezan a resolver los sudokus más sencillos pronto se mejoran las habilidades, lo que dará lugar a ir progresivamente pasando a rompecabezas más complejos.

Sencillez: Los sudokus son fáciles de guardar y se puede continuar con ellos en cualquier momento.

6.4. LOS BENEFICIOS DE HACER SUDOKUS

El sudoku ayuda a mantener en forma el cerebro y mejora la memoria, según un estudio presentado por el profesor Ian Robertson del Trinity College de Dublín, Irlanda. Según Robertson, ejercicios cerebrales como los del sudoku son muy útiles para mantener la memoria, que es la primera capacidad del cerebro que se debilita con el paso de la edad. El estudio, anunciado en el diario inglés *The Times*, abarcó a cerca de tres mil personas con edades entre sesenta y cinco y noventa años, que tenían el hábito de resolver juegos de lógica y memorización. Dicho grupo fue comparado con otro que no acostumbraba a practicar ese tipo de ejercicios. El resultado reveló que el primer grupo presentaba una actividad cerebral equivalente a personas con catorce años menos de edad.

Está perfectamente demostrado, y creo que es muy fácil de intuir, que la gimnasia mental es importantísima para mantener nuestro cerebro en forma y ayudar a prevenir las enfermedades mentales, tipo Alzhéimer.

6.5. CONSEJOS PARA RESOLVERLOS

1. **Utiliza lápiz y goma de borrar.** Habrá ocasiones en las que te equivocarás al colocar algún número, y de esta forma podrás borrarlo.
2. **El sudoku solo tiene una solución.** Tienes que ir valorando las opciones de casilla y marcar como bueno aquel que sea el único posible. Si en alguna casilla hay varias opciones, déjala para más adelante. Por otra parte, empieza por las matrices donde más números haya.
3. **Empieza por los números que más se repitan.** De esta forma es más fácil determinar dónde va el número. O sea, si un número se repite ocho veces, será trivial la labor de colocar el noveno.
4. **Barrido dentro de una matriz.** Dentro de cada matriz, haz un barrido para «poner cruces» en aquellas casillas donde un número no puede ir. De esta forma, donde haya un hueco libre en una sola casilla de una región, ahí es donde deberá ir ese dígito.
5. **Escribe números pequeñitos.** Te será de ayuda escribir los posibles resultados dentro de cada casilla, en pequeñito, y borrarlos a medida que los vayas descartando. Cuando llegues al dígito correcto, será el momento de escribirlo grande en el centro y borrar el resto de opciones.
6. **Empieza por los fáciles.** Creo que es bastante obvio, pero no dejes de empezar por los más fáciles, pues los más complicados o diabólicos pueden llegar a ser frustrantes. Los más sencillos se pueden resolver en unos minutos, mientras que los más complicados pueden llevar varias horas.

7. **Repaso general.** Al terminar el sudoku, no dejes de repasarlo, pues puedes haber repetido algún número sin darte cuenta.

6.6. EJÉRCITATE CON LOS SUDOKUS

Hablar de sudoku sin ponerte ejemplos para que ejercites con ellos, sería dejar este capítulo un poco vacío. Por esta razón, te propongo la resolución de diecinueve de ellos, con diferentes grados de dificultad. Desde el nivel 1 (los menos difíciles), hasta el nivel 5 (muy complicados).

Nivel 1

1)

9			8		2			
	6	1			9	2		
			5		4	7	6	9
		6			5			
	9	8	6		3	1	2	
			1			3		
8	5	3	4		1			
		4	2			9	5	
			7		6			8

2)

4		8	2	5				
	6					1		2
2	7	9	6			5	3	
	2	3						5
		7	5		2	4		
5						7	2	
	5	1			6	3	7	8
6		4					5	
				8	5	6		9

3)

8			4	3	2	1	7	
2		1						8
6		7	5	1				
1			3					
	8		2		5		6	
					6			4
				5	4	3		2
3						6		9
	1	5	6	2	3			7

4)

6	9	5				4	8	1
				9				
4								3
2			9	1	5			4
	4		7	2	6		9	
1			3	4	8			2
3								5
				6				
9	8	2				6	4	7

Nivel 2

5)

	4	7				3		
8		6		7	4			
			2		3	8	4	
	7					4		3
9			4		8			2
4		3					9	
	2	8	6		1			
			8	2		7		9
		9				2	1	

6)

7		2	1					9
				4	9			5
4	9	3	2					1
	8	4	9			5		
		1			3	4	8	
8					4	6	3	2
6			7	3				
2					6	9		4

7)

	8	1	9		7	2	6	
4			5		6			3
5								9
1	4						5	6
				3				
7	9						8	1
2								8
9			4		2			7
	3	6	7		1	9	2	

8)

	7	5	6	2		3		
				9			2	
1	4				7			
		6	3				5	1
	2	9				8	7	
7	1				8	4		
			5				4	2
	9			4				
		4		8	2	7	1	

Nivel 3

9)

	4	7	1	5				3
9		8	4					
3	2						8	
7	1		6			3		
		5			2		9	7
	6						7	5
					5	2		9
5				8	9	1	3	

10)

	4		2				3	7
6				9			1	
		9	7		1			8
	7					6	4	
		6				3		
	3	5					7	
9			4		8	7		
	5			2				6
8	1				9		5	

11)

				1	7	2	3	
7	6	2		8				
					9		6	
3	4				5		8	
	5						4	
	8		4				2	3
	2		9					
				6		1	5	4
	3	6	1	7				

12)

5				1		8		2
							6	9
	3		5	2				
9	6				3			1
3			2		6			4
8			4				9	6
				3	4		7	
1	9							
4		3		7				8

Nivel 4

13)

	1		3					6
				2				3
		5	6				7	
		9	7		4		5	
	8			5			4	
	2		8		1	7		
	3				6	1		
6				9				
4					7		6	

14)

		4				8		
					6	3	2	7
8						6		
			1		7		6	
7		3		5		1		2
	5		3		9			
		5						6
4	8	9	5					
		2				4		

15)

6	9							
			2		7			8
	5			8	1	3		
5			6					
4	2			5			9	6
					9			1
		7	4	3			1	
2			5		6			
							2	7

16)

6						1	4	
				3	4			8
		1	2					
	2		9	8	7	6		
		4	6	2	3		1	
					8	7		
8			4	5				
	5	3						2

Nivel 5 (para genios)

17)

6			2					5
		3	4		8			
		7	1				2	
9	6							
	2						1	
							7	2
	5				4	8		
			7		6	5		
8					3			9

18)

6			8		5	7	1	
	4	2						
								6
		6		8	1			
	2						4	
			6	7		1		
2								
						5	9	
	3	8	1		6			7

19)

5		1	9			4		7
								1
		6		8			3	
	2				3			
1								9
			7				5	
	8			6		9		
3								
7		9			1	5		4

LEONHARD EULER

Leonhard Euler (1707-1783). Nació en Suiza y fue uno de los grandes matemáticos que ha dado la humanidad. Discípulo de Jean Bernoulli, su carrera profesional se desarrolló en las Academias de Ciencias de Berlín y San Petersburgo.

En 1735 perdió la vista de un ojo, y en 1766 se quedó prácticamente ciego. Sin embargo, no por ello dejó sus trabajos, que le dictaba a su hijo mayor. De hecho, Euler es el matemático más prolífico de la historia, incluso dejó numerosos trabajos cuya recopilación aún hoy no ha terminado. La productividad matemática de Euler fue tan extraordinaria que nos encontramos su nombre en todas las ramas de las matemáticas: hay fórmulas de Euler, polinomios de Euler, constantes de Euler, integrales eulerianas y líneas de Euler.

Fue un hombre muy capacitado, que dominó campos como la anatomía o la botánica, realizando también aportaciones a la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Entre sus obras se encuentran *Instituciones del cálculo diferencial* (1755), *Instituciones del cálculo integral* (1768-1770) e *Introducción al álgebra* (1770).

Tenía una memoria asombrosa, que le permitía repetir la *Eneida* desde el principio hasta el fin, así como recordar las potencias, hasta la sexta, de los 100 primeros números primos. Ya con tres años demostró su capacidad con los números al corregir una cuenta mal hecha. Toda esta fuerza mental parece ser que derivaba de una extrema concentración unida a su talento y conocimientos.

En su vertiente humana, Euler fue un hombre apacible en su ánimo, positivo y muy moderado, y sencillo en sus costumbres, que disfrutaba de la vida familiar y de su prole de trece hijos.

CAPÍTULO 7

Los kakuros

La gota horada la roca, no por su fuerza sino por su constancia.

OVIDIO

7.1. INTRODUCCIÓN

A continuación vamos a dar unas pinceladas a pasatiempos numéricos que no han adquirido la popularidad de los sudokus, pero que tienen las ventajas de estos, y el añadido de que también tendrás que hacer sumas.

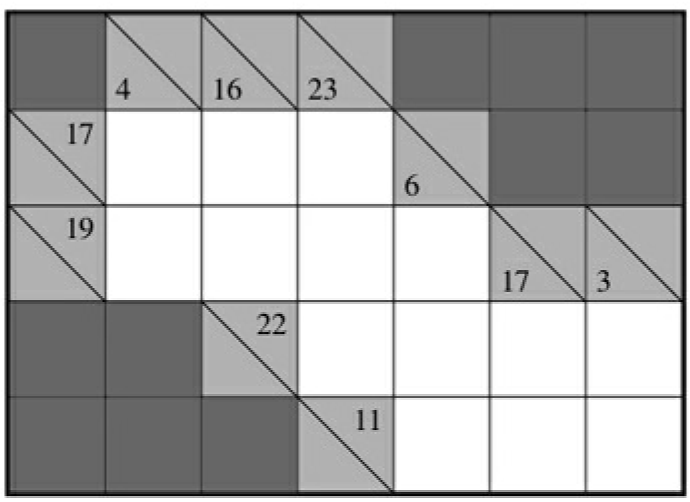
Se trata de los kakuros, de los que veremos su sencillo funcionamiento, a la par que te propondré una serie de ejercicios para que puedas realizar otro tipo más de entrenamiento mental.

7.2. QUÉ SON Y CÓMO SE HACEN LOS KAKUROS

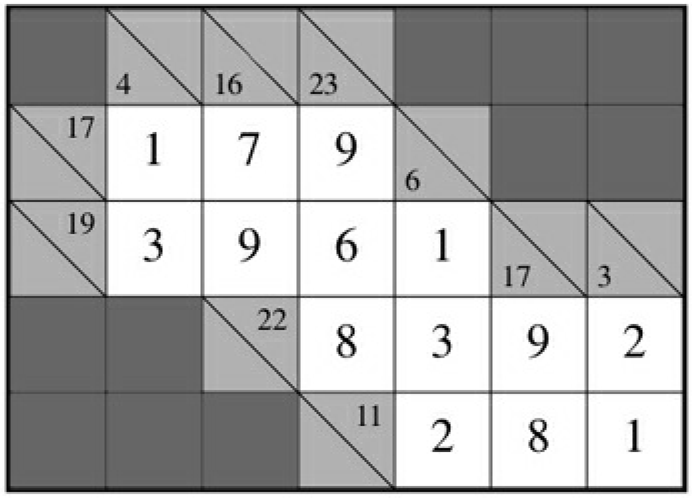
El kakuro es un crucigrama numérico, que al igual que todo crucigrama, tiene combinaciones verticales y horizontales a rellenar con números del 1 al 9, de tal forma que sumen la cantidad que requiere esa línea (que ya viene dada). Por este motivo, los kakuros también son llamados rompecabezas de sumas cruzadas, puesto que cada respuesta ayuda a resolver otras que se cruzan con ella.

Al igual que en el sudoku, no pueden repetirse los números en la misma línea (vertical u horizontal).

A continuación va un ejemplo para que veas cómo se realizan:



Kakuro a resolver.



Kakuro resuelto.

Si te fijas bien, en el ejemplo partimos de un kakuro a resolver, con unas claves en forma de números a los que hay que llegar mediante sumas.

La resolución del kakuro implica colocar números en esas casillas en blanco, de tal forma que sumen el número que indica la clave, tanto en horizontal como en vertical.

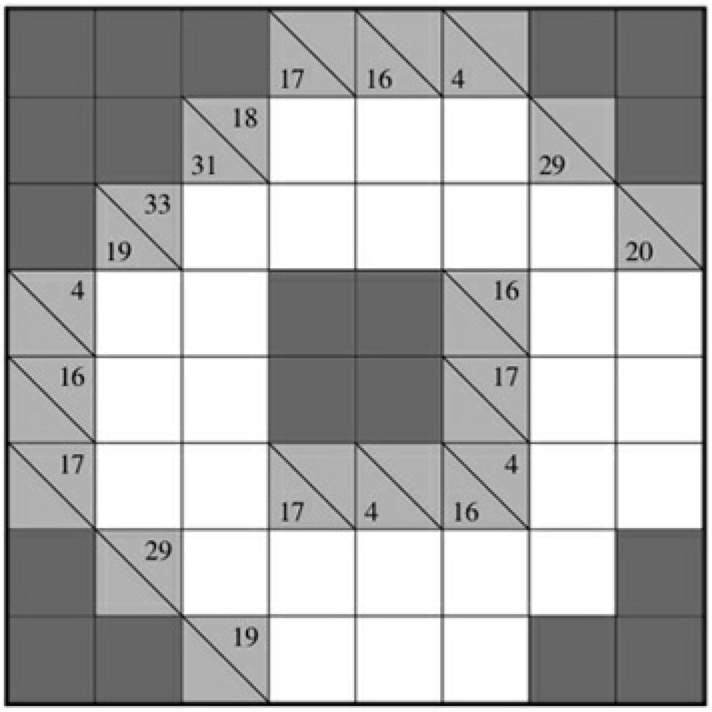
7.3. LOS BENEFICIOS DE HACER KAKUROS

Además de la parte lúdica y de entretenimiento que significa hacer kakuros, con ellos trabajaremos la parte lógica y también el cálculo mental, pues, a diferencia de los sudokus, tendrás que hacer sumas, con el consiguiente ejercicio que ello supone.

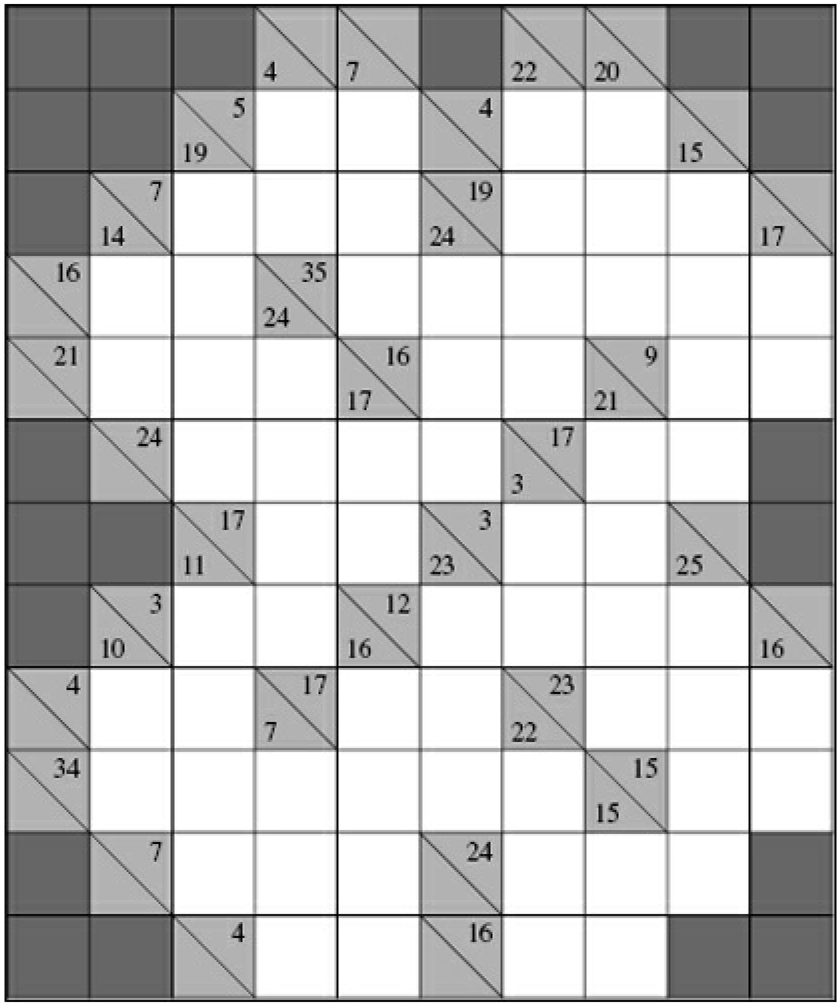
En las próximas páginas te propongo una serie de kakuros para que trates de resolverlos. El grado de dificultad va en aumento, con lo que te aconsejo que empieces por el principio.

7.4. EJERCICIOS

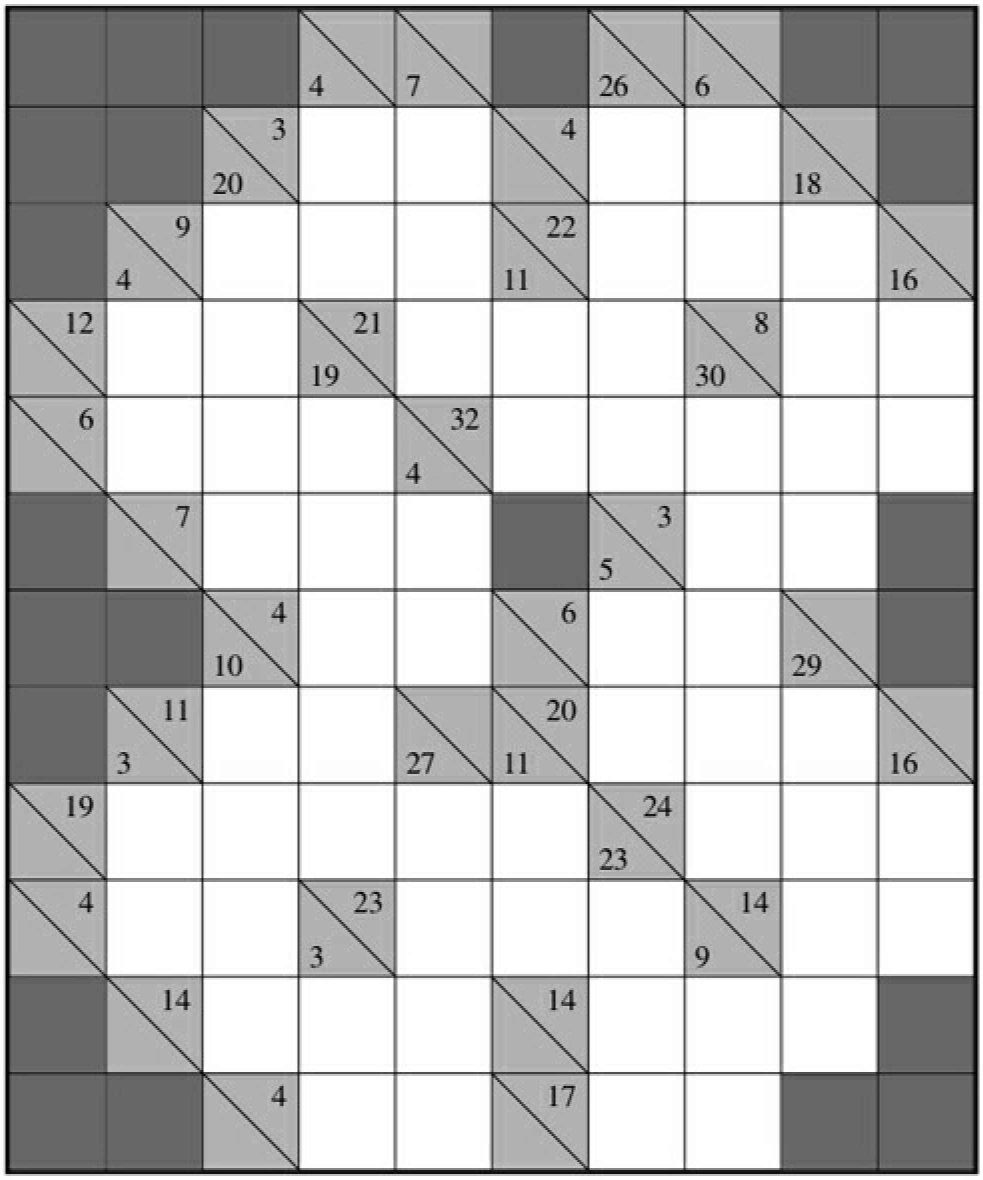
Ejercicio 1



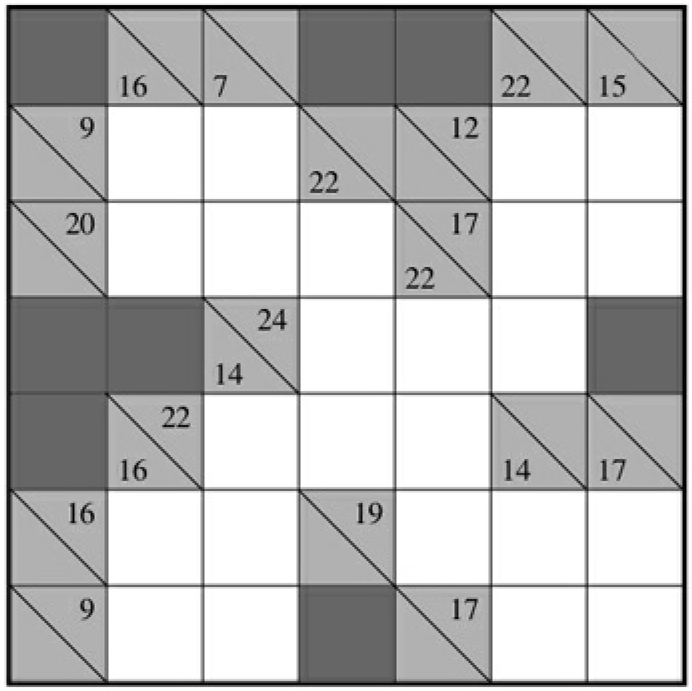
Ejercicio 2


4 7 22 20
5 19 4 15
7 14 19 24 17
16 35 24
21 16 17 9 21
24 17 3
17 11 3 23 25
3 10 12 16 16
4 17 7 23 22
34 15 15
7 24
4 16

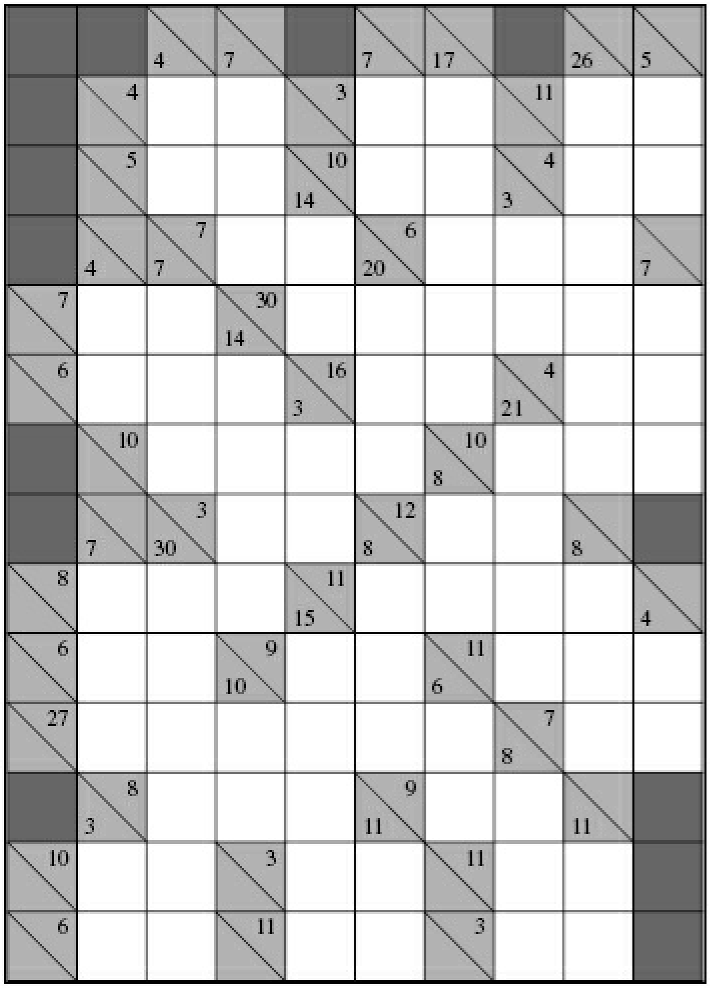
Ejercicio 3


4 7 26 6
3 20 4 18
9 4 22 11 16
12 21 19 8 30
6 32 4
7 3 5
4 10 6 29
11 3 27 20 11 16
19 24 23
4 23 3 14 9
14 14
4 17

Ejercicio 4



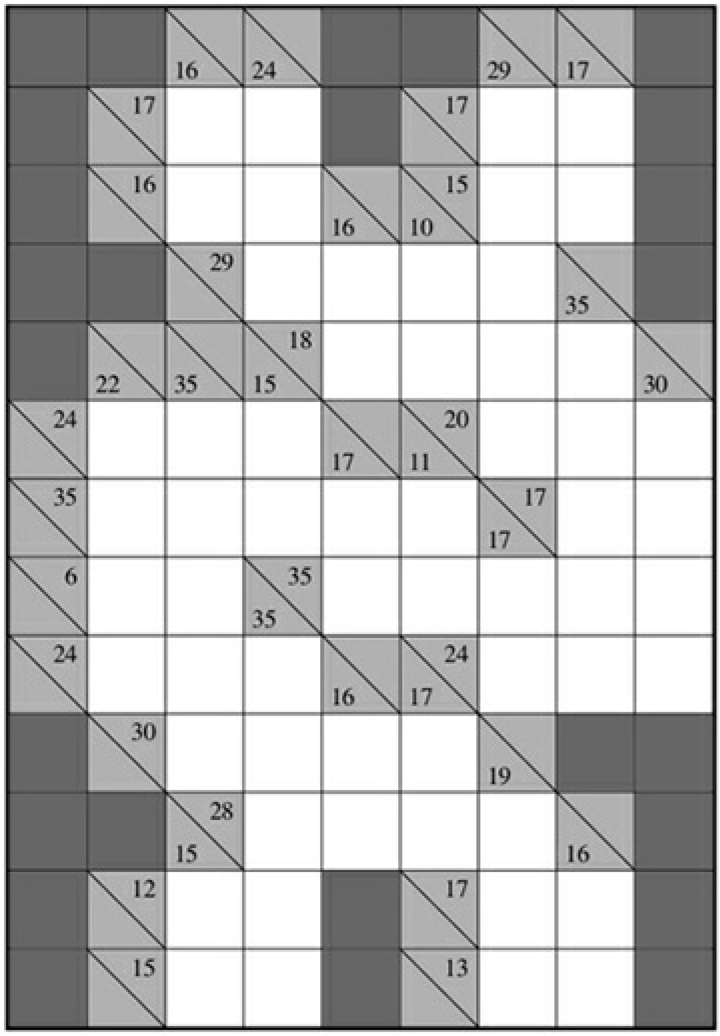
Ejercicio 5


4 7 7 17 26 5
4 3 11
5 10 14 4 3
4 7 7 6 20 7
7 30 14
6 16 3 4 21
10 10 8
7 3 30 12 8 8
8 11 15 4
6 9 10 11 6
27 7 8
8 3 9 11 11
10 3 11
6 11 3

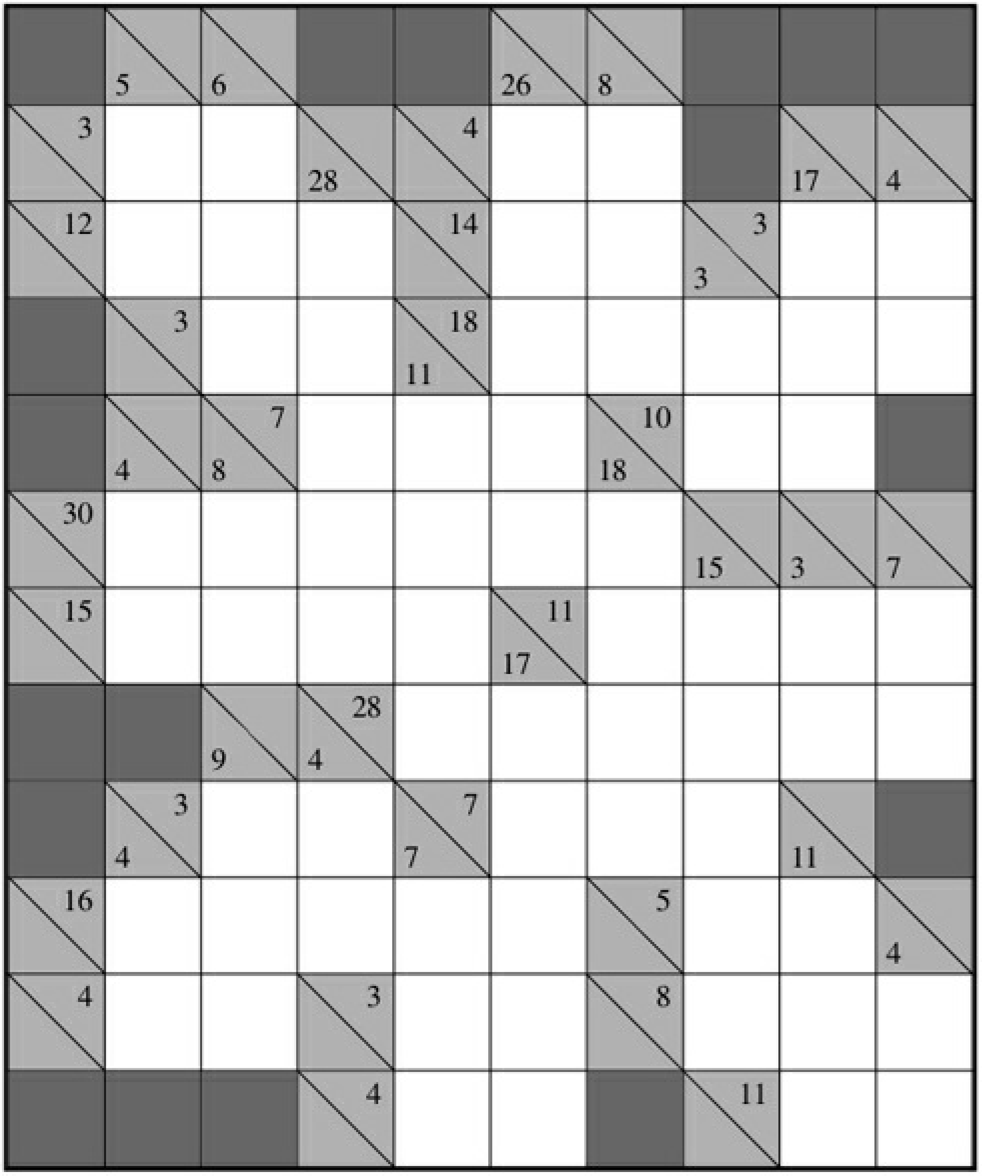
Ejercicio 6

■	5\	10\	■	■	10\	4\
\8			■	6\5		
\3			6\12			
■	\8				8\	■
■	3\	5\8				4\
\7				\4		
\3			■	\3		

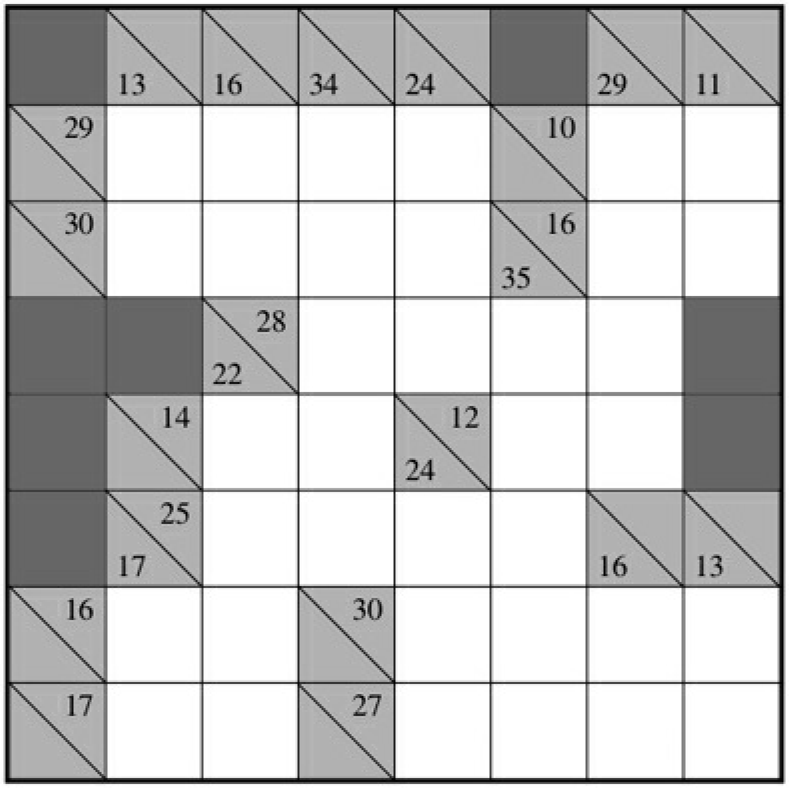
Ejercicio 7

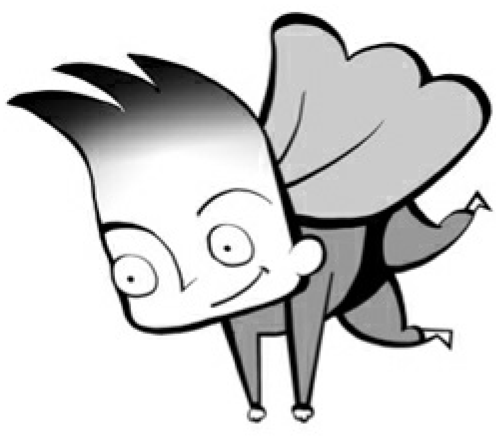

16
24
29
17
17
17
16
15
16
10
29
35
18
22
35
15
30
24
20
17
11
35
17
17
6
35
35
24
24
16
17
30
19
28
15
16
12
17
15
13

Ejercicio 8

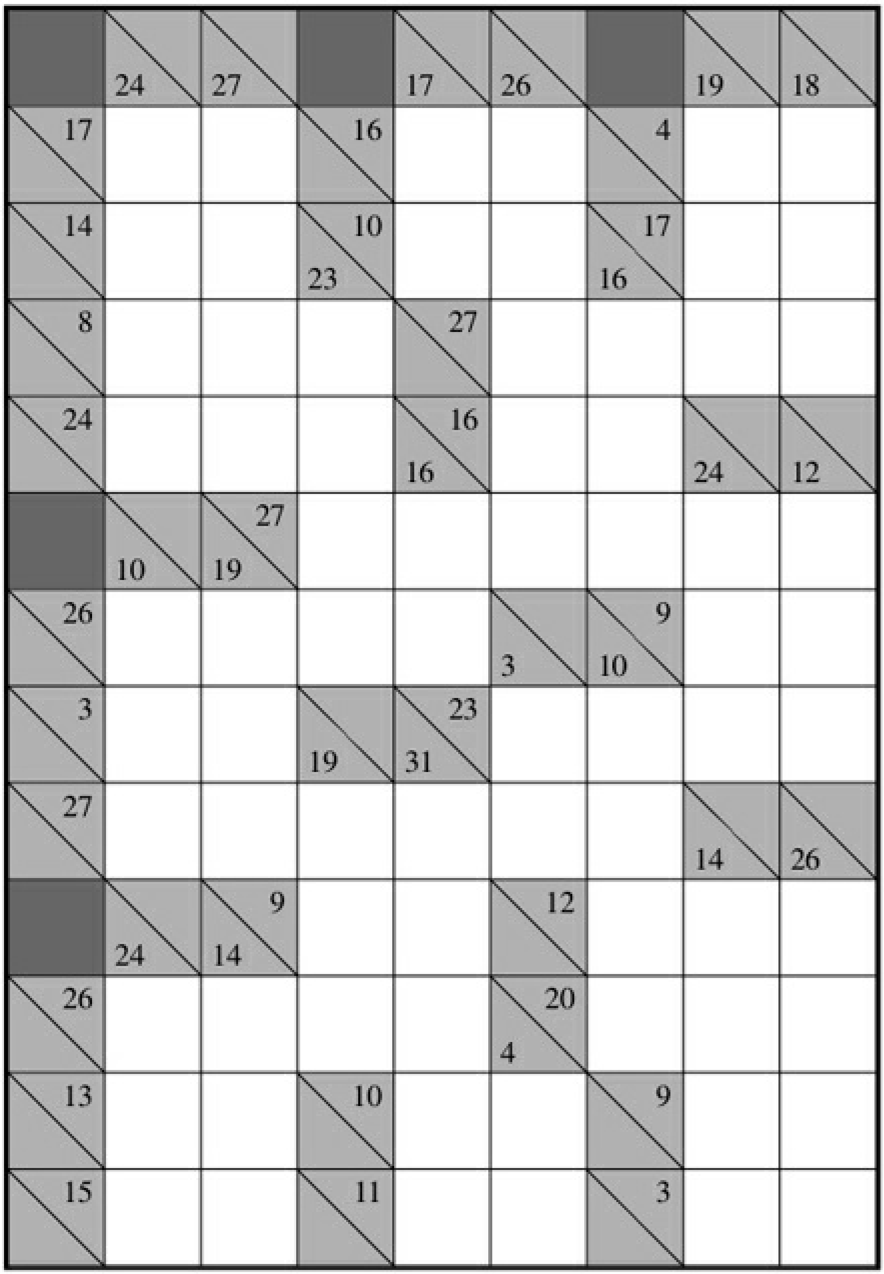

5 6 26 8
3 28 4 17 4
12 14 3 3
3 18 11
4 7 8 10 18
30 15 3 7
15 11 17
9 28 4
3 4 7 7 11
16 5 4
4 3 8
4 11

Ejercicio 9





Ejercicio 10



Ejercicio 11

■	23\	11\	8\	■	11\	3\	8\	16\	4\
\16				13\22					
\13			15\14			10\9			26\
\5		15\13			7\12			9\9	
\20				9\9			10\12		
\9			4\4			11\8			
\1		12\9			9\13			9\4	
■	26\5			7\15			10\9		
\17			9\5			6\9			24\
\2		14\11			10\6			9\8	
\18				19\6			10\5		
\8			6\11			13\21			
\4		4\13			3\6			6\2	
■	\25						\11		

ALAN TURING

Alan Mathison Turing (1912-54) fue uno de los matemáticos más relevantes del siglo XX, considerado como el creador de la computación artificial. Nació en Londres y pasó su infancia en la India, donde trabajaba su padre. A los doce años ya mostraba unas dotes e inquietud únicas para la Ciencia.

En 1936 ingresó en la Universidad de Princeton como estudiante de posgrado. En esta época publicó un artículo en el que estableció las bases teóricas para todas las ciencias de computación. Además, describió lo que se denominó *Máquina de Turing*, que supone un dispositivo teórico que podía leer instrucciones de una cinta de papel perforada y ejecutar todas las operaciones críticas de un ordenador. El artículo fijó los límites de las ciencias de la computación porque demostró que no es posible resolver problemas con ningún tipo de ordenador.

La Segunda Guerra Mundial ofreció un insospechado marco de aplicación práctica de sus teorías, al surgir la necesidad de descifrar los mensajes codificados de la máquina que utilizaban los nazis para cifrar sus mensajes secretos, conocida como *Enigma*. Turing fue entonces reclutado por Inglaterra, en *Bletchley Park*, para descifrar los secretos de la máquina enemiga. Como consecuencia, construyeron el *Colossus*, una máquina de grandes dimensiones capaz de efectuar cálculos combinatorios mucho más rápido que cualquier ser humano, algo que vino a ser decisivo en la ruptura final del secreto de *Enigma* y que resultó determinante en la victoria de los aliados durante la guerra.

Otro momento destacado en la vida de Turing fue la publicación de un famoso artículo en el que figuraba lo que se conoce como *Prueba o Test de Turing*, para identificar la existencia o no de inteligencia en una máquina. Este artículo sentó las bases de una nueva rama de las ciencias de la computación, *la inteligencia artificial*.

Además de sus logros científicos, también fue un gran atleta de carreras de fondo, incluso estuvo a punto de participar con Inglaterra en los Juegos Olímpicos de 1948.

Sin embargo, los escándalos presidieron sus últimos años. En 1952 fue detenido por sus relaciones homosexuales con un joven de Manchester. El reconocimiento de su homosexualidad generó una atmósfera de antipatía creciente hacia él, además de ser obligado a mantener un tratamiento con estrógenos, que le provocó impotencia y le ocasionó otros efectos secundarios. Además, la intransigencia con el tema homosexual en aquella época implicó que fuese excluido de su trabajo en el Departamento de Criptoanálisis.

Todo esto le provocó fuertes recaídas psicológicas, que lo llevaron a su muerte en 1954, tras morder una manzana impregnada con cianuro. El más que probable suicidio terminó de esta forma tan injusta con la vida de uno de los grandes héroes de la Segunda Guerra Mundial.

SOLUCIONES

CAPÍTULO 1

1. El cazador cazado

Nuestro héroe introdujo su mano en la bolsa y extrajo una de las dos bolas, pero antes de mostrarla la dejó caer en un acto intencionado de torpeza dentro del recipiente donde estaban el resto de bolas. De esta forma no se podía saber qué bola había extraído… Tras pedir disculpas por haber sido tan torpe, propuso que la bola que había extraído sería blanca o negra en función de la que quedase en la bolsa. Ante esto, nadie pudo oponerse.

Al sacar la bola de la bolsita, se vio que era negra, con lo que la conclusión lógica es que la bola que hubiese extraído y que se había perdido era, por tanto, de color blanco.

De esta forma, nuestro hábil joven consiguió ganar los 100 euros y dar una buena lección al estafador.

2. El problema de los tres condenados

El preso A llegó a la conclusión de que su tira era **blanca** por lo siguiente:

Si mi cinta fuese negra, B vería una cinta negra (la mía) más una cinta blanca, la de C. Y como B no era tonto, debería razonar así:

Puesto que A la lleva negra y C no grita que está viendo dos negras (con lo que la suya será blanca), es que yo llevo la cinta blanca.

Pues bien, el hecho de que B no hubiese hecho esta deducción rápidamente convenció a A de que su propia cinta era blanca.

Esta deducción hecha por A la podrían haber hecho B y C, pero como el preso A fue más rápido, demostró una mayor astucia e inteligencia, con lo que el rey lo indultó de su pena.

3. Las dos tribus

La clave para averiguarlo radica en que ante la primera pregunta del explorador todos dirían que son zopes: si lo son, porque es verdad; y si son zipis, porque estos siempre mienten y, por lo tanto, dirán que son zopes.

Por lo tanto, hecha esta reflexión, el barquero reprodujo la respuesta exacta, puesto que dijo zope. O sea, el barquero es zope y el de la orilla es zipi.

4. A cruzar el río

En el primer viaje, el barquero pasa con la oveja y la deja en la orilla final.

Vuelve y coge la col, para cruzar con ella también y dejarla en la orilla donde estaba la oveja, cogiendo a esta para devolverla a la orilla donde aún está el lobo.

Coge al lobo, no puede dejarlo con la oveja, y lo lleva a la orilla final, donde ya teníamos la col.

Y, por último, regresa a por la oveja y la lleva a la orilla final. De esta forma, ya están todos reunidos en la orilla que queríamos alcanzar.

5. Análisis y solución a «Un problema en televisión»

Estamos ante un famoso ejercicio de probabilidad que no generó pocas controversias y discusiones, pero que tiene una clara resolución matemática, pese a que la misma es un tanto antiintuitiva.

Y es así, porque nuestra reacción inicial es pensar que da igual que cambiemos o no, ya que nos quedan dos puertas y gozaríamos, por tanto, del 50% cambiemos o no cambiemos daría lo mismo. Pero este razonamiento es incorrecto. Veamos brevemente, y para no aburrirte, las distintas combinaciones posibles:

	PUERTA 1	PUERTA 2	PUERTA 3
CASO A	Calabaza	Calabaza	Apartamento
CASO B	Calabaza	Apartamento	Calabaza
CASO C	Apartamento	Calabaza	Calabaza

Al elegir la puerta número 1, tienes en un principio 1/3 de probabilidades de acertar y que te toque el apartamento.

Hasta aquí vamos bien, pero en este momento aparece en escena la clave de la cuestión: **el presentador sabe qué hay detrás de cada puerta** y va a descartar una en la que hay una calabaza.

En el caso A, el presentador te abrirá la puerta 2, y en el caso B te abrirá la puerta 3, con lo que solo dejará una puerta con la calabaza.

En este punto, sacamos la matemática conclusión de que tenemos dos casos en los que nos conviene cambiar de puerta para obtener el apartamento. Solo en el caso C no te conviene cambiar, puesto que habrías acertado en tu primera elección.

Por tanto, podemos concluir con que de las tres combinaciones posibles, en dos es bueno cambiar (2/3), y solo en una (1/3) es malo. Tus posibilidades de ganar aumentan del 33% al 66% si cambias de puerta después de que te muestren una incorrecta.

Con lo cual, vaya si tiene importancia el cambiar o no de puerta una vez que el presentador te da esa opción; si cambias, tendrás el doble de probabilidades de que te toque el premio gordo, o sea, el apartamento.

6. Los ocho panes

Si hemos compartido los ocho panes a partes iguales, y éramos tres personas, corresponderán 8/3 panes a cada uno. Pues bien, yo he contribuido con cinco panes, o sea:

$$5 – 8/3 = 7/3$$

Por su parte, mi compañero ha contribuido con tres panes, lo que será:

$$3 – 8/3 = 1/3$$

Por lo tanto, yo he contribuido en siete veces más que mi compañero, con lo que debo recibir siete monedas de oro, y no cinco como me habéis dicho.

7. Las tres hijas de Juan

Tenemos un primer dato que dice que el producto de las edades de las hijas suma 36, con lo que se establecerían las siguientes combinaciones posibles:

1, 1, 36
1, 2, 18
1, 3, 12
1, 4, 9
1, 6, 6
2, 2, 9
2, 3, 6
3, 3, 4

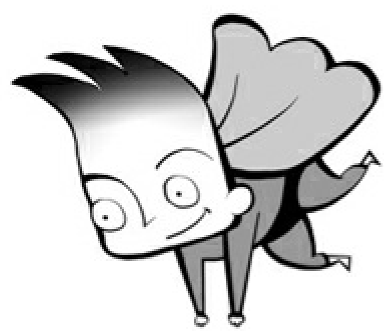
Pedro está viendo el número del portal y sabe que la suma de las edades de las hijas es el número del mismo. Sin embargo, dice que le falta un dato. Pues bien, esto significa que no todas estas ternas suman distinto, puesto que si lo sumasen inmediatamente sabría cuál es la que suma el número del portal. Con lo cual, al menos dos suman lo mismo, en este caso 13 (las combinaciones 1-6-6 y 2-2-9).

El último dato es que la hija mayor toca el piano, lo cual aporta el dato final para que Pedro distinga entre las dos combinaciones. Y este es que hay una hija con un número de años mayor, con lo que descartamos la terna 1-6-6, pues aquí las dos hijas mayores tienen la misma edad, y tiene que haber solo una.

Conclusión, la terna válida es 2-2-9, con lo que estas son las tres edades de las niñas.

8. El caracol y el pozo

Si durante el día sube dos metros y durante la noche baja un metro, esto implica que subirá un metro diario. Pero no tardará diez días sino nueve, ya que el noveno día pasará de ocho a diez metros, llegando así a la parte de arriba, con lo que ya no retrocederá nada.



9. La balanza sin pesas

Con solo tres pesadas no hay más solución que la siguiente:

Hacemos tres grupos de nueve bolas cada uno. A continuación colocamos un grupo en un lado de la balanza y el otro grupo al otro lado.

Primer paso dado, si los dos platillos permanecen equilibrados, la bola defectuosa estará entre las nueve bolas que no hemos comparado. Y si se mueve, estará entre las nueve que hay en el platillo al que se incline la balanza.

Tenemos, por tanto, la defectuosa en un grupo de nueve bolas. Pues bien, ahora hacemos tres grupos de tres bolas cada uno y repetimos la operación anterior.

Segundo paso dado, acabamos de conseguir aislar, con solo dos pesadas, la bola defectuosa en un grupo de solo tres.

En la tercera pesada cogemos dos de las tres bolas y colocamos una a cada lado de la balanza. Si se inclina alguno de los dos platillos, ahí está la bola defectuosa. En caso contrario, la bola defectuosa será la que no hemos cogido.

10. El mendigo y las colillas

Espero que hayas dado con la solución, aunque en un principio es lógico que te parezca que la respuesta ha de ser cinco cigarrillos, ya que tiene 25 colillas y necesita cinco para cada cigarrillo. Pero, la respuesta es que se podrá hacer **seis cigarrillos**, por la siguiente razón:

Con las 25 colillas se habrá liado los cinco cigarrillos que todos vemos. Pero, esos cinco cigarrillos generarán cinco colillas más, que le permitirán liarse un sexto cigarrillo.

11. El lechero

Lo que tiene que hacer el lechero es llenar la jarra de tres litros y a continuación vaciarla en la de cinco litros. De esta forma, habrá un espacio libre de dos litros en la jarra de cinco.

A continuación vuelve a llenar la jarra de tres litros y, una vez más, vierte este contenido en la de cinco litros. Pero como en esta última solo queda capacidad para dos litros, la habríamos llenado y nos quedaría el litro que buscábamos conseguir en la jarra de los 3 litros.

12. El número de cuatro dígitos

Dos posibles soluciones son: 1039 y 2639

13. Los novios de isabel

La solución a este problema es que el tren que la lleva a Carlos pasa en las horas punta y cada diez minutos, o sea, a las 9.00, 9.10, 9.20… Mientras que el tren que la conduce al pueblo donde vive Luis pasa en las horas punta más un minuto, esto es, a las 9.01, 9.11, 9.21…

Conclusión, a Carlos lo va a visitar si llega en franjas de nueve minutos, por ejemplo, entre las 9.01 y las 9.10, mientras que a Luis solo lo va a visitar si llega en franjas de un minuto, por ejemplo, entre las 9.00 y las 9.01.

14. El oráculo

La respuesta es nueve corderos y nueve ovejas, ya que el producto es 81, que en el espejo se transforma en 18 (9 + 9), que es el número total del rebaño.

15. Reparto de cartas

Lo que hice fue: de las cartas que me faltaban por repartir empecé a darme carta a mí mismo (el último en recibirla en condiciones normales) y proseguí la distribución en sentido contrario a las agujas del reloj.

16. Reproducción de las amebas

La solución es muy sencilla. Si con una ameba se tarda 30 días, con dos amebas se tardará un día menos, o sea, 29. Y esto es así porque es equivalente a contar desde el segundo día con una ameba.

Se tarda un día menos, pues es como haber empezado a contar desde el día 2 del experimento con una ameba.

17. ¿DÓNDE ESTÁ EL EURO QUE FALTA?

En realidad no falta ningún euro, el problema es de planteamiento y de identificar correctamente el movimiento del dinero.

Los clientes pagan 25 euros más los dos de propina, o sea, pagan 27 euros (9 cada uno).

El camarero les devuelve 3, con lo que 27 + 3 = 30.

CAPÍTULO 2

1. EQUIPO DE FÚTBOL

Se trataba de un equipo de fútbol… FEMENINO.

2. EL NIÑO DEL ASCENSOR

El niño es muy bajito. Cuando por las mañanas se dirige al colegio, pulsa el botón de la planta baja sin problema. Pero cuando ha de subir a su casa, solo alcanza hasta el botón del séptimo piso, por esa razón ha de subir los tres últimos caminando. Cuando se encuentra con su vecino, es este el que pulsa en el décimo piso del ascensor.

3. UNO DE FAMILIA

Muy fácil, estas dos personas son… marido y mujer, y el hijo de la otra persona… es el hijo de ambos.

4. LOS HIJOS DE DOÑA FERMINA

En el parto la mujer tuvo tres hijos, con lo cual, eran ¡TRILLIZOS!

5. KARPOV Y KASPAROV

No jugaron entre sí.

6. El loro

El loro repetía todo lo que oía, es decir, nada, puesto que era sordo.

7. El problema de las ramas

Muy fácil: los castaños tienen castañas, no bellotas.

8. Las truchas del río Nalón

Solo eran tres personas: el hijo, el padre de este y el abuelo.

9. Juan y la lluvia

Juan era calvo.

10. El error de la policía

La clave de catorce fue 7. Y la de ocho fue 4. Es decir, el número de letras de catorce es 7, y el número de letras de ocho es 4. La respuesta que el policía debería de haber dado para acceder al local es 6 (el número de letras de cuatro).

11. Partido de tenis

Paco y Pepe están jugando un partido de dobles… y son compañeros.

12. El peluquero de mi pueblo

De esta forma… ¡gana más dinero!

13. El envenenamiento

El veneno estaba en el hielo. Pepito, al beberlo de un trago, no dejó que el hielo se derritiese, por eso no murió envenenado.

14. Sobre agujeros

La respuesta es muy sencilla: no tardará nada, ya que no existen los medios agujeros.

15. El problema de villavieja

A Villavieja no va ninguna vieja ni va ninguna oveja, ya que quien iba a tan bello pueblo era yo.

16. La polilla devoradora

Aunque la respuesta parezca evidente, no lo es. Dada la colocación habitual de los libros en su estantería, la polilla habría comido los cuatro primeros tomos completos, o sea, 16 centímetros recorridos. Y en el tomo V habría llegado a comer hasta la tapa posterior, o sea, el inicio de dicho volumen, con lo que todo el tomo V quedaría sin haberlo comido y se mantendrían esos 16 centímetros.

17. El ascensor en Japón

Pulsando el botón de llamada.

18. El pendiente en el café

Aquí presumimos que el café es líquido, pero no es un dato que hayamos aportado. El pendiente no se le mojó porque cayó dentro de una taza llena de café, pero de café en grano.

Una segunda opción es que la taza sea de café, pero esté vacía.

19. El reparto de patatas

La respuesta es… ¡haciendo puré!

20. La arena y el hoyo

La respuesta es tan sencilla como que en un hoyo no hay arena.

21. El carné de conducir

Rogelio Pérez, al darse cuenta de que había olvidado su carné de conducir, decidió no coger el coche y se fue caminando a su trabajo.

22. Los calcetines

Con tres calcetines es suficiente. Si los dos primeros son de distinto color, es obvio que el tercero tiene que ser del color de uno de los dos anteriores.

23. El pastor y sus ovejas

Le quedan siete.

CAPÍTULO 3

Ejercicio 1

196 – 400 (esto es, los cuadrados de 16 y de 20, ya que los números dados lo son de 0, 4, 8 y 12).

Ejercicio 2

1000 (o sea, el cubo de 10. Los números dados son los cubos de 0, 2, 4, 6 y 8).

Ejercicio 3

X = 153.
Y = 57.
(La distancia entre números va aumentando en 2.)

Ejercicio 4

El siguiente número es el 58 (cincuenta y ocho). Son números cuyos nombres contienen las cinco vocales, y el 58 es el siguiente de ellos.

Ejercicio 5

28 (21 + 7).
121 (98 + 23).

Ejercicio 6

Falta el 83 (53 + 30). El siguiente de la serie suma uno más que el anterior (+ 4, + 9, + 15, + 22, + 30…, es decir, tras cada sumando aumenta uno la propia suma: 4 + 5 = 9; 9 + 6 = 15; 15 + 7 = 22; 22 + 8 = 30…

Ejercicio 7

1728 (el cubo de 12, ya que los números dados son los cubos de 2, 4, 6, 8 y 10).

Ejercicio 8

388 (esto es, 409 – 21).

El siguiente de la serie decrece en 1, 11, 21, 31, 41, 51.

Ejercicio 9

5040 (720 × 7).

La serie es: 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6…

Ejercicio 10

284 (272 + 12).

568 (284 × 2).

Sigue la secuencia + 12 ; × 2.

Ejercicio 11

Al siguiente de la serie se le suma 210, con lo que será el 4507 (4297 + 210).

Ejercicio 12

Aquí hablamos de números primos (aquel que solo es divisible entre sí mismo y el 1). Y el siguiente primo será el 51.

Ejercicio 13

El número siguiente avanza 63, con lo que el siguiente será 489 (426 + 63).

Ejercicio 14

S = 9.
E = 5.
N = 6.
D = 7.
M = 1.
O = 0.
R = 8.
Y = 2.

La suma completa es 9567 + 1085 = 10652.

Ejercicio 15

P = 5.
L = 3.
A = 1.
Y = 6.
N = 2.
D = 4.
R = 7.

53161 – 21417 = 31744.

Ejercicio 16

S = 7.
I = 5.
A = 3.

75 + 75 + 75 + 75 + 75 = 375.

Ejercicio 17

Puesto que el cuadrado de ZOO tiene cinco letras, la Z solo puede ser 1, 2 ó 3. Al no haber ningún cuadrado que acabe ni en 2 ni en 3, Z será 1.

Que terminen en 1 solo están los cuadrados que terminen en 1 y en 9, y en nuestro caso ha de ser el 9. Por lo tanto, O = 9.

Por ello, el resultado es:

$$(199)^2 = 39601$$

Ejercicio 18

S = 1.
O = 0.
1 = 9.

Y el resultado es: 91 + 10 = 101.

Ejercicio 19

A = 2.
B = 1.
C = 9.
D = 7.
E = 8.

Con lo cual, la solución será: 21978 × 4 = 87912.

Ejercicio 20

A = 3.
B = 6.
C = 4.
D = 5.
E = 8.

Y nos quedaría la siguiente suma: 332364 + 483455 = 815819.

Ejercicio 21

S = 4.
E = 1.
I = 0.
D = 8.
N = 7.
R = 2.
O = 9.
Y = 3.

Esto es: 4104 + 81 + 17129 = 21314.

Ejercicio 22

X = 9.
X = 42.
X = 1.

Ejercicio 23

888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.

Ejercicio 24

44 – 44 = 0.
4 : 4 + 4 – 4 = 1.
4 : 4 + 4 : 4 = 2.
(4 + 4 + 4) : 4 = 3.
(4 – 4) : 4 + 4 = 4.

$(4 \cdot 4 + 4) : 4 = 5$.
$(4 + 4) : 4 + 4 = 6$.
$4 + 4 - 4 : 4 = 7$.
$4 + 4 + 4 - 4 = 8$.
$4 + 4 + 4 : 4 = 9$.
$(44 - 4) : 4 = 10$.

Ejercicio 25

Te aporto dos soluciones distintas:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 \cdot 9) = 100$.
$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$.

Ejercicio 26

$(1 + 1 + 1)! = 3! = 6$.

Ejercicio 27

Solo habría cumplido dos años: En 1972 y 1992.

Ejercicio 28

El producto es cero, pues contiene el término $(x - x) = 0$. Y al multiplicar cualquier número por 0, pues ya sabemos que el resultado siempre es 0.

Ejercicio 29

El número de la lotería es: 31113.

CAPÍTULO 5

Solución 1

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Solución 2

11	34	24
36	23	10
22	12	35

Solución 3

12	7	5
1	8	15
11	9	4

Solución 4

171	170	175
176	172	168
169	174	173

Solución 5

3	13	11
17	9	1
7	5	15

Solución 6

6	33	21	42
44	19	31	8
43	20	32	7
9	30	18	45

Solución 7

6	5	11	8
13	2	12	3
10	9	7	4
1	14	0	15

Solución 8

8	5	11	6
4	9	7	10
3	2	12	13
15	14	0	1

Solución 9

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Solución 10

1	2	15	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	11	6	9

Solución 11

1	5	12	16
14	11	6	3
15	8	9	2
4	10	7	13

Solución 12

4	2	15	9
3	13	0	14
12	10	7	1
11	5	8	6

Solución 13

1	7	18	25	14
20	24	11	2	8
12	3	10	19	21
9	16	22	13	5
23	15	4	6	17

Solución 14

1	20	9	23	12
24	13	2	16	10
17	6	25	14	3
15	4	18	7	21
8	22	11	5	19

Solución 15

1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16
10	11	17	23	4
18	24	5	6	12

Solución 16

1	7	15	18	24
20	23	4	6	12
9	11	17	25	3
22	5	8	14	16
13	19	21	2	10

Solución 17

4	26	50	15	37
48	13	40	2	29
38	5	27	46	16
25	49	14	41	3
17	39	1	28	47

Solución 18

112	119	96	103	110
118	100	102	109	111
99	101	108	115	117
105	107	114	116	98
106	113	120	97	104

Solución 19

0	8	11	19	22
16	24	2	5	13
7	10	18	21	4
23	1	9	12	15
14	17	20	3	6

Solución 20

1	4	13	31	30	32
35	34	8	22	10	2
17	14	18	26	16	20
28	15	27	3	29	9
25	11	21	23	19	12
5	33	24	6	7	36

Solución 21

1	4	15	29	30	32
35	34	6	24	10	2
17	16	18	26	14	20
28	13	27	3	31	9
25	11	23	21	19	12
5	33	22	8	7	36

Solución 22

1	28	27	10	9	36
35	26	25	12	11	2
3	22	21	16	15	34
33	24	23	14	13	4
20	6	8	29	31	17
19	5	7	30	32	18

Solución 23

42	18	29	9	45	26	6
20	35	11	43	23	3	40
4	36	16	31	12	48	28
33	13	49	25	1	37	17
22	2	38	19	34	14	46
10	47	27	7	39	15	30
44	24	5	41	21	32	8

Solución 24

35	42	23	16	4	48	7
1	5	36	29	26	31	47
44	38	9	22	33	18	11
10	37	20	25	30	13	40
39	32	17	28	41	12	6
3	19	24	21	14	45	49
43	2	46	34	27	8	15

Solución 25

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Solución 26

1	58	6	61	60	3	63	8
56	10	54	12	13	51	15	49
24	47	19	44	45	22	42	17
40	26	38	28	29	35	31	33
25	39	30	36	37	27	34	32
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	11	53	52	14	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

Solución 27

37	83	97	41
53	61	71	73
89	67	59	43
79	47	31	101

Solución 28

107	229	181	239	109
233	131	191	137	173
149	139	223	127	227
179	199	113	211	163
197	167	157	151	193

Solución 29

18	1	12
4	6	9
3	36	2

CAPÍTULO 6

Nivel 1

1)

9	4	7	8	6	2	5	1	3
5	6	1	3	7	9	2	8	4
3	8	2	5	1	4	7	6	9
1	3	6	9	2	5	8	4	7
7	9	8	6	4	3	1	2	5
4	2	5	1	8	7	3	9	6
8	5	3	4	9	1	6	7	2
6	7	4	2	3	8	9	5	1
2	1	9	7	5	6	4	3	8

2)

4	1	8	2	5	3	9	6	7
3	6	5	9	4	7	1	8	2
2	7	9	6	1	8	5	3	4
1	2	3	7	6	4	8	9	5
8	9	7	5	3	2	4	1	6
5	4	6	8	9	1	7	2	3
9	5	1	4	2	6	3	7	8
6	8	4	3	7	9	2	5	1
7	3	2	1	8	5	6	4	9

3)

8	5	9	4	3	2	1	7	6
2	3	1	7	6	9	5	4	8
6	4	7	5	1	8	2	9	3
1	9	6	3	4	7	8	2	5
4	8	3	2	9	5	7	6	1
5	7	2	1	8	6	9	3	4
7	6	8	9	5	4	3	1	2
3	2	4	8	7	1	6	5	9
9	1	5	6	2	3	4	8	7

4)

6	9	5	2	3	7	4	8	1
8	3	1	5	9	4	2	7	6
4	2	7	6	8	1	9	5	3
2	6	8	9	1	5	7	3	4
5	4	3	7	2	6	1	9	8
1	7	9	3	4	8	5	6	2
3	1	6	4	7	9	8	2	5
7	5	4	8	6	2	3	1	9
9	8	2	1	5	3	6	4	7

Nivel 2

5)

2	4	7	1	8	9	3	5	6
8	3	6	5	7	4	9	2	1
5	9	1	2	6	3	8	4	7
1	7	2	9	5	6	4	8	3
9	6	5	4	3	8	1	7	2
4	8	3	7	1	2	6	9	5
7	2	8	6	9	1	5	3	4
3	1	4	8	2	5	7	6	9
6	5	9	3	4	7	2	1	8

6)

7	5	2	1	6	8	3	4	9
1	6	8	3	4	9	7	2	5
4	9	3	2	7	5	8	6	1
3	8	4	9	2	7	5	1	6
5	7	6	4	8	1	2	9	3
9	2	1	6	5	3	4	8	7
8	1	7	5	9	4	6	3	2
6	4	9	7	3	2	1	5	8
2	3	5	8	1	6	9	7	4

7)

3	8	1	9	4	7	2	6	5
4	2	9	5	1	6	8	7	3
5	6	7	3	2	8	1	4	9
1	4	2	8	7	9	3	5	6
6	5	8	1	3	4	7	9	2
7	9	3	2	6	5	4	8	1
2	7	4	6	9	3	5	1	8
9	1	5	4	8	2	6	3	7
8	3	6	7	5	1	9	2	4

8)

9	7	5	6	2	1	3	8	4
6	3	8	4	9	5	1	2	7
1	4	2	8	3	7	6	9	5
4	8	6	3	7	9	2	5	1
5	2	6	1	6	4	8	7	3
7	1	3	2	5	8	4	6	9
8	6	7	5	1	3	9	4	2
2	9	1	7	4	6	5	3	8
3	5	4	9	8	2	7	1	6

Nivel 3

9)

6	4	7	1	5	8	9	2	3
9	5	8	4	2	3	7	6	1
3	2	1	9	7	6	5	8	4
7	1	2	6	9	4	3	5	8
8	9	6	5	3	7	4	1	2
4	3	5	8	1	2	6	9	7
2	6	9	3	4	1	8	7	5
1	8	3	7	6	5	2	4	9
5	7	4	2	8	9	1	3	6

10)

5	4	1	2	8	6	9	3	7
6	8	7	3	9	5	2	1	4
3	2	9	7	4	1	5	6	8
1	7	8	9	3	2	6	4	5
4	9	6	5	1	7	3	8	2
2	3	5	8	6	4	1	7	9
9	6	3	4	5	8	7	2	1
7	5	4	1	2	3	8	9	6
8	1	2	6	7	9	4	5	3

11)

4	9	5	6	1	7	2	3	8
7	6	2	5	8	3	4	1	9
8	1	3	2	4	9	7	6	5
3	4	9	7	2	5	6	8	1
2	5	1	8	3	6	9	4	7
6	8	7	4	9	1	5	2	3
1	2	4	9	5	8	3	7	6
9	7	8	3	6	2	1	5	4
5	3	6	1	7	4	8	9	2

12)

5	4	9	6	1	7	8	3	2
7	2	1	3	4	8	5	6	9
6	3	8	5	2	9	1	4	7
9	6	4	7	8	3	2	5	1
3	1	5	2	9	6	7	8	4
8	7	2	4	5	1	3	9	6
2	8	6	1	3	4	9	7	5
1	9	7	8	6	5	4	2	3
4	5	3	9	7	2	6	1	8

Nivel 4

13)

9	1	2	3	7	5	4	8	6
8	7	6	4	2	9	5	1	3
3	4	5	6	1	8	9	7	2
1	6	9	7	3	4	2	5	8
7	8	3	9	5	2	6	4	1
5	2	4	8	6	1	7	3	9
2	3	8	5	4	6	1	9	7
6	5	7	1	9	3	8	2	4
4	9	1	2	8	7	3	6	5

14)

2	6	4	7	3	5	8	1	9
5	9	1	4	8	6	3	2	7
8	3	7	9	1	2	6	5	4
9	2	8	1	4	7	5	6	3
7	4	3	6	5	8	1	9	2
1	5	6	3	2	9	7	4	8
3	1	5	2	7	4	9	8	6
4	8	9	5	6	3	2	7	1
6	7	2	8	9	1	4	3	5

15)

6	9	8	3	4	5	1	7	2
1	4	3	2	6	7	9	5	8
7	5	2	9	8	1	3	6	4
5	7	9	6	1	4	2	8	3
4	2	1	8	5	3	7	9	6
8	3	6	7	2	9	5	4	1
9	8	7	4	3	2	6	1	5
2	1	4	5	7	6	8	3	9
3	6	5	1	9	8	4	2	7

16)

6	3	2	8	7	5	1	4	9
5	7	9	1	3	4	2	6	8
4	8	1	2	6	9	5	7	3
1	2	5	9	8	7	6	3	4
3	6	8	5	4	1	9	2	7
7	9	4	6	2	3	8	1	5
2	4	6	3	9	8	7	5	1
8	1	7	4	5	2	3	9	6
9	5	3	7	1	6	4	8	2

Nivel 5

17)

6	4	9	2	3	7	1	8	5
2	1	3	4	5	8	7	9	6
5	8	7	1	6	9	3	2	4
9	6	1	3	7	2	4	5	8
7	2	8	6	4	5	9	1	3
4	3	5	8	9	1	6	7	2
1	5	6	9	2	4	8	3	7
3	9	2	7	8	6	5	4	1
8	7	4	5	1	3	2	6	9

18)

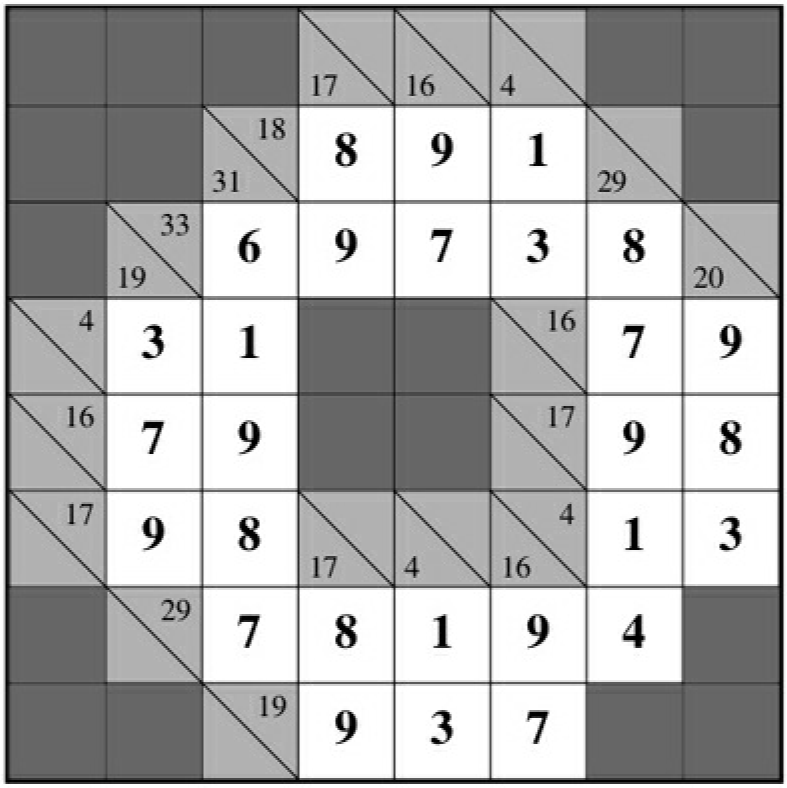
6	9	3	8	2	5	7	1	4
1	4	2	7	6	3	9	8	5
8	7	5	9	1	4	2	3	6
9	5	6	4	8	1	3	7	2
7	2	1	3	5	9	6	4	8
3	8	4	6	7	2	1	5	9
2	1	9	5	4	7	8	6	3
4	6	7	2	3	8	5	9	1
5	3	8	1	9	6	4	2	7

19)

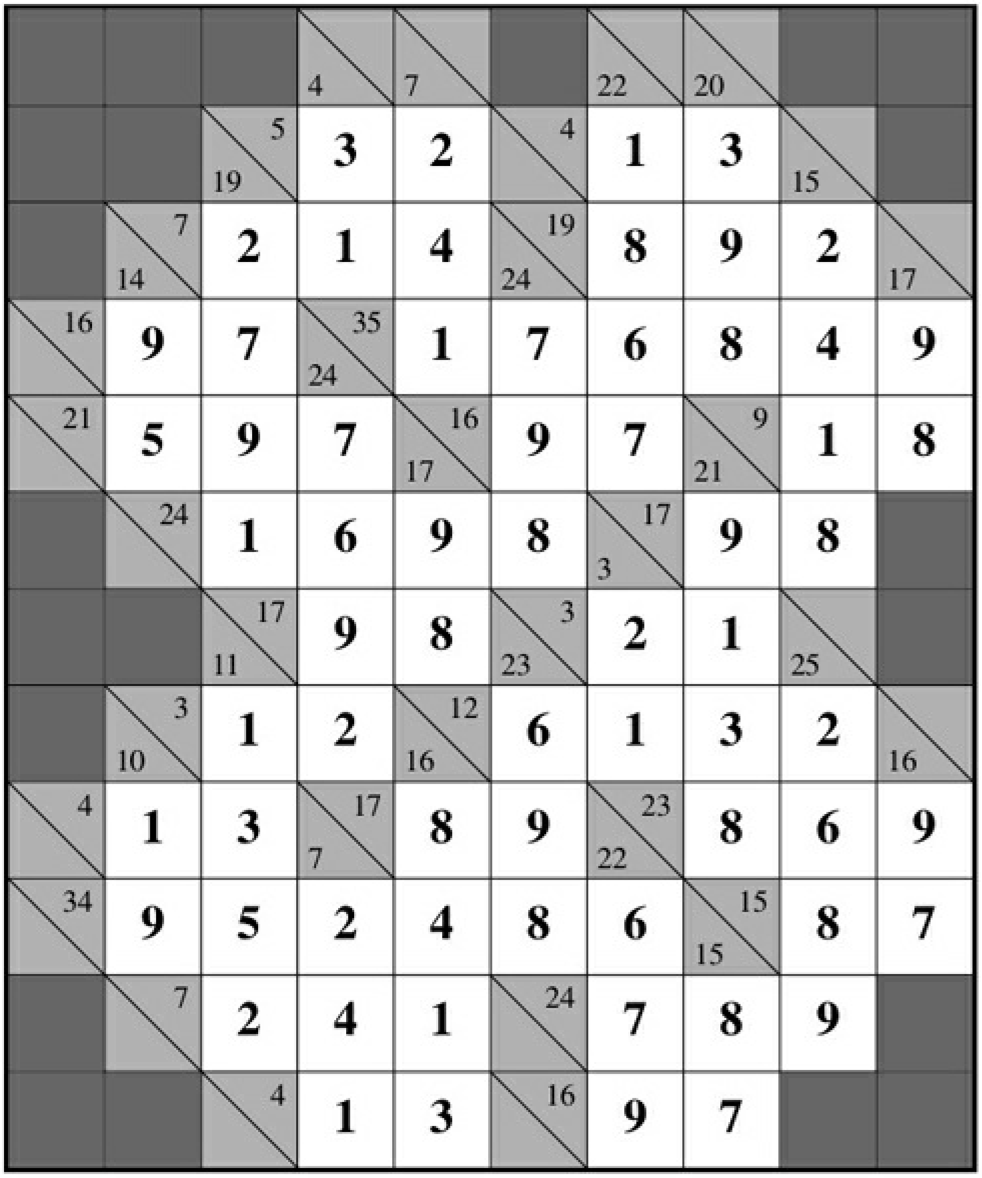
5	3	1	9	2	6	4	8	7
2	4	8	3	7	5	6	9	1
9	7	6	1	8	4	2	3	5
8	2	7	5	9	3	1	4	6
1	5	3	6	4	2	8	7	9
6	9	4	7	1	8	3	5	2
4	8	5	2	6	7	9	1	3
3	1	2	4	5	9	7	6	8
7	6	9	8	3	1	5	2	4

CAPÍTULO 7

Solución 1



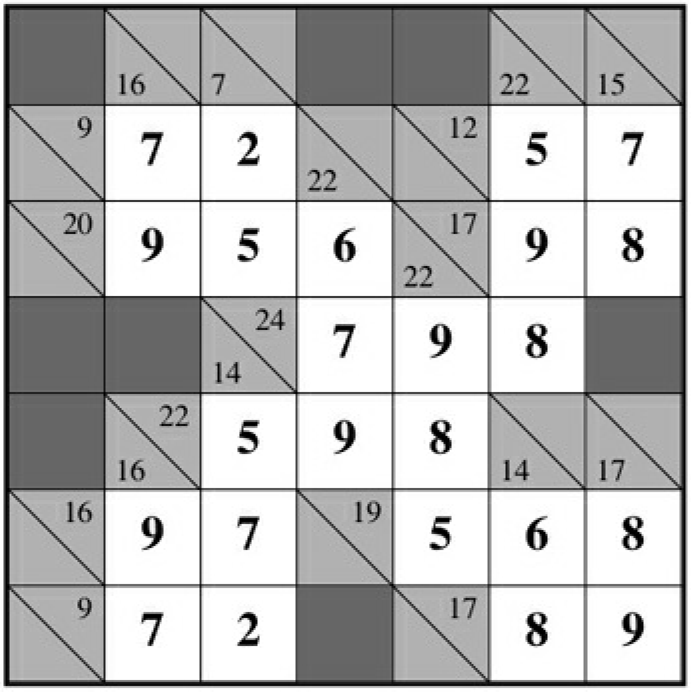
Solución 2


4 7 22 20
5 19 3 2 4 1 3 15
7 14 2 1 4 19 24 8 9 2 17
16 9 7 35 24 1 7 6 8 4 9
21 5 9 7 16 17 9 7 9 21 1 8
24 1 6 9 8 17 3 9 8
17 11 9 8 3 23 2 1 25
3 10 1 2 12 16 6 1 3 2 16
4 1 3 17 7 8 9 23 22 8 6 9
34 9 5 2 4 8 6 15 15 8 7
7 2 4 1 24 7 8 9
4 1 3 16 9 7

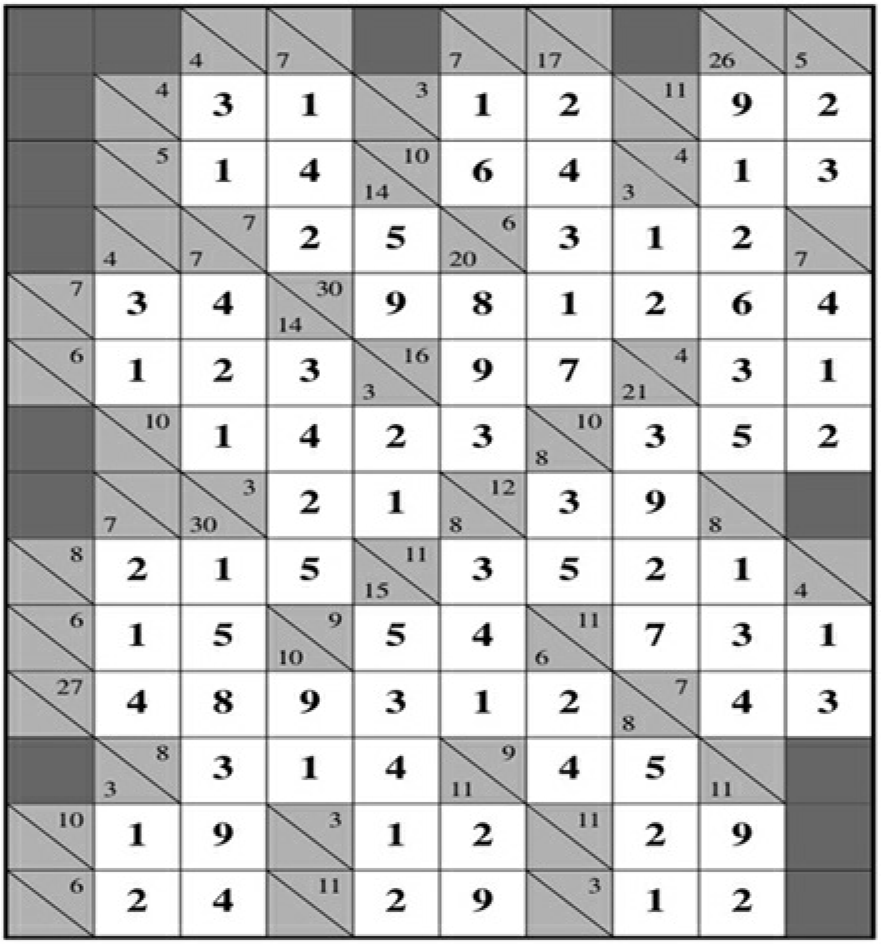
Solución 3

			4\	7\		26\	6\		
		20\3	**1**	**2**	\4	**3**	**1**	18\	
	4\9	**5**	**3**	**1**	11\22	**9**	**5**	**8**	16\
\12	**3**	**9**	19\21	**4**	**9**	**8**	30\8	**1**	**7**
\6	**1**	**2**	**3**	4\32	**2**	**6**	**8**	**7**	**9**
	\7	**4**	**2**	**1**		5\3	**1**	**2**	
		10\4	**1**	**3**	\6	**1**	**5**	29\	
	3\11	**2**	**9**	27\	11\20	**4**	**7**	**9**	16\
\19	**2**	**1**	**4**	**7**	**5**	23\24	**9**	**8**	**7**
\4	**1**	**3**	3\23	**9**	**6**	**8**	9\14	**5**	**9**
	\14	**4**	**2**	**8**	\14	**6**	**1**	**7**	
		\4	**1**	**3**	\17	**9**	**8**		

Solución 4


16 7 22 15
9 7 2 22 12 5 7
20 9 5 6 17 22 9 8
24 14 7 9 8
22 16 5 9 8 14 17
16 9 7 19 5 6 8
9 7 2 17 8 9

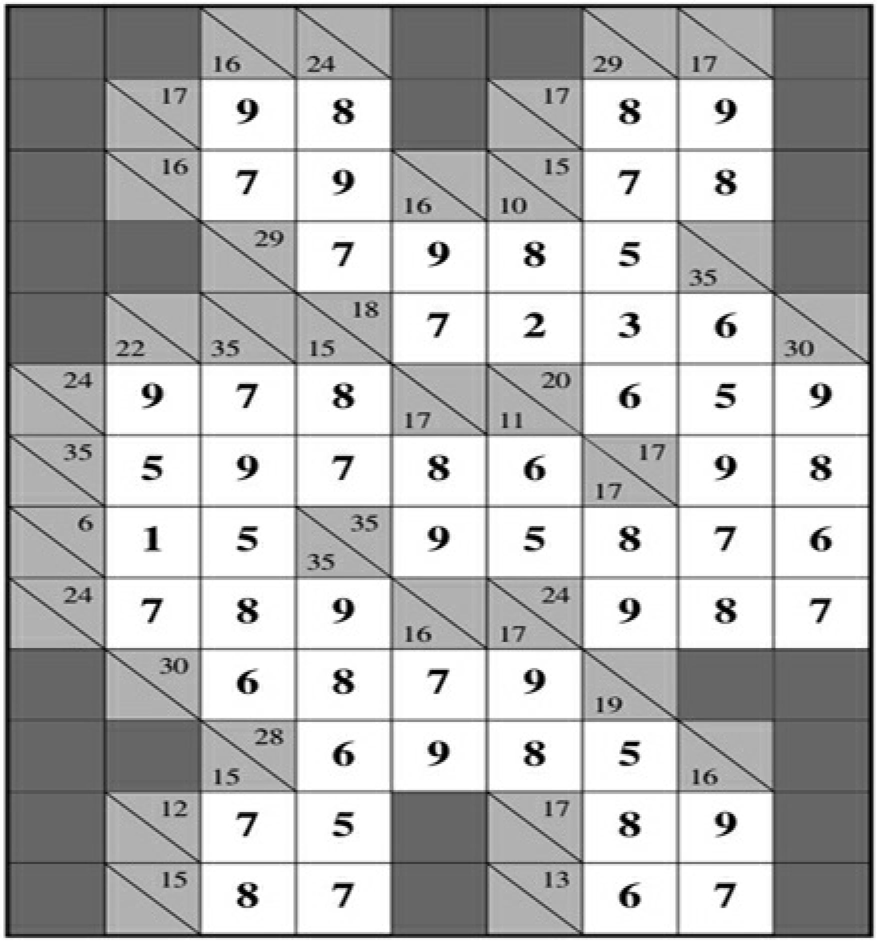
Solución 5



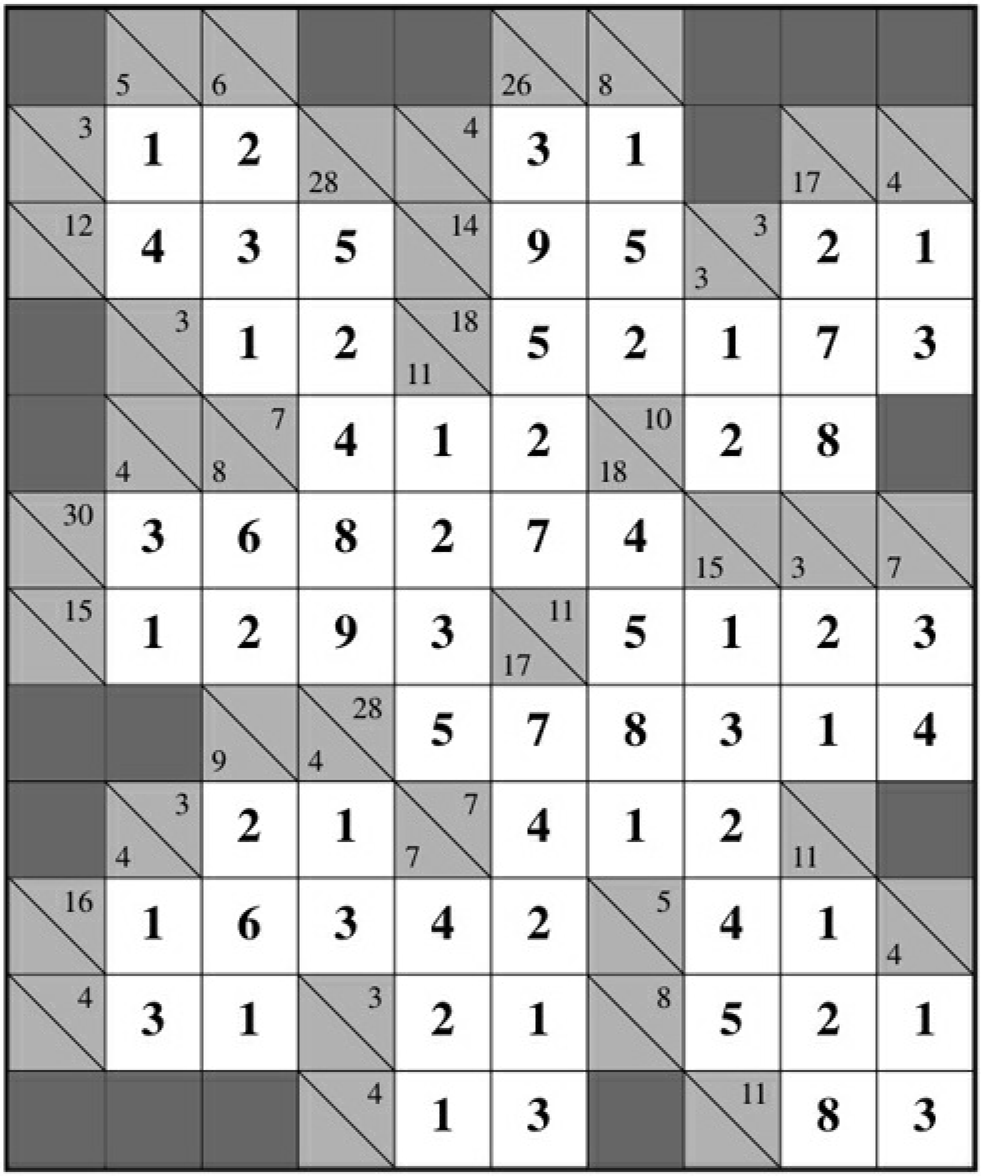
Solución 6

	5\	10\			10\	4\
\8	3	5		6\5	2	3
\3	2	1	6\12	3	8	1
	\8	4	3	1	8\	
	3\	5\8	1	2	5	4\
\7	1	4	2	\4	1	3
\3	2	1		\3	2	1

Solución 7



Solución 8



Solución 9

	13\	16\	34\	24\		29\	11\
\29	5	9	7	8	\10	8	2
\30	8	7	6	9	35\16	7	9
		22\28	4	7	8	9	
	\14	5	9	24\12	7	5	
	17\25	1	8	7	9	16\	13\
\16	9	7	\30	8	6	9	7
\17	8	9	\27	9	5	7	6

Solución 10

	24\	27\		17\	26\		19\	18\
\17	8	9	\16	9	7	\4	3	1
\14	6	8	23\10	8	2	16\17	9	8
\8	1	3	4	\27	3	8	7	9
\24	9	7	8	16\16	9	7	24\	12\
	10\	19\27	2	9	5	1	7	3
\26	2	8	9	7	3\	10\9	8	1
\3	1	2	19\	31\23	2	4	9	8
\27	7	9	3	5	1	2	14\	26\
	24\	14\9	7	2	\12	1	3	8
\26	8	2	9	7	4\20	3	8	9
\13	9	4	\10	9	1	\9	2	7
\15	7	8	\11	8	3	\3	1	2

Solución 11

	23\	11\	8\		11\	3\	8\	16\	4\
\16	**2**	**6**	**8**	13\22	**5**	**3**	**1**	**9**	**4**
\13	**8**	**5**	15\14	**8**	**6**	10\9	**2**	**7**	26\
\5	**5**	15\13	**8**	**5**	7\12	**7**	**5**	9\9	**9**
\20	**4**	**9**	**7**	9\9	**6**	**3**	10\12	**4**	**8**
\9	**3**	**6**	4\4	**3**	**1**	11\8	**1**	**5**	**2**
\1	**1**	12\9	**3**	**6**	9\13	**4**	**9**	9\4	**4**
	26\5	**4**	**1**	7\15	**8**	**7**	10\9	**6**	**3**
\17	**9**	**8**	9\5	**4**	**1**	6\9	**6**	**3**	24\
\2	**2**	14\11	**8**	**3**	10\6	**2**	**4**	9\8	**8**
\18	**8**	**9**	**1**	19\6	**2**	**4**	10\5	**2**	**3**
\8	**3**	**5**	6\11	**3**	**8**	13\21	**8**	**7**	**6**
\4	**4**	4\13	**4**	**9**	3\6	**4**	**2**	6\2	**2**
	\25	**4**	**2**	**7**	**3**	**9**	\11	**6**	**5**

CERTIFICADOS
DE SUS MEJORES MARCAS

Si desea contactar con el autor, puede hacerlo a través de:

www.albertocoto.com

GUINNESS
WORLD RECORDS

CERTIFICATE

THE FASTEST TIME FOR AN INDIVIDUAL
TO ADD TOGETHER 100 SINGLE DIGITS IS
A WORLD RECORD 19.23 SECONDS BY
ALBERTO COTO GARCIA (SPAIN),
AT THE VALLE REAL COMMERCIAL
CENTRE, SANTANDER, SPAIN
ON 29 JUNE 1999

Keeper of the Records
GUINNESS WORLD RECORDS

GUINNESS BUCH DER REKORDE

URKUNDE

Das GUINNESS BUCH DER REKORDE bestätigt nach sorgfältiger Prüfung die Rekordleistung:

Alberto Coto

Wir bestätigen die Teilnahme an einem Rekordversuch im Rahmen des Tummelum Festivals in Flensburg vom 05.-07. Juli 2002. Die Rekordleistung wird nach erfolgter Anmeldung bei GUINNESS WORLD RECORDS in England für einen Eintrag im Orginal Buch der Rekorde geprüft.

REDAKTION
GUINNESS BUCH DER REKORDE


Berg- und Adam-Ries-Stadt
Annaberg-Buchholz ...
„... mit uns können Sie rechnen"
A R
Weltmeisterschaft
im Kopfrechnen
.....Alberto Coto.....
1. Platz Disziplin Multiplikation
30. 10. 2004
Dr. Rainer Gebhardt
Adam-Ries-Bund
Barbara Klepsch
Oberbürgermeisterin
OPPACHER
Sparkasse
Erzgebirge
FreiePresse
FRITZ&MACZIOL : INFOM

Berg- und Adam-Ries-Stadt
Annaberg-Buchholz ...
„... mit uns können Sie rechnen"

Weltmeisterschaft
im Kopfrechnen

...Alberto Coto........

1. Platz Disziplin Addition......

30. 10. 2004

Rainer Gebhardt
Dr. Rainer Gebhardt
Adam-Ries-Bund

Barbara Klepsch
Barbara Klepsch
Oberbürgermeisterin

OPPACHER

Spar se
Erz

Freie Presse

FRITZ&MACZIOL : IN

SIEMENS

Mental Calculation World Cup 2006

Alberto Coto García

Winner

Category Multplication

Mathematikum Giessen
Germany

Giessen, 4 November 2006

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Director of Mathematikum

Ralf Laue
Jury

Sparkasse Gießen

mathematikum

Finanzgruppe Hessen-Thüringen