Universidade de Brasília
Departamento de Ciências Mecânica
Programa de Pós-Graduação

Atividade 3

Triangulariazação de Matrizes - Contagem de Operações de Pontos Flutuante (FLOPS) do Método Gauss-Jordan + Decomposição L.U.

Disciplina: Métodos Numéricos
Professor: Dr. Rafael Gabler Gontijo

Aluno: Eng. Lucas Wanick — Mestrando em Engenharia Mecânica

19 de maio de 2025

1 Objetivo

Este relatório tem como objetivo:

- 1. Deduzir uma expressão geral para o número de operações de multiplicação e divisão ($\text{FLOPS}_{\times/\div}$) executadas no método de Gauss-Jordan, com base em uma contagem manual aplicada a um sistema 3×3 conforme ilustrado no livro de Chapra.
- 2. Realizar a decomposição L.U. de um sistema linear 3×3 fornecido pelo enuinciado do exercício, utilizando a decomposição de *Doolitte*.

2 Contagem de FLOPS - Gauss-Jordan

Enunciado Prove que o número de operações de ponto flutuante relacionadas à divisões e/ou multiplicações envolvidos no método de Gauss-Jordan sem pivoteamento é dado por:

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = \frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2} \rightarrow \frac{n^3}{2} + \Theta(n^2)$$

2.1 Premissas do Modelo de Contagem

A equação fornecida pelo enunciado do exercício para contagem de operações de multiplicação e divisão do método de Gauss-Jordan pode ser encontrada, também, no livro do Chapra, em sua sessão 9.7, na página 223.

Primeiramente, iniciamos a nossa análise realizando a contagem de operações de um determinado exemplo. Para isso, utilizamos o exemplo 9.12 do livro do Chapra, onde curiosamente, identificamos 27 operações, mesmo desconsiderando as operações em que os termos anteriores já são 0, como podemos conferir Figura 1

Mas, em contrapartida, se aplicarmos a formula fornecida para o exemplo, em que $n = 3$, ficamos com:

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = \frac{3^3}{2} + 3^2 - \frac{3}{2} = \frac{27}{2} + 9 + \frac{3}{2} = 21 \text{ operações}$$

A análise não considera operações sobre elementos já nulos e, mesmo assim, estamos contabilizando mais operações que a predição calculada para o sistema.

Portanto, iremos realizar a análise do método de Gauss-Jordan para o caso das 27 operações, desenvolvendo, de acordo com a lógica seguida pelo autor, uma equação preditiva para a quantidade de FLOPS para as operações de multiplicação e divisão.

Método de Gauss-Jordan

Enunciado do Problema. Use a técnica de Gauss-Jordan para resolver o mesmo sistema do Exemplo 9.5:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 &= 7{,}85\\
0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 &= -19{,}3\\
0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 &= 71{,}4
\end{aligned}
$$

Solução. Primeiro, expresse os coeficientes e as constantes do lado direito da equação como uma matriz aumentada:

$$
\begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85\\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3\\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{bmatrix}
$$

Então, normalize a primeira linha dividindo-a pelo elemento pivô, 3, para obter

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}066667 & 2{,}61667\\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3\\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{bmatrix}
$$

4 div

O termo x_1 pode ser eliminado da segunda linha subtraindo 0,1 vez a primeira linha da segunda linha. De maneira semelhante, subtraindo 0,3 vez a primeira linha da terceira linha, iremos eliminar o termo x_1 da terceira linha:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}066667 & 2{,}61667\\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 & -19{,}5617\\ 0 & -0{,}190000 & 10{,}0200 & 70{,}6150 \end{bmatrix}
$$

8 mult
8 sub

Em seguida, normalizamos a segunda linha, dividindo-a por 7,00333:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}066667 & 2{,}61667\\ 0 & 1 & -0{,}0418848 & -2{,}79320\\ 0 & -0{,}190000 & 10{,}0200 & 70{,}6150 \end{bmatrix}
$$

3 div

A redução do termo x_2 da primeira e da terceira linhas resulta em

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0680629 & 2{,}52356\\ 0 & 1 & -0{,}0418848 & -2{,}79320\\ 0 & 0 & 10{,}01200 & 70{,}0843 \end{bmatrix}
$$

6 mult
6 sub

A terceira linha é então normalizada dividindo-se por 10,0120:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0680629 & 2{,}52356\\ 0 & 1 & -0{,}0418848 & -2{,}79320\\ 0 & 0 & 1 & 7{,}0000 \end{bmatrix}
$$

2 div

Finalmente, o termo x_3 pode ser reduzido da primeira e da segunda equações dando

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3{,}0000\\ 0 & 1 & 0 & -2{,}5000\\ 0 & 0 & 1 & 7{,}0000 \end{bmatrix}
$$

4 mult
4 sub

Assim, como descrito na Figura 9.8, a matriz dos coeficientes foi transformada na matriz identidade e a solução é obtida no vetor do lado direito. Observe que não foi necessária a substituição regressiva para se obter a solução.

Figura 1: Contagem de operações do exemplo 9.12 do livro do Chapra

Estruturaremos nossa análise seguindo as seguintes premissas identificadas pelas operações do exemplo:

- Cada linha é normalizada dividindo-se todos os termos restantes da linha, incluindo o termo do vetor fonte.
- Cada operação de eliminação (zeramento fora da diagonal) realiza uma multiplicação por fator para cada termo restante da linha pivô (colunas não nulas + vetor b).
- Não são consideradas operações sobre elementos que já são zero.
- Subtrações não são contabilizadas como FLOPS (foco apenas em multiplicações e divisões).

2.2 Desenvolvimento da Fórmula Geral

1. Divisões (normalização das linhas)

Para cada linha pivô k, com $k = 1$ até n, o número de divisões necessárias é dado por:

$$(n - k + 1) \text{ colunas restantes} + 1 \text{ termo fonte} = n - k + 2$$

Somando para todos os pivôs:

$$\sum_{k=1}^{n}(n - k + 2) = \sum_{i=1}^{n}(i + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n$$

2. Multiplicações (eliminação nas demais linhas)

Para cada linha pivô k, realizam-se multiplicações nas $n - 1$ outras linhas:

$$(n - 1) \cdot (n - k + 2)$$

Somando para todos os pivôs:

$$\sum_{k=1}^{n}(n - 1)(n - k + 2) = (n - 1)\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

3. Expressão Final

Somando os dois termos, a expressão geral para o número de $\text{FLOPS}_{\times/\div}$ torna-se:

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = \left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) + (n - 1)\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

Agrupando:

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = n\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

Expandindo:

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2}$$

4. Verificando para $n = 3$

Substituindo na expressão:

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = \frac{27}{2} + \frac{27}{2} = 13.5 + 13.5 = 27$$

O valor confere exatamente com a contagem manual realizada no exemplo do livro de Chapra.

5. Conclusão

A expressão deduzida:

$$\boxed{\text{FLOPS}_{\times/\div} = \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{2}}$$

reflete o comportamento real observado na execução do método de Gauss-Jordan sob as regras operacionais identificadas. Mesmo que não esteja totalmente alinhada com a expressão fornecida pelo autor, a formulação ainda mantêm a ordem de grandeza do sistema, assim como

$$\text{FLOPS}_{\times/\div} = \frac{n^3}{2} + \Theta(n^2)$$

sendo, desta forma, uma abordagem válida para estimar a quantidade de operações de muiltiplicação e divisão para o método.

3 Decomposição de *Doolitte* L.U.

Esta seção apresenta a resolução de um sistema linear de ordem 3×3 utilizando a decomposição L.U. pelo método de Doolittle, conforme estruturado manualmente. O processo é ilustrado passo a passo, com a evolução das matrizes $[L]$, $[U]$, e os vetores intermediários $\{d\}$ e $\{x\}$.

Sistema Original

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

Fase 1: Decomposição LU

Inicialmente, $[L]$ é a matriz identidade e $[U]$ recebe os coeficientes de $[A]$. Aplicam-se operações elementares para zerar os termos abaixo da diagonal de $[U]$, registrando os fatores utilizados em $[L]$.

Passo 1: Eliminação na linha 2 com $f_{21} = 0.033333$

$$L_{21} \leftarrow 0.033333, \quad R_2 \leftarrow R_2 - f_{21} \cdot R_1$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Eliminação na linha 3 com $f_{31} = 0.1$

$$L_{31} \leftarrow 0.1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - f_{31} \cdot R_1$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 \\ 0 & -0.19 & 10.02 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033333 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Eliminação na linha 3 com $f_{32} = -0.02713$

$$L_{32} \leftarrow -0.02713, \quad R_3 \leftarrow R_3 - f_{32} \cdot R_2$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.012042 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.02713 & 1 \end{bmatrix}$$

Reconstrução de A para $[A] = [L][U]$

Reconstruimos a matriz original pela multiplicação das duas matrizes, resultado das transformações lineares executadas até agora.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.033333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.02713 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.012042 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

Fase 2: Solução de $[L]\{d\} = \{b\}$

$$\begin{aligned} d_1 &= b_1 = 7.85 \\ d_2 &= b_2 - L_{21} \cdot d_1 = -19.3 - (0.033333)(7.85) = -19.561667 \\ d_3 &= b_3 - L_{31} \cdot d_1 - L_{32} \cdot d_2 \approx 70.084293 \end{aligned}$$

$$\{d\} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.561667 \\ 70.084293 \end{bmatrix}$$

Fase 3: Solução de $[U]\{x\} = \{d\}$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{d_3}{U_{33}} = \frac{70.084293}{10.012042} = 7.0 \\ x_2 &= \frac{d_2 - U_{23} \cdot x_3}{U_{22}} = \frac{-19.561667 - (-0.293333)(7)}{7.003333} = -2.5 \\ x_1 &= \frac{d_1 - U_{12} \cdot x_2 - U_{13} \cdot x_3}{U_{11}} = \frac{7.85 - (-0.1)(-2.5) - (-0.2)(7)}{3} = 3.0 \end{aligned}$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ -2.5 \\ 7.0 \end{bmatrix}$$

Conclusão

O sistema foi resolvido utilizando a decomposição LU via método de Doolittle. As matrizes $[L]$ e $[U]$ foram construídas progressivamente, e a solução final $\{x\}$ foi obtida pela substituição progressiva e regressiva conforme a estrutura matricial do método.