Universidade de Brasília
Departamento de Ciências Mecânica
Programa de Pós-Graduação

Atividade 2

Triangulariazação de Matrizes - Contagem de Operações de Pontos Flutuante (FLOPS)

Disciplina: Métodos Numéricos
Professor: Dr. Rafael Gabler Gontijo

Aluno: Eng. Lucas Wanick — Mestrando em Engenharia Mecânica

13 de maio de 2025

1. Introdução

O método de Eliminação Gaussiana é uma abordagem fundamental para a resolução de sistemas lineares da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sua eficiência computacional está diretamente relacionada à quantidade de operações de ponto flutuante (FLOPS) requeridas, especialmente em sistemas de ordem elevada.

Neste relatório, quantificamos rigorosamente as FLOPS envolvidas nas duas fases do método: (i) eliminação progressiva e (ii) substituição regressiva, partindo de pseudocódigo fornecido e conduzindo a uma expressão simbólica para a carga computacional.

2. FLOPS da Etapa de Eliminação Progressiva

A eliminação progressiva transforma a matriz A em uma matriz triangular superior por meio de operações elementares entre linhas. A contagem das operações se baseia na seguinte estrutura algorítmica:

- Para cada j de $k+1$ até n: 2 operações por coluna;
- Para cada i com $n-k$ linhas:
  - 1 divisão para cálculo do fator multiplicativo.
  - $n-k$ multiplicações e $n-k$ subtrações para atualização de $A(i,j)$.
  - 1 multiplicação e 1 subtração para atualizar $b(i)$.

Combinando os somatórios envolvidos, obtém-se a expressão exata para as operações de ponto flutuante:

$$\text{FLOPS}_{(+/-)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[n(n+1) - k(2n+1) + k^2\right] = \frac{2n^3 + n^2 + 2n + 1}{6}$$

$$\text{FLOPS}_{(\times/\div)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[n(n+2) - 2k(2n+1) + k^2\right] = \frac{2n^3 + 3n^2 - 5n}{6}$$

$$\text{FLOPS}_{\text{elim}} = \frac{2n^3}{3} + \frac{2n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$$

```
DO k = 1, n - 1                    ! loop 1 - sobre colunas (pivôs)
    DO i = k + 1, n                ! loop 2 - sobre as linhas abaixo do pivô

        fator = a(i,k)/a(k,k) ! divisão para zerar o elemento A(i,k)

        DO j = k + 1, n            ! loop 3 - sobre as colunas a direita do pivô

            a(i,j) = a(i,j) - fator*a(k,j)  ! operação de atualização da linha
        END DO

        b(i) = b(i) - fator*b(k) ! atualização do vetor b
    END DO
END DO
```

Listing 1: Etapa de eliminação progressiva

3. FLOPS da Substituição Regressiva

A segunda etapa resolve o sistema triangular superior obtido, com a seguinte estrutura:

- $n - i$ iterações de $j = i + 1$ até n: 2FLOPS $= 2(n - i)$
- Para cada linha i:
  - $2(n - i)$ FLOPS do loop interno + 1 divisão.
  - TOTAL: $2(n - 1) + 1$.

A expressão exata total de operações é:

$$\text{FLOPS}_{\text{subst}} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} [2(n - i) + 1] = n^2$$

```
x(n) = b(n) / a(n,n)
DO i = n - 1, 1
    soma = b(i)
    DO j = i + 1, n
        soma = soma - a(i,j) * x(j)
    END DO
    x(i) = b(i) / a(i,i)
END DO
```

Listing 2: Etapa de substituição regressiva

4. Soma Total de FLOPS do Algoritmo

Somando as duas contribuições:

$$\text{FLOPS}_{\text{total}} = \text{FLOPS}_{\text{elim}} + \text{FLOPS}_{\text{subst}} = \frac{2n^3}{3} + \frac{5n^2}{3} - \frac{n}{2} + \frac{1}{6}$$

5. Discussão Assintótica

Em análise assintótica, os termos de maior ordem dominam a complexidade computacional. Assim, o método de Eliminação Gaussiana possui:

$$\text{FLOPS}_{\text{total}} = \Theta(n^3)$$

O termo $\frac{2n^3}{3}$ representa, com boa aproximação, a carga computacional quando n é grande, justificando seu uso para estimativas de desempenho.

6. Resultados Numéricos

n	**FLOPelim**	**FLOPSsubst**	**FLOPStotal**	$\frac{2n^3}{3}$	% FLOPSelim
5	97.67	25	122.67	83.33	79.62
10	728.50	100	828.50	666.67	87.93
50	84975.17	2500	87475.17	83333.33	97.14
100	673283.50	10000	683283.50	666666.67	98.54
500	8.35E+07	250000	8.37E+07	8.33E+07	99.70
1000	6.67E+08	1.00E+06	6.68E+08	6.67E+08	99.85
5000	8.33E+10	2.50E+07	8.34E+10	8.33E+10	99.97
10000	6.67E+11	1.00E+08	6.67E+11	6.67E+11	99.99
50000	8.33E+13	2.50E+09	8.33E+13	8.33E+13	99.997

Tabela 1: Contagem de FLOPS para diferentes valores de n, com base nas expressões exatas.

7. Conclusão

Foram deduzidas, a partir da estrutura algorítmica detalhada, as expressões exatas para o número de operações de ponto flutuante no método de Eliminação Gaussiana. A abordagem evidencia que, apesar de sua robustez e aplicabilidade generalizada, o método possui complexidade cúbica — o que o torna computacionalmente oneroso para sistemas de grande porte.

A análise assintótica, por sua vez, constitui uma excelente estimativa do custo computacional global do algoritmo, especialmente em sistemas de alta ordem, onde os termos cúbicos predominam e os efeitos dos demais se tornam desprezíveis. Isso se deve ao fato de que a etapa de eliminação progressiva apresenta um crescimento cúbico no número de operações, decorrente da necessidade de atualizar múltiplas linhas e colunas da matriz a cada passo de pivoteamento — ao passo que a substituição regressiva, com crescimento quadrático, representa uma fração comparativamente pequena do esforço total.

Apêndice A - Memorial de Cálculo

O apêndice A, a partir da pégina seguinte, contém os registros manuais e desenvolvimentos algébricos utilizados para validação simbólica das expressões de FLOPS, baseando-se nas deduções feitas a partir do pseudocódigo apresentado em aula.

III ! Etapa de eliminação progressiva

linha anterior

DO K=1, n-1 ! loop 1

linha atual

DO i=K+1, n ! loop 2

II fator = A(i,K) / A(K,K) ! 1(÷)

elemento à direita do pivot

DO j = K+1, n ! loop 3

I A(i,j) = A(i,j) - fator * A(K,j)

END DO

b(i) = b(i) - fator * b(K)

END DO

END DO

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ (1)

$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ (2)

$\vdots$

$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$ (3)

→ Multiplicar (1) por $\frac{a_{21}}{a_{11}}$

$a_{21}x_1 + \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)a_{12}x_2 + \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)a_{13}x_3 \cdots + \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)a_{1n}x_n = \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)b_1$ (4)

→ Subtrair (4) de (2)

$\underbrace{\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)}_{a_{22}'}x_2 + \cdots + \underbrace{\left(a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right)}_{a_{2n}'}x_n = \underbrace{\left(b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}\right)}_{b_n'}$

→ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_n$

$a_{22}'x_2 + \cdots + a_{2n}'x_n = b_2'$

$a_{32}'x_2 + \cdots + a_{3n}'x_n = b_3'$

$\vdots$

$a_{n2}'x_2 + \cdots + a_{nn}'x_n = b_n'$

→ Repetir ... (n-1) vezes

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \cdots + a_{2n}'x_n = b_2'$

$a_{33}''x_3 + \cdots + a_{3n}''x_n = b_3''$

$\vdots$

$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$

I - Para cada j de K+1 até n : 1(x) + 1(-)

$\sum_{j=K+1}^{n}$ — 2 operações por coluna

Número de colunas: n-K

* fator * b(K) → 1(x)
  b(i) - resultado = 1(-)

} 2 operações por linha

II - Para cada i → $\sum_{i=K+1}^{n}$; com n-K linhas

$1(\div) + \underbrace{2(n-K)}_{\substack{1(x)+1(-) \\ \text{Matriz A}}} + \underbrace{2}_{\substack{1(x)+1(-) \\ \text{vetor b}}}$

- Total por linha: 2(n-K) + 3 FLOPS

ou

- FLOPS (x/÷): 1 + (n-K) + 1 = (n-K+2)
- FLOPS (+/-): (n-K) + 1 = (n-K+1)

III - Para cada iteração de K:

FLOPS (x/÷) = (n-K)·(n-K+2)

FLOPS (+/-) = (n-K)·(n-K+1)

• Então:

$$\to FLOPS(+/-) = (n-k)(n-k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[n(n+1) - k(2n+1) + k^2\right]$$

$$= n(n+1)\sum_{k=1}^{n-1} 1 - (2n+1)\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= n(n+1)(n-1) - (2n+1)\left[\frac{(n-1)n}{2}\right] + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \to \frac{n^3}{3} + O(n)$$

$n(n^2-1)$ | $\frac{(2n+1)(n^2-n)}{2}$ | $\frac{(n-1)(2n^2-1)}{6}$

n^3-n | $(2n^3-2n^2+n^2-n)/2$ | $(2n^3-n-2n^2+1)/6$

$n^3-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$ | $\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{3}-\frac{n}{6}+\frac{1}{6}$

$\cancel{n^3}-\cancel{n^3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{3}-\frac{n}{6}+\frac{1}{6}$

$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{6}+\frac{n}{3}+\frac{1}{6}$

1)

$$\to FLOPS(\times/\div) = (n-k)(n-k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[n(n+2) - 2k(n+1) + k^2\right]$$

$$= n(n+2)\sum_{k=1}^{n-1} 1 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \underbrace{n(n+2)(n-1)}_{1} - \underbrace{2(n+1)\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]}_{2} + \underbrace{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}}_{3}$$

$$= \cancel{n^3} + n^2 - 2n - \cancel{n^3} + n + \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \to \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$n^2 - nk + 2n - kn + k^2 - 2k$

$n(n+2) - 2k(n+1) + k^2$

1. $n(n^2-n+2n-2)$
n^3+n^2-2n ✓

3. $\frac{(n-1)(2n^2-n)}{6}$
$\frac{2n^3-n^2-2n^2+n}{6}$
$\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$ ✓

2. $\frac{\cancel{2}(n+1)(n^2-n)}{\cancel{2}}$
$n^3-\cancel{n^2}+\cancel{n^2}-n$
n^3-n ✓

2) Total de FLOPS da etapa de eliminação progressiva:

$$\to FLOPS_{elim} = FLOPS(+/-) + FLOPS(\times/\div)$$

$$= \frac{n^3}{3} + O(n^2) + \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$$FLOPS_{elim} = \frac{2n^3}{3} + O(n^2)$$

$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{6}+\frac{n}{3}+\frac{1}{6}+\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$

$\frac{2n^3}{3}+\frac{2n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}$

```
!Etapa de substituição regressiva
III x(n) = b(n)/a(n,n)   !1(÷)
II  DO i=n-1,1           ! loop 1
      soma = b(i)
I     DO j=i+1,n         ! loop 2
        soma=soma-a(i,j)*x(j) !1(x)+1(-)
      END DO
      x(i) = b(i)/a(i,i) ! 1(÷)
    END DO
```

I - $\underbrace{n-i}_{\sum_{j=i+1}^{n} 1 = n-i-1+1}$ iterações de $j=i+1$ até n: $1(\times)+1(-) = 2$ FLOPS

$2(n-i)$

II - A cada linha i:
- $2(n-i)$ FLOPS do loop 2 $+ 1(\div)$
- Total: $2(n-i)+1$

III 1 operação fora do loop:

$$FLOPS_{subst} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[2(n-i)+1\right]$$

3) Total de FLOPS da etapa de substituição regressiva:

$$\rightarrow FLOPS_{subst} = 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} [2(n-i)+1]}_{2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} 1}$$

① $$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{k=n-1}^{1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$FLOPS_{subst} = 1 + \cancel{2}\frac{(n^2-n)}{\cancel{2}} + (n-1) = \cancel{1} + n^2 - \cancel{n} + \cancel{n} - \cancel{1}$$

$$\boxed{FLOPS_{subst} = n^2}$$