Universidade de Brasília
Departamento de Ciências Mecânicas
Programa de Pós-Graduação

Programa 8

Equações Diferenciais
Tranferência de Calor em Regime Transiente
Geometria Complexa

Disciplina: Métodos Numéricos
Professor: Dr. Rafael Gabler Gontijo

Aluno: Eng. Lucas Wanick — Mestrando em Engenharia Mecânica

28 de julho de 2025

1 Introdução

O presente relatório documenta o desenvolvimento do último programa do curso de *Métodos Numéricos* ministrado pelo Professor Rafael Gabler Gontijo na Universidade de Brasília. O objetivo central foi implementar um solver numérico capaz de resolver a equação de condução de calor estacionária em uma geometria retangular com cantos curvos (adiabáticos), submetida a condições de contorno mistas:

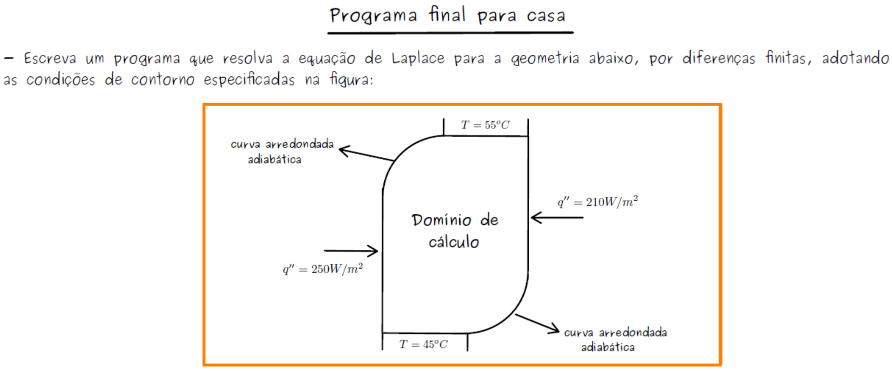

Figura 1: Enunciado do problema - Lousa da Aula 35.

- Temperaturas fixas (Dirichlet) nas faces superior e inferior;
- Fluxos de calor prescritos (Neumann) nas faces laterais;
- Isolamento térmico (condição adiabática) nos cantos arredondados.

O desenvolvimento visou obter uma solução robusta, eficiente e escalável, capaz de lidar com malhas refinadas , preservando a fidelidade geométrica e garantindo estabilidade numérica.

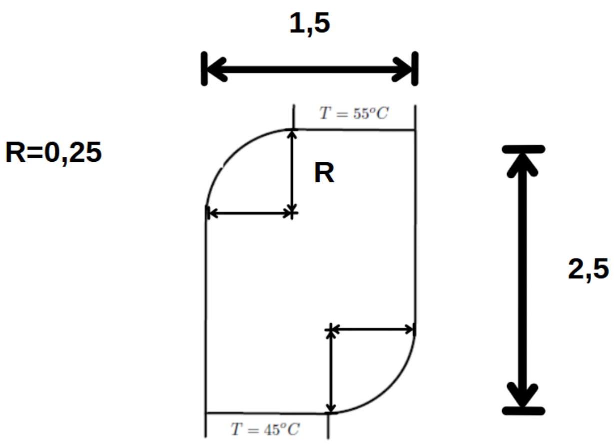

Figura 2: Geometria do problema. Dimenções arbitradas: $L = 1.50\,\text{m}$, $H = 2.50\,\text{m}$, raio dos cantos $R = 0.25\,\text{m}$.

2. Formulação Matemática

A equação governante é a equação de Laplace bidimensional para regime estacionário ($\nabla^2 T = 0$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

2.1 Condições de contorno

- **Dirichlet (superior e inferior):**
  $$T(y=0) = 45°C, \qquad T(y=H) = 55°C$$
- **Neumann (laterais):**
  $$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = q_{\text{left}}, \qquad -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=L} = q_{\text{right}}$$
  onde k é a condutividade térmica do material, definida como 71 W/mK (Aço) e q_{left}, q_{right} são os fluxos de calor prescritos de 250 W/m^2 e 210 W/m^2, respectivamente.
- **Adiabático (cantos):**
  $$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

Geometria: $L = 1.50\,\text{m}$, $H = 2.50\,\text{m}$, cantos curvos de raio $R = 0.25\,\text{m}$.

3. Discretização Numérica

O domínio foi discretizado em uma malha uniforme de $n \times n$ pontos, utilizando o método das diferenças finitas de 5 pontos:

$$-4T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 0 \tag{2}$$

As condições de contorno foram incorporadas da seguinte forma:

- **Dirichlet:** valores fixos diretamente no vetor fonte b.
- **Neumann:** usando a formulação ajustada:
  $$T_{\text{parede}} = T_{\text{vizinho}} + \frac{q''\,\Delta x}{k}$$
  com compensação na matriz:
  $$A_{kk} \leftarrow A_{kk} + 1$$
- **Adiabático:** regiões de contorno curvo foram identificadas por verificação geométrica (x, y) e excluídas do sistema.

4. Implementação Computacional

- Linguagem: Python 3.12
- Bibliotecas: `numpy`, `scipy.sparse` (LIL $\rightarrow$ CSR), `matplotlib`

Estratégias de desempenho:

- Matriz esparsa, evitando alocação densa (redução de memória de TB $\rightarrow$ MB).
- Solver `spsolve` para eficiência em sistemas grandes.
- Máscaras (`NaN`) para lidar com cantos adiabáticos.

4.1 Geração da malha e classificação dos nós

A função `gerar_malha_tipo` atribui a cada nó:

- **I:** interno
- **D:** Dirichlet
- **N:** Neumann
- **A:** adiabático

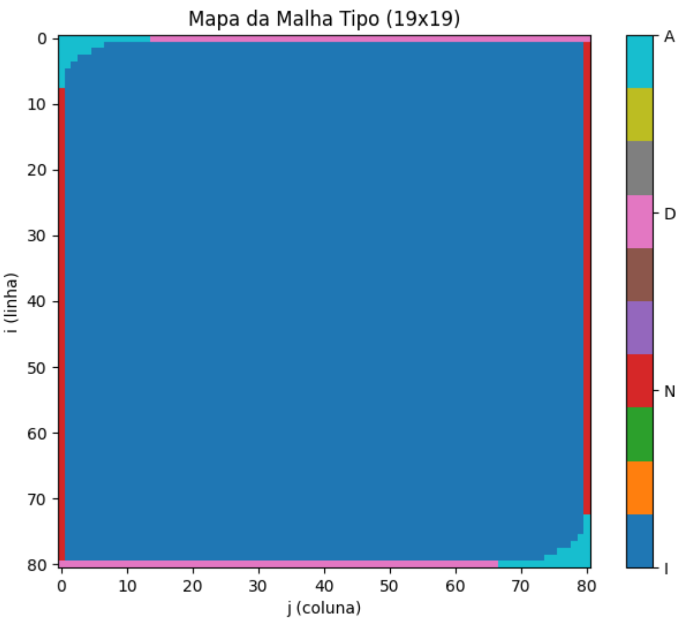

Figura 3: Malha gerada com classificação dos nós.

4.2 Montagem do sistema

- Mapeamento de incógnitas internas.

- Montagem de A e b considerando as diferentes condições.
- Implementação rigorosa da Neumann com compensação na diagonal.

4.3 Interpolação para visualização

Pós-processamento para interpolar valores em regiões Neumann e adiabáticas, garantindo visualização contínua sem alterar a solução numérica.

5. Resultados Numéricos

5.1 Distribuição de temperatura

O solver convergiu para distribuições estáveis em malhas de até 729×729. Temperaturas coerentes com as condições impostas:

- Regiões centrais mais quentes devido ao aporte de calor lateral.
- Gradiente vertical suave entre $45°C$ e $55°C$.

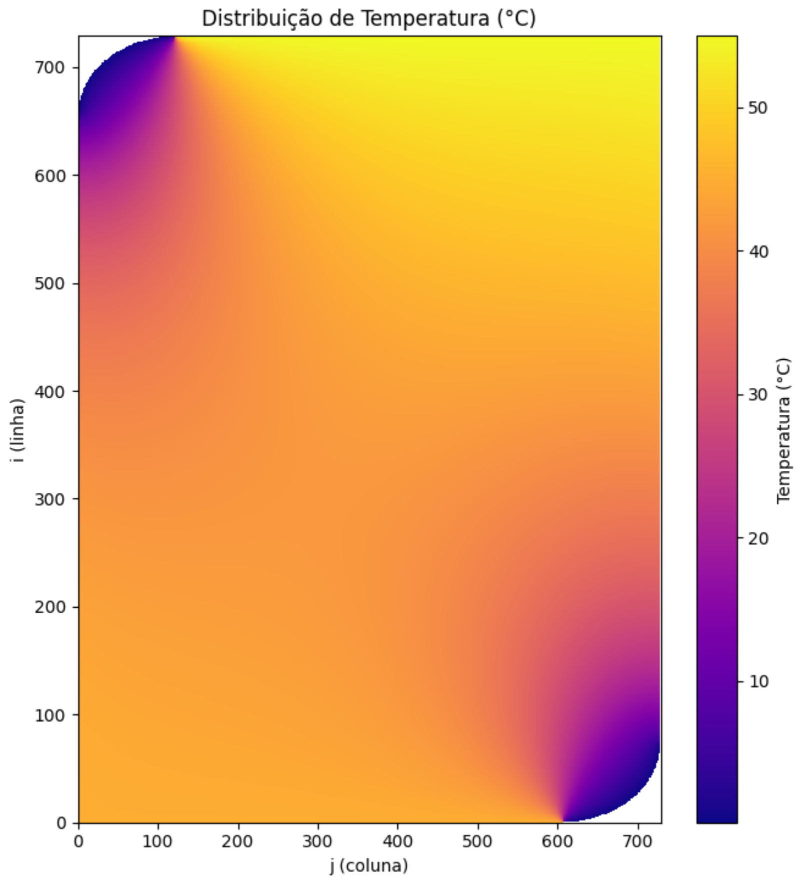

Figura 4: Distribuição de temperatura calculada. Valores interpolados para visualização contínua.

5.2 Comportamento físico

- Alteração do sinal de q_{left} ou q_{right} produz gradientes opostos, confirmando implementação correta da Neumann.
- Perfis de fluxo e isolamento térmico nos cantos respeitados.
- Balanço energético coerente: fluxo líquido $\rightarrow$ aumento da temperatura média.

6. Conclusão

O programa desenvolvido cumpre plenamente os objetivos:

- Resolver a equação de condução de calor em geometria complexa com múltiplos tipos de contorno.
- Suportar malhas muito refinadas com alta eficiência de memória.
- Produzir resultados fisicamente coerentes e visualmente interpretáveis.

Este projeto encerra o curso com demonstração de proficiência em métodos numéricos, implementação computacional avançada e capacidade analítica de validar soluções numéricas frente à realidade física.

7. Trabalhos futuros

- Implementação de parâmetros α e β para ajuste fino da curvatura em malhas grosseiras.
- Extensão para problemas transientes (dependentes do tempo).
- Acoplamento com modelos de convecção e radiação para simular trocas térmicas complexas.