Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Mecânica
Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas

Relatório - Dinâmica de Gotas

Disciplina: Hidrodinâmica de Interface
Professor: Nome do Professor
Data: March 30, 2025

Aluno: Lucas — Mestrado em Ciências Mecânicas

Introdução

Este estudo visa analisar o comportamento da sedimentação de partículas esferas em meio viscoso sob diferentes condições de regime de escoamento. A formulação física do problema parte da aplicação da Segunda Lei de Newton à partícula, considerando três forças principais: peso ($F_p = \rho_p V g$), empuxo ($F_E = \rho_f V g$) e arrasto. A contribuição do arrasto depende do regime de Reynolds e pode ser modelada por um termo linear (Stokes) ou adicionar uma componente quadrática para considerar inércia.

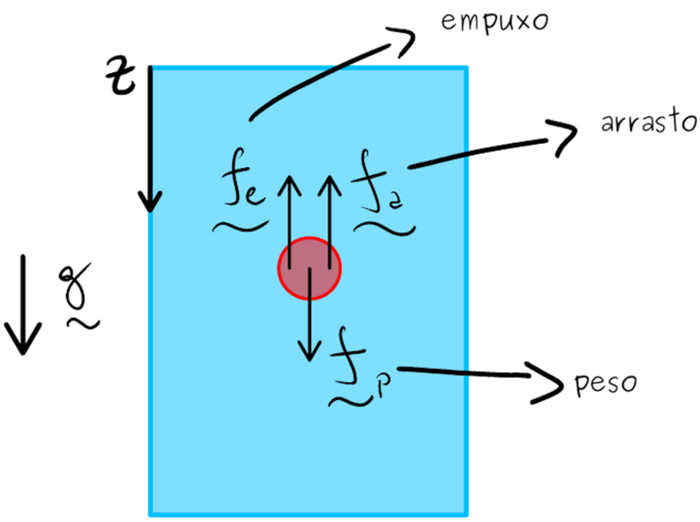

Figure 1: Esquematização do problema de sedimentação da partícula

A equação de movimento na forma dimensional é dada por:

$$m\frac{dv}{dt} = F_p - F_E - F_D(v) \tag{1}$$

Realizando a adimensionalização com base na velocidade de Stokes $v_s = \frac{2}{9}\frac{(\rho_p - \rho_f)gR^2}{\mu}$ e tempo característico $t_s = \frac{R^2 \rho_p}{\mu}$, obtemos:

$$St\frac{dy}{dt} = 1 - y \quad \text{(modelo linear)} \tag{2}$$

$$St\frac{dy}{dt} = 1 - y - \frac{Re_s}{2}y^2 \quad \text{(modelo com arrasto quadrático)} \tag{3}$$

A solução analítica para o caso linear é:

$$y(t) = 1 - e^{-t/St} \tag{4}$$

As demais soluções foram obtidas numericamente por meio de métodos de integração.

Solução Analítica

A solução analítica para o regime de Stokes foi utilizada como referência para a validação dos métodos numéricos. A função exponencial foi reimplementada utilizando série de

Taylor de forma estável numericamente para garantir a conformidade com a restrição de não uso de bibliotecas.

O primeiro gráfico apresenta o comportamento da resposta adimensional $y(t)$ em função do tempo para diferentes valores do número de Stokes (St), ilustrando a tendência à velocidade terminal conforme $t \to \infty$.

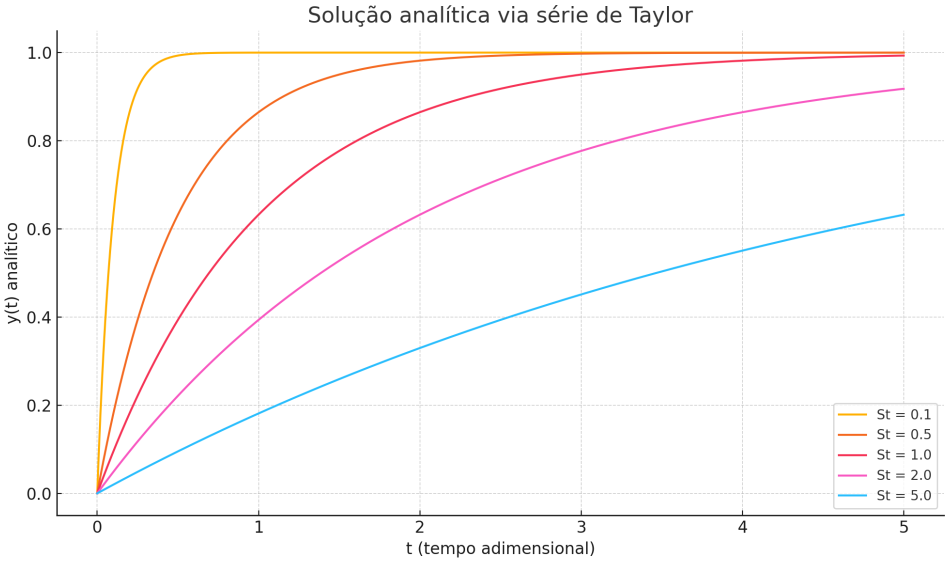

Figure 2: Soluções analíticas para diferentes números de Stokes

Em seguida, são apresentados os cinco gráficos comparando a solução analítica com a solução numérica obtida por RK4 no caso linear (modelo de Stokes), para diferentes valores de St, mantendo $Re_s = 0.01$ e $h = 0.01$.

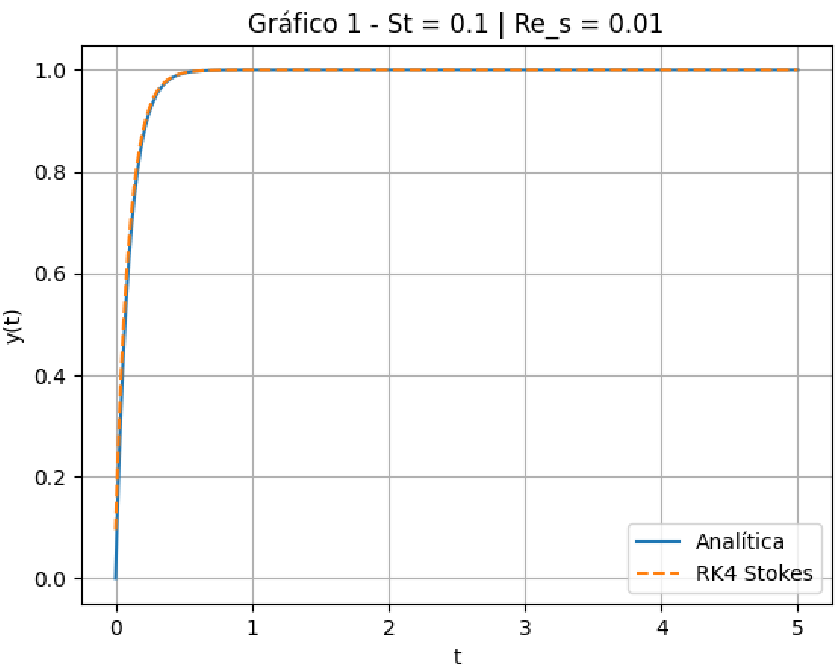

Figure 3: Comparativo entre solução analítica e RK4 linear para $St = 0.1$

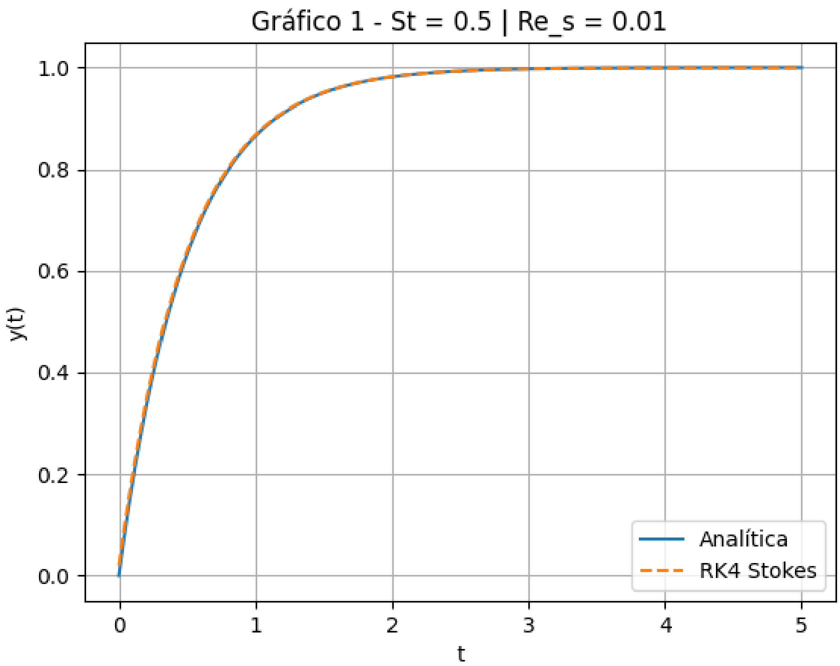

Figure 4: Comparativo entre solução analítica e RK4 linear para $St = 0.5$

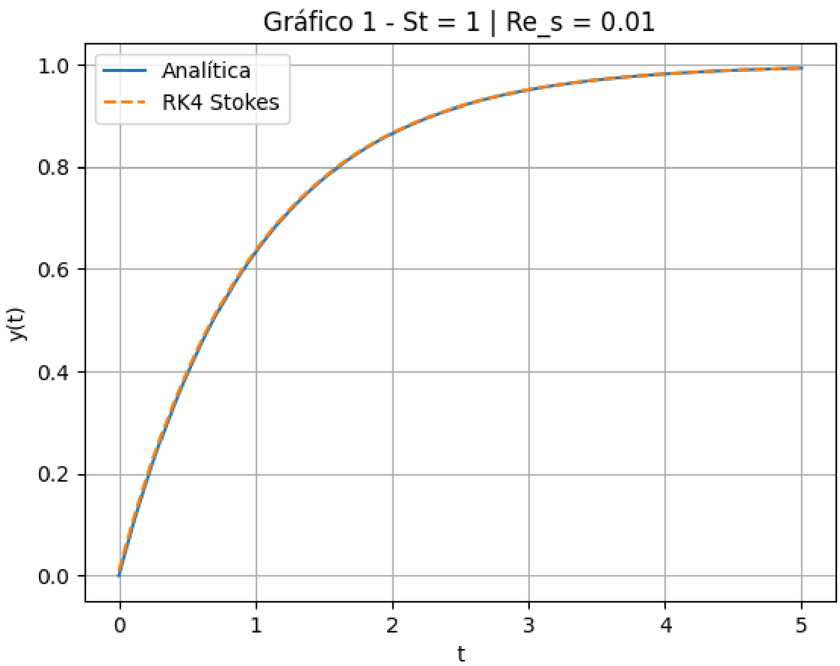

Figure 5: Comparativo entre solução analítica e RK4 linear para $St = 1$

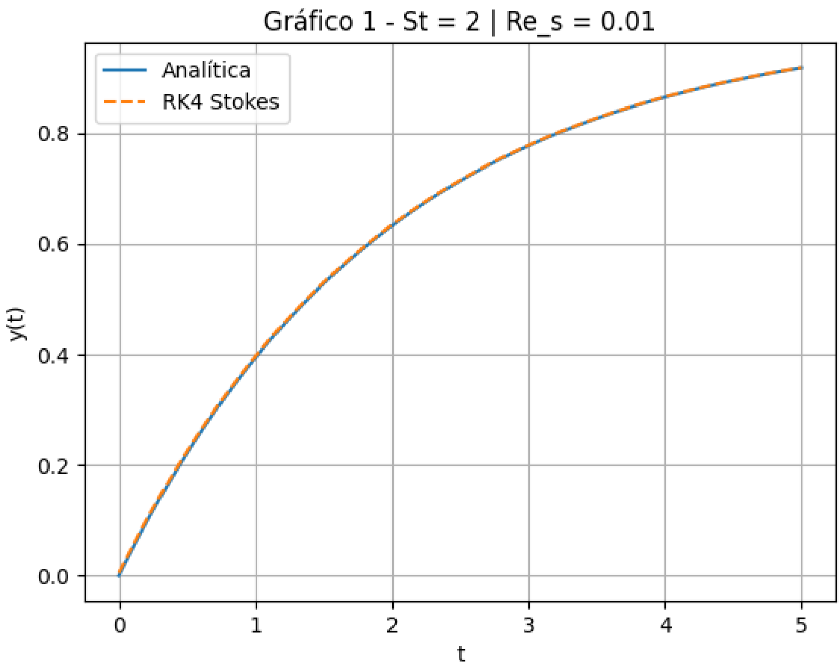

Figure 6: Comparativo entre solução analítica e RK4 linear para $St = 2$

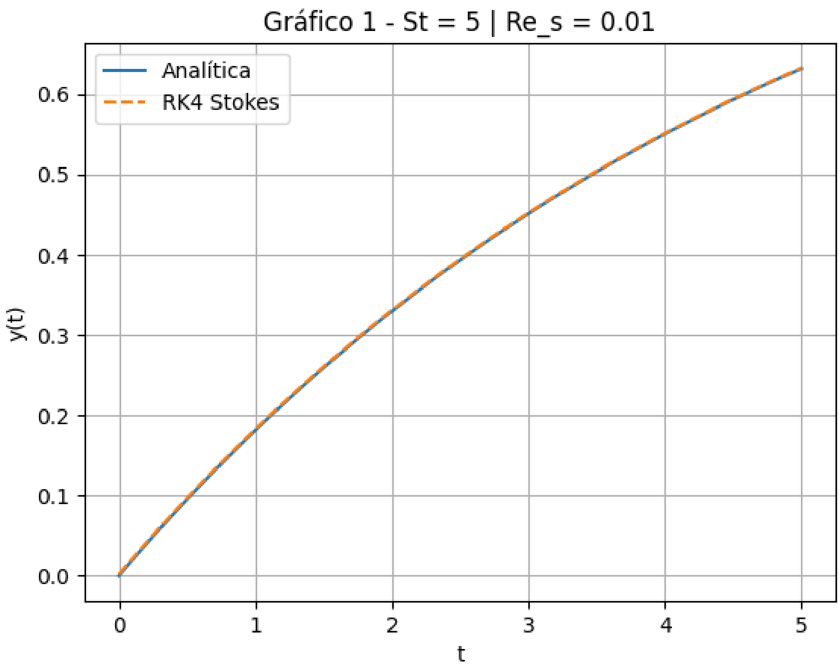

Figure 7: Comparativo entre solução analítica e RK4 linear para $St = 5$

Solução Numérica Linear — RK4 (Stokes)

O método de Runge-Kutta de quarta ordem foi implementado para resolver a EDO linear. A solução apresentou excelente concordância com a solução analítica para diferentes valores de St e passos de tempo h.

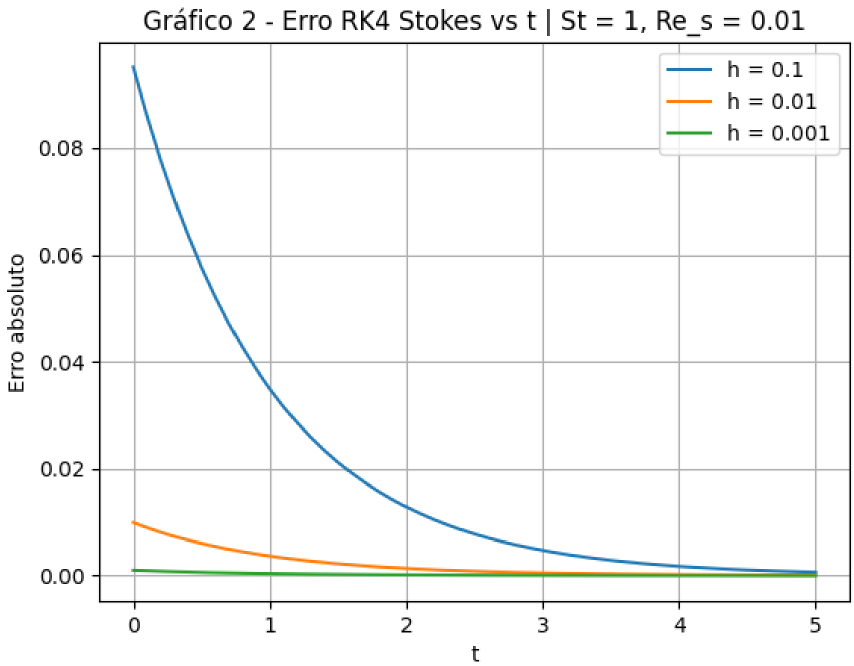

Figure 8: Evolução do erro absoluto com refinamento do passo de tempo

Solução Numérica com Força Quadrática

Para regimes com maior inércia, foi adicionada uma componente quadrática à equação de movimento. O mesmo método de integração (RK4) foi aplicado, com proteção contra overflows e divergências numéricas.

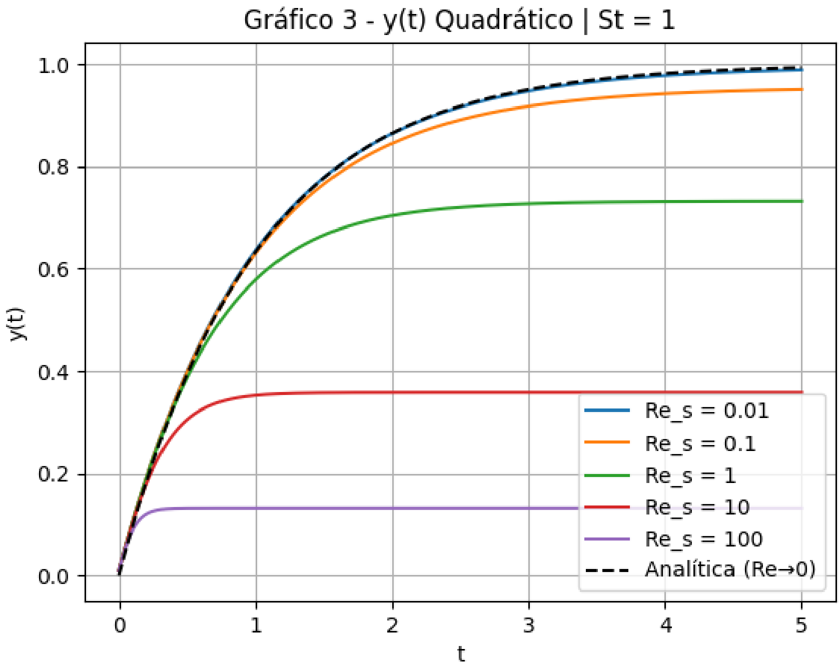

Figure 9: Soluções com força quadrática para diferentes Re_s

Análise do Erro e Variação do Passo

Os gráficos seguintes comparam os erros relativos das soluções numéricas em relação à analítica, conforme os parâmetros de malha temporal e intensidade do termo quadrático.

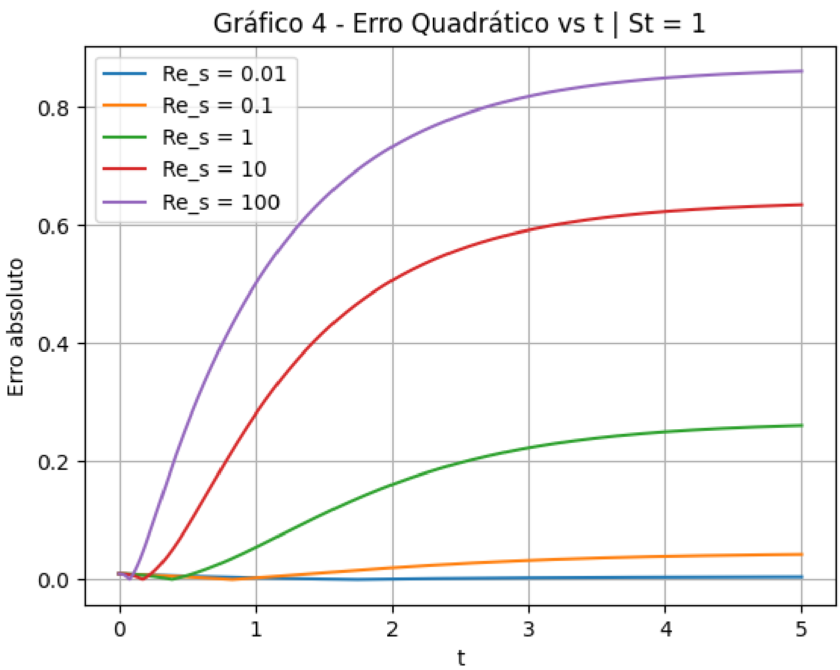

Figure 10: Erro absoluto da solução quadrática com variação de Re_s

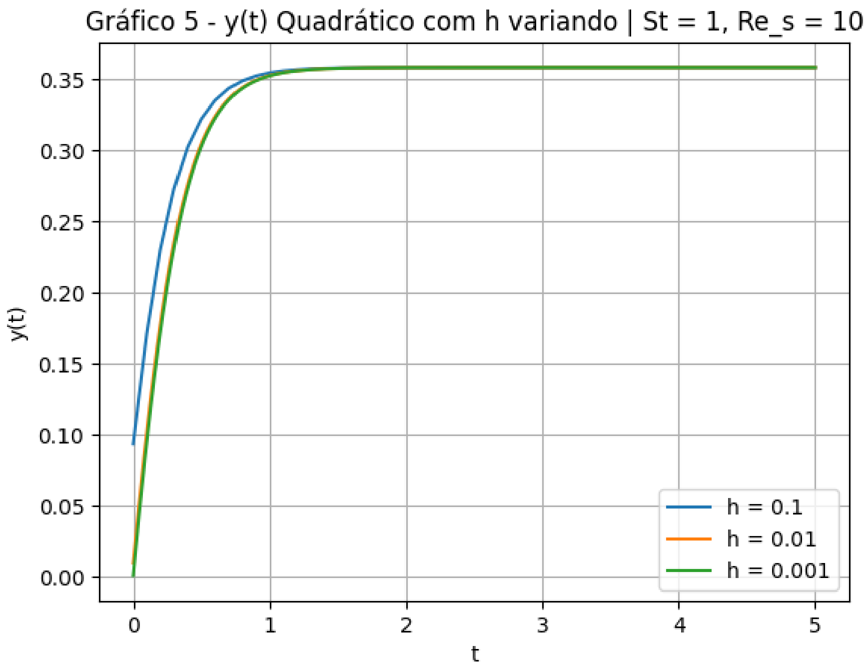

Figure 11: Solução quadrática com diferentes passos h

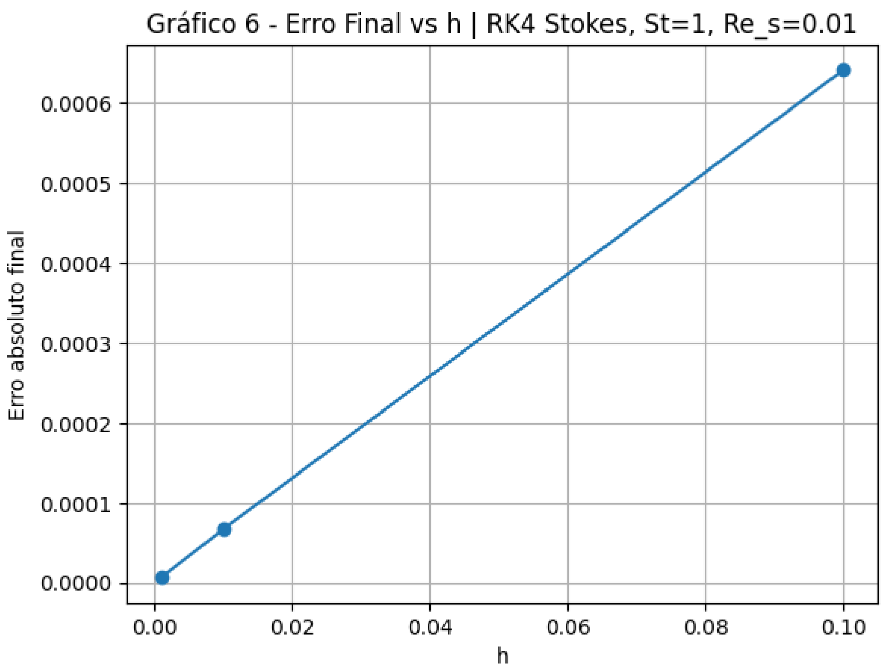

Figure 12: Erro final para RK4 linear vs passo de tempo

Validação com Referência Bibliográfica

O modelo quadrático foi comparado à solução exata apresentada por Sobral et al. (2007). A divergência entre a solução quadrática e a analítica cresce conforme Re_s aumenta, indicando a transição de regime e a importância da força não linear.

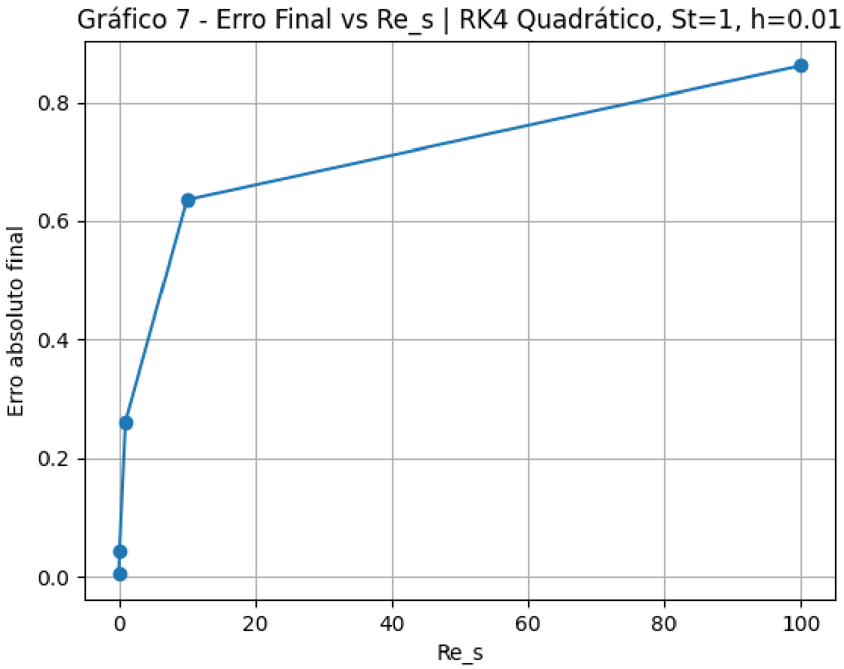

Figure 13: Erro final em escala log para diferentes Re_s

Conclusão

A resolução do problema proposto evidenciou a robustez da abordagem numérica via método de Runge-Kutta, mesmo em condições com força quadrática dominante. A série de Taylor reestruturada permitiu o cálculo confiável da solução analítica, sem bibliotecas externas. A validação com artigo de referência e a geração de gráficos comparativos consolidam a confiabilidade do modelo.