Atividade para casa #1

Determinação de raízes múltiplas

Aplicação do Método de Newton-Raphson para raízes múltiplas

April 7, 2025

1 Contextualização

Vimos até esse momento o uso de alguns métodos intervalares para lidar com o problema de busca de raízes, dentre eles o método da bisecção e o método da falsa posição. Chamamos esses métodos de intervalares pelo fato de que partem da escolha inicial de um intervalo fechado onde presume-se a localização das raízes que estamos buscando. Veremos mais a seguir que nem todos os métodos numéricos de buscas de raízes operam dessa maneira.

Pelo que vimos até aqui entendemos o método da falsa posição como uma evolução do método da bisecção, uma vez que o mesmo incorpora características da função $f(x)$ que o método da bisecção não percebe a fim de localizar mais rapidamente a raiz. No exemplo utilizado em sala de aula para ilustrarmos a vantagem do método da falsa posição sobre o método da bisecção o método da falsa posição se mostrou vantajoso. No entanto, para algumas funções isso não é bem verdade.

Para a função $f(x) = x^{10} - 1$, cujas raízes múltiplas sabemos ser $x_r = 1$, a aplicação do método da falsa posição leva a uma convergência mais lenta, como visto em sala de aula. O que nos leva a máxima de que as generalizações são muito perigosas no campo dos métodos numéricos. O motivo para o pior desempenho do método da falsa posição nesse exemplo é que o mesmo leva a prisão de uma das extremidades de busca ao longo do processo, como ilustrado na figura (1). Esse fenômeno da extremidade presa é uma característica da forma da função $f(x)$ escolhida nesse caso.

Uma variante natural do método da falsa posição para lidar com esse problema é simplesmente aplicar um contador ao nosso código e caso identifiquemos a prisão de uma raiz ao longo do processo de busca, damos um chega pra lá nessa extremidade presa e avançamos. Com isso acabamos de criar o *método da falsa posição modificado*. O problema dessa abordagem força bruta é que dependendo do *chega-pra-lá* dado na extremidade presa a gente pode fazer com que o intervalo de busca encolha subitamente de uma iteração para outra e pule pela raiz que está buscando sem vê-la no caminho.

É interessante recapitularmos sempre o caminho percorrido para que entendamos não só as diferenças de concepção, performance e aplicação dos métodos vistos, mas percebamos também o processo criativo por trás da criação de um novo método numérico. A atividade do numericista é também uma atividade de criação além do óbvio aspecto técnico envolvido.

Além dos métodos intervalares vistos até o momento, temos também os métodos abertos, nos quais partimos de um valor inicial da variável de busca $x = x_0$ e vamos evoluindo-a incrementalmente ao longo de um caminho visando chegar nas raízes a frente de x_0. Dos métodos abertos, o mais famoso é o *método de Newton-Raphson*. Nesse método usamos a definição de derivada como reta tangente ao ponto e vamos caminhando ao longo da própria função projetando sua derivada no eixo x até encontrarmos a raiz. Fica mais fácil compreender o método por meio de uma figura. Para isso, considere a figura (2). Nessa figura, podemos ver que a derivada $f'(x)$ é dada por:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \longrightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1}$$

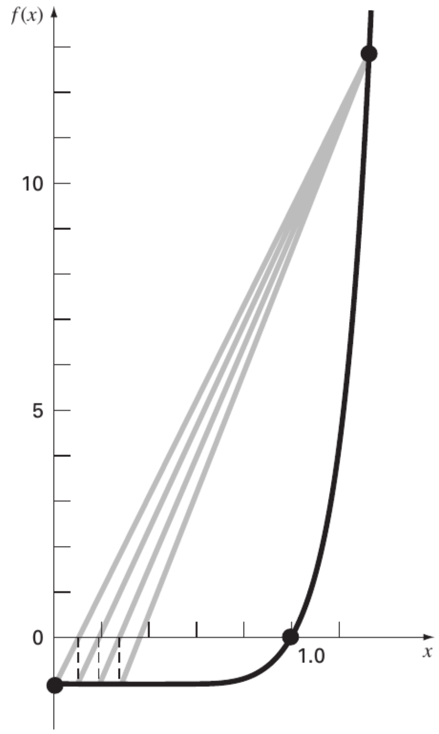

Figure 1: Ilustração de uma extremidade presa no processo de busca pelo método da falsa posição

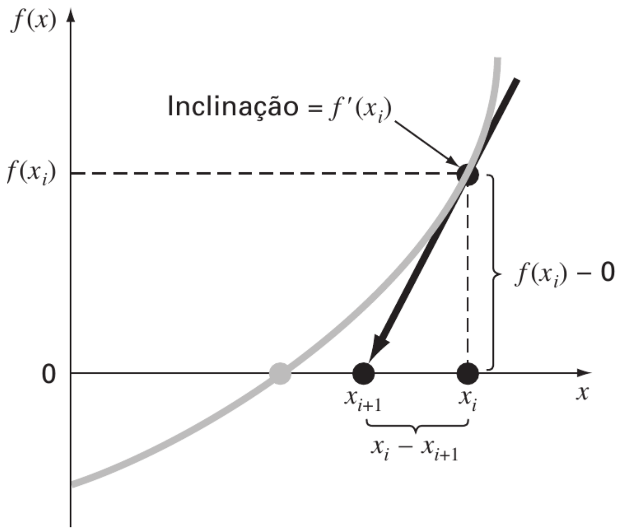

Figure 2: Projeção da derivada no alvo ao longo do eixo x pelo método de Newton-Raphson para evoluir rumo à raiz iterativamente

Essa fórmula para evolução de x é conhecida como *fórmula de Newton-Raphson* e é um dos métodos mais utilizados para encontrar raízes de funções cuja cara conhecemos bem. Em alguns problemas temos apenas os valores numéricos de $f(x)$ na forma de uma grande tabela de números. Nesses casos, uma variante natural do método de Newton-Raphson é o método da secante, que calcula a derivada $f'(x)$ numericamente adicionando um ponto extra x_{i-1} para dar partida no método e gerando a seguinte fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}, \tag{2}$$

em que as variáveis x_{i-1} e x_i utilizadas para estimativa numérica de $f'(x_i)$ estão representadas na figura (3).

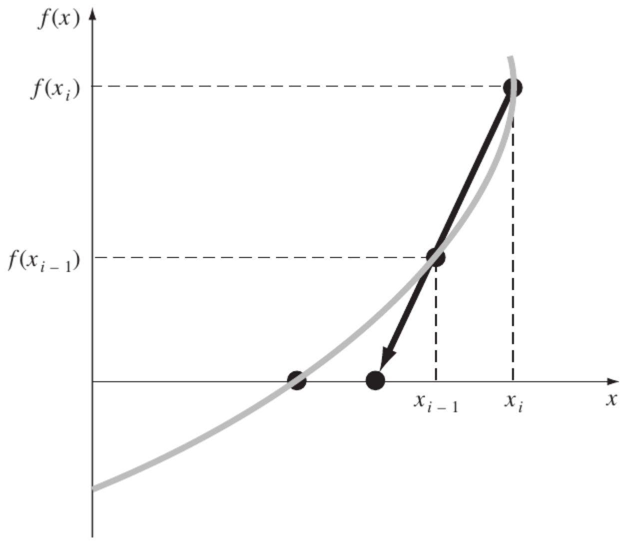

Figure 3: Adição de um ponto extra para estimativa numérica da derivada função pelo método da secante.

Em seguida, vimos também que é possível modificar o método da secante para padronizar a distância entre x_i e x_{i-1} por meio de uma pequena perturbação δ de tal sorte que $x_{i-1} = x_i + \delta x_i$, o que nos leva ao método da secante modificado, em que a solução evolui de forma aberta numa busca incremental iterativa de acordo com a seguinte fórmula de recorrência

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i f(x_i)\delta}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}. \tag{3}$$

Todos esses métodos abertos podem levar a problemas em contextos de raízes múltiplas. O motivo para isso é simples: a derivada $f'(x)$ é nula nesses pontos para funções que possuem raízes múltiplas. Além disso, sabemos que raízes de multiplicidade par levam a um comportamento da função $f(x)$ no qual ela não chega a cruzar o eixo na raiz, o que também nos leva a problemas na aplicação dos métodos intervalares.

Uma solução para este problema é a aplicação do *método de Newton-Raphson modificado para raízes múltiplas* que se vale do fato de que para uma função $f(x)$ de múltiplas raízes, podemos construir uma função $u(x)$ composta por $f(x)$ e $f'(x)$ que possui as mesmas raízes de $f(x)$ e é dada por:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)},$$

de tal sorte que pelo método de Newton-Raphson teríamos

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}.$$

Derivando $u(x)$ com relação à x e manipulando algebricamente o resultado para escrevermos x_{i+1} em função de x_i e $f(x_i)$ chegamos na fórmula de Newton-Raphson modificada para raízes múltiplas, dada por:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{f'(x_i)^2 - f(x_i)f''(x_i)} \tag{4}$$

2 Enunciado da tarefa

Escolha um polinômio de quarta ordem de sua preferência e na construção desse polinômio conceba-o de tal sorte que o mesmo possua raízes múltiplas. Aplique na mão o método de Newton Raphson modificado para raízes múltiplas para encontrar todas as suas raízes de tal sorte que o erro aboluto fique abaixo de 1% para todas as raízes.

Nessa tarefa, como você montará o polinômio de antemão, você já possui a vantagem de conhecer todas as raízes que está buscando. Dessa forma, você poderá escolher um valor inicial para partir para a sua busca incremental já próximo de onde deverá chegar a fim de não precisar fazer muitas iterações na mão. Tente limitar suas iterações a um máximo de 4 para cada raiz.

A ideia dessa atividade é fazer com que você pare e aplique com calma, manualmente o método numérico de Newton-Raphson modificado para raízes múltiplas a fim de compreender a estratégia de construção e aplicação do método antes de implementar a solução deste problema no computador.

Você deverá digitar essa tarefa em LaTeX, mostrando o passo a passo de seus cálculos. Ao final da solução você deverá organizar seus resultados parciais na forma de uma tabela que mostre como sua solução evolui ao longo das iterações até os valores corretos das raízes do polinômio escolhido juntamente com a evolução do erro verdadeiro.

3 Referências bibliográficas

1. S. C. Chapra, R. P. Canale. “Métodos Numéricos para Engenharia.” McGrawHill, 5a edição (2008): 1-825.