

# Programa para casa #7

## Integração numérica *Fórmulas fechadas de Newton-Cotes*

14 de julho de 2025

### 1 Contextualização

Quando estudamos cálculo, no início de nossas trajetórias acadêmicas, aprendemos três conceitos básicos que definem a essência do cálculo diferencial: limites, derivadas e integrais. Limites são essenciais para compreendermos o conceito abstrato de infinitésimo. Esse conceito talvez seja um dos constructos mais filosóficos com o qual nos deparamos no início de nossos estudos no campo das ciências exatas no início do nível superior. Na verdade, a ideia de limite remonta a uma questão antiga no campo da filosofia clássica e que encontra-se no cerne da nossa própria compreensão do movimento.

Entendemos o movimento como uma mudança sucessiva de configurações de corpos materiais que se deslocam no espaço ao longo de um determinado intervalo de tempo. E é justamente nesse ponto que os filósofos clássicos se deparavam com problemas lógicos na tentativa de compreender o movimento. Para os antigos, a passagem do tempo parecia ser algo paradoxal. Aristóteles enunciava o seguinte problema: quando um segundo deixa de ser o segundo presente e passa a dar lugar a um novo instante, que ainda não é instante, para que possa ocupar o lugar do atual instante e passar a ser o instante presente? Quando acontece essa passagem de bastão? Existe um ponto em que esses instantes se encontram para que um possa substituir o outro? Se isso acontece, dois instantes coincidem? Por uma questão de lógica, Aristóteles resolveu o problema definindo que dois instantes nunca podem se encontrar, sendo assim o instante uma entidade física essencialmente solitária.

Mas essa solução não responde o problema de como o tempo flui. Essa continuidade aparente na fluidez dos instantes é desafiadora para a mente humana. Anos mais tarde, Immanuel Kant propõe uma solução elegante para o problema que ele vai buscar não no campo da lógica ou da metafísica, mas na epistemologia. A epistemologia é uma sub-área da filosofia que se ocupa em estudar as propriedades do próprio conhecimento. Quando Kant escreve *A crítica da razão pura*, ele propõe a construção de um sistema formal para olhar para a própria razão e definir suas propriedades. Para Kant, uma das propriedades fundamentais da razão é a causalidade. Essa propriedade consiste na compreensão de que para a razão compreender as coisas, ela se baseia em relações de causa e efeito e usa o tempo como recurso explicativo dos fenômenos. Essa é uma mudança radical de paradigma. Para Kant, o olhar Aristotélico que buscava explicar a passagem do tempo estava enviesado pela própria ferramenta usada para falar sobre o tempo.

Uma analogia que gosto de usar para explicar a visão Kantiana sobre o tempo é a ideia de imaginar a razão como o ponteiro de um relógio. Perguntar as horas para esse ponteiro não parece ser uma boa ideia, uma vez que ele está preso, girando com o próprio passar dos segundos.

No entanto, essas visões filosóficas, por mais interessantes que sejam, não explicam do ponto de vista objetivo questões fundamentais para concebermos um modelo lógico que explique o movimento das coisas na matéria. O problema, do ponto de vista físico, passa a ser tratado com maior objetividade, clareza e precisão quando Isaac Newton surge na cena. Grande parte dos problemas da física Aristotélica no campo da descrição do tempo e do movimento se davam pelo olhar discreto que Aristóteles direcionava ao fenômeno. Quando Newton concebe a ideia de variações infinitesimais e introduz conceitos como limites, derivadas e integrais, posteriormente formalizados por Leibniz no que hoje conhecemos por cálculo diferencial, o problema da descrição do movimento ganha novos contornos.

É importante falar que Newton ao inventar o cálculo diferencial, o faz simultaneamente à proposição das próprias leis do movimento. Seu interesse não era apenas trazer um olhar matemático sobre conceitos filosóficos por uma perspectiva puramente acadêmica e sim construir uma ferramenta prática que explicasse o comportamento dos corpos celestes. A junção do cálculo diferencial com as leis do movimento, juntamente com técnicas de solução de equações diferenciais, é a cereja no bolo que consolida uma nova compreensão da física como ciência e revoluciona o modo de pensar da humanidade em relação ao seu próprio papel no jogo cósmico.

Do ponto de vista formal, sabemos que derivadas e integrais estão relacionadas, pelo próprio teorema fundamental do cálculo, que afirma que se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , ou seja,  $F'(x) = f(x)$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Porém, a relação entre derivadas e integrais transcende o próprio teorema fundamental do cálculo. Nessa seção pretendemos discutir em maiores detalhes essas relações, antes de apresentarmos técnicas numéricas voltadas à soluções de integrais em uma ou várias dimensões. Num primeiro momento, poderíamos definir nosso interesse aqui como o cálculo de uma área abaixo de uma curva, como representado na figura (1).

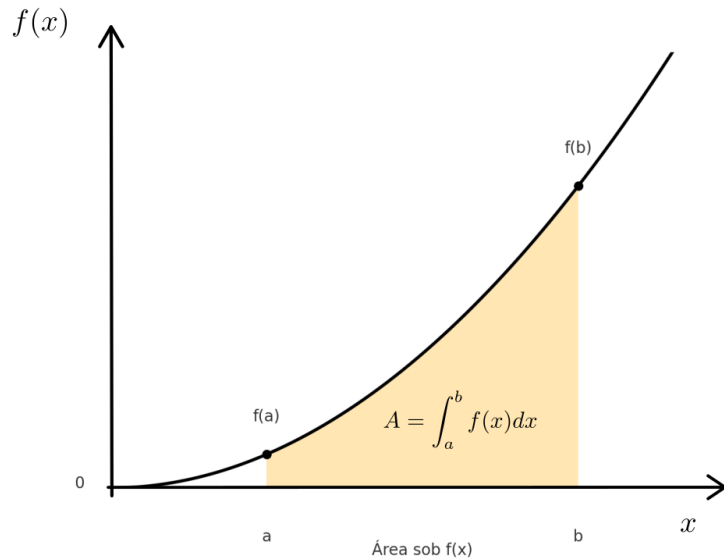


Figura 1: Representação clássica da integral como a área abaixo de uma curva entre dois limites de integração bem definidos

Mas se essa área é equivalente à integral da função  $f(x)$  entre os extremos  $a$  e  $b$ , então podemos escrever  $dA = f(x)dx$ , o que nos leva à

$$\frac{dA}{dx} = f(x), \quad (2)$$

ou seja, a própria ideia de que a integral de uma função contínua entre dois extremos bem definidos representa a área abaixo da curva, recai também numa equação diferencial. Podemos dizer que em certo sentido, o cálculo da integral definida de uma função contínua qualquer é equivalente à resolução de uma equação diferencial para estimativa de  $y(b)$  dada uma condição inicial  $y(a) = 0$ . Aqui, essa condição inicial homogênea diz respeito ao fato de que área abaixo da curva, no início do intervalo de integração é ainda nula, pois não tivemos avanço suficiente sobre o domínio de integração para computarmos ainda uma área finita não nula.

Essa afirmação fica mais clara com símbolos. Considere que  $I$  seja o resultado da integral que buscamos, logo:

$$I = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x), \text{ com } y(a) = 0 \Rightarrow I = \int_a^b \frac{dy}{dx}dx \Rightarrow I = y(b), \quad (3)$$

ou seja, o cálculo de integrais está em certo sentido intimamente ligado à soluções de equações diferenciais. Apesar disso, por motivos didáticos, optaremos nessa apostila por separar nosso estudo de processos de integração numérica das técnicas voltadas à solução de equações diferenciais.

## 2 Motivação prática para o estudo de integração numérica

Antes de adentrarmos no estudo de métodos numéricos voltados à solução de integrais. Gostaríamos de dar um exemplo prático, onde este tipo de integral é útil na estimativa de quantidades físicas de interesse de físicos e engenheiros. Algumas ciências como a Mecânica dos Fluidos e o Eletromagnetismo são fortemente beneficiadas pelo uso do conceito de campo. Na verdade, campos, sejam eles escalares, vetoriais ou tensoriais, são abstrações matemáticas úteis para a descrição de fenômenos físicos regidos por um conjunto muito grande de elementos sub-contínuos.

Quando temos por exemplo uma grande quantidade de cargas elétricas interagindo entre si, é mais conveniente utilizar com o conceito de campo elétrico do que lidar individualmente com a descrição das forças elétricas devido à interação entre todas essas cargas elétricas em movimento. O mesmo vale quando pensamos no escoamento de um fluido por exemplo. Ao invés de lidarmos com a descrição do movimento individual de cada pequeno agrupamento molecular em escalas sub-contínuas, preferimos escrever as leis do movimento em termos dos campos de velocidade, pressão, massa específica, temperatura, etc. Essa abordagem de campo, geralmente chamada de abordagem Euleriana, nos permite obter soluções precisas do comportamento coletivo de uma grande quantidade de sub-elementos (partículas, cargas, etc.), responsáveis pela manifestação do fenômeno.

Seja na mecânica dos fluidos, no eletromagnetismo ou na elasticidade, abordagens de campo podem ser escritas tanto em versões integrais ou diferenciais. Na mecânica dos fluidos, quando aplicamos a segunda lei de Newton a uma partícula fluida e utilizamos relações e teoremas de transformação para escrevermos essa lei em termos de uma linguagem de campo, obtemos as clássicas equações de Navier-Stokes. Falaremos sobre essas

equações mais para frente quando estivermos estudando de fato equações diferenciais. Fato é que essas equações são muito complicadas e possuem um termo não-linear que impossibilita que as resolvemos em contextos arbitrários. O máximo que conseguimos são soluções analíticas em contextos simplificados, muitos dos quais fogem dos nossos interesses práticos de Engenharia.

Uma forma mais conveniente de lidar com essa física, consiste no uso de uma representação integral de volume de controle, objeto de estudo geralmente do curso de Mecânica dos Fluidos 1, ou mesmo de um curso de Fenômenos de Transporte, para estudantes que não sejam necessariamente da Engenharia Mecânica. Essas equações integrais, produzem relações entre quantidades de interesse de engenharia como forças, torques, vazões mássicas ou mesmo variações de entalpia em volumes macroscópicos, com integrais de quantidades bem definidas nas fronteiras desses volumes de análise.

Essa conexão que estabelecemos entre variações do comportamento de certas propriedades nas fronteiras de um volume de controle com variações temporais de uma quantidade de interesse no interior do volume de análise se faz pelo uso de um teorema famoso na Mecânica dos Fluidos, conhecido como Teorema do Transporte de Reynolds. Esse teorema é fundamental para a construção de uma visão integral, baseada em volume de controle, dos princípios físicos fundamentais, uma vez que as leis da física são geralmente enunciadas para corpos materiais e não para campos.

O Teorema do Transporte de Reynolds, deduzido pelo Professor no canal Ciência e Brisa ([clique aqui para assistir a aula](#)), estabelece uma lei de transformação **sistema-volume de controle** e é dado em termos de uma formulação integral por

$$\frac{dN_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \eta \rho dV + \iint_{SC} \eta \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}, \quad (4)$$

em que  $N_s$  define uma grande extensiva qualquer do sistema, como massa, volume, quantidade de movimento, energia, ou seja, qualquer grandeza física do sistema que dependa do tamanho do mesmo,  $t$  é a variável tempo,  $VC$  simboliza volume de controle,  $\eta$  é a grandeza intensiva correspondente à  $N_s$ , ou seja, a grandeza física obtida ao dividirmos  $N_s$  pela massa,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $SC$  representa as superfícies (entradas e saídas) do volume de controle (áreas),  $\mathbf{U}$  é o vetor velocidade em cada ponto de uma superfície de controle qualquer e  $d\mathbf{A}$  é um vetor elemento de área que aponta para fora na direção normal à superfície de controle analisada.

A equação (4) por si só é apenas uma lei matemática de transformação **sistema-volume de controle** e sozinha carece de significado físico profundo. No presente contexto a palavra sistema denota uma porção fixa de massa em escoamento. Quando combinamos a equação (4) com uma lei da física correspondente somos capazes de formular o princípio físico em questão em sua **formulação integral de volume de controle**.

Para título de ilustração, considere por exemplo uma das leis mais fundamentais da física clássica, o princípio da conservação da massa. Todos sabemos que não podemos criar massa ou destruí-la a partir do nada. Esta lei da física pode ser expressa matematicamente em termos da seguinte equação

$$\frac{dM_s}{dt} = 0, \quad (5)$$

em que  $M_s$  é a massa do sistema (que por definição se trata de uma porção fixa de massa em escoamento). Logo a massa de um sistema não pode variar com o tempo de acordo com o princípio da continuidade, ou conservação da massa. Quando combinamos a equação

(5), princípio físico, com o Teorema do Transporte de Reynolds (doravante referenciado como T.T.R), equação (4), utilizando  $\eta = M_s/M_s = 1$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV + \iint_{SC} \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (6)$$

A equação (6) é conhecida como **formulação integral do princípio da conservação da massa**. Nesta equação a primeira integral representa a variação temporal da massa de um determinado fluido no interior do volume de controle em questão enquanto a segunda integral representa o fluxo líquido de massa que entra e sai do volume de controle através de suas superfícies de controle (entradas e saídas). A partir do momento em que a massa de fluido que entra em determinado volume de controle é nula, temos que não existe mais variação temporal de massa acumulada, positivamente ou negativamente, no interior do volume de controle.

Considere agora uma lei da física um pouco mais elaborada, como por exemplo a segunda lei de Newton. Quando Newton afirma que o somatório de forças sobre um sistema é igual ao produto de sua massa pela aceleração do mesmo, no fundo a afirmação equivale a

$$\frac{d\mathbf{P}_s}{dt} = \sum \mathbf{F}, \quad (7)$$

em que  $\mathbf{P}_s$  representa a quantidade de movimento do sistema, dada por  $\mathbf{P}_s = M_s \mathbf{U}$  e  $\mathbf{F}$  representa todas as forças atuantes no corpo. Substituindo  $N_s$  por  $\mathbf{P}_s$  e  $\eta$  por  $\mathbf{U}$  em (??) e utilizando a segunda lei de Newton, equação (7) obtemos a formulação integral para volume de controle da segunda lei de Newton, dada por

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \mathbf{U} \rho dV + \iint_{SC} \mathbf{U} \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}. \quad (8)$$

A equação (8) estabelece que para se conhecer as forças atuantes em um corpo imerso em um escoamento, deve-se conhecer o comportamento do campo de velocidades no interior do volume de controle e em suas superfícies de controle. Na condição em que o escoamento já alcançou o regime permanente de operação a equação (8) recai em

$$\sum \mathbf{F} = \iint_{SC} \mathbf{U} \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}, \quad (9)$$

neste caso apenas o conhecimento do campo de velocidades nas superfícies de controle é em tese suficiente para a determinação das forças envolvidas.

Considere como exemplo de ilustração, um escoamento de aplicação prática direta na indústria aeronáutica: o escoamento em torno de um perfil aerodinâmico, ilustrado na figura (2).

É fácil observar na figura (2) que a presença da asa altera a forma dos perfis de velocidade antes (**montante**) e após (**jusante**) esta. Essa variação dos perfis de velocidade à montante e à jusante da asa representa uma variação na quantidade de movimento do ar na direção  $x$ , variação esta que só pode estar associada com forças nesta direção. A aplicação da equação (??) na direção  $x$  para este problema em regime permanente nos leva a

$$\sum F_x = \iint_{SC1} U_x \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{SC2} U_x \rho \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A}, \quad (10)$$

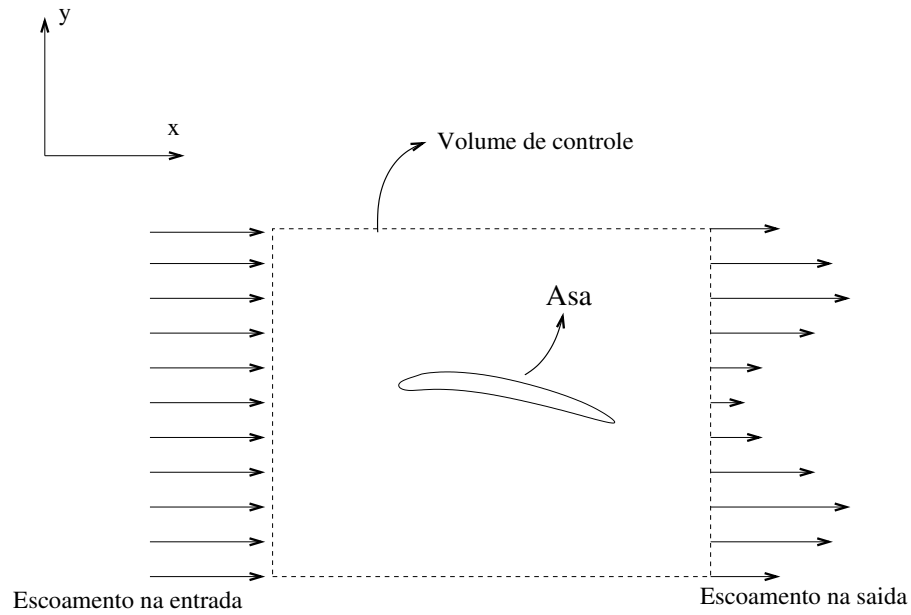


Figura 2: A presença de uma asa perturba o campo de velocidades do escoamento

em que  $F_x$  representa todas as forças na direção  $x$ ,  $SC1$  representa a entrada do volume de controle e  $SC2$  sua saída, além disso temos que  $U_x$  representa a componente da velocidade na superfície de interesse. Para podermos aplicar a equação (10) a fim de determinar a força de arrasto atuante na asa precisamos saber se não existem outras forças importantes envolvidas na direção  $x$ . Para isto, precisamos de um diagrama de corpo livre do volume de controle da nossa geometria de interesse, ilustrado aqui pela figura (3). Repare que além da força de arrasto sobre a asa, denotada aqui por  $F_D$ , temos também uma força de sustentação  $F_L$  e forças distribuídas ao longo das faces do volume de controle associadas à variação do campo de pressão devido à presença da asa.

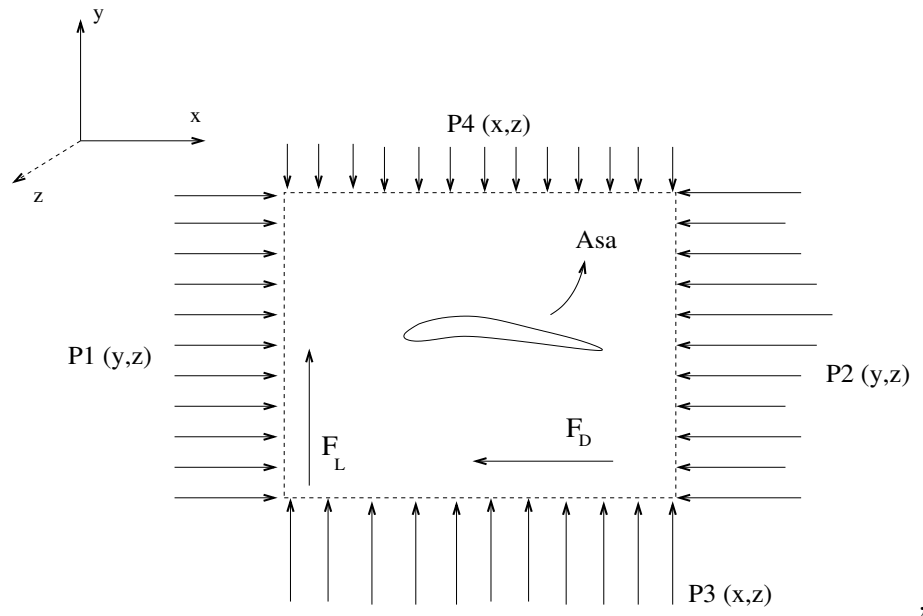


Figura 3: Diagrama de corpo livre do VC

Se considerarmos os eixos perpendiculares ao eixo  $x$  como  $y$  e  $z$ , temos que o somatório

de forças atuando em  $x$  é dado por

$$\sum F_x = -F_D + \iint_{SC1} P(y, z) dydz - \iint_{SC2} P(y, z) dydz, \quad (11)$$

considerando que  $SC1$  seja a superfície de entrada (montante) e  $SC2$  a de saída (jusante) e que por definição o vetor  $\mathbf{dA}$  aponta para fora da superfície na direção normal a mesma, as integrais duplas que aparecem no lado direito da equação (10) podem ser escritas como

$$\iint_{SC1} U_x \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{dA} + \iint_{SC2} U_x \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{dA} = - \iint_{SC1} \rho U_x^2(y, z) dydz + \iint_{SC2} \rho U_x^2(y, z) dydz, \quad (12)$$

combinando as equações (10), (11) e (12), temos que a força de arrasto no perfil é dada por

$$F_D = \iint_{SC1} [P(y, z) + \rho U_x^2(y, z)] dydz - \iint_{SC2} [P(y, z) + \rho U_x^2(y, z)] dydz. \quad (13)$$

A equação (13) nos diz algo muito interessante: para determinarmos a força de arrasto sobre qualquer corpo inserido em um escoamento em regime permanente, precisamos conhecer apenas os perfis de velocidade e pressão nas áreas à montante e à jusante do corpo.

Com relação à determinação da força de sustentação  $F_L$ , se considerarmos o escoamento num canal fechado, como num túnel de vento por exemplo, como não existe escoamento na direção  $y$ , um simples balanço de forças nos fornece que

$$F_L = \iint_{SC3} P(x, z) dx dz - \iint_{SC4} P(x, z) dx dz. \quad (14)$$

A partir da determinação de  $F_D$  e  $F_L$  é possível determinar os parâmetros físicos mais importantes da aerodinâmica, os coeficientes de arrasto e sustentação  $C_D$  e  $C_L$  respectivamente, dados por

$$C_D = \frac{F_D}{\rho v^2 A} \quad \text{e} \quad C_L = \frac{F_L}{\rho v^2 A}, \quad (15)$$

em que  $\bar{v}$  denota a velocidade do escoamento não perturbado pela presença da asa (à montante do corpo por exemplo) e  $A$  representa a área da asa normal à força de sustentação.

Essas integrais geralmente precisam ser determinadas numericamente, a partir de medições pontuais feitas com anemômetros, sensores de pressão ou tubos de Pitot, que geram grandes tabelas de dados contendo valores de pressão e velocidade, distribuídos em pontos do espaço à montante e à jusante do perfil. Essas tabelas podem então passar por técnicas de integração numérica para obtenção das forças de arrasto e sustentação em corpos aerodinâmicos submersos em um escoamento. Para isso, é importante que saibamos aplicar técnicas de integração numérica.

### 3 Fórmulas de integração de Newton-Cotes

Nessa seção apresentaremos as fórmulas de integração de Newton-Cotes em suas formas fechadas. Antes de adentrarmos nesse assunto, cabe definir de maneira clara a distinção

feita entre fórmulas abertas e fechadas de integração. A figura (4) ilustra de maneira clara essa distinção. Quando consideramos integrais definidas com limites claros de integração e incorporamos esses limites na estimativa da integral numérica correspondente, estamos no contexto de uma forma fechada de integração. Quando os limites extremos do intervalo não entram na integração numérica, caímos num contexto de forma aberta de integração. As formas abertas são particularmente úteis na estimativa numérica de integrais impróprias ou na solução de equações diferenciais. Aqui, nessa seção, restringiremos nossa atenção às fórmulas de integração fechada de Newton-Cotes.

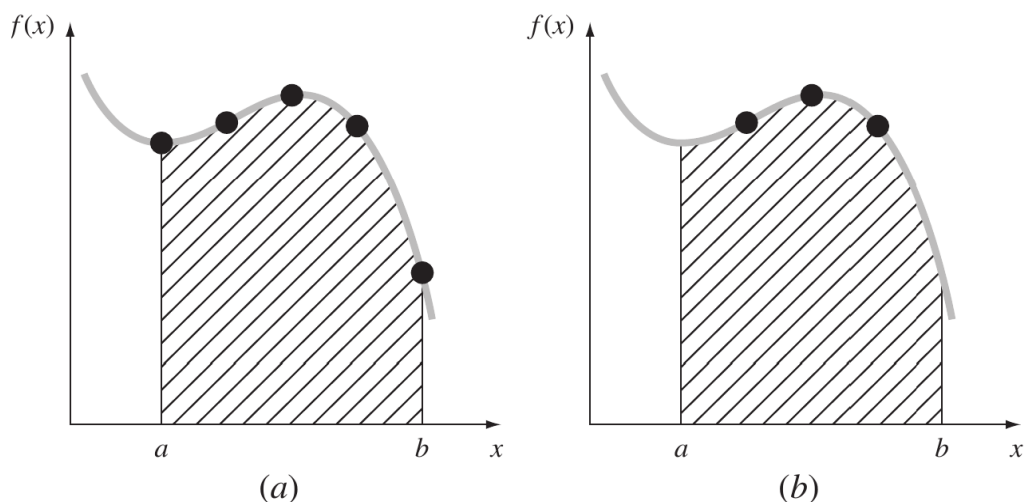


Figura 4: (a) forma fechada e (b) aberta de integração numérica

A ideia central das fórmulas de integração fechadas de Newton-Cotes, consiste em aproximar o comportamento de uma função complicada a ser integrada em uma função polinomial mais simples:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_n(x)dx, \quad (16)$$

em que  $f_n(x)$  representa um polinômio de grau  $n$ , expresso na forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n. \quad (17)$$

É fácil notar que a tendência geral aqui é a de um refinamento na solução numérica do processo de integração por meio da elevação do grau do polinômio, como representado na figura (5).

Uma outra ideia importante no campo das fórmulas fechadas de integração de Newton-Cotes consiste na aplicação de vários polinômios em sub-intervalos no domínio de integração, como ilustrado na figura (6). O que veremos ao longo dessa seção é que geralmente, quando refinamos o grau do polinômio aproximador do comportamento da função a ser integrada, diminuímos a quantidade de segmentos de integração necessários para obtenção de uma resposta com o mesmo grau de precisão quando comparamos com o caso de um polinômio de ordem mais baixa. Aqui a escolha é entre o nível de refinamento (ordem) do polinômio aproximador e a quantidade de segmentos de integração necessários para uma mesma precisão.



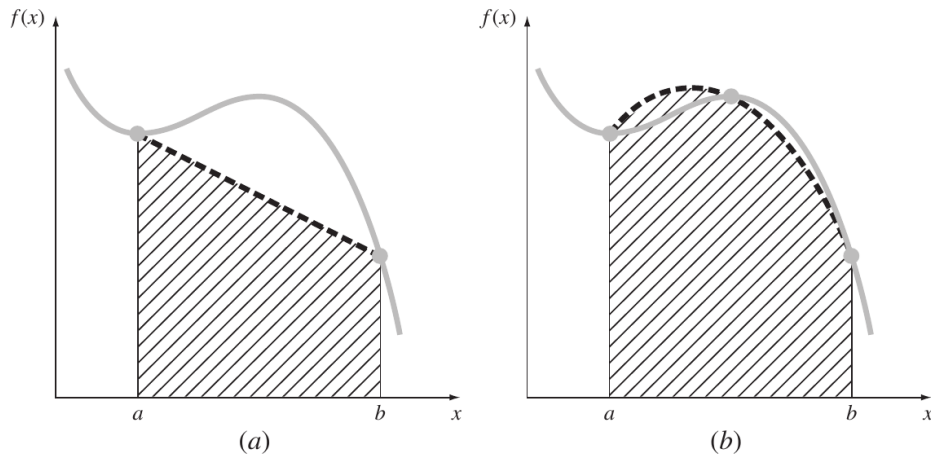


Figura 5: (a) aproximação da integral por meio de uma única reta e (b) por meio de uma única parábola

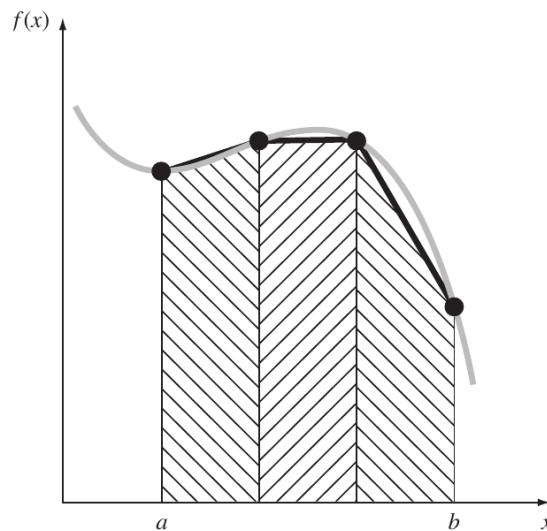


Figura 6: Aproximação da integral por meio de três segmentos de reta ao longo do domínio de integração

### 3.1 A regra do trapézio

A primeira fórmula fechada de integração de Newton-Cotes corresponde justamente ao uso de um polinômio de primeiro grau na aproximação da integral que estamos buscando calcular:

$$I \approx \int_a^b f_1(x) = \int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)(x - a)}{b - a} \right] dx, \quad (18)$$

o que fornece, após algumas manipulações algébricas

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (19)$$

A equação (19) fornece exatamente a expressão para o cálculo de um único trapézio, definido no intervalo entre  $a$  e  $b$ , ilustrado pela figura (7). Note porém, que o uso de um único trapézio não parece ser uma alternativa razoável para a estimativa da integral

que estamos buscando. Uma ideia muito melhor consiste na divisão desse intervalo em sub-intervalos, de tal sorte que a área abaixo da curva, ou seja, a integral que estamos buscando, seria dada pela soma desses múltiplos trapézios, de altura  $h$  dada por

$$h = \frac{b-a}{n}, \text{ em que } n \rightarrow \text{número de intervalos para } n+1 \text{ pontos} \quad (20)$$

Aqui, esses  $n+1$  pontos poderiam ser organizados num vetor  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , de tal sorte que a integral em todo o intervalo é dada por

$$I \approx \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_1(x)dx. \quad (21)$$

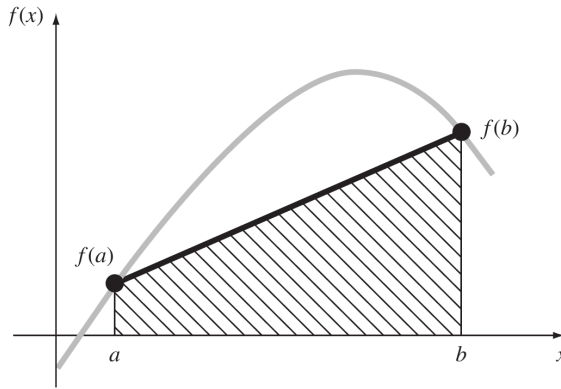


Figura 7: Ilustração de um único trapézio para a primeira fórmula fechada de Newton-Cotes com um único segmento

Uma vez que sabemos que as integrais para cada sub-intervalo em (21) são dadas por pequenos trapézios de altura  $h$ , podemos escrever

$$I \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (22)$$

em que cada par  $f(x_i) + f(x_j)$  representa a soma da base menor e base maior de um pequeno trapézio compreendido entre  $x_i$  e  $x_j$ . Dessa forma, podemos escrever uma fórmula geral para o somatório da área de todos esses pequenos trapézios como

$$I \approx \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (23)$$

A equação (23) pode ainda, ser escrita em termos de  $a, b$  e  $n$ , como

$$I \approx \frac{(b-a)}{2n} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (24)$$

### 3.2 Regras de Simpson

A regra do trapézio, para funcionar bem, especialmente em funções com muitas oscilações, altas derivadas e demais comportamentos bruscos, ainda que contínuos e diferenciáveis, pode demandar muitos segmentos de integração. Isso pode não fazer muito impacto em

processos nos quais desejamos integrar apenas uma única vez uma função para obtenção de uma área abaixo da curva. Mas no campo dos métodos numéricos é importante pensarmos que um simples processo de integração, dependendo do algoritmo no qual está inserido, pode ser demandado centenas de milhares de vezes dentro de um grande laço temporal por exemplo em um algoritmo maior. Por esse sentido, é importante pensarmos em refinar a regra do trapézio, a fim de buscar um esquema numérico mais eficiente.

Aqui definimos um algoritmo mais eficiente como aquele que gera uma equivalência de performance, quando comparado a um outro algoritmo, com um menor número de contas/execuções. Se utilizarmos polinômios aproximadores de ordem mais alta na fórmula fechada geral de Newton-Cotes, sabemos que estaremos caminhando no sentido de aumentarmos a eficiência do nosso método.

O método de Simpson é um próximo passo natural da nossa regra do trapézio. Esse esquema é construído quando utilizamos um polinômio interpolador de segundo grau na fórmula fechada de Newton-Cotes:

$$I \approx \int_a^b f_2(x)dx. \quad (25)$$

Nesse contexto, uma forma mais conveniente de escrever esse polinômio de segundo grau consiste no uso de um polinômio de Lagrange de mesmo grau, dado por

$$f_2(x) = L_0f(x_0) + L_1f(x_1) + L_2f(x_2)$$

em que

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad (26)$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad (27)$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \quad (28)$$

Note como essa forma de representação de uma função quadrática é elegante e ao mesmo tempo portadora de uma clara inteligência algorítmica. Perceba por exemplo que quando  $x = x_0$ , temos  $L_0 = 1$ .  $L_1 = L_2 = 0$ , recuperando  $f_2(x_0) = f(x_0)$ . O mesmo ocorre quando  $x = x_1$  ou  $x = x_2$ . Isso significa que o polinômio de Lagrange de segundo grau recupera o valor da função que busca interpolar nos pontos em que ambas (função e parábola proposta por exemplo) devem coincidir. Além disso, as funções  $L_0, L_1, L_2$  são todas funções quadráticas de  $x$ , destacando a natureza quadrática do polinômio de Lagrange de segundo grau correspondente.

### 3.3 Para treinar um pouco em casa

1. Substitua as expressões do polinômio de Lagrange de segundo grau na fórmula fechada de Newton-Cotes, equação (25) e mostre que:

$$I \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]. \quad (29)$$

Essa fórmula é conhecida como regra 1/3 de Simpson, por conta desse fator de  $h/3$  que multiplica o restante dos termos. Essa regra também é conhecida em alguns contextos como segunda fórmula de integração fechada de Newton-Cotes;

2. Mostre então que para  $n$  intervalos, a aplicação múltipla desta regra, para vários sub-intervalos, resulta em

$$I \approx \frac{(b-a)}{3n} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_j) \right]. \quad (30)$$

3. Finalmente, mostre que o uso de um polinômio de Lagrange de ordem 3 (com 4 pontos) leva à seguinte expressão da integração para um único segmento de 4 pontos:

$$I \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]. \quad (31)$$

A expressão (31) é conhecida como regra 3/8 de Simpson e representa um avanço sem relação à regra 1/3, apesar de demandar um ponto adicional a mais para compor um único sub-intervalo de integração.

## 4 Integrais múltiplas

As técnicas vistas nessa seção para integração em uma única dimensão, podem se estender para contextos multidimensionais mais complicados. A fim de ilustrarmos como podemos fazer isso, vamos explicar por meio de um exemplo.

Suponha que você conheça a distribuição de temperatura em uma placa retangular de dimensões  $8\text{m} \times 6\text{m}$  e que essa distribuição é dada por

$$T(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72. \quad (32)$$

Uma representação visual esquemática desse campo de temperatura é mostrada na figura (8).

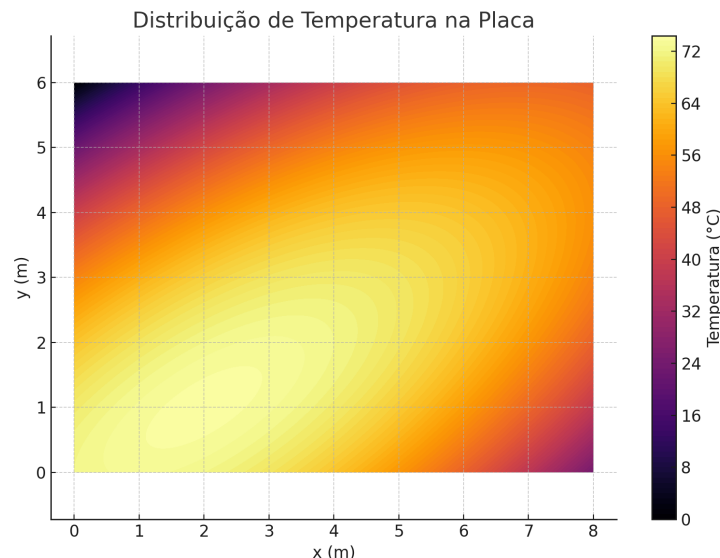


Figura 8: Distribuição de temperatura em uma placa retangular para exemplificar a integração múltipla

Difícilmente você vai ganhar de presente uma distribuição analítica de temperatura como essa do exemplo para um problema real de engenharia. Na maior parte dos casos, essa distribuição será mais provavelmente obtida a partir de uma tabela de valores

numéricos, oriunda de uma simulação numérica realizada em um domínio discretizado. Veremos exemplos disso mais para frente quando formos lidar com equações diferenciais. Mas para fins do exemplo, essa distribuição aqui proposta será suficiente.

Uma das informações principais nesse contexto, diz respeito à temperatura média  $\bar{T}$  da placa, definida por

$$\bar{T} = \frac{1}{6 \times 8} \int_0^8 \int_0^6 T(x, y) dy dx. \quad (33)$$

Para ilustrarmos como esse cálculo pode ser feito com as técnicas aqui desenvolvidas, vamos unir o útil ao agradável: vamos propor que eles chegaram para nós na forma de uma tabela simples de 9 números, representando a distribuição de temperatura da placa num domínio discretizado de dimensões  $3 \times 3$ , como ilustrada na figura (9)

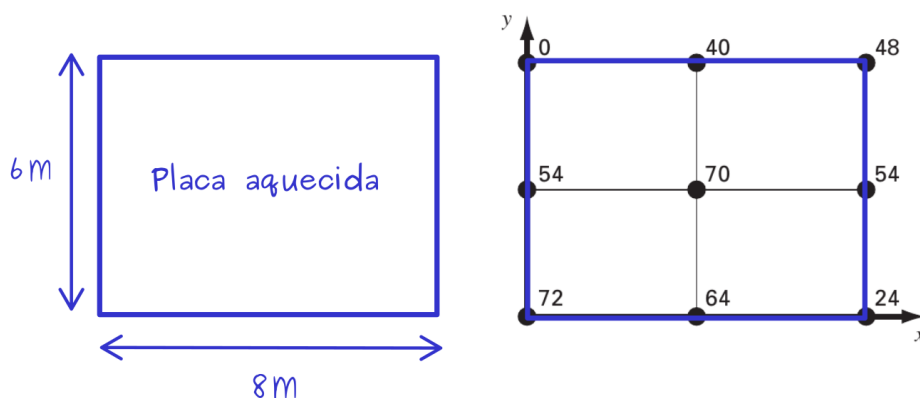


Figura 9: Domínio discretizado para integração múltipla da temperatura na placa do problema exemplo

Vamos resolver esse problema utilizando a regra do trapézio para fins de simplicidade e ilustração do conceito de integração múltipla pretendido aqui. Lembre-se da fórmula da regra do trapézio:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2n} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

Começaremos aplicando essa fórmula primeiro na direção  $x$ , fazendo a integração linha por linha e organizando essas informações visualmente na forma da figura (10). Uma vez que integramos em  $x$ , basta integrarmos essas integrais em  $y$  usando a mesma regra, o que fornece:

$$I = \frac{6-0}{4} \times (448 + 256 + 2 \times 496) = 2688. \quad (34)$$

Finalmente, a temperatura média na placa é dada por:

$$\bar{T} = \frac{1}{48} \times 2688 = 56^\circ\text{C}. \quad (35)$$

## 4.1 Programa para escrever em casa e praticar

1. Escreva um programa que incorpore a função  $T(x, y)$  do exemplo anterior a uma malha regular geométrica  $n \times n$ . Ou seja, seu programa deverá ter como valores de entrada o número de nós  $n$  em cada direção e simplesmente, baseado no tamanho do

$$I_{x,1} = \frac{8-0}{4} \times (72 + 24 + 2 \times 64) = 448$$

$$I_{x,2} = \frac{8-0}{4} \times (54 + 54 + 2 \times 70) = 496$$

$$I_{x,3} = \frac{8-0}{4} \times (0 + 48 + 2 \times 40) = 256$$

Figura 10: Resultados das integrações em x, linha por linha

domínio (em cada direção) ser capaz de identificar as coordenadas  $x, y$  dos pontos e inserir esses valores na expressão para  $T(x, y)$  a fim de obtermos uma tabela contendo 3 colunas e  $n^2$  linhas. Em cada coluna teremos os valores correspondentes de  $x, y, T(x, y)$  para os  $n \times n$  pontos que compõem o domínio;

2. Em seguida, implemente o cálculo de  $\bar{T}$  para esses dados tabelados usando
  - Regra do trapézio;
  - Regra 1/3 de Simpson;
  - Regra 3/8 de Simpson;
3. Compare na forma de gráficos e tabelas a evolução de  $\bar{T}$  em função de  $n$  para cada um dos métodos;
4. Incorpore nessa tabela final o erro verdadeiro de cada um dos métodos, comparando os resultados numéricos com o valor analítico (exato), obtido pela integração direta dos polinômios que representam  $T(x, y)$ .

## 5 Referências bibliográficas

1. S. C. Chapra, R. P. Canale. “Métodos Numéricos para Engenharia.” McGrawHill, 5a edição (2008): 1-825.