



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

Relatório - Dinâmica de Gotas

Disciplina: Hidrodinâmica de Interface

Professor: Nome do Professor

Data: March 31, 2025

Aluno: Lucas — Mestrado em Ciências Mecânicas

1. Introdução

A análise da sedimentação de uma partícula esferoidal sob ação da gravidade em um fluido viscoso permite investigar a dinâmica de interface fluido-sólido, fornecendo subsídios para modelagem de sistemas multifásicos.

Neste trabalho, analisamos a dinâmica de sedimentação considerando dois modelos de arrasto: o modelo linear de Stokes, válido para baixos números de Reynolds ($Re \ll 1$), e um modelo com força quadrática, relevante para condições com efeito inercial. Além da formulação analítica para o caso linear, a solução numérica é realizada por meio do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), com validação a partir de soluções de referência apresentadas na literatura (Sobral et al., 2007).

2. Formulação do Problema

A partícula considerada é esferoidal, com raio R e densidade ρ_p , imersa em um fluido com viscosidade dinâmica μ e densidade ρ_f . A força peso, empuxo e arrasto determinam a aceleração da partícula:

$$m \frac{dv}{dt} = F_p - F_E - F_D(v) \quad (1)$$

Substituindo as expressões clássicas de massa e forças:

$$\rho_p \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{dv}{dt} = \rho_p \frac{4}{3} \pi R^3 g - \rho_f \frac{4}{3} \pi R^3 g - F_D(v) \quad (2)$$

Para o regime de Stokes ($Re \ll 1$), o arrasto é dado por $F_D = 6\pi\mu Rv$. Para regimes inerciais, adota-se a forma quadrática:

$$F_D = \frac{1}{2} C_d \rho_f A v^2, \quad \text{com } A = \pi R^2 \quad (3)$$

2.1 Adimensionalização

Adota-se a velocidade de Stokes como escala de velocidade:

$$v_s = \frac{2(\rho_p - \rho_f)gR^2}{9\mu} \quad (4)$$

E o tempo característico:

$$t_s = \frac{R^2 \rho_p}{\mu} \quad (5)$$

Com isso, define-se $y = v/v_s$ e $\tau = t/t_s$, e a equação adimensional torna-se:

Modelo linear:

$$St \frac{dy}{d\tau} = 1 - y \quad (6)$$

Modelo com arrasto quadrático:

$$St \frac{dy}{d\tau} = 1 - y - \frac{Re_s}{2} y^2 \quad (7)$$

onde St é o número de Stokes e Re_s o Reynolds baseado na velocidade de Stokes.

3. Solução Analítica

A solução analítica do modelo linear é:

$$y(\tau) = 1 - e^{-\tau/St} \quad (8)$$

Essa solução foi reimplementada via série de Taylor com reestruturação para estabilidade numérica. A seguir, apresenta-se o comportamento da resposta para diferentes St :

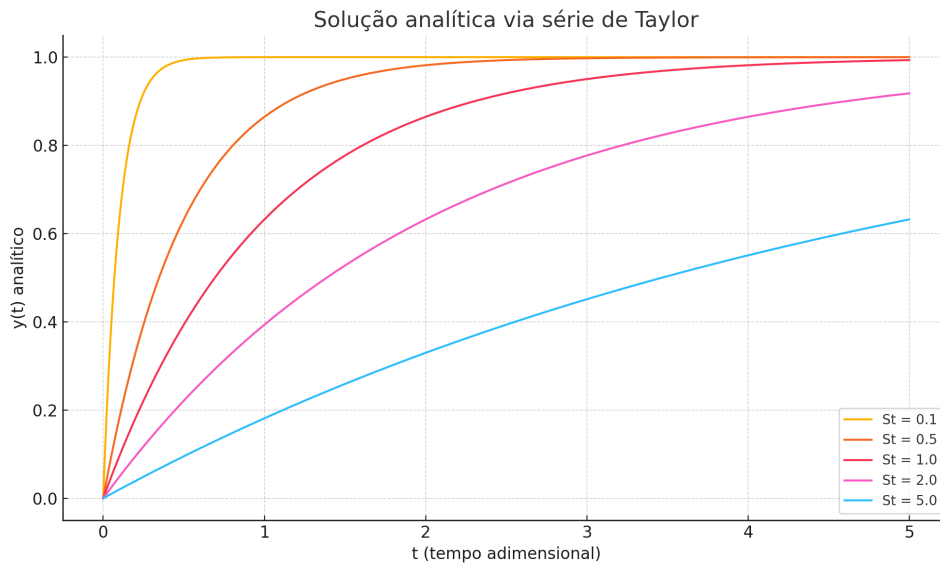
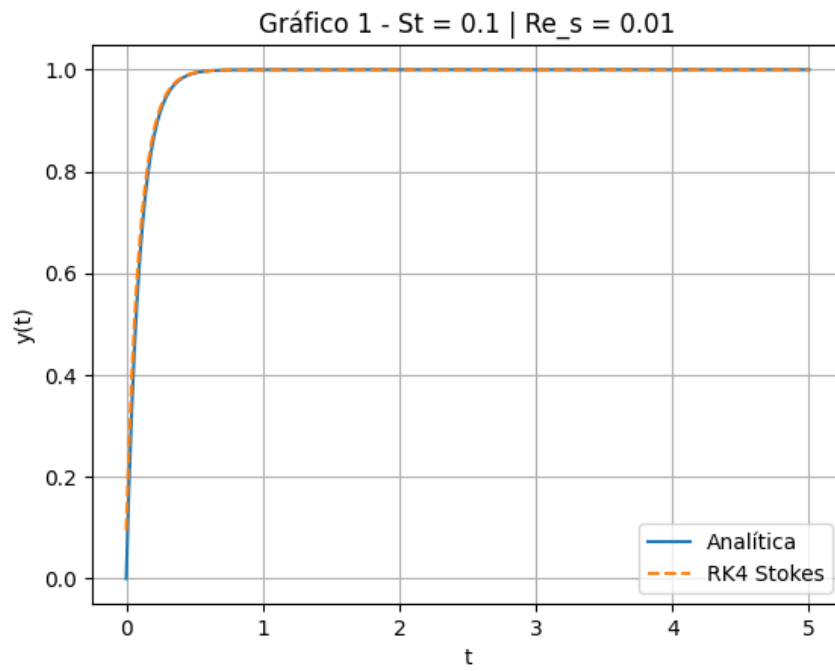
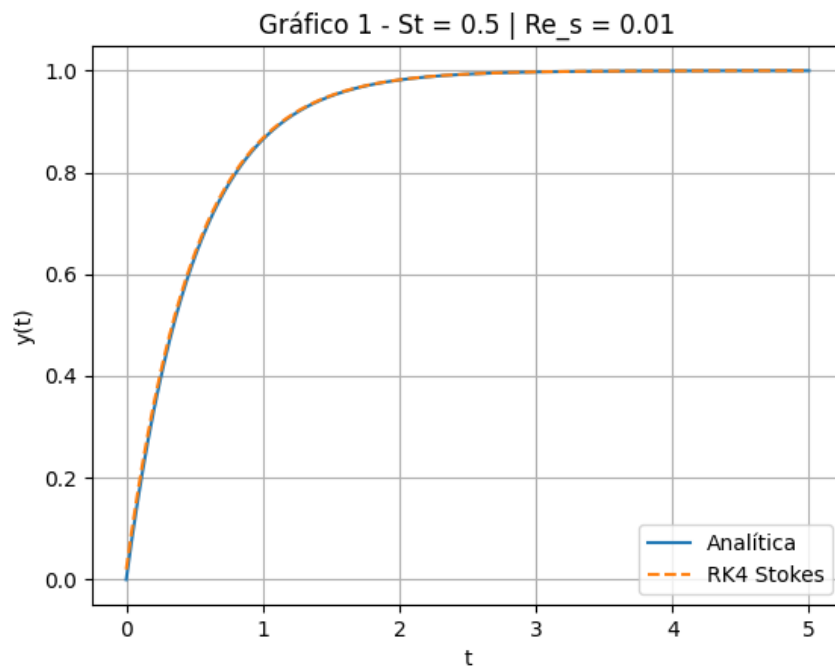
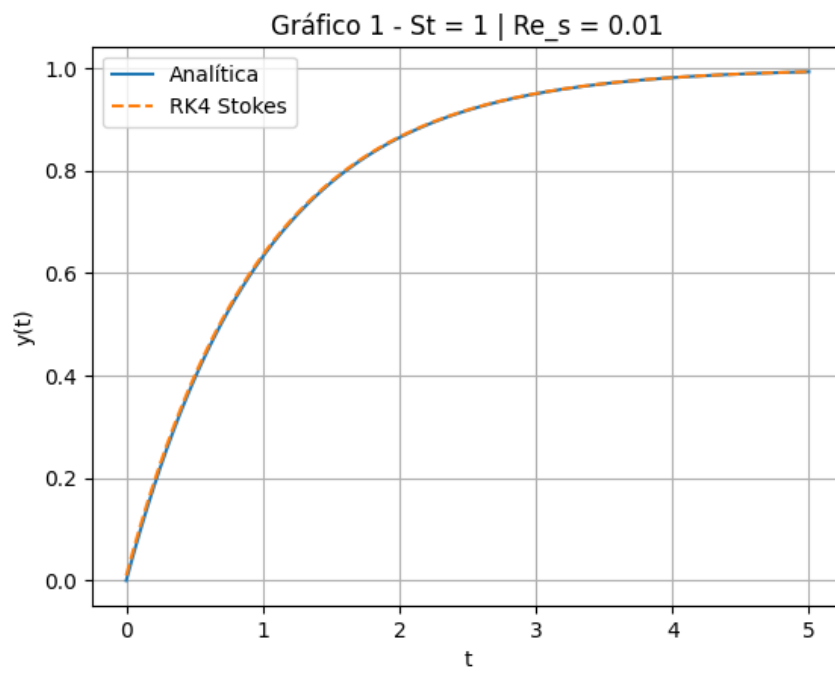
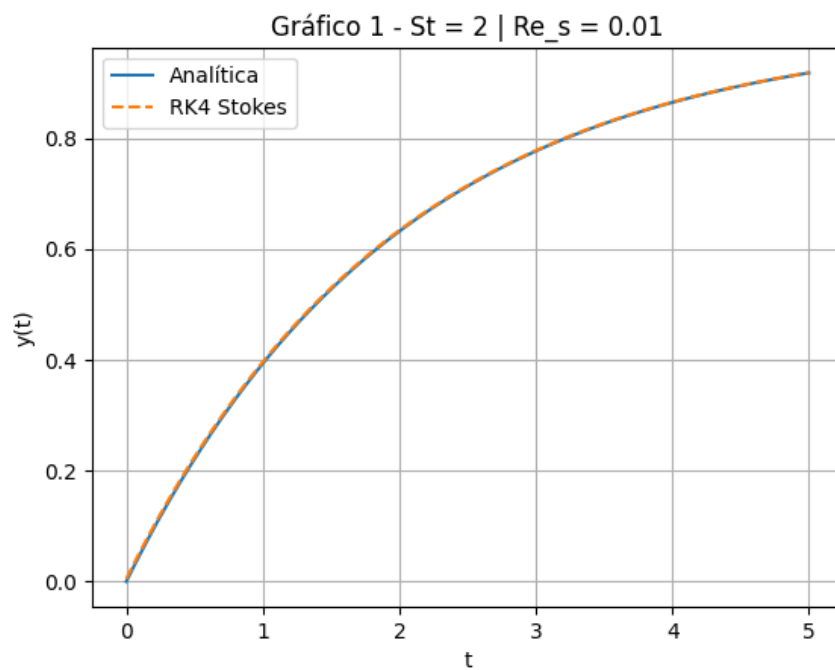
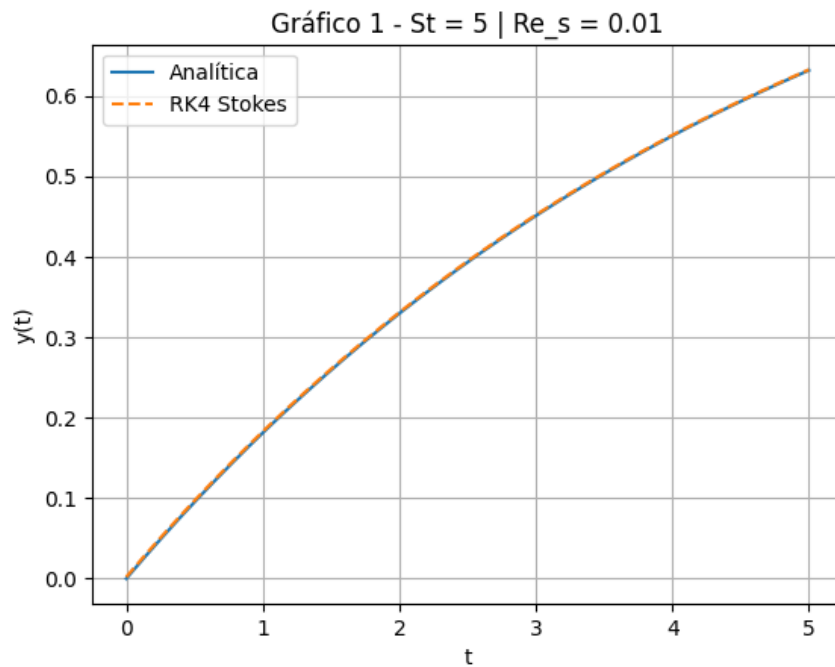


Figure 1: Soluções analíticas para diferentes números de Stokes

Em seguida, comparam-se os resultados da solução analítica com os obtidos pelo método de RK4:

Figure 2: Comparativo analítica vs RK4 ($St = 0.1$)Figure 3: Comparativo analítica vs RK4 ($St = 0.5$)

Figure 4: Comparativo analítica vs RK4 ($St = 1$)Figure 5: Comparativo analítica vs RK4 ($St = 2$)

Figure 6: Comparativo analítica vs RK4 ($St = 5$)

Solução Numérica Linear — RK4 (Stokes)

O método de Runge-Kutta de quarta ordem foi implementado para resolver a EDO linear. A solução apresentou concordância com a solução analítica para diferentes valores de St e passos de tempo h .

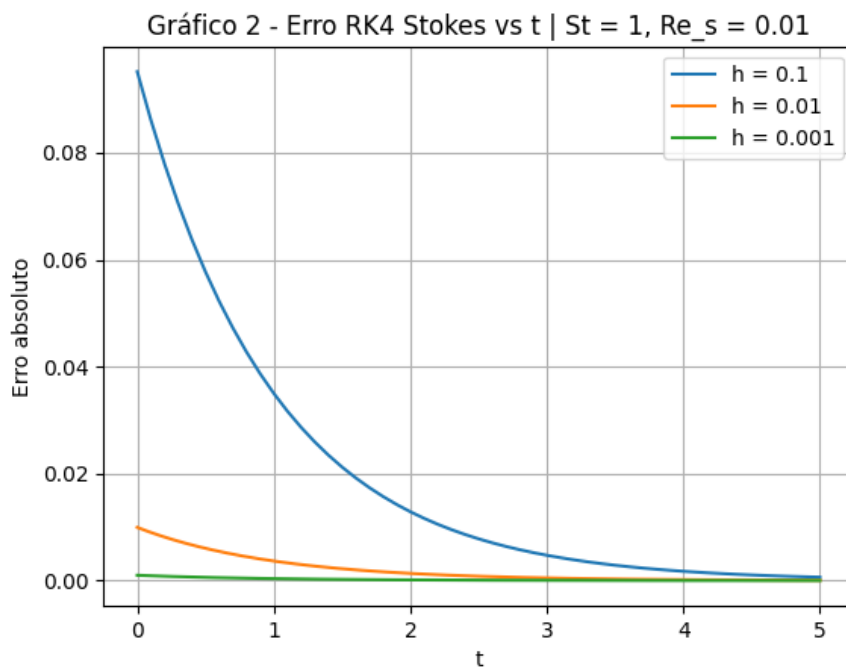


Figure 7: Evolução do erro absoluto com refinamento do passo de tempo

Solução Numérica com Força Quadrática

Para regimes com maior inércia, foi adicionada uma componente quadrática à equação de movimento. O mesmo método de integração (RK4) foi aplicado, com proteção contra overflows e divergências numéricas.

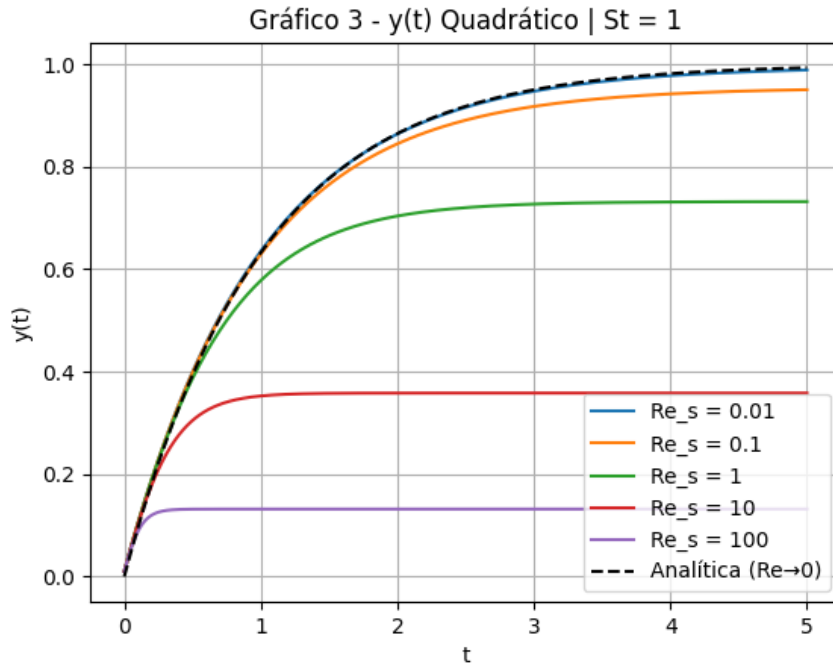


Figure 8: Soluções com força quadrática para diferentes Re_s

Análise do Erro e Variação do Passo

Os gráficos seguintes comparam os erros relativos das soluções numéricas em relação à analítica, conforme os parâmetros de malha temporal e intensidade do termo quadrático.

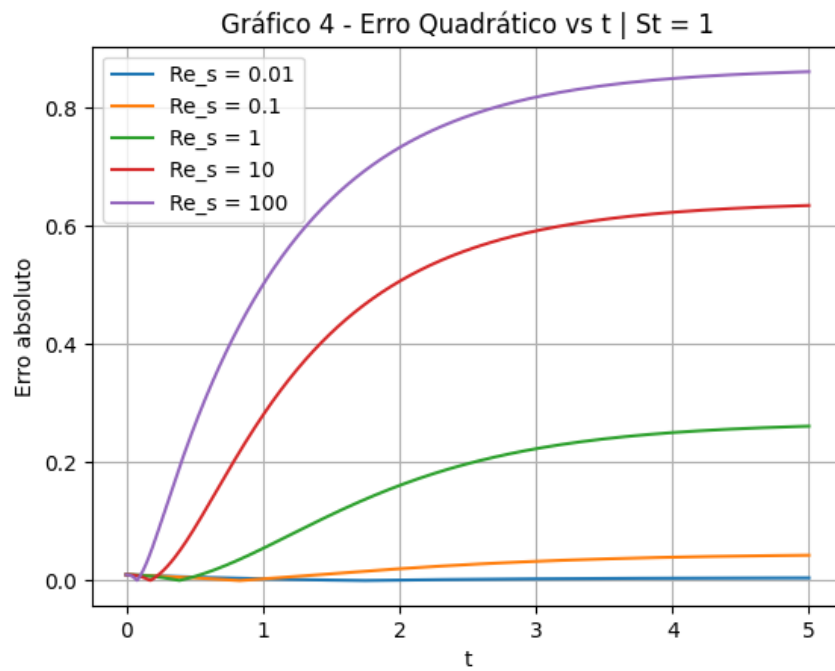


Figure 9: Erro absoluto da solução quadrática com variação de Re_s

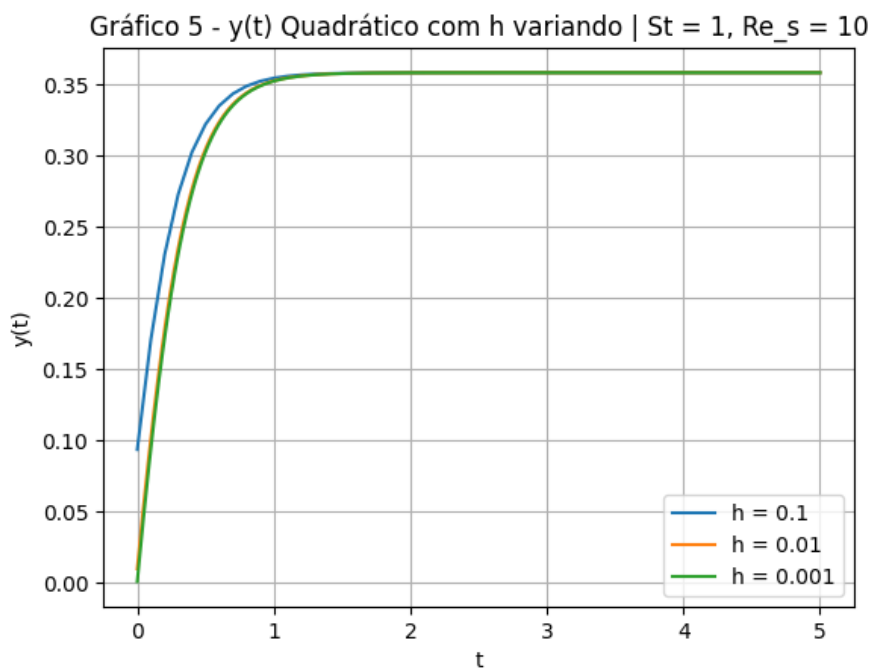


Figure 10: Solução quadrática com diferentes passos h

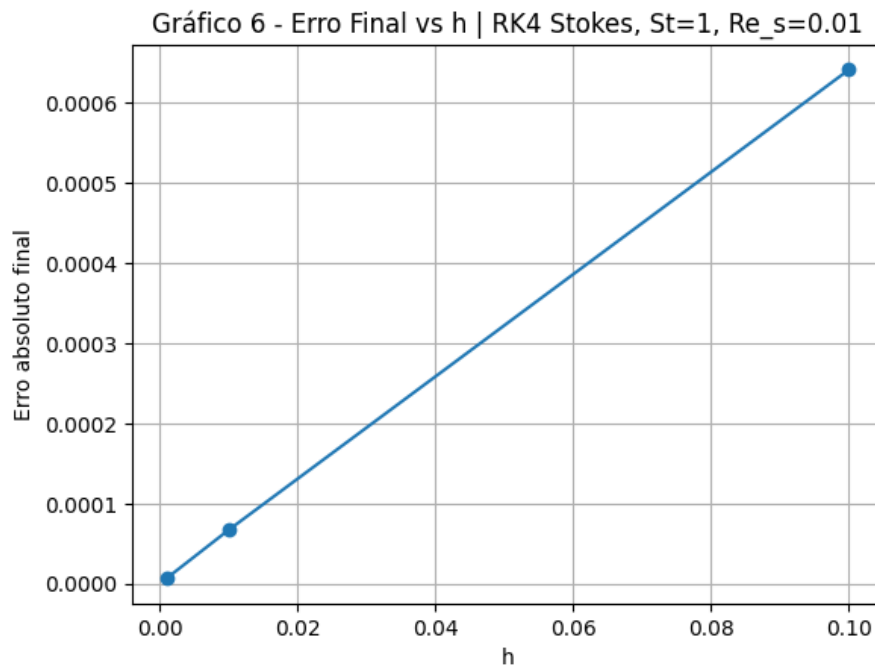


Figure 11: Erro final para RK4 linear vs passo de tempo

3.1 Validação com modelo de referência

A solução numérica com força quadrática foi validada qualitativamente pela comparação com a Figura 2 do artigo de Sobral et al. (2007), que apresenta a solução exata da mesma equação adimensionalizada implementada neste trabalho:

$$St \frac{dy}{d\tau} = 1 - y - \frac{Re_s}{2} y^2 \quad (9)$$

A forma da curva gerada numericamente coincide com o comportamento da solução exata descrita no artigo, especialmente para pequenos valores de Re_s . Conforme o valor de Re_s aumenta, observa-se um desvio progressivo em relação à solução linear, conforme demonstrado na simulação.

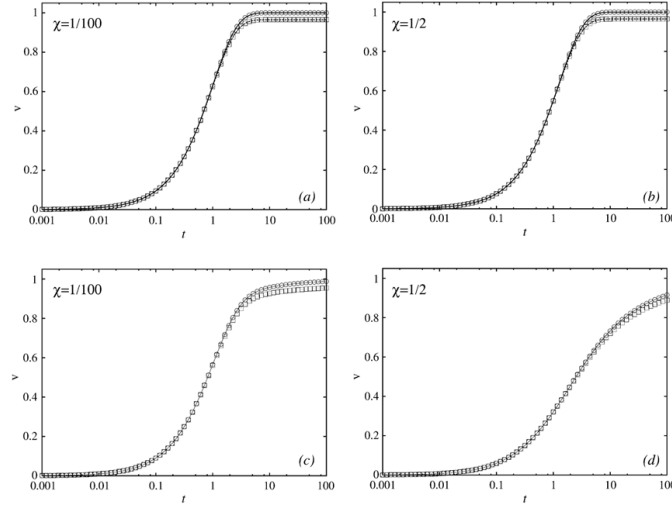


Fig. 2. Time evolution of the particle velocity for $\chi=1/100$ (left, (a) and (c)) and $\chi=1/2$ (right, (b) and (d)). In all graphs, solid line denotes the analytical solution of the linear problem ($Re_s=0$) and the dashed lines in graphs (a) and (b) represent the analytical solution for the nonlinear problem without memory effects for $Re_s=1/10$. In all graphs, \circ represent the numerical solution of the linear problems ($Re_s=0$) and \square represent the numerical solution of the nonlinear problem with memory effects for $Re_s=1/10$.

Figure 12: Curva de referência retirada de Sobral et al. (2007), Figura 2

3.2 Efeitos da Força de Arrasto Quadrática

A força de arrasto em fluidodinâmica representa a resistência do fluido ao movimento da partícula. No regime laminar (Stokes), essa força é proporcional à velocidade ($F_D = 6\pi\mu Rv$). Entretanto, para números de Reynolds mais elevados ($Re \gtrsim 1$), efeitos inerciais passam a influenciar o escoamento, tornando necessária a inclusão de um termo quadrático:

$$F_D = \frac{1}{2}C_d\rho_f A v^2, \quad \text{com } A = \pi R^2 \quad (10)$$

Fisicamente, esse termo quadrático representa a transferência de quantidade de movimento do fluido em resposta à velocidade da partícula. A inclusão deste termo induz uma desaceleração mais pronunciada à medida que v aumenta, dificultando a aproximação à velocidade terminal.

No modelo adimensionalizado:

$$St \frac{dy}{d\tau} = 1 - y - \frac{Re_s}{2} y^2 \quad (11)$$

os efeitos são:

- Para $Re_s \rightarrow 0$, o termo quadrático desaparece e recupera-se o modelo de Stokes;
- Para valores moderados de Re_s , o termo quadrático retarda a aproximação à velocidade terminal;
- Para $Re_s \gg 1$, o termo quadrático domina, achatando a curva e modificando o regime dinâmico;

Esse comportamento foi reproduzido numericamente e validado com os dados de referência.

4. Conclusão

O estudo conduzido permitiu explorar a dinâmica de sedimentação de uma partícula esferoidal em fluido viscoso sob diferentes condições de regime de escoamento. A formulação analítica para o modelo linear de Stokes serviu como base para interpretação do comportamento de aproximação à velocidade terminal.

A implementação numérica via método de Runge-Kutta de quarta ordem permitiu simular tanto o modelo linear quanto o modelo com força de arrasto quadrática. Foram observados efeitos significativos da introdução do termo quadrático: retardo na velocidade de acomodação, alteração no valor da velocidade terminal, e comportamento assintótico distinto para diferentes valores de Re_s .

A variação do passo de integração foi considerada, permitindo observar a sensibilidade do erro em relação à discretização temporal. Ainda, a expressão analítica para a velocidade terminal no caso quadrático foi derivada e comparada com as simulações, destacando a influência crescente do arrasto inercial.

As simulações foram qualitativamente comparadas com soluções presentes na literatura, evidenciando tendências compatíveis com o comportamento descrito por modelos mais completos.