① Weitere Aufgaben zur Linearfaktordarstellung 29.1.2020

S. 28/5

a) $f(x) = a(x-b)(x-c)$ quadrat. Fkt mit Nullst. b, c

$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$ gegeben

$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x+1)(x-3)$

$P(0|1)$

$f(0) = 1$

$a \cdot (0+1)(0-3) = 1$

$a \cdot (-3) = 1$

$a = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$

b) ... Beachte: -1 muss doppelte NST sein!

6) $f(x) = k \cdot (x-3)^2(x+1)$

Bestimme k:

$f(2) = 6$

$k \cdot (2-3)^2(2+1) = 6$

⋮

$k =$

$g(x) = -x^3$

$x \to -\infty : f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty : f(x) \to -\infty$

für f gilt: ..

$x \to -\infty$: ..

$x \to +\infty$: ..

S. 28/7 ...

S. 30 / 5

$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2$
$g(x) = ax^2(x-b)^2$
$h(x) = x\cdot(x-a)(x-b)$

Dem Term von g kann man entnehmen, dass
$x_1=0$ doppelte Nullstelle u. $x_2 = b$ doppelt. NS
Da das Schaubild von g an diesen Stellen nur berührt, kommt nur A in Frage und $g(x) = ax^2(x+2)^2$, da $x_2 = -2$.
P(−1|2) liegt auf A, mit Punktprobe a bestimmen:

$g(-1) = 2$
$a(-1)^2(-1+2)^2 = 2$
$a \cdot 1 \cdot 1 = 2$
$\Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow g(x) = \underline{2x^2(x+2)^2}$

Ebenso für f:
Dem Term kann man entn., dass

...

f(x) gehört also zu ...
mit den Nullstellen ...
Es ist also f(x) = ...

bitte ergänzen

Für h bleibt Schaubild
und damit h(x) = ...

③ S. 30/9 ... bitte lösen

S. 31/11 ...

S. 31/12a)

$f(x) = x^2(x+2) = x^3+2x^2$

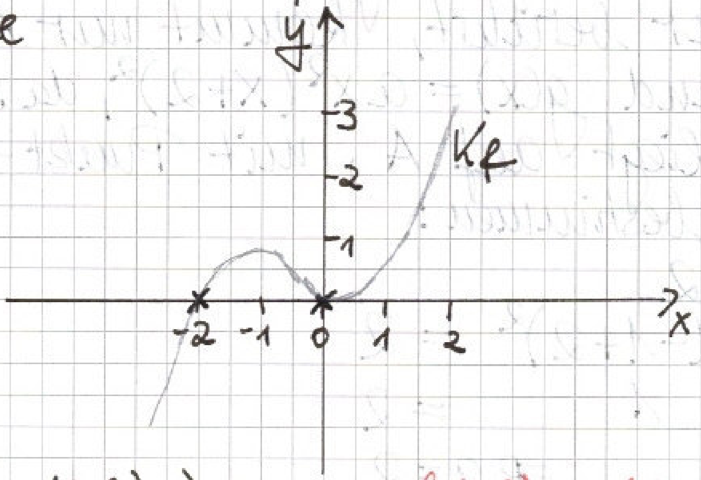
$x_1 = 0$ doppelte NST

$x_2 = -2$ einf. NST

$x \to -\infty: f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty: f(x) \to +\infty$

Skizze



12b)c) ... bei b) ausklammern

12d) $f(x) = (x^2-4)^2$ bin. Formel in der Klammer

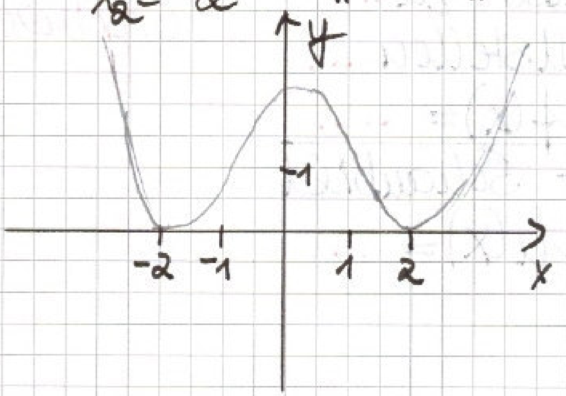
$= ((x+2)(x-2))^2 = (x+2)^2(x-2)^2$

$x_1 = -2$ doppelt. NST

$x_2 = 2$ " "

$x \to \pm\infty: f(x) \to \infty$

Höchste Potenz: x^4



S.31|17

a) $f(x) = a x^b + c$

Eine ganzrat. Fkt ist genau dann achsensymm., wenn alle Hochzahlen ... sind, d.h.

b kann ... sein

b) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

hat 3 NST a, b, c

soll punktsymmetrisch zum Ursprung sein,

d.h. eine NST. muss $x_1 = 0$ sein,

also z.B. ...

Die anderen beiden Nullstellen müssen ... sein, also

z.B. ...

S.31|18

bitte lösen

Wiederholung Ableitung / Tangente

S. 62 / 13

a) $f(x) = x^4 + x^2$

mit Summen- und Potenzregel

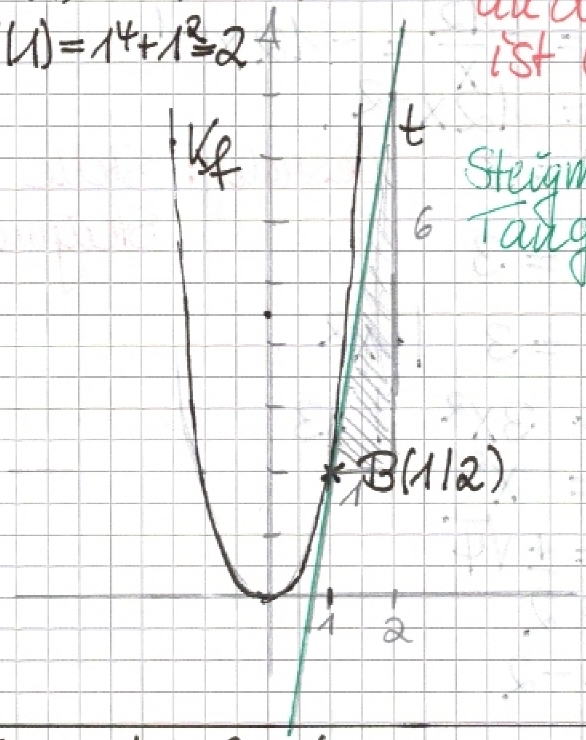
$f'(x) = 4x^3 + 2x^1$

Summenregel:
$f(x) = g(x) + h(x)$
$\Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Potenzregel:
$f(x) = x^r$
$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

anschauliche Bedeutung:
$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an das Schaubild von f an der Stelle x_0

$x_0 = 1$: $f'(1) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$
$f(1) = 1^4 + 1^2 = 2$

Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 1$ ist 6!



Steigung der Tangente: 6

Tangentengleichung: auswendig
$t: \; y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ mit $B(x_0|f(x_0))$ Berührpunkt

hier: $y = 6 \cdot (x-1) + 2 = 6x - 6 + 2 \Rightarrow t: y = 6x - 4$

S.62

3c) $f(x) = x^5 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x$

$f'(x) = 5x^4 + 4 \cdot \frac{1}{8}x^3 - \ldots$

bitte ergänzen!

S.62

5a) $f(x) = 3x^{-1}$

$f'(x) = \underline{-3x^{-2}} \Rightarrow f'(1) = -3 \cdot 1^{-2} = \underline{\underline{-3}}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3 = x^{-2} + 3$

$\Rightarrow f'(x) = \ldots$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} - x^2 = 3x^{\frac{1}{2}} - x^2$

$f'(x) = \ldots$

d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^2 + \frac{1}{x^2} =$

$f'(x) = \ldots$

6b) $f(x) = -\frac{12}{x} = -12x^{-1}$

$f'(x) = 12x^{-2}$

Löse $f'(x) = 3$

Gesucht: Stelle x, an der Steigung 3 ist

$12x^{-2} = 3$

$\frac{12}{x^2} = 3 \quad | \cdot x^2$

$12 = 3x^2 \quad | :3$

$4 = x^2$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

6d) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3{,}5x^2+9x-11$

$f'(x)=x^2+7x+9$

Löse $f'(x)=3$

$x^2+7x+9=3 \quad | -3$

$x^2+7x+6=0$

$x_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$

$=\frac{-7\pm5}{2}$

$x_1=-1$

$x_2=-6$

6a) c) bitte rechnen

7a) $f(x)=5x^2-3x$

$B(2|f(2))$

$f'(x)=10x-3$

$f'(2)=20-3=17$

$f(2)=5\cdot2^2-3\cdot2=20-6=14$

$\Rightarrow t: y=17(x-2)+14$

$=17x-34+14$

$\underline{\underline{t: y=17x-20}}$

7c) rechnen

2020-05-25 Aufgaben

LS/ S.28

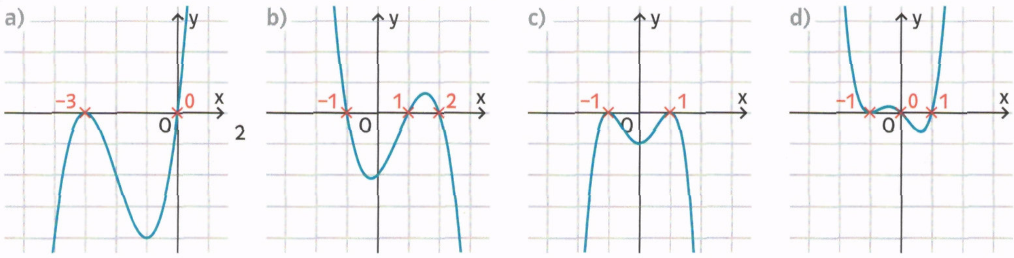
5 Bestimmen Sie die Parameter a, b und c so, dass die Funktion f mit $f(x) = a(x-b)(x-c)$

a) die Nullstellen -1 und 3 hat und der Graph von f durch den Punkt $P(0|1)$ geht,

b) nur die Nullstelle -1 hat und $f(0) = 10$ gilt.

6 Beurteilen Sie, ob es eine Zahl k gibt, sodass der Graph von f mit $f(x) = k \cdot (x-3)^2(x+1)$ durch den Punkt $P(2|6)$ geht und f für $x \to \pm\infty$ dasselbe Verhalten wie die Funktion g mit $g(x) = -x^3$ hat.

7 Bestimmen Sie zu den Vorgaben des Graphen eine Funktion möglichst niedrigen Grades.



S.30

5 Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Funktion zu einem der Graphen A, B oder C in Fig. 2 gehört.

$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2$

$g(x) = ax^2(x-b)^2$

$h(x) = x(x-a)(x-b)$

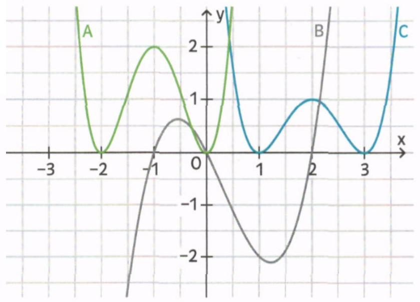


Fig. 2

9 Ordnen Sie jeder Funktion einen der Graphen in Fig. 3 zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$f(x) = x^3 - x$

$g(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

$i(x) = (x+3)^3$

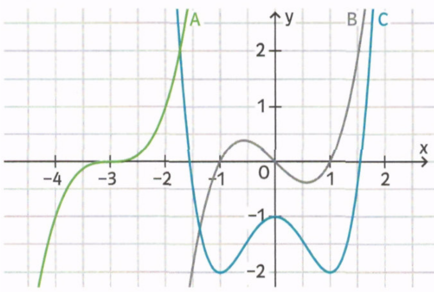


Fig. 3

S.31

11 Ordnen Sie jedem der Graphen A und B eine passende Funktion zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

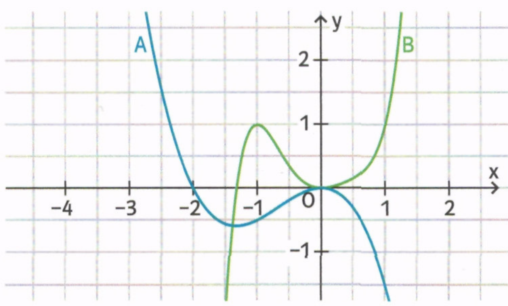
$f(x) = x^5 - x^3 + x^2$ $\quad$ $g(x) = -x^5 - 2x$

$h(x) = x^3 - x + 1$ $\quad$ $i(x) = -0{,}5x^3 - x^2$

12 Skizzieren Sie den Graphen von f.

a) $f(x) = x^2(x+2)$ $\quad$ b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = x(x^2+1)$ $\quad$ d) $f(x) = (x^2-4)^2$



S.31

17 Beschreiben Sie, für welche Zahlen a, b und c

a) der Graph von f mit $f(x) = a \cdot x^b + c$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist,

b) der Graph von f mit $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

18 Imke untersucht, wie sich der Graph der Funktion f mit $f(x) = x(x - 2)^n$ verändert, wenn man für n die Zahlen 2, 3, 4 … einsetzt (vgl. Fig. 2).

a) Beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen.

b) Skizzieren Sie die Graphen für $n = 5$ und für $n = 6$.

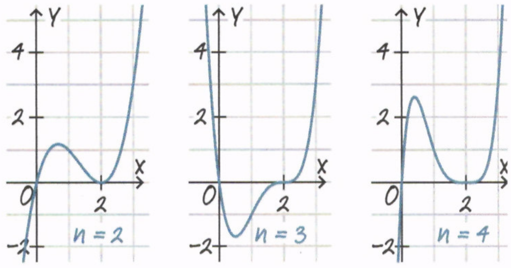


Fig. 2

S.62

3 Leiten Sie ab.

a) $f(x) = x^4 + x^2$

b) $f(x) = 7x^2 - x + 5$

c) $f(x) = x^5 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x$

d) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + x - 9$

5 Leiten Sie die Funktion f ab und bestimmen Sie $f'(1)$.

a) $f(x) = 3 \cdot x^{-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3$

c) $f(x) = 3\sqrt{x} - x^2$

d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^2 + \frac{1}{x^2}$

6 An welchen Stellen hat die Funktion f die Ableitung 3?

a) $f(x) = -x^2 + x + 6$

b) $f(x) = -\frac{12}{x}$

c) $f(x) = 0{,}4x^5 - 29x$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3{,}5x^2 + 9x - 11$

7 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt B.

a) $f(x) = 5x^2 - 3x$, $B(2 \mid f(2))$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$, $B(3 \mid f(3))$

c) $f(x) = -x^3 + 8x$, $B(1 \mid f(1))$

d) $f(x) = \sqrt{x}$, $B(4 \mid f(4))$

2020-05-25 Lösungen

S.28

5 a) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$ b) $f(x) = 10(x+1)(x+1)$

6 Es gibt keine solche Zahl k. Begründung: Damit der Graph von f durch $P(2|6)$ geht, muss $k = 2$ sein. Das Verhalten des Graphen von f für $x \to \pm\infty$ entspricht dann dem des Graphen von $y = x^3$.

7 Individuelle Lösung, z.B.:

a) $f(x) = x(x+3)^2$

b) $f(x) = -(x+1)(x-1)(x-2)$

c) $f(x) = -(x-1)^2(x+1)^2$

d) $f(x) = x(x+1)^2(x-1)$

S.30

5

Zu f gehört C. Es ist $a = 1$ und $b = 3$ bzw. $a = 3$ und $b = 1$.

Zu g gehört A. Es ist $a = 2$ und $b = -2$.

Zu h gehört B. Es ist $a = -1$ und $b = 2$ bzw. $a = 2$ und $b = -1$.

9

A ist der um -3 in x-Richtung verschobene Graph von $y = x^3$; A gehört zu i.

B ist punktsymmetrisch zum Ursprung und zeigt ein Verhalten für $x \to \pm\infty$ wie $y = x^3$; B gehört zu f.

C ist achsensymmetrisch zur y-Achse und zeigt ein Verhalten für $x \to \pm\infty$ wie $y = x^4$; C gehört zu g.

Seite 31

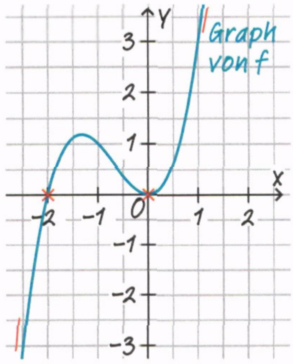
11

Die zu A gehörende Funktion hat für $x \to \pm\infty$ ein Verhalten wie $y = -x^3$, A ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung und A hat bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ Nullstellen. A gehört zu i.

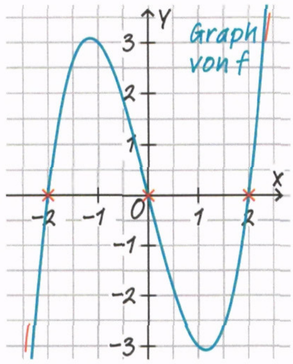
Die zu B gehörende Funktion hat für $x \to \pm\infty$ ein Verhalten wie $y = x^5$ und eine Nullstelle bei $x_1 = 0$. B gehört zu f.

12

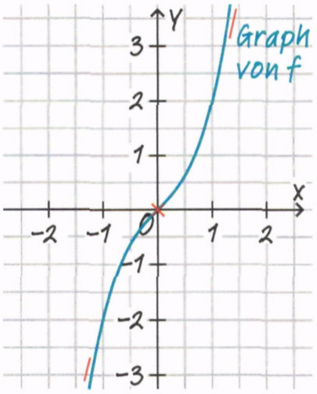
a)



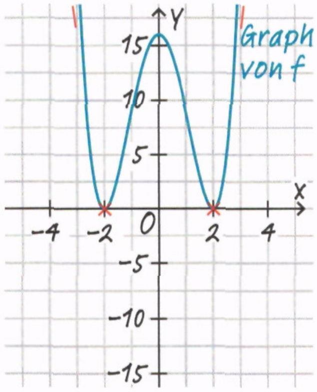
b)



c)



d)



17

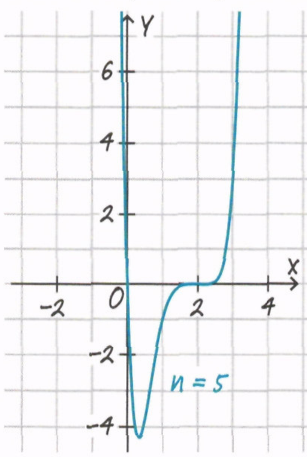
a) Es muss $a, c \in \mathbb{R}$ gelten und b muss eine gerade natürliche Zahl sein.

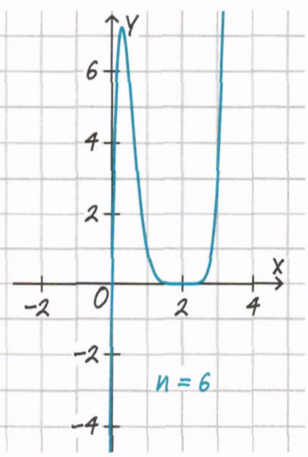
b) Es muss $a + b + c = 0$ und $a \cdot b \cdot c = 0$ gelten. Mindestens eine der Zahlen a, b oder c muss gleich null sein. Wenn zum Beispiel $c = 0$ gilt, muss $a = -b$ gelten.

18

a) Alle Graphen schneiden die x-Achse im Punkt $(0|0)$.
Wenn n gerade ist, berühren alle Graphen die x-Achse im Punkt $(2|0)$.
Wenn n ungerade ist, schneiden alle Graphen die x-Achse im Punkt $(2|0)$.
Wenn n gerade ist, verhalten sich alle Graphen für $x \to \pm\infty$ wie der Graph von $y = x^3$ aus.
Wenn n ungerade ist, verhalten sich alle Graphen für $x \to \pm\infty$ wie der Graph von $y = x^4$ aus.

b)





S. 62

3

a) $f'(x) = 4x^3 + 2x$

b) $f'(x) = 14x - 1$

c) $f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1$

d) $f'(x) = 12x^2 + 12x + 1$

5

a) $f'(x) = -3 \cdot x^{-2}$; $f'(1) = -3$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$; $f'(1) = -2$

c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x$; $f'(1) = -\frac{1}{2}$

d) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6x - \frac{2}{x^3}$;
$f'(1) = -6{,}5$

6

a) $f'(x) = -2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = -1$

b) $f'(x) = \frac{12}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

c) $f'(x) = 2x^4 - 29 = 3 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

d) $f'(x) = x^2 + 7x + 9 = 3 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -6$

7

a) $f'(x) = 10x - 3,\ f(2) = 14,\ f'(2) = 17,\ t\colon y = 17(x-2) + 14$
$= 17x - 20$

b) $f(3) = 1,\ f'(3) = -\frac{1}{3},\ t\colon y = -\frac{1}{3}(x-3) + 1 = -\frac{1}{3}x + 2$

c) $f'(x) = -3x^2 + 8,\ f(1) = 7,\ f'(1) = 5,\ t\colon y = 5(x-1) + 7 = 5x + 2$

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(4) = 2,\ f'(4) = \frac{1}{4},\ t\colon y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$

8