2.1 A NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITES

O limite de funções é uma “ferramenta” importante para determinação do comportamento de uma função na vizinhança de determinado ponto, ou para análise do comportamento da função quando x aumenta muito (*tende ao infinito*) ou diminui muito (*tende a menos infinito*).

Para começar vejamos no exemplo a seguir o comportamento de uma função “um pouco antes” e “um pouco depois” de um determinado ponto (é o que chamamos de limites laterais).

Exemplo 1. Considere a função f abaixo, definida para x ≠ 1:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a) o que acontece com os valores de $f(x)$, quando os valores de x se aproximam de 1 pela esquerda (ou seja, por valores menores que 1)?

x	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
0,9	
0,99	
0,999	
⋮	⋮

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$

b) o que acontece com os valores de $f(x)$, quando os valores de x se aproximam de 1 pela direita (ou seja, por valores maiores que 1)?

x	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
1,1	
1,01	
1,001	
⋮	⋮

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$

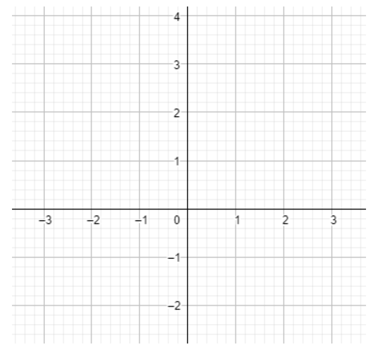
As tabelas do exemplo anterior nos dão a ideia de que quando $x \to 1$ (lê-se: x tende a “1”), temos que $f(x) \to$ .... (lê-se: $f(x)$ tende a “.....”).

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

Para **garantir que isso de fato ocorre**, devemos observar que, **para x ≠ 1** temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

E então podemos esboçar o gráfico f, que para todo x ≠ 1, é igual ao gráfico de g(x) = ...

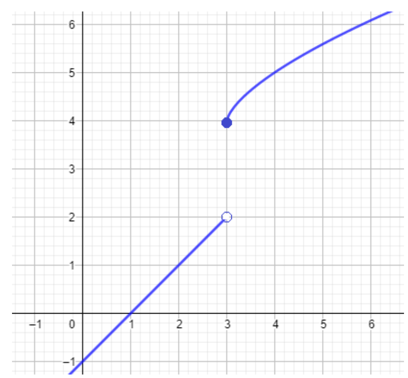


$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

DEFINIÇÃO INFORMAL DE LIMITE

Dizemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos, tornando **x suficientemente próximo de a** (por **ambos os lados**), mas não igual a a.

Exemplo 2. Observe o gráfico de $y = f(x)$ e determine:



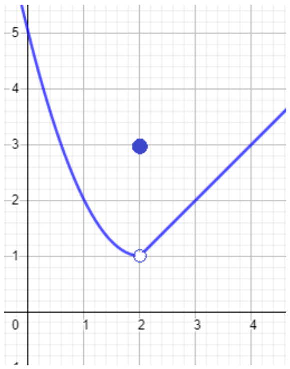
a) $f(3) =$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

Exemplo 3. Observe o gráfico de $y = f(x)$ e determine:



a) $f(2) =$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

LIMITES LATERAIS

Se quando x aproxima-se de "a" <u>pela esquerda</u> (isto é, x aproxima-se de "a" por valores menores do que "a"), f(x) se aproxima de um número ***L***, dizemos que o limite da função f(x), para x tendendo a "a", pela esquerda, é ***L***.

Notação: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L}$ (*limite para x tendendo a "a" pela esquerda*)

Se quando x aproxima-se de "a" <u>pela direita</u> (isto é, x aproxima-se de "a" por valores maiores do que "a"), f(x) se aproxima de um número ***L***, dizemos que o limite da função f(x), para x tendendo a "a", pela direita, é ***L***.

Notação: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L}$ (*limite para x tendendo a "a" pela direita*)

LIMITE BILATERAL

O limite bilateral existe apenas se os limites pela esquerda e pela direita existirem e forem iguais. Ou seja:

✓ **se** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L}$, então $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L}$

LIMITES INFINITOS

Quando os valores de f crescerem ou decrescerem sem limitação para x tendendo a "a", justificamos a inexistência do limite dizendo que:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \;\; ou \;\; \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \;\; ou \;\; \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \;\; ou \;\; \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exemplo 5. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ e determine:

a) o que acontece com os valores de $f(x)$, quando os valores de x se aproximam de 0 pela direita (ou seja, por valores maiores que 0)?

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
0,1	
0,01	
0,001	
⋮	⋮

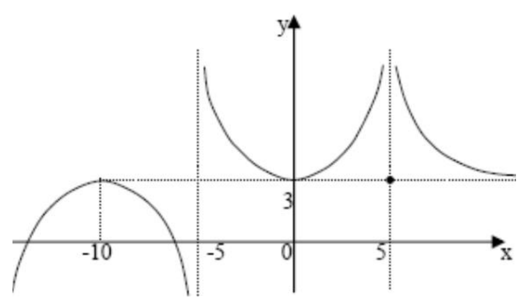
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$

b) o que acontece com os valores de $f(x)$, quando os valores de x se aproximam de 0 pela esquerda (ou seja, por valores menores que 0)?

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
-0,1	
-0,01	
-0,001	
⋮	⋮

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$

Exemplo 6. Considere o gráfico da função f abaixo e responda:



a) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) =$

f) $\lim\limits_{x\to -5} f(x) =$

Continuidade

Dizemos que uma função f ***é contínua em um ponto*** $a \in IR$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

i) $\exists$ f(a), ou seja: a função está definida no ponto “a”.

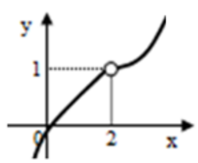
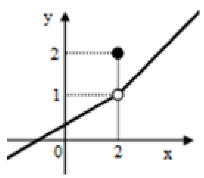
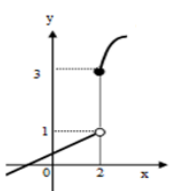
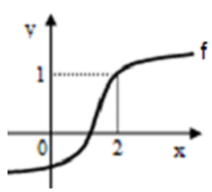
ii) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, ou seja: existe o limite da função para x → a.

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; valor da função é igual ao resultado do limite.

Observações:

- ✓ se uma ou mais destas três condições acima não for satisfeita, dizemos que a função f ***é descontínua em x = a***.
- ✓ se uma função f for contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é ***contínua***.

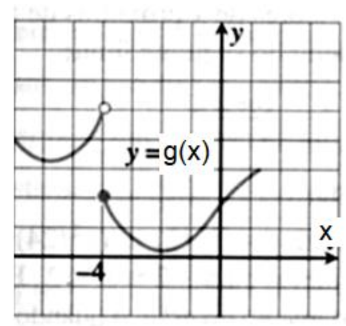
Exemplo 6. Verifique se a função f é contínua em x = 2 em cada um dos seguintes casos. Justifique sua resposta.

a) 	c) 
b) 	d) 

ATIVIDADES DE AULA

Nos exercícios de 1 até 5, utilize os gráficos para estimar os limites e os valores das funções. Quando o limite não existir justifique sua resposta.

1)



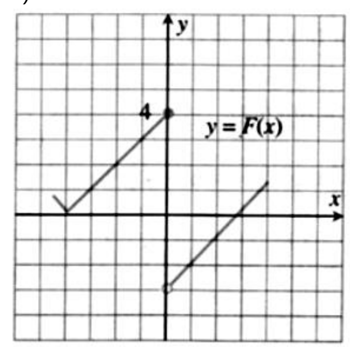
a) $g(-4)$ =

b) $\lim\limits_{x \to -4^-} g(x)$ =

c) $\lim\limits_{x \to -4^+} g(x)$ =

d) $\lim\limits_{x \to -4} g(x)$ =

2)



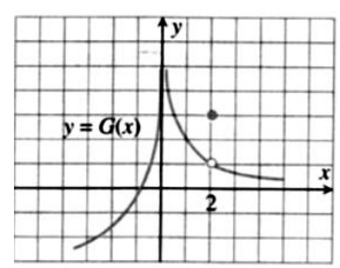
a) F(0) =

b) $\lim\limits_{x \to 0^-}$ F(x) =

c) $\lim\limits_{x \to 0^+}$ F(x) =

d) $\lim\limits_{x \to 0}$ F(x) =

3)



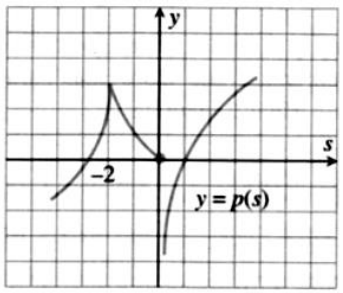
a) G(2) =

b) $\lim\limits_{x \to 2^-}$ G(x) =

c) $\lim\limits_{x \to 2^+}$ G(x) =

d) $\lim\limits_{x \to 2}$ G(x) =

4)



a) p(-2)

b) $\lim_{s\to -2^-} p(s)$

c) $\lim_{s\to -2^+} p(s)$

d) $\lim_{s\to -2} p(s)$

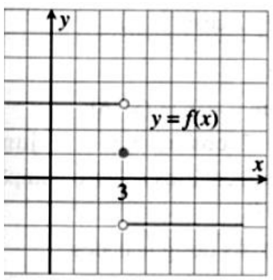
e) p(0)

f) $\lim_{s\to 0^-} p(s)$

g) $\lim_{s\to 0^+} p(s)$

h) $\lim_{s\to 0} p(s)$

5)



a) f(3)

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to 3} f(x)$

e) f é contínua em x = 3?

6) Sendo F(x) = $\begin{cases} x+1 & se \quad x \le 0 \\ -x+1 & se \ x > 0 \end{cases}$, construa o gráfico de F(x) e responda:

a) F(0)

b) $\lim_{x\to 0^-} F(x)$

c) $\lim_{x\to 0^+} F(x)$

d) $\lim_{x\to 0} F(x)$

e) f é continua em x = 0?

7) Observe o gráfico de $y = f(x)$ e determine:

a) $f(1)$ =

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ =

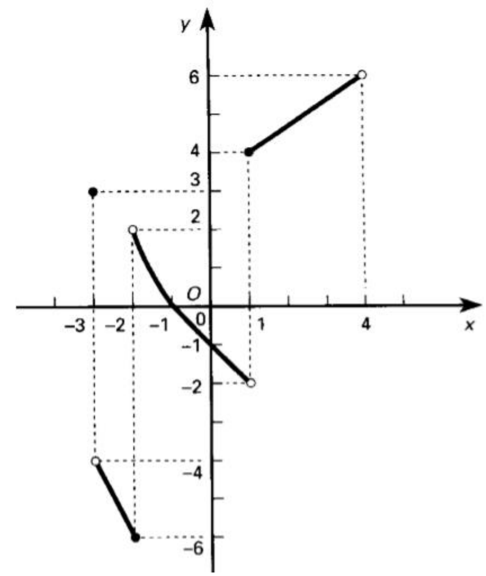
c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ =

d) $f(-2)$ =

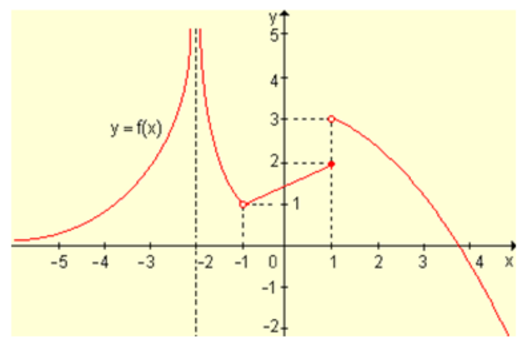
e) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ =

f) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ =

g) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ =



8) Observando o gráfico da função f abaixo, responda:



a) $\lim_{x\to -2} f(x) =$

b) $\lim_{x\to -1} f(x) =$

c) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

d) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

e) Para quais valores de x temos que a função f é descontínua?

<u>Respostas das atividades</u>:

1)

a) 2 b) 5 c) 2 d) ∄

2)

a) 4 b) 4 c) -3 d) ∄

3)

a) 3 b) 1 c) 1 d) 1

4)

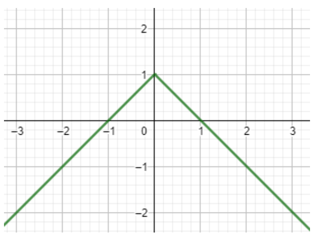
a) 3 b) 3 c) 3 d) 3

e) 0 f) 0 g) $-\infty$ h) ∄

5)

a) 1 b) 3 c) -2 d) ∄ e) não é contínua em x = 3

6)



a) 1 b) 1 c) 1 d) 1 e) sim

7)

a) 4 b) -2 c) 4 d) -6 e) – 6

f) 2 g) 6

8)

a) $+\infty$ b) 1 c) 2 d) 3

e) x = -2, x = -1 e x = 1.

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 1.1: 1, 3 e 4
Exercícios 1.1: 1, 3, 5, 7

2.2 CALCULANDO LIMITES

TEOREMA

(a) O limite da soma é a soma dos limites.
(b) O limite da diferença é a diferença dos limites.
(c) O limite de uma constante vezes uma função é igual a constante vezes o limite da função.
(d) O limite do produto é o produto dos limites.
(e) O limite do quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero).
(f) O limite da potência é a potência do limite.
(g) O limite da raiz enésima é a raiz enésima do limite.

Exemplo 1. Sendo $f(x) = x^2 + 3x$, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) $f(1)$

Observação: observe que no exemplo anterior o valor da função é igual ao resultado do limite. Conforme já vimos, isso ocorre quando a função é contínua no ponto considerado. Usando o teorema acima, pode-se provar que as funções polinomiais são contínuas em toda a parte.

Exemplo 2. Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x + 4)$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 10}{x + 3}$

Observação importante: no caso de precisarmos encontrar um limite bilateral *em um ponto de mudança* de lei é indicado calcular primeiro os limites laterais nesse ponto.

Exemplo 3. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & se\ x < 0 \\ x + 4, & se\ x \geq 0 \end{cases}$ e calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$.

LIMITES ENVOLVENDO FUNÇÕES RACIONAIS ONDE O DENOMINADOR TENDE A ZERO

1º caso: numerador e denominador tendem a zero

Técnica de resolução: fatorar o numerador e o denominador e simplificar a função.

Dica: toda função quadrática com raízes reais x' e x'' pode ser fatorada da seguinte forma: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x')(x - x'')}$

Exemplo 4. Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

$b)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{2x^2 - x - 1}$

Exemplo 5. Determine o valor de "a" de modo que a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x}{x}, & se\ x \neq 0 \\ a\ , & se\ x = 0 \end{cases}$$

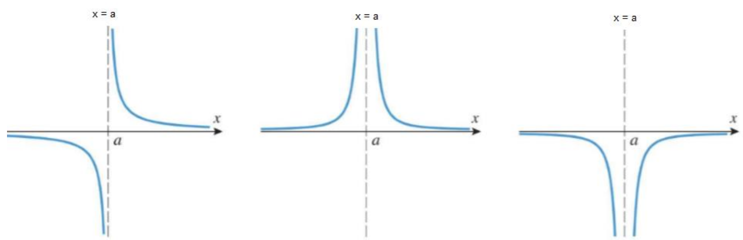
seja contínua em x = 0.

2º caso: apenas o denominador tende a zero

Se quando x → a, apenas o denominador tende a zero, então o limite não existe. Isto ocorre, pois, a função

- vai para $+\infty$, ou
- vai para $-\infty$, ou
- vai para $+\infty$ por um lado e para $-\infty$ pelo outro lado.

Nessas situações, dizemos que *a reta x = a* é uma *assíntota vertical* do gráfico da função (conforme é mostrado nos desenhos abaixo).



Exemplo 6. Calcule os limites.

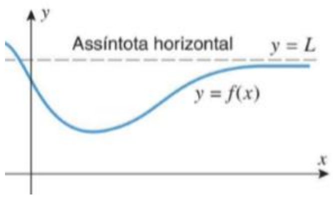
$a)\ \lim_{x\to 5^+} \frac{2}{5-x} =$

$b)\ \lim_{x\to 2} \frac{3x}{(x-2)^2} =$

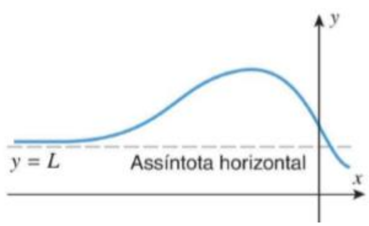
LIMITES NO INFINITO

Em muitas situações estamos interessados no comportamento de uma função f quando x é muito grande.

Se existir um número L com a propriedade de que $f(x)$ fica cada vez mais próxima de L quando x cresce sem limitação, dizemos que L é o limite de f(x) quando x tende a infinito. Simbolizamos esse fato escrevendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Nesse caso, a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da f.



De forma análoga, também pode ocorrer dos valores de $f(x)$ se aproximarem cada vez mais de um número L quando x fica cada vez mais negativo. Simbolizamos esse fato escrevendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.



Nesse caso, a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da f.

Observações:

(1º) o limite nos extremos de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior expoente, pois colocando-se esse termo em evidência, todos os outros termos tendem a 0.

(2º) quando numa função racional numerador e denominador crescem sem limitação, não fica óbvio o que ocorre com a razão entre eles. Nessa situação vamos dividir numerador e denominador pela maior potência de "x" que aparecer no denominador.

Exemplo 7. Calcule os limites.

$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$

$b)\ \lim_{x\to+\infty} (4x^3 + 3x^2 - 2) =$

$c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{2x-7} =$

$d)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 + 2x - 1}{x^3 - 4x} =$

$e)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 1}{1-3x} =$

ATIVIDADES DE AULA

1) Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim_{x\to 2}(x^2 - x + 4)$

$b)\ lim_{t\to 4}\dfrac{2t+1}{t-1}$

$c)\ lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$

$d)\ lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$

2) Em cada um dos itens, calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

a) f(x) = $\begin{cases} 2x+1, & se \quad x \geq 1 \\ x-3, & se \quad x < 1 \end{cases}$

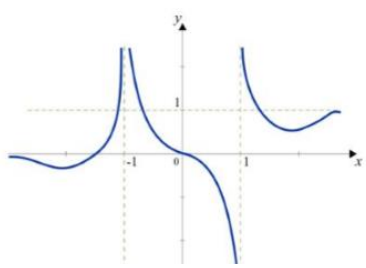
b) f(x) = $\begin{cases} 4-x^2, & se \quad x \geq 1 \\ 2+x^2, & se \quad x < 1 \end{cases}$

3) Se $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$ para x ≠ 2, que valor deve ser atribuído a *f* (2) para que a função *f* se torne contínua em *x* = 2?

4) Seja a função *f* definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x^3-8x}, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 2\sqrt{2} \\ 1-m, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Calcule m para que *f* seja contínua em *x* = 0.

5) Considere o gráfico da função f e responda:



a) $\lim_{x\to -1} f(x) =$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

d) $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

6) Calcule os limites:

$a)\ lim_{x\to 2^+}\dfrac{5}{2-x}$

$b)\ lim_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x^2-4}$

$c)\ lim_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x^2-4}$

$d)\ lim_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-4}$

$e)\ lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x^2}$

$f)\ lim_{x\to 1}\dfrac{2}{|x-1|}$

7) Calcule os seguintes limites:

$a)\ lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-2}{x^3+1}$

$b)\ lim_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-5x}{4x^2+1}$

$c)\ lim_{x\to -\infty}\dfrac{-6x^4+8x+7}{3x+2}$

$d)\ lim_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x+2}{9x+5}}$

Respostas das atividades:

1)

a) 6 b) 3 c) 1 d) 5/4

2)

a) ∄, pois $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3\ e\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$

b) 3

3)

$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$

$f(2) = 7$

4)

m = 5/8

5)

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) $+\infty$

d) 1

e) 0

6)

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) $\nexists$

e) $+\infty$

f) $+\infty$

7)

a) 0

b) 3/4

c) $+\infty$

d) 1/3

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 1.2: 4
Exercícios 1.2: 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 e 31
Exercícios 1.3: 1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 47