ESCOLA POLITÉCNICA PUCRS

CÁLCULO I

Tópico 4 – Derivadas e aplicações

Notas de Aula

4.1 Derivação Implícita

Sempre que temos uma função escrita na forma y = f(x), dizemos que y é uma função explícita de x, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém, nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma função implícita de x.

Para obter a derivada implicitamente, iniciamos derivando a equação dada em relação a x (usando a regra da cadeia) e pensando em y como uma função de x, sempre que y aparecer.

Exemplo 1. Considere a equação $y^3 - 3x = 1$ e determine $\frac{dy}{dx}$:

(a) sem usar derivação implícita.

(b) usando derivação implícita.

(c) comprove que os resultados dos itens (a) e (b) são equivalentes.

Exemplo 2. Usando derivação implícita determine $\frac{dy}{dx}$ para curva de equação

$$x\,y^3 + sen\,y = x^2$$

Exemplo 3. Determine a equação da reta tangente a curva $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto (3, 3).

ATIVIDADE DE AULA

1) Encontre $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita:

$a)\ x^3 + y^3 = 4xy$ $\qquad$ $b)\ x^2 \cdot y + sen\,y = 2$

$c)\ y^2 = x \cdot \cos y$ $\qquad$ $d)\ x^4 + 2y^3 = 4xy$

$e)\ x^2y^2 + 8x = y - 1$

2) Determine a equação da reta tangente à hipérbole de equação $2x^2 - 3y^2 - 12 = 0$ no ponto $(2\sqrt{3}\,, 2)$.

3) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $2x^3y - x^2 + 2xy - y^3 = -1$ no ponto $(1\,, 2)$.

Respostas:

1) a) $y' = \frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$ $\qquad$ b) $y' = \frac{-2xy}{x^2 + \cos y}$ $\qquad$ c) $y' = \frac{\cos y}{2y + x\,\text{sen}\,y}$

d) $y' = \frac{2y - 2x^3}{3y^2 - 2x}$ $\qquad$ e) $y' = \frac{2xy + 8}{1 - 2x^2y}$

2) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 2$

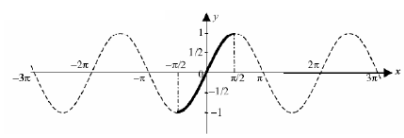
3) 7/4

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 3.1: 1, 2 e 3
Exercícios 3.1: 1, 3, 5, 7, 9 e 25

4.2 Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

A FUNÇÃO ARCO SENO

Para definir a função inversa do seno, a função **arco seno**, restringimos a função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtendo assim uma função injetora.



A função arco seno fica assim definida:

$$f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f(x) = arc\ sen\ (x)$$

Observação: arc sen x significa "o arco cujo seno é x". Logo,

$$y = arc\ sen\ x \quad \leftrightarrow \quad sen\ y = x$$

Exemplo 1. Complete:

a) sen (π/2) = 1 ↔ arc sen (….) = …….

b) sen (-π/2) = -1 ↔ arc sen (….) = …….

c) sen (π/6) = ½ ↔ arc sen (….) = …….

A FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função arco tangente fica assim definida:

$$f: IR \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } f: x \mapsto y = arc\ \tan x$$

Observação: arc tan x significa "o arco cuja tangente é x". Logo,

$$y = arc\ tan\ x \quad \leftrightarrow \quad tan\ y = x$$

Exemplo 2. Determine arc tan (1):

Derivadas das funções trigonométricas inversas

① Usando derivação implícita, podemos mostrar que:

$$D_x(arc\ sen\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pela regra da cadeia, sendo u = f(x), temos que:

$$\boxed{D_x(arc\ sen\ u) =}$$

② Usando derivação implícita, podemos mostrar que:

$$D_x(arc\ tan\ x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Pela regra da cadeia, sendo u = f(x), temos que:

$$\boxed{D_x(arc\ tan\ u) =}$$

Exemplo 3. Determine a derivada de:

a) f(x) = arc sen (x^3).

b) f(x) = arc tg (3x)

Observação importante: quatro outras funções trigonométricas inversas são abaixo definidas. Entretanto, as funções arco seno e arco tangente são suficientes para todos os nossos propósitos no cálculo de integrais.

Função arco cosseno	Derivada
$y = arc\ \sec x \Leftrightarrow \sec y = x$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leq -1 \\ \frac{\pi}{2} < y \leq \pi \end{cases}$	$D_x(arc\ \sec u) = \frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$
$y = arc\ \cos x \Leftrightarrow \cos y = x$ $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$	$D_x(arc\ \cos u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\ \cot x \Leftrightarrow \cot y = x$ $-\infty < x < +\infty$ e $0 < y < \pi$	$D_x(arc\ \cot x) = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = arc\ \csc x \Leftrightarrow \csc y = x$ $\begin{cases} x \leq -1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq y < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$D_x(arc\ \csc u) = -\frac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$

ATIVIDADE DE AULA

1) Calcule a derivada das funções:

a) $y = arc\ \tan\ (x^2)$

b) $y = (arc\ sen\ x)^3$

c) $y = arc\ tg\ (\sqrt{x})$

Respostas:

a) $\frac{2x}{1+x^4}$ b) $\frac{3 \cdot (arc\ sen\ x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1+x)}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Seção 3.3
Exercícios 3.3: 43, 45, 47, 65

4.3 Taxas relacionadas

Quando duas ou mais variáveis (todas sendo funções de t) são relacionadas por uma equação, a relação entre suas taxas de variação pode ser obtida diferenciando a equação em relação a t.

Para resolver problemas que envolvem taxas relacionadas sugerimos o seguinte procedimento:

1º passo: identifique as variáveis e informações dadas e pedidas;

2º passo: obtenha uma equação que relaciona as variáveis que dependem de t;

3º passo: derive em relação a t ambos os membros dessa equação;

4º passo: substitua os valores de quantidades conhecidas e determine o que foi pedido.

Exemplo 1. O raio de um círculo cresce com uma velocidade de 0,01 cm/seg. Com que velocidade cresce a área da região limitada pelo círculo quando o raio tem 2 cm?

Exemplo 2. Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, a uma taxa de 1 m/s, com que taxa o topo da escada está escorregando para baixo quando a base da escada está a 3 m da parede?

ATIVIDADES

1) Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo cujo raio cresce a uma taxa constante de 2 m/min. Com que velocidade a área do derramamento está crescendo quando o raio dele for 60 m?

2) Uma escada com $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razão de $0{,}6 m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo?

3) Lembrando que o volume da esfera de raio r é dado por V = $\frac{4.\pi.r^3}{3}$, resolva:

a) Um balão esférico é esvaziado de tal forma que o seu volume decresce a uma taxa de 3 dm^3/min. Com que taxa o raio do balão estará variando quando medir 1 dm?

b) Uma bola de neve esférica é formada de tal maneira que seu volume aumenta à taxa de 8 dm^3/min. Com que rapidez o raio da bola de neve estará crescendo quando o diâmetro for de 4 dm?

4) Um tanque cilindro com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido estará aumentando a altura da água?
(Observação: o volume de um cilindro de raio r e altura h é dado por V = $\pi r^2 h$)

RESPOSTAS

1) 240π m^2/min

2) $-0{,}67 m/s$

3) a) $-\frac{3}{4\pi}$ dm/min b) $\frac{1}{2\pi}$ dm/min

4) $\frac{3}{25\pi}$ m/min

4.4 APLICAÇÃO À FÍSICA: VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

VELOCIDADE MÉDIA X VELOCIDADE INSTANTÂNEA

Sendo s(t) a posição do móvel no instante t, a velocidade média no intervalo [t, t + Δt] é dada por

$$V_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Entretanto, a velocidade média do móvel em cada instante desse intervalo não é necessariamente igual a velocidade média. Quando reduzimos o valor de Δt as variações de velocidade ficam cada vez menores. Então, desta maneira, se Δt aproxima-se de 0, a velocidade média tende a um valor que será definido como velocidade do móvel no instante t.

Logo a velocidade instantânea é

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

ACELERAÇÃO MÉDIA X ACELERAÇÃO INSTANTÂNEA

Sendo v(t) a velocidade do móvel no instante t, temos que a aceleração média no intervalo [t, t + Δt] é dada por

$$a_m = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}\ .$$

Quando Δt aproxima-se de 0, a aceleração média tende a um valor que será definido como aceleração do móvel no instante t.

Logo a aceleração instantânea é

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = s''(t).$$

Exemplo 1. A posição (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dada pela equação s(t) = t^3 + 6t^2, em que t é medido em segundos.

a) Qual a velocidade média no intervalo de t = 1 até t = 3?

b) Qual a função velocidade instantânea? E qual a velocidade em t = 3?

c) qual a função aceleração instantânea? E qual a aceleração em t = 2?

ATIVIDADE DE AULA

1) A posição (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação s(t) = 4 + 6t + t^2, em que t é medido em segundos. Responda:
a) qual a velocidade média entre t = 3 e t = 8?
b) qual a velocidade instantânea em t = 5?

2) A distância percorrida (em m) por um móvel em uma reta é dada, a cada instante, pela lei *s*(t) = t^2 + 4t + 4 onde t é o número de segundos percorridos. Determine:
a) a velocidade instantânea do móvel.
b) a velocidade inicial.
c) a aceleração instantânea do móvel.

3) Um objeto move-se em linha reta de tal forma que, após t horas, ele está a $s(t) = 3t^2 + t$ quilômetros de sua posição inicial.
a) Ache a velocidade instantânea em $t = 1$.
b) Determine em que tempo o objeto estará se deslocando a uma taxa de $19 km/h$.
c) a aceleração instantânea do objeto em função de t.

4) Uma partícula se move ao longo de um eixo de acordo com a equação do movimento s(t) = 4t^3 – 2t^2 + t onde t ≥ 0 é medido em segundos e s é a distância medida em metros. Determine a velocidade no instante em que a aceleração é 44 m/s^2.

5) A equação de um movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que s está em metros e t em segundos. Encontre o que é pedido em cada caso.
a) A velocidade e a aceleração como funções de t.
b) A aceleração depois de 2 segundos.
c) A aceleração quando a velocidade for 0.

6) No instante t = 0 um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição (em metros) no instante t (em segundos) é dada por s(t) = 16t – t^2.
Determine:
a) a velocidade média desse corpo no intervalo de tempo [2, 4].
b) a velocidade do corpo no instante t = 2.
c) a aceleração no instante t = 4.

RESPOSTAS

1) a) 28 m/s   b) 16 m/s
2) a) v(t) = 2t + 4   b) v(0) = 4m/s   c) a(t) = 2 m/s^2
3) a) $7 km/h$ b) $3h$ c) a(t) = 6 km/h^2
4) v(2) = 41 m/s.
5) a) v(t) = 3t^2 – 3 e a(t) = 6t   b) 12 m/s^2 c) 6 m/s^2
6) a) 10 m/s   b) 12 m/s   c) -2 m/s^2

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Seção 4.6
Exercícios de compreensão 4.6: 1 e 2
Exercícios 4.6: 17 (a), (b) e (c)

4.5 A REGRA DE L'HÔPITAL

A regra de l'Hôpital permite calcular limites indeterminados da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, utilizando derivadas.

Teorema: (Regra de l'Hôpital) Se $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ assume a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \Re$, então $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. O mesmo é válido para se a é substituído por a^+, a^-, $+\infty$ ou $-\infty$.

Outras indeterminações podem ser reduzidas (transformadas) às duas anteriores para então podermos aplicar a regra.

Exemplo 1. Calcule os seguintes limites:

$a)\ \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

$c)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$d)\ \lim_{x \to \infty} x\ sen\left(\frac{1}{x}\right)$

$e)\ \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sen\,x}\right)$

ATIVIDADE DE AULA

Obtenha os seguintes limites:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{x - sen\,x}{x}$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\,2x}{x}$ 4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - sen\,x}$ 6) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 27}$

7) $\lim_{x \to \infty} x\,sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ 8) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

RESPOSTAS

1) 0 2) $+\infty$ 3) 2 4) $+\infty$

5) 6 6) 0 7) π 8) 0

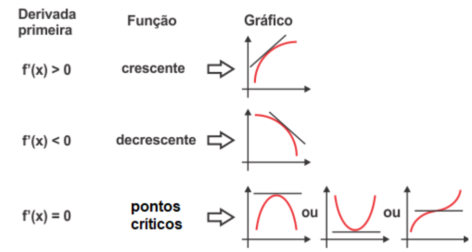
EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 3.6: 1, 2 e 3
Exercícios 3.6: 1, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 23, 33 e 47

4.6 ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO

Muitas aplicações do cálculo dependem da nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações sobre suas derivadas. Nesta seção, vamos analisar de que maneira a primeira e a segunda derivada afetam o gráfico de uma função.

O que f' nos diz sobre f?

Para ver como a derivada de uma função f pode nos dizer onde ela é crescente ou decrescente, observe a figura abaixo.



- Se $f'(x) > 0$ em um intervalo (a, b), então $f(x)$ é crescente nesse intervalo.
- Se $f'(x) < 0$ em um intervalo (a, b), então $f(x)$ é decrescente nesse intervalo.
- Os pontos do gráfico de f em que $f'(x) = 0$ são chamados de pontos críticos.

CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS CRÍTICOS – TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA

Suponha que f tenha um ponto crítico em x = a.

① Se $f'(x) < 0$ à esquerda de x = a e $f'(x) > 0$ à direita de x = a, então f tem um mínimo relativo em x = a.

② Se $f'(x) > 0$ à esquerda de x = a e $f'(x) < 0$ à direita de x = a, então f tem um máximo relativo em x = a.

③ Se $f'(x)$ tem o mesmo sinal à esquerda e à direita de x = a, então f não tem mínimo nem máximo relativo em x = a.

Exemplo 1. Determine em cada caso os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de f. Use o teste da derivada primeira (TDP) para classificar os pontos críticos.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

EXTREMOS RELATIVOS X EXTREMOS ABSOLUTOS

Os máximos e os mínimos relativos são os pontos mais altos e mais baixos em sua ***vizinhança próxima***. Observe que nem o máximo relativo é necessariamente o ponto mais alto da função, nem o mínimo relativo é o ponto mais baixo da função.

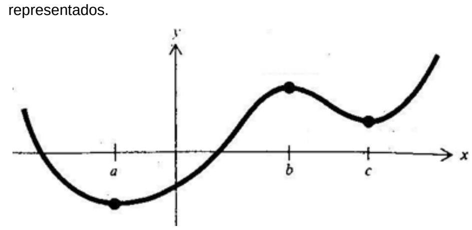
O ***valor máximo*** (ou ***máximo absoluto***) de uma função, caso exista, é o maior valor que a função assume em seu domínio.

O ***valor mínimo*** (ou ***mínimo absoluto***) de uma função, caso exista, é o menor valor que a função assume em seu domínio.

Se uma função f é contínua em um intervalo fechado [a, b], então ela possui um máximo absoluto e um mínimo absoluto em [a, b]. Esses extremos ocorrerão nos pontos críticos ou nos extremos do intervalo.

Note que todo extremo absoluto é relativo, mas nem todo extremo relativo é absoluto.

Exemplo 2. No gráfico abaixo, de uma função y = f(x), todos os extremos estão representados.



Logo podemos afirmar que:

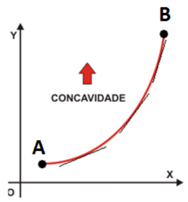
a) em x = a, f possui um .... relativo que .... absoluto.

b) em x = b, f possui um .... relativo que .... absoluto.

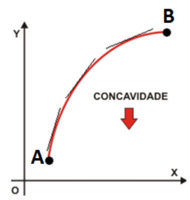
c) em x = c, f possui um .... relativo que .... absoluto.

O que f'' nos diz sobre f?

A figura abaixo mostra o gráfico de duas funções crescentes do ponto A até o ponto B. Entretanto, os gráficos são bem diferentes. Na figura (a), a curva fica acima das retas tangentes, logo a concavidade é voltada para cima. Na figura (b), a curva fica abaixo das retas tangentes, logo a concavidade é voltada para baixo.



Fig(a) - Curva côncava para cima



Fig(b) - Curva côncava para baixo

Vamos observar como a derivada segunda nos ajuda a determinar as concavidades de uma. Olhando para figura (a), você pode ver que, indo da esquerda para direita, as inclinações das retas tangentes crescem. Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e consequentemente sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, olhando para figura (b), você pode ver que, indo da esquerda para direita, a inclinação das tangentes decresce. Isso significa dizer que a derivada f' é uma função decrescente e consequentemente sua derivada f'' é negativa.

TESTE DA CONCAVIDADE

Seja *f* (*x*) uma função duas vezes diferenciável no intervalo (a, b).

a) f é côncava para baixo em (a, b) se f''(x) < 0, $\forall x \in$ (a, b).

b) f é côncava para cima em (a, b) se f''(x) > 0, $\forall x \in$ (a, b).

PONTOS DE INFLEXÃO

Os pontos do gráfico de y = f(x) onde a curva troca de concavidade são chamados de pontos de inflexão.

Exemplo 3. Estude a concavidade de f(x) = $x^3 - 3x^2 + 1$.

Exemplo 4. Faça o estudo completo da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

ATIVIDADES

1) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

2) Encontre os pontos de máximo e de mínimo relativos de f , caso existam, quando:

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ b) $f(x) = 2x^2 - x^4$

3) Determine em cada caso os intervalos nos quais f é côncava para cima (CPC) e os intervalos nos quais f é côncava para baixo (CPB). Determine também os pontos de inflexão (caso existam).

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ b) $f(x) = (x+2)^3$

4) Esboce as seguintes curvas, indicando todos os pontos extremos relativos e pontos de inflexão:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

5) Seja f uma função definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3$. Determine:

a) os intervalos de crescimento e decrescimento de f ;

b) os pontos de máximo e os pontos de mínimo relativos caso existam;

c) os intervalos em que f é côncava para cima e os intervalos em que f é côncava para baixo; e os pontos de inflexão caso existam;

d) um esboço do gráfico de f , mostrando os extremos relativos e os pontos de inflexão.

RESPOSTAS

1) a) C: (1, +∞) e D: (-∞, 1) b) C: (3, +∞) e D: (-∞, 3)

c) C: (-∞, 0) ∪ (1, +∞) e D: (0, 1) d) C: [-1, +∞) e D: (-∞, -1]

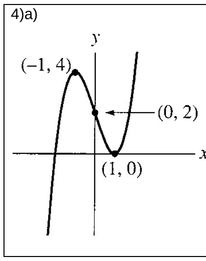
2) a) Ponto de mínimo relativo: (1, 0). Ponto de máximo relativo: (1/3, 4/27).

b) Ponto de mínimo relativo (0, 0). Pontos de máximos relativos: (-1, 1) e (1, 1).

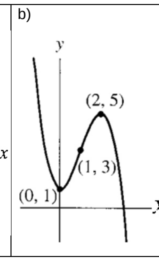
3) a) CPC: (-∞, +∞), f não possui pontos de inflexão.

b) CPC: (-2,+∞) e CPB: (-∞, -2). Ponto de inflexão (2, 0).

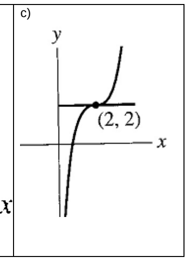
4)a)



b)



c)



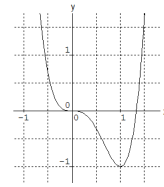
5) a) C: (1, +∞) e D: (-∞, 1)

b) Mínimo relativo (que é absoluto) no ponto (1, -17).

A função não possui máximo relativo.

c) CPC: (-∞, 0) ∪ (2/3, +∞) e CPB: (0, 2/3). Pontos de inflexão (0, 0) e (2/3, -16/27).

d)



4.7 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os métodos estudados na secção anterior para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Vamos agora resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos. Esses problemas são chamados de *problemas de otimização*.

Para resolver esses problemas devemos:

1º) determinar a lei da função f a ser maximizada ou minimizada;

2º) determinar o domínio contextual da função;

3º) calcular os pontos críticos;

4º) usar o TDP para determinar os extremos;

5º) responder o que foi pedido.

Exemplo 1. Uma área retangular com 288 m^2 deverá ser cercada. Em dois lados paralelos será usada uma cerca que custa $1,00 o metro e, nos lados restantes, uma cerca que custa $2,00 o metro. Encontre as dimensões do retângulo com o menor custo.

ATIVIDADES

1) Um terreno retangular deve ser cercado de duas formas. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R$ 3,00 o metro, enquanto que os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de R$ 2,00 o metro. Quais são as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R$ 6000,00?

2) O Departamento de Estradas e Rodagens planeja construir uma área de piquenique para os motoristas ao longo de uma grande auto-estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5000 metros quadrados, e deverá ser cercada nos três lados não-adjacentes à estrada. Qual é a menor quantidade de cerca que será necessária para completar o trabalho?

3) Deve-se construir uma caixa de base retangular, com uma folha de cartolina de 16 cm de largura e 30 cm de comprimento, retirando-se um quadrado da cada canto da cartolina e dobrando-se perpendicularmente os lados resultantes. Determine o tamanho do lado do quadrado que permite construir uma caixa de volume máximo.

4) Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter capacidade de 375π cm^3. O custo do material usado para a base do recipiente é de 15 centavos o cm^2 e o custo do material usado para lateral é de 5 centavos por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizem o custo do material.

5) Uma loja vende diariamente 40 unidades de um produto a R$ 50,00 cada uma. Quando esse produto entra em promoção, observa-se que para cada R$ 1,00 de desconto no preço do produto, as vendas aumentam 10 unidades.

a) Expresse o faturamento da loja em função do desconto de “x” reais.

b) Quantos reais de desconto a loja deve oferecer no preço de cada unidade desse produto afim de obter o faturamento máximo?

6) As bordas de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as bordas laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

RESPOSTAS

1) 500 m e 750 m

2) 200 m

3) 10/3 cm

4) r = 5 cm e h = 15 cm

5) a) R = (50 – x)(40 + 10x)   b) 23 reais

6) 24 cm e 36 cm