ESCOLA
POLITÉCNICA
PUCRS

Cálculo I

Tópico 3 – Derivadas

2.1 DERIVADA: INTRODUÇÃO E DEFINIÇÃO

Vejamos algumas situações que estão diretamente ligadas com o conceito de derivada.

1ª situação. Seja $s(t)$ a posição de uma partícula no instante t.
A velocidade média dessa partícula no intervalo $[t_0\,, t_1]$ é dada por:

$$\text{velocidade média} = \frac{\Delta s}{\Delta t} =$$

A velocidade instantânea dessa partícula em t_0 pode ser obtida através do limite:

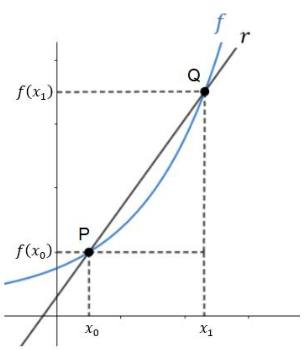
$$v(t_0) =$$

Conforme veremos esse limite que fornece a velocidade no instante t_0 é ***a derivada*** da função posição em $t = t_0$.

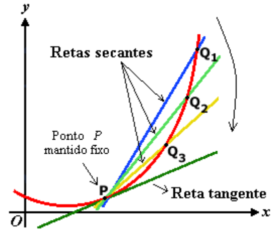
2ª situação. Seja $y = f(x)$ uma função real, de variável real. Como determinar a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de f em um ponto $P(x_0,\ f(x_0))$?

Inicialmente escolhemos um ponto $Q(x_1,\ f(x_1))$, com $x_1 \neq x_0$ e calculamos a inclinação (coeficiente angular) da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos P e Q:

$$a_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$



Observe que se mantivermos x_0 fixo, e fizermos $x_1 \to x_0$, o ponto Q irá se aproximar cada vez mais do ponto P.
Dessa forma, a reta secante se aproxima cada vez mais da reta tangente (posição limite).
Assim, o coeficiente angular da reta tangente em $x = x_0$ pode ser obtido do seguinte limite:



$a_{tg} =$

<u>A definição da derivada de uma função em x = x₀</u>:

Seja $y = f(x)$ uma função real, de variável real.
A taxa média de variação da função f no intervalo $[x_0 , x_1]$ é dada por:

$$t.m.v. = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

A derivada de f em um ponto x_0, denotada por $f'(x_0)$, representa ***a taxa de variação instantânea*** de y em relação a x no ponto x_0, e é definida por:

$f'(x_0) =$

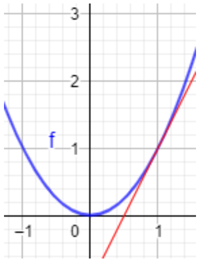
Sendo $x - x_0 = h$, podemos reescrever a definição de derivada da seguinte forma:

$f'(x_0) =$

A derivada no ponto x_0 existe sempre que o limite acima existir.
Geometricamente, a taxa de variação instantânea em $x = x_0$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f nesse ponto.
Observe que a ideia de taxa de variação está presente em inúmeras situações:

- se f é uma população, f' é a taxa de crescimento da população (ou taxa de natalidade)
- se f mede preços, f' é a taxa de variação dos preços no tempo (ou inflação).

Exemplo 1. Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.



<u>Observação importante</u>: podemos pensar na derivada como uma ***função***. Ela associa a cada entrada x, o número $f'(x)$ que representa a inclinação da reta tangente nesse ponto ou a taxa de variação instantânea nesse ponto.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemplo 2. Usando a definição, encontre a função derivada de:

a) $f(x) = x^2$

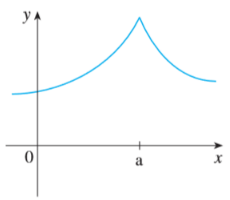
b) $f(x) = 2x + 1$

DIFERENCIABILIDADE

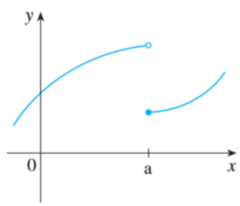
Quando a derivada de uma função existe em x = a, dizemos que a função é ***diferenciável*** em x = a. Se a derivada existir em todos os pontos dizemos simplesmente que a função é diferenciável.

Vejamos três situações em que a derivada de f não existe em x = a:

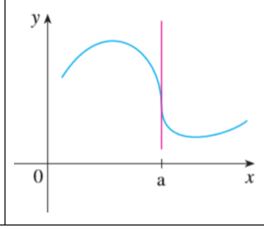
(a) uma quina (ou bico)



(b) uma descontinuidade



(c) uma tangente vertical



ATIVIDADES DE AULA

1) Calcule a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$ no ponto x = 3.

2) Calcule a derivada de cada uma das funções **por limites**:

a) $f(x) = 5x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 2$

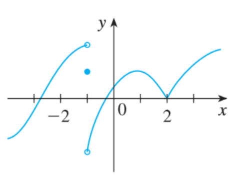
c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = -3x + 1$

3) Observe o gráfico da f e determine:

a) em quais pontos do domínio f não é contínua?

b) em quais pontos do domínio f não é diferenciável?



ATIVIDADES DE AULA

1) $f'(3) = 6$

2) a) $f'(x) = 5$ b) $f'(x) = 2x$ c) $f'(x) = 2x + 4$ d) $f'(x) = -3$

3) a) x = -1 b) x = -1 e x = 2.

3.2 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Observação importante: existem muitas notações diferentes para derivada. Sendo y = f(x), podemos representar sua derivada por:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df}{dx}; \quad D_x(y); \quad D_x(f(x))$$

D1) Derivada da função constante

$$\boldsymbol{D_x(c) = 0}$$

Exemplo 1. Calcule a derivada das funções:

a) y = 3 | b) f(x) = -2 | c) y = 0

D2) Derivada da função potência

$$\boldsymbol{D_x(x^p) = p \cdot x^{p-1}}$$

Exemplo 2. Determine a derivada das funções:

$a)\ y = x^6$	$b)\ y = x^2$	$c)\ f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
$d)\ f(x) = \sqrt[3]{x^5}$	$e)\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$f)\ f(x) = \pi^4$

D3) Derivada de constante vezes uma função

$$D_x(c \cdot f(x)) = c \cdot f'(x)$$

Exemplo 3. Calcule:

a) $\frac{d}{dx}[4 \cdot x^5] =$

b) $\frac{d}{dx}[\pi \cdot x^2] =$

c) $\frac{d}{dt}\left[\frac{t^3}{3}\right] =$

d) $D_x\left[\frac{4}{x^2}\right] =$

D4) Derivada de somas e diferenças de funções

$$D_x(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

Observações:

- A derivada da soma é a soma das derivadas.
- A derivada da diferença é a diferença das derivadas.
- Embora tenhamos enunciado a regra para duas funções, a mesma permanece válida para um número finito qualquer de funções.

Exemplo 4. Encontre $\frac{dy}{dx}$ em cada caso:

a) $y = x^4 + x^2$

b) $y = 3x^2 - 11x - 5$

Exemplo 5. Considere a função $f(x) = x^2 - 1$ e determine:

a) a inclinação do gráfico (ou coeficiente angular da reta tangente) em x = 2.

b) a equação da reta tangente ao gráfico dessa função em x = 2.

Derivadas Sucessivas

Seja f'(x) a derivada de f(x). Se calcularmos a função derivada de f'(x), essa função será chamada de derivada segunda de f(x) e será denotada por f''(x). De modo análogo podemos definir a derivada terceira, quarta, etc.

A notação para as derivadas sucessivas é a seguinte:

- f'(x) ou $\frac{dy}{dx}$ para a 1ª derivada de f em relação a x;
- f''(x) ou $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ para a 2ª derivada de f em relação a x;
- f'''(x) ou $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$ para a 3ª derivada de f em relação a x;

e assim por diante.

Exemplo 6. Obtenha as sucessivas derivadas da função $f(x) = 3x^4 - x^2$.

Exercícios Anton H., Bivens I., Davis S. Cálculo. Volume 1 (10ª ed)
Exercícios 2.3 (P.161): 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 21, 29, 31, 37, 39, 41 e 45

ATIVIDADES DE AULA

1) Use as regras de derivação estudadas para encontrar a derivada das seguintes funções:

$a)\ f(x) = 2\pi$

$b)\ f(x) = x^7$

$c)\ f(x) = -20x^3$

$d)\ y = \dfrac{1}{2}x^4$

$e)\ f(x) = x^3 + x$

$f)\ y = -10x^5 + 3x^2 + 7$

$g)\ f(t) = -3t^3 + 2t^2 - t + 8$

$h)\ y = \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{5}{x^2}$

$i)\ f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$

$j)\ f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{2}{3x}$

2) Considere a função $f(x) = 3x^2 - x^3$ e determine:

a) a inclinação da curva em x = 1.

b) a equação da reta tangente em x = 1.

3) Dada a função $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x$, pede-se a abscissa do(s) ponto(s) do gráfico de f em que a reta tangente é horizontal.

4) Determine a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ em a inclinação da curva é igual a -1/4.

5) Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por $f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$.

a) qual a taxa de expansão da epidemia após 4 dias?

b) qual a taxa de expansão da epidemia após 8 dias?

RESPOSTAS

1)

$a)\ f'(x) = 0$

$b)\ f'(x) = 7x^6$

$c)\ f'(x) = -60x^2$

$d)\ f'(x) = 2x^3$

$e)\ f'(x) = 3x^2 + 1$

$f)\ y' = -50x^4 + 6x$

$g)\ f'(t) = -9t^2 + 4t - 1$

$h)\ y' = -\dfrac{8}{x^5} - \dfrac{10}{x^3}$

$i)\ f'(x) = x^{-1/2} + x^{-2/3}$

$j)\ y' = -x^{-4/3} - \dfrac{2}{3}x^{-2}$

2)

a) $f'(1) = 3$

b) $y = 3x - 1$

3)

x = 2 e x = -1/2

4)

x = ± 2

5)

a) $f'(4) = 48$. Logo, no tempo t = 4, a moléstia está se alastrando à razão de 48 pessoas por dia.

b) $f'(8) = 0$. Logo, no tempo t = 8, a epidemia está totalmente controlada.

D5) Derivada da função exponencial natural e da função logaritmo natural

$$\boldsymbol{D_x(e^x) = e^x} \qquad \boldsymbol{D_x(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Exemplo 7. Determine:

a) $D_x(2 \cdot e^x)$

b) $D_x(2 + e^x)$

c) $\frac{d}{dx}(x^5 + 3\ln x)$

Exemplo 8. A igualdade $(x^2 \cdot x^3)' = (x^2)' \cdot (x^3)'$ é verdadeira ou falsa? Justifique.

D6) Regra do produto

$$\boldsymbol{D_x(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)}$$

Exemplo 9. Calcule:

a) $D_x(x^5 \cdot e^x)$

b) $D_x(x^2 \cdot \ln x)$

D7) Regra do quociente

$$\boldsymbol{D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Exemplo 10. Calcule a derivada das funções:

$a)\ y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$ $\qquad$ $b)\ y = \dfrac{1}{x^2 - 5x}$

D8) Derivada das funções trigonométricas

$\boldsymbol{D_x(sen\ x) = cos\ x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_x(cos\ x) = -sen\ x}$

$\boldsymbol{D_x(tg\ x) = sec^2 x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_x(cotg\ x) = -cossec^2 x}$

$\boldsymbol{D_x(sec\ x) = \sec x \cdot\ tgx}$ $\qquad$ $\boldsymbol{D_x(cossec\ x) = -cossec\ x \cdot\ cotgx}$

Exemplo 11. Determine a derivada de y = x^2.sen x + 3.cos x.

Exemplo 12. Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ sendo y = sec x.

ATIVIDADES DE AULA

1) Aplicando as regras de derivação estudadas, encontre a derivada de:

$a)\ y = x \cdot \ln x$ $\quad b)\ y = 3x^2 \cdot e^x$ $\quad c)\ y = \dfrac{2-3x}{1-x}$

$d)\ y = \dfrac{x^2+2}{1+2x}$ $\quad e)\ y = e^x \cdot \ln x$ $\quad f)\ y = \dfrac{e^x}{2x}$

2) Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ em cada um dos seguintes casos:

a) y = 2.cos x – 3.sen x $\quad$ b) y = $\dfrac{sen\ x}{x}$

c) y = x^3. sen x – 5.cos x $\quad$ d) y = sec x – $\sqrt{2}$. tg x

e) y = x^2 . tg x $\quad$ f) y = $\dfrac{sen\ x}{1+\cos x}$

RESPOSTAS

1) a) $y' = 1 + \ln x$ $\quad$ b) $y' = 3x^2e^x + 6xe^x$ ou $y' = 3xe^x(x+2)$ $\quad$ c) $y' = \dfrac{-1}{(1-x)^2}$

d) $y' = \dfrac{2x^2+2x-4}{(1+2x)^2}$ $\quad$ e) $y' = e^x \cdot \dfrac{1}{x} + e^x \cdot \ln x$ ou $y' = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$

f) $y' = \dfrac{2xe^x - 2e^x}{(2x)^2}$ ou $y' = \dfrac{2e^x(x-1)}{4x^2}$

2) a) – 2.sen x – 3.cos x $\quad$ b) $\dfrac{x.\cos x - sen\ x}{x^2}$ $\quad$ c) $x^3 \cos x + (3x^2 + 5)$.sen x

d) sec x . tg x - $\sqrt{2}$ $\sec^2$ x $\quad$ e) $x^2 \sec^2 x + 2x$.tg x $\quad$ f) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios 2.4 (P.168): 1, 3, 5, 11, 13, 27 e 31
Exercícios 2.5 (P.172): 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 19, 21

3.3 A DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA (REGRA DA CADEIA)

Motivação: sendo $y = 2u$ e $u = 3x - 5$, determine y em função de x e calcule:

$a)\ \dfrac{dy}{dx} =$

$b)\ \dfrac{dy}{du} =$

$c)\ \dfrac{du}{dx} =$

Regra da Cadeia: se $y = f(u)$ e u é uma função de x, então a derivada de y em relação a x é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad ou \quad y' = f'(u) \cdot u'$$

Exemplo 1. Derive as seguintes funções compostas:

$a)\ y = sen\ (x^2 + 1)$ $\quad b)\ y = sen\ (3x)$

$c)\ y = \cos\ (e^x)$ $\quad d)\ y = \ln\ (5x - 1)$

$e)\ y = \ln(sen\ x)$ $\quad f)\ y = e^{4x+7}$

$g)\ y = (3x+1)^{10}$

$h)\ y = \dfrac{4}{\sqrt{3x^2-1}}$

Fórmulas generalizadas de derivação:

Sendo u = f(x), temos que:

① $[x^p]' = p \cdot x^{p-1}$ $[u^p]' =$	② $[ln\ x]' = \dfrac{1}{x}$ $[ln\ u]' =$	③ $[e^x]' =$ $[e^u]' =$
④ $[sen\ x]' = \cos x$ $[sen\ u]' =$	⑤ $[cos\ x]' = -\operatorname{sen} x$ $[cos\ u]' =$	

Exemplo 2. Determine a derivada das seguintes funções:

$a)\ y = sen^4 x + sen\ x^4$

$b)\ y = \cos^3(2x)$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 2.6: 3 e 4   **Exercícios 2.6:** 7, 9, 11, 15, 17, 23, 27, 29, 31, 33 e 49
Exercícios 3.2: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 19, 23
Exercícios de compreensão 3.3: 3a, 3c e 3d   **Exercícios 3.3:** 15, 17, 19, 21

ATIVIDADES DE AULA

1) Determine a derivada das funções abaixo:

a) $y = (x^2 - x + 1)^{23}$

b) $y = (x^5 - 3x)^4$

c) $y = (x^2 - 2)^{500}$

d) y = sen (2x)

e) $f(x) = 4.\cos(x^3)$

f) $y = tg\ (x^2 + 1)$

g) $y = sen^3 x$

h) $y = \cos(x^2 + 9)$

i) $y = \sqrt{x^2+5}$

j) $y = \dfrac{3}{2(x^2-4x)^2}$

k) $y = \dfrac{2}{3\sqrt{1-x^2}}$

l) $y = sen^3(2x)$

m) y = ln (3x – 1)

n) $y = e^{5x+1}$

2) Obtenha a derivada segunda das funções:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

b) f(x) = cos (3x)

3) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função dada por

$y = \sqrt{x^2-3}$ no ponto x = 2.

RESPOSTAS

1)

a) $23.(x^2 - x + 1)^{22}.(2x - 1)$

b) $4.\ (x^5 - 3x)^3.(5x^4 - 3)$

c) $1000.x.(x^2 - 2)^{499}$

d) 2.cos (2x)

e) $-12x^2\ sen\ (x^3)$

f) $2x.sec^2(x^2 + 1)$

g) $3.sen^2x\ .\ \cos x$

h) $-\ 2x.sen\ (x^2 + 9)$.

i) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

j) $\dfrac{-6x+12}{(x^2-4x)^3}$

k) $\dfrac{2x}{3\sqrt{(1-x^2)^3}}$

l) $6.sen^2(2x).\cos(2x)$

m) $\frac{3}{3x-1}$

n) $5.e^{5x+1}$

2)

$a)\ f''(x) = \dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

$b)\ f''(x) = -9\cos(3x)$

3) y = 2x – 3

3.4 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Sempre que temos uma função escrita na forma y = f(x), dizemos que y é uma função explícita de x, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém, nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma função implícita de x.

Para obter a derivada implicitamente, iniciamos derivando a equação dada em relação a x (usando a regra da cadeia) e pensando em y como uma função de x, sempre que y aparecer.

Exemplo 1. Considere a equação $y^3 - 2x^2 = 3$ e determine $\frac{dy}{dx}$:

(a) sem usar derivação implícita;

(b) usando derivação implícita.

(c) comprove que os resultados dos itens (a) e (b) são iguais.

Exemplo 2. Pensando conscientemente em y como uma função de x, aplique a regra da cadeia para calcular:

(a) $D_x(y^4) =$

(b) $\frac{d}{dx}(\cos y) =$

(c) $\frac{d}{dx}(x^3 \cdot y^4) =$

Exemplo 3. Considere a curva de equação $x^3 + y^3 = 6xy$ e determine:

a) $\frac{dy}{dx}$ usando derivação implícita.

b) a equação da reta tangente a curva no ponto (3, 3).

ATIVIDADE DE AULA

1) Encontre $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita:

$a)\ x^3 + y^3 = 4xy$

$b)\ x^2 \cdot y + sen\ y = 2$

$c)\ y^2 = x \cdot \cos y$

2) Determine a equação da reta tangente à hipérbole de equação $2x^2 - 3y^2 - 12 = 0$ no ponto $(2\sqrt{3}, 2)$.

Respostas:

1)

a) $y' = \frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2}$

b) $y' = \frac{-2xy}{x^2 + \cos y}$

c) $y' = \frac{\cos y}{2y + x \operatorname{sen} y}$

2)

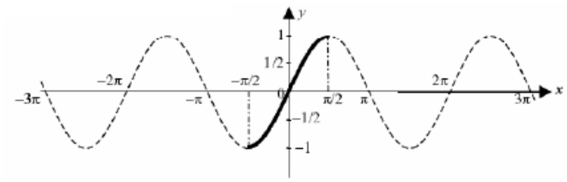
$y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 2$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Exercícios de compreensão 3.1: 1, 2 e 3
Exercícios 3.1: 1, 3, 5, 7, 9 e 25

3.5 As Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

A FUNÇÃO ARCO SENO

Para definir a função inversa do seno, a função arco seno, restringimos a função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtendo assim uma função injetora.



A função arco seno fica assim definida:

$$f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f: x \to y = arc\ sen\ x$$

Observação: arc sen x significa "o arco cujo seno é x". Logo,

$$y = arc\ sen\ x \quad \leftrightarrow \quad sen\ y = x$$

A FUNÇÃO ARCO TANGENTE

A função arco tangente fica assim definida:

$$f: IR \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que } f: x \mapsto y = arc\ \tan x$$

Observação: arc tan x significa "o arco cuja tangente é x". Logo,

$$y = arc\ tan\ x \quad \leftrightarrow \quad tan\ y = x$$

Exemplo 1. Determine:

a) arc sen (-1)

b) arc sen (1/2)

c) arc tan (1)

Derivadas das funções trigonométricas inversas

Vejamos a derivada da função arco seno:

$$y = arc\ sen\ x \quad \Leftrightarrow \quad sen\ y = x$$

Derivando implicitamente em relação a x:

$$D_x(sen\ y) = D_x(x)$$

$$\cos\ y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos\ y}$$

Como $sen\ y = x$, com $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, através da relação fundamental da trigonometria, $sen^2 y + cos^2 y = 1$, obtemos $\cos\ y = \sqrt{1-x^2}$. Assim temos:

$$D_x(arc\ sen\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos:

$$D_x(arc\ sen\ u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

De modo análogo ao que fizemos para função arco seno, podemos deduzir a fórmula da derivada da função y = arc tg x.

$$D_x(arc\ tg\ x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De um modo mais geral, sendo u = f(x), temos que:

$$D_x(arc\ tg\ u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Exemplo 2. Determine a derivada de:

a) f(x) = arc sen (x^3).

b) f(x) = arc tg (3x)

Observação importante: quatro outras funções trigonométricas inversas são abaixo definidas. Entretanto, as funções arco seno e arco tangente são suficientes para todos os nossos propósitos no cálculo de integrais.

Função arco cosseno	Derivada
$y = arc\ \sec x \Leftrightarrow \sec y = x$ $\begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \le -1 \\ \frac{\pi}{2} < y \le \pi \end{cases}$	$D_z(arc\ \sec u) = \frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$
$y = arc\ \cos x \Leftrightarrow \cos y = x$ $-1 \le x \le 1$ e $0 \le y \le \pi$	$D_z(arc\ \cos u) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\ \cot x \Leftrightarrow \cot y = x$ $-\infty < x < +\infty$ e $0 < y < \pi$	$D_z(arc\ \cot x) = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = arc\ \csc x \Leftrightarrow \csc y = x$ $\begin{cases} x \le -1 \\ -\frac{\pi}{2} \le y < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$D_z(arc\ \csc u) = -\frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$

ATIVIDADE DE AULA

Calcule a derivada das funções:

1) $y = arc\ \tan\ (x^2)$ 2) $y = (arc\ sen\ x)^3$ 3) $y = arc\ tg\ (\sqrt{x})$

Respostas:

1) $\frac{2x}{1+x^4}$ 2) $\frac{3\cdot(arc\ sen\ x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

EXERCÍCIOS ANTON H., BIVENS I., DAVIS S. CÁLCULO. VOLUME 1 (10ª ED)
Seção 3.3
Exercícios 3.3: 43, 45, 47, 65