Engenhartis

Formulário de Eletromagnetismo

v. 1.0.0-a5-brochura-fv

julho de 2021

https://www.engenhartis.com.br/materiais/materiais-abertos

Referências

Stuart M. Wentworth. *Eletromagnetismo Aplicado*. Bookman, 2007. ISBN 978-85-7780-290-6. i, 38

Apresentação

Este formulário traz inúmeras equações dos fundamentos do Eletromagnetismo, de forma categorizada por meio das seções e subseções.

Espera-se que ele possa auxiliar os estudantes na interpretação e na escolha das adequadas equações durante a resolução de cada tipo de problema.

Os professores também poderão fazer uso deste material como formulário de consulta durante avaliações, tanto na forma digital quanto impressa.

As notações utilizadas encontram-se conforme as apresentadas no livro Wentworth [2007].

O corrente formulário foi compilado para *formato brochura (livreto) tamanho A5 a ser impresso em folha A4 frente e verso*. Uma cópia em PDF poderá ser baixada no seguinte endereço, onde também encontra-se a versão para *folha A4 frente e verso*, além de outros materiais. Neste mesmo endereço, sugestões poderão ser postadas.

https://www.engenhartis.com.br/materiais/materiais-abertos semelhante, em sua versão *4.0*, pela *Engenhartis*, com a contribuição do mesmo autor. Ver a seção Produção na página 38 e a seção Licença na página 39 para mais informações.

Nota

> ***NENHUMA GARANTIA É FORNECIDA.*** *Os materiais são disponibilizados "no estado em que se encontram" ("as-is") e "como disponível" ("as-available"). USE-OS SOB SEUS PRÓPRIOS RISCOS. Veja o texto da licença para mais informações.*

Mais Informações sobre a Licença

O resumo da licença pode ser obtido em:

Português: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR

Inglês: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en

A licença completa pode ser obtida em:

Português: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pt

Inglês: https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode

L Onde Adquirir Este Material

O corrente material foi compilado para *folha A4 frente e verso*. Uma cópia em PDF poderá ser baixada no seguinte endereço, onde também encontra-se a versão para *folha A5 frente e verso*, além de outros materiais:

K Licença

Este documento é disponibilizado sob a licença abaixo descrita.

Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional (CC BY-SA 4.0)

Esta licença é aceita para trabalhos culturais livres. Com ela, pode-se:

Compartilhar: copiar e redistribuir o material em qualquer suporte ou formato.

Adaptar: remixar, transformar, e criar a partir do material para qualquer fim, mesmo que comercial.

Sob as seguintes condições:

Atribuição: você deve dar o crédito apropriado, prover um *link* para a licença e indicar se mudanças foram feitas. Você deve fazê-lo em qualquer circunstância razoável, mas de nenhuma maneira que sugira que o licenciante apoia você ou o seu uso.

CompartilhaIgual: Se você remixar, transformar, ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.

Sem restrições adicionais: Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.

Visite-nos na *Engenhartis*!

Engenhartis

https://www.engenhartis.com.br

Sumário

I Produção

Autor: Prof. Marcelo P. Trevizan[1]

Editor: Prof. Marcelo P. Trevizan

Revisores: Prof. Arnaldo Megrich (da versão de 2011)[2], Prof. Marcelo P. Trevizan (da versão de 2011 e da atual)

Livro de Referência: Wentworth [2007]

J Histórico

v. 1.0.0 (julho de 2021)

- Complementações de leiaute.
- Nova redação para a seção de apresentação.
- Alteração da licença.
- Retiradas as informações para obtenção do código-fonte e compilação do material.
- Algumas correções de pormenores.
- Publicação em conjunto com a *Engenhartis*.

v. 0.1.0 (março de 2011)

Versão publicada anterior.

[1]Professor da Escola de Engenharia Mauá.
[2]Professor da Escola de Engenharia Mauá e da Universidade São Judas Tadeu.

Tabela 10: Tabela de integrais indefinidas (notar que as duas últimas equações não foram generalizadas, para simplificar).

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$
$$\int u^{\mathrm{n}}\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + \mathrm{C}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + \mathrm{C}$$
$$\int e^{u}\mathrm{d}u = e^{u} + \mathrm{C}$$
$$\int \mathrm{a}^{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\ln \mathrm{a}}\mathrm{a}^{u} + \mathrm{C}$$
$$\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = -\cos u + \mathrm{C}$$
$$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \operatorname{sen} u + \mathrm{C}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+\mathrm{a}^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+\mathrm{a}^2}\right) + \mathrm{C}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\mathrm{a}^2)^{3/2}} = \frac{u}{\mathrm{a}^2\sqrt{u^2+\mathrm{a}^2}} + \mathrm{C}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\mathrm{a}^2} = \frac{1}{\mathrm{a}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}$$
$$\int e^{\mathrm{a}x}\cos \mathrm{b}x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\mathrm{a}x}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}(\mathrm{a}\cos \mathrm{b}x + \mathrm{b}\operatorname{sen}\mathrm{b}x) + \mathrm{C}$$
$$\int e^{\mathrm{a}x}\cos(\mathrm{c}+\mathrm{b}x)\mathrm{d}x = \frac{e^{\mathrm{a}x}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}[\mathrm{a}\operatorname{sen}(\mathrm{c}+\mathrm{b}x) - \mathrm{b}\cos(\mathrm{c}+\mathrm{b}x)] + \mathrm{C}$$

H Integrais Indefinidas Mais Comuns

Dadas as funções $u = f(x)$ e $v = g(x)$, as constantes a, c, m, n e a constante de integração C, apresentam-se as integrais de diversas funções na Tabela 10.

Nota: para obter as integrais das funções elementares, basta fazer $u = x$ *e* $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$*, como, por exemplo:*

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + \mathrm{C}$$

ou, então, definir u *e encontrar* $\mathrm{d}u$*, fazendo os devidos ajustes para não alterar a expressão original, como no exemplo:*

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$u = 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\cdot\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u &= \int 2\operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x \\
\therefore \int \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos(u) = -\frac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}$$

Tabela 9: Tabela de derivadas de funções hiperbólicas.

Função	*Derivada*	*Condição*
$y = \sinh u$	$y' = u' \cdot \cosh u$	
$y = \cosh u$	$y' = u' \cdot \sinh u$	
$y = \operatorname{tgh} u$	$y' = u' \cdot \operatorname{sech}^2 u$	
$y = \operatorname{sech} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sech} u \cdot \operatorname{tgh} u$	
$y = \operatorname{cossech} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cossech} u \cdot \operatorname{cotg} u$	
$y = \operatorname{cotg} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cossech}^2 u$	
$y = \arg\sinh u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	
$y = \arg\cosh u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$u > 1$
$y = \arg\operatorname{tgh} u$	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$	$\|u\| < 1$
$y = \arg\operatorname{sech} u$	$y' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$	$0 < v < 1$
$y = \arg\operatorname{cossech} u$	$y' = -\frac{u'}{\|u\|\sqrt{1+u^2}}$	$v \neq 0$
$y = \arg\operatorname{cotg} u$	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$	$\|u\| > 1$

1 Eletrostática

1.1 Lei de Coulomb

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2}\vec{\mathrm{a}}_{12} \tag{1}$$

1.2 Campo Elétrico

- Caso geral:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} \tag{2}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}\vec{\mathrm{a}}_R \tag{3}$$

- de distribuição contínua de cargas:

$$\vec{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon R^2}\vec{\mathrm{a}}_R \tag{4}$$

- de uma carga pontual na origem:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\vec{\mathrm{a}}_r \tag{5}$$

- de uma linha infinita em z carregada com ρ_L:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho}\vec{\mathrm{a}}_\rho \tag{6}$$

- de uma lâmina infinita carregada com ρ_S:

$$\vec{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon}\vec{\mathrm{a}}_N \tag{7}$$

Tabela 8: Tabela de derivadas de funções comuns.

Função	*Derivada*	*Condição*
$y = \mathrm{c}$	$y' = 0$	$\mathrm{c} \in \mathbb{R}$
$y = x$	$y' = 1$	
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	
$y = \mathrm{c}u$	$y' = \mathrm{c}u'$	$\mathrm{c} \in \mathbb{R}$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$y = \frac{\mathrm{c}}{v}$	$y' = -\frac{\mathrm{c}v'}{v^2}$	$\mathrm{c} \in \mathbb{R}$
$y = u^v$	$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$	$u > 0$
$y = u^{\mathrm{m}}$	$y' = \mathrm{m} \cdot u^{\mathrm{m}-1} \cdot u'$	$\mathrm{m} \in \mathbb{R}$
$y = \sqrt[\mathrm{n}]{u}$	$y' = \frac{u'}{\mathrm{n}\sqrt[\mathrm{n}]{u^{\mathrm{n}-1}}}$	$\mathrm{n} \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
$y = \mathrm{a}^u$	$y' = \mathrm{a}^u \cdot u' \cdot \ln \mathrm{a}$	$\mathrm{a} \in \mathbb{R},\ 0 < \mathrm{a} \neq 1$
$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$	
$y = \log_{\mathrm{a}} u$	$y' = \frac{u'}{u \cdot \ln \mathrm{a}} = \frac{u'}{u} \log_{\mathrm{a}} e$	$\mathrm{a} \in \mathbb{R},\ 0 < \mathrm{a} \neq 1$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	
$y = \mathrm{sen}\, u$	$y' = u' \cdot \cos u$	
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \mathrm{sen}\, u$	
$y = \mathrm{tg}\, u$	$y' = u' \cdot \sec^2 u$	
$y = \cot u$	$y' = -u' \cdot \mathrm{cossec}^2 u$	
$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \mathrm{tg}\, u$	
$y = \mathrm{cossec}\, u$	$y' = -u' \cdot \mathrm{cossec}\, u \cdot \cot u$	
$y = \mathrm{arcsen}\, u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	
$y = \mathrm{arctg}\, u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$	
$y = \mathrm{arccotg}\, u$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$	
$y = \mathrm{arcsec}\, u$	$y' = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	
$y = \mathrm{arccossec}\, u$	$y' = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	

- cartesianas para esféricas

$$P(x, y, z) \;\rightarrow\; P(r, \theta, \phi)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \phi &= \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

- esféricas para cartesianas

$$P(r, \theta, \phi) \;\rightarrow\; P(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} x &= r \,\mathrm{sen}\,\theta \,\cos\phi \\ y &= r \,\mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\phi \\ z &= r \,\cos\theta \end{aligned}$$

G Derivadas Mais Comuns

Dadas as funções $u = f(x)$ e $v = g(x)$ e as constantes a, c, m e n, a derivada de y, y', é apresentada na Tabela 8. Na Tabela 9 têm-se as derivadas quando y for uma função hiperbólica.

Nota: para obter as derivadas das funções elementares, basta fazer $u = x$ e $u' = 1$. Por exemplo:

$$y = \sqrt[n]{u} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

1.3 Densidade de Fluxo Elétrico

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \tag{8}$$

1.4 Fluxo Elétrico

- Que atravessa uma superfície:

$$\Psi = \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{9}$$

- que atravessa uma superfície fechada:

$$\Psi = \oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{10}$$

1.5 Teorema da Divergência

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{D} \mathrm{d}v \tag{11}$$

1.6 Lei de Gauss

- Forma integral:

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{env} = \Psi_{resultante} \tag{12}$$

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int \rho_v \mathrm{d}v \tag{13}$$

- forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \tag{14}$$

1.7 Potencial Elétrico

- Diferença de potencial elétrico:

$$V_{ba} = -\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = V_b - V_a \tag{15}$$

- potencial com referência no infinito:

$$V = \int \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon r} \tag{16}$$

- campo elétrico a partir de função potencial:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{17}$$

1.8 Densidade de Corrente

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{18}$$

1.9 Corrente

$$I = \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{19}$$

1.10 Resistência

$$R = \frac{-\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\int \sigma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}} \tag{20}$$

1.11 Lei de Joule

$$P = \int \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v \tag{21}$$

- volume
  - coordenadas cartesianas

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

  - coordenadas cilíndricas

$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

  - coordenadas esféricas

$$\mathrm{d}v = r^2 \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

F Transformação entre Sistemas de Coordenadas

- Cartesianas para cilíndricas

$$P(x,y,z) \;\rightarrow\; P(\rho,\phi,z)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}$$

- cilíndricas para cartesianas

$$P(\rho,\phi,z) \;\rightarrow\; P(x,y,z)$$

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

- área
  - coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1 &= \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_x \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2 &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_y \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3 &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{\mathrm{a}}_z \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_4 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1 = -\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_x \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_5 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2 = -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_y \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_6 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3 = -\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\vec{\mathrm{a}}_z
\end{aligned}$$

  - coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1 &= \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_\rho \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2 &= \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_\phi \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3 &= \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_z \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_4 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1 = -\rho\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_\rho \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_5 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2 = -\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_\phi \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_6 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3 = -\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_z
\end{aligned}$$

  - coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1 &= r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{a}}_r \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2 &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\theta \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3 &= r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\phi \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_4 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_1 = -r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{a}}_r \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_5 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_2 = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\theta \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_6 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}_3 = -r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\phi
\end{aligned}$$

1.12 Condições de Fronteira

- Entre par de dielétricos:

$$\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2} \tag{22}$$
$$\vec{\mathrm{a}}_{21}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_\mathrm{s} \tag{23}$$

- entre par de dielétricos, se $\rho_\mathrm{s} = 0$:

$$\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2} \tag{24}$$
$$\vec{D}_{N1} = \vec{D}_{N2} \tag{25}$$

- entre condutor e dielétrico:

$$\vec{E}_{T} = 0 \tag{26}$$
$$\vec{D}_{N} = \rho_\mathrm{s} \tag{27}$$

1.13 Equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \tag{28}$$

1.14 Equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \tag{29}$$

1.15 Capacitância

- Definição geral:

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \tag{30}$$

Tabela 1: Analogia entre campo eletrostático e magnetostático.

Campos elétricos	*Campos magnéticos*
$\vec{E}$ (V/m)	$\vec{H}$ (A/m)
$\vec{D}$ (C/m^2)	$\vec{B}$ (Wb/m^2)
Ψ (C)	Φ (Wb)
ϵ (F/m)	μ (H/m)
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$
$\Psi = \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$	$\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$
$\vec{F} = Q\vec{E}$ (N)	$\vec{F} = Q\vec{u} \times \vec{B}$ (N)
$W_E = \frac{1}{2}\int \vec{D} \cdot \vec{E}\mathrm{dv}$ (J)	$W_M = \frac{1}{2}\int \vec{B} \cdot \vec{H}\mathrm{dv}$ (J)

- para capacitor de placas paralelas, desprezando-se efeitos de borda:

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \tag{31}$$

1.16 Energia Potencial Eletrostática

$$W_E = \frac{1}{2}\int \vec{D} \cdot \vec{E}\mathrm{dv} = \frac{1}{2}\int \epsilon E^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2}CV^2 \tag{32}$$

2 Magnetostática

2.1 Analogia entre campo eletrostático e magnetostático

Vide Tabela 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 &= \mathrm{d}x\,\vec{\mathrm{a}}_x \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 &= \mathrm{d}y\,\vec{\mathrm{a}}_y \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_3 &= \mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_z \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_4 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 = -\mathrm{d}x\,\vec{\mathrm{a}}_x \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_5 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 = -\mathrm{d}y\,\vec{\mathrm{a}}_y \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_6 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_3 = -\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_z
\end{aligned}$$

– coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 &= \mathrm{d}\rho\,\vec{\mathrm{a}}_\rho \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 &= \rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\phi \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_3 &= \mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_z \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_4 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 = -\mathrm{d}\rho\,\vec{\mathrm{a}}_\rho \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_5 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 = -\rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\phi \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_6 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_3 = -\mathrm{d}z\,\vec{\mathrm{a}}_z
\end{aligned}$$

– coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 &= \mathrm{d}r\,\vec{\mathrm{a}}_r \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 &= r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{a}}_\theta \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_3 &= r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\phi \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_4 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 = -\mathrm{d}r\,\vec{\mathrm{a}}_r \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_5 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 = -r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{a}}_\theta \\
\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_6 &= -\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_3 = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{\mathrm{a}}_\phi
\end{aligned}$$

Tabela 6: Permeabilidade relativa para alguns materiais ferromagnéticos (note-se que a permeabilidade dependerá fortemente da pureza dos materiais; ainda, lembra-se que a curva $B \times H$ não é linear na grande maioria dos materiais ferromagnéticos).

Material	μ_r
Cobalto	250
Níquel	600
Ferro silício	3500
Ferro	5000
Mumetal	10^5
“Supermalloy”	10^6

Tabela 7: Condutividade e permissividade complexa de alguns materiais.

Material	σ(S/m)	ϵ'_r	ϵ''_r
Cobre	5.8×10^7	1	0
Água do mar	5	72	12
Vidro	10^{-12}	10	0.010

E Elementos Diferenciais

Nota: deve-se tomar muito cuidado e cautela ao se usar as relações seguintes; um esboço do elemento diferencial, conforme os eixos adotados para o problema, é altamente recomendado.

- Linha
  - coordenadas cartesianas

2.2 Lei de Biot-Savart

$$d\vec{H}_2 = \frac{I\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_1 \times \vec{\mathrm{a}}_{12}}{4\pi R_{12}^2} \tag{33}$$

2.3 Campo Magnético Resultante

- Em termos de elementos diferenciais:

$$\vec{H} = \int \frac{I\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} \times \vec{\mathrm{a}}_R}{4\pi R^2} \tag{34}$$

- em termos de densidade de corrente superficial:

$$\vec{H} = \int \frac{\vec{K}\mathrm{d}S \times \vec{\mathrm{a}}_R}{4\pi R^2} \tag{35}$$

- em termos de densidade de corrente volumétrica:

$$\vec{H} = \int \frac{\vec{J}\mathrm{d}v \times \vec{\mathrm{a}}_R}{4\pi R^2} \tag{36}$$

- devido a linha infinita de corrente:

$$\vec{H} = \frac{I\vec{\mathrm{a}}_\phi}{2\pi\rho} \tag{37}$$

- devido a um solenóide:

$$\vec{H} = \frac{NI}{h}\vec{\mathrm{a}}_z \tag{38}$$

- devido a uma lâmina infinita de corrente:

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{K} \times \vec{\mathrm{a}}_N \tag{39}$$

2.4 Lei Circuital de Ampère

- Forma integral:

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = I_{env} \tag{40}$$

- forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{41}$$

2.5 Teorema de Stokes

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = \int (\nabla \times \vec{H}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{42}$$

2.6 Densidade de Fluxo Magnético

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{43}$$

2.7 Fluxo Magnético

- Que atravessa uma superfície:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{44}$$

- que atravessa uma superfície fechada:

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0 \tag{45}$$

2.8 Lei de Gauss para Campos Magnéticos

Vide (45).

Tabela 4: Condutividade aproximada de alguns materiais (note-se que esta condutividade depende de impurezas, umidade e temperatura).

Material	σ(S/m)
Alumínio	3.8×10^7
Carbono	3×10^4
Cobre	5.8×10^7
Ouro	4.1×10^7
Grafite	7×10^7
Ferro	1×10^7
Chumbo	5×10^6
Nicrômio	1×10^6
Níquel	1.5×10^7
Prata	6.2×10^7
Solda	7×10^6
Aço inoxidável	1.1×10^6
Estanho	8.8×10^6
Tungstênio	1.8×10^7

Tabela 5: Propriedades para alguns dielétricos (note-se que para condutores, normalmente, $\epsilon_r = 1$).

Dielétrico	ϵ_r	E_{br}(V/m)	tg δ em 1MHz	σ(S/m)
Ar	1.0005	3×10^6	≈ 0	≈ 0
Vidro	10	30×10^6	0.004	$\approx 10^{-12}$
Gelo	4.2		0.12	10^{-15}
Mica	5.4	200×10^6	0.0003	
Silício (puro)	11.8		—-	4.4×10^{-4}
Solo (seco)	3–4		0.017	2×10^{-3}
Teflon	2.1	60×10^6	< 0.0002	10^{-15}
Água (destilada)	81		0.04	10^{-4}
Água do mar	72		0.9	5

Tabela 3: Constantes físicas.

Constante	Valor	Unidade
ϵ_0	$8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}$	F/m
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m
η_0	$120\pi \approx 377$	Ω
q	-1.602×10^{-19}	C
c	2.998×10^{8}	m/s
g	9.78	$\mathrm{m/s^2}$
h	6.63×10^{-34}	J·s
k	1.38×10^{-23}	J/K
N_A	6.02×10^{23}	átomos/mol

C Conversões

$$1\ \mathrm{Np} = 8.686\ \mathrm{dB}$$

D Propriedades de Alguns Materiais

Nas tabelas 4, 5, 6 e 7, listam-se propriedades de alguns materiais.

2.9 Equações de Maxwell para Campos Estáticos

- Forma integral:

$$\begin{aligned} \oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} &= Q_{env} \\ \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} &= 0 \\ \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} &= 0 \\ \oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} &= I_{env} \end{aligned}$$

- forma diferencial:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_v \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \end{aligned}$$

2.10 Força

- Força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \tag{46}$$

- força de campo magnético sobre linha de corrente:

$$\vec{F}_{12} = \int I_2 \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}_2 \times \vec{B}_1 \tag{47}$$

2.11 Momento de Dipolo

$$\vec{m} = NIS\vec{\mathrm{a}}_N \tag{48}$$

2.12 Torque

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{49}$$

2.13 Condições de Fronteira

$$\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2} \tag{50}$$
$$\vec{a}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \tag{51}$$

2.14 Indutância

- Definição geral:

$$L = \frac{\lambda}{I} = N\frac{\Phi_{tot}}{I} \tag{52}$$

- para uma bobina com núcleo:

$$L = \frac{\mu N^2 \pi a^2}{h} \tag{53}$$

- para um cabo coaxial:

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \tag{54}$$

2.15 Indutância Mútua

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 \tag{55}$$

2.16 Energia Magnetostática

$$W_M = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \mathrm{d}v = \frac{1}{2} L I^2$$

– coordenadas esféricas

$$\nabla \times \vec{A} =$$
$$\frac{1}{r\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{\partial(\mathrm{sen}\,\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\vec{a}_r +$$
$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{a}_\theta +$$
$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(A_r)}{\partial\theta}\right]\vec{a}_\phi$$

- laplaciano:
  – coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

  – coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

  – coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V =$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}$$

B Constantes

A Tabela 3 contém constantes físicas de interesse em Eletromagnetismo.

- gradiente:
  - coordenadas cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

  - coordenadas cilíndricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{a}_z$$

  - coordenadas esféricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{a}_\theta + \frac{1}{r\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{a}_\phi$$

- rotacional:
  - coordenadas cartesianas

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{a}_z$$

  - coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\vec{a}_\rho + \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\vec{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\vec{a}_z$$

2.17 Circuitos Magnéticos

- Analogia entre circuitos elétricos e magnéticos: vide Tabela 2

Tabela 2: Analogia entre circuitos elétricos e magnéticos.

Circuitos elétricos			Circuitos magnéticos
Força eletromotriz (V)	V	V_m	Força magnetomotriz (Aesp)
Corrente (A)	I	Φ	Fluxo magnético (Wb)
Resistência (Ω)	R	$\Re$	Relutância (Aesp/Wb)
Condutividade (S/m)	σ	μ	Permeabilidade (H/m)
Lei de Ohm	$V = RI$	$V_m = \Re\Phi$	Lei de Ohm para circ. mag.

3 Campos Dinâmicos

3.1 Equação da Continuidade da Corrente

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{56}$$

3.2 Variação da Densidade de Carga com o Tempo

$$\rho_v = \rho_0 e^{-t/\tau} \tag{57}$$

3.3 Tempo de Relaxação

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \tag{58}$$

3.4 Lei de Faraday

- Forma geral:

$$V_{\text{fem}} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} \tag{59}$$

- para circuito de uma única espira:

$$V_{\text{fem}} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{60}$$

- forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{61}$$

- para circuito com movimento e campo magnético constante:

$$V_{\text{fem}} = \oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} \tag{62}$$

3.5 Densidade de Corrente de Dispersão (Deslocamento)

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{63}$$

A Definições Gerais

- Vetores em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{cart} &= A_x\vec{\mathrm{a}}_x + A_y\vec{\mathrm{a}}_y + A_z\vec{\mathrm{a}}_z \\ \vec{A}_{cil} &= A_\rho\vec{\mathrm{a}}_\rho + A_\theta\vec{\mathrm{a}}_\theta + A_z\vec{\mathrm{a}}_z \\ \vec{A}_{esf} &= A_r\vec{\mathrm{a}}_r + A_\theta\vec{\mathrm{a}}_\theta + A_\phi\vec{\mathrm{a}}_\phi \end{aligned}$$

- produto Escalar (em coordenadas cartesianas):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

- operador Nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathrm{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathrm{a}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathrm{a}}_z$$

- divergência:
  - coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

  - coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

  - coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial_\phi}$$

5.8 Taxa de Onda Estacionária de Tensão

$$ROTE = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \tag{150}$$

5.9 Impedância de Entrada

- Para o caso geral:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \mathrm{tgh}\,(\gamma \ell)}{Z_0 + Z_L \mathrm{tgh}\,(\gamma \ell)} \tag{151}$$

- para linha sem perdas:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \mathrm{tg}\,(\beta \ell)}{Z_0 + jZ_L \mathrm{tg}\,(\beta \ell)} \tag{152}$$

3.6 Equações de Maxwell (gerais)

- Forma integral:

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = Q_{env} \tag{64}$$
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = 0 \tag{65}$$
$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{66}$$
$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = \int \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{67}$$

- forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \tag{68}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{69}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{70}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{71}$$

3.7 Representações de Campo Harmônico

- No domínio do tempo:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z)\cos(\omega t + \phi) \tag{72}$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}(x,y,z)\cos(\omega t + \phi) \tag{73}$$

- no domínio da frequência:

$$\vec{E}_s = \vec{E}(x,y,z)e^{j\phi} \tag{74}$$
$$\vec{H}_s = \vec{H}(x,y,z)e^{j\phi} \tag{75}$$

- conversão do domínio da frequência para o domínio do tempo:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\vec{E}_s e^{j\omega t}] \tag{76}$$
$$\vec{H}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\vec{H}_s e^{j\omega t}] \tag{77}$$

3.8 Equações de Maxwell na Forma Fasorial (diferencial)

$$\nabla \cdot \vec{D}_s = \rho_{vs} \tag{78}$$
$$\nabla \cdot \vec{B}_s = 0 \tag{79}$$
$$\nabla \times \vec{E}_s = -j\omega \vec{B}_s \tag{80}$$
$$\nabla \times \vec{H}_s = \vec{J}_s + j\omega \vec{D}_s \tag{81}$$

3.9 Relações Constitutivas

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

3.10 Equações Fundamentais do Eletromagnetismo

São dadas por:

- Equações de Maxwell
  - Lei de Gauss (na página 2)
  - Lei de Gauss para Campos Magnéticos (na página 7)

5.5 Impedância Característica

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \tag{143}$$

5.6 Potência

- Potência média em linha sem perdas:

$$P^+_{ave}(z) = \frac{(V_0^+)^2}{2Z_0} \tag{144}$$

- ganho de potência:

$$G_{(\mathrm{dB})} = 10 \log \left(\frac{P_{out}}{P_{in}} \right) \tag{145}$$

- relação entre decibéis e neper:

$$1\mathrm{Np} = 8,686\mathrm{dB} \tag{146}$$

5.7 Coeficiente de Reflexão

- Na carga:

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{147}$$

- em qualquer ponto:

$$\Gamma = \frac{V_0^- e^{+\gamma z}}{V_0^+ e^{-\gamma z}} = \Gamma_L e^{+2\gamma z} \tag{148}$$

- exemplo $\rightarrow \Gamma$ em $z = -\ell$:

$$\Gamma = \Gamma_L e^{-2\gamma \ell} \tag{149}$$

- no domínio da frequência (para ondas harmônicas):

$$\frac{\mathrm{d}V_s(z)}{\mathrm{d}z} = -(R' + j\omega L')I_s(z) \quad (134)$$

$$\frac{\mathrm{d}I_s(z)}{\mathrm{d}z} = -(G' + j\omega C')V_s(z) \quad (135)$$

5.3 Equações de Onda Harmônicas no Tempo

- No domínio do tempo:

$$v(z,t) = V_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + V_0^- e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \quad (136)$$

$$i(z,t) = I_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + I_0^- e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \quad (137)$$

- no domínio da frequência:

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \quad (138)$$

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z} \quad (139)$$

ou

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z} \quad (140)$$

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + I_0^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z} \quad (141)$$

5.4 Constantes de Propagação, Atenuação e de Fase

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad (142)$$

  - Lei de Faraday (na página 11)
  - Lei Circuital de Ampère (na página 7)

- Equação da Força de Lorentz
- Equação da Continuidade da Corrente
- Relações Constitutivas

4 Ondas Planas

4.1 Equações de Onda de Helmholtz

- No domínio do tempo:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (82)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\sigma\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (83)$$

- no domínio da frequência (campos harmônicos):

$$\nabla^2 \vec{E}_s - \gamma^2 \vec{E}_s = 0 \quad (84)$$

$$\nabla^2 \vec{H}_s - \gamma^2 \vec{H}_s = 0 \quad (85)$$

- solução das equações de onda de Helmholtz, para caso geral:

$$\vec{E}(z,t) = E_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_x \quad (86)$$

$$+E_0^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)\vec{a}_x \quad (87)$$

$$\vec{H}(z,t) = H_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\vec{a}_y \quad (88)$$

$$+H_0^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z)\vec{a}_y \quad (89)$$

4.2 Relação entre Ondas Propagantes (em fasores)

$$\vec{H}_s = \frac{1}{\eta}\vec{a}_\rho \times \vec{E}_s \quad (90)$$

$$\vec{E}_s = -\eta\vec{a}_\rho \times \vec{H}_s \quad (91)$$

4.3 Constantes e Impedância Intrínseca

4.3.1 Caso geral

- Constante de propagação:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta \quad (92)$$

- constante de atenuação:

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right)} \quad (93)$$

- constante de fase:

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right)} \quad (94)$$

- impedância intrínseca:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (95)$$

5 Linhas de Transmissão

5.1 Parâmetros Distribuídos

- Para cabos coaxiais:

$$R' = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma_c}} \quad (124)$$

$$L' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (125)$$

$$G' = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln(b/a)} \quad (126)$$

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (127)$$

- para cabos de condutores gêmeos:

$$R' = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{f\mu}{\sigma_c}} \quad (128)$$

$$L' = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\frac{d}{2a}\right) \quad (129)$$

$$G' = \frac{\pi\sigma_d}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (130)$$

$$C' = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)} \quad (131)$$

5.2 Equações Gerais de Linha de Transmissão

- No domínio do tempo:

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = i(z,t)R' + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (132)$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = v(z,t)G' + C'\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad (133)$$

4.13.2 Características da Incidência Oblíqua

- Coeficiente de reflexão:

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{117}$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2\cos\theta_t - \eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \tag{118}$$

- coefiente de transmissão:

$$\tau_{TE} = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \tag{119}$$

$$\tau_{TM} = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_t + \eta_1\cos\theta_i} \tag{120}$$

- Leis de Snell da reflexão e da refração:

$$\theta_i = \theta_r \tag{121}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_i} \tag{122}$$

- ângulo de Brewster para polarização TM:

$$\operatorname{sen}\theta_{BA} = \sqrt{\frac{\beta_2^2(\eta_2^2-\eta_1^2)}{\eta_2^2\beta_1^2-\eta_1^2\beta_2^2}} \tag{123}$$

4.3.2 Dielétricos com baixas perdas ($\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$)

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{96}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{97}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \tag{98}$$

4.3.3 Bons condutores ($\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$)

$$\alpha \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{99}$$

$$\beta \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{100}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45^\circ} \approx \sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma}e^{j45^\circ} \tag{101}$$

4.4 Velocidade de Propagação

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{102}$$

4.5 Comprimento de Onda

$$\lambda = \frac{u_p}{f} \tag{103}$$

Nota: não confundir o símbolo λ do comprimento de onda com o do fluxo concatenado na subseção 2.14, pois referem-se a grandezas distintas.

4.6 Permissividade Complexa

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \tag{104}$$

4.7 Condutividade Efetiva

$$\sigma_{ef} = \sigma + \omega\epsilon'' \tag{105}$$

4.8 Tangente de Perdas

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sigma + \omega\epsilon''}{\omega\epsilon'} = \frac{\sigma_{ef}}{\omega\epsilon'} \tag{106}$$

Nota: não confundir o símbolo δ da tangente de perdas com o da profundidade pelicular na subseção 4.9, pois referem-se a grandezas distintas.

4.9 Efeito Pelicular (em bons condutores)

- Profundidade pelicular:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \tag{107}$$

- resistência pelicular:

$$R_{pelicular} = \frac{1}{\sigma\delta\left(1 - e^{-t/\delta}\right)} \tag{108}$$

4.10 Teorema de Poynting

$$\oint \vec{E} \times \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = -\int \vec{J} \cdot \vec{E}\mathrm{dv} - \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{2}\epsilon E^2 \mathrm{dv} - \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{2}\mu H^2 \mathrm{dv} \tag{109}$$

4.11 Vetor de Poynting

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{110}$$

4.12 Potência

- Potência média temporal:

$$\vec{P}_{ave} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E_s} \times \vec{H_s}^*] \tag{111}$$

- quantidade de potência que atravessa uma superfície:

$$P = \int \vec{P}_{ave} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} \tag{112}$$

4.13 Incidência de Um Meio para Outro

4.13.1 Características da Incidência Normal

- Coeficiente de reflexão:

$$\Gamma = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{113}$$

- coeficiente de transmissão:

$$\tau = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{114}$$

- relação entre os coeficientes de reflexão e transmissão:

$$\tau = 1 + \Gamma \tag{115}$$

- taxa de onda estacionária (ROE, COE, TOE, VSWR):

$$ROE = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{116}$$