Matlabで計算するロケットフライトシミュレータ

稲川貴大

2014年5月4日

ロケットのフライトシミュレータ（ロケットの飛翔を軌道についてシミュレーションすること）は6自由度の並進と回転の運動方程式を解くことである。そのため常微分方程式で記述できる。Matlabなどの数値計算ソフトではode45コマンドのように簡単に常微分方程式が解けるようになっている。Matlab（とAerospace Toolbox）を購入した記念に簡単なロケットの飛翔シミュレータを作ってみる。

1　座標

誘導・航法の解析には慣性座標、制御・安定性の解析には機体座標系（運動座標系）においての運動方程式・状態方程式が用いられる。フライトシミュレータでは慣性座標系で考えていく。

簡単のために地上に固定した座標系を慣性座標系とする。正確を期すならば、地球中心の慣性座標系（ECI座標系）を用い、地球中心回転座標系（ECEF座標系）や射点固定座標系は運動座標系になり、コリオリ力などを考慮する必要があるが、ここでは考えない。慣性座標系と運動座標系では見かけの力（慣性力）分だけ結果が異なるので注意。

2　クォータニオン

2.1　クォータニオンの定義

座標変換はクォータニオンを用いて表現する。座標変換、つまりクォータニオンが姿勢を表す。

$$\tilde{q} = \left\{ \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right\} \tag{1}$$

ここで θ は回転角度[rad]、x, y, z は回転方向を表す方向ベクトル。

2.2　共役クォータニオン

$$\tilde{q}^* = \left\{ \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} \right\}^* = \left\{ \begin{array}{c} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \cos\frac{-\theta}{2} \\ \sin\frac{-\theta}{2}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right\} \tag{2}$$

ということで、共役クォータニオンは逆回転を表す。

2.3 クォータニオン積

$$
\begin{aligned}
\tilde{q}_a\tilde{q}_b &= \left\{\begin{array}{c} q_{a0} \\ q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} q_{b0} \\ q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{array}\right\} \\
&= \left[\begin{array}{cccc} q_{a0} & -q_{a1} & -q_{a2} & -q_{a3} \\ q_{a1} & q_{a0} & -q_{a3} & q_{a2} \\ q_{a2} & q_{a3} & q_{a0} & -q_{a1} \\ q_{a3} & -q_{a2} & q_{a1} & q_{a0} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} q_{b0} \\ q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccc} q_{b0} & -q_{b1} & -q_{b2} & -q_{b3} \\ q_{b1} & q_{b0} & q_{b3} & -q_{b2} \\ q_{b2} & -q_{b3} & q_{b0} & q_{b1} \\ q_{b3} & q_{b2} & -q_{b1} & q_{b0} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} q_{a0} \\ q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{3}
$$

クォータニオン積は可換ではない。

2.4 ロケット機体の回転と座標変換

ある 3 次元ベクトル（例えばロケットに働く推力や空気力などの力）を座標変換したい。機体座標系で表した力のベクトルを射点座標系（地上固定）で表現する。

機体座標系での 3 次元ベクトル $\vec{p}_b = \left[\begin{array}{c} p_{bx} \\ p_{by} \\ p_{bz} \end{array}\right]$ を用いて $\tilde{p}_b = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \vec{p}_b \end{array}\right\}$ とおくと、機体座標系から地上座標系の座標変換を表すクォータニオン $\tilde{q}_b^h$ を用いて、地上座標系での 3 次元ベクトル $\vec{q}_h$ は

$$
\tilde{p}_h = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \vec{p}_h \end{array}\right\} = \tilde{q}_b^{h*}\tilde{p}_b\tilde{q}_b^h \tag{4}
$$

2.5 座標変換の合成

連続で座標変換をする必要がある。例えば、機体座標系から地上座標系、地球中心座標変換（ECEF 座標系）と間に座標系を挟んで変換することがある。変換前の 3 次元ベクトル $\vec{p}_b$、変換後の 3 次元ベクトル $\vec{p}_{ECEF}$ とし、1 個目の座標変換 $\tilde{q}_1$ と 2 個めの座標変換 $\tilde{q}_2$ とすると、

$$
\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \vec{p}_b \end{array}\right\} = \tilde{q}_1^*\tilde{q}_2^*\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \vec{p}_{ECEF} \end{array}\right\}\tilde{q}_1\tilde{q}_2 \tag{5}
$$

したがって、

$$
\tilde{q}_{12} = \tilde{q}_1\tilde{q}_2 \tag{6}
$$

とすることによって、座標変換の合成を行うことが出来る。

2.6　クォータニオンの時間微分

地上座標系から機体座標系へのクォータニオンなどは姿勢を表す。シミュレータの常微分方程式では姿勢の時間変化を記述する必要がある。つまり、クォータニオンの時間微分がわかれば良い。

水平座標系から機体座標系への座標変換を表すクォータニオンを考える（機体の角速度 ω_b は水平座標系から見た機体座標系の変化なのでこのクォータニオンを考える）。時刻 t のクォータニオン $\tilde{q}(t)$ が Δt 後に $\tilde{q}(t+\Delta t)$ になったとすると（6）より

$$\tilde{q}_h^b(t+\Delta t) = \tilde{q}_h^b(t)\tilde{q}_h^b(\Delta t) \tag{7}$$

ここで

$$\tilde{q}_h^b(\Delta t) = \cos\frac{\Delta\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\Delta\theta}{2} \approx 1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{n}\Delta\theta \tag{8}$$

これらより

$$\frac{\tilde{q}(t+\Delta t) - \tilde{q}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\tilde{q}(t)\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\boldsymbol{n} \tag{9}$$

$$\frac{d\tilde{q}_h^b}{dt} = \frac{1}{2}\tilde{q}_h^b\tilde{\omega}_b \tag{10}$$

（4）より

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_b^h = \frac{d}{dt}\tilde{q}_h^{b*} = \frac{1}{2}\left(\tilde{q}_h^b\tilde{\omega}_b\right)^* = -\frac{1}{2}\tilde{\omega}_b\tilde{q}_h^{b*} = -\frac{1}{2}\tilde{\omega}_b\tilde{q}_b^h \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_b^h = -\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix} \end{matrix}\right\}\tilde{q}_b^h \tag{12}$$

ここで、$\begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix}$ は機体の回転角速度を表す。

機体座標系から地上座標系への座標変換のクォータニオンを $\tilde{q}_b^h$ とし、機体の回転角速度を $\begin{bmatrix} \omega_{bx} \\ \omega_{by} \\ \omega_{bz} \end{bmatrix}$ とすると、プログラム表示に近い離散時間表示（時間間隔 Δt）にすると、（航空宇宙工学便覧と比較するとクォータニオンが水平座標→機体座標と機体座標→水平座標の違いがある）

$$\tilde{q}_{b\,k}^h = \begin{bmatrix} q_{b\,k-1\,0}^h \\ q_{b\,k-1\,1}^h \\ q_{b\,k-1\,2}^h \\ q_{b\,k-1\,3}^h \end{bmatrix} - 0.5 \times \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{b\,k-1\,0}^h \\ q_{b\,k-1\,1}^h \\ q_{b\,k-1\,2}^h \\ q_{b\,k-1\,3}^h \end{bmatrix} \times \Delta t \tag{13}$$

3　座標

3.1　局地水平座標系

地上座標系のような局地水平座標系を表すのは XYZ 軸の順番で NED（North-East-Down、航空機の座標系に使用）や ENU（East-North-Up、地図に使用) があるが、航空宇宙工学便覧にしたがって、UEN（Up-East-North）を用いる。

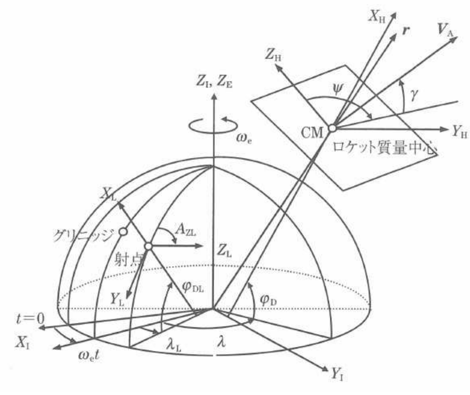

図 1　ロケットの座標系

上図は航空宇宙工学便覧からの引用

3.2　機体座標系

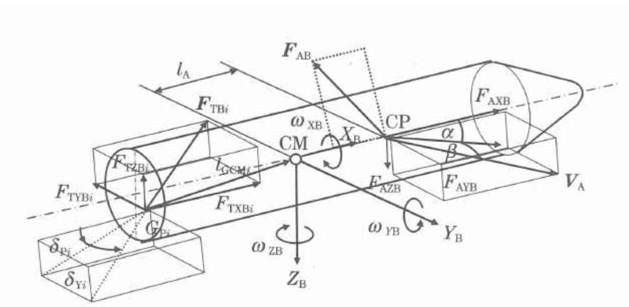

図 2　ロケットの座標系と働く力

上図は航空宇宙工学便覧からの引用
迎え角の表記は違う。迎え角 α は V_A と機体軸のなす角。

機体は

	座標名・記号	原点	備考
慣性座標系	WGS84 座標系 BLH		ϕ：緯度 [deg] λ：経度 [deg] h：高度 [m]
	地球中心慣性座標系 ECEF (Earth-Center Earth-fix)	地球中心	X_{ECEF}：緯度経度 0 度方向 Z_{ECEF}：地球自転軸方向 Y_{ECEF}：右手直交系
	射点中心慣性座標系 LCI (Launcher Center Inertia)	射点中心	X_L：真上方向 Y_L：東方向 Z_L：北方向
運動座標系	機体座標系 B （Body）	機体質量中心	X_B：ロール軸（機軸方向） Y_B：ピッチ軸（頭上げ方向） Z_B：ヨー軸（右手直交系）
	局地水平座標系 H (Horizon)	機体質量中心	X_H：真上方向 Y_H：東方向 Z_H：北方向
	速度座標系 A (Air)	機体質量中心	X_A：対気速度ベクトル V_A 方向 Y_A：$Y_A = V_A \times X_B$ Z_A：右手直交系

航空宇宙工学便覧に比べて、速度座標系の定義の仕方は変えている。

3.3　座標変換

4　運動方程式

機体に働く外力とモーメントを求めて運動座標系を立てることによってシミュレーション可能になる。

4.1　機体に働く外力

4.1.1　推力

真空中の推力 $F_{Tvac}[N]$、エンジンスロート面積 $A_t[m^2]$、大気圧（高度の関数）$P(h)[Pa]$ として、推力 $F_T[N]$ は

$$F_T = F_{Tvac} - A_t P(h) \tag{14}$$

F_{Tvac} は時間の関数として与えられる。（推力履歴）

エンジンは一つだとして、ジンバルのピッチ方向角度 δ_P、ヨー方向角度 δ_Y として機体座標系での推力 F_{TB} は

$$F_{TB} = \begin{bmatrix} F_{TXB} \\ F_{TYB} \\ F_{TZB} \end{bmatrix} = F_T \times \begin{bmatrix} \cos\delta_Y \cos\delta_P \\ -\sin\delta_Y \\ -\cos\delta_Y \sin\delta_P \end{bmatrix} \tag{15}$$

4.1.2 空気力

■速度ベクトルと風 水平座標系から見た機体の速度 $\vec{V}_H$ として、対気速度 $\vec{V}_A$ は風ベクトル $\vec{V}_{WH}$ を用いて、

$$\vec{V}_A = \vec{V}_H - \vec{V}_{WH} \tag{16}$$

■空気力と座標変換 速度ベクトル V_A を用いて速度座標系での空気力が

$$F_{AA} = \begin{bmatrix} -F_D \\ 0 \\ -F_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_D \cdot \frac{1}{2}\rho(h)V_A^2 S \\ 0 \\ -C_L \cdot \frac{1}{2}\rho(h)V_A^2 S \end{bmatrix} \tag{17}$$

となるように速度座標系を取る。抗力係数・揚力係数は迎え角・マッハ数の関数。$C_D = f(\alpha, M)$。

とすれば、機体座標系から見た空気力は, 方向余弦行列（速度座標系から機体座標系への座標変換行列としての方向余弦行列）を用いて、

$$F_{AB} = D_A^B F_{AA} = D_A^B \begin{bmatrix} -F_D \\ 0 \\ -F_L \end{bmatrix} \tag{18}$$

ここで D_A^B は水平座標系から見た機体の速度座標系への方向余弦行列。（16）より、機体から見た速度ベクトル $\vec{V}_{AB}$ は

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{V}_{AB} \end{array} \right\} = \tilde{q}_h^{b*} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{V}_A \end{array} \right\} \tilde{q}_h^b = \tilde{q}_b^h \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{V}_A \end{array} \right\} \tilde{q}_b^{h*} \tag{19}$$

$\vec{V}_{AB}$ と機体座標系、速度座標系の定義から、D_A^B が求まる。機体から見た速度座標系の単位ベクトル $[\vec{x}_{AB}\ \vec{y}_{AB}\ \vec{z}_{AB}]$ は

$$\vec{x}_{AB} = \frac{\vec{V}_{AB}}{|\vec{V}_{AB}|},\ \vec{y}_{AB} = \frac{\vec{x}_{AB} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left| \vec{x}_{AB} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right|},\ \vec{z}_{AB} = \vec{x}_{AB} \times \vec{y}_{AB} \tag{20}$$

ここで

$$\alpha = \arcsin\left(\left| \vec{x}_{AB} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right| \right) [rad] \tag{21}$$

したがって

$$D_A^B = \begin{bmatrix} \vec{x}_{AB} & \vec{y}_{AB} & \vec{z}_{AB} \end{bmatrix}$$

4.1.3　重力

局地水平座標系においての重力 $\vec{F}_{GH}$ は重力を緯度と高度の関数として

$$\vec{F}_{GH} = m\vec{g}_H = m\begin{bmatrix} -g(h,\phi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Matlab（Aerospace Toolbox）でのコマンドは以下になる

g = gravitywgs84(h, lat)

4.2　モーメント

ジンバル点からロケットの質量中心までの距離ベクトル $\vec{l}_{GCM}$、質量中心から空力中心までの距離ベクトル $\vec{l}_A$

■推力モーメント

$$\vec{M}_T = \vec{F}_{TB} \times \vec{l}_{GCM} \tag{23}$$

■空気力モーメント

$$\vec{M}_A = -\vec{F}_{AB} \times \vec{l}_A \tag{24}$$

■重力モーメント　重力ベクトルは機体の重心を通るベクトルなのでモーメントは発生しない。

4.3　並進の運動方程式

最初に述べたように慣性座標系で並進の運動方程式を作っていく。

■位置に関する運動方程式

$$\frac{d\vec{r}_L}{dt} = \vec{V}_H \tag{25}$$

■速度に関する運動方程式　機体に働く力は座標変換、慣性座標系から働く力（重力）は座標変換無しで、力として働く。

$$\frac{d\vec{V}_H}{dt} = \frac{1}{m}\left(\tilde{q}_B^{H*}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \vec{F}_{TB}+\vec{F}_{AB} \end{array}\right\}\tilde{q}_B^H + \vec{F}_{GH}\right) \tag{26}$$

4.4　回転の運動方程式

■姿勢の運動方程式　（12）より

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}_B^H = -\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \begin{bmatrix} \omega_{XB} \\ \omega_{YB} \\ \omega_{ZB} \end{bmatrix} \end{array}\right\}\tilde{q}_B^H \tag{27}$$

■角速度の運動方程式　回転の運動方程式については機体座標系での運動方程式にする。モーメントが機体座標系で働くためである。機体座標系は運動座標系なので、みかけの力があることに注意する。

一般に慣性座標系での回転の運動方程式は、角運動量 L、モーメント M、慣性テンソル I、剛体の角速度 ω として

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{28}$$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

である。ここで、任意のベクトル $\vec{A}$ について、慣性座標系と運動座標系の微分の違いは下記で表せられる。

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{29}$$

ここで、$\vec{\omega}$ は座標系自身の回転角速度、$\frac{d}{dt}$ は慣性座標系からみた時間変化、$\frac{\delta}{\delta t}$ は運動座標系からみた時間変化。

したがって、

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{\delta L}{\delta t} + \vec{\omega}_B \times \vec{L} \\ &= \dot{I} \cdot \vec{\omega}_B + I \cdot \dot{\omega}_B + \vec{\omega}_B \times I \cdot \vec{\omega_B} \end{aligned} \tag{30}$$

ロケットは軸対称で慣性乗積を無視できるので、成分表示をすると

$$\begin{bmatrix} M_{XB} \\ M_{YB} \\ M_{ZB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX}\dot{\omega}_{XB} + \dot{I}_{XX}\omega_{XB} + (I_{ZZ} - I_{YY})\omega_{YB}\omega_{ZB} \\ I_{YY}\dot{\omega}_{YB} + \dot{I}_{YY}\omega_{YB} + (I_{XX} - I_{ZZ})\omega_{ZB}\omega_{XB} \\ I_{ZZ}\dot{\omega}_{ZB} + \dot{I}_{ZZ}\omega_{ZB} + (I_{YY} - I_{XX})\omega_{XB}\omega_{YB} \end{bmatrix} \tag{31}$$

$\dot{I}_{XX}, \dot{I}_{YY}, \dot{I}_{ZZ}$ は機体質量の時間変化にともなう慣性モーメントの変化率である。これを $\dot{\omega}$ に関する式に書き直して、回転の運動方程式とする。

5　常微分方程式

6 自由度の運動を常微分方程式の形で記述するには、3 軸の並進運動（位置とその微分値の速度）と回転運動（姿勢角とその微分値の角速度）を組み合わせる。

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = f(\vec{x}, t) \tag{32}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \text{位置}\ (x, y, z) \\ \text{速度}\ (v_x, v_y v_z) \\ \text{姿勢}\ (q_0, q_1, q_2, q_3) \\ \text{角速度}\ (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \end{bmatrix} \tag{33}$$

5.1　微分方程式の数値解法

普通は 4 次の Runge-Kutta などを使うが、せっかく matlab 系を使うので、matlab の関数を使って高速化してみる。

5.2　stiff な微分方程式

常微分方程式には stiff と non-stiff という概念がある。日本語では微分方程式の硬さという。急な変化があるようなものは硬い（stiff）という認識でいれば良さそう。飛翔体のシミュレーションは stiff な微分方程式である。

matlab（octave）では硬い微分方程式は ode23s という関数で解ける。

```
[T, X] = ode23s(@rocket_dynamics, [0 17], x0, options);
```

5.3　matlab の ODE

odeset を用いて誤差許容プロパティを設定しないと計算が極端に遅くなる。

```
options = odeset('RelTol', 1e-3, 'AbsTol', AbsTol);
```

のようにする。