第22卷 第2期　　力学学报　　Vol. 22, No. 2
1990年3月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Mar., 1990

关于经典非完整力学[1)]

郭仲衡　高普云[2)]
(北京大学数学系)

提要　对一阶非线性非完整系统，本文证明了，d-δ 运算是可交换的，并且不必附加 Appell-Четаев 条件推导出运动方程．这个运动方程和“Vacco 动力学”方程一致．

关键词　非完整力学、d-δ 运算的交换性、Appell-Четаев 条件、Vacco 动力学．

自从 Hertz 在 1894 年明确提出非完整约束的概念以来的 90 余年里，经典非完整力学已逐渐成为分析力学的一个分支，越来越多的作者讨论它，并建立了各种形式的运动方程．但下述两个基本问题至今未获解决，仍在争论中：(1) 微分运算 d 和变分运算 δ 是否可交换？(2) 对线性非完整约束自动成立的 Appell-Четаев 虚位移条件是否对非线性非完整约束也适用？关于这两个问题，众说纷纭．梅凤翔在 [1,2] 中作了如下概括：“**历史上，对交换关系的形式有两种观点．一种认为 d-δ 总可以交换，不论完整与否；另一种则认为 d-δ 的交换性仅对完整系统才成立．两种观点争论甚烈，但后一观点得到更多支持**”；“**虽然没有人明确提出 Appell-Четаев 定义的适用性问题，但人们在研究非线性非完整系统动力学时，总是事先小心地表明研究 Четаев 型非线性非完整约束．**”也有作者研究“**非 Четаев 型非完整系统**”，其做法是用别的函数代替在 Четаев 条件中的约束函数的偏导数，即用新的条件代替 Четаев 条件．仍然属于“**要对虚位移施加额外限制**”的范畴．这些作者也未关心到：一般地，这些是什么样的函数？它们与系统的约束又有什么关系？

这两个基本问题的不确定性使这个力学分支蒙上了一层阴影，处于不能令人满意的状态．

本文仅就一阶非线性非完整力学系统发表一些看法：d-δ 运算可交换；跳出“**要对虚位移施加限制**”的框框．首先，我们将严格证明

定理　对于一阶非线性非完整系统，d-δ 运算可以交换．

因此，交换性并不是观点问题，而是逻辑推理的结论．定理的证明需要两个引理．

设 $q_1, \cdots, q_n$ 是系统的广义坐标，系统有 m 个独立的一阶非线性非完整约束：

$$f_i(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{1}$$

假设，每个 f_i 具有以后运算所要求的各阶连续偏导数．

---

1) 高等学校科学技术基金资助项目．
2) 现在湘潭师范学院数学系．
本文为编委梅凤翔推荐．
本文于 1988 年 11 月 25 日收到．

引理 1(参阅[3]) 设在区间 $[a, b]$ 上的连续可微函数 $p(t)$ 是独立变分变量，则

$$\frac{d}{dt}\delta p(t)=\delta\dot{p}(t) \tag{2}$$

证明 显然，只需证 $\forall t\in[a, b]$，(2)式在 t 点附近成立即可. 如图 1，$y=p(t)$ 和 $y=p(t)+\delta p(t)$ 是两条充分接近的曲线，即至少有一阶接近度. 设 A 点的纵坐标为 $p(t)$，则 A' 点的纵坐标是 $p(t)+\delta p(t)$. 应用 Taylor 公式，B 点的纵坐标可表为

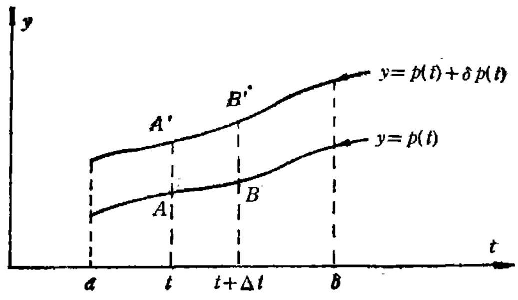

图 1

$$B: p(t+\Delta t)=p(t)+\dot{p}(t)\Delta t+O(|\Delta t|^2).$$

计算 B' 点的纵坐标有两种方法. 其一是从 B 点开始，此时

$$\begin{aligned}B': p(t+\Delta t)+\delta p(t+\Delta t)&=p(t)+\dot{p}(t)\Delta t+O(|\Delta t|^2)\\&\quad+\delta(p(t)+\dot{p}(t)\Delta t+O(|\Delta t|^2))\\&=p(t)+\dot{p}(t)\Delta t+\delta p(t)\\&\quad+\delta\dot{p}(t)\Delta t+O(|\Delta t|^2),\end{aligned} \tag{3}$$

这里把 Δt 看作确定的. 另一方法是从 A' 点开始. 此时，应用 Taylor 公式，有

$$\begin{aligned}B': p(t)+\delta p(t)+\frac{d}{dt}(p(t)+\delta p(t))\Delta t+O(|\Delta t|^2)\\=p(t)+\delta p(t)+\dot{p}(t)\Delta t+\frac{d}{dt}(\delta p(t))\Delta t+O(|\Delta t|^2).\end{aligned} \tag{4}$$

比较(3)和(4)，有

$$\left(\delta\dot{p}(t)-\frac{d}{dt}\delta p(t)\right)\Delta t=O(|\Delta t|^2).$$

令 $\Delta t\to 0$，就得(2)式.

引理 2 设 $q_r, q_{r+1}, \cdots, q_n (r=m+1)$ 是独立变分变量，并且

$$\dot{q}_i=\varphi_i(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_r, \cdots, \dot{q}_n, t),\quad i=1, \cdots, m, \tag{5}$$

则

$$\frac{d}{dt}\delta q_i=\delta\dot{q}_i. \tag{6}$$

证明 将(5)式变分，有

$$\delta\dot{q}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j+\sum_{j=r}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \tag{7}$$

另一方面，(5)式可等价地写成

$$q_i=q_i^0+\int_{t_0}^{t}\varphi_i(q_1(\tau), \cdots, q_n(\tau), \dot{q}_r(\tau), \cdots, \dot{q}_n(\tau), \tau)d\tau,$$

其中 q_i^0 和 t_0 均为常数. 记泛函

$$\Pi(q_1, \cdots, q_n)=\int_{t_0}^{t}\varphi_i(q_1(\tau), \cdots, q_n(\tau), \dot{q}_r(\tau), \cdots, \dot{q}_n(\tau), \tau)d\tau,$$

则

$$q_i = q_i^0 + \Pi(q_1, \cdots, q_n).$$

将上式变分，得

$$\begin{aligned}\delta q_i &= \delta q_i^0 + \delta\Pi(q_1, \cdots, q_n) \\ &= \delta q_i^0 + \Pi(q_1+\delta q_1, \cdots, q_n+\delta q_n) - \Pi(q_1, \cdots, q_n) \\ &= \delta q_i^0 + \int_{t_0}^{t}\Big[\varphi_i\Big(q_1+\delta q_1, \cdots, q_n+\delta q_n, \frac{d}{d\tau}(q_r+\delta q_r), \cdots, \frac{d}{d\tau}(q_n \\ &\qquad + \delta q_n), \tau\Big) - \varphi_i(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_r, \cdots, \dot{q}_n, \tau)\Big]d\tau.\end{aligned}$$

由假设条件，根据引理 1，有

$$\frac{d}{d\tau}\delta q_j(\tau) = \delta\dot{q}_j(\tau), \quad j = r, \cdots, n.$$

于是，

$$\begin{aligned}\delta q_i &= \delta q_i^0 + \int_{t_0}^{t}[\varphi_i(q_1+\delta q_1, \cdots, q_n+\delta q_n, \dot{q}_r+\delta\dot{q}_r, \cdots, \dot{q}_n+\delta\dot{q}_n, \tau) \\ &\qquad - \varphi_i(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_r, \cdots, \dot{q}_n, \tau)]d\tau \\ &= \delta q_i^0 + \int_{t_0}^{t}\delta\varphi_i(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_r, \cdots, \dot{q}_n, \tau)d\tau \\ &= \delta q_i^0 + \int_{t_0}^{t}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=r}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\Big)d\tau.\end{aligned}$$

考虑到 q_i^0 与 t 无关，$\frac{d}{dt}\delta q_i^0 = 0$. 因此，由上式有

$$\frac{d}{dt}\delta q_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=r}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j. \tag{8}$$

比较(7)式和(8)式，就得(6)式。

定理的证明　系统有 m 个独立的非完整约束(1)，即 f_i 是 m 个线性无关的函数(广义坐标看作参量)，其 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial\dot{q}_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial\dot{q}_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial\dot{q}_n}\end{pmatrix}$$

的秩为 m. 不妨设矩阵的前 m 列构成的行列式

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_m)}{D(\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_m)} \neq 0. \tag{9}$$

根据隐函数定理，由(1)式可解出 $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_m$，从而得等价的非完整约束方程

$$\dot{q}_i = \varphi_i(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_r, \cdots, \dot{q}_n, t), \quad i = 1, \cdots, m. \tag{10}$$

因此，可以选取 $q_r, \cdots, q_n$ 作独立变分变量. 根据引理 1，有

$$\frac{d}{dt}\delta q_i = \delta\dot{q}_i, \tag{11}$$

其中 $i=r, \cdots n$. 根据引理 2,从(10)式又可知,(11)式对 $i=1, \cdots, m$ 亦成立. 从而定理得证.

有了 d-δ 运算可交换的结论,借助 Lagrange 乘子法，无需对虚位移附加任何额外条件,就可直接用广义 Hamilton 原理推导一阶非线性非完整力学系统的运动方程,即求在 $\delta\boldsymbol{q}(t_0)=0$ 和 $\delta\boldsymbol{q}(t_1)=0$ 端部条件下变分问题:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1}\left[L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)+\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) f_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\right] dt=0 \tag{12}$$

的 Euler-Lagrange 方程,其中 $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ 是系统的 Lagrange 函数. 下面我们将看到,各 Lagrange 乘子 $\lambda_j(t)$ 必需是 t 的函数. 于是

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\left\{L\left(\boldsymbol{q}+\delta \boldsymbol{q}, \frac{d}{dt}(\boldsymbol{q}+\delta \boldsymbol{q}), t\right)-L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{m}\left[(\lambda_j+\delta \lambda_j) f_j\left(\boldsymbol{q}+\delta \boldsymbol{q}, \frac{d}{dt}(\boldsymbol{q}+\delta \boldsymbol{q}), t\right)-\lambda_j f_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)\right]\right\} dt.$$

考虑到 $\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{q}=\delta\dot{\boldsymbol{q}}$, 有

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i+\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i+\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\right)\right]+\sum_{j=1}^{m} f_j \delta \lambda_j\right\} dt$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{j=1}^{m}\left(\lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}-\frac{d}{dt} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\dot{\lambda}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \delta q_i+\sum_{j=1}^{m} f_j \delta \lambda_j\right\} dt. \tag{13}$$

可以这样选择 Lagrange 乘子 $\lambda_j(t)$, 使得非独立变分变量的变分 $\delta q_1, \cdots, \delta q_m$ 的系数为零[1]. 于是,就有变分问题的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}-\frac{d}{dt} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)-\sum_{j=1}^{m} \dot{\lambda}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i},$$
$$i=1, \cdots, n, \tag{14}$$

和

$$f_j=0, \quad j=1, \cdots, m. \tag{15}$$

后者是考虑到共同参与变分的 Lagrange 乘子是独立变量的结果. 方程 (14) 就是以 L 为 Lagrange 函数的系统,在非完整约束 f_j 下的运动方程.

也可以用 D'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \delta q_i=0, \tag{16}$$

在条件(1)下,推导带乘子的 Lagrange 方程(14). 用乘子 $\lambda_j(t)$ 乘约束方程的变分

1) 如果取 λ_j 为常值乘子,就做不到这一点. 现在根据常微分方程的理论,考虑到(9), $\lambda_j(t)$ 作为(14)的前 m 个方程的解是存在的.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i\right)=0,\quad j=1,\cdots,m,$$

得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\right)-\dot\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\right]\delta q_i+\frac{d}{dt}\left(\lambda_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right)=0. \tag{17}$$

将（17）式对 j 从 1 至 m 求和，加到（16）式，再从 t_0 到 t_1 对 t 积分，利用两固端条件 $\delta \boldsymbol{q}(t_0)=0$ 和 $\delta \boldsymbol{q}(t_1)=0$，就得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}+\sum_{j=1}^{m}\left[\lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\right)-\dot\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\right]\right\}\delta q_i dt=0.$$

和应用 Hamilton 原理的根据类似，上式给出(14)。

在建立方程组(14)和(15)的初值问题中，给定的 q 的初值 $q(t_0)$ 和 $\dot q(t_0)$ 要和约束(15)相容，$\lambda_j(t_0)$ 则可以任意给定．求解带乘子的方程不方便．在一般情况下，我们无法从(14)消去乘子．但在具体情况下，利用约束方程(15)，往往可以将乘子 λ_j 从(14)消去．举简单例子(参阅[1]的第 89 页)说明如下．

例　设单位质量质点的 $L=\frac{1}{2}(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^2)$，受速度大小为常量的非完整约束：

$$\frac{1}{2}(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^2)=C=\text{const}. \tag{18}$$

试求该质点的运动．

解　将 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot q_i}=\ddot q_i$ 和 $\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$，$\frac{\partial f}{\partial q_i}=0$ 代入(14)，得

$$(1+\lambda)\ddot q_i+\dot\lambda\dot q_i=0. \tag{19}$$

将约束方程(18)对 t 求导，有

$$\dot q_1\ddot q_1+\dot q_2\ddot q_2+\dot q_3\ddot q_3=0. \tag{20}$$

由(19)又有

$$(1+\lambda)(\dot q_1\ddot q_1+\dot q_2\ddot q_2+\dot q_3\ddot q_3)+\dot\lambda(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^2)=0.$$

考虑到(18)式和(20)式，我们有 $C\dot\lambda=0$，从而 $\dot\lambda=0$．代回(19)式，得运动方程 $\ddot q_i=0$ 及其解 $q_i=C_it+D_i$．这质点作匀速直线运动．

如果采用 Appell-Четаев 条件

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\delta q_i=0,$$

我们得到的不是(14)，而是传统的带乘子的 Lagrange 方程．我们注意到，方程（14）和 Козлов[4] 所声言的，作为一种新的数学模型的 Vacco 动力学的方程相同． 按本文的观点，Vacco 动力学并不是新的数学模型，只不过是在明确 d-δ 运算可交换后，不对虚位移再附加任何条件的传统的非完整力学而已．我们的做法恢复了传统非完整力学的真面目．

参 考 文 献

[1] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，北京 (1985).
[2] 梅凤翔，非完整动力学研究，北京工业学院出版社，北京 (1987).
[3] 钱伟长，广义变分原理，知识出版社，北京 (1985).
[4] Козлов, В. В., Динамика систем с неинтегрируемыми связями I, II, III, Вестник МГУ, 3(1982) 92—100; 4(1982) 70—76; 3(1983) 102—111.

ON THE CLASSIC NONHOLONOMIC DYNAMICS

Guo Zhongheng Gao Puyun

(Department of Mathematics, Peking University)

Abstract For first-order nonlinear nonholonomic systems, the present paper proves that the d-δ operations are commutative and derives the equation of motion, without making use of the additional Appell-Chetaev condition. This equation of motion coincides with the equation of "Vacco dynamics".

Key words nonholonomic dynamics; commutativity of d-δ operations; Appell-Chetaev condition; Vacco dynamics