第 23 卷 第 3 期　　力 学 学 报　　Vol. 23, No. 3
1991 年 5 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　May, 1991

关于经典非完整力学的一个争议

陈　滨
(北京大学力学系)

提要　本文对文献[4]的论断提出不同意见. 同时对传统的 Gauss-Appell-Четаев 非完整动力学理论和 Vacco 动力学理论的特征给出评价.

关键词　非完整力学，$d\delta$ 交换性，Gauss-Appell-Четаев 非完整动力学，Vacco 动力学

一、引　言

经典非完整力学的研究自 Hertz 的工作(1894 年)开始，经过著名的力学家 Чаплыгин, Appell, Hamel 等人的研究，已取得了很多成果. 近年来国内外还出版了一些专著[1-3]. 但是，由于非完整约束直观性的减弱以及人们对非完整约束约束力作用机理以及约束力作用规律注意不够，本来在完整约束系统里很容易理解的一些分析，现在却引起了争议. 这些争议不是无关重要的，它直接影响着非完整力学的基础. 文献[4]就经典非完整力学的基础问题提出了他们的看法如下:

(1) 对于一阶非线性非完整约束，$d\delta$ 运算可以交换.

(2) 以 $q_1,\cdots,q_n$ 为广义坐标，L 为 Lagrange 函数并受有 m 个独立的一阶非线性非完整约束

$$f_j(q_1,\cdots,q_n;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n;t)=0,\quad (j=1,\cdots,m) \tag{1}$$

的力学系统，其经典非完整动力学的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}\right)-\sum_{j=1}^{m}\dot{\lambda}_j\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i},\quad (i=1,\cdots,n)\\&f_j(q_1,\cdots,q_n;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n;t)=0,\quad (j=1,\cdots,m)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

我们注意到，有关上述结果本身是早有研究的. Hölder[5,6] 早就认为 $d\delta$ 具有普遍交换性. 在文献[6]中，$d\delta$ 具有普遍交换性是作为虚变分出发的条件. 对于方程组(2)，文献[3,6,7]已有所分析. 但是，文献[4]的论断却有所不同. 文[4]认为，经典非完整力学需要跳出"对虚位移施加限制"的框框，意思是说，不应对虚位移施加任何限制条件，这实质上是否定约束力性质分析的意义. 同时还认为方程组(2)并不是如 Козлов 所说的"是 Vacco 动力学新的数学模型"[7]，而是"恢复了传统非完整力学的真面目." 这就是说，传统非完整力学的基础概念和"乘子方程"[2,6]是不正确的，而应该改用文[4]的理论和方程组(2).

本文于 1990 年 6 月 22 日收到第一次稿，于 10 月 4 日收到修改稿.

文[4]的结论实际上是对整个传统的非完整力学提出了异议，这不能不引起我们的关注. 但实际上，文[4]的理论本身包含有矛盾，而且是以假想的论据为出发点的. 从结果来看，也不适用于非完整力学经典问题的分析. [4]中的例子也不足以说明其理论的正确性. 因此，说它能"恢复传统非完整力学的真面目"，这是难以为人接受的.

本文的目的是对 [4] 的论断提出不同意见. 为比较起见，我们也顺带指出传统的 Gauss-Appell-Четаев 非完整动力学理论的特征.

二、几点重要的分歧

1. 关于线性非完整约束"自动成立"的 Appell-Четаев 条件

对于线性非完整约束系统，Appell-Четаев 虚位移条件的成立是极其自然的. 文[4]在文章开头也提出"对线性非完整约束自动成立的 Appell-Четаев 虚位移条件是否对非线性非完整约束也适用?". 从这里，似乎文[4]的作者是承认线性非完整约束系统应该有 Appell-Четаев 虚位移条件成立，而且是"自动成立". 至于 $d\delta$ 运算的交换性呢? 文[4]在叙述中虽然强调是对"非线性非完整约束"，但从"定理"的证明过程看，并没有用到约束是非线性的假定. 再根据文[4]"恢复传统非完整力学真面目"的论断，可以看到，文[4]认为所有的一阶约束都具有 $d\delta$ 运算普遍交换性.

但是，经典非完整力学的研究已经指明，以下三者是不能同时成立的:

(1) 线性非完整约束有 Appell-Четаев 虚位移条件成立，

(2) 对全部位形变元有 $d\delta$ 普遍交换性.

(3) 状态变分满足约束方程.

对于以上三者不能同时成立的论断，只要举一个例子即可证明: 考虑一个质点，位形变元为 x,y,z，受有一个一阶线性非完整约束

$$f = \dot{y} - z\dot{x} = 0 \tag{3}$$

从约束方程(3)，可以得到以上三者的表达式为

(1) 应该"自动"成立的 Appell-Четаев 条件

$$\delta y - z\delta x = 0 \tag{4}$$

(2) 对全部位形变元具有 $d\delta$ 普遍交换性

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\dot{x} \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = \delta\dot{y} \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta z) = \delta\dot{z} \tag{7}$$

(3) 状态变分满足约束方程

$$\delta f = \delta\dot{y} - z\delta\dot{x} - \dot{x}\delta z = 0 \tag{8}$$

但实际上，(4)—(8)式是矛盾的. 例如，从(4)出发，得到

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = \frac{d}{dt}(z\delta x) = \dot{z}\delta x + z\frac{d}{dt}(\delta x) \tag{9}$$

从(8)式，得到

$$\delta\dot{y}=z\delta\dot{x}+\dot{x}\delta z \tag{10}$$

利用(5)式，从(8)，(9)就可以得到

$$\frac{d}{dt}(\delta y)-\delta\dot{y}=\dot{z}\delta x-\dot{x}\delta z\neq 0 \tag{11}$$

这就是说，(6)式不成立.

按文[4]的观点，要承认 $d\delta$ 具有普遍交换性，必须在上述(1)，(3)两者之间放弃一个，否则必然导致矛盾. 放弃 (3) 的方案已经有了系统的研究[6]. 但文[4]不打算放弃(3)，因而只能放弃(1)，这就和作者"线性非完整约束系统 Appell-Четаев 虚位移条件自动成立"的论点明显矛盾.

2. 作为根据的所谓"广义 Hamilton 原理"及 "D'Alembert-Lagrange 原理"

文[4]理论的根据是所谓"广义 Hamilton 原理"，即作者认为受约束系统的运动应遵守

$$\delta_{f=0}\left(\int_{t_0}^{t} L\,dt\right)=0 \tag{12}$$

按条件变分的数学理论，可以将上述变分问题化为无约束变分问题，即

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[L+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)f_j(q,\dot{q},t)\right]dt=0 \tag{13}$$

经典非完整力学的研究已经指明[6]，上述泛函变分形式的所谓 "广义 Hamilton 原理"在非完整力学系统里并没有自然成立的根据. 实际上，根据原始的 D'Alembert 原理，只能得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T+\sum_{i=1}^{n}(Q_i+P_i+R_i)\delta q_i\right]dt=0 \tag{14}$$

其中 Q_i 是给定力，P_i 是非理想约束力，R_i 是理想约束力. 在假定给定力有势，并且不考虑非理想约束力时，也只能得到

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L+\sum_{i=1}^{n}R_i\delta q_i\right)dt=0 \tag{15}$$

要从上述基本公式导出泛函变分的 Hamilton 原理形式，它依赖于两方面的条件：

(1) 局部条件——每时刻的约束力和虚位移满足

$$\sum_{i=1}^{n}R_i\delta q_i=0 \tag{16}$$

(2) 整体性条件——变分轨道必须是泛函可取轨道(满足约束方程)，保证 $\int\delta$ 和 $\delta\int$ 交换成立.

传统的非完整力学研究已经证明[6]，在考虑实际的约束力机制情况下，上述两方面的条件在非完整系统里是无法同时满足的. 因此，文[4]赖以出发的"广义 Hamilton 原理"是一种假定的论据，而不是力学分析的结果. 文[4]的理论还可以用所谓 "D'Alembert-

Lagrange 原理”,即下式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i=0 \tag{17}$$

为根据．但这个“原理”的成立是以消去约束力为前提的．为了消去约束力，在考虑到实际的约束力作用机制情况下，必然要导致对虚位移的限制条件．因此，文[4]一方面要求放弃对虚位移施加任何限制，另一方面又以考虑了虚位移限制条件的结果作为自己的理论根据．这样做只能是一种生硬的假定，与实际的力学规律不符．

3. 文[4]的结果(方程组(2))不能用来求解经典的非完整力学问题

由于文[4]的理论根据是设想的，因此它的理论结果和实际力学系统规律不符．用文[4]所建议的方程组(2)来求解最简单的非完整力学经典例子，就会得到和力学基本规律直接相矛盾的结果．

试考虑简单冰橇问题[6, p.264]，此时冰橇动能为

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+k^2\dot{\varphi}^2) \tag{18}$$

冰橇的冰刀约束方程

$$f=\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0 \tag{19}$$

按文[4]的动力学方程组，即(2)式，得到

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}&=-\frac{d}{dt}(\mu\sin\varphi)\\ m\ddot{y}&=\frac{d}{dt}(\mu\cos\varphi)\\ mk^2\ddot{\varphi}&=\mu(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)\\ f&=\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

积分前两个方程，得到

$$m\dot{x}+\mu\sin\varphi=p_1=\text{const} \tag{21}$$

$$m\dot{y}-\mu\cos\varphi=p_2=\text{const} \tag{22}$$

从(20)—(22)式，可得到 φ 的方程为

$$m^2k^2\ddot{\varphi}=\frac{p_1^2-p_2^2}{2}\sin 2\varphi-p_1p_2\cos 2\varphi \tag{23}$$

从方程(23)可以看到，按照文[4]的结果，简单的理想化冰橇的角运动是一个摆振．但实际上，从简单的理想化的冰橇的力学模型可知，冰刀约束提供的约束力是不可能形成对冰橇质心的任何力矩，从而冰橇简单问题的角运动只能是等速旋转．由此可见，文[4]的动力学理论此时不能应用，它不符合这种实际的非完整约束约束力机制作用下的运动规律．应用文[4]的理论去求解经典的滚盘问题[6]也得到和力学基本规律相矛盾的结果．

三、关于文[4]中的例子

文[4]中举了一个例子，用来说明方程组(2)是可以得到正确解的．但实际上，这个例子是一种特殊情况，它的约束是第一积分约束．由于第一积分约束嵌入动力学方程时，并

不要求任何真正的约束力，因此它不显示文[4]的理论和实际之间的矛盾．这种情况正是 Vacco 动力学和传统的经典非完整力学乘子方程能够得到同样解的特殊情况．

从 Hamilton 原理来看，这个例子正巧是 Румянцев 所分析的特殊情况[6,p.382]．特殊情况的判别条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i=0 \tag{24}$$

此例的约束是第一积分约束

$$f=\frac{1}{2}(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^2)-c=0 \tag{25}$$

应有

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot q_i}\right)=-\ddot q_i,\quad i=1,2,3 \tag{26}$$

此例子求出的运动是匀速直线运动，从而

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot q_i}\right)\right|_{\text{求出运动}}=0,\quad i=1,2,3 \tag{27}$$

因而，判别方程(24)成立．但是，在一般情况下，判别方程对求出的运动不成立．此时，文[4]所建议的方程组(2)不能作为受常见的约束力机制作用的传统非完整力学系统的动力学方程组．

四、结　论

传统的非完整力学是建立在约束力分析的基础上．这种分析归结为 Gauss 原理或 Gauss 理想约束假定的形式[6]．由此而来的动力学模型可称之为 Gauss-Appell-Четаев 模型．研究证明，这种模型能适应广泛的约束力作用机制．它的理论具有以下特征：

(1) 符合约束力作用的力学原理与规律．

(2) 符合不变性准则：当约束组用不同但等价的数学形式表达时，Gauss-Appell-Четаев 理论得到的理想约束力规律是一致的，不变的．这个性质的数学基础是“约束密切空间的不变性[6,8]”．

(3) 协调准则：对各种约束——完整约束，线性非完整约束，非线性非完整约束，Gauss-Appell-Четаев 理论处理的原则是协调一致的，而不是互相矛盾的．

Gauss-Appell-Четаев 理论在经典的非完整力学研究中是适用的．由于它具有以上所指出的特征，因而可以认为是比较完美而统一的非完整力学理论．

文[4]所建议的 Vacco 动力学理论虽然从数学上看也是在动力学中嵌入约束条件的方案之一，但从力学观点来看，它具有假想的特点，不反映常见的经典力学实际．它不能用来求解经典的非完整力学问题．如果说 Vacco 动力学作为一种纯数学的理论或者假想的方案还可以探讨的话，把它作为一种经典非完整力学理论来看，则是不可取的．

参　考　文　献

[1] Неймарк, Ю. И., Фуфаев, Н. А., Динамика Неголономных Систем, Наука (1967).

[2] 梅凤翔,非完整系统力学基础,北京工业学院出版社(1985)
[3] 梅凤翔,非完整动力学研究,北京工业学院出版社(1987).
[4] 郭仲衡,高普云,关于经典非完整力学, Acta *Mechanica Sinica*, 5, 3(1989), 力学学报,22,2(1990).
[5] Hölder, O., Über die Prinzipe von Hamilton und Maupertuis, Nachr. d. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaft zu Göttingen (1896).
[6] 陈 滨,分析动力学,北京大学出版社(1987).
[7] Козлов, В. В., Динамика Систем с Неинтегрируемыми Связями I, II, III, Вестник МГУ 3(1982), 4(1982), 3(1983).
[8] 陈 滨,约束的密切空间与普遍的动力学微分变分原理,全国第三届一般力学学术会议(1984).

A CONTENTION TO THE CLASSIC NONHOLONOMIC DYNAMICS

Chen Bin

(Dept. of Mechanics, Beijing University)

Abstract Totally different points to the conclusions in reference [4] are presented in this paper. Some comments on the characteristics of classic Gauss-Appell-Четаев nonholonomic dynamics and Vacco dynamics are given as well.

Key words nonholonomic dynamics, $d\delta$ commutativity, Gauss-Appell-Четаев nonholonomic dynamics, Vacco dynamics