

کوییز دوم دوره تابستانه آمار و احتمال

سؤال ۱

تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر است:

$$P(X = x) = \begin{cases} kx & x = 2, 4, 6 \\ k(x - 2) & x = 8 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن k یک عدد حقیقی مثبت است. به گزاره‌های زیر توجه کنید و مشخص کنید هر کدام درست یا نادرست است:

۱. $k = \frac{1}{18}$

۲. احتمال اینکه مقدار X از ۵ کوچکتر یا مساوی باشد برابر با $\frac{5}{9}$ است.

۳. مقدار امید ریاضی $E(X)$ برابر با $\frac{52}{9}$ است.

۴. اگر X متغیر تصادفی ذکرشده باشد، آنگاه $E(X^2) > [E(X)]^2$ برقرار است.

۵. مقدار $\text{Var}(3 - 4X)$ برابر با $63/2$ است (با تقریب ۳ رقم معنادار).

سؤال ۲

یک تاس ناهمگن با شش وجه پرتاب می‌شود. متغیر تصادفی X نمایانگر عدد ظاهر شده در وجه بالایی تاس است. توزیع احتمال X به صورت زیر داده شده است:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(X = x)$	a	a	a	b	b	0.3

۱. با فرض اینکه $E(X) = 4/2$ ، مقادیر a و b در کدام گزینه آمده است؟

(آ) $b = 0.2$ و $a = 0.1$

(ب) $b = 0.125$ و $a = 0.15$

(ج) $b = 0.2$ و $a = 0.1$

(د) $b = 0.18$ و $a = 0.12$

۲. مقدار $E(X^2)$ چقدر است؟

(آ) $20/4$

(ب) $19/6$

(ج) $21/3$

(د) $22/0$

۳. مقدار $\text{Var}(5 - 3X)$ در کدام گزینه آمده است؟

(آ) $36/3$

(ب) $24/84$

(ج) $33/3$

(د) $28/4$

سؤال ۳

متغیر تصادفی گسسته X دارای توزیع احتمال زیر است:

x	a	b	c
$P(X = x)$	$\log_{36} a$	$\log_{36} b$	$\log_{36} c$

که در آن:

- a, b, c و اعداد صحیح متمایز هستند به طوری که $a < b < c$
- تمام مقادیر احتمال بیشتر از صفر هستند

۱. کدام گزینه درست است؟

(آ) $a = 1, b = 18$

(ب) $a = 2, c = 18$

(ج) $c = 6, b = 1$

(د) $a = 2, c = 6$

۲. فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان با X باشند. احتمال اینکه $X_1 = X_2$ باشد، کدام است؟

(آ) 0.281

(ب) 0.381

(ج) 0.481

(د) 0.581

سؤال ۴

فرشته در حال انجام یک بازی است. او از یک توپ، یک لیوان و یک گردونه استفاده می کند.

متغیر تصادفی X نشان دهنده عددی است که گردونه پس از چرخیدن روی آن می ایستد. توزیع احتمال X به صورت زیر است:

x	۲۰	۵۰	۸۰	۱۰۰
$P(X = x)$	a	b	c	d

که a, b, c, d اعداد احتمالی هستند.

برای انجام بازی:

- گردونه چرخانده می‌شود تا یک مقدار x به دست آید.
 - فرشته در فاصله x سانتی‌متر از لیوان قرار می‌گیرد و سعی می‌کند توپ را به داخل آن بیندازد.
- رویداد S به معنی موفقیت در انداختن توپ به داخل لیوان است.
- مدل‌سازی بازی به این صورت است:

- $P(S | X = x) = \frac{k}{x}$ که k یک ثابت است.
- $P(S \cap \{X = x\})$ برای هر مقدار x یکسان است.

۱. کدام گزینه رابطه صحیح بین b و c را نشان می‌دهد؟

(آ) $c = \frac{5}{8}b$

(ب) $c = \frac{5}{8}b$

(ج) $c = 8b$

(د) $c = \frac{b}{8}$

۲. توزیع احتمال X کدام است؟

(آ) $a = \frac{2}{25}, b = \frac{5}{25}, c = \frac{8}{25}, d = \frac{1}{25}$

(ب) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{5}, c = \frac{1}{5}, d = \frac{2}{5}$

(ج) $a = \frac{1}{10}, b = \frac{2}{10}, c = \frac{3}{10}, d = \frac{4}{10}$

(د) $a = \frac{1}{25}, b = \frac{3}{25}, c = \frac{9}{25}, d = \frac{12}{25}$

مهراد، تعداد زیادی بار تلاش می‌کند تا توپ را از فاصله ۱۰۰ سانتی‌متری به داخل لیوان بیندازد. او در ۳۰٪ از موارد موفق می‌شود.

۳. آیا مدل فرشته برای توصیف نتایج مهراد مناسب است یا خیر؟ کوتاه توضیح دهید.

سؤال ۵

یک دسته کارت شامل ۳۵ کارت قرمز و ۶۵ کارت سیاه به‌طور کامل بر زده شده است. کارت‌ها یکی‌یکی بدون جایگذاری برداشته می‌شوند تا زمانی که تمام کارت‌های یک رنگ برداشته شود. امید ریاضی تعداد کارت‌های باقی‌مانده چقدر است؟

۱. $2/33$

۲. 3

۳. $3/04$

۴. 2

سؤال ۶

محمد مالک یک تئاتر روباز در دست احداث است و باید تصمیم بگیرد که آیا سقفی نصب کند تا اجراها در تمامی شرایط آب و هوایی قابل برگزاری باشند یا خیر. بر اساس پیش‌بینی اندازه تماشاگران و وضعیت‌های جوی، توزیع احتمال درآمد شبانه X در صورت نصب‌نشدن سقف به‌صورت زیر است:

وضعیت آب‌وهوا	x (دلار)	$P(x)$
هوای صاف	۳۰۰۰	۰/۶۱
ابری تهدیدآمیز	۲۸۰۰	۰/۱۷
باران ملایم	۱۹۷۵	۰/۱۱
باران لغوکننده اجرا	۰	۰/۱۱

۱. میانگین درآمد شبانه را در صورتی که سقف نصب نشود محاسبه کنید.
۲. درآمد کل پیش‌بینی‌شده برای یک فصل ۹۰ شبی را در غیاب سقف به‌دست آورید.
۳. فرض کنید سقف نصب شود و درآمد هر شب معادل درآمد یک شب صاف باشد. درآمد کل پیش‌بینی‌شده برای یک فصل ۹۰ شبی با سقف را حساب کنید.
۴. افزایش درآمد هر فصل در اثر نصب سقف را به‌دست آورید.
۵. مجموع افزایش درآمد در ۱۰ فصل متوالی را محاسبه کنید.
۶. هزینه نصب سقف ۴۱۰ هزار دلار است. محمد تنها در صورتی سقف را نصب خواهد کرد که حداکثر در ۱۰ فصل ۹۰ شبی این هزینه جبران شود. آیا او سقف را خواهد ساخت؟

سؤال ۷

- یک دستگاه، بسته‌هایی از آب‌نبات را پر می‌کند و $\frac{1}{4}$ از بسته‌ها حاوی جایزه نیز هستند. بسته‌های آب‌نبات پیش از ارسال به فروشگاه‌ها، در جعبه‌ها قرار داده می‌شوند. هر جعبه شامل ۴۰ بسته آب‌نبات است. متغیر تصادفی T نشان‌دهنده تعداد بسته‌های حاوی جایزه در هر جعبه است.
۱. یک شرط لازم برای آن که T را بتوان با توزیع $B(40, \frac{1}{4})$ مدل کرد، بیان کنید. یک جعبه به طور تصادفی انتخاب می‌شود.
 ۲. با استفاده از $T \sim B(40, \frac{1}{4})$ موارد زیر را بیابید:
 - (آ) احتمال اینکه در جعبه دقیقاً ۶ بسته حاوی جایزه باشد.
 - (ب) احتمال اینکه جعبه کمتر از ۳ بسته حاوی جایزه داشته باشد.
 ۳. فروشگاه آب‌نبات «کمیل» تعداد ۵ جعبه از این آب‌نبات‌ها خریداری می‌کند. احتمال اینکه دقیقاً ۲ تا از این ۵ جعبه کمتر از ۳ بسته حاوی جایزه داشته باشند را بیابید.

سؤال ۸

باسمن در حال مطالعه توزیع گل‌های «دیزی» در یک مزرعه است. مزرعه به تعدادی مربع با مساحت برابر تقسیم شده است. میانگین تعداد گل‌ها در هر مربع برابر ۳ فرض می‌شود. گل‌ها به صورت تصادفی در سراسر مزرعه توزیع شده‌اند.

۱. احتمال اینکه در یک مربع انتخابی به طور تصادفی، بیش از ۲ گل وجود داشته باشد را بیابید.

۲. احتمال اینکه تعداد گل ها دقیقاً ۵ یا ۶ باشد را بیابید.

گیاه شناس سپس تعداد گل ها، x ، را در هر یک از ۸۰ مربع انتخاب شده به طور تصادفی در مزرعه می شمارد. نتایج به صورت زیر خلاصه می شوند:

$$\sum x = 295 \quad \sum x^2 = 1386$$

۳. میانگین و واریانس تعداد گل ها در هر مربع را برای این ۸۰ مربع محاسبه کنید. پاسخ ها را تا ۲ رقم اعشار بدهید.

۴. توضیح دهید که چگونه نتایج قسمت (ج) از انتخاب توزیع پواسون به عنوان یک مدل پشتیبانی می کند.

۵. با استفاده از میانگین به دست آمده در قسمت (ج)، احتمال اینکه دقیقاً ۴ گل در یک مربع انتخاب شده به طور تصادفی یافت شود را برآورد کنید.