

دوره آمار و احتمال

تمرین سوم

سؤال ۱

فرض کنید که X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه (a, b) باشند.

$$X_i \sim Uniform(a, b) \quad , \quad a < b$$

الف) فرض کنید

$$Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

تابع توزیع انباشته Y را بیابید.

ب) امید ریاضی متغیر تصادفی Y را محاسبه کنید.

سؤال ۲

مدت زمان انتظار تا دریافت خدمات در بخش اورژانس یک بیمارستان، با واحد ساعت، با تابع چگالی زیر مدل سازی می شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} & 0 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3} - ax & 3 \leq x < 6 \end{cases}$$

۱. ثابت a را محاسبه کنید.

۲. احتمال اینکه بیمار کمتر از ۴ ساعت منتظر بماند چقدر است؟

۳. احتمال اینکه مدت زمان انتظار بیشتر از ۵ ساعت باشد چقدر است؟

۴. احتمال اینکه مدت زمان انتظار بین ۲ تا ۳ ساعت باشد چقدر است؟

۵. مدت زمانی که تنها ۱۰ درصد بیماران بیشتر از آن منتظر می مانند را محاسبه کنید.

۶. میانگین زمان انتظار را بدست آورید.

سؤال ۳

فاطمه یک چوب به طول l دارد. او نقطه ای را به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت در طول آن انتخاب کرده و چوب را از آن نقطه می شکند.

۱. اگر X متغیر تصادفی طول قطعه بلندتر باشد، تابع چگالی احتمال (PDF) و تابع توزیع تجمعی (CDF) متغیر X را پیدا کنید.

۲. امید ریاضی طول قطعه بلندتر $E[X]$ را محاسبه کنید.

سؤال ۴

شهاب که پسری کنجکاو و فیلم‌باز است، قصد دارد در تابستان از هرکدام از N ژانر موجود در سینما حداقل یک فیلم ببیند. هر فیلم یک ژانر دارد که با احتمال $\frac{1}{N}$ ، هرکدام از N ژانر اصلی می‌تواند باشد.

(الف) شهاب باید به طور میانگین انتظار داشته باشد با دیدن چند فیلم به هدف خود برسد؟

(ب) واریانس متغیر تعداد فیلم‌های دیده شده برای رسیدن به هدف چقدر است؟

سؤال ۵

یاسمن به تازگی در یک شرکت فروش تلفنی خدمات استخدام شده است. شرایط کاری او به صورتی است که هر روز بعد از ۱۰ فروش موفق کارش تمام شده و می‌تواند به خانه برود. از آنجایی که این اولین شغل مرتبط با فروش اوست، احتمال آنکه هر تماس او به فروش منجر شود برابر ۱۰ درصد است. هر تماس او نیز ۲ دقیقه طول می‌کشد. شرکت به او یک کتاب دو جلدی معرفی کرده است که هر جلد ۵۰۰ صفحه دارد. یاسمن به طور متوسط در ۱ دقیقه و ۳۰ ثانیه مطالعه، ۲ صفحه را مطالعه می‌کند. مطالعه جلد اول، موفقیت تماس‌های او را به ۱۲ درصد و مطالعه هر دو کتاب، موفقیت او را به ۱۴ درصد می‌رساند. یاسمن که علاقه بسیاری به دیدن یک سریال دارد، می‌خواهد بداند بیشترین ساعات ممکن سریال را ببیند. با توجه به اینکه ماه اول ۲۲ روز کاری دارد:

۱. آیا خواندن جلد اول به او در رسیدن به هدفش کمک می‌کند؟ اگر این طور است چه مقدار بیشتر می‌تواند سریال ببیند؟

۲. آیا خواندن هر دو جلد کتاب در مقایسه با قسمت الف به او در رسیدن به هدفش کمک می‌کند؟ اگر این طور است نسبت به حالت الف چه مقدار بیشتر می‌تواند سریال ببیند؟

۳. در نهایت یاسمن باید چه کار کند تا بتواند بیشترین زمان را صرف مشاهده سریال کند؟

سؤال ۶

یک ظرف شامل n توپ قرمز و m توپ آبی داریم. توپ‌ها را به صورت تصادفی از این ظرف خارج می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد کل توپ‌هایی باشد که تا زمانی که در مجموع r توپ قرمز از ظرف خارج شوند، خارج شده‌اند. گفته می‌شود که X یک متغیر تصادفی فوق هندسی منفی است.

(الف) توضیح دهید که چگونه چنین متغیر تصادفی‌ای از یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی متفاوت است.

(ب) تابع جرم احتمال X را بیابید.

(ج) تابع جرم احتمال V ، که برابر با تعداد گوی‌هایی است که باید برداشته شوند تا یا r گوی قرمز یا s گوی آبی برداشته شده باشد، را بیابید.