آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

تمرین پنجم ــ توابع دو متغیر تصادفی، امید ریاضی شرطی

طراح: رضا چهرقانی

سوپروایزر: سالار صفردوست

تاریخ تحویل: ۳۰ آذر ۱۴۰۳

بیشتر بدانیم: مسئله‌ی منشی

فرض کنید مدیرعامل یک شرکت هستید که به دنبال استخدام یک منشی می‌باشید. برای این شغل n داوطلب وجود دارد و تمامی آن‌ها قابل رتبه‌بندی از بدترین تا بهترین می‌باشند. تنها سختی کار شما برای استخدام این است که پس از مصاحبه با هر داوطلب، باید درجا تصمیم خود را برای رد کردن یا استخدام او بگیرید و امکان استخدام داوطلب‌های رد شده از قبل وجود ندارد.
این مسئله و راه‌حل آن با عنوان‌های مسئله‌ی منشی ، مسئله‌ی ازدواج(!) ، قانون ۳۷ درصد و ... شناخته می‌شود.

استراتژی بهینه برای حل مسئله به کمک قانون توقف است. یعنی ابتدا $r-1$ نفر اوّل مصاحبه شونده را رد می‌کنیم و همچنین فرض می‌کنیم که داوطلب M ام میان آن‌ها بهترین بوده باشد. سپس داوطلبان بعدی را آنقدر رد می‌کنیم تا زمانی که به اوّلین داوطلب بهتر از داوطلب M ام برسیم و او را استخدام می‌کنیم. (اگر بهتر از داوطلب M ام پیدا نشود، شخص آخر را استخدام می‌کنیم.)
حال سوال این است که خود r را چگونه انتخاب کنیم؟ برای به دست آوردن r بهینه ، سعی می‌کنیم تا احتمال انتخاب بهترین منشی را بیشینه کنیم. با این توضیحات اگر r را متغیر بدانیم، برای احتمال انتخاب بهترین منشی خواهیم داشت:

$$P(r) = \sum_{i=0}^{n} P(\text{متقاضی } i\text{ام بهترین باشد} \cap \text{متقاضی } i\text{ام انتخاب شده باشد})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P(\text{متقاضی } i\text{ام انتخاب شده باشد} \mid \text{متقاضی } i\text{ام بهترین باشد}) \cdot P(\text{متقاضی } i\text{ام بهترین باشد})$$

$$= [\sum_{i=0}^{n} 0 + \sum_{i=0}^{n} P(\text{بهترین متقاضی بین } i-1 \text{ نفر اول از میان } r-1 \text{ نفر اول باشد} \mid \text{متقاضی } i\text{ام بهترین باشد})] \cdot \frac{1}{n}$$

$$= [\sum_{i=r}^{n} \frac{r-1}{i-1})] \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{r-1}{n} \cdot [\sum_{i=r}^{n} \frac{1}{i-1}]$$

عبارت بالا برای $r = 1$ فاقد اعتبار است، ولی واضح است اگر $r = 1$ انتخاب شود، احتمال مد نظر برابر $\frac{1}{n}$ خواهد بود. (که فرقی با انتخاب رندوم ندارد.) برای به دست آوردن r بهینه فرض می‌کنیم n به بینهایت میل می‌کند. در این صورت حاصل جمع به دست آمده با تغییر متغیر $x = \frac{r}{n}$ برابر انتگرال زیر خواهد شد:

$$P(x) = x \int_{x}^{1} \frac{1}{t}\, dt = -x\, ln(x)$$

از عبارت به دست آمده نسبت به x مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. در این صورت مشاهده می‌شود که مقدار بهینه‌ی آن برابر $\frac{1}{e}$ به دست آمده و در نتیجه‌ی نقطه‌ی بهینه‌ی ما به $\frac{n}{e}$ میل می‌کند.

۱. یک تابع از دو متغیر تصادفی — ۲۰ نمره

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گاوسی مستقل با میانگین صفر و واریانس واحد باشند. توزیع احتمال $Z = |X - Y|$ را پیدا کنید.

۲. دو تابع از دو متغیر تصادفی — ۱۰ نمره

فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل باشند که هر یک دارای توزیع احتمالی زیر هستند:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & elsewhere. \end{cases}$$

نشان دهید که متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 مستقل هستند وقتی که $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ باشد.

۳. استفاده از متغیر تصادفی کمکی ۱۰ نمره

جریانی به شدت I آمپر که از یک مقاومت R اهمی عبور می‌کند، به صورت توزیع احتمال زیر متغیر است:

$$f(i) = \begin{cases} ۶i(۱-i), & ۰ < i < ۱, \\ ۰, & elsewhere. \end{cases}$$

اگر مقاومت به صورت مستقل از جریان و بر اساس توزیع احتمال زیر متغیر باشد:

$$g(r) = \begin{cases} ۲r, & ۰ < r < ۱, \\ ۰, & elsewhere. \end{cases}$$

توزیع احتمال برای توان $W = I^۲R$ وات را بیابید.

۴. متغیرهای تصادفی مشترکا نرمال ۱۰ نمره

فرض کنید $Z_۱$ و $Z_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع $N(۰,۱)$ باشند. تعریف می‌کنیم:

$$X = Z_۱,$$
$$Y = \rho Z_۱ + \sqrt{۱-\rho^۲}\, Z_۲,$$

که در آن ρ یک عدد حقیقی در بازه $(-۱,۱)$ است. نشان دهید X و Y دارای توزیع مشترکا نرمال با میانگین‌های صفر، واریانس‌های یک و ضریب همبستگی ρ می‌باشند.

۵. پیش‌بینی ۱۰ نمره

یک آزمون استعداد سنجی دارای دو بخش می‌باشد. فرض کنید امتیاز یک فرد در بخش اول برابر متغیر تصادفی X و در بخش دوم برابر متغیر تصادفی Y باشد که تابع چگالی مشترک آن‌ها به شکل زیر باشد:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲}{۵}(۲x+۳y), & ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le ۱ \\ ۰, & otherwise \end{cases}$$

امتیاز نهایی فرد در این آزمون برابر $X+Y$ خواهد بود و هدف ما این است که یک مقدار t را برای آن پیش‌بینی کنیم. با دانستن اینکه خطای پیش‌بینی میانگین مربع خطا (Mean Squared Error) به شکل زیر می‌باشد، به ازای چه مقدار از t به کمترین خطا می‌رسیم؟

$$E[(X+Y-t)^۲]$$

راهنمایی:
برای کمینه‌سازی خطای پیش‌بینی $E[(X+Y-t)^۲]$ باید مشتق آن نسبت به t گرفته شود و آن را برابر صفر قرار دهیم.

۶. مجموع‌های تصادفی — ۲۰ نمره

یک معدنچی در معدنی گرفتار شده که سه در دارد. اولین در به تونلی منتهی می‌شود که پس از دو ساعت او را به محل ایمنی می‌برد. در دوم به تونلی منتهی می‌شود که پس از سه ساعت او را به معدن برمی‌گرداند. در سوم به تونلی منتهی می‌شود که پس از پنج ساعت او را به معدن برمی‌گرداند. فرض کنید که معدنچی در هر زمان به طور مساوی احتمال دارد هر یک از درها را انتخاب کند.

N تعداد درهایی است که قبل از اینکه معدنچی به ایمنی برسد انتخاب می‌شوند. T_i زمان سفر مربوط به i اُمین انتخاب است، $i \geq ۱$. همچنین X زمان رسیدن معدنچی به ایمنی می‌باشد.

الف) رابطه‌ای بنویسید که X را به N و T_i مرتبط می‌کند. (۴ نمره)

ب) $E[N]$ برابر چه مقداری می‌باشد؟ (۴ نمره)

ج) $E[T_N]$ برابر چه مقداری می‌باشد؟ (۴ نمره)

د) $E[\sum_{i=۱}^{N} T_i | N = n]$ برابر چه مقداری می‌باشد؟ (۴ نمره)

ه) با استفاده از موارد قبلی، مقدار $E[X]$ را بیابید؟ (۴ نمره)

۷. امیدریاضی شرطی و قائده زنجیره‌ای — ۳۰ نمره

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال مشترک (PDF) زیر هستند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xye^{-x-y}, & x > ۰, y > ۰ \\ ۰, & otherwise \end{cases}$$

فرض کنید $Z = X + Y$.

الف) مقدار $E[X | X > ۱]$ را بیابید. (۱۰ نمره)

ب) تابع چگالی احتمال مشترک $f_{Y,Z}(y,z)$ را بیابید. (۱۰ نمره)

ج) چگالی حاشیه‌ای $f_{X|Z}(x|z)$ را که با حذف شرط Y به دست می‌آید، پیدا کنید. (۱۰ نمره امتیازی)

راهنمایی: از تابع چگالی احتمال مشرک $f_{X,Y}(x,y)$ می‌توان نتیجه گرفت $f_{X|Y,Z}(x|y,z) = \frac{x}{z-y} e^{z-x-y} \cdot \delta(z-x-y)$.
(نیازی به اثبات نیست)