

آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

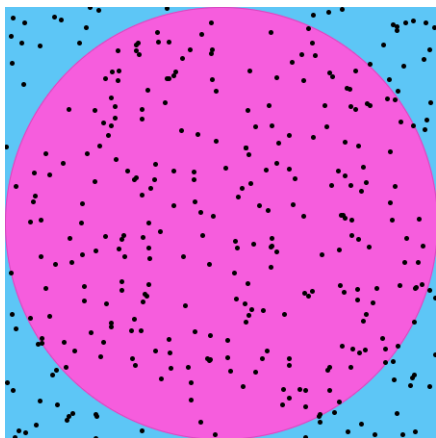
پاسخ تمرین دوم - توزیع‌های پیوسته و توابعی از یک متغیر تصادفی
طراح: امیر نداف فهمیده
سوپروایزر: الهه خداوردی
تاریخ تحویل: ۲۰ آبان ۱۴۰۳

بیشتر بدانیم: مونت کارلو

حل بسیاری از مسائل در دنیا به آسانی امکان‌پذیر نیست. این مسائل گاهی به دلیل عدم قطعیت و مشکلات دیگر پیچیدگی بسیاری دارند و حل آن‌ها تلاش زیادی می‌طلبد. در مواجهه با بسیاری از این مسائل، با اینکه جواب قطعی برای آن‌ها وجود دارد، اما به دلیل پیچیدگی محاسبات، می‌توانیم راه‌هایی را در پیش بگیریم تا جواب را بدون محاسبات پیچیده و با دقت بالا تخمین بزنیم.

یکی از این روش‌ها، روش مونت کارلو (Monte Carlo) است. در این روش، با تولید نمونه‌های تصادفی و بررسی خروجی هر نمونه، می‌توانیم فضایی احتمالاتی‌ای ایجاد کنیم و با استفاده از این نمونه‌ها به مقدار تخمینی خود دست یابیم.

برای مثال، فرض کنید که می‌خواهیم عدد پی (π) را محاسبه کنیم. روش‌های بسیاری وجود دارد که نیازمند محاسبات پیچیده‌اند. اما با استفاده از این روش می‌توانیم مسئله را به این شکل نگاه کنیم: یک دایره درون مربعی قرار دارد، به‌طوری‌که طول ضلع مربع برابر با قطر دایره است و اضلاع مربع بر دایره مماس هستند. اگر n نقطه تصادفی داشته باشیم، احتمال اینکه نقطه‌ای درون دایره قرار بگیرد، متناسب با نسبت مساحت دایره به مساحت مربع است.



$$\frac{\text{inside the circle}}{\text{total points}} = \frac{267}{340}$$

$$\text{Area of square} = (2r)^2 = (2)^2 \times r^2 = 4 \times r^2$$

$$\text{Area of circle} = \pi \times r^2$$

$$\frac{\text{inside the circle}}{\text{total points}} = \frac{267}{340} \approx \frac{\text{area of circle}}{\text{area of square}}$$

$$\frac{267}{340} \approx \frac{\pi \times r^2}{4 \times r^2} \approx \frac{\pi}{4}$$

$$\pi \approx 4 \times \frac{267}{340} \approx 3.1412$$

همان‌طور که مشخص است، با داشتن ۳۴۰ نقطه تصادفی توانستیم عدد پی را با دقت خوبی تخمین بزنیم (می‌توانید در این لینک نیز آزمایش بالا را مشاهده کنید).

می‌توان از همین رویکرد در مواجهه با مسائل دیگر نیز استفاده کرد. فرض کنید در مسابقه‌ای شرکت می‌کنید که شرط خروج از آن شکست در دو دست متوالی است؛ اگر احتمال شکست در هر دست برابر p باشد، به طور میانگین پیش از خروج از بازی چند دست می‌توانید بازی کنید؟ این سوال را یکبار با استفاده از مفاهیم آموخته شده در درس و یکبار با استفاده از روش مونت کارلو (Monte Carlo) حل نمایید، آیا پاسخ‌های بدست آمده با یکدیگر مطابقت دارد؟

۱. محافظ نوار

۱۵ نمره

طول یک محافظ نوار از توزیع نرمال با میانگین $۹۰/۲$ میلی‌متر و با انحراف معیار $۰/۱$ میلی‌متر پیروی می‌کند.

الف) احتمال این که طول بخشی از این محافظ بیشتر از $۹۰/۳$ یا کمتر از $۸۹/۷$ میلی‌متر باشد چقدر است؟ (۵ نمره)

ب) میانگین توزیع باید چه مقداری باشد تا طول اکثر بخش‌های این محافظ بین $۸۹/۷$ تا $۹۰/۳$ باشد؟ (۵ نمره)

پ) اگر بخش‌هایی که طول آن‌ها بین بازه $۸۹/۷$ تا $۹۰/۳$ نیست، پوشیده باشند، با فرض این که میانگین توزیع برابر میانگین انتخاب شده در بخش ب است، چند درصد طول این محافظ پوشیده نیست؟ (۵ نمره)

۲. جایزه خوابگاهی

۱۰ نمره

زمان بین رسیدن دو دانشجوی خوابگاهی به خوابگاه از توزیع نمایی با پارامتر λ و با میانگین ۳ دقیقه پیروی می‌کند. امیر تصمیم می‌گیرد که به آخرین نفری که امروز وارد خوابگاه می‌شود جایزه بدهد. اگر ساعت $۵۵ : ۲۳ = t$ باشد و کسی وارد نشود، چقدر احتمال دارد که برنده جایزه امیر قبل از ساعت $۵۵ : ۲۳$ وارد خوابگاه شده باشد؟

۳. باگ یابی

۱۵ نمره

امیر به تازگی در حال یاد گرفتن زبان وریلاگ است. در هر خط کد با احتمال ۴۰ درصد باگ پیدا می‌شود. اگر امیر ۶۰۰ خط کد زده باشد،

الف) چقدر احتمال دارد که حداقل ۲۵۰ خط دارای باگ باشند؟ (۶ نمره)

ب) اگر تعداد خطوط کد را n در نظر بگیریم، آنگاه تعداد خطوط کد چقدر باشد تا $P(۰/۳۸n \leq X \leq ۰/۴۲n) = ۰/۸۶۴$ شود؟ (۹ نمره)

۴. سرمایه‌گذاری

۲۰ نمره

امیر که تا حدودی در خرید و فروش رمزارزها دستی دارد، نیاز به سرمایه اولیه دارد. مصطفی که دوست صمیمی اوست می‌خواهد این سرمایه اولیه را در اختیار امیر بگذارد اما نمی‌داند که چقدر به او کمک کند. امیر می‌داند که مقدار پولی که مصطفی به او می‌دهد یک متغیر تصادفی (بر حسب میلیون) با تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_X(x) = Ae^{-2|x|} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2}$$

الف) مقدار A و میانگین و واریانس X را به دست آورید.

ب) علی، دوست مشترک مصطفی و امیر نیز می‌خواهد روی کار امیر سرمایه‌گذاری کند. او که نمی‌داند چه مقدار سرمایه به امیر بدهد تصمیم می‌گیرد که از مقدار سرمایه‌گذاری مصطفی الهام بگیرد. اگر مقدار سرمایه‌گذاری علی با تابع زیر به مقدار سرمایه‌گذاری مصطفی مربوط شود، تابع چگالی احتمال مقدار سرمایه‌گذاری علی را بیابید.

$$Y = \begin{cases} \sqrt{2|X|} - 1 & |X| \geq \frac{1}{4} \\ 0 & |X| < \frac{1}{4} \end{cases}$$

۵. مصاحبه کاری

۲۰ نمره

مهندس که امروز مصاحبه کاری دارد، در راه شرکت به ترافیک برمی‌خورد. او باید به شرکت خبر دهد که چقدر دیرتر به مصاحبه می‌رسد. او میزان تاخیر خود را به صورت یک متغیر تصادفی که به صورت زیر تعریف می‌شود اطلاع می‌دهد که در آن X متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ است و Y میزان تاخیر مهندس است.

$$Y = \min(X, \frac{\lambda}{3})$$

الف) تابع توزیع تجمعی Y را بیابید.

ب) چقدر احتمال دارد که مهندس دقیقاً با $\frac{\lambda}{3}$ تاخیر به شرکت برسد؟

۶. مسابقه دو

۲۰ نمره

چهار دوست می‌خواهند به صورت تیمی مسابقه دو بدهند. مسابقه آن‌ها به این صورت است که به دو تیم دو نفره تقسیم شده و هر تیمی که تمامی اعضای آن قبل از تیم حریف به خط پایان برسد برنده مسابقه است. زمان رسیدن هر فرد از یک توزیع یکنواخت در بازه $(1, 2)$ پیروی می‌کند. تابع چگالی احتمال زمان برنده شدن یک تیم را به دست آورید.

۷. نمایی کسینوسی (سوال امتیازی)

۱۵ نمره

اگر متغیر تصادفی X از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند، تابع چگالی احتمال $Y = \cos(X)$ را بیابید.