آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

تمرین صفرم ــ اصول احتمال، مرور ترکیبیات، احتمال شرطی، استقلال

طراح: فرنوش فلاح
سوپروایزر: ارشیا عطایی

بیشتر بدانیم: پریش

در ترکیبیات، **پریش** یک جایگشت از مجموعه‌ای با n عنصر است به‌طوری که هیچ‌کدام از عناصر در جایگاه اصلی خود قرار نمی‌گیرند. به‌عبارت دیگر، اگر مجموعه $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ داشته باشیم، یک جایگشت σ از این مجموعه یک پریش است اگر و فقط اگر برای هر i داشته باشیم $\sigma(i) \neq i$.

تعداد پریش‌های ممکن برای یک مجموعه با n عنصر با نماد $!n$ نشان داده می‌شود. برای محاسبه تعداد پریش‌ها، از روش **شمول‌ــعدم شمول** استفاده می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم تمام عناصر می‌توانند در جایگاه اصلی خود قرار گیرند، یعنی تعداد کل جایگشت‌ها برابر با $n!$ است. سپس تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یک عنصر در جایگاه اصلی خود قرار دارد را کم می‌کنیم و اینکار را به ازای هر تعداد عضو دیگر ادامه می‌دهیم و به رابطه زیر میرسیم:

$$!n = n! - \binom{n}{۱} \cdot (n-۱)! + \binom{n}{۲} \cdot (n-۲)! - \cdots + (-۱)^n \binom{n}{n} \cdot ۰!$$

این فرمول را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$!n = n! \left(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{(-۱)^n}{n!} \right)$$

ارتباط این فرمول با عدد e قابل توجه است. اگر e^x را بسط دهیم، داریم:

$$e^x = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

حال اگر $x = -۱$ را در این بسط قرار دهیم، به دست می‌آید:

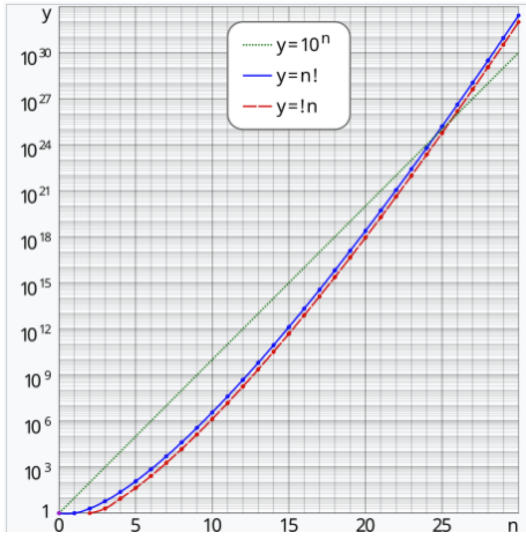
$$e^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{k!}$$

بنابراین به ازای n های بزرگ می‌توان این دو مقدار را یکسان در نظر گرفت:

$$!n \approx \frac{n!}{e}$$

این تقریب نشان می‌دهد که برای nهای بزرگ، تعداد پریش‌ها تقریباً برابر با $\frac{n!}{e}$ است، و در واقع $!n$ با $n!$ هم‌ارز می‌شود و نسبت این دو به عدد ثابت e میل می‌کند.

در نمودار زیر که لوگاریتم $n!$ و $!n$ رسم شده است، اختلاف لوگاریتم این دو که تقریبا برابر عدد ثابت $\log_{10} e$ است، مشهود است.



امروزه اثبات شده است که:

$$!n = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \rfloor$$

۱. فوتبال ۲۰ نمره

آرمان، بهرام، سارا، دارا و الهام در یک ردیف (با همین ترتیب) نشسته‌اند و در حال تماشای فوتبال هستند. بین دو نیمه، همگی برای آوردن خوراکی از جای خود بلند می‌شوند. سپس بدون توجه به جای قبلی‌شان، هر یک به صورت تصادفی بر روی یک صندلی می‌نشینند. چقدر احتمال دارد که در چینش جدید، هر کدام از آن‌ها در کنار افراد جدیدی نشسته باشد؟ (به عبارتی، هیچ دو نفری که قبلا در کنار هم نشسته بودند، در چینش جدید کنار هم نباشند)

پاسخ :

برای راحتی در ادامه حل سوال، آرمان را A ، بهرام را B ، سارا را C ، دارا را D و الهام را E در نظر می‌گیریم.

تابع $T(XY)$ را تعریف می‌کنیم که نشان‌دهنده تعداد چینش‌هایی است که در آن X و Y کنار هم نشسته‌اند. می‌دانیم تعداد کل چینش‌های ممکن !۵ است. حال می‌توانیم تعداد حالات نامطلوب را به کمک اصل شمول و عدم شمول بدست آوریم.

$$(|T(AB)| + |T(BC)| + |T(CD)| + |T(DE)|) -$$
$$(|T(AB) \cap T(BC)| + |T(AB) \cap T(CD)| + |T(AB) \cap T(DE)| + \cdots) + \cdots$$

در عبارت بالا، هر جمله را می‌توان جداگانه محاسبه کرد.

$$|T(AB)| = |T(BC)| = |T(CD)| = |T(DE)| = ۲ \times ۴! = ۴۸$$

در عبارت چینش‌های نامطلوب، ۴ جمله به فرم $|T(XY)|$ داریم. پس در کل خواهیم داشت: $۴ \times ۴۸ = ۱۹۲$

$$|T(AB) \cap T(BC)| = |T(BC) \cap T(CD)| = |T(CD) \cap T(DE)| = ۲ \times ۳! = ۱۲$$

عبارت $T(AB) \cap T(BC)$ نشان‌دهنده مجموعه چینش‌هایی است که در آن A و B کنار هم و B و C کنار هم نشسته‌اند. در عبارت چینش‌های نامطلوب، ۳ جمله به این فرم داریم؛ پس در کل خواهیم داشت: $۳ \times ۱۲ = ۳۶$

$$|T(AB) \cap T(CD)| = |T(AB) \cap T(DE)| = |T(BC) \cap T(DE)| = ۲^۲ \times ۳! = ۲۴$$

عبارت $T(AB) \cap T(CD)$ نشان‌دهنده مجموعه چینش‌هایی است که در آن A و B کنار هم و C و D کنار هم نشسته‌اند. در عبارت چینش‌های نامطلوب، ۳ جمله به این فرم داریم؛ پس در کل خواهیم داشت: $۳ \times ۲۴ = ۷۲$

$$|T(AB) \cap T(BC) \cap T(CD)| = |T(BC) \cap T(CD) \cap T(DE)| = ۲ \times ۲! = ۴$$

عبارت $T(AB) \cap T(BC) \cap T(CD)$ نشان‌دهنده مجموعه چینش‌هایی است که در آن A و B و C و D کنار هم نشسته‌اند. در عبارت چینش‌های نامطلوب، ۲ جمله به این فرم داریم؛ پس در کل خواهیم داشت: $۲ \times ۴ = ۸$

$$|T(AB) \cap T(BC) \cap T(DE)| = |T(AB) \cap T(CD) \cap T(DE)| = ۲^۲ \times ۲! = ۸$$

عبارت $T(AB) \cap T(BC) \cap T(DE)$ نشان‌دهنده مجموعه چینش‌هایی است که در آن A و B و C کنار هم و D و E کنار هم نشسته‌اند. در عبارت چینش‌های نامطلوب، ۲ جمله به این فرم داریم؛ پس در کل خواهیم داشت: $۲ \times ۸ = ۱۶$

$$|T(AB) \cap T(BC) \cap T(CD) \cap T(DE)| = ۲ \times ۱! = ۲$$

عبارت $T(AB) \cap T(BC) \cap T(CD) \cap T(DE)$ نشان‌دهنده مجموعه چینش‌هایی است که در آن‌ها هر فرد کنار افرادی است که در چینش قبلی کنارشان بوده. این مجموعه تنها دو عضو دارد.

پس کل حالات نامطلوب بدست می‌آید:

$$۱۹۲ - (۳۶ + ۷۲) + (۸ + ۱۶) - ۲ = ۱۰۶$$

پس حالات مطلوب می‌شود:

$$۵! - ۱۰۶ = ۱۴$$

احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۱۴}{۵!} = \frac{۷}{۶۰}$$

۲. ماه تولد — ۲۰ نمره

در یک اتاق، n نفر حضور دارند. می‌دانیم n به احتمال $\frac{۱}{۴}$ برابر با ۵ است، به احتمال $\frac{۱}{۴}$ برابر با ۱۰ است، و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ برابر با ۱۵ می‌باشد.

الف) چقدر احتمال دارد که حداقل دو نفر از افراد حاضر در اتاق، در یک ماه به دنیا آمده باشند؟ فرض کنید احتمال به دنیا آمدن در همه ماه‌ها برابر است. (۱۰ نمره)

ب) با فرض این که حداقل دو نفر در اتاق وجود دارند که ماه تولدشان یکسان است، چقدر احتمال دارد که n برابر با ۱۰ باشد؟ (۱۰ نمره)

پاسخ :

الف) فرض کنید A_k نشان‌دهنده پیشامدی باشد که حداقل دو نفر از k نفر حاضر در یک ماه از سال متولد شده باشند. در این صورت به ازای $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$ خواهیم داشت:

$$P(A_k) = 1 - \frac{P_k^{12}}{12^k}$$

دقت کنید که:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

همچنین به ازای $k > 12$ خواهیم داشت:

$$P(A_k) = 1$$

حال فرض می‌کنیم A نشان‌دهنده پیشامدی باشد که حداقل دو نفر از افراد حاضر در اتاق در یک ماه به دنیا آمده باشند. با استفاده از قانون احتمال کل می‌توان نوشت:

$$P(A) = \frac{1}{4}P(A_5) + \frac{1}{4}P(A_{10}) + \frac{1}{2}P(A_{15})$$

$$P(A) = \frac{1}{4}(1 - \frac{P_5^{12}}{12^5}) + \frac{1}{4}(1 - \frac{P_{10}^{12}}{12^{10}}) + \frac{1}{2}(1)$$

ب) احتمال خواسته شده در این قسمت، معادل $P(k = 10|A)$ است. می‌توانیم با استفاده قانون بیز این احتمال را محاسبه کنیم.

$$P(k = 10|A) = \frac{P(A|k = 10) \times P(k = 10)}{P(A)} = \frac{P(A_{10}) \times \frac{1}{4}}{P(A)}$$

$$P(k = 10|A) = \frac{1 - \frac{P_{10}^{12}}{12^{10}}}{(1 - \frac{P_5^{12}}{12^5}) + (1 - \frac{P_{10}^{12}}{12^{10}}) + 2}$$

۳. بازی — ۲۰ نمره

در یک بازی، هر یک از ۴ بازیکن یک تاس سالم شش وجهی را می‌اندازد. برنده کسی است که عدد تاسش از همه بزرگتر باشد. اگر حداقل دو بازیکن بزرگترین عدد را آورده باشند، بازی دوباره بین کسانی که بزرگترین عدد را آورده‌اند انجام می‌شود. این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که یک نفر برنده شود. مریم یکی از بازیکنان است. با فرض این که مریم بازی را برده است، چقدر احتمال دارد که در راند اول بازی، مریم عدد ۵ را آورده باشد؟

پاسخ :

از تعریف احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. با فرض این که A پیشامد ۵ آوردن مریم در راند اول و B پیشامد بردن مریم باشد، داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

می‌توان گفت که احتمال بردن مریم، یعنی $P(B)$ برابر با $\frac{۱}{۴}$ است؛ چون در ابتدای بازی، هر کدام از بازیکنان به احتمالی برابر برنده می‌شوند.

حال باید احتمال $P(A \cap B)$ را محاسبه کنیم؛ یعنی احتمال این که مریم در راند اول بازی ۵ آورده باشد و در نهایت بازی را برده باشد. بر اساس تعداد افرادی که به همراه مریم در راند اول بازی ۵ آورده‌اند، این احتمال را بدست می‌آوریم:

حالت اول: فقط مریم ۵ آورده باشد

در این حالت، هر سه بازیکن دیگر باید عددی بین ۱ تا ۴ آورده باشند. در غیر این صورت، اگر بازیکنی وجود داشته باشد که عددی بزرگتر از ۵ آورده باشد، مریم دیگر برنده بازی نخواهد بود که با فرض سوال مغایرت دارد. احتمال رخ دادن این پیشامد برابر است با:

$$(\frac{۴}{۶})^۳ = \frac{۸}{۲۷}$$

حالت دوم: مریم و یک نفر دیگر ۵ آورده باشند

در این حالت، $۳ = \binom{۳}{۱}$ حالت برای بازیکنی وجود دارد که همراه با مریم ۵ آورده است. بقیه بازیکنان باید عددی بین ۱ تا ۴ آورده باشند. احتمال رخ دادن این پیشامد که مریم و یک نفر دیگر ۵ و بقیه عددی بین ۱ تا ۴ بیاورند، برابر است با: $۳ \times \frac{۱}{۶} \times (\frac{۴}{۶})^۲$

همچنین احتمال این که مریم در مرحله بعدی بازی برنده شود، برابر با $\frac{۱}{۲}$ خواهد بود. چون در مرحله بعد، دو بازیکن برنده شده در راند اول، بازی خواهند کرد.

پس احتمال برد مریم در بازی در این حالت برابر است با:

$$۳ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} \times (\frac{۴}{۶})^۲ = \frac{۱}{۹}$$

حالت سوم: مریم و دو نفر دیگر ۵ آورده باشند

در این حالت، $۳ = \binom{۳}{۲}$ حالت برای دو بازیکنی وجود دارد که همراه با مریم ۵ آورده‌اند. بازیکن چهارم باید عددی بین ۱ تا ۴ آورده باشد. احتمال رخ دادن این پیشامد که مریم و دو نفر دیگر ۵ و بازیکن چهارم عددی بین ۱ تا ۴ آورده باشد، برابر است با: $۳ \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times \frac{۴}{۶}$

همچنین احتمال این که مریم در مرحله بعدی بازی برنده شود، برابر با $\frac{۱}{۳}$ خواهد بود. چون در مرحله بعد، سه بازیکن برنده شده در راند اول، بازی خواهند کرد.

پس احتمال برد مریم در بازی در این حالت برابر است با:

$$۳ \times \frac{۱}{۳} \times (\frac{۱}{۶})^۲ \times \frac{۴}{۶} = \frac{۱}{۵۴}$$

حالت چهارم: مریم و هر سه نفر دیگر ۵ آورده باشند

در این حالت، به احتمال $(\frac{1}{6})^3$ هر سه بازیکن دیگر نیز ۵ آورده‌اند. در مرحله بعد، مریم به احتمال $\frac{1}{4}$ برنده بازی خواهد شد. پس احتمال برد مریم در این حالت برابر است با:

$$\frac{1}{4} \times (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{864}$$

در نهایت، خود مریم نیز به احتمال $\frac{1}{6}$ در راند اول، ۵ می‌آورد؛ پس در کل، احتمال برنده شدن مریم و ۵ آوردن او در راند اول برابر است با:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}(\frac{8}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{54} + \frac{1}{864}) = \frac{1}{6} \times \frac{369}{864} = \frac{1}{6} \times \frac{41}{96}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{41}{96}}{\frac{1}{4}} = \frac{41}{144}$$

۴. مسابقه   ۱۵ نمره

دو تیم A و B مسابقه‌ای را انجام می‌دهند. اولین تیمی که سه راند را ببرد، مسابقه را می‌برد. قبل از هر راند، احتمال برنده شدن هر دو تیم در آن راند برابر و مستقل از راندهای دیگر است. همچنین در هر راند، حتما یک تیم برنده وجود دارد و مساوی نداریم. با فرض این که تیم B راند دوم را برده است و تیم A در مسابقه برنده شده است، احتمال این که تیم B راند اول را برده باشد چقدر است؟

پاسخ :

مشخص است که تعداد راندهای بازی شده حداکثر ۵ است. از تعریف احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. با فرض این که M پیشامد برنده شدن تیم B در راند اول و N پیشامد برنده شدن تیم B در راند دوم و برنده شدن تیم A در مسابقه است، داریم:

$$P(M|N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}$$

اگر تیم B راند اول و دوم مسابقه را برده باشد، برای این که تیم A برنده مسابقه باشد، این تیم باید سه راند بعدی را ببرد. پس ترتیب برنده شدن در راندها به صورت $BBAAA$ خواهد بود. احتمال رخ دادن این حالت برابر با $(\frac{1}{2})^5$ است.

اگر تیم A راند اول را برده باشد و تیم B راند دوم را برده باشد، حالت‌های ممکن عبارت‌اند از: $ABBAA, ABABA, ABAAX$ که در این جا X نشان‌دهنده این است که مسابقه کمتر از ۵ راند به طول انجامیده است.

احتمال رخ دادن هر کدام از حالت‌های $ABBAA$ و $ABABA$ برابر با $(\frac{1}{2})^5$ است. همچنین احتمال رخ دادن حالت $ABAAX$ ، برابر با $(\frac{1}{2})^4$ می‌باشد.

پس خواهیم داشت:

$$P(M \cap N) = (\frac{1}{2})^5$$

$$P(N) = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^4$$

بنابراین احتمال خواسته شده بدست می‌آید:

$$P(M|N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{(\frac{1}{2})^5}{(\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^4} = \frac{1}{5}$$

۵. بازی مجموع — ۱۵ نمره

آوا و بابک، هر یک به نوبت دو تاس سالم می‌اندازند. بازی در صورتی تمام می‌شود که یکی از دو نفر برنده شود. آوا در صورتی برنده می‌شود که مجموع دو تاسش برابر با ۹ باشد و بابک در صورتی برنده می‌شود که مجموع دو تاسش برابر با ۶ باشد. همچنین اگر مجموع دو تاس فردی در نوبتش برابر با ۷ شود، در نوبت بعدی نیز خودش تاس می‌اندازد. آوا بازی را شروع می‌کند. چقدر احتمال دارد آوا در نهایت برنده بازی باشد؟

پاسخ :

فرض کنید S_A و S_B به ترتیب پیشامدهای شروع شدن بازی توسط آوا و بابک باشند. همچنین W_A و W_B به ترتیب پیشامدهای برنده شدن آوا و بابک در بازی هستند. می‌توان نوشت:

$$P(W_A|S_A) = P(۹) + P(۷)P(W_A|S_A) + (۱ - P(۹) - P(۷))P(W_A|S_B) \tag{۱}$$
$$P(W_A|S_B) = P(۶) \times ۰ + P(۷)P(W_A|S_B) + (۱ - P(۷) - P(۶))P(W_A|S_A) \tag{۲}$$

حال معادله ۲ را ساده می‌کنیم:

$$P(W_A|S_B) = \frac{۶}{۳۶} \times P(W_A|S_B) + (۱ - \frac{۶}{۳۶} - \frac{۵}{۳۶})P(W_A|S_A)$$

$$\rightarrow \frac{۳۰}{۳۶} \times P(W_A|S_B) = \frac{۲۵}{۳۶} \times P(W_A|S_A)$$

$$\rightarrow P(W_A|S_B) = \frac{۵}{۶}P(W_A|S_A)$$

حال نتیجه را در معادله ۱ جاگذاری می‌کنیم:

$$P(W_A|S_A) = \frac{۴}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶}P(W_A|S_A) + (۱ - \frac{۴}{۳۶} - \frac{۶}{۳۶}) \times \frac{۵}{۶}P(W_A|S_A)$$

$$\rightarrow (۱ - \frac{۶}{۳۶} - \frac{۶۵}{۱۰۸})P(W_A|S_A) = \frac{۴}{۳۶}$$

$$\rightarrow \frac{۲۵}{۱۰۸}P(W_A|S_A) = \frac{۱}{۹}$$

$$\rightarrow P(W_A|S_A) = \frac{۱۲}{۲۵}$$

بنابراین جواب سوال برابر است با $\frac{۱۲}{۲۵}$.

۶. دسته کارت ۱۰ نمره

یک دسته کارت ۵۲ تایی داریم که شامل کارت‌هایی به رنگ‌های آبی، قرمز، زرد و سبز و از هر رنگ، از عدد ۱ تا ۱۳ می‌باشد. فرهاد دسته کارت‌ها را بر می‌زند. سپس یکی یکی کارت‌ها را رو می‌کند. اگر اولین عدد ۱ در بیستمین کارت رو شده ظاهر شود، چقدر احتمال دارد کارت بیست و یکم کارتی به رنگ آبی و با عدد ۱ باشد؟

پاسخ :

فرض کنید A پیشامد این است که اولین ۱ در بیستمین کارت رو شده ظاهر شود. همچنین فرض کنید B پیشامد این است که بیست و یکمین کارت رو شده به رنگ آبی و با عدد ۱ باشد. طبق تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ابتدا مقدار $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار ابتدا بیست کارت ابتدایی را می‌چینیم و سپس ۳۲ کارت باقی مانده را می‌چینیم. برای جایگاه بیستم ۴ حالت داریم چون چهار کارت با عدد ۱ وجود دارد. همچنین از جایگاه ۱ تا ۱۹ نباید کارتی با عدد ۱ قرار بگیرد.

$$P(A) = \frac{P_{۱۹}^{۴۸} \times ۴ \times ۳۲!}{۵۲!} = \frac{۹۹۲}{۵۴۱۴۵}$$

حال مقدار $P(A \cap B)$ را محاسبه می‌کنیم. این احتمال مشابه احتمال $P(A)$ است، با این تفارت که کارت بیستم نباید کارتی به رنگ آبی و عدد ۱ باشد. بنابراین برای جایگاه بیستم ۳ حالت و برای جایگاه بیست و یکم ۱ حالت وجود دارد.

$$P(A \cap B) = \frac{P_{۱۹}^{۴۸} \times ۳ \times ۱ \times ۳۱!}{۵۲!} = \frac{۹۳}{۲۱۶۵۸۰}$$

حال می‌توانیم احتمال خواسته شده را بدست آوریم:

$$P(B|A) = \frac{\frac{۹۳}{۲۱۶۵۸۰}}{\frac{۹۹۲}{۵۴۱۴۵}} = \frac{۳}{۱۲۸}$$