آمار و احتمال مهندسی
اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

پاسخ تمرین سوم ـ توزیع‌های توام، استقلال
طراح: علی حمزه‌پور
سوپروایزر: الهه خداوردی
تاریخ تحویل: ۶ آذر ۱۴۰۳

بیشتر بدانیم: کانولوشن

فرض کنید دو مجموعه از اعداد یا توابع دارید که می‌خواهید با استفاده از عملیاتی روی آن‌ها به مجموعه‌ی جدیدی از اعداد برسید. ساده‌ترین عملیات‌ها، جمع و ضرب این دو مجموعه هستند. اما راه دیگری نیز وجود دارد که کانولوشن این دو مجموعه است. کانولوشن، برخلاف ضرب و جمع، به راحتی به صورت مستقیم قابل محاسبه نیست. همانطور که در درس دیدیم تعریف کانولوشن به صورت زیر است:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

از کانولوشن در حوزه‌های مختلفی از جمله پردازش تصویر، احتمالات و ضرب چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌شود.

ما با کاربرد آن در احتمالات شروع می‌کنیم. فرض کنید دو تاس ناهمسان داریم. تابع احتمال تاس اول را $P(x)$ و تابع احتمال تاس دوم را $P(y)$ در نظر می‌گیریم. اگر متغیر تصادفی Z نمایانگر جمع دو تاس باشد، آنگاه تابع احتمال Z چگونه محاسبه می‌شود؟

اگر بخواهیم روش ساده‌ای برای محاسبه را تصویرسازی کنیم، یک روش کشیدن یک جدول است تا حالات مختلف مسئله را بنویسیم و برای حالات خواسته‌شده بتوانیم احتمالات مربوطه را به دست آوریم:

$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$p_1 \cdot q_3$	$p_1 \cdot q_4$	$p_1 \cdot q_5$	$p_1 \cdot q_6$
$p_2 \cdot q_1$	$p_2 \cdot q_2$	$p_2 \cdot q_3$	$p_2 \cdot q_4$	$p_2 \cdot q_5$	$p_2 \cdot q_6$
$p_3 \cdot q_1$	$p_3 \cdot q_2$	$p_3 \cdot q_3$	$p_3 \cdot q_4$	$p_3 \cdot q_5$	$p_3 \cdot q_6$
$p_4 \cdot q_1$	$p_4 \cdot q_2$	$p_4 \cdot q_3$	$p_4 \cdot q_4$	$p_4 \cdot q_5$	$p_4 \cdot q_6$
$p_5 \cdot q_1$	$p_5 \cdot q_2$	$p_5 \cdot q_3$	$p_5 \cdot q_4$	$p_5 \cdot q_5$	$p_5 \cdot q_6$
$p_6 \cdot q_1$	$p_6 \cdot q_2$	$p_6 \cdot q_3$	$p_6 \cdot q_4$	$p_6 \cdot q_5$	$p_6 \cdot q_6$

حال در یک رویکرد دیگر فرض کنید که $P(x)$ و $P(y)$ به صورت لیستی هستند که $P_X[i] = p_i$ و $P_Y[i] = q_i$ که هر دو برابر این است که هر یک از تاس ها i بیاید. اگر $P(y)$ را برعکس کنیم می‌توانیم با تصویرسازی به پاسخ برسیم. این گام را با استفاده از تصویر زیر در ادامه توضیح خواهیم داد.

p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6

q_6 q_5 q_4 q_3 q_2 q_1

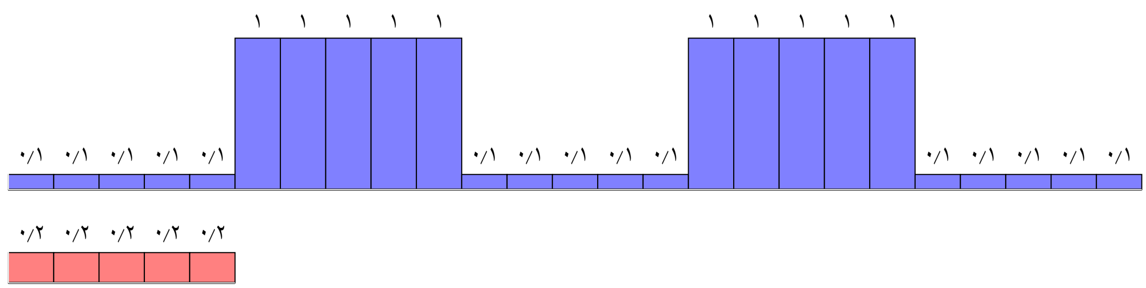
z_2

با هر بار هل دادن ردیف دوم به سمت راست، تاس‌هایی که جمع یکسان دارند، زیر هم قرار می‌گیرند. سپس کافی است جمع حاصل احتمالات هر حالت را محاسبه کنیم تا به پاسخ برسیم.

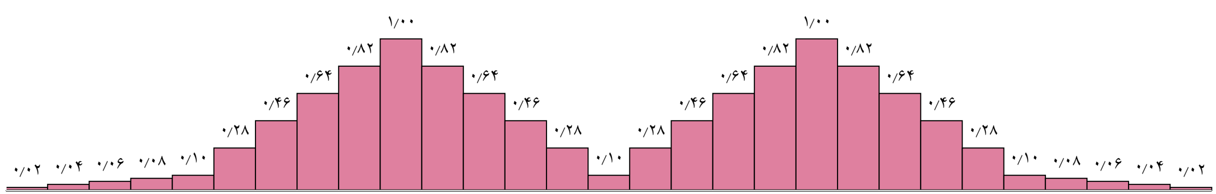
$$
\begin{aligned}
z_2 &= p_1 \cdot q_1 \\
z_3 &= p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 \\
z_4 &= p_1 \cdot q_3 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_1 \\
z_5 &= p_1 \cdot q_4 + p_2 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_2 + p_4 \cdot q_1 \\
z_6 &= p_1 \cdot q_5 + p_2 \cdot q_4 + p_3 \cdot q_3 + p_4 \cdot q_2 + p_5 \cdot q_1 \\
z_7 &= p_1 \cdot q_6 + p_2 \cdot q_5 + p_3 \cdot q_4 + p_4 \cdot q_3 + p_5 \cdot q_2 + p_6 \cdot q_1 \\
z_8 &= p_2 \cdot q_6 + p_3 \cdot q_5 + p_4 \cdot q_4 + p_5 \cdot q_3 + p_6 \cdot q_2 \\
z_9 &= p_3 \cdot q_6 + p_4 \cdot q_5 + p_5 \cdot q_4 + p_6 \cdot q_3 \\
z_{10} &= p_4 \cdot q_6 + p_5 \cdot q_5 + p_6 \cdot q_4 \\
z_{11} &= p_5 \cdot q_6 + p_6 \cdot q_5 \\
z_{12} &= p_6 \cdot q_6
\end{aligned}
$$

مقادیر بالا همان کانولوشن p و q است ($z_n = (p * q)_n = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot q_{n-i} \quad \text{for} \quad 2 \leq n \leq 12$).

حال تصور کنید که یک مجموعه بزرگ از اعداد دارید و همچنین یک مجموعه کوچک از اعداد که جمع آن‌ها برابر با یک است. به عنوان مثال، مثال زیر را در نظر بگیرید:



حال، همانند آنچه در مثال تاس انجام دادیم، با هل دادن مجموعه دوم به سمت راست و جمع کردن حاصل‌ضرب مقادیر مربوط به ستون‌های یکسان، به مجموعه اعداد زیر می‌رسیم.



در این مثال، کاری که انجام دادیم، میانگین‌گیری از مجموعه اعداد اول در یک پنجره کوچک (اشتراک آن در هر مرحله با مجموعه اعداد دوم) بود.

حال اگر بخواهیم در فضای دو بعدی، پنجرهٔ مشابهی داشته باشیم، می‌توانیم از آن برای اعمال الگوریتم‌های مختلف روی تصاویر استفاده کنیم. در حوزه پردازش تصویر، به پنجرهٔ مربوطه اصطلاحاً kernel گفته می‌شود. برای مثال، kernel زیر برای شارپ کردن تصاویر به کار می‌رود.

$$
\text{Sharpening Kernel} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

تصاویر مجموعه‌ای دو بعدی از پیکسل‌ها هستند. هر پیکسل شامل کد رنگی RGB در آن نقطه است. با حرکت دادن kernel روی تصویر و اعمال عملیات کانولوشن، تصویر جدیدی به دست می‌آید. در هنگام شارپ کردن تصویر، kernel باعث می‌شود که وزن پیکسل‌های

مجاور نسبت به پیکسل مرکزی کاهش یابد، و به این ترتیب تصویر شارپ‌تر می‌شود.

$$* \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

حال می‌توانید حدس بزنید که kernel زیر چه کاری انجام می‌دهد؟

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱. رستوران موردعلاقه — ۲۰ نمره

رستوران موردعلاقه محمد و پارمیس سه نوع غذا به قیمت‌های ۱۲، ۱۵ و ۲۰ دلار سرو می‌کند. متغیر تصادفی X را هزینه شام محمد و متغیر تصادفی Y را هزینه شام پارمیس در نظر بگیرید. تابع احتمال مشترک این دو متغیر به شکل زیر است:

$p(x,y)$	$y = 12$	$y = 15$	$y = 20$
$x = 12$	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱۰
$x = 15$	۰/۰۵	۰/۱۰	۰/۳۵
$x = 20$	۰	۰/۲۰	۰/۱۰

الف) تابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را بیابید. (۴ نمره)

ب) احتمال اینکه ماکسیمم هزینه بین شام محمد و پارمیس ۱۵ دلار شود چقدر است؟ (۴ نمره)

ج) توضیح دهید آیا X و Y مستقل هستند. (۴ نمره)

د) امید ریاضی مجموع هزینه محمد و پارمیس را بدست آورید. (۴ نمره)

ه) یک شب که محمد و پارمیس به رستوران رفته بودند، رییس رستوران به آن‌ها گفت که به پاس قدردانی از این دو مشتری ثابت، قرار است تفاوت هزینه غذای این دو نفر را به آن‌ها برگردانند. امید ریاضی مبلغی که رستوران به آن‌ها برمی‌گرداند چقدر است؟ (۴ نمره)

۲. PDF is all you need! — ۱۴ نمره

تابع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y به شکل زیر است:

$$f(x,y) = x + cy^2 \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$

الف) مقدار c را بدست آورید. (۳ نمره)

ب) مقدار $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{2})$ را بدست آورید. (۳ نمره)

ج) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X را بدست آورید. (۴ نمره)

د) تابع توزیع تجمعی توام این دو متغیر را بدست آورید. (۴ نمره)

۳. گنج مخفی ۱۶ نمره

الهه به تازگی متوجه شده که در طبقه سوم دانشکده گنجی مخفی شده است! او تنها می‌داند که این گنج حتما در فاصله‌ی حداکثر R متری یک نقطه از این طبقه قرار دارد. مختصات نقطه‌ی گنج نسبت به همان نقطه‌ی مبدا را با دو متغیر تصادفی X و Y نسبت می‌دهیم.

الف) احتمال اینکه گنج در فاصله‌ی $\frac{R}{5}$ از مرکز دایره باشد چقدر است؟ (۴ نمره)

ب) احتمال اینکه مقادیر X و Y هر دو کمتر از $\frac{R}{\sqrt{3}}$ باشند چقدر است؟ (۴ نمره)

ج) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y را بدست آورید. (۴ نمره)

د) الهه با تحقیقات بیشتر مقدار متغیر X را متوجه شده است. آیا شانس او برای پیدا کردن مقدار Y بیشتر شده است؟ (۴ نمره)

۴. تاس‌های عادلانه ۲۰ نمره

می‌خواهیم دو تاس طراحی کنیم به طوری‌که حاصل جمع مقادیر دو تاس یک توزیع یکنواخت از ۲ تا ۱۲ شود. به بیان دیگر در صورتی که X متغیر تصادفی برابر با مقدار تاس اول و Y متغیر تصادفی برابر با مقدار تاس دوم باشد، $P(X+Y=s)$ برای $2 \leq s \leq 12$ یک مقدار یکسان شود. در صورتی که این کار ممکن است، تابع جرمی احتمال هر یک از تاس‌ها را بنویسید(مقادیر تاس بین ۱ تا ۶ است). در غیر این صورت اثبات کنید که این کار ممکن نیست.

۵. رسیدن یا نرسیدن ۲۰ نمره

نرگس صبح امتحان آمار دیر از خواب بیدار شده و تنها یک ساعت زمان دارد تا به دانشگاه برسد. او برای رسیدن به ایستگاه مترو باید تاکسی بگیرد و بعد با مترو به داشگاه برود. زمان پیدا شدن تاکسی از توزیع نمایی با میانگین ۵ دقیقه پیروی می‌کند و مسیر رسیدن به ایستگاه مترو نیز ۱۰ دقیقه طول می‌کشد. زمان رسیدن مترو به ایستگاه مبدا نرگس نیز از توزیع یکنواخت بین صفر تا پانزده دقیقه پیروی می‌کند و درنهایت نیم‌ساعت طول می‌کشد تا مترو به ایستگاه مقصد برسد. احتمال دیر نرسیدن نرگس به جلسه امتحان را حساب کنید.

۶. گشتاور زنجیره‌ای ۱۰ نمره

فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاور $\phi_Y(t)$ است. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X نیز به شکل زیر است:

$$\phi_X(t) = \frac{1}{3}\left(1 + 2e^{3t}\right)\phi_Y(t)$$

در صورتی که میانگین و واریانس Y به ترتیب ۱۰ و ۱۲ باشد، میانگین و واریانس X را بیابید.

۷. تابع عجیب (سوال امتیازی) — ۱۵ نمره

تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به شکل زیر است:

$$\phi_X(t) = \frac{۱}{۱ - \frac{t}{۲}} \left(\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴} e^t \right)^۸$$

$P(X > ۲/۵)$ را بیابید.