

آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

تمرین اول - متغیرهای تصادفی، واریانس، توزیع‌های گسسته احتمال

طراح: فرجاد فلاح

سوپروایزر: ارشیا عطایی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۸/۰۶

بیشتر بدانیم: پارادوکس برتراند

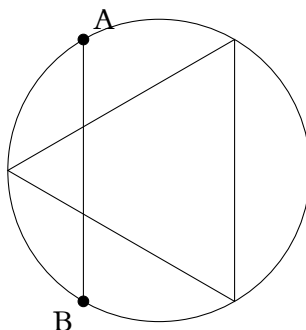
پارادوکس برتراند یکی از معروف‌ترین پارادوکس‌های احتمالات است که نشان می‌دهد چگونه احتمال یک رویداد می‌تواند بسته به روش انتخابی متفاوت باشد. در این پارادوکس، مسئله به صورت زیر مطرح می‌شود:

یک دایره و یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی در آن دایره داریم. یک وتر دلخواه از دایره رسم می‌شود. احتمال این که طول این وتر بیشتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، چقدر است؟

در پارادوکس برتراند، سه روش مختلف برای انتخاب یک وتر مطرح می‌شود که هر یک نتایج متفاوتی از احتمال را ارائه می‌دهند.

روش اول: انتخاب دو نقطه تصادفی بر روی محیط دایره

در این روش، ابتدا دو نقطه تصادفی بر روی محیط دایره انتخاب می‌شوند و سپس وترى که این دو نقطه را به هم متصل می‌کند رسم می‌شود.



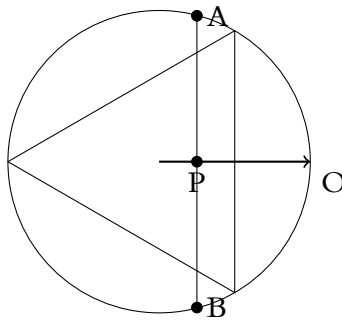
فرض کنید که مثلث متساوی‌الاضلاع در دایره محاط شده است. طول ضلع این مثلث برابر است با $r\sqrt{3}$ ، که r شعاع دایره است. برای این که طول وتر بیشتر از طول ضلع مثلث باشد، باید زاویه بین دو نقطه A و B در محیط دایره بین 60° و 120° باشد.

احتمال این رویداد برابر است با نسبت طول قوس زاویه‌ای که در این بازه قرار دارد به طول کل محیط دایره:

$$P(\text{طول وتر بیشتر از ضلع مثلث}) = \frac{120^\circ - 60^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{3}$$

روش دوم: انتخاب یک نقطه تصادفی بر روی شعاع دایره

در این روش، یک شعاع تصادفی انتخاب می‌شود و سپس نقطه‌ای به صورت تصادفی بر روی این شعاع انتخاب می‌شود. وتر مورد نظر عمود بر شعاع و از این نقطه رسم می‌شود.



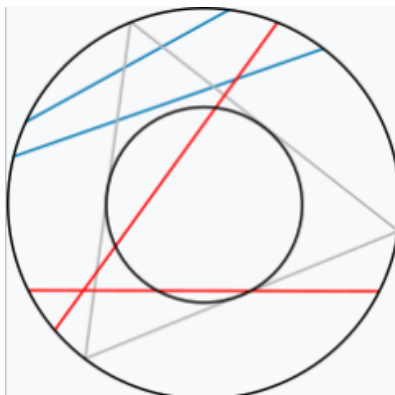
در این روش، برای اینکه وتر AB طولانی‌تر از ضلع مثلث باشد، باید نقطه P که بر روی شعاع انتخاب شده است، در فاصله کمتر از $r/2$ از مرکز دایره باشد.

احتمال این رویداد برابر است با نسبت طول ناحیه‌ای که نقطه P می‌تواند در آن قرار گیرد به کل طول شعاع:

$$P(\text{وتر طولانی‌تر از ضلع مثلث}) = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$$

روش سوم: انتخاب یک نقطه تصادفی درون دایره

چون هر وتر از دایره عمود بر شعاعی از دایره است که از نقطه وسط آن به مرکز دایره وصل می‌شود لذا هر وتر به‌طور یکتا به وسیله نقطه میانی آن وتر مشخص می‌شود. برای رسم یک وتر تصادفی نقطه‌ای تصادفی داخل دایره انتخاب می‌کنیم و به مرکز دایره وصل می‌کنیم. سپس وتر عمود بر این خط در نقطه انتخابی را رسم می‌کنیم. واضح است که این وتر وقتی و تنها وقتی بزرگتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره است که نقطه وسط آن (یعنی همان نقطه تصادفی که درون دایره انتخاب کردیم) درون دایره‌ای قرار بگیرد که هم‌مرکز با دایره اولیه است و شعاعش نصف شعاع آن است.



برای اینکه طول وتر بیشتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، نقطه P باید درون ناحیه‌ای قرار داشته باشد که به فاصله کمتر از $r/2$ از مرکز دایره قرار دارد. این ناحیه، دایره‌ای با شعاع $r/2$ است که در مرکز دایره بزرگتر قرار دارد. مساحت این دایره داخلی برابر است با:

$$\text{مساحت دایره داخلی} = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

مساحت کل دایره برابر است با:

$$\text{مساحت کل دایره} = \pi r^2$$

بنابراین احتمال اینکه وتر انتخابی طولانی‌تر از ضلع مثلث باشد، برابر است با نسبت مساحت دایره داخلی به مساحت کل دایره:

$$P(\text{وتر طولانی‌تر از ضلع مثلث}) = \frac{\text{مساحت دایره داخلی}}{\text{مساحت کل دایره}} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

۱. شکست تا پیروزی!

۲۰ نمره

از ما خواسته شده در یک آزمایش عجیب شرکت کنیم. در این آزمایش ما یک بازی انجام خواهیم داد که احتمال تساوی در آن برابر ۰ است. بار اولی که بازی را انجام می‌دهیم، احتمال بردن یا باختن ما برابر $\frac{1}{4}$ است. هر بار که ببازیم، مجدداً باید بازی را تکرار کنیم اما این بار شرایط بازی به طوری تغییر می‌کند تا احتمال باختن ما نصف شود. این آزمایش آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا ما یک بار برنده شویم.

الف) احتمال آنکه آزمایش با دقیقاً ۲ بازی تمام شود و احتمال آنکه آزمایش حداقل ۴ بازی طول بکشد را محاسبه کنید. (۵ نمره)

ب) اگر آزمایش با بازی X اُم تمام شود، تابع جرمی احتمال (PMF) این متغیر تصادفی را محاسبه کرده و به کمک آن احتمال آنکه آزمایش با دقیقاً ۶ بازی تمام شود را محاسبه کنید (۱۰ نمره)

پ) اگر بدانیم آزمایش تا انتهای بازی سوم تمام نشده است، احتمال آنکه آزمایش دقیقاً با بازی چهارم تمام شود را محاسبه کنید. (۵ نمره)

۲. پیشنهاد ارشیا!

۱۵ نمره

یک تاس منصف ۴ وجهی با اعداد ۱ تا ۴ و یک تاس منصف شش وجهی با اعداد ۱ تا ۶ در اختیار داریم. ارشیا یک بازی به ما پیشنهاد می‌دهد. در هر مرحله از بازی هر دو تاس را میریزیم؛ اگر عدد تاس ۴ وجهی بزرگ‌تر از عدد تاس ۶ وجهی بود ۲ برابر عدد رو شده توسط تاس چهار وجهی امتیاز می‌گیریم و در غیر این صورت یک امتیاز از دست می‌دهیم.

الف) اگر X را امتیاز حاصل از یک بازی در نظر بگیریم، PMF آن را در یک جدول مشخص کنید. (۵ نمره)

ب) اگر امتیاز اولیه ما ۵۰ باشد بعد از ۴۸ بار بازی کردن، به طور متوسط موجودی ما چقدر خواهد بود؟ (۵ نمره)

پ) اگر امتیاز اولیه ما ۵۰ باشد بعد از ۴۸ بار بازی کردن، انحراف معیار موجودی ما در پایان ۴۸ بار بازی چقدر است؟ (۵ نمره)

۳. عیدانه!

۱۵ نمره

برای بازی‌های عیدانه، یک بازی جذاب طراحی کرده‌ایم. در این بازی، بازیکن هر بار سه تاس را پرتاب می‌کند و به اندازه مجموع دو عدد بزرگتر امتیاز می‌گیرد. اگر همه تاس‌های رو شده بزرگتر از ۲ باشند، به عنوان جایزه او یک بار دیگر نیز بازی کند. امتیازی که او در دور جدید می‌گیرد (مجموع دو عدد بزرگتر جدید) با امتیازات قبلی او جمع می‌شوند و اگر دوباره هر سه تاس او بزرگتر از ۲ باشند مجدداً بازی خواهد کرد. امتیاز متوسط بازیکن را در پایان بازی محاسبه کنید.

۴. جاذبه!

۲۰ نمره

نیوتون قبل از شروع کلاس بعدی خود زیر سایه یکی از درختان دانشکده مشغول استراحت است. بر شاخه‌های مختلف آن درخت، ۵ سیب آویزان است که هر کدام از آنها سقوط کند بر روی نیوتون افتاده و باعث کشف جاذبه می‌شود. در این روز پاییزی هر ۳ دقیقه یک نسیم می‌وزد. با هر نسیم احتمال آنکه هر سیب سقوط کند، مستقل از دیگر سیب‌ها و برابر عکس قطر شاخه خود بر حسب میلیمتر است. قطر شاخه‌ها به ترتیب ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰ و ۸۰ میلیمتر است.

الف) اگر تعداد نسیم‌هایی که باید بوزد تا اولین سیب بر روی نیوتون سقوط کند را با T نمایش دهیم، CDF این متغیر تصادفی را بدست آورید. (۱۰ نمره)

ب) اگر نیوتن ۱ ساعت دیگر برای شرکت در کلاسش از زیر درخت بلند شود، چه قدر احتمال دارد که جاذبه کشف شود؟ (۵ نمره)

پ) اگر نیوتون زیر درخت خواب بماند و نتواند سر کلاس حاضر شود، به طور میانگین چقدر طول می کشد تا یکی از سیب ها بر روی او سقوط کند؟ (۵ نمره)

۵. تقاطع خطرناک!

۱۵ نمره

یک تقاطع بین یک خیابان یک طرفه دو بانده و یک کوچه یک طرفه تک بانده وجود دارد. به دلیل تصادفات زیاد در این محل، پلیس تصمیم گرفته است یک چراغ راهنمایی در این تقاطع قرار دهد. پلیس برای مدیریت هرچه بهتر، از شما که درس آمار و احتمال را گذرانده‌اید کمک می‌خواهد. تعداد ماشین‌هایی که در هر ثانیه از خیابان به تقاطع می‌رسند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_1 = 1/2$ است. از طرفی تعداد ماشین‌هایی که در هر ثانیه از کوچه به تقاطع می‌رسند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_2 = 0/8$ است. راننده‌هایی که در خیابان هستند منطقی عمل می‌کنند و همواره باندهی که تعداد کمتری ماشین در آن وجود دارد را انتخاب می‌کنند. پلیس از ما خواسته است با فرض اینکه طول هر ماشین ۴ متر است، نسبت زمان قرمز بودن چراغ کوچه به زمان قرمز بودن چراغ خیابان را به گونه‌ای طراحی کنیم تا به طور متوسط، طول ترافیک ایجاد شده در هنگام چراغ قرمز در هر دو طرف تقاطع یکسان باشد. (فرض کنید با هر باز سبز شدن چراغ تمامی ماشین‌ها با موفقیت از تقاطع عبور می‌کنند.)

۶. سریال!

۱۵ نمره

ارسالان به تازگی در یک شرکت فروش تلفنی خدمات استخدام شده است. شرایط کاری او به صورتی است که هر روز بعد از ۱۰ فروش موفق کارش تمام شده و می‌تواند به خانه برود. از آنجایی که این اولین شغل مرتبط به فروش اوست، احتمال آنکه هر تماس او به فروش منجر شود برابر ۱۰ درصد است. هر تماس او نیز ۴ دقیقه طول می‌کشد. او از هفته آینده کار خود را شروع خواهد کرد. شرکت به او یک کتاب دو جلدی معرفی کرده است که هر جلد ۵۰۰ صفحه دارد. ارسالان هر صفحه را به طور متوسط در ۱ دقیقه و ۳۰ ثانیه مطالعه می‌کند. مطالعه جلد اول، موفقیت تماس‌های او را به ۱۲ درصد افزایش می‌دهد و مطالعه هر دو کتاب، موفقیت او را به ۱۳ درصد می‌رساند. ارسالان که علاقه بسیاری به دیدن سریال دارد می‌خواهد در یک ماه و یک هفته آینده بیشترین ساعات ممکن سریال ببیند. با توجه به اینکه ماه اول ۲۲ روز کاری دارد:

الف) آیا خواندن جلد اول به او در رسیدن به هدفش کمک می‌کند؟ اگر این طور است چه مقدار بیشتر می‌تواند سریال ببیند؟ (۶ نمره)

ب) آیا خواندن هر دو جلد کتاب در مقایسه با قسمت الف به او در رسیدن به هدفش کمک می‌کند؟ اگر این طور است نسبت به حالت الف چه مقدار بیشتر می‌تواند سریال ببیند؟ (۶ نمره)

پ) در نهایت ارسالان باید چه کار کند تا بتواند بیشترین زمان را صرف مشاهده سریال کند؟ (۳ نمره)

۷. ربات! (امتیازی)

۱۰ نمره

دانشجویان دانشگاه تهران یک ربات عجیب در دست طراحی دارند. این ربات در هر مرحله به صورت مستقل از مراحل قبل و با احتمال یکسان یا یک واحد به سمت چپ و یا یک واحد به سمت راست حرکت می‌کند. در یک آزمایش این ربات در مبدا یک محور قرار گرفته و از آن خواسته شده است n بار حرکت کند. از ما خواسته شده تا این n حرکت را دنبال کرده و اطلاعاتی را یادداشت کنیم تا به طراحی آن کمک کنیم. در ازای این کار به ما پاداشی داده خواهد شد. هر بار که n حرکت تمام می‌شود پاداش ما به اندازه مجذور فاصله ربات تا مبدا است. می‌خواهیم میانگین پاداش خود را به ازای n حرکت محاسبه کنیم تا درباره همکاری تصمیم گیری کنیم.