آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

تمرین هفتم – مقدمه‌ای بر برآوردیابی، آزمون فرض و بازه اطمینان

طراح: امیرمهدی فرزانه
سوپروایزر: سارا معصومی

تاریخ تحویل: ۲۳ دی ۱۴۰۳

بیشتر بدانیم: خطای دادستان

شرح مسئله

خطای دادستان[1] یک مسئله معروف در آمار و احتمالات است که نشان می‌دهد احتمال یک واقعه چگونه می‌تواند اشتباه تفسیر شده و نتایج نادرستی از آن گرفته شود.

فرض کنید شما یک وکیل مدافع هستید و موکل شما (آقای x) به قتل عمد متهم شده است. با این حال شما می‌دانید موکل‌تان بی‌گناه است و می‌خواهید بی‌گناهی او را ثابت کنید. در جلسه دادگاه دادستان اعلام می‌کند که دی‌ان‌ای موکل شما با دی‌ان‌ای پیدا شده روی سلاح قتل مطابقت دارد و به همین دلیل آقای x متهم شماره یک پرونده شناخته شده است.
شما به این موضوع اعتراض می‌کنید و به دادستان می‌گویید که ممکن است تصادفاً و به اشتباه دی‌ان‌ای آقای x با دی‌ان‌ای موجود روی سلاح منطبق شده باشد. دادستان اعتراض شما را نمی‌پذیرد و می‌گوید: "احتمال این که دی‌ان‌ای یک فرد بی‌گناه با دی‌ان‌ای مجرم منطبق شود ۱ در ۱ میلیون است. بدون شک آقای x گناهکار است و باید مجازات شود."
استدلال دادستان ممکن است در نگاه اول منطقی به نظر برسد ولی اگر بیشتر به آن فکر کنیم متوجه مشکل بزرگ این استدلال خواهیم شد.
به گفته دادستان،

$$P(\text{منطبق شدن دی‌ان‌ای فرد با دی‌ان‌ای مجرم} \mid \text{بی‌گناه بودن فرد}) \approx \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$$

یا به بیان دیگر،

$$P(\text{گناهکار شناخته شدن فرد} \mid \text{بی‌گناه بودن فرد}) \approx \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$$

امّا آیا ناچیز بودن این احتمال ثابت می‌کند که آقای x گناهکار است؟
برای بررسی این موضوع فرض کنید شهری که این جرم در آن رخ داده است ۴ میلیون نفر جمعیت دارد. پس طبق ادعای دادستان، به طور میانگین ۴ نفر در این شهر وجود دارند که بی‌گناه‌اند ولی دی‌ان‌ای آن‌ها با دی‌ان‌ای مجرم تطابق پیدا می‌کند و گناهکار شناخته می‌شوند. همچنین یک مجرم نیز در این شهر وجود دارد. پس دی‌ان‌ای ۵ نفر می‌تواند با دی‌ان‌ای مجرم مطابقت داشته باشد.
حال اگر یک فرد در دادگاه گناهکار شناخته شود احتمال بی‌گناه بودن آن چقدر خواهد بود؟ با اطلاعاتی که در دست داریم به سادگی می‌توانیم این احتمال را محاسبه کنیم،

$$\begin{aligned} P(\text{بی‌گناه بودن فرد} \mid \text{گناهکار شناخته شدن فرد}) &= \frac{P(\text{بی‌گناه بودن یک فرد و گناهکار شناخته شدن او})}{P(\text{گناهکار شناخته شدن یک فرد})} \\ &= \frac{\frac{۴}{۱۰۰۰۰۰۰}}{\frac{۵}{۱۰۰۰۰۰۰}} = ۰/۸ \end{aligned}$$

---

[1] The Prosecutor's Fallacy

در نتیجه احتمال این که آقای x به اشتباه گناهکار شناخته شده باشد ۰/۸ است که احتمال قابل توجهی‌ست!!!

اشتباه استدلال دادستان این است که او فرض کرده آقای x بی‌گناه است و می‌گوید در اینصورت احتمال گناهکار شناخته شدن او ۱ در ۱ میلیون می‌باشد. در حالی که بی‌گناه بودن آقای x یک فرض نیست، بلکه دقیقاً موضوعی‌ست که باید بررسی شود. پس روش درست برخورد با این مسئله این است که بررسی کنیم در صورت گناهکار شناخته شدن آقای x احتمال بی‌گناه بودن آن چقدر خواهد بود.

اکنون ممکن است خطای دادستان احمقانه به نظر برسد، امّا متاسفانه این یک خطای رایج و مکرر است. برای مثال می‌توان به پرونده غم‌انگیز سالی کلارک[۲] اشاره کرد. او در سال ۱۹۹۸ به اشتباه به قتل دو فرزندش متهم و به حبس ابد محکوم شد.

آزمون فرض و ماتریس درهم‌ریختگی

اکنون می‌خواهیم برای بررسی اتهام موکل‌تان یک آزمون فرض طراحی کنیم. آزمون زیر را در نظر بگیرید،

$$H_0: \quad \text{آقای x بی‌گناه است}$$
$$H_1: \quad \text{آقای x گناهکار است}$$

در جدول زیر می‌توانید اطلاعاتی که از این آزمون در دست داریم را مشاهده کنید،

	عدم تطبیق DNA فرد با DNA مجرم	تطبیق DNA فرد با DNA مجرم
فرد مجرم باشد	0	1
فرد بی‌گناه باشد	4,000,000 – 4	4

از جدول بالا کاملاً مشخص است که،

$$P(\text{مجرم} \mid \text{بی‌گناه}) = \frac{۴}{۴۰۰۰۰۰۰} = \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$$
$$P(\text{بی‌گناه} \mid \text{مجرم}) = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

جدول بالا در واقع یک ماتریس درهم‌ریختگی[۳] است و معمولاً آن را به صورت زیر نشان می‌دهند،

	عدم رد H_0 (عدم تطبیق DNA)	رد H_0 (تطبیق DNA)
H_0 نادرست است (مجرم)	0 False Negative	1 True Positive
H_0 درست است (بی‌گناه)	4,000,000 – 4 True Negative	4 False Positive

[۲] Sally Clark
[۳] Confusion Matrix

ماتریس درهم‌ریختگی سطح معناداری آزمون فرض را نیز نشان می‌دهد. جالب است بدانید که عبارت زیر معادل با α یا همان سطح معناداری آزمون فرض است،

$$P(\text{مجرم} \mid \text{بی‌گناه}) = \frac{\text{False Positive}}{\text{False Positive} + \text{True Negative}} = \alpha$$

به α خطای نوع اول آزمون[۴] نیز می‌گویند. خطای نوع اول آزمون در واقع نشان‌دهنده احتمال این است که فرض صفر برقرار باشد و ما به اشتباه آن را رد کنیم.
در مسئله خطای دادستان دیدیم که خطای نوع اول آزمون یا همان α برابر با $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$ بود که مقدار بسیار ناچیزی‌ست. پس نتیجه می‌گیریم پایین بودن مقدار خطای نوع اول آزمون لزوماً به معنای دقیق بودن نتیجه آزمون نیست. در اینجا می‌توانید بیشتر در مورد خطاهای آزمون فرض بخوانید.

۰۱ رژیم غذایی — ۱۵ نمره

یک پزشک ورزشی یک برنامه غذایی تهیه کرده است و برای بررسی کارکرد آن، تعدادی داوطلب را به صورت تصادفی انتخاب کرده و از آن‌ها خواسته است که از این برنامه غذایی استفاده کنند. نتایج تغییر وزن داوطلبان به این صورت است:
۲۸ نفر به‌طور میانگین $۰/۳kg$ کاهش وزن داشته‌اند، وزن ۲۴ نفر هیچ تغییری نداشته است و ۸ نفر در مجموع $۲/۴kg$ افزایش وزن داشته‌اند.
همچنین گشتاور مرتبه دوم تغییر وزن این داوطلبان برابر $۵/۴kg^۲$ می‌باشد.

آ. یک‌بار با استفاده از آزمون فرض (با استفاده از z-test و به روش p-value)، و بار دیگر با روش بازه اطمینان به این پزشک کمک کنید تا بررسی کند آیا برنامه غذایی او باعث تغییر وزن داوطلبان شده است یا خیر. فرض کنید $\alpha = ۰/۰۵$. (۱۰ نمره)

ب. در قسمت آ، اگر تعداد داوطلبان انتخاب شده ۷ نفر بود نمی‌توانستیم برای انجام آزمون فرض از z-test استفاده کنیم. علت این موضوع را بیان کنید و سپس روشی جایگزین را نام ببرید که برای انجام آزمون فرض در این حالت مناسب باشد. (۵ نمره)

پاسخ :

آ. در این سوال فرض صفر معادل با این است که برنامه غذایی باعث تغییر وزن داوطلبان نشده، و فرض جایگزین معادل با این است که برنامه باعث تغییر وزن داوطلبان شده است. (دقت کنید برای پزشک تغییر وزن داوطلبان مهم است، نه کاهش وزن‌شان.)
بنابراین یک آزمون فرض دوطرفه به صورت زیر خواهیم داشت.

$$H_۰ : \mu = ۰$$

$$H_A : \mu \neq ۰$$

ابتدا $\bar{x}$و s که به ترتیب میانگین و انحراف معیار تغییر وزن داوطلبان هستند را محاسبه می کنیم.

$$\bar{x} = \frac{-۲۸ \times ۰/۳ + ۲/۴}{۲۸ + ۲۴ + ۸} = -۰/۱$$

گشتاورهای نمونه‌ای اول و دوم به صورت زیر هستند،

$$m_۱ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i = \bar{x} = -۰/۱$$

$$m_۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ = ۵/۴$$

[۴] Type ۱ error

در نتیجه برای محاسبه واریانس نمونه داریم،

$$\begin{aligned} s^۲ &= \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲ \\ &= \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}({x_i}^۲+\bar{x}^۲-۲\bar{x}x_i) \\ &= \frac{۱}{n-۱}\left(nm_۲+nm_۱^۲-۲nm_۱^۲\right) \\ &= \frac{n}{n-۱}(m_۲-m_۱^۲) \\ &= \frac{۶۰}{۵۹}(۵/۴-۰/۱^۲)\approx ۵/۴۸ \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$s=\sqrt{۵/۴۸}=۲/۳۴$$

می‌دانیم با فرض درست بودن $H_۰$ خواهیم داشت،

$$\bar{X}\sim N(\mu_۰,\frac{s}{\sqrt{n}})$$

در نتیجه آماره آزمون[۵] به صورت زیر خواهد بود،

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_۰}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$\longrightarrow z=\frac{-۰/۱-۰}{\frac{۲/۳۴}{\sqrt{۶۰}}}=-۰/۳۳$$

پس برای محاسبه p-value خواهیم داشت،

$$\text{p-value}=۲P(Z>|z|)=۲P(Z>۰/۳۳)=۰/۷۴$$

$۰/۰۵<۰/۷۴$ پس نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم. یعنی نمی‌توان گفت که این برنامه غذایی وزن داوطلبان را تغییر داده است.

می‌دانیم یک بازه اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای میانگین جامعه به صورت زیر است،

$$\begin{aligned} \left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}},\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right) &\equiv \left(-۰/۱-\frac{۲/۳۴}{\sqrt{۶۰}}\cdot ۱/۹۶,-۰/۱+\frac{۲/۳۴}{\sqrt{۶۰}}\cdot ۱/۹۶\right) \\ &\equiv (-۰/۶۹,۰/۴۹) \end{aligned}$$

از آن‌جایی که $\mu_۰=۰$ در بازه بالا قرار دارد، پس در این روش نیز نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم.

ب. برای استفاده از z-test باید اندازه نمونه بزرگ باشد تا بتوانیم با استفاده از قضیه حد مرکزی توزیع میانگین نمونه‌ای را با توزیع نرمال تقریب بزنیم. در صورتی که اندازه نمونه به اندازه کافی بزرگ نباشد، برای انجام آزمون فرض به جای z-test می‌توانیم از t-test استفاده کنیم. در این‌جا می‌توانید بیشتر در مورد تفاوت‌های این دو تست بخوانید.

۲. انتخابات ۱۵ نمره

در انتخابات استانی، در صورتی که یک نامزد در بیشتر از نیمی از استان‌ها بیشترین رأی را آورده باشد برنده انتخابات خواهد بود. جدول زیر تعداد رأی‌های مربوط به ۵ استان را نشان می‌دهد. تعداد نمونه جمع‌آوری شده از هر استان ۲۰۰ تا می‌باشد.

[۵] Test statistic

رأی‌دهندگان به نامزد X	رأی‌دهندگان به نامزد Y	شماره استان
۱۶۱	۳۹	۱
۸۹	۱۱۱	۲
۱۱۰	۹۰	۳
۱۸۸	۱۲	۴
۱۰۶	۹۴	۵

با توجه به نتایج این نظرسنجی، آیا X می‌تواند نتیجه‌گیری کند که او برنده انتخابات خواهد بود؟ (از سطح اطمینان $\alpha = ۰/۰۵$ استفاده کنید.)

پاسخ :

ابتدا به کمک آزمون فرض نسبت مشخص می‌کنیم در هر استان $\hat{p}$ حداقل باید چقدر باشد تا X بتواند نتیجه بگیرد برنده آن استان است. آزمون فرض مدنظر به صورت زیر است،

$$H_۰ : p = ۰/۵$$
$$H_A : p > ۰/۵$$

می‌دانیم تحت فرض $H_۰$ خواهیم داشت،

$$\hat{p} \sim N(p_۰, \sqrt{\frac{p_۰(۱-p_۰)}{n}})$$
$$\longrightarrow \quad \hat{p} \sim N(۰/۵, \sqrt{\frac{۰/۵ \times ۰/۵}{۲۰۰}} \approx ۰/۰۳۵)$$

آماره آزمون نیز به صورت زیر است،

$$Z = \frac{\hat{p} - p_۰}{\sqrt{\frac{p_۰(۱-p_۰)}{n}}}$$
$$\longrightarrow \quad z = \frac{\hat{p} - ۰/۵}{۰/۰۳۵} \tag{۱}$$

برای این‌که نامزد X در سطح ۹۵درصد بتواند نتیجه بگیرد برنده یک استان است، باید مقدار p-value این آزمون کم‌تر یا مساوی ۰/۰۵ باشد. در نتیجه،

$$\text{p-value} = P(Z > z) \leq ۰/۰۵$$
$$\longrightarrow \quad z \geq z_{۰/۰۵}$$
$$\longrightarrow \quad z \geq ۱/۶۴۵$$

در نتیجه با توجه به عبارت ۱ خواهیم داشت،

$$z = \frac{\hat{p} - ۰/۵}{۰/۰۳۵} \geq ۱/۶۴۵$$
$$\longrightarrow \quad \hat{p} \geq ۰/۵۵۷$$

پس اگر در یک استان نسبت رأی‌دهندگان به نامزد X بزرگ‌تر یا مساوی ۰/۵۵۷ باشد، می‌توانیم در سطح ۹۵ درصد ادعا کنیم که نامزد X برنده آن استان خواهد بود.

نسبت رای دهندگان به X	شماره استان
۰/۸۰۵	۱
۰/۴۴۵	۲
۰/۵۵	۳
۰/۹۴۵	۴
۰/۵۳	۵

با توجه به جدول بالا مشخص است که فقط برای استان‌های اول و چهارم می‌توانیم ادعای پیروزی X را داشته باشیم. در نتیجه این نامزد در بیشتر استان‌ها رأی اکثریت را کسب نکرده است و نمی‌تواند نتیجه‌گیری کند که برنده انتخابات خواهد بود.

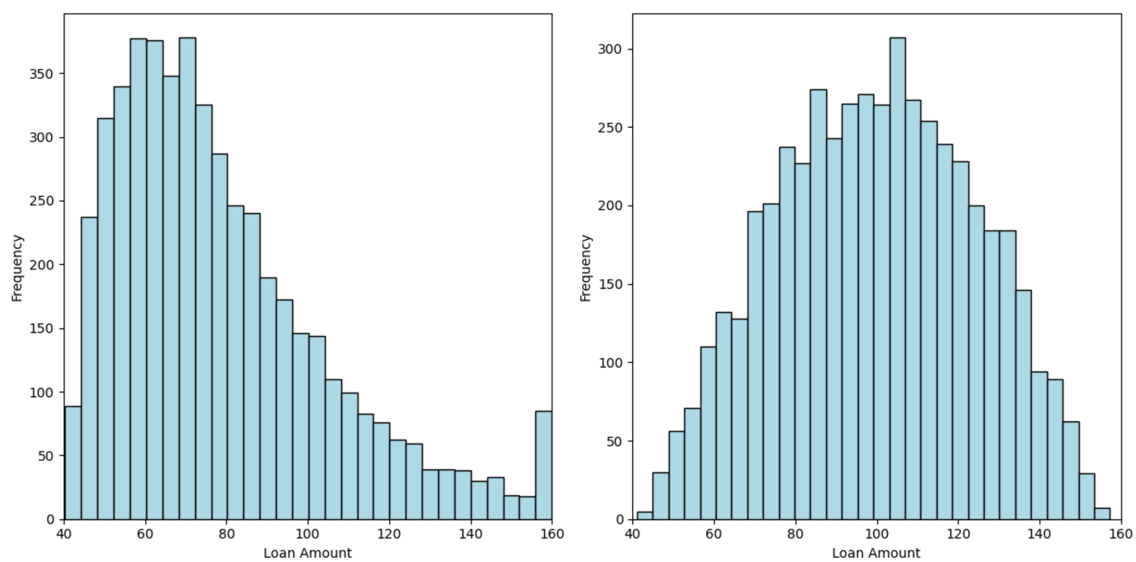
۳. اطلاعات از دست‌رفته بانک — ۲۵ نمره

پس از حمله هکرها، بخشی از اطلاعات حساب مشتریان یک بانک از دست رفته است. از شما خواسته شده تا با استفاده از روش‌هایی که آموخته‌اید برخی از این اطلاعات از دست رفته را محاسبه کنید.

آ. فرض کنید بعد از حمله هکری فقط اطلاعات حساب سپرده ۱۰۰ مشتری در دیتابیس بانک باقی مانده است. می‌دانیم با توجه به این نمونه، طول بازه اطمینان ۹۰ درصد برای میانگین میزان سپرده‌گذاری مشتریان (به میلیون تومان) برابر با ۱۸ است. از شما خواسته شده است با توجه به این اطلاعات انحراف معیار میزان سپرده‌گذاری افراد در این بانک را محاسبه کنید تا بدانیم پراکندگی نقدینگی حساب‌های سپرده در این بانک چقدر است. (۱۰ نمره)

ب. می‌دانیم نسبت افرادی که حساب سپرده خود را در سال آینده نخواهند بست حداکثر برابر با ۰/۴ است. حال می‌خواهیم از هکرها اطلاعات حساب سپرده برخی از مشتریان را به صورت تصادفی پس بگیریم. حداقل تعداد این مشتریان باید چقدر باشد تا مطمئن باشیم طول بازه اطمینان ۹۹درصد نسبت افرادی که در سال آینده حساب خود را نمی‌بندند حداکثر ۰/۰۴ است؟ (۱۰ نمره)

ج. دو نمودار زیر نشانگر میزان وام دریافتی توسط دو گروه متفاوت از مشتریان هستند. از آن‌جایی که میانگین وام دریافتی هر دو گروه را از دست داده‌ایم، می‌خواهیم بازه اطمینان‌های ۹۵ درصد این دو میانگین را محاسبه کنیم. به این منظور کدام یک از این دو گروه نیاز به نمونه‌برداری با اندازه بزرگ‌تری دارد؟ توضیح دهید. (۵ نمره)



پاسخ :

آ. می‌دانیم بازه اطمینان ۹۰ درصد برای میانگین به صورت زیر است،

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۰/۹۵},\ \ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۰/۹۵}\right)$$

می‌دانیم طول این بازه اطمینان ۱۸ است، در نتیجه،

$$\begin{aligned} & \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.95} = 18 \\ \longrightarrow \quad & \frac{\sigma}{10} 1.645 = 9 \\ \longrightarrow \quad & \sigma = 54.71 \end{aligned}$$

در نتیجه انحراف معیار میزان سپرده‌گذاری افراد در این بانک برابر با ۵۴/۷۱ میلیون تومان می‌باشد.

ب. می‌دانیم بازه اطمینان ۹۹ درصد نسبت جامعه (p) به صورت زیر است،

$$\left(\hat{p} - z_{0.995}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ \ \hat{p} + z_{0.995}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

در نتیجه طول این بازه اطمینان برابر است با،

$$\begin{aligned} & 2z_{0.995}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 2 \times 2.575\sqrt{\frac{0.4(0.6)}{n}} \leq 0.04 \\ \longrightarrow \quad & \sqrt{\frac{0.24}{n}} \leq \frac{0.02}{2.575} \\ \longrightarrow \quad & n \geq 3978.3 \end{aligned}$$

در نتیجه اندازه نمونه باید حداقل ۳۹۷۹ باشد.

ج. هیستوگرام سمت راست حدوداً دارای تقارن است و این موضوع نشان می‌دهد که توزیع میزان وام دریافتی این گروه نیز یک توزیع نسبتاً متقارن خواهد بود. هیستوگرام سمت چپ چوله به راست[۶] است و در نتیجه توزیع میزان وام دریافتی این گروه نیز احتمالاً متقارن نیست و دارای چولگی خواهد بود. می‌دانیم قضیه حد مرکزی روی توزیع‌های متقارن تقریب بهتری به ما می‌دهد و در توزیع‌های نامتقارن باید اندازه نمونه بزرگ‌تر باشد تا بتوانیم به تقریب دقیق‌تری برسیم. پس برای گروه مربوط به هیستوگرام سمت چپ نیاز به نمونه بزرگ‌تری خواهیم داشت.

۴. وب‌سایت خوب یا بد؟؟ ۲۵ نمره

یک برنامه‌نویس فرانت می‌خواهد بررسی کند در طراحی سایت چقدر عملکرد خوبی داشته است و برای این کار به کمک شما احتیاج دارد. فرض کنید زمان حضور کاربران در صفحه این سایت (به دقیقه) از توزیع ویبول[۷] پیروی می‌کند.
تابع چگالی احتمال این توزیع بدین شکل است،

$$f(x;k,\lambda) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{(k-1)} e^{-(x/\lambda)^k}, \quad x \geq 0$$

آ. فرض کنید مقدار پارامتر k معلوم است. حال با استفاده از روش درست‌نمایی بیشینه[۸] برآوردگر پارامتر λ را به دست آورید. (۱۰ نمره)

ب. این بار با استفاده از روش گشتاوری[۹] برآوردگر پارامتر λ را محاسبه کنید. به ازای چه مقداری از k برآوردگر این قسمت معادل با برآوردگر قسمت قبل خواهد بود؟ (۵ نمره)

[۶] Right-Skewed
[۷] Weibull Distribution
[۸] Maximum likelihood estimation
[۹] Method of moments

ج. نمونه جدیدی از زمان حضور ۱۶۰۰ کاربر در این وب‌سایت در اختیار داریم که میانگین آن ۸ است. اگر قبل از استخدام این برنامه‌نویس میانگین حضور کاربران در این وبسایت ۱۰ دقیقه بوده باشد، آیا این برنامه‌نویس عملکرد مناسبی در طراحی سایت و جذب کاربران داشته است یا خیر؟ $(\sigma = ۰/۸,\ \alpha = ۰/۰۱)$ (۱۰ نمره)

پاسخ :

آ. ابتدا تابع درست‌نمایی را تشکیل می‌دهیم،

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; k, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{(k-1)} e^{-(x_i/\lambda)^k} \\ &= \left(\frac{k}{\lambda^k}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{k-1}\right) e^{-\frac{1}{\lambda^k}\sum_{i=1}^{n} x_i^k} \end{aligned}$$

از تابع درست‌نمایی لگاریتم می‌گیریم،

$$LL(\lambda) = n\left(\ln k - k\ln\lambda\right) + (k-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\lambda^k}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

حال مشتق این تابع نسبت به λ را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقطه ماکسیمم تابع را پیدا کنیم،

$$\frac{\partial LL(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{-nk}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = 0$$

$$\longrightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

ب. با استفاده از روش گشتاوری داریم،

$$\begin{aligned} &\mu_1 = E(X) = \lambda\Gamma(1 + \frac{1}{k}) \\ &\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X} \\ &\longrightarrow \quad \lambda\Gamma(1 + \frac{1}{k}) = \bar{X} \\ &\longrightarrow \quad \hat{\lambda}_{mom} = \frac{\bar{X}}{\Gamma(1 + \frac{1}{k})} \end{aligned}$$

حال باید $\hat{\lambda}_{ML}$ و $\hat{\lambda}_{mom}$ را برابر قرار دهیم،

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_{mom} = \hat{\lambda}_{ML} \\ &\longrightarrow \quad \frac{\bar{X}}{\Gamma(1 + \frac{1}{k})} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \\ &\longrightarrow \quad k = 1 \end{aligned}$$

پس به ازای $k = ۱$ برآوردگر به دست آمده به روش ماکسیمم درست‌نمایی و برآوردگر به دست آمده به روش گشتاوی یکسان خواهند بود و داریم $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

ج. بازه اطمینان ٪۹۹ برای میانگین به صورت زیر است،

$$\begin{aligned}
&\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\frac{۰/۰۱}{۲}},\ \ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{۱-\frac{۰/۰۱}{۲}}\right) \\
\equiv &\left(۸ - \frac{۰/۸}{\sqrt{۱۶۰۰}} \cdot ۲/۵۸,\ \ ۸ + \frac{۰/۸}{\sqrt{۱۶۰۰}} \cdot ۲/۵۸\right) \\
\equiv &(۷/۹۵, ۸/۰۵)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه کران بالای بازه اطمینان به دست آمده کم‌تر از ۱۰ دقیقه است، می‌توانیم فرض صفر (عملکرد خوب برنامه‌نویس) را رد کنیم و نتیجه می‌گیریم وب‌سایت جدید در جذب کاربران موفق نبوده است.

## ۵. دستگاه ونتیلاتور		۱۰ + ۱۰ نمره

در سال ۲۰۲۰، با شیوع گسترده‌ی COVID-19، بیمارستان‌های سراسر جهان نیاز مبرمی به دستگاه‌های ونتیلاتور [۱۰] برای بیماران مبتلا به مشکلات تنفسی شدید پیدا کردند. یکی از چالش‌های مهم، مدیریت زمان استفاده از این دستگاه‌ها و پیش‌بینی زمان خرابی آن‌ها بود. فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی باشد که نسبت زمانی که نوعی ونتیلاتور بدون خرابی کار می‌کند به طول عمر مفید آن را نشان می‌دهد. تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت زیر است،

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-۱}, \qquad ۰ \leq x \leq ۱,\ ۰ < \theta < \infty$$

آ. برآوردگر درست‌نمایی بیشینه θ را به دست آورید.

ب. آیا برآوردگر به دست آمده یک برآوردگر پایدار[۱۱] است؟ (امتیازی)
راهنمایی: $Y_i = \ln X_i \sim E(\frac{۱}{\theta})$ و در نتیجه $T = -\sum_{i=۱}^{n} \ln X_i \sim \text{Gamma}(n, \frac{۱}{\theta})$.

پاسخ :

آ. ابتدا تابع درست‌نمایی را تشکیل می‌دهیم،

$$L(\theta) = \prod_{i=۱}^{n} \theta x_i^{\theta-۱} = \theta^n (\prod_{i=۱}^{n} x_i)^{\theta-۱}, \qquad ۰ \leq x_i \leq ۱$$

از تابع درست‌نمایی لگاریتم می‌گیریم،

$$LL(\theta) = n \ln(\theta) + (\theta - ۱) \sum_{i=۱}^{n} \ln x_i$$

مشتق دوم این تابع نسبت به θ منفی است، در نتیجه مشتق اول آن را برابر صفر قرار می‌دهیم تا نقطه ماکسیمم تابع را پیدا کنیم،

$$\begin{aligned}
&\frac{dLL(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=۱}^{n} \ln x_i = ۰ \\
\longrightarrow \quad &\hat{\theta}_{ML} = -\frac{n}{\sum_{i=۱}^{n} \ln X_i}
\end{aligned}$$

[۱۰] Ventilator
[۱۱] Consistent estimator

ب. با توجه به راهنمایی می‌دانیم،

$$T = -\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \sim \text{Gamma}(n, \frac{1}{\theta})$$

همچنین می‌توانیم بنویسیم،

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{T}$$

می‌دانیم یک برآوردگر پایدار است اگر و تنها اگر داشته باشیم،

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta,$$
$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

حال با توجه به تابع چگالی توزیع گاما امید و واریانس $\hat{\theta}$ را محاسبه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= nE(\frac{1}{T}) \\ &= \frac{n\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{t} t^{n-1} e^{-\theta t} dt \\ &= \frac{n\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} \\ &= \frac{n\theta}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{T^2}) &= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} t^{n-1} e^{-\theta t} dt \\ &= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{\theta^{n-2}} \\ &= \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &= n^2 Var(\frac{1}{T}) \\ &= n^2 \left(E(\frac{1}{T^2}) - E^2(\frac{1}{T}) \right) \\ &= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان دید،

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\theta = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\theta^2 = 0$$

و در نتیجه $\hat{\theta}$ یک برآوردگر پایدار برای θ است.

۶. برآورد فاصله‌ای واریانس　　　　۱۰ نمره

فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^۲)$. یک فاصله اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای $\sigma^۲$ به‌دست آورید.

راهنمایی: برای حل این سوال باید از توزیع کای‌ــ‌دو[۱۲] کمک بگیریم. توزیع کای‌ــ‌دو با kدرجه آزادی[۱۳] $(\chi^۲_{(k)})$ در واقع توزیع مجموع مربعات k متغیر تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد است. یعنی می‌توان گفت:

$$X_۱, \dots, X_k \overset{\text{iid}}{\sim} N(۰, ۱) \longrightarrow Y = \sum_{i=۱}^{k} X_i^۲ \sim \chi^۲_{(k)}$$

همچنین از این توزیع برای به دست آوردن توزیع واریانس نمونه‌ای استفاده می‌شود. می‌تواند نشان داد اگر یک نمونه تصادفی nتایی از یک توزیع نرمال با واریانس $\sigma^۲$ داشته باشیم و $S^۲$ واریانس این نمونه باشد خواهیم داشت،

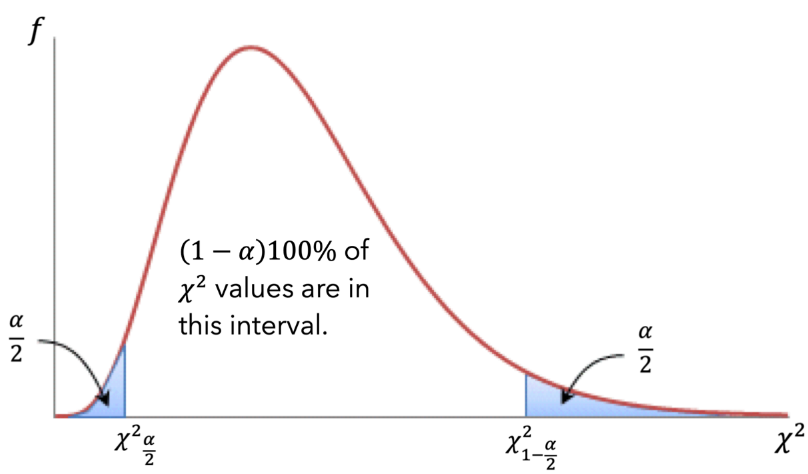
$$\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)}$$

اثبات کامل این قضیه را می‌توانید در این‌جا بخوانید.
می دانیم (a, b) یک بازه اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای $\sigma^۲$ است اگر داشته باشیم، $P(a < \sigma^۲ < b) = ۱-\alpha$. حال با توجه به توضیحات داده شده این بازه اطمینان را پیدا کنید.

پاسخ :

می‌دانیم $S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \overline{X})^۲$ یک برآوردگر نااریب برای $\sigma^۲$ است و همچنین $X^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n-۱)}$. می‌خواهیم aو b را طوری پیدا کنیم که $P(a < \sigma^۲ < b) = ۱-\alpha$.
از آن‌جایی که توزیع $X^۲$ را داریم و $X^۲$ تابعی از $\sigma^۲$ است، ابتدا a'و b' را پیدا می‌کنیم به طوری که،

$$P(a' < X^۲ < b') = ۱-\alpha$$



---
[۱۲] Chi-squared Distribution
[۱۳] degrees of freedom

با توجه به تصویر بالا که نشانگر pdf توزیع chi-squared است نتیجه می‌شود:

$$P\big({\chi^2}_{(n-1;\frac{\alpha}{2})} < X^2 < {\chi^2}_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\big) = 1-\alpha$$
$$\longrightarrow \quad P\Big({\chi^2}_{(n-1;\frac{\alpha}{2})} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < {\chi^2}_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}\Big) = 1-\alpha$$
$$\longrightarrow \quad P\Big(\frac{(n-1)S^2}{{\chi^2}_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{{\chi^2}_{(n-1;\frac{\alpha}{2})}}\Big) = 1-\alpha$$

و در نتیجه $\left(\frac{(n-1)S^2}{{\chi^2}_{(n-1;1-\frac{\alpha}{2})}}, \frac{(n-1)S^2}{{\chi^2}_{(n-1;\frac{\alpha}{2})}}\right)$ یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای σ^2 است.

۷. توزیع نمایی دوتایی (امتیازی)　　۱۰ نمره

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی زیر باشد.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}, \qquad -\infty < x < \infty, \ \ -\infty < \theta < \infty$$

با روش درست‌نمایی بیشینه برآوردگر پارامتر θ را به دست آورید.

پاسخ :

ابتدا تابع درست‌نمایی را تشکیل می‌دهیم،

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}e^{-|x_i-\theta|} = 2^{-n}e^{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|}$$

در نتیجه با لگاریتم گرفتن از تابع درست‌نمایی خواهیم داشت،

$$LL(\theta) = -n\ln(2) - \sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$$

از آن‌جایی که $-n\ln(2)$ یک مقدار ثابت دارد، پس برای بیشینه کردن این تابع کافی‌ست $\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$ را کمینه کنیم.
فرض کنید $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی[14] این نمونه باشند. بدون کاسته شدن از کلیات مسئله می‌توانیم بنویسیم،

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta| = \sum_{i=1}^{n}|x_{(i)}-\theta|$$

می‌دانیم $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \dots \le x_{(n)}$. فرض کنید $1 \le j \le n$ بزرگترین اندیسی باشد که $x_{(j)} \le \theta$، در نتیجه $\theta < x_{(j+1)}$. پس می‌توانیم بنویسیم،

$$\sum_{i=1}^{n}|x_{(i)}-\theta| = \sum_{i=1}^{j}(\theta - x_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^{n}(x_{(i)}-\theta)$$
$$= j\theta - \sum_{i=1}^{j}x_{(i)} - (n-j)\theta + \sum_{i=j+1}^{n}x_{(i)}$$
$$= (2j-n)\theta - \sum_{i=1}^{j}x_{(i)} + \sum_{i=j+1}^{n}x_{(i)}$$

[14] Order Statistics

تابع بالا یک تابع خطی نسبت به θ است که به ازای $j < \frac{n}{۲}$ نزولی و به ازای $j > \frac{n}{۲}$ صعودی است. در نتیجه اگر n زوج باشد این تابع به ازای $j = \frac{n}{۲}$ کمینه می‌شود. از $j = \frac{n}{۲}$ نتیجه می‌گیریم،

$$x_{(\frac{n}{۲})} \leq \theta < x_{(\frac{n}{۲}+۱)}$$

پس اگر n زوج باشد هر مقداری بین $x_{(\frac{n}{۲})}$ و $x_{(\frac{n}{۲}+۱)}$ یک MLE برای θ است. معمولاً نقطه وسط این دو آماره ترتیبی که میانه نمونه است را به عنوان MLE پارامتر در نظر می‌گیرند.
اگر n فرد باشد میانه نمونه یکی از اعضای نمونه است و در نتیجه، $\hat{\theta} = x_{(\frac{n+۱}{۲})}$. پس داریم،

$$\begin{cases} x_{(\frac{n}{۲})} \leq \hat{\theta}_{ML} < x_{(\frac{n}{۲}+۱)} & \text{n is even} \\ \hat{\theta}_{ML} = x_{(\frac{n+۱}{۲})} & \text{n is odd} \end{cases}$$

از ابتدا نیز می‌شد حدس زد که میانه نمونه، تابع $\sum_{i=۱}^{n} |X_{(i)} - \theta|$ را نسبت به θ کمینه می‌کند.