آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

تمرین اول ــ متغیرهای تصادفی، واریانس، توزیع‌های گسسته احتمال

طراح: فرجاد فلاح
سوپروایزر: ارشیا عطایی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۸/۰۶

بیشتر بدانیم: پارادوکس برتراند

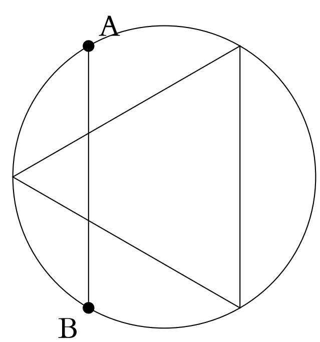
پارادوکس برتراند یکی از معروف‌ترین پارادوکس‌های احتمالات است که نشان می‌دهد چگونه احتمال یک رویداد می‌تواند بسته به روش انتخابی متفاوت باشد. در این پارادوکس، مسئله به صورت زیر مطرح می‌شود:

یک دایره و یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی در آن دایره داریم. یک وتر دلخواه از دایره رسم می‌شود. احتمال این‌که طول این وتر بیشتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، چقدر است؟

در پارادوکس برتراند، سه روش مختلف برای انتخاب یک وتر مطرح می‌شود که هر یک نتایج متفاوتی از احتمال را ارائه می‌دهند.

روش اول: انتخاب دو نقطه تصادفی بر روی محیط دایره

در این روش، ابتدا دو نقطه تصادفی بر روی محیط دایره انتخاب می‌شوند و سپس وتری که این دو نقطه را به هم متصل می‌کند رسم می‌شود.



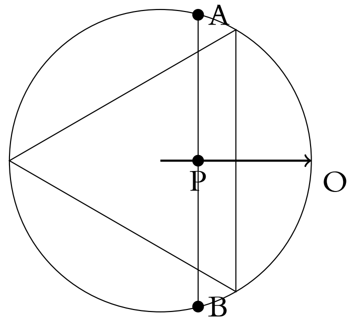
فرض کنید که مثلث متساوی‌الاضلاع در دایره محاط شده است. طول ضلع این مثلث برابر است با $r\sqrt{۳}$، که r شعاع دایره است. برای این که طول وتر بیشتر از طول ضلع مثلث باشد، باید زاویه بین دو نقطه A و B در محیط دایره بین ۶۰° و ۱۲۰° باشد.

احتمال این رویداد برابر است با نسبت طول قوس زاویه‌ای که در این بازه قرار دارد به طول کل محیط دایره:

$$P(\text{طول وتر بیشتر از ضلع مثلث}) = \frac{۱۲۰^\circ - ۶۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{۱}{۳}$$

روش دوم: انتخاب یک نقطه تصادفی بر روی شعاع دایره

در این روش، یک شعاع تصادفی انتخاب می‌شود و سپس نقطه‌ای به صورت تصادفی بر روی این شعاع انتخاب می‌شود. وتر مورد نظر عمود بر شعاع و از این نقطه رسم می‌شود.



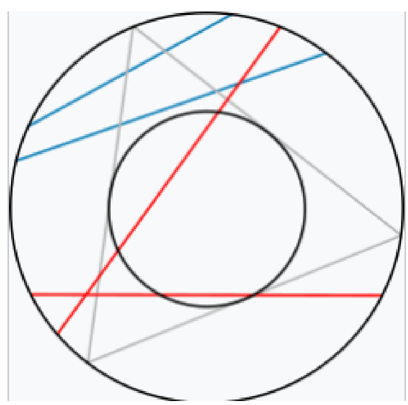
در این روش، برای اینکه وتر AB طولانی‌تر از ضلع مثلث باشد، باید نقطه P که بر روی شعاع انتخاب شده است، در فاصله کمتر از $r/۲$ از مرکز دایره باشد.

احتمال این رویداد برابر است با نسبت طول ناحیه‌ای که نقطه P می‌تواند در آن قرار گیرد به کل طول شعاع:

$$P(\text{وتر طولانی‌تر از ضلع مثلث}) = \frac{r/۲}{r} = \frac{۱}{۲}$$

روش سوم: انتخاب یک نقطه تصادفی درون دایره

چون هر وتر از دایره عمود بر شعاعی از دایره است که از نقطهٔ وسط آن به مرکز دایره وصل می‌شود لذا هر وتر به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ نقطهٔ میانی آن وتر مشخص می‌شود. برای رسم یک وتر تصادفی نقطه‌ای تصادفی داخل دایره انتخاب می‌کنیم و به مرکز دایره وصل می‌کنیم. سپس وتر عمود بر این خط در نقطهٔ انتخابی را رسم می‌کنیم. واضح است که این وتر وقتی و تنها وقتی بزرگتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره است که نقطهٔ وسط آن (یعنی همان نقطهٔ تصادفی که درون دایره انتخاب کردیم) درون دایره‌ای قرار بگیرد که هم‌مرکز با دایره اولیه است و شعاعش نصف شعاع آن است.



برای اینکه طول وتر بیشتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، نقطه P باید درون ناحیه‌ای قرار داشته باشد که به فاصله کمتر از $r/۲$ از مرکز دایره قرار دارد. این ناحیه، دایره‌ای با شعاع $r/۲$ است که در مرکز دایره بزرگ‌تر قرار دارد.

مساحت این دایره داخلی برابر است با:

$$\text{مساحت دایره داخلی} = \pi \left(\frac{r}{۲}\right)^{۲} = \frac{\pi r^{۲}}{۴}$$

مساحت کل دایره برابر است با:

$$\text{مساحت کل دایره} = \pi r^{۲}$$

بنابراین احتمال اینکه وتر انتخابی طولانی‌تر از ضلع مثلث باشد، برابر است با نسبت مساحت دایره داخلی به مساحت کل دایره:

$$P(\text{وتر طولانی‌تر از ضلع مثلث}) = \frac{\text{مساحت دایره داخلی}}{\text{مساحت کل دایره}} = \frac{\frac{\pi r^۲}{۴}}{\pi r^۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱. شکست تا پیروزی! ۲۰ نمره

از ما خواسته شده در یک آزمایش عجیب شرکت کنیم. در این آزمایش ما یک بازی انجام خواهیم داد که احتمال تساوی در آن برابر ۰ است. بار اولی که بازی را انجام می‌دهیم، احتمال بردن یا باختن ما برابر $\frac{۱}{۲}$ است. هر بار که ببازیم، مجددا باید بازی را تکرار کنیم اما این بار شرایط بازی به طوری تغییر می کند تا احتمال باختن ما نصف شود. این آزمایش آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا ما یک بار برنده شویم.

الف) احتمال انکه آزمایش با دقیقا ۲ بازی تمام شود و احتمال آنکه آزمایش حداقل ۴ بازی طول بکشد را محاسبه کنید. (۵ نمره)

ب) اگر آزمایش با بازی X اُم تمام شود، تابع جرمی احتمال (PMF) این متغیر تصادفی را محاسبه کرده و به کمک آن احتمال آنکه آزمایش با دقیقا ۶ بازی تمام شود را محاسبه کنید (۱۰ نمره)

پ) اگر بدانیم آزمایش تا انتهای بازی سوم تمام نشده است، احتمال آنکه آزمایش دقیقا با بازی چهارم تمام شود را محاسبه کنید. (۵ نمره)

پاسخ :

الف) متغیر تصادفی X را برابر شماره بازی ای که منجر به اتمام آزمایش می‌شود تعریف می‌کنیم. ابتدا احتمال پایان ازمایش با بازی دوم را محاسبه می‌کنیم. در این حالت باید بازی اول را ببازیم و بازی بعدی را ببریم:

$$P_X(X = ۲) = \frac{۱}{۲} \times (۱ - (\frac{۱}{۲})^۲) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۸}$$

حال احتمای اینکه بازی تا پایان بازی سوم تمام نشده باشد را محاسبه می کنیم. برای این کار، از متمم استفاده می کنیم چرا که محاسبه احتمال آنکه تا پایان بازی سوم تمام شده باشد ساده تر است:

$$P_X(X > ۳) = ۱ - P_X(X \le ۳) = ۱ - (P_X(X = ۱) + P_X(X = ۲) + P_X(X = ۳))$$
$$= ۱ - (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times (۱ - (\frac{۱}{۲})^۲) + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times (۱ - (\frac{۱}{۲})^۳))$$
$$= ۱ - (\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۸} + \frac{۷}{۶۴}) = ۱ - \frac{۶۳}{۶۴} = \frac{۱}{۶۴}$$

ب) از آنجایی که نتیجه بازی‌ها از هم مستقل هستند برای محاسبه $P_X(X = x)$ کافی است احتمال آنکه آزمایش در $x - ۱$ بازی اول تمام نشود را در احتمال آنکه در بازی x اُم برنده شویم ضرب کنیم.
ابتدا احتمال باختن i بازی اول را محاسبه می کنیم:

$$P_I(I = i) = \Pi_{k=۱}^{i} (\frac{۱}{۲})^k = (\frac{۱}{۲})^{\sum_{k=۱}^{i} k} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{i(i+۱)}{۲}}$$

حال می‌توانیم تابع جرمی احتمال X را تشکیل دهیم:

$$P_X(X = x) = P_X(X = x \mid I = x - ۱) \times P_I(I = x - ۱) = (۱ - (\frac{۱}{۲})^x) \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{(x)(x-۱)}{۲}}$$

حال با جاگذاری ۶ خواهیم داشت:

$$P_X(X=۶) = (۱ - (\frac{۱}{۲})^۶) \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{(۶)(۵)}{۲}} = (۱ - \frac{۶۳}{۲^۶}) \times (\frac{۱}{۲})^{۱۵} = \frac{۶۳}{۲^{۲۱}}$$

پ) ابتدا با استفاده از متغیر تصادفی X عبارت خواسته شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$P_X(X=۴ \mid X>۳) = \frac{P_X(X=۴ \cap X>۳)}{P_X(X>۳)} = \frac{P_X(X=۴)}{P_X(X>۳)}$$

حال به کمک قسمت الف و ب این عبارت را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{P_X(X=۴)}{P_X(X>۳)} = \frac{(۱-(\frac{۱}{۲})^۴) \times (\frac{۱}{۲})^{\frac{(۴)(۴-۱)}{۲}}}{\frac{۱}{۶۴}} = \frac{\frac{۱۵}{۱۰۲۴}}{\frac{۱}{۶۴}} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۲. پیشنهاد ارشیا! — ۱۵ نمره

یک تاس منصف ۴ وجهی با اعداد ۱ تا ۴ و یک تاس منصف شش وجهی با اعداد ۱ تا ۶ در اختیار داریم. ارشیا یک بازی به ما پیشنهاد می دهد. در هر مرحله از بازی هر دو تاس را میریزیم؛ اگر عدد تاس ۴ وجهی بزرگ تر از عدد تاس ۶ وجهی بود ۲ برابر عدد رو شده توسط تاس چهار وجهی امتیاز می‌گیریم و در غیر این صورت یک امتیاز از دست می‌دهیم.

الف) اگر X را امتیاز حاصل از یک بازی در نظر بگیریم، PMF آن را در یک جدول مشخص کنید. (۵ نمره)

ب) اگر امتیاز اولیه ما ۵۰ باشد بعد از ۴۸ بار بازی کردن، به طور متوسط موجودی ما چقدر خواهد بود؟ (۵ نمره)

پ) اگر امتیاز اولیه ما ۵۰ باشد بعد از ۴۸ بار بازی کردن، انحراف معیار موجودی ما در پایان ۴۸ بار بازی چقدر است؟ (۵ نمره)

پاسخ :

الف) در کل $۲۴ = ۶ \times ۴$ حالت ممکن است رخ دهد. عدد حاصل از تاس چهار وجهی را با متغیر تصادفی Z و عدد حاصل از تاس شش وجهی را با متغیر تصادفی Y نمایش می‌دهیم. امتیاز حاصل را هم متغیر تصادفی X در نظر می‌گیریم. مسئله را بر روی حالات ممکن برای Z افراز می کنیم:

۱ـ اگر $Z = ۱$ باشد قطعا ما نمی‌توانیم برنده باشیم پس $X = -۱$ خواهد بود. احتمال این رویداد $\frac{۱}{۴}$ است.

۲ـ اگر $Z = ۲$ باشد، تنها اگر $Y = ۱$ باشد ما بنده خواهیم بود و امتیاز ما برابر $X = ۲ \times Z = ۲ \times ۲ = ۴$ خواهد بود. احتمال این رویداد برابر $\frac{۱}{۲۴} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۴}$ است و در غیر این صورت با احتمال $\frac{۵}{۲۴}$ امتیاز ما برابر -۱ خواهد بود

۳ـ $Z = ۳$ باشد، دقیقا مانند قسمت‌های قبلی به احتمال $\frac{۲}{۲۴}$ امتیاز ما برابر $۶ = ۲ \times ۳ = ۲ \times Z$ و به احتمال $\frac{۴}{۲۴}$ امتیاز -۱ خواهد بود

۴ـ $Z = ۴$ باشد، دقیقا مانند قسمت‌های قبلی به احتمال $\frac{۳}{۲۴}$ امتیاز ما برابر $۸ = ۲ \times ۴ = ۲ \times Z$ و به احتمال $\frac{۳}{۲۴}$ امتیاز -۱ خواهد بود

پس خواهیم داشت:

$$p_x(x=-۱) = \frac{۱۸}{۲۴}$$
$$p_x(x=۴) = \frac{۱}{۲۴}$$

$$p_x(x=۶)=\frac{۲}{۲۴}$$
$$p_x(x=۸)=\frac{۳}{۲۴}$$

ب) اگر امتیاز به دست آمده در بازی i اُم را برابر X_i در نظر بگیریم و امتیاز نهایی را با W نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}[W]=۵۰+\mathbb{E}[\sum_{i=۱}^{۴۸}X_i]$$

طبق خطی بودن امید ریاضی خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}[W]=۵۰+\sum_{i=۱}^{۴۸}\mathbb{E}[X_i]$$

حال کافیست $\mathbb{E}[X_i]$ را به کمک تابع جرمی احتمال محاسبه شده در قسمت اول به دست آوریم:

$$\mathbb{E}[X_i]=\frac{۱۸}{۲۴}\times(-۱)+\frac{۱}{۲۴}\times(۴)+\frac{۲}{۲۴}\times(۶)+\frac{۳}{۲۴}\times(۸)=\frac{-۱۸+۴+۱۲+۲۴}{۲۴}=\frac{۲۲}{۲۴}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

پس طبق iid بودن X_iها داریم:

$$\mathbb{E}[W]=۵۰+\sum_{i=۱}^{۴۸}\mathbb{E}[X_i]=۵۰+۴۸\times\mathbb{E}[X]=۵۰+۴۸\times\frac{۱۱}{۱۲}=۹۴$$

پ) از محاسبه واریانس W شروع می کنیم. از آنجا که اضافه کردن یک مقدار ثابت به یک متغیر تصادفی تاثیری در واریانس آن ندارد، داریم:

$$\sigma^۲(W)=\sigma^۲(۵۰+\sum_{i=۱}^{۴۸}X_i)=\sigma^۲(\sum_{i=۱}^{۴۸}X_i)$$

از آنجایی که X_iها iid هستند خواهیم داشت:

$$\sigma^۲(\sum_{i=۱}^{۴۸}X_i)=\sum_{i=۱}^{۴۸}\sigma^۲(X_i)=۴۸\times\sigma^۲(X)$$

حال کافیست واریانس متغیر تصادفی X را محاسبه کنیم. برای این کار ابتدا به کمک تابع جرمی احتمال محاسبه شده در قسمت الف، $\mathbb{E}[X^۲]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbb{E}[X^۲]=\frac{۱۸}{۲۴}\times(-۱)^۲+\frac{۱}{۲۴}\times(۴)^۲+\frac{۲}{۲۴}\times(۶)^۲+\frac{۳}{۲۴}\times(۸)^۲=\frac{۱۸+۱۶+۷۲+۱۹۲}{۲۴}=\frac{۲۹۸}{۲۴}=\frac{۱۴۹}{۱۲}$$

حال می‌توانیم واریانس W را محاسبه کنیم:

$$\sigma^۲(W)=۴۸\times\sigma^۲(X)=۴۸\times(\mathbb{E}[X^۲]-\mathbb{E}[X])=۴۸\times(\frac{۱۴۹}{۱۲}-\frac{۱۱}{۱۲})=۴۸\times\frac{۱۳۸}{۱۲}=۵۵۲$$

حالا برای محاسبه انحراف معیار کافیست جذر واریانس را محاسبه کنیم:

$$\sigma(W)=\sqrt{\sigma^۲(W)}=\sqrt{۵۵۲}\approx ۲۳/۴۹$$

۳. عیدانه! — ۱۵ نمره

برای بازی‌های عیدانه، یک بازی جذاب طراحی کرده‌ایم. در این بازی، بازیکن هر بار سه تاس را پرتاب می‌کند و به اندازه مجموع دو عدد بزرگتر امتیاز می‌گیرد. اگر همه تاس‌های رو شده بزرگتر از ۲ باشند، به عنوان جایزه او یک بار دیگر نیز بازی کند. امتیازی که او در دور جدید می گیرد(مجموع دو عدد بزرگتر جدید) با امتیازات قبلی او جمع می‌شوند و اگر دوباره هر سه تاس او بزرگتر از ۲ باشند مجددا بازی خواهد کرد. امتیاز متوسط بازیکن را در پایان بازی محاسبه کنید.

پاسخ :

مقدار سه تاس را با X_1, X_2, X_3 و امتیاز نهایی بدست آمده از مرحله فعلی را با S نمایش می‌دهیم. طبق تعریف مسئله داریم:

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 - Min(X_1, X_2, X_3) + S & Min(X_1, X_2, X_3) > 2 \\ X_1 + X_2 + X_3 - Min(X_1, X_2, X_3) & Min(X_1, X_2, X_3) \leq 2 \end{cases}$$

حال $\mathbb{E}[S]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= P(Min(X_1, X_2, X_3) > 2) \times \mathbb{E}[(X_1 + X_2 + X_3 - Min(X_1, X_2, X_3) + S] \\ &+ (1 - P(Min(X_1, X_2, X_3) > 2)) \times \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3 - Min(X_1, X_2, X_3)] \\ &= \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3 - Min(X_1, X_2, X_3)] + P(Min(X_1, X_2, X_3) > 2) \times \mathbb{E}[S] \end{aligned}$$

با ساده سازی خواهیم داشت و استفاده از خطی بودن امید ریاضی و IID بودن X_iها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \frac{1}{1 - P(Min(X_1, X_2, X_3) > 2)} \times \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3 - Min(X_1, X_2, X_3)] \\ &= \frac{1}{1 - P(Min(X_1, X_2, X_3) > 2)} \times (3 \times \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Min(X_1, X_2, X_3)]) \end{aligned}$$

حال کافی است، $\mathbb{E}[X]$، $\mathbb{E}[Min(X_1, X_2, X_3)]$ و $P(Min(X_1, X_2, X_3) > 2)$ را محاسبه کنیم.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3/5$$

ابتدا M را تعریف می‌کنیم $Min(X_1, X_2, X_3)$ و سپس CDF آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} F_M(m) &= P(Min(X_1, X_2, X_3) < m) = 1 - P(Min(X_1, X_2, X_3) > m) \\ &= 1 - P(X_1 > m) \times P(X_2 > m) \times P(X_3 > m) = 1 - P(X > m)^3 = 1 - (\frac{6 - m}{6})^3 \end{aligned}$$

حال می‌توانیم $\mathbb{E}[Min(X_1, X_2, X_3)]$ را با توجه به CDF محاسبه شده، حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Min(X_1, X_2, X_3)] &= \sum_{i=0}^{6} (1 - F_M(i)) = \sum_{i=0}^{6} (\frac{6 - i}{6})^3 \\ &= (\frac{1}{6})^3 + (\frac{2}{6})^3 + (\frac{3}{6})^3 + (\frac{4}{6})^3 + (\frac{5}{6})^3 + (\frac{6}{6})^3 \approx 2/0417 \end{aligned}$$

حال با جاگذاری مقادیر به دست آمده داریم:

$$\mathbb{E}[S] = \frac{۱}{۱ - P(Min(X_۱, X_۲, X_۳) > ۲)} \times (۳ \times \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Min(X_۱, X_۲, X_۳)])$$
$$= \frac{۱}{۱ - (\frac{۴}{۶})^۳} \times (۳ \times ۳/۵ - ۲/۰۴۱۷) \approx ۱/۴۲۱ \times (۸/۴۵۸۳) \approx ۱۲/۰۱۹۲$$

۴. جاذبه! — ۲۰ نمره

نیوتون قبل از شروع کلاس بعدی خود زیر سایه یکی از درختان دانشکده مشغول استراحت است. بر شاخه های مختلف آن درخت، ۵ سیب آویزان است که هر کدام از آنها سقوط کند بر روی نیوتون افتاده و باعث کشف جاذبه می‌شود. در این روز پاییزی هر ۳ دقیقه یک نسیم می وزد. با هر نسیم احتمال آنکه هر سیب سقوط کند، مستقل از دیگر سیب‌ها و برابر عکس قطر شاخه خود بر حسب میلیمتر است. قطر شاخه ها به ترتیب ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰ و ۸۰ میلیمتر است.

الف) اگر تعداد نسیم‌هایی که باید بوزد تا اولین سیب بر روی نیوتون سقوط کند را با T نمایش دهیم، CDF این متغیر تصادفی را بدست آورید. (۱۰ نمره)

ب) اگر نیوتن ۱ ساعت دیگر برای شرکت در کلاسش از زیر درخت بلند شود، چه قدر احتمال دارد که جاذبه کشف شود؟ (۵ نمره)

پ) اگر نیوتون زیر درخت خواب بماند و نتواند سر کلاس حاضر شود، به طور میانگین چقدر طول می کشد تا یکی از سیب ها بر روی او سقوط کند؟ (۵ نمره)

پاسخ :

الف) اگر قطر شاخه هر سیب را با D_i و تعداد نسیم‌های مورد نیاز برای افتادن هر سیب را با X_i نمایش دهیم داریم:

$$X_i \sim Geo(p_i = \frac{۱}{D_i})$$

از طرفی داریم:

$$T = Min(X_۱, X_۲, X_۳, X_۴, X_۵)$$

حال به محاسبه CDF متغیر تصادفی T می‌پردازیم:

$$P(T < t) = P(Min(X_۱, X_۲, X_۳, X_۴, X_۵) < t) = ۱ - P(Min(X_۱, X_۲, X_۳, X_۴, X_۵) \geq t)$$

برای اینکه $Min(X_۱, X_۲, X_۳, X_۴, X_۵)$ بزرگتر یا برابر t باشد کافی است تک تک X_iها بزرگتر یا برابر t باشند.

$$P(T < t) = ۱ - P(Min(X_۱, X_۲, X_۳, X_۴, X_۵) \geq t) = ۱ - P(X_۱ \geq t \cap X_۲ \geq t \cap X_۳ \geq t \cap X_۴ \geq t \cap X_۵ \geq t)$$

از آنجایی که X_iها مستقل هستند داریم:

$$P(T < t) = ۱ - P(X_۱ \geq t) \cdot P(X_۲ \geq t) \cdot P(X_۳ \geq t) \cdot P(X_۴ \geq t) \cdot P(X_۵ \geq t)$$

از طرفی داریم:

$$P(X_i \geq t) = \sum_{j=t}^{\infty} p_i q_i^j = p_i q_i^t \sum_{j=t}^{\infty} q_i^{j-t} = \frac{p_i q_i^t}{p_i} = q_i^t$$

پس داریم:

$$P(T<t)=۱-q_۱^t\cdot q_۲^t\cdot q_۳^t\cdot q_۴^t\cdot q_۵^t=۱-(q_۱\cdot q_۲\cdot q_۳\cdot q_۴\cdot q_۵)^t$$

حال با جاگذاری اعداد داده شده در مسئله خواهیم داشت:

$$P(T<t)=۱-(\frac{۳۹}{۴۰}\cdot\frac{۴۹}{۵۰}\cdot\frac{۵۹}{۶۰}\cdot\frac{۶۹}{۷۰}\cdot\frac{۷۹}{۸۰})^t\approx ۱-(۰/۹۱۴۵۷)^t$$

ب) نیوتون یک ساعت دیگر از زیر درخت بلند می‌شود. در این مدت ۲۰ نسیم خواهد وزید. بنابراین کافی است $P(T\leq ۲۰)$ را محاسبه کنیم. به کمک نتایج قسمت الف خواهیم داشت:

$$P(T\leq ۲۰)=P(T<۲۱)=۱-(۰/۹۱۴۵۷)^{۲۱}\approx ۰/۸۴۶۶۹$$

پ) در این قسمت کافی است که $\mathbb{E}[T]$ را محاسبه کنیم. با کمک CDF محاسبه شده در قسمت الف خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}[T]=\sum_{i=۰}^{\infty}(۱-F_T(i))=\sum_{i=۰}^{\infty}(۰/۹۱۴۵۷)^i=\frac{۱}{۱-۰/۹۱۴۵۷}\approx ۱۱/۷$$

پس به طور میانگین به ۱۱/۷ نسیم نیاز هست تا یکی از سیب‌ها سقوط کند. از طرفی ۳ دقیقه زمان نیاز هست برای هر نسیم پس به طور میانگین به $۳\times ۱۱/۷=۳۵/۱$ دقیقه زمان نیاز است.

## ۵. تقاطع خطرناک!	۱۵ نمره

یک تقاطع بین یک خیابان یک طرفه دو بانده و یک کوچه یک طرفه تک بانده وجود دارد. به دلیل تصادفات زیاد در این محل، پلیس تصمیم گرفته است یک چراغ راهنمایی در این تقاطع قرار دهد. پلیس برای مدیریت هرچه بهتر، از شما که درس آمار و احتمال را گذرانده‌اید کمک می‌خواهد. تعداد ماشین هایی که در هر ثانیه از خیابان به تقاطع می رسند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_۱=۱/۲$ است. از طرفی تعداد ماشین‌هایی که در هر ثانیه از کوچه به تقاطع می رسند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_۲=۰/۸$ است. راننده‌هایی که در خیابان هستند منطقی عمل می کنند و همواره باندی که تعداد کمتری ماشین در آن وجود دارد را انتخاب می‌کنند. پلیس از ما خواسته است با فرض اینکه طول هر ماشین ۴ متر است، نسبت زمان قرمز بودن چراغ کوچه به زمان قرمز بودن چراغ خیابان را به گونه‌ای طراحی کنیم تا به طور متوسط، طول ترافیک ایجاد شده در هنگام چراغ قرمز در هر دو طرف تقاطع یکسان باشد.(فرض کنید با هر باز سبز شدن چراغ تمامی ماشین‌ها با موفقیت از تقاطع عبور می‌کنند.)

پاسخ :

تعداد ماشین‌هایی که در هر ثانیه از خیابان و کوچه رد می‌شوند را به ترتیب با $X_۱$ و $X_۲$ نمایش می دهیم. داریم:

$$X_۱\sim Poi(\lambda_۱=۱/۲)$$

$$X_۲\sim Poi(\lambda_۲=۰/۸)$$

مدت زمان قرمز بودن چراغ خیابان را با $t_۱$ و مدت زمان قرمز بودن چراغ کوچه را با $t_۲$ نمایش می‌دهیم.

حال متوسط طول ترافیک ایجاد شده پشت چراغ قرمز در خیابان را محاسبه می کنیم.

$$\mathbb{E}[L_۱]=\frac{۱}{۲}\times t_۱\times\mathbb{E}[X_۱]\times ۴=۲t_۱\times\lambda_۱=۱/۲\times ۲t_۱=۲/۴t_۱$$

همین کار را برای محاسبه متوسط طول ترافیک ایجاد شده پشت چراغ قرمز در کوچه انجام می‌دهیم.

$$\mathbb{E}[L_۲]=t_۱\times\mathbb{E}[X_۲]\times ۴=۴t_۱\times\lambda_۲=۰/۸\times ۴t_۱=۳/۲t_۱$$

حال با برابر گذاشتن این دو، نسبت $\frac{t_۲}{t_۱}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbb{E}[L_۱] = \mathbb{E}[L_۲] \Rightarrow ۲/۴t_۱ = ۳/۲t_۲ \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۲/۴}{۳/۲} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

۶. سریال! ۱۵ نمره

ارسلان به تازگی در یک شرکت فروش تلفنی خدمات استخدام شده است. شرایط کاری او به صورتی است که هر روز بعد از ۱۰ فروش موفق کارش تمام شده و می‌تواند به خانه برود. از آنجایی که این اولین شغل مرتبط به فروش اوست، احتمال آنکه هر تماس او به فروش منجر شود برابر ۱۰ درصد است. هر تماس او نیز ۴ دقیقه طول می‌کشد. او از هفته آینده کار خود را شروع خواهد کرد. شرکت به او یک کتاب دو جلدی معرفی کرده است که هر جلد ۵۰۰ صفحه دارد. ارسلان هر صفحه را به طور متوسط در ۱ دقیقه و ۳۰ ثانیه مطالعه می‌کند. مطالعه جلد اول، موفقیت تماس‌های او را به ۱۲ درصد افزایش می دهد و مطالعه هر دو کتاب، موفقیت او را به ۱۳ درصد می‌رساند. ارسلان که علاقه بسیاری به دیدن سریال دارد می‌خواهد در یک ماه و یک هفته آینده بیشترین ساعات ممکن سریال ببیند. با توجه به اینکه ماه اول ۲۲ روز کاری دارد:

الف) آیا خواندن جلد اول به او در رسیدن به هدفش کمک می‌کند؟ اگر این طور است چه مقدار بیشتر می تواند سریال ببیند؟ (۶ نمره)

ب) آیا خواندن هر دو جلد کتاب در مقایسه با قسمت الف به او در رسیدن به هدفش کمک می‌کند؟ اگر این طور است نسبت به حالت الف چه مقدار بیشتر می تواند سریال ببیند؟ (۶ نمره)

پ) درنهایت ارسلان باید چه کار کند تا بتواند بیشترین زمان را صرف مشاهده سریال کند؟ (۳ نمره)

پاسخ :

الف) اگر تعداد تماس هایی که ارسلان باید هر روز بگیرد تا بتواند ۱۰ فروش موفق داشته باشد را در صورتی که هیچ کدام از کتاب‌ها را مطالعه نکند متغیر تصادفی $X_۱$ در نظر بگیریم. خواهیم داشت:

$$X_۱ \sim NegBin(r = ۱۰, p = ۰/۱)$$

حال مدت زمان تماس های ارسلان را در این صورت در هر ماه را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbb{E}[T_۱] = \mathbb{E}[X_۱] \times ۲۲ \times ۴ = \frac{r}{p} \times ۲۲ \times ۴ = \frac{۱۰}{۰/۱} \times ۲۲ \times ۴ = ۸۸۰۰$$

به طور مشابه اگر تعداد تماس‌های مورد نیاز در صورتی که ارسلان جلد اول کتاب را بخواند را $X_۲$ و مدت زمان تماس‌های او در این صورت را $T_۲$ بنامیم خواهیم داشت:

$$X_۲ \sim NegBin(r = ۱۰, p = ۰/۱۲)$$

$$\mathbb{E}[T_۲] = \mathbb{E}[X_۲] \times ۲۲ \times ۴ = \frac{r}{p} \times ۲۲ \times ۴ = \frac{۱۰}{۰/۱۲} \times ۲۲ \times ۴ \approx ۷۳۳۳$$

حال با در نظر گرفتن زمان مطالعه جلد اول کتاب، محاسبه می‌کنیم که به طور متوسط چقدر زمان صرفه جویی خواهد شد.

$$\mathbb{E}[Y_۱] = \mathbb{E}[T_۱] - \mathbb{E}[T_۲] - ۵۰۰ \times ۱/۵ = ۸۸۰۰ - ۷۳۳۳ - ۷۵۰ = ۷۱۷$$

پس در کل ارسلان با مطالعه جلد اول کتاب به طور متوسط ۷۱۷ دقیقه صرفه جویی خواهد کرد و این کار برای او به صرفه است.

ب) مانند قسمت الف، متوسط تعداد تماس و زمان موزد نیاز برای کامل کردن ۱۰ فروش را اینبار بعد از خواندن هر دو جلد کتاب محاسبه می کنیم.

$$X_3 \sim NegBin(r = 10, p = 0/13)$$

$$\mathbb{E}[T_3] = \mathbb{E}[X_3] \times 22 \times 4 = \frac{r}{p} \times 22 \times 4 = \frac{10}{0/13} \times 22 \times 4 \approx 6769$$

حال با در نظر گرفتن زمان مطالعه جلد اول و دوم کتاب، محاسبه می‌کنیم که به طور متوسط چقدر زمان صرفه جوییی خواهد شد.

$$\mathbb{E}[Y_2] = \mathbb{E}[T_1] - \mathbb{E}[T_3] - 2 \times 500 \times 1/5 = 8800 - 6769 - 1500 = 531$$

پس ارسلان با مطالعه هر دو جلد کتاب به طور متوسط ۵۳۱ دقیقه صرفه جویی خواهد کرد و این در مقابل ۷۱۷ دقیقه صرفه جویی قسمت الف کمتر است و به صرفه نخواهد بود.

پ) همانطور که در قسمت الف و ب دیدیم خواندن جلد اول کتاب به تنهایی بهترین کاریست که ارسلان می‌تواند انجام دهد و خواندن جلد دوم در صرفه جویی بیشتر به او کمکی نخواهد کرد.

۷. ربات! (امتیازی) — ۱۰ نمره

دانشجویان دانشگاه تهران یک ربات عجیب در دست طراحی دارند. این ربات در هر مرحله به صورت مستقل از مراحل قبل و با احتمال یکسان یا یک واحد به سمت چپ و یا یک واحد به سمت راست حرکت می کند. در یک آزمایش این ربات در مبدا یک محور قرار گرفته و از آن خواسته شده است n بار حرکت کند. از ما خواسته شده تا این n حرکت را دنبال کرده و اطلاعاتی را یادداشت کنیم تا به طراحی آن کمک کنیم. در ازای این کار به ما پاداشی داده خواهد شد. هر بار که n حرکت تمام می شود پاداش ما به اندازه مجذور فاصله ربات تا مبدا است. می خواهیم میانگین پاداش خود را به ازای n حرکت محاسبه کنیم تا درباره همکاری تصمیم گیری کنیم.

پاسخ :

ابتدا نتیجه هر حرکت ربات را با متغیر تصادفی X_i نمایش می‌دهیم. جایگاه نهایی ربات بعد از n حرکت را نیز با S_n نمایش می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

حال دو راه حل مختلف برای محاسبه $\mathbb{E}[S_n^2]$ داریم.

راه حل اول: به کمک محاسبه واریانس و میانگین S_n، میانگین پاداش را محاسبه خواهیم کرد. از آنجا که X_iها IID هستند خواهیم داشت:

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \times \mathbb{E}[X_i] = 0$$

$$\sigma^2(S_n) = \sigma^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i) = n \times \sigma^2(X_i) = n \times 1 = n$$

از طرفی داریم:

$$\sigma^2(S_n) = \mathbb{E}[S_n^2] - \mathbb{E}[S_n]^2 \Rightarrow n = \mathbb{E}[S_n^2] - 0 \Rightarrow \mathbb{E}[S_n^2] = n$$

راه حل دوم: از خواص امید ریاضی استفاده می‌کنیم و مستقیما میانگین مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbb{E}[S_n^۲] = \mathbb{E}[(\sum_{i=۱}^{n} X_i)(\sum_{j=۱}^{n} X_j)] = \mathbb{E}[(\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} X_i \cdot X_j)] = \mathbb{E}[(\sum_{i=۱}^{n} X_i^۲ + \sum_{j\neq i} X_i \cdot X_j)]$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} \mathbb{E}[X_i^۲] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = n \times ۱ + ۰ = n$$