آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

تمرین صفرم ــ اصول احتمال، مرور ترکیبیات، احتمال شرطی، استقلال

طراح: فرنوش فلاح
سوپروایزر: ارشیا عطایی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۷/۲۰

بیشتر بدانیم: پریش

در ترکیبیات، **پریش** یک جایگشت از مجموعه‌ای با n عنصر است به‌طوری که هیچ‌کدام از عناصر در جایگاه اصلی خود قرار نمی‌گیرند. به‌عبارت دیگر، اگر مجموعه $S = \{1, 2, \dots, n\}$ داشته باشیم، یک جایگشت σ از این مجموعه یک پریش است اگر و فقط اگر برای هر i داشته باشیم $\sigma(i) \neq i$.

تعداد پریش‌های ممکن برای یک مجموعه با n عنصر با نماد $!n$ نشان داده می‌شود. برای محاسبه تعداد پریش‌ها، از روش **شمول‌ـ عدم شمول** استفاده می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم تمام عناصر می‌توانند در جایگاه اصلی خود قرار گیرند، یعنی تعداد کل جایگشت‌ها برابر با $n!$ است. سپس تعداد جایگشت‌هایی که حداقل یک عنصر در جایگاه اصلی خود قرار دارد را کم می‌کنیم و اینکار را به ازای هر تعداد عضو دیگر ادامه می‌دهیم و به رابطه زیر میرسیم:

$$!n = n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 0!$$

این فرمول را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$!n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

ارتباط این فرمول با عدد e قابل توجه است. اگر e^x را بسط دهیم، داریم:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

حال اگر $x = -1$ را در این بسط قرار دهیم، به دست می‌آید:

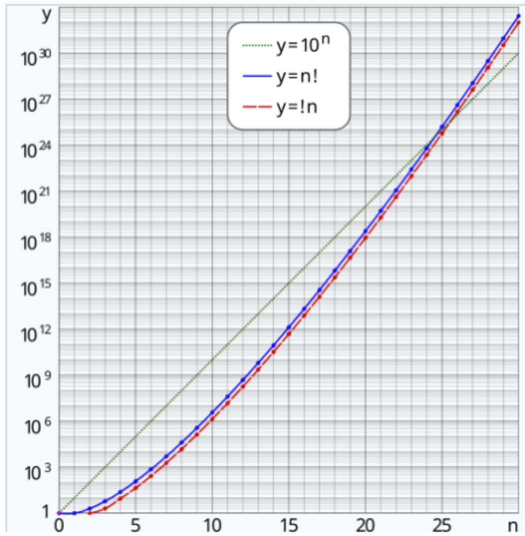
$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

بنابراین به ازای n های بزرگ می‌توان این دو مقدار را یکسان در نظر گرفت:

$$!n \approx \frac{n!}{e}$$

این تقریب نشان می‌دهد که برای nهای بزرگ، تعداد پریش‌ها تقریباً برابر با $\frac{n!}{e}$ است، و در واقع $!n$ با $n!$ هم‌ارز می‌شود و نسبت این دو به عدد ثابت e میل می‌کند.

در نمودار زیر که لوگاریتم $!n$ و $n!$ رسم شده است، اختلاف لوگاریتم این دو که تقریبا برابر عدد ثابت $\log_{۱۰} e$ است، مشهود است.



امروزه اثبات شده است که:

$$!n = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{۱}{۲} \rfloor$$

۱. فوتبال — ۲۰ نمره

آرمان، بهرام، سارا، دارا و الهام در یک ردیف (با همین ترتیب) نشسته‌اند و در حال تماشای فوتبال هستند. بین دو نیمه، همگی برای آوردن خوراکی از جای خود بلند می‌شوند. سپس بدون توجه به جای قبلی‌شان، هر یک به صورت تصادفی بر روی یک صندلی می‌نشینند. چقدر احتمال دارد که در چینش جدید، هر کدام از آن‌ها در کنار افراد جدیدی نشسته باشد؟ (به عبارتی، هیچ دو نفری که قبلا در کنار هم نشسته بودند، در چینش جدید کنار هم نباشند)

۲. ماه تولد — ۲۰ نمره

در یک اتاق، n نفر حضور دارند. می‌دانیم n به احتمال $\frac{۱}{۴}$ برابر با ۵ است، به احتمال $\frac{۱}{۴}$ برابر با ۱۰ است، و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ برابر با ۱۵ می‌باشد.

الف) چقدر احتمال دارد که حداقل دو نفر از افراد حاضر در اتاق، در یک ماه به دنیا آمده باشند؟ فرض کنید احتمال به دنیا آمدن در همه ماه‌ها برابر است. (۱۰ نمره)

ب) با فرض این که حداقل دو نفر در اتاق وجود دارند که ماه تولدشان یکسان است، چقدر احتمال دارد که n برابر با ۱۰ باشد؟ (۱۰ نمره)

۳. بازی — ۲۰ نمره

در یک بازی، هر یک از ۴ بازیکن یک تاس سالم شش وجهی را می‌اندازد. برنده کسی است که عدد تاسش از همه بزرگتر باشد. اگر حداقل دو بازیکن بزرگترین عدد را آورده باشند، بازی دوباره بین کسانی که بزرگترین عدد را آورده‌اند انجام می‌شود. این کار تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که یک نفر برنده شود. مریم یکی از بازیکنان است. با فرض این که مریم بازی را برده است، چقدر احتمال دارد که در راند اول بازی، مریم عدد ۵ را آورده باشد؟

۴. مسابقه — ۱۵ نمره

دو تیم A و B مسابقه‌ای را انجام می‌دهند. اولین تیمی که سه راند را ببرد، مسابقه را می‌برد. قبل از هر راند، احتمال برنده شدن هر دو تیم در آن راند برابر و مستقل از راندهای دیگر است. همچنین در هر راند، حتما یک تیم برنده وجود دارد و مساوی نداریم. با فرض این که تیم B راند دوم را برده است و تیم A در مسابقه برنده شده است، احتمال این که تیم B راند اول را برده باشد چقدر است؟

۵. بازی مجموع — ۱۵ نمره

آوا و بابک، هر یک به نوبت دو تاس سالم می‌اندازند. بازی در صورتی تمام می‌شود که یکی از دو نفر برنده شود. آوا در صورتی برنده می‌شود که مجموع دو تاسش برابر با ۹ باشد و بابک در صورتی برنده می‌شود که مجموع دو تاسش برابر با ۶ باشد. همچنین اگر مجموع دو تاس فردی در نوبتش برابر با ۷ شود، در نوبت بعدی نیز خودش تاس می‌اندازد. آوا بازی را شروع می‌کند. چقدر احتمال دارد آوا در نهایت برنده بازی باشد؟

۶. دسته کارت — ۱۰ نمره

یک دسته کارت ۵۲ تایی داریم که شامل کارت‌هایی به رنگ‌های آبی، قرمز، زرد و سبز و از هر رنگ، از عدد ۱ تا ۱۳ می‌باشد. فرهاد دسته کارت‌ها را بر می‌زند. سپس یکی یکی کارت‌ها را رو می‌کند. اگر اولین عدد ۱ در بیستمین کارت رو شده ظاهر شود، چقدر احتمال دارد کارت بیست و یکم کارتی به رنگ آبی و با عدد ۱ باشد؟