آمار و احتمال مهندسی

اساتید: دکتر توسلی‌پور، دکتر وهابی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

پاسخ تمرین دوم ــ توزیع‌های پیوسته و توابعی از یک متغیر تصادفی

طراح: امیر نداف فهمیده

سوپروایزر: الهه خداوردی

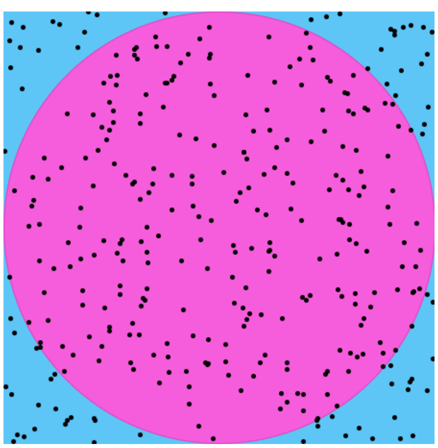
تاریخ تحویل: ۲۰ آبان ۱۴۰۳

بیشتر بدانیم: مونت کارلو

حل بسیاری از مسائل در دنیا به آسانی امکان‌پذیر نیست. این مسائل گاهی به دلیل عدم قطعیت و مشکلات دیگر پیچیدگی بسیاری دارند و حل آن‌ها تلاش زیادی می‌طلبد. در مواجهه با بسیاری از این مسائل، با اینکه جواب قطعی برای آن‌ها وجود دارد، اما به دلیل پیچیدگی محاسبات، می‌توانیم راه‌هایی را در پیش بگیریم تا جواب را بدون محاسبات پیچیده و با دقت بالا تخمین بزنیم.

یکی از این روش‌ها، روش مونت‌کارلو $(MonteCarlo)$ است. در این روش، با تولید نمونه‌های تصادفی و بررسی خروجی هر نمونه، می‌توانیم فضایی احتمالاتی‌ای ایجاد کنیم و با استفاده از این نمونه‌ها به مقدار تخمینی خود دست یابیم.

برای مثال، فرض کنید که می‌خواهیم عدد پی (π) را محاسبه کنیم. روش‌های بسیاری وجود دارد که نیازمند محاسبات پیچیده‌اند. اما با استفاده از این روش می‌توانیم مسئله را به این شکل نگاه کنیم: یک دایره درون مربعی قرار دارد، به‌طوری‌که طول ضلع مربع برابر با قطر دایره است و اضلاع مربع بر دایره مماس هستند. اگر n نقطه تصادفی داشته باشیم، احتمال اینکه نقطه‌ای درون دایره قرار بگیرد، متناسب با نسبت مساحت دایره به مساحت مربع است.



$$\frac{\text{inside the circle}}{\text{total points}} = \frac{۲۶۷}{۳۴۰}$$
$$\text{Area of square} = (۲r)^۲ = (۲)^۲ \times r^۲ = ۴ \times r^۲$$
$$\text{Area of circle} = \pi \times r^۲$$
$$\frac{\text{inside the circle}}{\text{total points}} = \frac{۲۶۷}{۳۴۰} \approx \frac{\text{area of circle}}{\text{area of square}}$$
$$\frac{۲۶۷}{۳۴۰} \approx \frac{\pi \times r^۲}{۴ \times r^۲} \approx \frac{\pi}{۴}$$
$$\pi \approx ۴ \times \frac{۲۶۷}{۳۴۰} \approx ۳/۱۴۱۲$$

همان‌طور که مشخص است، با داشتن ۳۴۰ نقطه تصادفی توانستیم عدد پی را با دقت خوبی تخمین بزنیم (می‌توانید در این لینک نیز آزمایش بالا را مشاهده کنید).

می‌توان از همین رویکرد در مواجهه با مسائل دیگر نیز استفاده کرد. فرض کنید در مسابقه‌ای شرکت می‌کنید که شرط خروج از آن شکست در دو دست متوالی است؛ اگر احتمال شکست در هر دست برابر p باشد، به طور میانگین پیش از خروج از بازی چند دست می‌توانید بازی کنید؟ این سوال را یکبار با استفاده از مفاهیم آموخته شده در درس و یکبار با استفاده از روش مونت کارلو $(MonteCarlo)$ حل نمایید، آیا پاسخ‌های بدست آمده با یکدیگر مطابقت دارد؟

۱. محافظ نوار — ۱۵ نمره

طول یک محافظ نوار از توزیع نرمال با میانگین ۹۰/۲ میلی‌متر و با انحراف معیار ۰/۱ میلی‌متر پیروی می‌کند.

الف) احتمال این که طول بخشی از این محافظ بیشتر از ۹۰/۳ یا کمتر از ۸۹/۷ میلی‌متر باشد چقدر است؟ (۵ نمره)

ب) میانگین توزیع باید چه مقداری باشد تا طول اکثر بخش‌های این محافظ بین ۸۹/۷ تا ۹۰/۳ باشد؟ (۵ نمره)

پ) اگر بخش‌هایی که طول آن‌ها بین بازه ۸۹/۷ تا ۹۰/۳ نیست، پوسیده باشند، با فرض این که میانگین توزیع برابر میانگین انتخاب شده در بخش ب است، چند درصد طول این محافظ پوسیده نیست؟ (۵ نمره)

پاسخ :

الف)

$$P(X > ۹۰/۳) = P(Z > \frac{۹۰/۳ - ۹۰/۲}{۰/۱}) = P(Z > ۱) = ۱ - P(Z \leq ۱) = ۱ - \Phi(۱) = ۱ - ۰/۸۴۱۳۴۵ = ۰/۱۵۸۶۵۵$$

$$P(X < ۸۹/۷) = P(Z < \frac{۸۹/۷ - ۹۰/۲}{۰/۱}) = P(Z < -۵) = \Phi(-۵) \approxeq ۰$$

پس در مجموع احتمال این که طول یک بخش از محافظ در این بازه نباشد برابر ۰/۱۵۸۶۵۵ است.

ب) برای این که این اتفاق رخ دهد باید احتمال آن که طول یک بخش در این بازه باشد، بیشینه شود و با توجه به توزیع نرمال و تابع توزیع احتمال این توزیع، زمانی این احتمال بیشینه می‌شود که میانگین توزیع، همان میانگین بازه باشد.

$$\mu = \frac{۹۰/۳ + ۸۹/۷}{۲} = ۹۰mm$$

پ)

$$\begin{aligned} P(۸۹/۷ < X < ۹۰/۳) &= P(\frac{۸۹/۷ - ۹۰}{۰/۱} < Z < \frac{۹۰/۳ - ۹۰}{۰/۱}) \\ &= P(-۳ < Z < ۳) = P(Z < ۳) - P(Z < -۳) \\ &= \Phi(۳) - \Phi(-۳) = ۲\Phi(۳) - ۱ = ۰/۹۹۷۳ \end{aligned}$$

۲. جایزه خوابگاهی — ۱۰ نمره

زمان بین رسیدن دو دانشجوی خوابگاهی به خوابگاه از توزیع نمایی با پارامتر λ و با میانگین ۳ دقیقه پیروی می‌کند. امیر تصمیم می‌گیرد که به آخرین نفری که امروز وارد خوابگاه می شود جایزه بدهد. اگر ساعت $t = ۲۳ : ۵۵$ باشد و کسی وارد نشود، چقدر احتمال دارد که برنده جایزه امیر قبل از ساعت ۲۳ : ۵۵ وارد خوابگاه شده باشد؟

پاسخ :

با توجه به این که X از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی می کند میدانیم $E[x] = \frac{۱}{\lambda}$
از طرفی می دانیم $E[x] = ۳$ پس $\lambda = \frac{۱}{۳}$ است.
حال باید احتمال این که تا ۵ دقیقه آینده کسی به خوابگاه وارد نشود را به شرط این که تا زمان t نیز وارد نشده باشد محاسبه کنیم.

$$P(X > t + ۵ | X > t)$$

با توجه به این که توزیع نمایی بی حافظه است می‌توانیم بگوییم:

$$P(X > t + ۵|X > t) = P(X > ۵) = e^{-\lambda ۵} = e^{-\frac{۵}{۴}}$$

۳. باگ یابی　　　۱۵ نمره

امیر به تازگی در حال یاد گرفتن زبان وریلاگ است. در هر خط کد با احتمال ۴۰ درصد باگ پیدا می‌شود. اگر امیر ۶۰۰ خط کد زده باشد،

الف) چقدر احتمال دارد که حداقل ۲۵۰ خط دارای باگ باشند؟ (۶ نمره)

ب) اگر تعداد خطوط کد را n در نظر بگیریم، آنگاه تعداد خطوط کد چقدر باشد تا $P(۰/۳۸n \leq X \leq ۰/۴۲n) = ۰/۸۶۴$ شود؟ (۹ نمره)

پاسخ :

اگر تعداد خطوط باگ دار را با متغیر تصادفی X نمایش بدیم داریم:

$$X \sim Bin(۶۰۰, ۰/۴)$$

چون مقدار n زیاد است می توانیم از تقریب با توزیع نرمال استفاده کنیم ($\sigma^۲ = npq = ۱۴۴ > ۱۰$).

متغیر تصادفی Y نشان‌دهنده توزیع نرمال حاصل در نظر می‌گیریم.

$$X \approx Y \sim N(\mu, \sigma^۲)$$

سپس پارامترهای توزیع نرمال را بدست می‌آوریم.

$$\mu = np = ۲۴۰$$

$$\sigma^۲ = npq = ۱۴۴$$

الف) حال به محاسبه ی احتمال خواسته شده با استفاده از تقریب نرمال و تصحیح پیوستگی می‌پردازیم:

$$P(X \geq ۲۵۰) \approx P(Y > ۲۴۹/۵)$$

$$\begin{aligned} P(Y > ۲۴۹/۵) &= P(Z > \frac{۲۴۹/۵ - ۲۴۰}{۱۲}) \\ &\approx P(Z > ۰/۷۹) \\ &= ۱ - P(Z \leq ۰/۷۹) \\ &= ۱ - \Phi(۰/۷۹) = ۰/۲۱۴۸ \end{aligned}$$

ب) با توجه به قضیه دموآورـ لاپلاس ، می دانیم:

$$P(k_۱ \leq X \leq k_۲) = \Phi(\frac{K_۲ - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{K_۱ - np}{\sqrt{npq}})$$

همچنین می‌دانیم: $k_۱ = n(p - \epsilon)\ ,\ k_۲ = n(p + \epsilon)$، بنابراین:

$$\frac{k_۲ - np}{\sqrt{npq}} = \epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}, \qquad \frac{k_۱ - np}{\sqrt{npq}} = -\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

حال با در نظر گرفتن $\epsilon = ۰/۰۲$، داریم:

$$P(۰/۳۸n \leq X \leq ۰/۴۲n) = \Phi(۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{pq}}) - \Phi(-۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{pq}}) = ۲\Phi(۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{pq}}) - ۱ = ۰/۸۶۴$$

با جایگذاری $pq = ۰/۲۴$ خواهیم داشت:

$$\Phi(۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۴}}) = ۰/۹۳۲ \Rightarrow ۰/۰۲\sqrt{\frac{n}{۰/۲۴}} = ۱/۴۹ \Rightarrow n \simeq ۳۶^۲$$

۴. سرمایه‌گذاری — ۲۰ نمره

امیر که تا حدودی در خرید و فروش رمزارز ها دستی دارد، نیاز به سرمایه اولیه دارد. مصطفی که دوست صمیمی اوست می‌خواهد این سرمایه اولیه را در اختیار امیر بگذارد اما نمی‌داند که چقدر به او کمک کند. امیر می‌داند که مقدار پولی که مصطفی به او می‌دهد یک متغیر تصادفی (بر حسب میلیون) با تابع چگالی احتمال زیر است.

$$f_X(x) = Ae^{-۲|x|} + \frac{۲}{\sqrt{\pi}}e^{-۴x^۲}$$

الف) مقدار A و میانگین و واریانس X را به دست آورید.

ب) علی، دوست مشترک مصطفی و امیر نیز می‌خواهد روی کار امیر سرمایه‌گذاری کند. او که نمی‌داند چه مقدار سرمایه به امیر بدهد تصمیم می‌گیرد که از مقدار سرمایه‌گذاری مصطفی الهام بگیرد. اگر مقدار سرمایه‌گذاری علی با تابع زیر به مقدار سرمایه‌گذاری مصطفی مربوط شود، تابع چگالی احتمال مقدار سرمایه‌گذاری علی را بیابید.

$$Y = \begin{cases} \sqrt{۲|X| - ۱} & |X| \geq \frac{۱}{۲} \\ ۰ & |X| < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پاسخ :

الف) می‌دانیم که $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = ۱$ پس داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-۲|x|} + \frac{۲}{\sqrt{\pi}}e^{-۴x^۲}\,dx = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۲|x|}\,dx + \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۴x^۲}\,dx = ۱$$

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۲|x|}\,dx = ۲A\int_{۰}^{+\infty} e^{-۲x} = ۲A(-\frac{۱}{۲}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{+\infty}) = A$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۴x^۲}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

$$A + \frac{۲}{\sqrt{\pi}} * \frac{\sqrt{\pi}}{۲} = ۱ \Rightarrow \boxed{A = ۰}$$

پس تابع چگالی احتمال به صورت $f_X(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}e^{-۴x^۲}$ است. با مقایسه آن با تابع چگالی توزیع نرمال ($f_X(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^۲}$) پی می‌بریم که این متغیر از توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\frac{۱}{۸}$ پیروی می‌کند.

ب) با توجه به ضابطه Y ، مقدار آن همواره مثبت است؛ پس برای $y < ۰$ ، $f_Y(y) = ۰$ است. برای $y \geq ۰$ داریم:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\sqrt{۲|X| - ۱} \leq y) = P(|X| \leq \frac{y^۲ + ۱}{۲}) \\ &= P(-\frac{y^۲+۱}{۲} \leq X \leq \frac{y^۲+۱}{۲}) = \int_{-\frac{y^۲+۱}{۲}}^{\frac{y^۲+۱}{۲}} \frac{۲}{\sqrt{\pi}} e^{-۴x^۲}\, dx \\ &= ۲\int_{۰}^{\frac{y^۲+۱}{۲}} \frac{۲}{\sqrt{\pi}} e^{-۴x^۲}\, dx \end{aligned}$$

با توجه به اینکه در $y = ۰$ تابع احتمال ما برابر است با:

$$P(Y = ۰) = F_X(\frac{۱}{۲}) - F_X(-\frac{۱}{۲})$$

و این مقدار برابر ۰ نیست؛ پس تابع $F_Y(y)$ در $y = ۰$ دارای یک جهش است. برای محاسبه‌ی تابع ضربه‌ی موجود، مقدار f_Y در این نقطه را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f_Y(۰) &= \delta(y) \int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۲}{\sqrt{\pi}} e^{-۴x^۲}\, dx = \delta(y)(F_X(\frac{۱}{۲}) - F_X(-\frac{۱}{۲})) \\ &= \delta(y) P(-\frac{۱}{۲} < X < \frac{۱}{۲}) = \delta(y) P(\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۸}}} < Z < \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۸}}}) \\ &= \delta(y) P(-\sqrt{۲} < Z < \sqrt{۲}) = \delta(y)(\Phi(\sqrt{۲}) - \Phi(-\sqrt{۲})) \\ &= \delta(y)(\Phi(\sqrt{۲}) - (۱ - \Phi(\sqrt{۲}))) = \delta(y)(۲\Phi(\sqrt{۲}) - ۱) \\ &= ۰/۸۴۱۴\delta(y) \end{aligned}$$

حال برای تابع چگالی کافی است از تابع $F_Y(y)$ مشتق بگیریم.

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{۴}{\sqrt{\pi}} y e^{-(y^۲+۱)^۲} & y > ۰ \\ ۰/۸۴۱۴\delta(y) & y = ۰ \\ ۰ & y < ۰ \end{cases}$$

۵. مصاحبه کاری   ۲۰ نمره

مهندس که امروز مصاحبه کاری دارد، در راه شرکت به ترافیک برمی‌خورد. او باید به شرکت خبر دهد که چقدر دیرتر به مصاحبه می‌رسد. او میزان تاخیر خود را به صورت یک متغیر تصادفی که به صورت زیر تعریف می‌شود اطلاع می‌دهد که در آن X متغیر تصادفی با توزیع نمایی و پارامتر λ است و Y میزان تاخیر مهندس است.

$$Y = min(X, \frac{\lambda}{۳})$$

الف) تابع توزیع تجمعی Y را بیابید.

ب) چقدر احتمال دارد که مهندس دقیقا با $\frac{\lambda}{۳}$ تاخیر به شرکت برسد؟

پاسخ :

الف)

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(min(X, \frac{\lambda}{۳}) \leq y)$$

با توجه به این که متغیر تصادفی X از توزیع نمایی استفاده می‌کند، مقادیر منفی را نمی‌تواند اختیار کند پس متغیر تصادفی Y نیز نمی‌تواند مقادیر منفی اختیار کند و $F_Y(y) = ۰, y < ۰$.
حال مسئله را به دو حالت زیر تقسیم میکنیم.

۱. $۰ \leq y < \frac{\lambda}{۳}$

$$Y = min(X, \frac{\lambda}{۳}) \leq y < \frac{\lambda}{۳} \Rightarrow Y = X \leq y$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(x)\, dx = \int_{۰}^{y} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = ۱ - e^{-\lambda y}$$

۲. $y \geq \frac{\lambda}{۳}$
با توجه به تابع $Y = min(X, \frac{\lambda}{۳})$ همواره مقدار متغیر تصادفی Y کمتر از $\frac{\lambda}{۳}$ است. پس داریم:

$$Y = min(X, \frac{\lambda}{۳}) \leq \frac{\lambda}{۳} \leq y \Rightarrow Y \leq y, X \in (-\infty, +\infty)$$

این یعنی همواره شرط $Y \leq y$ برقرار است پس می توان گفت:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = ۱$$

با استفاده از نتایج بالا می توان تابع توزیع تجمعی Y را به صورت زیر نوشت.

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & y \leq ۰ \\ ۱ - e^{-\lambda y} & ۰ < y \leq \frac{\lambda}{۳} \\ ۱ & y > \frac{\lambda}{۳} \end{cases}}$$

ب) با توجه به خاصیت تابع توزیع تجمعی داریم:

$$P(Y = \frac{\lambda}{۳}) = F_Y(\frac{\lambda}{۳}^{+}) - F_Y(\frac{\lambda}{۳}^{-}) = ۱ - (۱ - e^{-\frac{\lambda^۲}{۳}}) = e^{-\frac{\lambda^۲}{۳}}$$

## ۶. مسابقه دو		۲۰ نمره

چهار دوست می‌خواهند به صورت تیمی مسابقه دو بدهند. مسابقه آن ها به این صورت است که به دو تیم دو نفره تقسیم شده و هر تیمی که تمامی اعضای آن قبل از تیم حریف به خط پایان برسد برنده مسابقه است. زمان رسیدن هر فرد از یک توزیع یکنواخت در بازه $(۱, ۲)$ پیروی می‌کند. تابع چگالی احتمال زمان برنده شدن یک تیم را به دست آورید.

پاسخ :

اگر متغیر تصادفی Y را زمان برنده شدن اولین تیم قرار دهیم و هر X_i نشان دهنده زمان رسیدن فرد i ام به خط پایان باشد داریم:

$$Y = min(max(X_۱, X_۲), max(X_۳, X_۴))$$

اگر $max(X_1, X_2) = M_1$ و $max(X_3, X_4) = M_2$ تعریف کنیم، تابع توزیع تجمعی آن‌ها با توجه به این که زمان رسیدن هر فرد به خط پایان مستقل از یک دیگر است و از یک توزیع پیروی می‌کنند، به صورت زیر می‌شود.

$$F_{M_1}(m) = P(X_1 \leq m, X_2 \leq m) = P(X_1 \leq m)^2$$

حال با توجه به این که توزیع متغیر تصادفی M_2 نیز مانند توزیع متغیر تصادفی M_1 است و از هم مستقل اند، تابع توزیع تجمعی Y به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(M_1 > y, M_2 > y) \\ &= 1 - P(M_1 > y)^2 = 1 - (1 - P(M_1 \leq y))^2 \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq y)^2)^2 \end{aligned}$$

با توجه به این که X_1 از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند، تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است.

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

با جاگذاری مقادیر $P(X_1 \leq y)$ در $F_Y(y)$ خواهیم داشت:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 1 - (1 - (y-1)^2)^2 & 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$

برای به دست آوردن تابع چگالی Y کافیست از تابع بالا مشتق بگیریم.

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 4(y-1) - 4(y-1)^3 & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۷. نماییِ کسینوسی (سوال امتیازی) ۱۵ نمره

اگر متغیر تصادفی X از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی کند، تابع چگالی احتمال $Y = cos(X)$ را بیابید.

پاسخ :

با توجه به برد تابع $Y = cos(X) \in [-1, 1]$ ، Y نمی‌تواند مقادیر خارج از این بازه را اختیار کند پس می‌توان گفت که:

$$f_Y(y) = 0, y \notin [-1, 1]$$

حال فرض کنیم $-1 \leq y \leq 1$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cos(X) \leq y) = 1 - P(cos(X) > y)$$

برای این که رابطه $cos(X) > y$ برقرار باشد، مقدار X باید به صورت زیر باشد:

$$X \in \bigcup_{k \in Z} (2k\pi - arccos(y), 2k\pi + arccos(y))$$

پس خواهیم داشت:

$$P(cos(X) > y) = P(X \in \bigcup_{k \in Z} (2k\pi - arccos(y), 2k\pi + arccos(y)))$$

که محاسبه این احتمال با توجه به تابع چگالی احتمال نمایی به صورت زیر می‌شود.

$$P(cos(X) > y) = \int_{0}^{arccos(y)} \lambda e^{-\lambda x}\, dx + \Sigma_{k=1}^{\infty} \int_{2k\pi - arccos(y)}^{2k\pi + arccos(y)} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

توجه کنید چون X از توزیع نمایی پیروی می‌کند نمی‌تواند مقادیر منفی اختیار کند برای همین فقط بازه های مثبت را در محاسبات در نظر گرفتیم.
حال می توان گفت:

$$F_Y(y) = 1 - \left(\int_{0}^{arccos(y)} \lambda e^{-\lambda x}\, dx + \Sigma_{k=1}^{\infty} \int_{2k\pi - arccos(y)}^{2k\pi + arccos(y)} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \right)$$

حال برای پیدا کردن تابع چگالی احتمال کافی است مشتق زیر را حساب کنیم.

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \lambda e^{-\lambda arccos(y)} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \lambda \Sigma_{k=1}^{\infty} \left(e^{(-\lambda(2k\pi + arccos(y)))} - e^{(-\lambda(2k\pi - arccos(y)))} \right)$$

دقت کنید که تمام محاسبات برای $-1 \leq y \leq 1$ است و جواب نهایی به صورت زیر می شود.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \lambda e^{-\lambda arccos(y)} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \lambda \Sigma_{k=1}^{\infty} \left(e^{(-\lambda(2k\pi + arccos(y)))} - e^{(-\lambda(2k\pi - arccos(y)))} \right) & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$