科学计算作业 练习 5b

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

引理 1 设 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，且对于任意满足 $\eta(a) = \eta(b) = 0$ 的 $\eta \in \mathscr{C}^1(a,b)$ 都成立

$$\int_a^b f\eta' \mathrm{d}x = 0,$$

则在 $[a,b]$ 上成立 $f \equiv Const.$

证明 由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，所以 $f \in \mathscr{R}[a,b]$，令 $c \in \mathbf{R}$ 满足

$$\int_a^b (f(x) - c)\mathrm{d}x = 0.$$

同时令

$$\eta(x) = \int_a^x (f(t) - c)\,\mathrm{d}t.$$

显然 η 满足 $\eta(a) = \eta(b) = 0$ 且 $\eta \in \mathscr{C}^1(a,b)$. 则根据条件，成立

$$0 = \int_a^b (f-c)\eta' \mathrm{d}x = \int_a^b (f-c)^2 \mathrm{d}x \Rightarrow f \equiv c. \quad \blacksquare$$

1. 已知 $f \in \mathscr{C}[a,b], \cdots\cdots$

证明 假设存在 $x_0 \in (a,b)$，成立 $f(x_0) \neq 0$，不妨设 $f(x_0) > 0$. 则由于 $f \in \mathscr{C}[a,b]$，所以存在足够小的 $\delta > 0$，使得

$$f(x) > 0, \quad x \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

不妨设 $I = (-1,1)$，否则只需另 $t = -1 + \frac{1}{\delta}(x - x_0 + \delta)$ 即可. 令 g 为冲击函数

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x \in (-1,1) \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

可知 $g\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$，且在 $(-1,1)$ 外取值为零. 从而

$$\int_a^b fg\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 fg\mathrm{d}x>0.$$

与已知条件矛盾，从而假设不成立，即有

$$f(x)=0,\quad x\in[a,b].\quad\blacksquare$$

2. 证明如下变分问题无解……

证明 （反证）令

$$J(f)=\int_{-1}^1 x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x.$$

假设 J 有极值，设极值点为 f_*，对于任意 $\eta\in\mathscr{C}_0^1[-1,1]$，成立

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J(f_*+\varepsilon\eta)\bigg|_{\varepsilon=0}=2\int_{-1}^1 x^2f_*'\eta'\mathrm{d}x$$

又因为 $x^2f_*'\in\mathscr{C}[-1,1]$，且 η 的选取是任意的，由引理1可知，

$$x^2f_*'\equiv\mathrm{Const}.$$

令 $x=0$，得 $c=0$，从而 $f_*'\equiv0$，即 f 为常值函数. 与已知 $f(\pm1)=\pm1$ 矛盾，从而假设不成立，即该变分问题无解. $\blacksquare$

3. 对于求解最速降线问题……

解

$$y(1+(y')^2)=c\Rightarrow y'=\sqrt{\frac{c-y}{y}}\Rightarrow\sqrt{\frac{y}{c-y}}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x.$$

对两边积分，得

$$x=\int_0^y\sqrt{\frac{t}{c-t}}\mathrm{d}t$$

令 $u=\sqrt{t/(c-t)}$，即 $t=c(1-(1+u^2)^{-1})$，同时令 $u=\tan v$，则

$$\begin{aligned}
x&=2c\int_0^{\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\frac{u^2}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u\\
&=2c\int_0^{\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\frac{\tan^2v}{1+\tan^2v}\frac{1}{\cos^2v}\mathrm{d}v\\
&=2c\int_0^{\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}}\sin^2v\mathrm{d}v\\
&=c\left(x-\frac{1}{2}\sin2x\right)\bigg|_0^{\arctan\sqrt{y/(c-y)}}\\
&=c\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}-\frac{c}{2}\sin\left(2\arctan\sqrt{\frac{y}{c-y}}\right).
\end{aligned}$$

其中 c 满足

$$x_1 = c\arctan\sqrt{\frac{y_1}{c-y_1}} - \frac{c}{2}\sin\left(2\arctan\sqrt{\frac{y_1}{c-y_1}}\right). \quad \blacksquare$$

4. 已知函数 $y=f(x)$ 在节点……

解 不妨设在两端，近似值精确成立. 设 $h_i = x_i - x_{i-1}$，定义

$$J_1(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \left(\tilde{y}_i - f(x_i)\right)^2, \quad J_2(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x,$$

下最小化

$$J(f) = J_1(f) + \alpha J_2(f).$$

设 f_* 是所要求的解，则对于任意 $\eta \in \mathscr{C}_0^2[0,1]$，成立

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(f_* + \varepsilon\eta)\bigg|_{\varepsilon=0} = -2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i + h_{i+1}}{2} [\tilde{y}_i - f_*(x_i)]\eta(x_i) + 2\alpha \int_0^1 f_*'\eta' \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Step I. 对于每一个区间 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$，取满足 $\eta(x_{k-1}) = \eta(x_k) = 0$ 的 η，则对于每个区间分部积分得，

$$0 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*'\eta' \mathrm{d}x = f_*'\eta\bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*''\eta \mathrm{d}x = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_*''\eta \mathrm{d}x.$$

根据变分引理，成立

$$f_*'' = 0 \Rightarrow f \in P_1, \quad x \in (x_{i-1}, x_i).$$

从而在区间 I_k 上，成立

$$f_*' = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Step II. 取 $\eta \in \mathscr{C}_0^2[0,1]$，成立

$$\int_0^1 f_*'\eta' \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n-1} \left(f_*'\eta\bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n=1} \left(c_{i-1} - c_i\right)\eta(x_i)$$

代入 (1)，由于 $\eta(x_i)$，$(i = 1, \ldots, n-1)$ 的选取是任意的，所以成立

$$\alpha(c_{i-1} - c_i) - \frac{h_i + h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i - f_*(x_i)] = 0$$

结论 综上，f_* 是一个分段线性的函数，设每段上斜率为 c，则 f_* 满足

$$\begin{aligned} &f_*(0) = y_0, \quad f_*(1) = y_1, \\ &\alpha(c_{i-1} - c_i) - \frac{h_i + h_{i+1}}{2}[\tilde{y}_i - f_*(x_i)] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$