概率论　笔记

任云玮

目录

1 样本空间与概率

1.1 概率模型

1 定义

1. 对于一次实验，定义其可能产生的结果的全体为**样本空间** Ω.
2. 称一个集合 A 为**事件**，若它是样本空间 Ω 的一个子集.

评注 对于样本空间，在选取的时候需要注意结果需要是良定义的（无歧义的），同时需要实验的所有结果都在 Ω 中.

2 定义 (概率律) 设 Ω 是一个样本空间，称定义在 Ω 中事件全体上的函数 P 为**概率律**，若它成立

1. 非负性. 对任意事件 A，$\mathrm{P}(A) \geq 0$.
2. 可加性. 对任意不相交的 A 和 B，成立 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + P(B)$. 或者更一般的，对于两两互不相交的 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，成立 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots$.
3. 归一性. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

评注 显然成立 $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$. 另外，一般在讨论概率律的时候，不区分只包含一个结果的事件和该结果本身.

3 定理 (概率律的性质) 给定概率律 P，事件 A，B，C，则

1. 若 $A \subset B$，则 $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$.
2. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
3. $\mathrm{P}(A \cup B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.
4. $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B^c \cap C)$.

评注 这些式子的证明都是 trivial 的，其中 [3.] 至少可以推广至有限个事件. 对于 [4.]，它实际上演示了一个将重合的事件拆分成不相交事件的方法.

4 引理 (Bonferroni 不等式) 设有事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，则成立

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - (n-1).$$

证明 对 n 施归纳法，利用定理 3 [2.] 即可.

5 定理 (容斥原理) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为样本空间 Ω 的事件，则

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{\substack{I\subset 1,\ldots,n \\ |I|=k}} \mathrm{P}(A_I).$$

6 定理 (连续概率) 设有事件序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，成立 $A_n \subset A_{n+1}$. 令 $A = \bigcup_{n=1\infty} A_n$，则 $\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

证明 考虑将 $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ 拆分成级数的形式. 定义 $B_0 = \varnothing$，$B_n = A_n - A_{n-1}$，则只需证明 $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A$，再利用 定义 2拆分 L.H.S 即可. ■

评注 对于“单调减”的事件序列，把并换成交，可以有类似的结论.