Fourier 分析 笔记

任云玮

目录

1 The Genesis of Fourier Analysis

2 Basic Property of Fourier Series

2.1 Examples and formulation of the problem

2.2 Uniqueness of Fourier series

p37.

p41. Notes on Theorem 2.1 这一命题表明对于连续函数，只需要验证它们的 Fourier 系数是否相等即可.

p40. proof of Theorem 2.1 先考虑 f 为实函数的情况. 首先条件中有 $\hat{f}(n)=0$，按照定义它意味着

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

由于积分的线形性，所以我们有对于任意三角多项式 p_k，成立

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

我们考虑利用反证法来证明此命题. 不失一般性的，我们假设定义在 $[-\pi,\pi]$ 上，在 $\theta_0=0$ 处连续且为 $f(0)>0$. 我们尝试构造一列三角多项式 $\{p_k\}$，让它在 0 附近为正且在其他地方迅速衰减，则我们即可得到 $\int f(\theta)p_k(\theta)>0$，而这与之前的讨论矛盾.

首先按照之前的想法，我们取充分小的 $[-\delta,\delta]\subset[-\pi,\pi]$，满足在其中 $f(\theta)>f(0)/2$. 接下来我们构造一个三角多项式 p，满足如下条件:

1. 在 $[-\delta,\delta]$ 外 $|p(\theta)|<s<1$.

2. 在 $[-\delta,\delta]$ 上 $p(\theta)\geq 0$.

3. 在某个 $[-\eta,\eta]\subset[-\delta,\delta]$ 上 $p(\theta)>r>1$.

这样我们只需要令 $p_k(\theta)=[p(\theta)]^k$，在进行一下估计即可. 我们可以设

$$p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta.$$

其中 $\varepsilon>0$ 充分小以满足 [1.]. 同时显然只要最初选择的 $|\delta|<\pi/2$，它就满足 [2.]. 而对于 [3.]，只需要 $|\eta|$ 充分小，也是可以成立的.

接下来我们对积分 $\int f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta$ 进行估计. 我们有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\right| \geq \left|\int_{-\eta}^{\eta}+\int_{\eta\leq|\theta|<\delta}\right| - \left|\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi}\right| \geq \left|\int_{-\eta}^{\eta}\right| - \left|\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi}\right|.$$

由于 f Riemann 可积，所以有界，即 $|f|<B$. 从而有

$$\left|\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right|\leq 2(\pi-\delta)Bs^k,\quad \int_{-\eta}^{\eta} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta\geq 2\eta\frac{f(0)}{2}r^k.$$

当 k 充分大时，有 $|\int_{-\pi}^{\pi}|>0$，与已知矛盾.

而对于 f 是复函数的情况，只需要利用 $\hat{\bar{f}}(n)=\overline{\hat{f}(-n)}$ 即可.

p41. Notes on Corollary 2.3 这一命题表明一定条件下，Fourier 系数的绝对收敛性可以保证 Fourier 级数的一致收敛形. 而之后的命题（[Corollary 2.4]）则给出了通过函数的光滑程度导出 Fourier 系数衰减速度的方法.

p42. [1.] 注意由于 $e^{in\theta}$ 的周期性，设 $b-a=2\pi$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{in\theta}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

2.3 Convolutions

p47. Notes on Lemma 3.2 这一引理表明可以用一列有界连续函数 $\{f_k\}$ 在积分平均的含义下去逼近一个 Riemann 可积函数 f. 在处理非连续函数的 Fourier 级数时，常先使用此引理. 而对于连续的情况，则直接使用 Corollary 5.4 即可，它声称连续函数可以用三角多项式一致逼近.

2.4 Good kernels

p49. Proof of Theorem 4.1 直观地想，由于 good kernel 的性质，当 n 充分大时，$[x-\pi,x+\pi]$ 上的加权平均的结果应该和 $f(x)$ 是差不多的，自然而然就会想到把积分分为 $|y|\leq\delta$ 和 $\delta\leq|y|\leq\pi$ 两部分. 利用 f 在 x 处的连续性等性质估计

$$(f*K_n)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]\mathrm{d}y$$

即可证明在连续点处的收敛性. 而一致收敛性则有闭区间上的连续函数的一致连续性保证.

2.5 Cesàro and Abel summability: applications to Fourier series

说明 提出这些不同的可求和性的原因在 Fourier 级数在某些点常常不是收敛的，所以在此给出了其他的定义级数收敛的方法，使得 Fourier 级数在那些点也有值. 而这些不同收敛方式则定义了对应的不同形式的 kernel.

2.6 Exercises

积分公式

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1-(-1)^n}{n}.$$

3 Convergence of Fourier Series

3.1 Mean-square convergence of Fourier series

p77. 说明 首先注意到这些事实

1. $\{e_n = e^{\mathrm{i}n\theta}\}_{|n|\le N}$ 是一组标准正交基，$S_N(f)$ 是这组基生成的子空间 S_N 中的元素.

2. 由于是标准正交基，所以有

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N}(f,e_n)e_n \quad \text{且} \quad \|S_N(f)\|^2 = \sum_{n=-N}^{N}|(f,e_n)|^2$$

3. 由于 $S_{N-1}\subset S_N$，所以在 S_N 中一定可以比在 S_{N-1} 中逼近地更好.

根据 [2.]，我们可以知道 $S_N(f)$ 就是 f 在 S_N 中的投影，所以是最佳平方逼近函数. 对于满足一定条件的 f，我们可以导出其最佳平方逼近函数收敛于 f.

Proof of Theorem 1.1 总体思路为找一列平方收敛于 f 的三角多项式并利用最佳逼近引理说明 Fourier 级数比它们逼近地更好，所以也平方收敛与 f.

由于可以用三角多项式一致地逼近一个连续函数，所以对于 f 连续情况的证明是方便的. 对于 f 仅仅是可积的情况. 首先我们知道可以用一列一致有界的连续函数 f_k，在积分的意义下逼近 f，对于这些连续的函数再重复之前的讨论即可. 注意需要先说明一下积分意义的逼近和平方逼近之间的关系.

p80. [1] 很多并不是某个 $\hat{f}(n)$ 的积分也有这样的形式.

3.2 Return to pointwise convergence

Proof of Theorem 2.1 首先我们对结论进行处理，可知我们仅需证明当 $N\to\infty$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta_0-t)-f(\theta_0))D_N(t)\mathrm{d}t \to 0.$$

而这直觉上来讲是成立的，因为虽然 D_N 并非 good kernel，但是当 $N\to\infty$ 时，它仍集中至原点附近，而由于 f 在 θ_0 处可微，$f(\theta_0-t)-f(\theta_0)$ 在原点附近的值趋于零. 虽然我们（或许）仍可以通过 $[\delta,\pi]$ 的方法来证明，但我们也可以尝试利用 Riemann-Lebesgue 引理，注意到有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta_0-t)-f(\theta_0))D_N(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\theta_0-t)-f(\theta_0)}{\sin(t/2)}\sin((N+1/2)t)\mathrm{d}t.$$

由于

$$\sin((N+1/2)t) = \sin(t/2)\cos(Nt)+\cos(t/2)\sin(Nt),$$

所以我们只需要说明积分中的第一项可积即可. 而这可由

$$\frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{\sin(t/2)} = \frac{f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)}{t} \frac{t}{\sin(t/2)},$$

以及 f 在 θ_0 处的可微性导出.

Note on Theorem 2.2 注意对于 f 和 g 本身，除了 Riemann 可积以外，没有任何光滑性方面的要求.

p84. [1.] 这里利用 Fourier 级数的 Abel 和的级数和卷积两种表示来推出矛盾. 说明如果我们仅取该 Fourier 级数的一半，则得到的级数并非某个 Riemann 可积函数的 Fourier 级数.

3.3 Exercises

引理 记 $e_n = e^{-in\theta}$，对 $n \neq 0$，有 $|(f, e_n)| = |(f', e_n)|/|n|$.