实分析 笔记

任云玮

目录

3 Lebesgue Measure **2**

4 The Lebesgue Integral **4**

5 Differentiation and Integration **5**

6 The Classical Banach Spaces **7**

3 Lebesgue Measure

56. Definition of the outer measure 注意定义中的下确界部分，这表明如果我们要证明 $m^*A \geq k$，则只需要证明对任意 $\{I_n\}$，$\sum l(I_n) \geq k$ 即可；同时这表示在 $m^*A < \infty$ 的情况下，总可以找到可列个开区间，使得 $\sum l(I_k) \leq m^*A + K\varepsilon$.

注意，外侧度并非可数可加测度.

56. Proof of Proposition 1 关于 $[a, b]$ 情况中 (a_i, b_i) 的构造：将 I_n 中的线段从左到右排列，依次取覆盖了前一个 b_i 的线段. 对于任意的有限区间，用一个闭区间从内部逼近它并利用之前的结论，这样可以得到一边的结论. 同时利用 $m^*I = m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I)$ 来得到另一边，注意其中用到了 $\bar{I} \backslash I$ 至多包含两个点且单个点的外侧度为零. 对于无穷区间的情况，同样是利用内部的闭区间.

p58. Proposition 这一命题表明任意 Borel 集都可以用开集在外侧度意义上从外部逼近；如果考虑是用 G_δ 集，则可以直接从外部在外侧度意义上相等.

p58. Definition 实际上这一定义意味着，如果我们定义相应的"内测度"m_*，则有 $m^*(E) = m_*(E)$. 首先对于 E，一个十分符合直觉的定义"内测度"的方法为 $m_*(E) = m_*(X) - m_*(X \backslash E)$，其中 X 是某个包含 X 的集合. 而这一定义的是实际上就是说对于任意 X（可能不包含 E），这一性质都是成立的.

同时注意 L.H.S $\leq$ R.H.S 是自然成立的，所以只需要验证 L.H.S $\geq$ R.H.S 即可.

p60. Lemma 11 注意我们还没有证明开区间都是 Lebesgue 可测的，但我们已经证明了对于区间，外测度和长度是一致的.

p61. Proof of Theorem 12 定理 10 表明 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ-代数且根据引理 11，它包含所有 (a, ∞)；同时易证 Boreal 集 $\mathfrak{B}$ 可由全体 (a, ∞) 生成，即它是包含所以 (a, ∞) 的最小的 σ-代数. 因此 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$，所以 Borel 集都可测.

p64. Proposition 15 这一命题表明可测集可以用开集从外部逼近，用闭集从内部逼近. 如果考虑 G_δ 集和 F_σ，则上述可以在测度意义下近似. 同时若外侧度有限，则可以用有**限开**区间的并来逼近. 上述内容反之亦成立.

p68. Proof of Proposition 19 这里 $\bigcup_r \cdots$ 可以被诠释为：枚举所有有理数 r，对于每一个 r，它对应了 $\{x : f(x) + g(x) < \alpha\}$ 这一集和中的一部分. 取它们的并集则得到了完整的集合.

p69. Proposition 22 可测函数可以用简单函数近似；简单函数可以用阶梯函数近似；阶梯函数可以用连续函数近似. 具体见习题 23. 另外，这里的近似指的是误差超过 ε 的集合很小，在习题 31 中给出了另一种形式：不相等的集合很小.

p72. Proposition 23 注意这里的结论并非一致收敛，这里 A 的选取是可以依赖于 ε 的，即"任意 ε，δ，存在 $A, \cdots\cdots$"；但是一致收敛的结论实际上也是成立的，具体内容见习题 30.

p85. Definition 注意在之前的章节中，对于 f 我们不仅要求有界，还要求了 finitely-supported.

p86. Theorem 9 首先根据命题 6，在 f 有界的情况下才可以保证 $\int f_n$ 的极限是存在的，所以 R.H.S 在这里仅仅是下极限.

一个表明不等号可以严格成立的例子是：$f_n(x) = n\chi_{0,1/n}$，它几乎处处收敛于 0，但是 $\int_[0,1]f_n$ 始终为 1.

4 The Lebesgue Integral

p79. Proof of Proposition 3 在已知上下积分相等的前提下证明 f 可测：条件意味着可以有一列

$$\int \{\psi_n(x) - \varphi_n(x)\} \mathrm{d}x < \frac{1}{n}.$$

这一积分的不等式意味着满足 $m\Delta_v < v/n$，即 φ_n 和 ψ_n 相差太多的点不会很多. 考虑 ψ^* 和 φ^*，证明在极限情况下，这样的点（在此即不相等的点）为一个零测集.

p92. 这里之所以说大部分情况下，只需要有 $|f_n| \le g$，则之前的结论仍然成立的原因在于，$g \pm f_n$ 是非负的，而积分和极限都有线性性.

5 Differentiation and Integration

p97. Overview

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{1}$$

几乎处处成立，注意我们已知对于连续点它是成立的. 仅对某一类函数 f，可以定义 f' 使成立

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{2}$$

p98. Lemma 1 Vitali 覆盖的十分常见的例子是考虑对 E 的每个点的所有领域，或者是类似于这样的集合。这一引理的作用在于把一个全局的问题化为局部的问题. 注意在这里的描述中并没有“3 倍”的概念，所以在估计上界的时候 (?)

p100. Theorem 3 这一定理对于单调递增的函数解决了 p97 中提出的问题：首先 f 几乎处处可微（从而几乎处处连续），从而解决了(1)，同时也给出了唯一自然的 f' 的定义（由于是 Lebesgue 积分，所以我们无需考虑那些不可微的点）；同时表明在仅有单调性的情况下，对于(2)，只能成立不等式.

证明的关键点在于证明 $E_{u,v}$ 是零测集. 注意到函数值的差就是微分的积分，所以在这里我们实际上在估计 sv 和 su.

p103. Lemma 4 这一引理可用于在 f 和 P，N 以及 T 之间转换.

p103. Theorem 通常来讲，这一结果只有对于有线性性的时候才真正有用，在诸如模长之类的只有三角不等式的场合则只能用于进行宽松的有界性估计。

p105. Proof of Lemma 8 思路：反证法. 考虑满足 $f>0$ 的非零测子集，通过一些近似得到满足 $\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$ 的区间，从而推得矛盾.

p106. Proof of Lemma 9 我们只需要证明 F' 几乎处处存在且对任意 y 成立 $\int_a^y (F'-f) = 0$ 并应用引理 8 即可. 其中 F' 的几乎处处存在性由它的定义式及引理 7 得到. 下考虑 $\int(F'-f)$. 首先把 F' 化为更方便处理的形式，由于我们已知其存在性，所以对于几乎所有 x，成立

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{F(x+1/n)-F(x)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

首先我们尝试交换积分和极限运算. 由于这是一个一般的函数，我们考虑利用 Lebesgue 收敛定理，即我们需要证明 $|f_n| \le g$ 对某个可积函数成立. 已知 $|f| \le K < \infty$，所以

$$|f_n(x)| = n\left|\int_x^{x+1/n} f(t)\mathrm{d}t\right| \le K.$$

从而有

$$\int_a^y F' = \lim_{n\to\infty} n\int_a^y \{F(x+1/n)-F(x)\}\mathrm{d}x.$$

接下来处理该积分，我们有

$$\int_a^y \{F(x+1/n)-F(x)\}\mathrm{d}x = \int_y^{y+1/n} F - \int_a^{a+1/n} F.$$

由于 F 的连续性（由引理 7 保证），我们有 $n\int_y^{y+1/n} F \to F(y)$. 所以我们

$$\int_a^y F' = F(y) - F(a) = \int_a^c f.$$

证毕.

p108. Fail to be absolutely continuous 首先如果一个函数不是几乎处处可微的，那么它不是绝对连续的。对于一个几乎处处可微的函数，定理 14 表明若它要是绝对连续的，那么它需要在微分后可以积回来。考虑 Cantor 函数，虽然它几乎处处可微，但是它导数全是零。直观上来讲，它的变化全集中在了不可微的点处。

p108. Proof of Lemma 11 取 $\varepsilon = 1$，把 $[a,b]$ 分成长度 $\le \delta$ 的子区间，插入这些子区间的端点。则对于每一组，成立 $\sum |f(x_i)-f(x_{i-1})| < \varepsilon$。从而整体上有 $t \le K\varepsilon$，其中 K 是任意大于组数的数。

p109. Proof of Lemma 13 考虑绝对连续的定义，对 $|f(x_i')-f(x_i)|$ 的求和天然的把一个全局性质化为了一个局部性质. 我们要证对于任意 $c\in[a,b]$，成立 $f(c)=f(a)$. 考虑 Vitali 覆盖定理，我们把 $[a,c]$ 分为两类区间，其中一类是 f 在其上的变化充分小的，这由几乎处处 $f'(x)=0$ 保证，另一方面则是总长度充分小的区间，在其上利用绝对连续性得到在其上的变化亦充分小。

Sufficient condition of absolute continuity Lipchitz continuity or being an indefinite integral.

p113. Lemma 16 即把区间往右移动或单纯地向右拉伸，对应的弦的斜率增长。

p113/114. Proposition 17/18 这两个命题描述了函数的凸性和其导数的关系。

6 The Classical Banach Spaces

p118. 关于 $|f+g|^p \le 2^p(|f|^p+|g|^p)$，只需要利用 Jensen 不等式即可证明。

p118. 我们可以利用 $x^{-\alpha}$ 来构造属于 L^p 但不属于某个 $L^q\,(q>p)$ 的函数。

p119. L^∞ 空间 注意 $L^\infty \subsetneqq \bigcap_{p=1}^{\infty} L^p$. 考虑[1]

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{(2^{-n},2^{-n+1}]}(x).$$

它并不是一个几乎处处有界的函数，对于任意常数 $M>0$，都有一小段 0 附近的测度不为零的区间，在其上 $f>M$. 但是可以验证它属于任意 L^p.

$\|f\|_\infty$ 可以在某种含义上理解为 f 的上确界：f 在某些总体上可以忽略的点上取值可以是 ∞，而我们在考虑上确界的时候显然不应当考虑这些点，所有有了如此的定义。注意 $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$ 是成立的。可以这样考虑，当 p 变大时，再积分 $\int_0^1 |f|^p$ 中，$|f|$ 较大的点所占的影响就越大，到最后整个积分的值就有其上确界所主导。从这一角度考虑，L^∞ 实际上是 $\|\cdot\|_\infty$ 有意义的函数全体。

p121. Hölder Notes. 另外关于 Young 不等式，可以利用 log 的凹性来证明。

p125. Proof of Theorem 6

Overview: Our goal is to show that every absolutely summable sequence $\langle f_n\rangle$ is summable. To achieve it, we need to find the pointwise sum $s=\lim s_n=\lim\sum_{k=1}^n f_k$ (a.e.) first and estimate $\|s-s_n\|$. Note that it suffices to shows the existence of the limit for every fixed x.

Now we investigate what can the absolute summability provides.

1. Hypothesis: $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\| = M < \infty$.

2. Define nonnegative $g_n(x)=\sum_{k=1}^n |f_k(x)|$, the partial sum of $|f_k|$.

3. Minkowski $\Rightarrow \|g_n\| \le \sum_{k=1}^n \|f_k\| \le M$, i.e., $\int g_n^p \le M^p$.

4. For each x, $\langle g_n(x)\rangle$ is increasing and therefore converges to an extended real number, denoting it by $g(x)$. Now we have the pointwise limit of $g_n(x)$ a.e..

5. From [3] and Fatou's Lemma, $\int g^p \le M^p$, i.e., g is integrable and therefore finite a.e..

[1] 关于级数收敛性的证明略。

5 implies that the number sequence $\langle f_n(x) \rangle$ is absolutely convergent (and therefore convergent) for almost every x.

6. Hence, we can define $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pointwisely. For those point where f_n does not converge, we simply define $s(x) = 0$.

7. Now we are going to estimate $\|s_n - s\|$.

8. Note that g^p is integrable function which dominates $s_n - s$. Hence, we can use the Lebesgue Convergence Theorem to conclude that $\lim \int |s_n - s|^p = \int \lim |s_n - s|^p = 0$.

p127. Proof of Problem 17 [2]

Overview: The key to the proof is to divide $[0,1]$ into two sets, on one of which the integral of $|g|^q$ is sufficiently small and on the other one, the convergence of f_n is uniform and therefore $|f_n - f|$ is bounded.

1. Fix $\varepsilon > 0$.

2. Since $g \in L^q$, there exists some $\delta > 0$ such that for all subset of $E = [0,1]$ whose measure $< \delta$, the integral of $|g|^q$ over it is $< \varepsilon^q$.

3. Hypothesis: $f_n \to f$ a.e.

4. From 3 and the Egoroff's Theorem, there exists $A \subset E$ with $mA < \delta$ such that $f_n \to f$ uniformly on A.

5. Now we estimate $|\int_{E\setminus A}(f - f_n)g|$ and $|\int_A|$.

6. For the first part, the Hölder inequality yields
$$\left|\int_{E\setminus A}(f - f_n)g\right| \leq \left\{\int_{E\setminus A} |f - f_n|^p\right\}^{1/p} \left\{\int_{E\setminus A} |g|^q\right\}^{1/q}.$$

7. The uniform convergence of f_n ([4.]) ensures the existence of some $N_1 > 0$ such that for all $n > N$, $\sup_{E\setminus A} |f_n - f| < \varepsilon$. Hence, $(\int_{E\setminus A})^{1/p} < \varepsilon$. Meanwhile, note that $(\int_{E\setminus A})^{1/q} < \|g\|_q < \infty$. Hence, the first part is $< \|g\|_q \varepsilon$.

8. For the second part, the Hölder inequality yields a similar inequality.

9. This time, $(\int_A)^{1/q} < \varepsilon$ by [2.] and
$$\left\{\int_A |f - f_n|^p\right\} \leq \|f - f_n\|_p \leq \|f\|_p + \|f_n\|_p \leq \|f\|_p + M.$$
Hence, the second part is bounded by $(\|f\|_p + M)\varepsilon$.

[2] I assume that $1/p + 1/q = 1$ here.

10. Consequently, for every $n > N$,

$$\left| \int f_n g - \int f g \right| \leq (\|g\|_q + \|f\|_p + M)\varepsilon.$$

p127. Lemma 7 $f \in L^p$ 差不多是有界的.