

# 科学计算笔记

任云玮

## 目录

<b>1</b>	<b>绪论</b>	<b>3</b>
1.1	计算机数值计算基本原理	3
1.1.1	实数的存贮方法	3
1.1.2	实数的基本运算原理	4
1.2	误差的来源与估计	5
1.2.1	误差的来源	5
1.2.2	误差与有效数字	5
1.2.3	数值运算的误差估计	6
1.2.4	数字求和的舍入误差分析	7
1.3	避免算法失效的基本原则	8
<b>2</b>	<b>函数的多项式插值</b>	<b>10</b>
2.1	问题的提出	10
2.2	Lagrange 插值法	11
2.3	Runge 现象	12
2.4	Newton 插值法	12
2.5	Hermite 插值	14
2.6	分段低次多项式插值	15
2.7	三次样条插值	16
2.8	最佳平方逼近	17
<b>3</b>	<b>函数的多项式逼近</b>	<b>19</b>
3.1	绪论	19
3.2	最佳平方逼近	20
3.3	正交多项式 · 绪论	22
3.4	Legendre 多项式	24
3.5	Chebyshev 多项式	25

4	附录	27
4.1	不等式 . . . . .	27

# 1 绪论

## 1.1 计算机数值计算基本原理

### 1.1.1 实数的存贮方法

1 定义 (二进制浮点数系)<sup>1</sup> 实数在计算机内部为近似存贮, 采用二进制浮点数系

$$F(2, n, L, U) = \{\pm 0.a_1a_2 \dots a_n \times 10^m\} \cup \{0\}$$

其中  $a_1 = 1$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$ . 指数  $m$  满足  $L \leq m \leq U$ . 称  $n$  为其字长, 2 表示采用二进制.

## 2 标准 (IEEE)

1. 单精度:  $t = 24, L = -126, U = 127$

2. 双精度:  $t = 53, L = -1022, U = 1023$

3. Underflow Limit:  $UFL = 0.1 \times 2^L$ . 若  $0 < x < UFL$ , 则  $fl(x) = 0$ .

4. Overflow Limit:  $OFL = 0.11 \dots 1 * 2^U$ . 若  $x > OFL$ , 则  $fl(x) = \infty$ .

5. 舍入: 若  $UFL \leq x \leq OFL$ , 则  $fl(x)$  为舍入所得浮点数. 舍入规则如下: 设  $x = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots \times 2^m$ . 若  $a_{n+1} = 1$ , 则  $d_t + 1$  并舍弃其后项; 否则直接舍弃其后项.

3 定义 (机器精度) 下仅考虑舍去的情况.

$$\begin{aligned} x - fl(x) &= 2^m \times 0.0 \dots 0a_{n+2} \dots \\ &= 2^m \times [2^{-(t+2)} + 2^{-(t+3)} + \dots] \\ &= 2^m \times 2^{-(t+1)} \end{aligned}$$

其相对误差满足

$$\frac{x - fl(x)}{x} < \frac{x - fl(x)}{0.5 \times 2^m} = 2^{-t}$$

记为  $\varepsilon$ , 称之为机器精度.

## 4 命题

$$fl(x) = x(1 + \delta), \text{ 其中 } |\delta| \leq \varepsilon$$

---

<sup>1</sup>floating Number System

### 1.1.2 实数的基本运算原理

加法 + 硬件实现  $\Rightarrow$  四则运算.

**5 实现  $(x + y)$**  设  $x, y$  为浮点数, 则  $x + y$  的实现方式如下:

1. 对阶: 将指数  $m$  化为两者中较大者;
2. 尾数相加;
3. 舍入;
4. 溢出分析等……
5. 结果输出.

**评注** 由  $fl(x) + fl(y) = x(1 + \delta_x) + y(1 + \delta_y)$  可知, 当一个大数与一个小数相加时, 小数有可能被忽略, 所以应当避免大数小数间的相加.

## 1.2 误差的来源与估计

### 1.2.1 误差的来源

1. 模型问题. 例: 近似地球为球体来计算.
2. 测量误差. 例: 测量地球半径时的误差.
3. 方法误差 (截断误差). 例: 对于  $y = f(x)$ , 求  $f(x^*)$  时使用 Taylor 展开.
4. 舍入误差 (rounding-off). 例: 计算机计算时的误差.

### 1.2.2 误差与有效数字

**6 定义 (绝对误差)** 设  $x$  为给定实数,  $x^*$  为其近似值. 定义绝对误差为

$$e(x^*) = x^* - x.$$

称  $\varepsilon^*$  为其误差上界, 若

$$|e(x^*)| \leq \varepsilon^*$$

**7 定义 (相对误差)** 对于同上的  $x$  和  $x^*$ , 定义其相对误差

$$e_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x}$$

称  $\varepsilon_r^*$  为其相对误差界, 若

$$|e_r(x^*)| \leq \varepsilon_r^*$$

**评注** 在实际应用中,  $x$  通常是未知的, 所以会采用

$$\bar{e}_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x^*}$$

来代替相对误差. 对于分子, 使用绝对误差界来替代, 有如下不等式

$$|\bar{e}_r(x^*)| \leq \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}.$$

这两种相对误差界间的差别, 当  $\varepsilon^* \ll 1$  时, 满足

$$|e_r - \bar{e}_r| = O((\varepsilon_r^*)^2)$$

**8 定义 (有效数字)** 设  $x \in R$ ,  $x^* = 0.a_1a_2 \cdots a_k \times 10^m$  为其近似值. 称  $x^*$  相对于  $x$  有  $n$  ( $n \leq k$ ) 位有效数字, 若  $n$  是满足下式的  $n$  的最大值.

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

**评注** 在实践中, 一般可以采用更加简便的方法, 对于归一化以后的  $x^*$ , 在尾数部分有  $n$  位, 则称其有  $n$  位有效数字. 注意, 此方法对于错误的舍入结果是不适用的, 对于错误的情况, 需要再减去一位有效数字.

**9 定理 (误差与有效数字)** 若  $x = 0.a_1a_2 \dots a_n \times 10^m$  有  $n$  位有效数字, 则

$$\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}.$$

反之, 若

$$\varepsilon_r^* \leq \frac{1}{2(1+a_1)} \times 10^{1-n},$$

则  $x^*$  至少有  $n$  位有效数字.

**证明** 对于前者, 只需利用有效数字的定义, 以及利用  $x \geq 0.a_1$  (仅考虑  $a_1 \neq 0$  的情况). 对于后者, 证明是类似的.

### 1.2.3 数值运算的误差估计

以下内容都假设运算无误差.

**10 定理 (四则运算误差估计)**

1. 加/减法:  $\varepsilon(x^* \pm y^*) \leq \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*$
2. 乘法:  $\varepsilon(x^* y^*) \leq |x^*| \varepsilon_y^* + |y^*| \varepsilon_x^*$
3. 除法:  $\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \leq \frac{|x^*| \varepsilon_y^* + |y^*| \varepsilon_x^*}{|y^*|^2}$

**证明** 考虑加法的误差估计. 对于  $x, y$  及其近似值  $x^*, y^*$ , 计算  $x^* \pm y^*$  和  $x \pm y$  间的误差.

$$\begin{aligned} |x^* \pm y^* - (x \pm y)| &\leq |x^* - x| + |y^* - y| \leq \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* \\ \Rightarrow \varepsilon(x^* \pm y^*) &\leq \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* \end{aligned}$$

对于其他的运算, 证明是类似的. (证明中可用  $+1-1$  技巧)

**11 定理 (运算的误差估计)** 设  $A = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{x}^*$  是  $\mathbf{x}$  的估计值. 利用带 Peano 余项的 Taylor 展开, 可知  $A$  的绝对误差满足

$$\begin{aligned} e(A^*) &= f(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{p=1}^q d^p f(\mathbf{x}^*) + o(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^q) \\ \text{取 } q=1, \text{ 则} \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_k f(\mathbf{x}^*)(x_k^* - x_k) + o(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|) \end{aligned}$$

利用上式，可知

$$\begin{aligned}\varepsilon(A^*) &\approx \sum_{k=1}^n |\partial_k f(\mathbf{x}^*)| \varepsilon(x^*) \\ \varepsilon_r(A^*) &= \frac{\varepsilon(A^*)}{|A^*|}\end{aligned}$$

**评注** 对于定义在  $\mathbf{R}$  上的函数，即为

$$\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)| \varepsilon(x^*)$$

#### 1.2.4 数字求和的舍入误差分析

**12 命题**  $n$  个浮点数相加，若将它们从小到大排列后相加，则可以减小舍入误差.

**证明** 考虑浮点数的求和  $S_n = \sum_i^n a_i$ ，在计算机中的过程表现为

$$\begin{aligned}S_2^* &= fl(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2)(1 + \varepsilon_2), \quad |\varepsilon_2| \leq \varepsilon = 2^{-t} \\ &\dots\dots \\ S_n^* &= fl(S_{n-1}^* + a_n)(1 + \varepsilon_n), \quad |\varepsilon_n| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

对于  $S_n^*$  的误差，若定义  $\varepsilon_1 = 0$ ，则

$$S_n^* = \sum_{k=1}^n a_k \prod_{p=k}^n (1 + \varepsilon_p)$$

对误差进行估计，舍去高阶无穷小，有

$$\prod_{i=k}^n (1 + \varepsilon_k) \approx 1 + \sum_{i=k}^n \varepsilon_k$$

综合上两式，有

$$\begin{aligned}S_n^* &\approx \sum_{k=1}^n a_k (1 + \sum_{p=k}^n \varepsilon_p) \\ &= S_n + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{p=k}^n \varepsilon_p\end{aligned}$$

进行移项，并取绝对值，再利用三角不等式，以及  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ ，得

$$|S_n^* - S_n| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \sum_{p=k}^n |\varepsilon_p| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n |a_k| (n - k + 1)$$

其中  $n - k + 1$  关于  $k$  单调减少，所以根据排序不等式 [引理64]，即可知命题成立. ■

### 1.3 避免算法失效的基本原则

#### 13 定理 (原则)

1. 避免两数相除/相减, 否则会严重损失有效数字.
2. 避免两相近数相减.
3. 避免绝对值很小的数做除数.
4. 避免大数与小数相加;
5. 简化计算步骤.

#### 14 算法 (高效计算 $e^A$ ) 高效计算 $e^A$ , 其中 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ . 首先有

$$e^A = e^{(A/2^n)2^n} = B^{2^n}$$

只需要得到  $B$ , 即可以利用倍乘的方法快速得到  $B^{2^n}$ . 下对于  $B$  进行估计. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x$  有 Taylor 展开

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

而取足够大的  $n$ , 即可以使得  $A/2^n \approx 0$ , 则可以对它展开得

$$B \approx I + C + \frac{1}{2}C^2, \text{ 其中 } C = A/2^n$$

而对于倍乘, 考虑  $B^2$ , 展开平方得

$$B^2 \approx I + 2(C + \frac{1}{2}C^2) + (C + \frac{1}{2}C^2)^2$$

从右至左相加即可.

#### 15 算法 (秦九韶, 多项式估值) 设有多项式 (1), 计算 $p(z), z \in \mathbf{R}$ 的值.

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

定义  $b_n$  满足

$$b_0 = a_0, \quad b_k = a_k + b_{k-1}z$$

则  $b_n$  即为所要求的值. 并且成立

$$p'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^{n-1-k}$$



**证明** 用  $x - z$  去除  $p(x)$ , 记所得余数为  $b_n(x)$ , 即

$$p(x) = (x - z)q(x) + b_n(x),$$

代入  $x = z$ , 则左侧第一项为 0, 可知  $p(z) = b_n(z)$ . 将两边的式子展开, 利用对应系数相等, 即可得算法中  $b_n$  的递推式.

**16 定理 (外推法)** 设  $x_0, x_1$  是  $x$  的两个估计值, 且  $x_1$  相较于  $x_0$  更接近  $x$ , 则可以通过恰当的权值  $\omega$ , 使得它们的加权平均

$$\bar{x} = x_1 + \omega(x_1 - x_0)$$

更加接近精确值  $x$ .

**17 算法 ( $\pi$  的估计)** 考虑单位圆, 其面积为  $\pi$ , 设  $\pi_n$  为单位圆的内接正  $2n$  边形的面积, 以及

$$\tilde{\pi}_n = \frac{1}{3}(4\pi_{2n} - \pi_n)$$

则  $\pi_n$  与  $\tilde{\pi}_n$  与  $\pi$  的误差满足

$$|\pi_n - \pi| = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad |\tilde{\pi}_n - \pi| = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

**证明** 对于  $\pi_n$ .

$$\pi_n = n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^5}{5!} \frac{1}{n^4} - \cdots \Rightarrow |\pi_n - \pi| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

对于  $\tilde{\pi}_n$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_n &= \pi_{2n} + k(\pi_{2n} - \pi_n) = (1+k)\pi_{2n} - k\pi_n \\ &= (1+k)\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{4n^2} + \cdots\right) - k\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{n^2} + \cdots\right) \\ &= \pi - \left(\frac{k+1}{4} - k\right) \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{aligned}$$

为使式子的第二项为零, 取  $k = \frac{1}{3}$ , 则成立

$$|\tilde{\pi}_n - \pi| = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \blacksquare$$

**评注** 在实际中,  $\pi_n$  也是没有办法直接计算而得的, 但是对于  $n = 3$ , 即 6 边形的情况, 可以知道  $\pi_3 = 3\sqrt{3}/2$ . 同时有递推公式

$$\pi_{2n} = \sqrt{2n(n - \sqrt{n^2 - \pi_n^2})},$$

而开平方可以通过迭代的方式实现, 从而即计算得到足够精确的  $\pi_{2n}$  和  $\pi_n$ .

## 2 函数的多项式插值

### 2.1 问题的提出

**18 定义 (插值)** 设函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 且已知在点  $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$  处的函数值  $y_i = f(x_i)$ , 若存在一简单函数  $P(x)$ , 成立

$$P(x_i) = y_i,$$

则称  $P(x)$  为  $f(x)$  的插值函数, 点  $x_1, x_2, \dots, x_n$  称为插值节点,  $[a, b]$  称为插值区间, 求  $P(x)$  的方法被称为插值法.

若  $P(x) \in P_n$  为次数不超过  $n$  的多项式, 则称为多项式插值.

**19 定理 (唯一性)** 给定满足定义18的  $n+1$  个点上的函数值, 则次数不超过  $n$  的插值多项式  $P_n(x)$  存在且唯一.

**证明** 利用待定系数法, 设多项式的系数为  $a_0, \dots, a_n$ , 则有线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = y_1, \\ \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = y_n, \end{cases}$$

其系数矩阵为 Vandermonde 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

根据定义18中对于  $x_i$  的要求, 矩阵行列式成立

$$\det A = \prod_{i,j=0, i>j}^n (x_i - x_j) \neq 0.$$

所以该方程组有唯一解.

**评注** 虽然插值多项式是唯一的, 但是根据基函数的选取的不同, 系数是不相同的, 所以才需要不同的插值方法.

## 2.2 Lagrange 插值法

20 定理 (Lagrange 插值法) 定义

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$
$$(L_n f)(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x),$$

则  $L_n f$  即为  $f$  的插值多项式.

**证明** 考虑构造  $l_i \in P_n$ , 满足条件  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ , 这样  $L_n f = \sum y_i l_i$  满足要求. 改写条件为 (以  $l_0$  为例)

$$l_0(x) = \alpha(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$
$$l_0(x_0) = 1$$

解得

$$\alpha = \frac{1}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n)} \quad \blacksquare$$

**评注** 这样构造插值多项式的动机在于在取定插值节点后, 插值实际上相当于构造一个从  $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$  到  $y^*(x) \in P_n$  的一个映射  $\mathcal{F}$ , 并且可以证明,  $\mathcal{F}$  是线性的. 因此成立

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}) = \mathcal{F}\left(\sum_{i=0}^n y_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=0}^n y_i \mathcal{F}(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x).$$

21 定理 (Lagrange 余项公式) 设符号含义同定理20且  $f$  充分光滑, 则对于每一个固定的  $x$  成立

$$f(x) - (L_n f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中  $\xi \in (a, b)$  且

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

**证明** 固定  $x \neq x_i$ , 定义  $R(x)$  满足

$$f(x) - (L_n f)(x) = R(x) \omega_{n+1}(x).$$

构造辅助函数  $g(t)$

$$g(t) = f(t) - (L_n f)(t) - R(x) \omega_{n+1}(t).$$

根据插值法与  $R(x)$  的定义, 成立

$$g(x_i) = 0, \quad g(x) = 0,$$

即函数  $g(t)$  有  $n+2$  个零点. 反复应用 Rolle 定理, 可知存在  $\xi \in (a, b)$ , 成立  $g^{(n+1)} = 0$ , 即

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - R(x)(n+1)! = 0 \\ \Rightarrow R(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

结合  $R(x)$  的定义式即可知命题成立. ■

**评注** 当已知  $f^{(n+1)}$  有界时, 可以使用此公式进行估计.

## 2.3 Runge 现象

**22 定理** 对于复函数  $f(z)$ , 如果存在  $r_0 > \frac{3}{2}(b-a)$ , 使得  $f(z)$  在  $B_{r_0}(\frac{a+b}{2})$  内解析, 则  $P_n(x) = L_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛与  $f(z)$ . 这里  $B_{r_0}(\frac{a+b}{2})$  为以  $\frac{a+b}{2}$  为圆心,  $r_0$  为半径的圆.

## 2.4 Newton 插值法

**23 例**  $n=2$  时问题的求解.

设  $y^*(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$ , 根据  $y^*(x_0) = y_0$ ,  $y^*(x_1) = y_0$ , 得  $a_0 = f(x_0)$ ,  $a_0 + a_1(x_1-x_0) = f(x_1)$ , 即

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

可以发现  $a_1$  为割线的斜率. 同理可知

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

为斜率的斜率.

**24 定义 (差商)** 递归  $f(x)$  在  $x_i, \dots, x_{i+n}$  的各阶差商为:  $f[x_i] = f(x_i)$ , 第  $k$  阶差商为

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

**25 定理 ( $n$  次 Newton 插值法)**  $x_0, \dots, x_n$  为互异插值点, 则函数  $f(x)$  满足

$$\begin{aligned} f(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &\quad + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) \cdots (x-x_{n-1}) + R_n(x). \end{aligned}$$

其中  $R_n(x)$  为其 Newton 插值多项式的余项, 为

$$R_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x-x_0) \cdots (x-x_n).$$

**证明** 根据差商的定义, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f[x_0] + f[x_0, x](x - x_0) \\ f[x_0, x] &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x](x - x_1) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] = f[x_0, \dots, x_n] + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_n)$$

将上述式子反复代入它上面的式子, 即得 Newton 插值公式.

**评注** Newton 插值法的优点在于, 当插值点的个数增加时, 无需重新计算原有的系数, 即 Newton 插值多项式是可以递归计算的.

**26 定理** 根据 Newton 插值公式, 可以得到如下差商的性质.

1.

$$f[x_0, \dots, x_m] = \sum_{i=0}^m \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

2. 设  $i_0, \dots, i_m$  为  $0, \dots, m$  的任意一个排列, 则

$$f[x_0, \dots, x_m] = f[x_{i_0}, \dots, x_{i_m}].$$

3. 广义 Lagrange 中值定理

$$f[x_0, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}, \quad \xi \in (\min\{x_i\}, \max\{x_i\})$$

**证明** 交换插值节点的顺序后,  $n$  次 Newton 插值多项式的  $n$  次项系数不变, 所以 [2.] 成立. 同  $m-1$  次的 Lagrange 插值多项式比较第  $m-1$  次项系数及其余项, 即可得到 [1.] 和 [3.]

**评注** 根据 [3.] 可知, 对于一个  $n$  次多项式,  $n$  阶差商即为其  $n$  次项系数,  $k(k > n)$  阶差商为零.

**27 定义** 给定序列  $\{f_k\}$ ,  $f_k$  表示  $f$  在  $x = x_k$  处的值, 定义

1. 前向差分算符  $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$ ,

2. 移位算符  $E f_k = f_{k+1}$ ,

3. 恒等算符  $I f_k = f_k$ .

**28 定理 (算符二项式定理)** 对于算符  $A, B$ , 若它们可交换, 则成立二项式定理

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

**29 命题** 根据定义27和定理28可知

$$\begin{aligned}\Delta &= E - I \\ \Delta^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-I)^{n-k} E^k \\ E^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k\end{aligned}$$

**30 定理 (均匀插值)** 设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  满足  $x_k = x_0 + kh$ , 则有

$$\begin{aligned}f[x_k, x_{k+1}] &= \frac{\Delta f_k}{h} \\ f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] &= \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2} \\ &\dots\dots\dots \\ f[x_k, \dots, x_{k+m}] &= \frac{\Delta^m f_k}{m!h^m}\end{aligned}$$

**31 定理 (Newton 前插公式)** 设记号同定理30, 另  $x = x_0 + th$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , 代入定理25, 则成立

$$N_n(x) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0.$$

其余项为

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

**评注** 利用广义二项式定理, 有

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0 + th) = E^t f(x_0) = (I + \Delta)^t f(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} \Delta^k f_0\end{aligned}$$

## 2.5 Hermite 插值

**32 定理** 设  $f \in C^n[a, b]$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为  $[a, b]$  上的互异节点, 则  $f[x_0, \dots, x_n, x]$  在  $[a, b]$  上连续.

**33 定理 (Hermite 插值)** 若给出  $m+1$  个插值条件 (含函数值和导数值) 可构造出次数不超过  $m$  次的多项式.

**评注** 可以利用待定系数法或者基函数法求的 Hermite 插值多项式.

## 2.6 分段低次多项式插值

**思路** 局部入手，整体分析<sup>2</sup>. 化整为零，以直代曲<sup>3</sup>.

**34 引理 ( $\omega_n$  的估计)** 任给节点  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ , 记  $h = \max x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, \dots, n$ , 则对于任意  $x \in [x_0, x_n]$ , 成立

$$|(x - x_0) \cdots (x - x_n)| \leq \frac{n!h^{n+1}}{4}.$$

**35 定理 (分段线性插值)** 记  $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ ,  $e_k = (x_k, x_{k+1})$ ,  $h_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $h = \max h_k$ . 找函数  $y = f_h(x)$ , 逼近原有函数, 使得

1. 满足插值条件,  $f_h(x_k) = f(x_k)$ ,
2.  $f_h(x)$  连续,
3.  $f_h(x) \in P_1$ ,  $x \in e_k$ .

则  $f_h$  的结果为

$$f_h(x) = f_h(x_k) + f_h[x_k, x_{k+1}](x - x_k), \quad (x \in e_k).$$

设  $M_2$  表示二阶导数的上界, 则误差  $R(x)$  满足,

$$R(x) = \left| \frac{f^{(2)}(\xi)}{2} (x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2.$$

**评注** 若作整体的 Lagrange 插值, 则余项  $R_L(x)$  满足

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1} \right| \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{n+1}.$$

而求高阶导数后容易出现 Runge 现象.

**36 定理 (分段三次 Hermite 插值)** 节点同上, 构造  $f_h(x)$  使得

1.  $f_h(x_k) = f(x_k)$ ,  $f'_h(x_k) = f'(x_k)$
2.  $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$
3.  $f_h(x) \in P_3$ ,  $x \in e_k$

对于两插值点的情况,  $f$  的结果为

$$f_h(x) = f(x_k)\alpha_k + f(x_{k+1})\alpha_{k+1} + f'(x_k)\beta_k + f'(x_{k+1})\beta_{k+1}.$$

其余项  $R(x)$  满足

$$R(x) = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4} (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2 \right| \leq \frac{M_4}{4!} \times \left( \frac{h}{4} \right)^4 = \frac{1}{384} M_4 h^4.$$

---

<sup>2</sup>例: 微分流形

<sup>3</sup>例: Riemann 积分

## 2.7 三次样条插值

**37 定义** 给定控制点  $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ , 设函数  $y = y^*(x)$  满足

1.  $y^*(x) = y_k$ ,
2.  $(y^*)^{(4)} = 0, x \in e_k \Leftrightarrow y^* \in P_3, x \in e_k$ ,
3.  $y^* \in \mathcal{C}^2[a, b]$ .

称满足后两个条件的函数为**三次样条函数**, 称满足上述三个条件的函数为**三次样条插值函数**.

**38 定义 (边界条件)**

1. 转角条件:  $S'(x_0) = f'_0, S'(x_n) = f'_n$ ,
2. 弯矩条件:  $S''(x_0) = f''_0, S''(x_n) = f''_n$ , 称  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  的特例为自然边界条件,
3. 周期条件:  $S(x_0+0) = S(x_n-0), S'(x_0+0) = S'(x_n-0), S''(x_0+0) = S''(x_n-0)$ ,
4. 非纽结条件:  $S'''(x)$  在  $x = x_1$  和  $x = x_{n-1}$  处连续.<sup>4</sup>

**评注** 根据定义37, 在每个小区间上有 4 个待定系数, 所以总共有  $4n$  个待定系数. 而所给条件仅有  $n+1$  个插值条件, 以及在中间  $n-1$  个插值节点处二阶导数连续 (从而原函数与一阶导数也连续), 有  $3n-3$  个光滑性条件, 共  $4n-2$  个条件, 因此需要额外的边界条件来确定剩余两个系数.

**39 定理 (样条插值的求解)** 设  $S''(x_i) = M_i$ , 通过求解  $M_i$  来确定插值多项式. 由于  $S(x) \in \mathcal{C}^2$  且在每一段上  $S(x) \in P_3$ , 所以  $S''(x)$  是分段的线性函数. 设在每一段上,

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}.$$

对  $S''$  积分一次、二次, 并分别利用光滑性条件、插值条件, 以及所给定的边界条件, 即可求得  $M_i$  的值.

**40 定理** 设  $f(x) \in \mathcal{C}^4[a, b]$ , 则三次样条插值函数  $S_3(x)$ ,

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(m)}(x) - S^{(m)}(x)| \leq C_m \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| h^{4-m}, \quad m = 0, 1, 2,$$

其中  $C_0 = 5/384, C_1 = 1/24, C_2 = 3/8$ .

<sup>4</sup> (Not-a-knot end Condition) 这是 Matlab 中 spline 在  $X$  和  $Y$  长度相同时所应用的边界条件.



## 2.8 最佳平方逼近

41 定义 (最佳平方逼近) 给定  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  和线性无关的函数列  $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}[a, b]$ , 定义

$$S_n = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$$

称  $f_* \in S_n$  为最佳平方逼近函数, 若

$$\|f_* - g\| = \min_{g \in S_n} \|f - g\|_2.$$

评注 离散的描述为, 给定插值点  $x_i, 0 \leq i \leq m$ , 求  $f_*$ , 使得

$$f_* = \min_{g \in S_n} \sum_{j=0}^n \rho(x_j) |f(x_j) - g(x_j)|^2.$$

求解

$$\begin{aligned} f_* &= \sum_{i=0}^n a_i^* \varphi_i \\ g &= \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \end{aligned}$$

所以问题即为

$$\min_{\mathbf{a}} \|f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i\|_2^2, \mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^T$$

从而归结为多元函数的优化问题. 所以有  $\partial_{a_i} I(\mathbf{a}) = 0$ .

$$\begin{aligned} I(\mathbf{a}) &= (f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i, f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i) \\ \partial_{a_j} I(\mathbf{a}) &= \int_a^b \partial_{a_j} (f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i) \end{aligned}$$

几何解释

离散情况

$S_n$  的选取

正交多项式

42 定义 (正交多项式) 设  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  是  $[a, b]$  上首项系数  $a_n \neq 0$  的  $n$  次多项式序列, 满足

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \begin{cases} A_k, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

则称  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  为  $[a, b]$  上带权  $\rho(x)$  的正交多项式序列.

利用 C-S 正交化过程，可有普通基得到正交基.

**43 定理**  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  是首项系数为 1 的正交多项式序列. 成立

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) + \beta_n\varphi_{n-1}(x)$$

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{-1} = 0$$

$$\alpha =$$

$$\beta =$$

**44 定理** 设  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  为  $[a, b]$  上的正交多项式, 则  $\varphi_n$  恰有  $n$  个相异的实根.

### 3 函数的多项式逼近

#### 3.1 绪论

**45 定义 (逼近)** 对函数  $f$  逼近, 即找一简单函数  $g$ , 使得在某种度量的意义下, 它们之间的误差最小或足够小.

**46 定理 (Weierstrass)** 对于定义在  $[a, b]$  上的连续复函数, 存在一系列复多项式  $\{P_n\}$ , 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = f,$$

且是一致的. 若  $f$  是实函数, 则  $P_n$  的系数也为实数.

**评注** Stone-Weierstrass 定理<sup>5</sup> 保证了至少在最大模的意义下, 用多项式来逼近函数是可能的.

**47 定义 (常用范数)** 对于  $\mathbf{R}^n$ , 常用的范数有

1.  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$

2.  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$

3.  $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}.$

对于  $\mathcal{C}[a, b]$ , 常用的范数有

1.  $\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$

2.  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx,$

3.  $\|f\|_2 = (\int_a^b f^2(x) dx)^{1/2}.$

**评注** 通常对于内积空间  $X$ , 可以定义范数为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x, x)}.$$

**48 定义 (权函数)** 设  $[a, b]$  为有限或无限区间<sup>6</sup>, 非负函数  $\rho(x)$  称为  $[a, b]$  上的权函数, 若满足

1.  $\int_a^b \rho(x) x^k dx < \infty, k = 0, 1, 2, \dots,$

2. 对任意非负  $g \in \mathcal{C}[a, b]$ , 若  $\int_a^b \rho(x) g(x) dx = 0$ , 则  $g = 0$ .

**评注** 利用权函数, 可以定义带权内积和范数.

---

<sup>5</sup> **Theorem(Stone)** Suppose  $\mathcal{A}$  is a self-adjoint algebra of complex continuous functions on a compact set  $K$ ,  $\mathcal{A}$  separates points on  $K$ , and  $\mathcal{A}$  vanishes at no point of  $K$ . Then the uniform closure  $\mathcal{B}$  of  $\mathcal{A}$  consists of all complex continuous functions on  $K$ . In other words,  $\mathcal{A}$  is dense in  $\mathcal{C}(K)$ .

<sup>6</sup>例子中说  $\rho = 1$  是一个常用的权函数, 但我没有明白, 在无限区间的时候 [1.] 是如何成立的.

### 3.2 最佳平方逼近

**49 定义 (最佳平方逼近)** 给定  $f \in \mathcal{C}[a, b]$  和线性无关的函数列  $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in \mathcal{C}[a, b]$ , 定义  $S_n = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ , 称  $f^* \in S_n$  为最佳平方逼近函数, 若

$$\|f^* - f\| = \min_{g \in S_n} \|f - g\|_2.$$

即  $f^*$  是在 2-范数的含义下,  $S_n$  中与  $f$  最接近的函数.

**评注** 对于离散的情况<sup>7</sup>, 可以描述为: 给定  $x_0, \dots, x_n$  处的函数值  $f(x_k)$ , 求  $f^*$ , 成立

$$\sum_{i=0}^n \rho(x_i) |f(x_j) - f^*(x_j)|^2 = \min_{g \in S_n} \sum_{i=0}^n \rho(x_i) |f(x_j) - g(x_j)|^2$$

**50 定理 (最佳平方逼近的求解)** 设记号同定义49, 设

$$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x),$$

则可以定义关于  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^\top$  的函数

$$I(\mathbf{a}) = \|f - g\|_2^2 = \left\| f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right\|_2^2 = \int_a^b \rho \left( f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right)^2 dx.$$

根据定义,  $I(\mathbf{a})$  在  $f^*$  处取极值, 根据 Fermat 定理, 在该点各偏导数为零, 通常假设  $f$  的条件足够好, 极限和积分可以换序, 即有

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_j} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial a_i} \rho \left( f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right)^2 dx \\ &= -2 \int_a^b \rho \left( f - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i \right) \varphi_j dx = 0. \end{aligned}$$

即有线性方程组,

$$\begin{cases} (\varphi_0, \varphi_0)a_0 + (\varphi_0, \varphi_1)a_1 + \dots + (\varphi_0, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_0) \\ (\varphi_1, \varphi_0)a_0 + (\varphi_1, \varphi_1)a_1 + \dots + (\varphi_1, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_1) \\ \dots\dots\dots \\ (\varphi_n, \varphi_0)a_0 + (\varphi_n, \varphi_1)a_1 + \dots + (\varphi_n, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_n) \end{cases} \quad (2)$$

<sup>7</sup> 实际上我们可以利用 Riemann-Stieltjes 积分定义内积,

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_a^b f dG, \\ G(x) &= \begin{cases} \int_a^b g dx, & g \text{ 为函数,} \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) I(x - x_i), & g \text{ 为离散点} \end{cases} \end{aligned}$$

其中  $I(x)$  为单位阶跃函数. 可以发现, 这两种描述的方式是等价的. 在这样的描述下, 对于离散点的  $G$  实际上是阶梯函数.

由于  $\{\varphi_k\}$  线性无关, 所以方程组 (2) 有唯一解. 设其解为  $\mathbf{a}^*$ , 则最佳平方逼近函数即为

$$f^* = \sum_{i=0}^n a_i^* \varphi_i(x),$$

**几何描述** 可以从几何的角度来理解最佳平方逼近.  $S_n$  是  $\{\varphi_k\}$  张成的空间, 而  $f$  是  $S_n$  内或  $S_n$  外的一个向量, 最佳平方逼近即找  $S_n$  中找  $f^*$ , 使得  $\|f - f^*\|$  最小. 根据几何上的直观,  $f - f^*$  应该和  $S_n$  “垂直”, 即与张成  $S_n$  的向量组中的向量分别垂直. 而垂直可以被描述为内积为零. 从而就得到了式 (2). (见图 1)

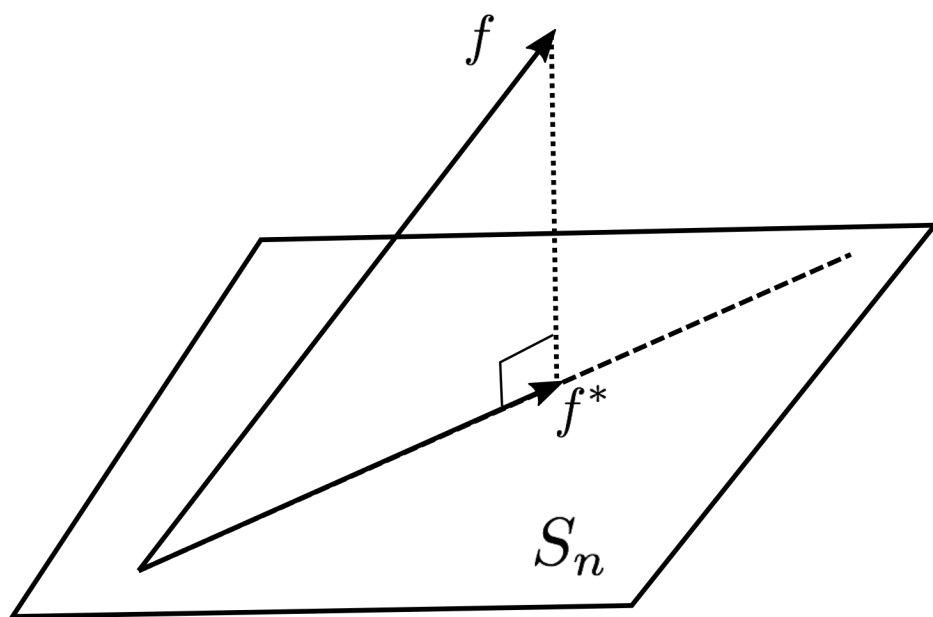


图 1: 最佳平方逼近几何含义

### 3.3 正交多项式 · 绪论

**51 定义 (正交)** 设函数  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $\rho$  为  $[a, b]$  上的权函数且满足

$$(f, g) = \int_a^b \rho f g dx = 0,$$

则称  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  上带权  $\rho$  **正交**. 若函数组  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_k > 0, & i = j \end{cases}$$

则称  $\{\varphi_k\}$  为  $[a, b]$  上的带权  $\rho$  的**正交函数组**. 若  $A_k = 1$ , 则称为**标准正交函数组**.

**52 定义 (正交多项式)** 设  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  是首项系数  $a_n \neq 0$  的  $n$  次多项式序列. 若它们正交, 则称它们为**正交多项式序列**.

**53 算法 (Gram-Schmidt 正交化)** 设  $\{\varphi_k\}$  是内积空间  $V$  的一组基, 定义

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \varphi_0, \\ \psi_n &= \varphi_n - \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_i, \eta_i) \eta_i \end{aligned}$$

其中  $\eta_i = \psi_i / \|\psi_i\|$ . 则  $\{\psi_k\}$  为  $V$  的一组正交基.

**评注** 要求  $n$  次正交多项式组, 只需另  $\varphi_k = x^k$ , 再进行 Gram-Schmidt 正交化即可.

**54 定理** 设  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$  是一列正交多项式, 根据正交性 (从而线性无关) 可以得到正交多项式的如下性质,

1.  $P_n \subset \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ ,
2. 设  $P \in P_{n-1}$ , 则  $\varphi_n$  与  $P$  正交.

**55 定理** 设  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$  是  $[a, b]$  上带权  $\rho$  的正交多项式, 则成立

$$\varphi_{n+1} = (x - \alpha_n)\varphi_n - \beta_n\varphi_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \quad \varphi_{-1} = 0, \\ \alpha_n &= (x\varphi_n, \varphi_n) / (\varphi_n, \varphi_n), \\ \beta_n &= (\varphi_n, \varphi_n) / (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}). \end{aligned}$$

**证明** 由于齐次性, 不妨设  $\varphi_n$  首项系数为 1. 所以成立

$$\varphi_{n+1} - x\varphi_n = \sum_{k=0}^n \gamma_k \varphi_k,$$

对于系数  $\gamma_k$ , 成立<sup>8</sup>

$$\gamma_k = \frac{(\varphi_{n+1} - x\varphi_n, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{(\varphi_{n+1}, \varphi_k) - (\varphi_n, x\varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}.$$

由于  $\{\varphi_n\}$  正交, 所以当  $k < n-1$  时, 成立  $\gamma_k = 0$ . 所以有

$$\varphi_{n+1} - x\varphi_n = \gamma_n \varphi_n + \gamma_{n-1} \varphi_{n-1}.$$

再进行一些代换, 即可以得到原递推式. ■

**56 定理** 设  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  为  $[a, b]$  上带权  $\rho$  的正交多项式, 则  $\varphi_n$  在区间  $(a, b)$  上有  $n$  个不同的零点。

**证明** 首先利用权函数的定义, 证明零点不可能都是偶数重的。再假设  $x_1, \dots, x_l$  是  $\varphi_n$  的奇数重零点, 则

$$(\varphi_n, (x - x_1) \cdots (x - x_l)) \neq 0,$$

再利用正交性可得  $l = n$ . ■

---

<sup>8</sup> 设  $B$  是内积空间  $V$  的一组正交基, 则对于任意  $x \in V$ , 成立

$$x = \sum_{\beta \in B} \frac{(x, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta$$

另外, 根据这里内积的定义, 成立  $(\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_i/x, x\varphi_j)$ .

### 3.4 Legendre 多项式

**57 定义 (Legendre 多项式)** 取区间  $[-1, 1]$ ,  $\rho(x) \equiv 1$ , 称由  $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$  正交化而得的多项式为 Legendre 多项式。其表达式为

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

首项系数为 1 的 Legendre 多项式为

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

**58 定理 (Legendre 多项式的性质)** Legendre 多项式有如下性质,

1. 正交性:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

2. 奇偶性:

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$$

3. 递推关系:

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**证明** todo

**59 定理 (Legendre 多项式的逼近性质)** 在区间  $[-1, 1]$  上, 设  $\tilde{L}_n$  是首项系数为 1 的 Legendre 多项式, 则

$$\|\tilde{L}_n\|_2 = \min_{P \in P_n} \|P(x)\|_2.$$



### 3.5 Chebyshev 多项式

**60 定义 (Chebyshev 多项式)** 取区间  $[-1, 1]$ ,  $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ , 称由  $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$  正交化而得的多项式为 Chebyshev 多项式。其表达式为

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1$$

**61 定理 (Chebyshev 多项式的性质)** Chebyshev 多项式有如下性质,

1. 递推关系:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

2. 正交性:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi/2, & n = m \neq 0, \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases}$$

3.  $T_{2k}(x)$  只含  $x$  的偶次幂,  $T_{2k+1}(x)$  只含  $x$  的奇次幂。

4.  $T_n$  在区间  $[-1, 1]$  上的  $n$  个零点为

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

5.  $T_n$  的首项系数为  $2^{n-1}$ .

**62 定理 (Chebyshev 多项式的逼近性质)** 在区间  $[-1, 1]$  上, 设  $\tilde{T}_n$  是首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式, 则

$$\|\tilde{T}_n\|_\infty = \min_{P \in \tilde{P}_n} \|P(x)\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**评注** 这一定理意味着, 取区间  $[-1, 1]$ ,  $n$  次 Chebyshev 多项式是所有次数小于等于  $n$  的首项为 1 的多项式中, 绝对值的最大值最小的一个。从而, 若想用  $P_{n-1}$  中的多项式来逼近  $n$  次多项式  $f$ , 只需找  $f^* \in P_{n-1}$ , 使得

$$f - f^* = a_n \tilde{T}_n.$$

其中  $a_n$  为  $f$  的  $n$  次项系数。对于一般的在区间  $[a, b]$  上的情况, 只需利用平移和伸缩映射到  $[-1, 1]$  上即可。

**63 定理 (Chebyshev 零点插值)** 设插值节点  $x_0, \dots, x_n$  为 Chebyshev 多项式  $T_{n+1}$  的零点, 被插值函数  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[-1, 1]$ , 则多项式插值的余项  $R_n$  满足

$$|R_n| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \|f^{(n+1)}(x)\|_\infty.$$

**证明** 由于插值点是 Chebyshev 多项式的零点, 所以  $\omega_{n+1} = \tilde{T}_n$ , 所以根据定理62, 成立

$$\omega_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}. \quad \blacksquare$$

**评注** 这一定理保证了使用 Chebyshev 多项式的零点插值, 至少可以使得误差的最大值最小。

## 4 附录

### 4.1 不等式

64 引理 (排序不等式) 对于满足下述条件的  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

则同序相乘求和值最大, 逆序最小, 即

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{k_i} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1}$$

65 引理 (算数-几何均值不等式)

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

当且仅当  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$  时等号成立.

**证明** 因为有齐次性, 所以不妨设  $\prod a_i = 1$ , 并令

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \dots, \quad a_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}, \quad a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$$

则只需证明下式即可.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \geq n$$

不妨设  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$ , 则根据排序不等式

$$\text{L.H.S} \geq \alpha_1 \frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \alpha_n \frac{1}{\alpha_n} = n \quad \blacksquare$$