科学计算作业 练习 2

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

定理 1 (唯一性) *设 $p, q \in P_n$ 在 $x_i(i = 0, \ldots, n)$ 处相等，则 $p \equiv q$.*

证明 设 $r(x) = p(x) - q(x)$，它在 $x = x_i$ 处值为 0，设 $r(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，则有

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

A 为 Vandermonde 矩阵，由于 x_i 互异，所以 $\det A \neq 0$，从而 $X = 0$，即 $p(x) - q(x) = r(x) \equiv 0$，$p \equiv q$。■

引理 2 *若 $f(x)$ 是次数为 n 的多项式,则当 $k > n$ 时,$f[x_0, \ldots, x_k] = 0$. 且 $f[x_0, \ldots, x_n] = a_n$，$a_n$ 为 n 次项的系数。*

证明 对 $f(x)$ 插值，由于 $f \in P_n$，所以成立

$$\begin{aligned} f(x) =& f[x_0] + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &+ f[x_0, \ldots, x_{n+1}](x - x_0) \cdots (x - x_n) + \cdots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}). \end{aligned}$$

因为 $f \in P_n$，所以 $x^k (k > n)$ 项系数为零，同时比较 n 次项系数，得

$$\begin{aligned} &f[x_0, \ldots, x_k] = 0, \\ &f[x_0, \ldots, x_n] = a_n. \quad ■ \end{aligned}$$

4. 设 x_j 为互异节点……

解 (1) 成立

$$\text{L.H.S}(x_i) = \sum_{j=0}^{n} x_j^k \delta_{ij} = x_i^k = \text{R.H.S}(x_i),$$

即两边在 x_i 处相等，根据定理1，L.H.S $\equiv$ R.H.S. ■

(2) 成立

$$\text{L.H.S}(x_i) = \sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^k\delta_{ij} = (x_j - x_j)^k = 0 = \text{R.H.S}(x_i),$$

即两边在 x_i 处相等，根据定理1，L.H.S $\equiv$ R.H.S. ■

8. $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$,……

解 设 $x_k = 2^k(k = 0, \ldots, 8)$，对 f 进行插值，有

$$\begin{aligned} f(x) =& f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_7](x - x_0)\cdots(x - x_6) \\ &+ f[x_0, \ldots, x_8](x - x_0)\cdots(x - x_7) \end{aligned}$$

由于 f 为 7 次多项式，所以根据引理2，得

$$f[x_0, \ldots, x_7] = 1, \quad f[x_0, \ldots, x_8] = 0. \quad ■$$

9. 证明 $\Delta(f_k g_k) =$……

解

$$\begin{aligned} \Delta(f_k g_k) &= f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k \\ &= g_{k+1}(f_{k+1} - f_k) + f_k(g_{k+1} - g_k) = f_k\Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k. \quad ■ \end{aligned}$$

10. 证明 Abel 变换

解

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k &= f_{n-1}g_n + \sum_{k=0}^{n-2} f_k g_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} f_k g_k - f_0 g_0 \\ &= (f_{n-1} - f_n + f_n)g_n + \sum_{k=0}^{n-2} f_k g_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} f_{k+1}g_{k+1} - f_0 g_0 \\ &= -\Delta f_{n-1}g_n + f_n g_n + \sum_{k=0}^{n-2}(f_k - f_{k+1})g_{k+1} - f_0 g_0 \\ &= f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k. \quad ■ \end{aligned}$$

订正 此题更加方便的证明方法是利用第 9 题的结论，移项后两边求和. 这一做法实际上是由“Abel 变换是离散分部积分”而自然导出的.

12. 若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 有……

解 根据条件可知，$f(x_j)=0$，$f(x)=A(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

$$
\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \sum_{j=1}^{m}\lim_{x\to x_j}\frac{x_j^k(x-x_j)}{f(x)-f(x_j)}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\lim_{x\to x_j}\frac{x_j^k(x-x_j)}{A(x-x_1)\cdots(x-x_n)}\\
&= \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{m}\frac{x_j^k}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}
\end{aligned}
$$

记 $g_k(x)=x^k/A$, 则 $\text{L.H.S}=g_k[x_1,\ldots,x_n]$, 因为 $g_k\in P_k$, 所以根据引理2, 当 $k<n-1$ 时候，$\text{L.H.S}=0$. 当 $k=n-1$ 时，$g_k[x_1,\ldots,x_n]$ 为 x^k 项系数，即 $\text{L.H.S}=A^{-1}$. 又

$$A(x-x_1)\cdots(x-x_n)=a_0+\cdots+a_nx^n,$$

对上式两端求 n 阶导数，得到 $A=a_n$. 从而此时 $\text{L.H.S}=a_n^{-1}$. ■

1. 设 $f(x)\in P_n$，且对 $k=0,1,\ldots,n$ 成立 $f(k)=\dfrac{k}{k+1}$，求 f(x)。

解 设

$$g(x)=(x+1)f(x)-x\in P_{n+1}.$$

根据条件，可知 $0,1,\ldots,n$ 是 $g(x)$ 的 $n+1$ 个零点，所以有

$$g(x)=Ax(x-1)\cdots(x-n).$$

根据上面两式，成立

$$(x+1)f(x)=Ax(x-1)\cdots(x-n)+x$$

下确定恰当的 A，使得 $x=-1$ 是 R.H.S 的一个根，从而 $\text{R.H.S}/(x+1)\in P_n$. 令 $\text{R.H.S}(-1)=0$，得

$$A(-1)(-2)\cdots(-1-n)-1=0 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

综上，

$$f(x)=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\cdots(x-n)+x}{x+1}. \quad ■$$

2. 任给节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，记 $h=\max$……

解 设 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，则对于该区间成立

$$|(x-x_k)(x-x_{k+1})|\le\left[\frac{(x_{k+1}-x)+(x-x_k)}{2}\right]^2\le\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{4}\le\frac{h^2}{4}. \tag{1}$$

对于除去 k 和 $k+1$ 以外的 $n-1$ 个 j，成立

$$|x-x_j| \le \begin{cases} (k-j+1)h, & (j<k) \\ (j-k)h, & (j>k+1) \end{cases} \tag{2}$$

分别取遍 $2h,\ldots,(k+1)h$ 和 $2h,\ldots,(n-k)h$。根据式 (1) 和 (2)，成立

$$\begin{aligned} &|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)| \\ \le&\frac{h^2}{4}\times n!h^{n-1} = \frac{n!h^{n+1}}{4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

由于结论只与 x_k 之间的相对位置有关，所以不妨设 $x_0=0$，下证等距的情况。根据齐次性，不妨设 $h=1$（否则令 $y=x/h$ 即可）。所以只需证明

$$x(x-1)\cdots(x-n) \le \frac{n!}{4}$$

对于 $n=1$ 的情况，根据均值不等式，成立，

$$|x(x-1)| = x(1-x) \le \frac{1}{4}.$$

假设对于 n 的情况成立，考虑 $n+1$ 的情况。若 $x\in[0,n]$，则

$$\text{L.H.S} \le \frac{n!}{4}\times(n+1-x) \le \frac{(n+1)!}{4}.$$

若 $x\in[n,n+1]$，结合 $n=1$ 的情况，成立

$$\text{L.H.S} \le (n+1)n(n-1)\cdots\frac{1}{4} = \frac{(n+1)!}{4}$$