实分析 笔记

任云玮

目录

1 集合论导引

1 定理 所有 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $\mathcal{O}$ 都可以写作可数个几乎不相交的闭方块的并的形式.

2 命题 (对称差)

1. $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$.
2. TODO

2 测度论导引

3 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度

3.1 方块的测度

3.2 ε^n 的测度

3.3 外测度

3 引理 对于任意的 $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$，成立 $|\mu^* A_1 - \mu^* A_2| \leq \mu^*(A_1 \Delta A_2)$.

3.4 Lebesgue 测度

4 定义 (Lebesgue 测度) 称集合 $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ 为 Lebesgue 可测，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在初等集 B，使得

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon. \tag{1}$$

记 Lebesgue 可测的集合全体为 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. 定义 μ 为 μ^* 限制在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 上的函数，称其为 Lebesgue 测度.

评注 之所以既需要外测度也需要定义 Lebesgue 测度是因为虽然外测度是定义在所有集合上的，但是它不满足可加性；而 Lebesgue 虽然有诸如可加性等很好的性质，但它只是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集上面. 而如此定义可测的原因在于，对于初等集而言，外测度的性质是良好且直观的.

5 命题 (Lebesgue 测度的性质) Lebesgue 测度满足如下性质

1. 对任意 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，成立 $\mu A \geq 0$.
2. $\varepsilon^n \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 且若 $A \in \varepsilon^n$，则 $\mu A = mA$.

6 定理 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 为环.

证明 利用命题2即可. ■

7 推论 $\mathcal{M}([0,1])$ 为一个代数.

8 定理 μ 在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 上满足可加性.

证明 即证明，若 $A = A_1 \sqcup A_2$，则 $\mu A = \mu A_1 + \mu A_2$. 其中 $\mu A \leq \mu A_1 + \mu A_2$ 可以由外测度的性质直接推出. 下考虑另一方向，尝试证明 $\mu A > \mu A_1 + \mu A_2 - \varepsilon$.

对于固定的 ε，首先根据 Lebesgue 可测的定义取出基础集 B_i，满足 $\mu * (A_i \Delta B_i) < \varepsilon/6$，同时可以证明 $m(B_1 \cap B_2) < \varepsilon/3$. 用 $B = B_1 \cup B_2$ 来估计 A 即可完成证明. ■

9 定理 环 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度 μ 是 σ-可加的.

10 定理 设 $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ 且 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，其中 $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. 则 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

评注 注意，对于 Lebesgue 可测集，它的测度就是外测度.

证明 首先将 A 重写为不相交集 $A'_k = A_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. 考虑级数 $\sum \mu A'_k$，根据条件，它是收敛的. 之后对于它前充分多的有限项所对应的集合的并，它是 Lebesgue 可测的，考虑它对应的初等集 B. 而对于剩下的集合，它们的外测度足够小. ■

11 推论 可数个零测集的并依然是零测集.

证明 利用外测度的 σ-半可加性和定理10即可证明.

12 定义 (完备) 称定义在环 $\mathcal{K}$ 上的测度 μ 是完备的，若任意零测集的子集的测度也为零.

13 定理 Lebesgue 测度是完备的.

3.5 广义测度

14 定义 定义 $\hat{Q}_l$ 为中心在原点、边长为 $2l$ 的 n 维立方块.

15 定义 (σ-可测) 称 $A \subset \mathbb{R}^n$ 广义 Lebesgue 可测或 σ-可测，若对于任意 $l \in \mathbb{N}$，集合 $A \cap \hat{Q}_l$ Lebesgue 可测. 同时，对于 σ-可测的集合，定义

$$\mu A = \lim_{l \to \infty} \mu(A \cap \hat{Q}_l). \tag{2}$$

记 σ 可测的集合全体为 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

16 定理 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

17 定理 若对于 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，(2) 的极限为有限值，则 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

评注 这一定理表明，$\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 只是 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 加上了原来测度为无穷的那些集合. 即对于测度有限部分，这两种的按照不同方式定义的测度是相同的.

证明 为证明 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，只需要利用定理10，即验证 $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ 且 A 可以拆成可数个 Lebesgue 可测集的并的形式.

首先将利用 $\{A_l \backslash A_{l-1}\}$ 拆分 A，可以证明它们都是 Lebesgue 可测的. 之后只需要证明 A 的外测度有限即可. 注意

$$\mu^* A \le \sum_{l=1}^{\infty} \mu^*(A_l \backslash A_{l-1}) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_l \backslash A_{l-1}).$$

而利用级数相关知识，可知 R.H.S 收敛于有限值. ■

18 定理 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是 σ-代数，它的单位元为 $\mathbb{R}^n$.

19 推论 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，则 $\mathcal{M}(X)$ 为 σ-代数.

20 定理 $\mathbb{R}^n$ 中的开集都 σ-可测.

证明 利用 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是 σ-代数这一事实以及定理1即可. ∎

3.6 Borel $\sigma-$ 代数

21 **定义 (Borel $\boldsymbol{\sigma}$-代数)** 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ-代数是由开集全体生成的 σ-代数，即

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)) = \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A} \supset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \text{且 } \mathcal{A} \text{ 为 } \sigma\text{-代数}\}.$$

其中 $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的开集全体.

评注 这一定义表明 Borel σ-代数是最小的包含了所有开集的 σ-代数. 首先，对 $\mathcal{A}$ 的要求表明它是包含了所有开集的 σ-代数，而 $\bigcap$ 则表明它是最小的. 与此同时，由于 σ-代数对于取补集操作封闭，所以也可以说 Borel σ-代数是由全体闭集生成的. 另，常简称 Borel σ-代数为 Borel 代数或 Borel 集.

22 **定理** Borel 代数由 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块全体 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 生成. 且 Borel 集 Lebesgue 可测.

评注 这一定理意味着只需要定义了方块以及方块上的测度，那么对应的 Borel 集永远是可测的.

证明 首先考虑定理的前半部分. 根据定理1可知，$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$，从而 $\sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)) \subset \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$. 而根据定义21的评注，可知反向也成立. 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$.

至于可测性. 由于对于任意 $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，有 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，所以根据定理18可知 $\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. ∎

3.7 Borel 正则性

正则性 如果说事物 A 是关于事物 B 正则的，那么它的含义是 A 可以用 B 来逼近. 例如说 Lebesgue 测度是 Borel 正则的，它表明某些集合的 Lebesgue 测度可以用 Borel 集合的测度来逼近.

23 **定理** 设 $A \subset \mathbb{R}^n$，则 $\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \mid A \subset G, \text{G 为开集}\}$. 若 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，则 $\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subset A, \text{F 为紧集}\}$.

评注 这一定理表明，我们可以从外部用开集或者从内部用紧集逼近一个集合.

证明 首先考虑前半部分，对于 $\mu^*(A) = \infty$ 的情况是显然的，与此同时 $\mu^*(A) \leq \inf$ 也是如此，所以仅需要证明 $\mu^*(A) \geq \inf$ 即可. 即证明对于任意的 ε，都存在开集 G，使得 $\mu^*(A) + \varepsilon \geq \mu(G)$. 考虑 L.H.S，对于 $\mu^*(A)$，用刚比它大一点的方块覆盖 $\{K_i\}$ 来替换代替它，即

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(K_i) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

与此同时，对于每一个方块，考虑它对应的刚比它大一点的开方块 $\tilde{K}_i$，即

$$\mu(\tilde{K}_i) \leq \mu(K_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

利用半可加性即可知道这些开方块的并即为所需要的 G.

而对于后半部分，$\mu(A) \geq \sup$ 仍是显然的，下考虑 $\mu(A) \leq \sup$ 的证明. 首先对于 A 有界的情况，可以利用前半部分构造出合适的紧集. 首先取包含 A 的紧集 H，接着从 H 中间挖去 A. 由前半部分可知，存在一个相应的开集 $G \supset H\backslash A$. 它直观上来看，有一部分在 H 的外面，另一部分在 A 的里面. 而 A 中那些不属于 G 的部分，即 $H\backslash G$，就是所需要的紧集.

而对于 A 无界的情况，又分为两类. 首先是 $\mu(A) = \infty$ 的情况，利用之前的结果可知 $\sup = \infty$. 而对于 $\mu(A) < \infty$ 的情况，注意到当 l 充分大时，(2) 中 R.H.S 的增加就很小了，从而仍可以化归至有限的情况. ■

24 定理 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supset A$ 使成立 $\mu^*(G\backslash A) < \varepsilon$.

证明 首先假设 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 对于 $\mu(A) < infty$ 的情况，利用定理23证明中所构造的开集即可. 而对于 $\mu(A) = \infty$ 的情况，只需对于 A_l 取对应开集，再取它们的并即可.

接着假设条件成立，证明 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 对于有限的情况，取比 A 稍大的开集并用可数个闭方块来表示它，最后舍掉最后那些充分小的方块即得到了所要的初等集. 只需要证明 $A_l \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 即可，之后利用 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 对可数并封闭来完成证明. ■