

复分析作业 W1

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

1、计算：

(1) $(1+i) \pm (1-2i)$, (并作图)

解 图见图 1.

$$(1+i) + (1-2i) = 2-i$$

$$(1+i) - (1-2i) = 3i \quad \blacksquare$$

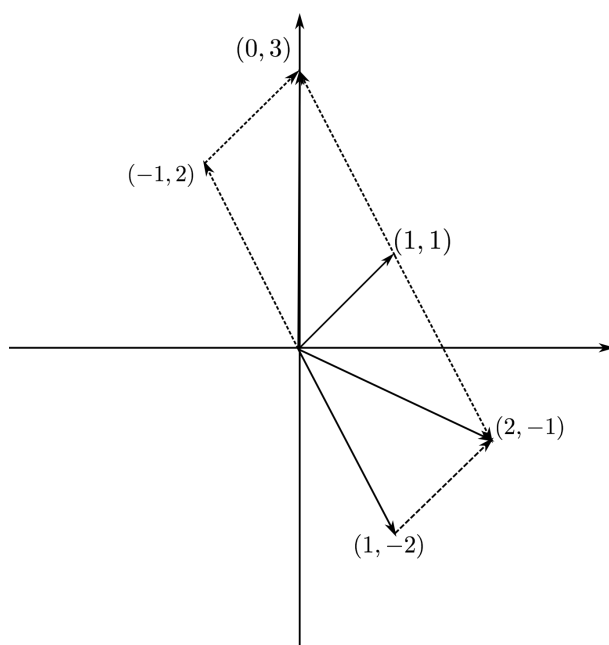


图 1:

(2) $\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$.

解

$$\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)} = \frac{i}{i^3 + i^2(-1-2-3) + i(6+3+2) + 1 \times 2 \times 3} = \frac{i}{i10} = \frac{1}{10}. \quad \blacksquare$$

(3) $\sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)$, 其中 $0 < \alpha, \beta < \pi/2$, $\alpha = \arctan 2$, $\beta = \arctan 3$.

解 已知 $\tan(\alpha + \beta) = -1$, $\cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{1/(\tan^2(\alpha + \beta) + 1)} = -1/\sqrt{2}$, $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = 1/\sqrt{2}$, 所以

$$\sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \sqrt{2}(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) = -1 + i. \quad \blacksquare$$

3、证明:

(1) 当且仅当 $z = \bar{z}$, 复数 z 为实数.

证明 设 $z = a + ib$, 则 $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0$. 即 $z \in \mathbb{R}$. \blacksquare

(2) 设 z_1 和 z_2 为复数, 若 $z_1 + z_2$ 和 $z_1 z_2$ 都是实数, 则或 z_1 和 z_2 都是实数, 或它们是一对共轭复数.

证明 若 $\bar{z}_1 = z_2$, 则命题成立. 设 $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. 若 $\bar{z}_1 \neq z_2$, 则 $a \neq c$ 或 $b \neq -d$. 而 $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$, 即 $b = -d$, 所以 $a \neq c$. 而 $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$, 即 $ad = -bc$. 所以 $b = -d = 0$, 即 $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. 综上, 证毕. \blacksquare

4、求复数 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部.

解 设 $z = a + ib$,

$$\frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{a+1+ib} = 1 - \frac{2(a+1)-i2b}{(a+1)^2+b^2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2b}{(a+1)^2+b^2}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

5、设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, 求证

(1) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

证明 $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - (z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$. \blacksquare

(2) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

证明 首先 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1||z_2|$, 而

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = ||z_1| - |z_2||^2. \quad \blacksquare$$

(3) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明其几何意义.

证明 几何意义: 平行四边形的两对角线长度的平方和等于四边长度的平方和.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \quad \blacksquare$$

8、如果 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 证明 z_1, z_2, z_3 是内接于单位元内的一个正三角形的顶点.

证明 由于 $|z_i| = 1$, 所以 z_i 在单位圆上. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 所以 $|z_1 + z_2| = |-z_3| = 1$. 而

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 4 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3.$$

同理, $|z_2 - z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2 = 3$. 因此 z_i 在内接于单位圆的等边三角形的顶点. ■

14 设 $|z_0| < 1$, 证明:

(A) 若 $|z| = 1$, 那么 $\left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = 1$.

(B) 若 $|z| < 1$, 证明:

$$(1) \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| < 1.$$

$$(2) 1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}.$$

$$(3) \frac{||z| - |z_0||}{1 - |z_0||z|} \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \leq \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|}.$$

$$(4) \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \leq |z| + |z_0|.$$

证明 首先, 根据 5(1), 成立

$$|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z), \quad |1 - \bar{z}_0 z|^2 = 1 + |z_0|^2 |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z). \quad (1)$$

(A) 将 $|z| = 1$ 代入 (1), 得

$$|z - z_0|^2 = 1 + |z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z) = |1 - \bar{z}_0 z|^2 \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = 1. \quad \blacksquare$$

(B1) 将 $|z| < 1$ 代入 (1), 有

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 - |1 - \bar{z}_0 z|^2 &= |z|^2 + |z_0|^2 - 1 - |z_0|^2 |z|^2 = (|z_0|^2 - 1)(1 - |z|^2) < 0 \\ \Rightarrow \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| &< 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(B2) 将 (1) 代入 L.H.S, 得

$$\text{L.H.S} = \frac{1 + |z_0|^2 |z|^2 - |z|^2 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} = \text{R.H.S} \quad \blacksquare$$

(B3) 已知 $\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z) \leq |z_0||z|$, 根据糖水不等式, 有

$$\frac{|z - z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} = \frac{|z|^2 + |z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)}{1 + |z_0|^2 |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)} \geq \frac{|z|^2 + |z_0|^2 - 2|z_0||z|}{1 + |z_0|^2 |z|^2 - 2|z_0||z|} = \frac{||z| - |z_0||^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2}.$$

不等式的另一边同理. ■

(B4) 根据 (B3), 成立

$$\frac{|z - z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \leq \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|} \leq |z| + |z_0|. \quad \blacksquare$$

15、设有限复数 z_1 和 z_2 在复球面上表示为 P_1 和 P_2 两点. 求证 P_1 及 P_2 的距离, P_1 及 N 的距离分别为

$$|P_1 P_2| = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}, \quad |P_1 N| = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

证明 已知 $\overrightarrow{OP_i} = (z_i + \bar{z}_i, -i(z_i - \bar{z}_i), |z_i|^2 - 1)/(|z_i|^2 + 1)$, 所以

$$\begin{aligned} |P_1 P_2|^2 &= |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 2(1 - \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}) \\ &= \frac{2\{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) - 4\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - 4\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) - (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)\}}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \\ &= \frac{4}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2)) \\ &= \frac{4|z_1 - z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}. \end{aligned}$$

同时, 令 $z_2 \rightarrow \infty$, 则有

$$|P_1 N|^2 = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} \frac{4|z_1 - z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + |z_1|^2} \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{1 + |z_2|^2}$$

由于 $|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| \leq |z_1||z_2|$, 所以,

$$|P_1 N|^2 = \frac{4}{1 + |z_1|^2} \Rightarrow |P_1 N| = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}. \quad \blacksquare$$