科学计算作业 练习 1

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

1、$\sqrt{7}$ 可由下列迭代算法计算……

解 下证引理

引理 1 对于任意正数 x，设 $x_1 > \sqrt{x}$，对于 $n > 1$，满足

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{x}{x_n}), \tag{1}$$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{x}$. 记 $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{x}$，则成立

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n}$$

证明 对于 $n > 0$，根据基本不等式，成立

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{x}{x_n}) \geq \sqrt{x}.$$

并且，

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{x}{x_n}) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \frac{x}{x_n}) \\ &> \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}}) = 0 \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 单调减且下有界，所以存在极限，记为 A，对 (1) 两边取极限，成立

$$A = \frac{1}{2}(A + \frac{x}{A}) \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{x}.$$

对于余项 ε_n，成立

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1}-\sqrt{x} &= \frac{1}{2}(x_n+\frac{x}{x_n})-\sqrt{x} \\
&= \frac{x_n^2-2\sqrt{x}x_n+x}{2x_n} \\
&= \frac{(x_n-\sqrt{x})^2}{2x_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(1) 易知 $x_1>\sqrt{7}$ 成立。应用引理1，取 $x=7$，得 $\lim x_n = x^* = \sqrt{7}$.

(2) 设 $x_n = 0.a_1a_2\dots a_n \times 10$. x_n 有 n 位有效数字，即成立

$$\varepsilon_n \le \frac{1}{2}\times^{1-n}$$

应用引理1，则对于 ε_{n+1}，成立

$$\varepsilon_{n+1} \le \frac{\frac{1}{4}\times 10^{2-2n}}{2x_n} < \frac{5\times 10^{1-2n}}{4\sqrt{7}} < \frac{1}{2}\times 10^{1-2n}$$

所以 x_{n+1} 至少具有 $2n$ 位有效数字。$\blacksquare$

2、已知 $(\sqrt{2}-1)^6\cdots\cdots$

解 设 $x=\sqrt{2}$，$x^*=1.4$ 为其近似值。并且

$$
\begin{aligned}
&f_1(x)=(x-1)^6, \quad f_2(x)=(3-2x)^3, \quad f_3(x)=99-70x, \\
&f_4(x)=\frac{1}{(1+x)^6}, \quad f_5(x)=\frac{1}{(3+2x)^3}, \quad f_6(x)=\frac{1}{99+70x}
\end{aligned}
$$

它们的导数在 $x=1.4$ 处的取值分别为

$$
\begin{aligned}
&f_1'(1.4)=0.06144, \quad f_2'(1.4)=-0.24, \quad f_3'(1.4)=-70, \\
&f_4'(1.4)\approx -0.1308, \quad f_5'(1.4)\approx 5.3020\times 10^{-3}, \quad f_6'(1.4)\approx -1.804\times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

根据公式 $\varepsilon(f(x^*))\approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$ 可知，采用最后一个算式所得结果最精确。$\blacksquare$

3、试改变下列表达式使计算结果比较精确⋯⋯

解 (1)

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+x-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)} \quad \blacksquare$$

(2)

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{x+\frac{1}{x}-(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}=\frac{2}{x(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}})} \quad \blacksquare$$

4、找至少两种方法计算

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2},\ x \neq 0,\ |x| \ll 1.$$

解

$$f(x) = \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$$

对 $\sin y$ 进行 Taylor 展开，至第 n 项，则有

$$f_n(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+1})\right)^2 \quad \blacksquare$$

解 直接对 $\cos x$ 进行 Taylor 展开，至第 n 项，则有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1})\right) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2n+1}) \blacksquare \end{aligned}$$

5、设 $Y_0 = 28$，按递推公式……

解 (1) 记 $\varepsilon(x^*) = \sqrt{783} - 27.982$. 因为 $\{Y_n\}$ 为等差数列，所以可知

$$\begin{aligned} Y_{100} &= Y_0 - \sqrt{783} \\ Y_{100}^* &= Y_0 - x^* \end{aligned}$$

所以

$$|Y_{100} - Y_{100}^*| = |\sqrt{783} - x^*| = \varepsilon(x^*).$$

(2)

$$\begin{aligned} Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} &\Rightarrow Y_n - \frac{1}{100}\sqrt{783} = 2\left(Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right) \\ \Rightarrow Y_n &= \left(28 - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right)2^n + \frac{1}{100}\sqrt{783} \end{aligned}$$

对于取 $\sqrt{783} = 27.982$ 的情况同理，所以有

$$\begin{aligned} Y_{100} &= \left(28 - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right)2^{100} + \frac{1}{100}\sqrt{783} \\ Y_{100}^* &= \left(28 - \frac{1}{100}27.982\right)2^{100} + \frac{1}{100}27.982 \end{aligned}$$

从而对于误差，成立

$$|Y_{100} - Y_{100}^*| = \varepsilon(x^*)\frac{2^{100}}{100} + \frac{\varepsilon(x^*)}{100} \quad \blacksquare$$

6、给定 n 个矩阵……

解 设矩阵 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的大小分别为 $a_0 \times a_1, a_1 \times a_2, \ldots, a_{n-1} \times a_n$. 大小为 $a \times b$ 和 $b \times c$ 的矩阵相乘，操作次数 $f(a,b,c)$ 为

$$f(a,b,c) = ac(2b-1)$$

设将第 i 个至第 j 个矩阵相乘所需的最小操作次数为 $F(i,j)$，则有

$$F(i,j) = \begin{cases} 0, & i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{F(i,k) + F(k+1,j) + f(a_{i-1}, a_k, a_j)\}, & i \neq j \end{cases}$$

所以 $F(1,n)$ 即为最少操作次数。在递归求解 $F(1,n)$ 的同时，设 k_{ij} 为取出 $F(i,j)$ 中 min 所对应的 k，则计算顺序为最后计算 $A_1A_2\cdots A_{k_{1n}}$ 和 $A_{k_{1n}+1}\cdots A_n$ 的乘积，其次最后计算 $A_1\cdots A_{k_{1k_{1n}}}$ 和 $A_{k_{1k_{1n}}+1}\cdots A_{k_{1n}}$ 的乘积。依此类推。$\blacksquare$