习题

1、$\sqrt{7}$可以由下列迭代算法计算：

$$x_0 = 2;\ x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{7}{x_k}), k = 0, 1, 2, ...$$

(1) 证明：$x_k \to x^* = \sqrt{7}$。

(2) 证明：若x_k是$\sqrt{7}$有n位有效数字的近似值，则x_{k+1}是$\sqrt{7}$具至少$2n$位有效数字的近似值。

2、已知

$$(\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^6} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} = \frac{1}{99+70\sqrt{2}}.$$

如果取$\sqrt{2} \doteq 1.4$，上面的哪个算式得到的结果最精确？给出详细推导。

3、试改变下列表达式使计算结果比较精确：

(1)

$$\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x},\ |x| \ll 1;$$

(2)

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}},\ x \gg 1.$$

4、找至少两种方法有效计算

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2},\ x \neq 0, |x| \ll 1.$$

5、设$Y_0 = 28$，按递推公式

$$Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783},\ n = 1, 2, 3, ...$$

计算到Y_{100}.若取$\sqrt{783} \approx 27.982$（5位有效数字），试问计算$Y_{100}$将有多大误差？如果将递推公式改为

$$Y_n = 2Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783},$$

情况又怎样？

6、给定n个矩阵A_1,A_2,...,A_n，试给出最优方法（算法）获得$A = A_1A_2\cdots A_n$.换言之，给出最佳的求矩阵乘积顺序以获得A。