科学计算作业 练习 $6a$

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

1. 确定下列积分公式中的待定系数……

解 (1) 分别代入 $f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$，

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=2h^3/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{-1}=h/3 \\ A_0=4h/3 \\ A_1=h/3 \end{cases}$$

所以至少有 2 次代数精度，代入 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$，有

$$I(x^3)=0=0=Q(x^3)$$
$$I(x^4)=\frac{2}{5}h^5\neq\frac{2}{3}h^5=Q(x^4)$$

综上，具有 3 次代数精度. ■

(2) 分别代入 $f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$，

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=4h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=16h^2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{-1}=8h/3 \\ A_0=-4h/3 \\ A_1=8h/3 \end{cases}$$

所以至少有 2 次代数精度，代入 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$，有

$$I(x^3)=0=0=Q(x^3)$$
$$I(x^4)=\frac{64}{5}h^5\neq\frac{16}{3}h^5=Q(x^4)$$

综上，具有 3 次代数精度. ■

(3) 分别代入 $f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$，

$$\begin{cases} (1+2+3)/3=2 \\ (-1+2x_1+3x_2)/3=0 \\ (1+2x_1^2+3x_2^2)/3=2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=(1\mp\sqrt{6})/5 \\ x_2=(3\pm2\sqrt{6})/15 \end{cases}$$

所以至少有 2 次代数精度，对于这两组解，代入 $f(x)=x^3$，有

$$I(x^3)=0\neq Q(x^3)$$

综上，具有 2 次代数精度. ■

(4) 分别代入 $f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$

$$\left\{\begin{array}{l} h(1+1)/2+0=h \\ h^2/2+0=h^2/2 \\ h^3/2-2ah^3=h^3/3 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{12}$$

所以至少有 2 次代数精度，代入 $f(x)=x^3$，$f(x)=x^4$，

$$\begin{aligned} I(x^3)&=\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{4}h^4=Q(x^4) \\ I(x^4)&=\frac{1}{5}h^5\neq\frac{1}{6}h^5=Q(x^5) \end{aligned}$$

综上，具有 3 次代数精度. ■

6. 若用复合梯形公式……

解 由于 $(e^x)^{(n)}=e^x$ 对任意 $n=0,1,\dots$ 恒成立, 所以在区间 $[0,1]$ 上, 成立 $|(e^x)^{(n)}|\leq e$. 对于复合梯形公式,

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e\leq\frac{1}{2}\times 10^{-5}\quad\Rightarrow\quad n\geq 213.$$

对于复合 Simpson 公式,

$$\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2n}\right)^4 e\leq\frac{1}{2}\times 10^{-5}\quad\Rightarrow\quad n\geq 4.$$

即分别至少等分为 213 份和 4 份. ■

10. 试构造 Gauss 求积公式……

解 对于权函数 $\rho(x)=1/\sqrt{x}$，对应的正交多项式 φ_n 的前三项为

$$\varphi_0=1,\quad \varphi_1=x-\frac{1}{3},\quad \varphi_2=x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}$$

其中 φ_2 的零点为

$$x_0=\frac{15-2\sqrt{30}}{35},\quad x_1=\frac{15+2\sqrt{30}}{35}.$$

代入 $f(x)=1$ 和 $f(x)=x$，得

$$\left\{\begin{array}{l} A_0+A_1=2 \\ A_0x_0+A_1x_1=2/3 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A_0=1+\sqrt{30}/18 \\ A_1=1-\sqrt{30}/18. \end{array}\right.$$

综上，对应的 Gauss 求积公式为

$$Q(f) = \left(1 + \frac{\sqrt{30}}{18}\right) f\left(\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{30}}{18}\right) f\left(\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}\right). \quad \blacksquare$$