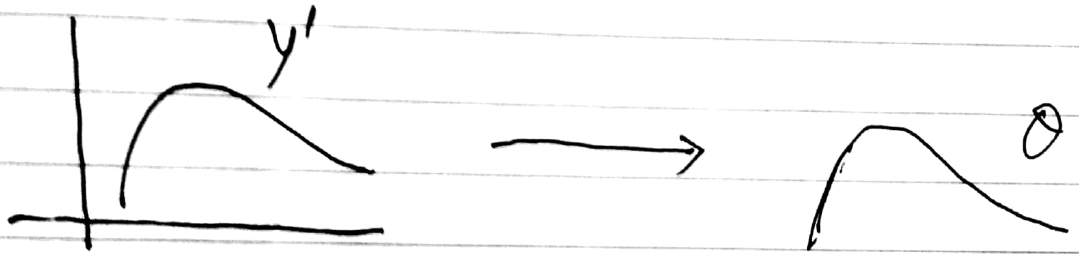
作业的一些说明

1. ODE的变换问题

• 对 $y(1+y'^2) = C$，有部分同学直接作变换
$$y' = \cot\frac{\theta}{2}$$
这样做的目的是想用三角关系
$$1+\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1\Big/\sin^2\frac{\theta}{2}$$

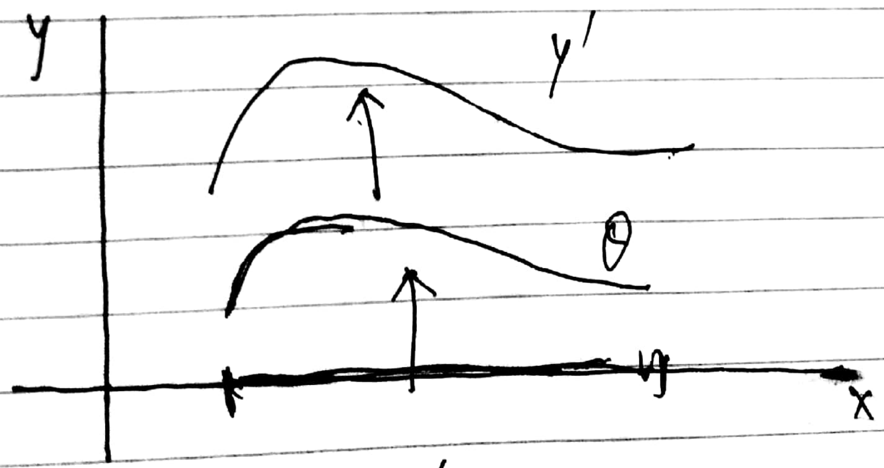
• 直观来说这个变换是不正确的，因为可能不是单值对应，



（假设cot是↑）

单值对应很重要，因为 $dx \longrightarrow d\theta$ 时要有一个 Jacobi 矩阵，若不单值，则不可逆，Jacobi行列式为 0.

• 实际上这种做法也是可以的，但 $\theta = \theta(x)$



$$x \longrightarrow \theta \longrightarrow y'$$

θ与x的对应是单值的.

• 需要注意的是，后面计算只能用到 dx 与 $d\theta$ 的关系，而没有 dy' 与 $d\theta$.

2. 关于变分引理

- 习题中证明了：

对 $f \in C[a,b]$，若

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0 \quad , \forall g \in C_0^2[a,b]$$

$$= \{ g \in C^2[a,b] ; g(a) = g(b) = 0 \}$$

则 $f(x) \equiv 0, \ x \in [a,b]$

注：在PDE中，$C_0^2[a,b]$ 一般理解为 $\left\{ g \in C^2[a,b] : \begin{array}{l} g(a) = g'(a) = 0 \\ g(b) = g'(b) = 0 \end{array} \right\}$

- g 可如下减小范围

$$C[a,b] \longrightarrow C_0^1[a,b] \longrightarrow C_0^2[a,b] \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0^\infty[a,b]$$

这与稠密性相关（C_0^∞ 在 $C[a,b]$ 中稠密）

- 进一步有：

若 $f \in C[a,b]$，且

$$\int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b) \qquad (*)$$

则 $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = const$

注：当 $f \in C^1$ 时，由分部积分知

$$0 = \int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_a^b f'(x)\, \varphi(x)\, dx \ , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

$$\Rightarrow f' = 0$$

当 $f \in C[a,b]$，实际上由 $(*)$ 可推出 $f \in C^1$（用导数定义）