

科学计算作业 练习 6c

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

11. 用 $n = 2, 3$ 的 Gauss-Legendre 公式计算……

解 令 $t = x - 2$, 则所求积分为

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 e^{x+2} \sin(x+2) dx.$$

$n = 2$ 在 $[-1, 1]$ 上的 3 次 Legendre 多项式及对应零点为

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

对应的函数值及系数为

$$\begin{cases} f(x_0) = e^{-\sqrt{15}/5+2} \sin(-\frac{\sqrt{15}}{5} + 2), \\ f(x_1) = e^2 \sin 2 \\ f(x_2) = e^{\sqrt{15}/5+2} \sin(\frac{\sqrt{15}}{5} + 2), \end{cases} \quad \begin{cases} A_0 = 5/9, \\ A_1 = 8/9, \\ A_2 = 5/9 \end{cases}$$

从而

$$Q_3(f) \approx 10.94840. \quad \blacksquare$$

$n = 3$ 在 $[-1, 1]$ 上的 4 次 Legendre 多项式及对应零点为

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \Rightarrow x_{0(3)} = \mp 0.86114, x_{1(2)} = \mp 0.33998$$

对应的函数值及系数为

$$\begin{cases} f(x_0) = 2.83636, \\ f(x_1) = 5.23850, \\ f(x_2) = 7.45854, \\ f(x_3) = 4.83870 \end{cases} \quad \begin{cases} A_0 = A_3 = 0.347855 \\ A_1 = A_2 = 0.652145 \end{cases}$$

从而

$$Q_4(f) \approx 10.95011. \quad \blacksquare$$

12. 地球卫星轨道是一个椭圆……

解 根据条件, 有

$$a = 7782.5, \quad c = 972.5,$$

即轨道周长为

$$S = 31130 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 0.015615 \sin^2 \theta} d\theta.$$

设所需达到的精度为 $\varepsilon = 1(\text{km})$. 用复化 Simpson 方法计算, 结果如下表

n	h_n	S_n	$ S_n - S_{n-1} $
1	$\pi/2$	48707.50	
2	$\pi/4$	48707.44	0.06

即

$$S = 48707 (km) \quad \blacksquare$$