

## 习题

1. 已知  $f \in C[a, b]$ , 且对任一函数  $g \in C_0^2[a, b]$  成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

证明: 在  $[a, b]$  上  $f \equiv 0$ 。这里  $C_0^2[a, b] = \{g \in C^2[a, b]; g(a) = g(b) = 0\}$ 。

2. 证明如下变分问题无解:

$$\min_{y \in K} \int_{-1}^1 x^2 (y'(x))^2 dx$$

式中

$$K = \{y \in C^1[-1, 1]; y(-1) = -1, y(1) = 1\}$$

3. 对于求解最速降线问题导出的非线性常微分方程的定解问题:  $y(1 + (y')^2) = c = \text{constant}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(x_1) = y_1$ , 求出其解。

4. 已知函数  $y = f(x)$  在节点  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$  处的近视值  $\tilde{y}_i \approx f(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ 。试用变分方法重构函数  $y = f(x)$  使其一阶导函数均方取值不大。