复分析 笔记

任云玮

目录

1 复数

1.1 复数基础

1 命题 设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 $x, y \in \mathbf{R}$，则

$$x^2 + y^2 = |z|^2, \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

评注 在之后的内容中，将略去"$x, y \in \mathbf{R}$".

2 命题 (三角表示法) $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r = |z|$，θ 满足 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$. 在此表示法下，乘法有公式

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

对于除法也是类似的. 同时可以定义乘方为

$$z^n = |z|^n(\cos(n \operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(n \operatorname{Arg} z)).$$

对于 $n \le 0$ 情况的定义是类似的.

3 定理 (Moivre 公式) $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

评注 利用 Moivre 公式来证明三角恒等式时，一般可以利用诸如 $\cos\theta = \Re(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，从而避免使用 Eular 公式.

4 命题 [1] $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

证明 考虑方程 $(z+1)^n = 1$ 的根，设它们为 z_k，$k = 0, 1, \ldots, n-1$，其中 $z_0 = 0$. 有

$$(z+1)^n - 1 = z(z - z_1)\cdots(z - z_{n-1}).$$

比较两边的一次项系数，得 $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n$. 求解方程，对于 $k \ne 0$，有

$$\begin{aligned} z_k &= \cos\frac{2k\pi}{n} - 1 + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = -2\sin\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n} - \mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{n}) \\ &= -2\sin\frac{k\pi}{n}(\cos(\pi/2 - k\pi/n) + \mathrm{i}\sin(k\pi/n - \pi/2)). \end{aligned}$$

因此成立

$$(-1)^{n-1} n = (-2)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) \quad \Rightarrow \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}. \quad \blacksquare$$

5 定理 (Lagrange 等式) 设 $z_i, w_i \in \mathbf{C}$，则

$$|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right) - \sum_{1 \le j < k \le n} |z_j \bar{w}_k - z_k \bar{w}_j|^2.$$

[1] 习题 1.12

证明　由于齐次性，所以不妨设 $\sum |w_i|^2 = 1$. 记 $\eta(j,k) = |z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2$，显然成立 $\eta(j,k) = \eta(k,j)$，$\eta(k,k) = 0$ 且 $\eta(j,k) = |z_j\bar{w}_k|^2 + |z_k\bar{w}_j|^2 - z_j\bar{w}_k\bar{z}_k w_j - \bar{z}_j w_k z_k \bar{w}_j$. 所以

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j<k\le n} \eta(j,k) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(j,k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|z_j\bar{w}_j|^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j w_j \bar{z}_k \bar{w}_k \\
&= \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 - \Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2
\end{aligned}$$

移项后即得 Lagrange 等式.　■

评注　TODO: $\sum \eta$ 的几何解释.

6　推论 (Cauchy 不等式) 设 $z_i, w_i \in \mathbf{C}$，则 $|\sum z_j w_j|^2 \le (\sum |z_j|^2)(\sum |w_j|^2)$.