科学计算作业 练习 $9a$

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

2. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_n$ 是对称正定阵⋯⋯

解 (1) 因为 $\mathbf{A}$ 正定，所以对于任意 $\mathbf{x} \neq 0$，成立 $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$. 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$，则有

$$a_{ii} = \mathbf{e}_i^\intercal \mathbf{A}\mathbf{e}_i > 0. \quad \blacksquare$$

(2) 由于 $\mathbf{A}$ 为对称阵，所以有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^\intercal \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}_1/a_{11} & \mathbf{E}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^\intercal \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^\intercal \mathbf{A} \tag{1}$$

因此成立

$$\mathbf{A}_2 = -\frac{1}{a_{11}} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^\intercal + \mathbf{A}_1.$$

同时 $\mathbf{A}_1^\intercal = \mathbf{A}_1$，所以 $\mathbf{A}_2$ 是对称阵. 对 (1) 两边同乘 $\mathbf{P}$，有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{P}$$

考虑 $\mathbf{P}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{P}$ 的特征值 λ 和对应的特征向量 $(x_1, \mathbf{x}^\intercal)^\intercal$. 对于 L.H.S，成立

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

即 λ 也是 $\mathbf{A}_2$ 的特征值. 对于 R.H.S，成立

$$\mathbf{P}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^\intercal \mathbf{P}^\intercal \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\intercal \lambda \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad 0 < \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

又由于 $\mathbf{A}_2$ 是对称的，所以 $\mathbf{A}_2$ 是对称正定阵. $\blacksquare$

4. 试推导矩阵 $\mathbf{A}$ 的 Crout 分解⋯⋯

解 只需要利用 $\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$，即可归化为 Doolittle 分解. 因此只需把对应公式中的 u 和

l，以及下标互换即可. 所以计算公式为，

$$\begin{aligned}
&l_{i1} = a_{i1}, \quad u_{1i} = a_{1i}/l_{11}, \\
&l_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} u_{kr} l_{ik}, \\
&u_{ri} = \left(a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} u_{ki} l_{rk} \right) / l_{rr}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

16. 设 $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵，求证⋯⋯

证明 因为 $\mathbf{A}$ 非奇异, 所以对任意 $0 \neq \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 存在 $\mathbf{y} \neq 0$, 成立 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$, 同时当 $\mathbf{x}$ 取遍 $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ 时，$\mathbf{y}$ 也取遍 $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$，且反之亦成立. 同时由于 $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$，所以最值总是可以取到的，且 $\mathbf{A}$ 非奇异，所以不为零. 因此有

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \max_{\mathbf{y} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{y})\|_\infty}{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\infty} = \max_{\mathbf{y} \neq 0} \frac{\|\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\infty}. \tag{2}$$

根据 (2)，有

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min_{\mathbf{y} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{y}\|_\infty}. \quad \blacksquare$$

20. 是 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times n}$⋯⋯

证明

$$\begin{aligned}
\mathrm{cond}(\mathbf{AB}) &= \|(\mathbf{AB})^{-1}\| \|(\mathbf{AB})\| \\
&\leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}^{-1}\| \|\mathbf{B}\| = \mathrm{cond}(\mathbf{A})\mathrm{cond}(\mathbf{B}). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$