

实分析 笔记

任云玮

目录

3 Lebesgue Measure

2

3 Lebesgue Measure

56. Definition of the outer measure 注意定义中的下确界部分, 这表明如果我们要证明 $m^*A \geq k$, 则只需要证明对任意 $\{I_n\}$, $\sum l(I_n) \geq k$ 即可; 同时这表示在 $m^*A < \infty$ 的情况下, 总可以找到可列个开区间, 使得 $\sum l(I_k) \leq m^*A + K\varepsilon$.

注意, 外侧度并非可数可加测度。

56. Proof of Proposition 1 关于 $[a, b]$ 情况中 (a_i, b_i) 的构造: 将 I_n 中的线段从左到右排列, 依次取覆盖了前一个 b_i 的线段。对于任意的有限区间, 用一个闭区间从内部逼近它并利用之前的结论, 这样可以得到一边的结论。同时利用 $m^*I = m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I)$ 来得到另一边, 注意其中用到了 $\bar{I} \setminus I$ 至多包含两个点且单个点的外侧度为零。对于无穷区间的情况, 同样是利用内部的闭区间。

p58. Proposition 这一命题表明任意 Borel 集都可以用开集在外侧度意义上从外部逼近; 如果考虑是用 G_δ 集, 则可以直接从外部在外侧度意义上相等。

p58. Definition 实际上这一定义意味着, 如果我们定义相应的“内测度” m_* , 则有 $m^*(E) = m_*(E)$. 首先对于 E , 一个十分符合直觉的定义“内测度”的方法为 $m_*(E) = m_*(X) - m_*(X \setminus E)$, 其中 X 是某个包含 E 的集合。而这一定义的是实际上就是说对于任意 X (可能不包含 E), 这一性质都是成立的。

同时注意 $L.H.S \leq R.H.S$ 是自然成立的, 所以只需要验证 $L.H.S \geq R.H.S$ 即可。

p60. Lemma 11 注意我们还没有证明开区间都是 Lebesgue 可测的, 但我们已经证明了对于区间, 外侧度和长度是一致的。

p61. Proof of Theorem 12 定理 10 表明 \mathfrak{M} 是一个 σ -代数且根据引理 11, 它包含所有 (a, ∞) ; 同时易证 Borel 集 \mathfrak{B} 可由全体 (a, ∞) 生成, 即它是包含所有 (a, ∞) 的最小的 σ -代数。因此 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$, 所以 Borel 集都可测。

p64. Proposition 15 这一命题表明可测集可以用开集从外部逼近, 用闭集从内部逼近。如果考虑 G_δ 集和 F_σ , 则上述可以在测度意义下近似。同时若外侧度有限, 则可以用有限开区间的并来逼近。上述内容反之亦成立。

p68. Proof of Proposition 19 这里 $\bigcup_r \cdots$ 可以被诠释为: 枚举所有有理数 r , 对于每一个 r , 它对应了 $\{x : f(x) + g(x) < \alpha\}$ 这一集和中的一部分。取它们的并集则得到了完整的集合。

p69. Proposition 22 可测函数可以用简单函数近似; 简单函数可以用阶梯函数近似; 阶梯函数可以用连续函数近似。具体见习题 23。

p72. Proposition 23 注意这里的结论并非一致收敛，这里 A 的选取是可以依赖于 ε 的，即“任意 ε, δ ，存在 A, \dots ”；但是一致收敛的结论实际上也是成立的，具体内容见习题 30.