矩阵分析　笔记

任云玮

目录

1 Eigenvalues, Eigenvectors, and Similarity

1.1 Introduction

1.2 The eigenvalue-eigenvector equation

p46 注意对于矩阵 A 和常数 k，有

$$(A+kI)x=\lambda' x \quad \Rightarrow \quad Ax=(\lambda'-k)x.$$

因此在计算特征值的时候可以先给矩阵加上 I 的某个倍数来得到一个特征值更方便计算的矩阵。

p46. Theorem 1.1.6 这一定理的第一部分可以用来证明 $\sigma(p(A))$ 非空并给出其中的某些值；而第二部分则限定了 $\sigma(p(A))$ 中的值的可选范围。如果我们在已知 $p(A)$ 的特征值情况下讨论 A，则这两部分的效果是反过来的。

p47. The proof of Theorem 1.1.9 我们的目的是证明任意 $A \in M_n$ 有至少一个特征值 λ，且它所对应的特征向量可以被表示为 $g(A)y$ 的形式，其中 $g(t) \in \mathbb{P}_{n-1}$.

按照定理 1.1.6，我们可以找一个多项式 p，找 $p(A)$ 的特征值。考虑之前的观察以及 p 有常数项这件事，我们只需要说明 $0 \in \sigma(p(A)))$，即证 $p(A)$ 是奇异的。对于一个 $p(A)$ 形式的矩阵，十分自然地引入了一组向量 $(A^n y, \ldots, y)$。对于任意的 $y \neq 0$，我们可以取恰当的 p 使得这组向量是线性相关，从而 $p(A)$ 是奇异的。将上述讨论反过来叙述即证明了命题的第一部分，其中关于 p 需选取度数最小的那一个。

为得到所需要的 g，我们只需要考虑把 $p(A)y=0$ 进行因式分解，得

$$(A-\lambda I)(g(A)y)=0.$$

由于 p 是满足线性相关的条件的多项式中度数最小的，所以 $g(A)y$ 非奇异，从而它是一个特征向量。

2 Cheat Sheet

1 定理 (rank-nullity) Let $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ be given. $\operatorname{rank} A + \dim(\operatorname{nullspace} A) = n$.

2 引理 (full-rank factorization) Suppose $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, then $\operatorname{rank} A = k$ iff $A = XY^T$ for some $X \in M_{m,k}(\mathbb{F})$ and $Y \in M_{n,k}(\mathbb{F})$ that each have independent columns.