

# 实分析 笔记

任云玮

## 目录

1	集合论导引	2
2	测度论导引	3
3	$\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度	4
3.1	方块的测度	4
3.2	$\epsilon^n$ 的测度	4
3.3	外测度	4
3.4	Lebesgue 测度	4
3.5	广义测度	5
3.6	Borel $\sigma$ - 代数	6
3.7	Borel 正则性	6
3.8	不变性与 Lebesgue 不可测集	8
3.9	其他测度	8
4	可测函数	9
4.1	可测函数的定义	9

# 1 集合论导引

1 定理 所有  $\mathbb{R}^n$  中的开集  $\mathcal{O}$  都可以写作可数个几乎不相交的闭方块的并的形式.

2 命题 (对称差)

1.  $(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$

2. TODO

## 2 测度论导引

### 3 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度

#### 3.1 方块的测度

#### 3.2 $\varepsilon^n$ 的测度

#### 3.3 外测度

3 引理 对于任意的  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ , 成立  $|\mu^*A_1 - \mu^*A_2| \leq \mu^*(A_1 \Delta A_2)$ .

#### 3.4 Lebesgue 测度

4 定义 (Lebesgue 测度) 称集合  $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$  为 Lebesgue 可测, 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在初等集  $B$ , 使得

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon. \quad (1)$$

记 Lebesgue 可测的集合全体为  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . 定义  $\mu$  为  $\mu^*$  限制在  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  上的函数, 称其为 Lebesgue 测度.

评注 之所以既需要外测度也需要定义 Lebesgue 测度是因为虽然外测度是定义在所有集合上的, 但是它不满足可加性; 而 Lebesgue 虽然有诸如可加性等很好的性质, 但它只是定义在  $\mathbb{R}^n$  的一个子集上面. 而如此定义可测的原因在于, 对于初等集而言, 外测度的性质是良好且直观的.

5 命题 (Lebesgue 测度的性质) Lebesgue 测度满足如下性质

1. 对任意  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , 成立  $\mu A \geq 0$ .
2.  $\varepsilon^n \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  且若  $A \in \varepsilon^n$ , 则  $\mu A = m A$ .

6 定理  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  为环.

证明 利用命题2即可. ■

7 推论  $\mathcal{M}([0, 1])$  为一个代数.

8 定理  $\mu$  在  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  上满足可加性.

证明 即证明, 若  $A = A_1 \cup A_2$ , 则  $\mu A = \mu A_1 + \mu A_2$ . 其中  $\mu A \leq \mu A_1 + \mu A_2$  可以由外测度的性质直接推出. 下考虑另一方向, 尝试证明  $\mu A > \mu A_1 + \mu A_2 - \varepsilon$ .

对于固定的  $\varepsilon$ , 首先根据 Lebesgue 可测的定义取出基础集  $B_i$ , 满足  $\mu^*(A_i \Delta B_i) < \varepsilon/6$ , 同时可以证明  $m(B_1 \cap B_2) < \varepsilon/3$ . 用  $B = B_1 \cup B_2$  来估计  $A$  即可完成证明. ■

9 定理 环  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  上的测度  $\mu$  是  $\sigma$ -可加的.

10 定理 设  $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$  且  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , 其中  $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . 则  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

**评注** 注意, 对于 Lebesgue 可测集, 它的测度就是外测度.

**证明** 首先将  $A$  重写为不相交集  $A'_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ . 考虑级数  $\sum \mu A'_k$ , 根据条件, 它是收敛的. 之后对于它前充分多的有限项所对应的集合的并, 它是 Lebesgue 可测的, 考虑它对应的初等集  $B$ . 而对于剩下的集合, 它们的外测度足够小. ■

**11 推论** 可数个零测集的并依然是零测集.

**证明** 利用外测度的  $\sigma$ -半可加性和定理10即可证明.

**12 定义 (完备)** 称定义在环  $\mathcal{K}$  上的测度  $\mu$  是完备的, 若任意零测集的子集的测度也为零.

**13 定理** Lebesgue 测度是完备的.

### 3.5 广义测度

**14 定义** 定义  $\hat{Q}_l$  为中心在原点、边长为  $2l$  的  $n$  维立方块.

**15 定义 ( $\sigma$ -可测)** 称  $A \subset \mathbb{R}^n$  广义 Lebesgue 可测或  $\sigma$ -可测, 若对于任意  $l \in \mathbb{N}$ , 集合  $A \cap \hat{Q}_l$  Lebesgue 可测. 同时, 对于  $\sigma$ -可测的集合, 定义

$$\mu A = \lim_{l \rightarrow \infty} \mu(A \cap \hat{Q}_l). \quad (2)$$

记  $\sigma$  可测的集合全体为  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

**16 定理**  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

**17 定理** 若对于  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ , (2) 的极限为有限值, 则  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

**评注** 这一定理表明,  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  只是  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  加上了原来测度为无穷的那些集合. 即对于测度有限部分, 这两种的按照不同方式定义的测度是相同的.

**证明** 为证明  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , 只需要利用定理10, 即验证  $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$  且  $A$  可以拆成可数个 Lebesgue 可测集的并的形式.

首先将利用  $\{A_l \setminus A_{l-1}\}$  拆分  $A$ , 可以证明它们都是 Lebesgue 可测的. 之后只需要证明  $A$  的外测度有限即可. 注意

$$\mu^* A \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu^*(A_l \setminus A_{l-1}) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_l \setminus A_{l-1}).$$

而利用级数相关知识, 可知 R.H.S 收敛于有限值. ■

**18 定理**  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  是  $\sigma$ -代数, 它的单位元为  $\mathbb{R}^n$ .

**19 推论** 设  $X \subset \mathbb{R}^n$  为紧集, 则  $\mathcal{M}(X)$  为  $\sigma$ -代数.

**20 定理**  $\mathbb{R}^n$  中的开集都  $\sigma$ -可测.

**证明** 利用  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  是  $\sigma$ -代数这一事实以及定理1即可. ■

### 3.6 Borel $\sigma$ -代数

**21 定义 (Borel  $\sigma$ -代数)** 定义  $\mathbb{R}^n$  上的 Borel  $\sigma$ -代数是由开集全体生成的  $\sigma$ -代数, 即

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)) = \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A} \supset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \text{ 且 } \mathcal{A} \text{ 为 } \sigma\text{-代数} \}.$$

其中  $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$  表示  $\mathbb{R}^n$  上的开集全体.

**评注** 这一定义表明 Borel  $\sigma$ -代数是最小的包含了所有开集的  $\sigma$ -代数. 首先, 对  $\mathcal{A}$  的要求表明它是包含了所有开集的  $\sigma$ -代数, 而  $\bigcap$  则表明它是最小的. 与此同时, 由于  $\sigma$ -代数对于取补集操作封闭, 所以也可以说 Borel  $\sigma$ -代数是由全体闭集生成的.

**22 定义 (Borel 集)** 称 Borel  $\sigma$ -代数中的元素为 Borel 集.

**23 定理** Borel 代数由  $\mathbb{R}^n$  中的闭方块全体  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  生成. 且 Borel 集 Lebesgue 可测.

**评注** 这一定理意味着只需要定义了方块以及方块上的测度, 那么对应的 Borel 集永远是可测的.

**证明** 首先考虑定理的前半部分. 根据定理1可知,  $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$ , 从而  $\sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)) \subset \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$ . 而根据定义21的评注, 可知反向也成立. 因此  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$ .

至于可测性. 由于对于任意  $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , 有  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ , 所以根据定理18可知  $\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ . ■

### 3.7 Borel 正则性

**正则性** 如果说事物 A 是关于事物 B 正则的, 那么它的含义是 A 可以用 B 来逼近. 例如说 Lebesgue 测度是 Borel 正则的, 它表明某些集合的 Lebesgue 测度可以用 Borel 集的测度来逼近.

**24 定理** 设  $A \subset \mathbb{R}^n$ , 则  $\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \mid A \subset G, G \text{ 为开集}\}$ . 若  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ , 则  $\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subset A, F \text{ 为紧集}\}$ .

**评注** 这一定理表明, 我们可以从外部用开集或者从内部用紧集逼近一个集合.

**证明** 首先考虑前半部分, 对于  $\mu^*(A) = \infty$  的情况是显然的, 与此同时  $\mu^*(A) \leq \inf$  也是如此, 所以仅需要证明  $\mu^*(A) \geq \inf$  即可. 即证明对于任意的  $\varepsilon$ , 都存在开集  $G$ , 使得  $\mu^*(A) + \varepsilon \geq \mu(G)$ . 考虑 L.H.S, 对于  $\mu^*(A)$ , 用刚比它大一点的方块覆盖  $\{K_i\}$  来替换代替它, 即

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(K_i) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

与此同时, 对于每一个方块, 考虑它对应的刚比它大一点的开方块  $\tilde{K}_i$ , 即

$$\mu(\tilde{K}_i) \leq \mu(K_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

利用半可加性即可知道这些开方块的并即为所需要的  $G$ .

而对于后半部分,  $\mu(A) \geq \sup$  仍是显然的, 下考虑  $\mu(A) \leq \sup$  的证明. 首先对于  $A$  有界的情况, 可以利用前半部分构造出合适的紧集. 首先取包含  $A$  的紧集  $H$ , 接着从  $H$  中间挖去  $A$ . 由前半部分可知, 存在一个相应的开集  $G \supset H \setminus A$ . 它直观上来看, 有一部分在  $H$  的外面, 另一部分在  $A$  的里面. 而  $A$  中那些不属于  $G$  的部分, 即  $H \setminus G$ , 就是所需要的紧集.

而对于  $A$  无界的情况, 又分为两类. 首先是  $\mu(A) = \infty$  的情况, 利用之前的结果可知  $\sup = \infty$ . 而对于  $\mu(A) < \infty$  的情况, 注意到当  $l$  充分大时, (2) 中 R.H.S 的增加就很小了, 从而仍可以化归至有限的情况. ■

**25 定理**  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  当且仅当对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G \supset A$  使成立  $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$ .

**证明** 首先假设  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ . 对于  $\mu(A) < \infty$  的情况, 利用定理24证明中所构造的开集即可. 而对于  $\mu(A) = \infty$  的情况, 只需对于  $A_l$  取对应开集, 再取它们的并即可.

接着假设条件成立, 证明  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ . 对于有限的情况, 取比  $A$  稍大的开集并用可数个闭方块来表示它, 最后舍掉最后那些充分小的方块即得到了所要的初等集. 只需要证明  $A_l \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  即可, 之后利用  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  对可数并封闭来完成证明. ■

**26 定理**  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  当且仅当对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G$  和闭集  $F$ , 满足  $F \subset A \subset G$  且  $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$ . 若  $\mu(A) < \infty$ , 则  $F$  的选取可以是紧集.

**证明** TODO

**27 定义** 记  $\mathbb{R}^n$  中所有开集的可数并全体为  $G_\delta(\mathbb{R}^n)$ , 所有闭集的可数交为  $F_\sigma(\mathbb{R}^n)$ .

**评注** 可以证明, 这两个集合实际就是 Borel 集. 相关的证明见定理28.

**28 定理** 设  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ . 则存在  $G \in G_\delta(\mathbb{R}^n)$  和  $F \in F_\sigma(\mathbb{R}^n)$  满足

$$F \subset A \subset G, \quad \mu(G \setminus A) = \mu(A \setminus F) = 0.$$

**证明** 对  $\{G_k\}$  和  $\{F_k\}$  施定理26即可. ■

**29 推论**  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  是  $\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  的在 Lebesgue- $\sigma$  测度下的完备化<sup>1</sup>, 即对与  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  中的集合和  $\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  中的集合仅相差 Borel 集中零测集的某个子集, 即对于任意的  $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ ,  $A$  可以被写为  $X \cup M$  的形式, 其中  $X \in \mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ , 而  $M \subset N \in \mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  且  $\mu N = 0$ .

### 3.8 不变性与 Lebesgue 不可测集

**30 定理** Lebesgue 测度有平移不变性、相对伸缩不变性和镜像不变性.

**31 定理 (Lebesgue 不可测集)** 略

### 3.9 其他测度

---

<sup>1</sup>注意,  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  是完备的.



## 4 可测函数

### 4.1 可测函数的定义

**32 定义 (测度空间)** 对于集合  $X$ , 设  $\mathcal{M}(X)$  是它的一个构成  $\sigma$ -代数的子集且该  $\sigma$ -代数的单位元为  $X$ , 设  $\mu$  是定义在  $\mathcal{M}$  上的完备  $\sigma$ -可加测度. 称  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  为一个测度空间.

**33 定义 (可测)** 称函数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  在集合  $X$  上关于测度  $\mu$  可测, 若对任意实数  $c$ , 集合  $X(f > c) := \{x \in X : f(x) > c\}$  可测. 记定义在  $X$  上的可测的函数全体为  $S(X, \mathcal{M}, \mu)$ , 简记为  $S(X)$ .

**34 引理** 以下命题等价.

1.  $f \in S(X)$ , 即  $X(f > c) \in \mathcal{M}$ .
2.  $X(f \geq c) \in \mathcal{M}$ .
3.  $X(f < c) \in \mathcal{M}$ .
4.  $X(f \leq c) \in \mathcal{M}$ .

**证明** 首先证明

$$X(f \geq c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} X\left(f > c - \frac{1}{k}\right).$$

之后只需要利用  $\mathcal{M}$  的  $\sigma$ -可加性既可得到 L.H.S 的可测性. 对于其他的条件, 或与此证明类似, 或可以直接利用补集等推出. ■

**35 推论** 若  $f \in S(X)$ , 则对于任意的  $a \leq b$ , 如下集合都可测:

$$X(a \leq f \leq b), \quad X(a < f \leq b), \quad X(a < f < b), \quad X(a \leq f < b), \quad X(f = a).$$