科学计算作业 练习 $7a$

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

引理 1 设 x_* 是 $\varphi(x) \in \mathscr{C}^1[a,b]$ 的不动点，若 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且 $|\varphi'(x_*)| \geq h > 1$，则 $\varphi(x)$ 不局部收敛.[1]

证明: 由于 $\varphi'(x_*) > 1$ 且连续，所以存在 $\delta > 0$，使得在 $O_\delta(x_*)$ 中成立

$$|\varphi(x) - x_*| = |\varphi'(\xi)(x - x_*)| \geq h|x - x_*|. \tag{1}$$

所以对任意的 $0 < \varepsilon < \delta$, 对任意的 $x_0 \in O_\delta(x_*)\backslash\{x_*\}$, 迭代足够多次后成立 $|x_n - x_*| > \varepsilon$. 由于 $\varphi(x)$ 单调，所以仅有 $x = x_*$ 满足 $\varphi(x) = x_*$. 从而若假设存在 $x_0 \in [a,b]$，使迭代数列收敛至 x_*，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得任意 $n > N$，有 $x_n \in O_\varepsilon(x_*)\backslash\{x_*\}$. 对于这样的 n，根据 (1)，继续迭代足够多次后，成立 $|x_m - x_*| > \varepsilon$，与收敛矛盾，从而不存在 $x_0 \in [a,b]$，使得迭代数列收敛. ∎

2. 为求方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0 \cdots\cdots$

解 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$，则 $f(1.4) = -0.216 < 0$，$f(1.5) = 0.125 > 0$，由于 f 在 $[1.4, 1.5]$ 上连续，所以在 $[1.4, 1.5]$ 中存在零点 x_*.

(1)

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = -\frac{2}{x^3}.$$

在 $[1.4, 1.5]$ 上，$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(1.4)| < 0.75$. 从而 $\varphi'(x_*) \leq 0.75 < 1$ 且连续，从而在 x_* 处局部收敛. ∎

[1] 关于这一引理的条件: 之所以我要加上单调（单射）条件，是因为我觉得可能会出现，在 x_* 的某一领域中的点，被映射到某个这一领域外的点集内，而这个点集内的点都被直接映射到 x_* 上的情况. 而之所以加上常数 $h > 1$ 而非直接大于 1，主要是为了证明方便，否则在说明迭代足够多次后，有 $|x_m - x_*| > \varepsilon$ 时，可能会出现 $\varphi'(\xi) \to 1$，则可能虽然每一次误差确实都在增大，但最后的结果却并没有超过 ε 的情况，即 $\prod_{k=1}^{\infty} \varphi(\xi_k) = \text{Constant}$ 的情况.

(2)

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x)=\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-2/3}.$$

在 $[1.4,1.5]$ 上，$|\varphi'(x)|\le 0.5$ 且连续，从而在 x_* 处局部收敛. ■

(3) 若 $x_0\le 1$ 或 $x_0\ge 2$，则 x_{k+1} 或 x_{k+2} 不存在，所以仅需考虑 $x_0\in(1,2)$. 由于 $\varphi(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调减，且 $\varphi'(x)=-0.5(x-1)^{-3/2}$，在 $[1.4,1.5]$ 上恒大于 1.1，从而 $\varphi'(x_*)>1.1$. 根据引理1，$\varphi(x)$ 不局部收敛. ■

计算 设 $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$，取 $x_0=1.5$，压缩常数 $l=0.5$，从而约需要迭代 10 次，计算过程见表 1，结果为

$$\tilde{x}=1.46558. \quad ■$$

表 1: $n-x_n$ 表

n	0	1	2	$\cdots$	8	9	10
x_n	1.5	1.48125	1.47271	$\cdots$	1.46563	1.46560	1.46558

5. 用 Steffensen 迭代法计算……

解 计算结果见表 2.

表 2: 计算结果

$x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x^2}$			
k	x_k	y_k	z_k
0	1.5	1.481248	1.472706
1	1.465558	1.465565	1.465569
2	1.465571	1.465571	1.465571
3	1.46557		

$x_{k+1}=1/\sqrt{x_k-1}$			
k	x_k	y_k	z_k
0	1.500000	1.414214	1.553774
1	1.467342	1.462792	1.469966
2	1.465576	1.465564	1.465583
3	1.46557		

6. 设 $\varphi(x)=$……

解 设 $f(x_*)=0$，则只需要满足 $\varphi'(x_*)=0$ 且 $\varphi''(x_*)=0$，即至少三阶收敛.

$$\begin{aligned} &\varphi'(x)=1-p'f-pf'-q'f^2-2qff' \\ \Rightarrow\quad &\varphi'(x_*)=1-p(x_*)f'(x_*)=0 \\ \Rightarrow\quad &p=\frac{1}{f'}. \end{aligned}$$

将结果代回，得

$$\begin{aligned}
&\varphi'(x) = \frac{f''}{(f')^2}f - qf^2 - 2qff' \\
\Rightarrow\quad &\varphi''(x_*) = \left(\frac{f''}{f'} - 2q(f')^2\right)\bigg|_{x=x_*} = 0 \\
\Rightarrow\quad &q = \frac{f''}{2(f')^3}.
\end{aligned}$$

综上

$$\varphi = x - \frac{f}{f'} - \frac{f''f^2}{2(f')^3}. \quad \blacksquare$$

10. 对于 $f(x)=0$ 的牛顿公式……

证明 由于 Newton 公式二阶收敛，所以有

$$\frac{x_{k+1}-x_*}{x_k-x_*} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_*} \to -1. \tag{2}$$

记 $U_{k+1} = (x_{k+1}-x_*)/(x_k-x_*)^2$，则根据 (2)

$$\begin{aligned}
\frac{R_k}{U_{k-1}} &= \frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}\frac{(x_{k-2}-x_*)^2}{x_{k-1}-x_*} \\
&= \frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k-1}-x_*}\left(\frac{x_{k-2}-x_*}{x_{k-1}-x_{k-2}}\right)^2 \to -1\times(-1)^2 = -1.
\end{aligned} \tag{3}$$

而对于 U_{k+1}，存在 ξ 位于 x_* 和 x_k 之间，成立

$$\lim_{k\to\infty} U_{k+1} = \lim_{\xi\to x_*}\frac{\varphi''(\xi)}{2} = \frac{\varphi''(x_*)}{2} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}. \tag{4}$$

结合 (3) 和 (4)，有

$$\lim_{k\to\infty} R_k = -\lim_{k\to\infty} U_k = -\frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}. \quad \blacksquare$$

14. 应用 Newton 法于方程……

解

(1)

$$f(x) = x^n - a \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{n}\left((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right).$$

φ 在 $\sqrt[n]{x}$ 处的一阶、二阶导数分别为

$$\begin{aligned}
\varphi'(\sqrt[n]{a}) &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{x^n}\right)\bigg|_{x=\sqrt[n]{a}} = 0, \\
\varphi''(\sqrt[n]{a}) &= \frac{(n-1)a}{x^{n+1}}\bigg|_{x=\sqrt[n]{a}} \neq 0.
\end{aligned}$$

从而极限为

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2} = -\lim_{\xi\to\sqrt[n]{a}}\frac{\varphi''(\xi)}{2} = \frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}}. \quad \blacksquare$$

(2)

$$f(x) = 1 - \frac{a}{x^n} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{a(n+1)x - x^{n+1}}{an}.$$

φ 在 $\sqrt[n]{x}$ 处的一阶、二阶导数分别为

$$\varphi'(\sqrt[n]{a}) = \left.\frac{(n+1)(a - x^n)}{an}\right|_{x=\sqrt[n]{a}} = 0,$$
$$\varphi''(\sqrt[n]{a}) = \left.\frac{(n+1)(a - nx^{n-1})}{an}\right|_{x=\sqrt[n]{a}} \neq 0.$$

从而极限为

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\lim_{\xi\to\sqrt[n]{a}} \frac{(n+1)(a - nx^{n-1})}{an} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{\sqrt[n]{a}} - 1\right). \quad \blacksquare$$