Fourier 分析　笔记

任云玮

目录

1 The Genesis of Fourier Analysis **2**

2 Basic Property of Fourier Series **2**

2.1 Examples and formulation of the problem 2

2.2 Uniqueness of Fourier series 2

2.3 Convolutions 3

2.4 Good kernels 3

2.5 Cesàro and Abel summability: applications to Fourier series 3

2.6 Exercises 3

1 The Genesis of Fourier Analysis

2 Basic Property of Fourier Series

2.1 Examples and formulation of the problem

2.2 Uniqueness of Fourier series

p37.

p41. Notes on Theorem 2.1 这一命题表明对于连续函数，只需要验证它们的 Fourier 系数是否相等即可.

p40. proof of Theorem 2.1 先考虑 f 为实函数的情况. 首先条件中有 $\hat{f}(n)=0$，按照定义它意味着

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$$

由于积分的线形性，所以我们有对于任意三角多项式 p_k，成立

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

我们考虑利用反证法来证明此命题. 不失一般性的，我们假设定义在 $[-\pi,\pi]$ 上，在 $\theta_0=0$ 处连续且为 $f(0)>0$. 我们尝试构造一列三角多项式 $\{p_k\}$，让它在 0 附近为正且在其他地方迅速衰减，则我们即可得到 $\int f(\theta)p_k(\theta)>0$，而这与之前的讨论矛盾.

首先按照之前的想法，我们取充分小的 $[-\delta,\delta]\subset[-\pi,\pi]$，满足在其中 $f(\theta)>f(0)/2$. 接下来我们构造一个三角多项式 p，满足如下条件:

1. 在 $[-\delta,\delta]$ 外 $|p(\theta)|<s<1$.

2. 在 $[-\delta,\delta]$ 上 $p(\theta)\geq 0$.

3. 在某个 $[-\eta,\eta]\subset[-\delta,\delta]$ 上 $p(\theta)>r>1$.

这样我们只需要令 $p_k(\theta)=[p(\theta)]^k$，在进行一下估计即可. 我们可以设

$$p(\theta)=\varepsilon+\cos\theta.$$

其中 $\varepsilon>0$ 充分小以满足 [1.]. 同时显然只要最初选择的 $|\delta|<\pi/2$，它就满足 [2.]. 而对于 [3.]，只需要 $|\eta|$ 充分小，也是可以成立的.

接下来我们对积分 $\int f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta$ 进行估计. 我们有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\right| \geq \left|\int_{-\eta}^{\eta}+\int_{\eta\leq|\theta|<\delta}\right| - \left|\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi}\right| \geq \left|\int_{-\eta}^{\eta}\right| - \left|\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi}\right|.$$

由于 f Riemann 可积，所以有界，即 $|f|<B$. 从而有

$$\left|\int_{\delta\le|\theta|\le\pi} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta\right| \le 2(\pi-\delta)Bs^k, \quad \int_{-\eta}^{\eta} f(\theta)p_k(\theta)\mathrm{d}\theta \ge 2\eta\frac{f(0)}{2}r^k.$$

当 k 充分大时，有 $|\int_{-\pi}^{\pi}|>0$，与已知矛盾.

而对于 f 是复函数的情况，只需要利用 $\hat{\bar{f}}(n)=\overline{\hat{f}(-n)}$ 即可.

p41. Notes on Corollary 2.3 这一命题表明一定条件下，Fourier 系数的绝对收敛性可以保证 Fourier 级数的一致收敛形. 而之后的命题（[Corollary 2.4]）则给出了通过函数的光滑程度导出 Fourier 系数衰减速度的方法.

p42. [1.] 注意由于 $e^{in\theta}$ 的周期性，设 $b-a=2\pi$，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{in\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

2.3 Convolutions

p47. Notes on Lemma 3.2 这一引理表明可以用一列有界连续函数 $\{f_k\}$ 在积分平均的含义下去逼近一个 Riemann 可积函数 f.

2.4 Good kernels

p49. Proof of Theorem 4.1 直观地想，由于 good kernel 的性质，当 n 充分大时，$[x-\pi,x+\pi]$ 上的加权平均的结果应该和 $f(x)$ 是差不多的，自然而然就会想到把积分分为 $|y|\le\delta$ 和 $\delta\le|y|\le\pi$ 两部分. 利用 f 在 x 处的连续性等性质估计

$$(f*K_n)(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]\mathrm{d}y$$

即可证明在连续点处的收敛性. 而一致收敛性则有闭区间上的连续函数的一致连续性保证.

2.5 Cesàro and Abel summability: applications to Fourier series

说明 提出这些不同的可求和性的原因在 Fourier 级数在某些点常常不是收敛的，所以在此给出了其他的定义级数收敛的方法，使得 Fourier 级数在那些点也有值. 而这些不同收敛方式则定义了对应的不同形式的 kernel.

2.6 Exercises

积分公式

$$\int_0^{\pi}\sin n\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1-(-1)^n}{n}.$$