实分析 笔记

任云玮

目录

1 集合论导引

1 定理 所有 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $\mathcal{O}$ 都可以写作可数个几乎不相交的闭方块的并的形式.

2 命题 (对称差)

1. $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$.
2. TODO

2 测度论导引

3 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度

3.1 方块的测度

3.2 ε^n 的测度

3.3 外测度

3 引理 对于任意的 $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$，成立 $|\mu^* A_1 - \mu^* A_2| \le \mu^*(A_1 \Delta A_2)$.

3.4 Lebesgue 测度

4 定义 (Lebesgue 测度) 称集合 $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ 为 Lebesgue 可测，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在初等集 B，使得

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon. \tag{1}$$

记 Lebesgue 可测的集合全体为 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. 定义 μ 为 μ^* 限制在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 上的函数，称其为 Lebesgue 测度.

评注 之所以既需要外测度也需要定义 Lebesgue 测度是因为虽然外测度是定义在所有集合上的，但是它不满足可加性；而 Lebesgue 虽然有诸如可加性等很好的性质，但它只是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集上面. 而如此定义可测的原因在于，对于初等集而言，外测度的性质是良好且直观的.

5 命题 (Lebesgue 测度的性质) Lebesgue 测度满足如下性质

1. 对任意 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，成立 $\mu A \ge 0$.
2. $\varepsilon^n \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 且若 $A \in \varepsilon^n$，则 $\mu A = mA$.

6 定理 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 为环.

证明 利用命题2即可. ■

7 推论 $\mathcal{M}([0,1])$ 为一个代数.

8 定理 μ 在 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 上满足可加性.

证明 即证明，若 $A = A_1 \sqcup A_2$，则 $\mu A = \mu A_1 + \mu A_2$. 其中 $\mu A \le \mu A_1 + \mu A_2$ 可以由外测度的性质直接推出. 下考虑另一方向，尝试证明 $\mu A > \mu A_1 + \mu A_2 - \varepsilon$.

对于固定的 ε，首先根据 Lebesgue 可测的定义取出基础集 B_i，满足 $\mu * (A_i \Delta B_i) < \varepsilon/6$，同时可以证明 $m(B_1 \cap B_2) < \varepsilon/3$. 用 $B = B_1 \cup B_2$ 来估计 A 即可完成证明. ■

9 定理 环 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 上的测度 μ 是 σ-可加的.

10 定理 设 $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ 且 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，其中 $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. 则 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

评注 注意，对于 Lebesgue 可测集，它的测度就是外测度.

证明 首先将 A 重写为不相交集 $A'_k = A_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$. 考虑级数 $\sum \mu A'_k$，根据条件，它是收敛的. 之后对于它前充分多的有限项所对应的集合的并，它是 Lebesgue 可测的，考虑它对应的初等集 B. 而对于剩下的集合，它们的外测度足够小. ■

11 推论 可数个零测集的并依然是零测集.

证明 利用外测度的 σ-半可加性和定理10即可证明.

12 定义 (完备) 称定义在环 $\mathcal{K}$ 上的测度 μ 是完备的，若任意零测集的子集的测度也为零.

13 定理 Lebesgue 测度是完备的.

3.5 广义测度

14 定义 定义 $\hat{Q}_l$ 为中心在原点、边长为 $2l$ 的 n 维立方块.

15 定义 (σ-可测) 称 $A \subset \mathbb{R}^n$ 广义 Lebesgue 可测或 σ-可测，若对于任意 $l \in \mathbb{N}$，集合 $A \cap \hat{Q}_l$ Lebesgue 可测. 同时，对于 σ-可测的集合，定义

$$\mu A = \lim_{l \to \infty} \mu(A \cap \hat{Q}_l). \tag{2}$$

记 σ 可测的集合全体为 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

16 定理 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

17 定理 若对于 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，(2) 的极限为有限值，则 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

评注 这一定理表明，$\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 只是 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 加上了原来测度为无穷的那些集合. 即对于测度有限部分，这两种的按照不同方式定义的测度是相同的.

证明 为证明 $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，只需要利用定理10，即验证 $A \in \mathcal{M}^*(\mathbb{R}^n)$ 且 A 可以拆成可数个 Lebesgue 可测集的并的形式.

首先将利用 $\{A_l \backslash A_{l-1}\}$ 拆分 A，可以证明它们都是 Lebesgue 可测的. 之后只需要证明 A 的外测度有限即可. 注意

$$\mu^* A \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu^*(A_l \backslash A_{l-1}) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_l \backslash A_{l-1}).$$

而利用级数相关知识，可知 R.H.S 收敛于有限值. ■

18 定理 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是 σ-代数，它的单位元为 $\mathbb{R}^n$.

19 推论 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集，则 $\mathcal{M}(X)$ 为 σ-代数.

20 定理 $\mathbb{R}^n$ 中的开集都 σ-可测.

证明 利用 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是 σ-代数这一事实以及定理1即可. ■

3.6 Borel $\sigma-$ 代数

21 **定义 (Borel $\boldsymbol{\sigma}$-代数)** 定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ-代数是由开集全体生成的 σ-代数，即

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)) = \bigcap\{\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \,|\, \mathcal{A} \supset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \text{ 且 } \mathcal{A} \text{ 为 } \sigma\text{-代数}\}.$$

其中 $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的开集全体.

评注 这一定义表明 Borel σ-代数是最小的包含了所有开集的 σ-代数. 首先，对 $\mathcal{A}$ 的要求表明它是包含了所有开集的 σ-代数，而 $\bigcap$ 则表明它是最小的. 与此同时，由于 σ-代数对于取补集操作封闭，所以也可以说 Borel σ-代数是由全体闭集生成的.

22 **定义 (Borel 集)** 称 Borel σ-代数中的元素为 Borel 集.

23 **定理** Borel 代数由 $\mathbb{R}^n$ 中的闭方块全体 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 生成. 且 Borel 集 Lebesgue 可测.

评注 这一定理意味着只需要定义了方块以及方块上的测度，那么对应的 Borel 集永远是可测的.

证明 首先考虑定理的前半部分. 根据定理1可知，$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$，从而 $\sigma(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)) \subset \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$. 而根据定义21的评注，可知反向也成立. 因此 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n))$.

至于可测性. 由于对于任意 $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，有 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，所以根据定理18可知 $\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. ■

3.7 Borel 正则性

正则性 如果说事物 A 是关于事物 B 正则的，那么它的含义是 A 可以用 B 来逼近. 例如说 Lebesgue 测度是 Borel 正则的，它表明某些集合的 Lebesgue 测度可以用 Borel 集的测度来逼近.

24 **定理** 设 $A \subset \mathbb{R}^n$，则 $\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \,|\, A \subset G, \text{G 为开集}\}$. 若 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，则 $\mu(A) = \sup\{\mu(F) \,|\, F \subset A, \text{F 为紧集}\}$.

评注 这一定理表明，我们可以从外部用开集或者从内部用紧集逼近一个集合.

证明 首先考虑前半部分，对于 $\mu^*(A)=\infty$ 的情况是显然的，与此同时 $\mu^*(A)\leq \inf$ 也是如此，所以仅需要证明 $\mu^*(A)\geq \inf$ 即可. 即证明对于任意的 ε，都存在开集 G，使得 $\mu^*(A)+\varepsilon\geq \mu(G)$. 考虑 L.H.S，对于 $\mu^*(A)$，用刚比它大一点的方块覆盖 $\{K_i\}$ 来替换代替它，即

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mu(K_i)\leq \mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

与此同时，对于每一个方块，考虑它对应的刚比它大一点的开方块 $\tilde{K}_i$，即

$$\mu(\tilde{K}_i)\leq \mu(K_i)+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

利用半可加性即可知道这些开方块的并即为所需要的 G.

而对于后半部分，$\mu(A)\geq \sup$ 仍是显然的，下考虑 $\mu(A)\leq \sup$ 的证明. 首先对于 A 有界的情况，可以利用前半部分构造出合适的紧集. 首先取包含 A 的紧集 H，接着从 H 中间挖去 A. 由前半部分可知，存在一个相应的开集 $G\supset H\backslash A$. 它直观上来看，有一部分在 H 的外面，另一部分在 A 的里面. 而 A 中那些不属于 G 的部分，即 $H\backslash G$，就是所需要的紧集.

而对于 A 无界的情况，又分为两类. 首先是 $\mu(A)=\infty$ 的情况，利用之前的结果可知 $\sup=\infty$. 而对于 $\mu(A)<\infty$ 的情况，注意到当 l 充分大时，(2) 中 R.H.S 的增加就很小了，从而仍可以化归至有限的情况. ■

25 定理 $A\in\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset A$ 使成立 $\mu^*(G\backslash A)<\varepsilon$.

证明 首先假设 $A\in\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 对于 $\mu(A)<\infty$ 的情况，利用定理24证明中所构造的开集即可. 而对于 $\mu(A)=\infty$ 的情况，只需对于 A_l 取对应开集，再取它们的并即可.

接着假设条件成立，证明 $A\in\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 对于有限的情况，取比 A 稍大的开集并用可数个闭方块来表示它，最后舍掉最后那些充分小的方块即得到了所要的初等集. 只需要证明 $A_l\in\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 即可，之后利用 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 对可数并封闭来完成证明. ■

26 定理 $A\in\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在开集 G 和闭集 F，满足 $F\subset A\subset G$ 且 $\mu(G\backslash F)<\varepsilon$. 若 $\mu(A)<\infty$，则 F 的选取可以是紧集.

证明 TODO

27 定义 记 $\mathbb{R}^n$ 中所有开集的可数并全体为 $G_\delta(\mathbb{R}^n)$，所有闭集的可数交为 $F_\sigma(\mathbb{R}^n)$.

评注 可以证明，这两个集合实际就是 Borel 集. 相关的证明见定理28.

28 定理 设 $A\in\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$. 则存在 $G\in G_\delta(\mathbb{R}^n)$ 和 $F\in F_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$F\subset A\subset G,\quad \mu(G\backslash A)=\mu(A\backslash F)=0.$$

证明 对 $\{G_k\}$ 和 $\{F_k\}$ 施定理26即可. ■

29 推论 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 的在 Lebesgue-σ 测度下的完备化[1]，即对与 $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 中的集合和 $\mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 中的集合仅相差 Borel 集中零测集的某个子集，即对于任意的 $A \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，$A$ 可以被写为 $X \cup M$ 的形式，其中 $X \in \mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$，而 $M \subset N \in \mathcal{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mu N = 0$.

3.8 不变性与 Lebesgue 不可测集

30 定理 Lebesgue 测度有平移不变性、相对伸缩不变性和镜像不变性.

31 定理 (Lebesgue 不可测集) 略

3.9 其他测度

[1]注意，$\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ 是完备的.

4 可测函数

4.1 可测函数的定义

32 定义 (测度空间) 对于集合 X，设 $\mathcal{M}(X)$ 是它的一个构成 σ-代数的子集且该 σ-代数的单位元为 X，设 μ 是定义在 $\mathcal{M}$ 上的完备 σ-可加测度. 称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个测度空间.

33 定义 (可测) 称函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 在集合 X 上关于测度 μ 可测，若对任意实数 c，集合 $X(f > c) := \{x \in X : f(x) > c\}$ 可测. 记定义在 X 上的可测的函数全体为 $S(X, \mathcal{M}, \mu)$，简记为 $S(X)$.

34 引理 以下命题等价.

1. $f \in S(X)$，即 $X(f > c) \in \mathcal{M}$.
2. $X(f \geq c) \in \mathcal{M}$.
3. $X(f < c) \in \mathcal{M}$.
4. $X(f \leq c) \in \mathcal{M}$.

证明 首先证明

$$X(f \geq c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} X\left(f > c - \frac{1}{k}\right).$$

之后只需要利用 $\mathcal{M}$ 的 σ-可加性既可得到 L.H.S 的可测性. 对于其他的条件，或与此证明类似，或可以直接利用补集等推出. ■

35 推论 若 $f \in S(X)$，则对于任意的 $a \leq b$，如下集合都可测:

$$X(a \leq f \leq b), \quad X(a < f \leq b), \quad X(a < f < b), \quad X(a \leq f < b), \quad X(f = a).$$

36 定理 设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的一段区间或 $\mathbb{R}$ 本身. 任何连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ $\sigma-$Lebesgue 可测.

证明 考虑 X 的内点 X_0 中满足 $f > c$ 的部分 $X_0(f > c)$. 根据连续性，可以证明它也是一个开集，从而使可测的. 而 $X_0(f > c)$ 和 $X(f > c)$ 之间只相差有限个点. ■

4.2 可测函数的性质

37 命题 若 $f \in S(X)$ 而 $k \in \mathbb{R}$，则 $f + k \in S(X)$ 且 $kf \in S(X)$.

38 引理 设 $f, g \in S(X)$，则 $X(f > g) \in \mathcal{M}(X)$.

证明 将 $X(f>g)$ 化为 $X(f>r)$ 和 $X(g<r)$ 的形式，其中 $r\in Q$. 接着利用 $\mathcal{X}$ 的在可数并下封闭即可. ■

39 定义 定义函数 f 的正部与负部分别为

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0, \\ 0, & f(x)<0. \end{cases} \qquad f^-(x)=\begin{cases} 0, & f(x)>0, \\ -f(x), & f(x)\leq 0. \end{cases},$$

40 定理 若 $f,g\in S(X)$，则以下函数都可测：

$$f^2,\quad f+g,\quad fg,\quad f/g,\quad |f|,\quad f^{\pm}.$$

41 引理 设 $\mathcal{A}$ 是单位元为 X 的 σ-代数，$X_0\in\mathcal{A}$，定义

$$\mathcal{A}(X_0)=\{A\cap X_0\,:\,A\in\mathcal{A}(X)\}.$$

则 $\mathcal{A}(X_0)$ 是以 X_0 为单位元的 σ-代数.

证明 首先证明它对于可数并以及可数交封闭.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap X_0)=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cap X_0.$$

由于 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数，所以 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{A}$. 所以 $\mathrm{L.H.S}\in\mathcal{A}(X_0)$. 对于可数交的证明也是同样. 下证明对于补集封闭.

$$(A\cap X_0)^c=X_0\backslash A\cup\varphi=A^c\cap X_0\in\mathcal{A}(X_0).$$

同时，$X_0\cap(A\cap X_0)=A\cap X_0$，即 X_0 是单位元. 综上，$\mathcal{A}(X_0)$ 是以 X_0 为单位元的 σ-代数. ■

42 命题 若 $f\in S(X)$ 且 $X_0\in\mathcal{M}(X)$，则 $f\in S(X_0)$.

评注 这一命题表示如果把一个可测函数限制在一个可测子集上，它依然是该子集上的可测函数.

证明 由于 $f\in S(X)$, 所以 $X(f>c)\in\mathcal{A}$. 根据引理41, 所以 $X_0(f>c)=X_0\cap X(f>c)$ 属于以 X_0 为单位元的 σ-代数，即为[2]$\mathcal{M}(X_0)$. ■

43 定理 设 $f:X\to\mathbb{R}$，$X=\bigcup_{k=1}^{\omega}X_k$ 且 $1\leq\omega\leq\infty$，$X_k\in\mathcal{M}(X)$，并且 $f\in S(X_k)$. 则 $f\in S(X)$.

[2]??

评注 这一命题表示对于一列可测集，只需要在每一集合上可测，那么 f 就在 X 上可测. ■

证明 利用 $X(f>c)=\bigcup_k X_{k=1}^{\omega}(f>c)$ 以及 $\mathcal{X}$ 对可数并封闭即可. ■

44 定理 设 $f\in S(X)$ 且 $\mu X(f=\pm\infty)=0$. 则对任意 $\varepsilon>0$，存在有界 $g\in S(X)$ 使得 $\mu X(f\neq g)<\varepsilon$.

评注 这一命题表示，如果某个函数的“极点”测度为零，那么基本上可以把他们忽略掉从而使得它有界而不对原来的结果产生过大的影响.

证明 定义 $A_n=X(|f|>n)$. 令 n 充分大，定义

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in X\backslash A_n, \\ 0, & x\in A_n. \end{cases}$$

可以证明它就是所要的 g. ■

45 定义 (几乎处处) 称性质 P 在集合 X 上几乎处处成立，若 X 中 P 不成立的点全体为一个零测集.

5 可测函数

46 定义 (特征函数) 定义集合 E 的特征函数为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

47 定义 (阶跃函数) 称 f 是阶跃函数，若

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{R_k}$$

其中 R_k 是 n 维矩形.

48 定义 (简单函数) 称 f 为简单函数，若

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

其中 E_k 为可测集且测度有限.

5.1 定义与基础性质

49 定理 有限值函数 f 可测当且仅当对于任意开集 $\mathcal{O}$，$f^{-1}(\mathcal{O})$ 可测，当且仅当对任意闭集 F，$f^{-1}(F)$ 可测.

评注 对于非有限值函数，只需要再要求 $f^{-1}(\pm\infty)$ 分别可测，则定理仍是成立的.

证明 实轴上的开集都可以被写成可数个不相交开区间的并的形式，同时由于 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数，所以它在可数并和取补集下都是封闭的. ■

50 定理 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续，则 f 可测. 若 f 可测且有限，同时 Φ 连续，则 $\Phi \circ f$ 可测.

证明 事实上，连续保证了开集的原像是开集[3]，而开集永远是可测的，所以 f 可测. 对于后半部分的证明同理. ■

51 定理 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列可测函数，则如下函数可测

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

[3]证明见 Rudin 的《数学分析原理》.

证明 $X(\sup_n f_n > c) = \bigcup_n X(f_n > c)$. 其中左边表示 $\sup_n f_n$ 中值大于 c 的 x 全体，而右侧表示只需要有一个 $f_n(x) > c$，那么 c 就可以被取进来. 所以第一个函数是可测的. 同时又有

$$\inf_n f_n(x) = -\sup_n(-f_n(x)), \quad \limsup_{n\to\infty} = \inf_k\{\sup_{n\ge k} f_n\}.$$

所以后几个函数也是可测的. ■

52 推论 设 $\{f_n\}$ 是一列可测函数且 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$，则 f 可测.

53 定理 设 f 和 g 可测，则

1. 对于正整数 k，f^k 可测.
2. 若 f 和 g 有限，则 $f+g$ 和 fg 可测.

54 定理 设 f 可测且 g 同 f 几乎处处相等，则 g 可测.

评注 f 和 g 的任意原像至多只相差一个零测集. ■

5.2 利用简单函数或阶跃函数作逼近

55 定理 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. 则存在一列递增的非负简单函数 $\{\varphi_k\}$ 逐点收敛至 f，即对任意 x 成立

$$\varphi_k(x) \le \varphi_{k+1}(x), \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

证明 首先用一个长宽高都为 N 的正方体去截取原函数，设 Q_N 为以原点为中心、边长为 N 的正方形，即定义

$$F_N(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q_N \quad \& \quad f(x) \le N, \\ N, & x \in Q_N \quad \& \quad f(x) > N, \\ 0, & x \notin Q_N. \end{cases}$$

接着沿着纵轴切以 $1/M$ 的厚度切这个正方体，得到一个 Q_N 的划分，即

$$E_{l,M} = \left\{ x \in Q_N : \frac{l}{M} < F_N(x) \le \frac{l+1}{M} \right\}, \quad 0 \le l \le NM.$$

这样就可以得到所需的简单函数

$$F_{N,M} = \sum_l \frac{l}{M} \chi_{E_{l,M}}(x).$$

取 $\varphi_k = F_{2^k,2^k}$ 即可. 可以验证它满足所需的性质. ■

56 定理 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测. 则存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}$ 满足对任意 x 成立

$$|\varphi_k(x)| \le |\varphi_{k+1}(x)|, \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

同时，$|\varphi_k(x)| \le |f(x)|$.

证明 将 f 拆分成 $f = f^+ - f^-$ 并利用定理55即可. ■

57 **定理** 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测. 则存在一列阶跃函数 $\{\psi_k\}$ 几乎处处点态收敛至 f.

证明 只需要对于 $f = \chi_E$ 的情况证明，之后利用定理56即可. 用开集去逼近可测集 E，并把开集拆成几乎不相交的方块的并，最后将这些方块取小一点，使得它们不相交. 这样就得到了一个阶跃函数，可以使得它和 f 只在一个任意小的集合上不同. ■

5.3 Littlewood 三原理

58 **命题 (Littlewood)**

1. 集合一定程度上都是有限个区间的并.
2. 函数一定程度上都是连续的.
3. 收敛点列一定程度上都是一致收敛的.

评注 对于 [1.]，它的精确表述为:“对于一个可测集 E，若它的测度有限，则总可以找到有限个方块的并，使得它们的对称差的测度充分小.”而对于 [2.] 和 [3.] 的精确描述见之后的内容.

59 **定理 (Egorov)** 设 $\{f_k\}$ 是定义在可测集 E 上的一列可测函数且 $\mu(E) < \infty$，设 f_k 在 E 上几乎处处收敛至 f. 则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$，满足 $\mu(E \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ 且在 A_ε 上 f_k 一致收敛于 f.

证明 首先，不失一般性的，可以假设 f_k 在 E 上收敛. 否则只需要把那些不收敛点去除，剩下的 E 和 f 依然可测，同时在新的条件下取出的闭集 A 依然是原来的 E 的闭子集.

首先定义

$$E_k^n = \{x \in E : \forall j > k, |f_j(x) - f(x)| < 1/n\}.$$

之所以这样定义的 E_k^n 是为了避免极限定义中的“存在 N”. 可以发现 E_k^n 随 k 单调地趋于 E，从而可以取充分大的 k_n，使得 $\mu(E - E_{k_n}^n) < 1/2^n$，即我们只需要去掉很少一部分点即可. 同时对于这个关于 n 的集合列，又可以取足够大的 N，使得即使取之后所有集合的交 $\tilde{A}_\varepsilon$，它们依然占了 E 中的大多数，即 $\mu(E \backslash \tilde{A}_\varepsilon) < \varepsilon/2$. 不难发现，$f_k$ 在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 上是一致收敛的，最后需要做的，只是在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 中取一个只比它小一点点的闭集即可. ■

60 **定理 (Lusin)** 设有限值函数 f 在测度优先的可测集 E 上可测. 则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在闭集 F_ε 满足

$$F_\varepsilon \subset E, \quad \mu(E \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon,$$

且 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续.

评注 注意 $f|_{F_\varepsilon}$ 和 f 在 F_ε 上连续是有区别的，后者要求从 F_ε 以外的点趋于 F_ε 中的点时，连续性条件仍成立.

证明 首先根据定理57可知可以利用一列阶跃函数几乎处处地逼近 f. 同时我们知道阶跃函数是几乎处处连续的. 同时利用定理59，可以找到一个同 E 是否相近的闭集使得 f 一致收敛. 结合这三者，利用 $\varepsilon/3$ 的 trick 即可完成证明. ■