复分析 笔记

任云玮

目录

1 复数

1.1 复数基础

1 命题 设 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则

$$x^2+y^2=|z|^2,\quad x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

评注 在之后的内容中，将略去“$x,y\in\mathbf{R}$”.

2 命题 (三角表示法) $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=|z|$，θ 满足 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$. 在此表示法下，乘法有公式

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

对于除法也是类似的. 同时可以定义乘方为

$$z^n=|z|^n(\cos(n\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg}z)).$$

对于 $n\le 0$ 情况的定义是类似的.

3 定理 (Moivre 公式) $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$

评注 利用 Moivre 公式来证明三角恒等式时，一般可以利用诸如 $\cos\theta=\Re(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，从而避免使用 Eular 公式.

4 命题 [1] $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$

证明 考虑方程 $(z+1)^n=1$ 的根，设它们为 z_k，$k=0,1,\dots,n-1$，其中 $z_0=0$. 有

$$(z+1)^n-1=z(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}).$$

比较两边的一次项系数，得 $z_1\cdots z_{n-1}=(-1)^{n-1}n$. 求解方程，对于 $k\ne 0$，有

$$\begin{aligned}z_k&=\cos\frac{2k\pi}{n}-1+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=-2\sin\frac{k\pi}{n}(\sin\frac{k\pi}{n}-\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{n})\\&=-2\sin\frac{k\pi}{n}(\cos(\pi/2-k\pi/n)+\mathrm{i}\sin(k\pi/n-\pi/2)).\end{aligned}$$

因此成立

$$(-1)^{n-1}n=(-2)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)\quad\Rightarrow\quad\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.\quad\blacksquare$$

5 定理 (Lagrange 等式) 设 $z_i,w_i\in\mathbf{C}$，则

$$|\sum_{j=1}^n z_jw_j|^2=\left(\sum_{j=1}^n|z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|w_j|^2\right)-\sum_{1\le j<k\le n}|z_j\bar{w}_k-z_k\bar{w}_j|^2.$$

[1] 习题 1.12

证明 由于齐次性，所以不妨设 $\sum |w_i|^2 = 1$. 记 $\eta(j,k) = |z_j\bar{w}_k - z_k\bar{w}_j|^2$，显然成立 $\eta(j,k) = \eta(k,j)$，$\eta(k,k) = 0$ 且 $\eta(j,k) = |z_j\bar{w}_k|^2 + |z_k\bar{w}_j|^2 - z_j\bar{w}_k\bar{z}_k w_j - \bar{z}_j w_k z_k \bar{w}_j$. 所以

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j<k\le n} \eta(j,k) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\eta(j,k) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|z_j\bar{w}_j|^2 - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j w_j \bar{z}_k \bar{w}_k \\
&= \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 - \Big|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\Big|^2
\end{aligned}$$

移项后即得 Lagrange 等式. ■

6 推论 (Cauchy 不等式) 设 $z_i, w_i \in \mathbf{C}$，则 $|\sum z_j w_j|^2 \le (\sum |z_j|^2)(\sum |w_j|^2)$.

1.2 复球面

7 命题 (复球面坐标) 考虑球心在坐标原点的复球面，复平面上的点 z 对应的球面上的点 (x,y,u) 为

$$x = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(|z|^2+1)}, \quad y = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

8 命题 (复球面上距离) 考虑球心在坐标原点的复球面，设有限复数 z_1 和 z_2 在复球面上对应的点为 P_1 和 P_2，设复球面的极点为 N，则

$$|P_1P_2| = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}, \quad |P_1N| = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}$$

证明 对于第一个式子，考虑三角形 OP_1P_2，施余弦定理即可. 而第二个式子可以通过令第一个式子中的 $z_2 \to \infty$ 得到. ■