复分析 笔记

任云玮

目录

1 绪论

1.1 复数与复平面

复数相关定义与性质、复平面相关拓扑性质略

1.2 复平面上函数

说明 极限、连续函数相关的定义与性质略，它们在对于一般度量空间中的函数的讨论中已经讨论过了.

1 **定义 (极值)** 对于定义在 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的复函数 f，称 f 在 $z_0 \in \Omega$ 处达到极大值，若对任意 $z \in \Omega$，成立 $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. 对于极小值同理.

评注 由于复数之间是没有大小关系的，所以极值是利用绝对值定义的.

2 **定义 (全纯[1])** 设 f 是定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 的复函数. 称 f 在点 $z_0 \in \Omega$ 处全纯，若存在有限极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

其中 $h \neq 0$ 且 $z_0 + h \in \Omega$. 称 f 在 Ω 上全纯，若它在每个点上全纯. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，则称它是整的.

评注 这一定义和实变量函数的可导在形式上是一致的，但是实际上这一条件相较于可导要强很多. 另外，和、差等函数的相关公式以及链式法则都是成立的，在此略去.

3 **命题 (有限增量公式)** 设 f 在 z_0 处全纯，则 $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + h\psi(h)$，其中 $\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$.

复函数与映射 一个复函数 f 在一定程度上可以看作 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的映射，但是它们仍有着本质的区别. 首先 f 的全纯和 F 的可导是不等价的，考虑非全纯的函数 $f(z) = \bar{z}$，它对应的 F 是无穷次可微的. 另一方面，f 的复导数是一个复数，而 F 的导数则是对应的 Jacob 矩阵. 但是，它们之间仍是有联系的. 它们之间的关联见定理5以及定理6.

4 **定义** 定义 $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

5 **定理 (Cauchy-Riemann 方程)** 设 $f = u + \mathrm{i}v$ 在 z_0 处全纯，则

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \quad 且 \quad f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0). \tag{1}$$

设 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 f 对应的映射，则 F 可微且成立

$$\det J_F(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2.$$

[1] Holomorphic

评注 设 $f=u+\mathrm{i}v$，则 Cauchy-Riemann 方程也可以写作

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

证明 $f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=f(x,y)$，分别让 h 沿实轴和虚轴方向趋于零，得到两偏导数，根据全纯的定义，它们应相等，从而可得到 (1) 中的前者. 同时，将它们相加再除以二即为 $\partial f/\partial z$，同时利用 (2)，可以得到后者.

而关于 F 的可微性，只需注意到若利用 (2)，则有

$$\begin{aligned}&|F(x_0+h_1,x_0+h_2)-F(x_0,y_0)-J_F(x_0,y_0)(h_1,h_2)^\intercal|\\=&\left|f(z_0+h)-f(z_0)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1+\mathrm{i}h_2)\right|=|f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h|.\end{aligned}$$

由全纯的定义可知 F 是可微的. 而最后只需要将 Cauchy-Riemann 方程应用到 J_F 行列式的表达式中即可完成所有的证明. ■

6 **定理 (Cauchy-Riemann 方程)** 设 $f=u+\mathrm{i}v$ 是定义在开集 Ω 上的复函数. 设 u 和 v 连续可微且满足 Cauchy-Riemann 方程 (2)，则 f 在 Ω 上全纯且 $f'(z_0)=\partial f/\partial z$.

证明 利用 $f=u+\mathrm{i}v$，分别对 u 和 v 利用有限增量公式展开即可. ■

7 **定理 (Cauchy-Riemann 方程)** 在极坐标下，Cauchy-Riemann 方程的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

证明 首先将定理**??**的结果代入 (2)，则有

$$\begin{aligned}&(*1)\qquad \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\cos\theta\\&(*2)\qquad \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta=-\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta.\end{aligned}$$

计算 $(*1)\times r\cos\theta+(*2)\times r\sin\theta$ 即得结论中的前式，计算 $(*1)\times r\sin\theta-(*2)\times r\cos\theta$ 即得结论中的后式. ■

8 **定理 (链式法则)** 设 U 和 V 是复平面上的开集，$f:U\to V$ 和 $g:V\to\mathbb{C}$ 从实变量角度可微，定义 $h=g\circ f$，则

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar f}{\partial z},\quad \frac{\partial h}{\partial \bar z}=\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}+\frac{\partial g}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}.$$

证明 TODO

9 **定义 (调和)** 对于二阶连续可导的函数，定义 Laplace 算子为

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}.$$

称定义在复平面上开集 Ω 中的实值函数 f 为调和的，若 $\Delta f=0$ 在 Ω 中成立.

10 命题 $\Delta = 4\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial}{\partial z}$.

11 推论 (调和) 若 f 在开集 Ω 上全纯，则它的实部和虚部分别调和.

12 定义 (Blaschke 因子) 对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 内的复数 w，定义 Blaschke 因子为

$$F : z \mapsto \frac{w-z}{1-\bar{w}z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

13 定理 (Blaschke 因子) Blaschke 因子满足如下性质:

1. $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$，且 F 全纯.
2. $F(0) = w$ 且 $F(w) = 0$.
3. 若 $|z| = 1$，则 $|F(z)| = 1$.
4. $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为双射.

证明 TODO

14 命题 (常数) 设 f 是定义在连通开集 Ω 上的全纯函数，若 $\mathrm{Re}(f)$，$\mathrm{Im}(f)$ 或 $|f|$ 在 Ω 上为常数，则 f 也为常数.

证明 由于连通开集必然是路径连通的，所以只需要证明对应的 $J_f = 0$ 即可. 对于前两者，证明是显然的. 对于 $|f| = C$ 的情况，只需要考虑极坐标的形式并利用定理7即可. ■

1.3 幂级数

15 定理 (幂级数收敛半径) 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，在扩充实数域中存在 R 使得

1. 若 $|z| < R$，则幂级数绝对收敛.
2. 若 $|z| > R$，则幂级数发散.

并且，R 由 Hadamard 公式确定

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

证明 对于固定的 z，取常数 $s \in (|z|, R)$，将 $\sum |a_n||z|^n$ 放缩成幂级数即可. ■

16 定理 设 $\{a_n\}$ 为非零复序列且满足 $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = L$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

17 定义 (指数函数) 对于 $z \in \mathbb{C}$，定义 $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

评注 首先由于 R.H.S 在 $\mathbb{R}$ 中一致收敛至 e^x，所以这一定义和原有的定义是一致的. 与此同时，可以证明对于任意的 R.H.S 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 是收敛的，所以这一定义是良定义的.

18 定义 (三角函数) 对于 $z \in \mathbb{C}$，定义三角函数

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

19 定理 (Euler 公式) 对于 $z \in \mathbb{C}$，成立 $e^{iz} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$.

证明 根据定义17和定义18，不难验证上式的正确性. 需要注意，此两级数相加和换序的正确性是由它们的绝对收敛性保证的. ■

20 定理 幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在它的收敛圆盘内定义了一个全纯函数. 且 f 可以逐项求导，其导数 f' 的收敛半径与 f 的收敛半径相同.

证明 关于 f 和 f' 的收敛半径相同的验证是简单的，下仅证明 f' 的存在性，且它可逐项求导得到，即 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 收敛至 $g(z)$ 而 $\lim_{h \to 0}\{(f(z+h) - f(z))/h - g(z)\} = 0$.

设 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$，$S_N(z)$ 为其前 N 项和而 $E_N(z)$ 为其余项，对于任意的 z，考虑

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = & \left(\frac{S_N(z+h) - S_N(z)}{h} - S_n'(z)\right) \\ & + (S_N'(z) - g(z)) + \left(\frac{E_N(z+h) - E_N(z)}{h}\right).\end{aligned}$$

先让 $N \to \infty$，可以证明后两项趋于零. 之后固定充分大的 N，令 $h \to 0$，则可以证明第一项趋于零. ■

21 推论 幂级数在它的收敛圆盘内定义了一个无穷次可导的复函数，且它的任意阶导数都可以通过逐项求导得到.

22 定义 (解析) 称复函数 f 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 处解析，若存在 $\delta > 0$，在 $O_\delta(z_0)$ 中 f 有幂级数展开.

1.4 曲线积分

23 定义 (参数曲线) 参数曲线是指映射 $z : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. 称它为光滑的，若 z 连续可导并且 $z(t) \neq 0$. 称两个参数曲线 z 和 $\tilde{z} : [c, d] \to \mathbb{C}$ 是等价的，若存在连续可微的从 $[c, d]$ 到 $[a, b]$ 的双射 $s \mapsto t(s)$ 成立 $t'(s) > 0$ 且 $\tilde{z} = z(t(s))$.

称分段光滑的曲线是闭合的，若 $z(a) = z(b)$. 称它为简单的，若 $z(x) = z(y)$ 可以推得 $x = y$ 或 $x, y \in \{a, b\}$. 通常，曲线一词指代分段光滑曲线.

评注 注意，$\mathbb{R}^2$ 中的曲线通常有不止一种参数化方法.

24 定义 (曲线积分) 给定 $\mathbb{C}$ 中的光滑曲线 γ，设 $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是它的参数化而 f 是定义在 γ 上的连续函数，则定义 f 沿 γ 的积分为

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

评注 可以证明 R.H.S 的取值与参数化的方法无关，所以它是良定义的.

25 定义 (曲线长度) 给定 $\mathbb{C}$ 中的光滑曲线 γ，设 $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是它的参数化. 定义 γ 的长度为

$$\mathrm{length}(\gamma)=\int_a^b |z'(t)|\mathrm{d}t.$$

26 定理 连续函数的曲线积分满足如下性质.

1. 线性性.
2. $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=-\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z$.
3. $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z|\le\sup_{z\in\gamma}|f(z)|\times\mathrm{length}(\gamma)$.

27 定理 设连续函数 f 在 Ω 上有原函数 F，γ 是 Ω 中以 w_1 为起点 w_2 为终点的曲线，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=F(w_2)-F(w_1).$$

28 推论 设连续函数 f 在 Ω 上有原函数 F，γ 是 Ω 中的闭曲线，则

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

29 推论 若 f 在区域 Ω 中全纯且 $f'=0$，则 f 为常值.

2 Cauchy 定理及其应用

2.1 Goursat 定理

30 **定理 (Goursat)** 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的开集，$T \subset \Omega$ 是一个三角形，且它的内部也都在 Ω 内. 设 f 在 Ω 中全纯，则

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

评注 这一定理同推论28最大的区别在于，它并不要求 f 的原函数，甚至相反的，它要求 f 全纯. 另外，如果将条件中的三角形换成长方形，结论依然是成立的，只需要将它分割成两个三角形再应用此定理即可证明.

证明 通过连接各边中点来四分三角形. 选取其中 $|\int f\mathrm{d}z|$ 最大者作为下一个三角形，使得成立 $|I_0| \le 4^n|I_n|$，即用沿着小三角形的积分来估计原积分. 另一方面，这些小三角形及其内部构成了一个紧集套，设它收缩至 z_0. 利用在 z_0 处展开 f 至二次项以及推论28来估计 I_n. ■

2.2 局部原函数存在性与圆盘上的 Cauchy 定理

31 **定理 (局部存在性)** 开圆盘上的全纯函数在该圆盘上有原函数.

证明 不失一般性的，可以假设圆盘以原点为中心. 分为两步完成证明，首先定义一个无歧义的 $F(z)$，接着证明 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的原函数.

1. 选取连接原点和 z 的直角路径，定义沿该路径积分的结果为 $F(z)$.
2. 通过路径积分的相消和定理30，证明 $F(z+h)-F(z)$ 即为沿着连接两点的直线段积分的结果. 再进行进一步的估计与证明. ■

评注 这一定理表明对于全纯函数，至少在局部永远是有原函数的.

32 **定理 (圆盘上的 Cauchy 定理)** 设 f 在圆盘上全纯，则对于任意圆盘中的闭曲线 γ，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

33 **推论** 设 f 在开集 Ω 上全纯，圆 C 及其内部都在 Ω 中，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

评注 实际这些定理对于包括锁孔形在内的所有可以方便定义内部的“简单”图形都成立.

2.3 利用 Cauchy 定理积分

通常可以总结为如下步骤:

1. 选取恰当的全纯函数 f.

2. 接下来选取恰当的闭曲线 γ，在其上对 f 应用推论33.

3. 将 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ 中 γ 拆分成不同的段，使得在其上的积分或互相抵消，或可以得出结果，或有原所求积分的形式.

4. 整理之前的结果，进行诸如取极限等操作并得出结论.

各个步骤之间的顺序并非一定的.

2.4 Cauchy 积分公式

34 定理 (Cauchy) 设 f 在开集 Ω 上全纯且 Ω 包含圆盘 D 的闭包. 记 C 为 D 的边界且取向为正，则对于任意 $z \in D$，成立

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

评注 这一定理给出了全纯函数在某个点的函数值的曲线积分表达式.

证明 考虑将 z 排除的锁孔形 Γ_ε，ε 为锁孔半径. 则 $F(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)$ 在 Γ 上全纯，所以对应的沿锁孔形的积分为零. 接下来让走廊的宽度趋于零，由于连续性对应积分的变化也趋于零. 于是就有

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C' 为锁眼，即以 z 为圆心，半径为 ε 的圆. 同时，对右侧做变量代换，令 $\zeta = z + \varepsilon e^{i\theta}$，同时令 $\varepsilon \to 0$，可得 $\mathrm{R.H.S} = 2\pi\mathrm{i}f(z)$. ■

35 推论 (Cauchy) 设 f 是在开集 Ω 上的全纯函数，则 f 在复数含义下无限次可导. 并且，如果 $C \subset \Omega$ 是一个内部也在 Ω 中的圆，则对于 C 内部的点，成立

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

证明 对 n 施归纳法即可. ■

评注 这一命题描述了全纯函数的正则性. 它意味着对于全纯函数而言，积分和微分实际上上一样的，例如如果要证明一个函数复数意义下可导，只需要证明它存在原函数即可，根据此命题自然而然就得出了该函数的全纯.

36 推论 设 f 在开集 Ω 上全纯，D 是以 z_0 为圆心的半径为 R 圆盘，且它的闭包在 Ω 内. 则成立

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!\|f\|_\infty}{R^n}.$$

37 定理 (幂级数展开) 设 f 在开集 Ω 上全纯. D 是以 z_0 为圆心的圆盘且它的闭包在 Ω 内，则 f 在 z_0 处有幂级数展开，即对任意 $z \in D$ 成立

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

评注 这一定理表明全纯的条件在很大程度上已经意味着幂级数展开的存在性. 尤其是对于整函数，这一定理表明它在整个 $\mathbb{C}$ 上有幂级数展开.

证明 方法在于首先应用 Cauchy 公式得到 $f(z)$ 的积分表达式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

考虑被积函数，利用一致收敛的几何级数来得到级数的形式，同时化出 $(z - z_0)^n$，具体方法为

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n. \quad \blacksquare$$

38 推论 (Liouville) 若整函数 f 有界，则 f 为常值函数.

39 推论 所有非常值复多项式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有一个根.

证明 只需注意到如果 P 没有根，则 $1/P$ 是一个有界整函数即可.

40 推论 任意 $n \geq 1$ 阶多项式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有恰 n 个根. 且若设这些根为 $w_1, \ldots, w_n$，则 P 可被分解为

$$P(z) = a_n (z - w_1) \cdots (z - w_n).$$

证明

41 定理 设 f 在区域 Ω 上全纯且在一列聚点在 Ω 中的点处取值为零，则 $f \equiv 0$.

证明 TODO

42 推论 设 f 和 g 在区域 Ω 上全纯且 $f(z) = g(z)$ 对于 Ω 的某个非空开子集中的任意 z 成立，则在 Ω 上成立 $f \equiv g$.

2.5 应用

43 定理 (Morera) 设 f 是开圆盘 D 上的连续函数，并且对于包含于 D 中的三角形 T，成立

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

则 f 全纯.

证明 由于复变函数的正规性，所以我们只需要证明 f 的原函数 F 全纯即可. 我们可以按照定理31中的方法构造处 F，再验证一下即可. ■

44 定理 (级数) 设 $\{f_n\}$ 是一列全纯函数. 设在 Ω 的任意紧子集中，它们一致收敛于 f，则 f 在 Ω 上全纯.

证明 利用定理43即可. ■

45 定理 设 $\{f_n\}$ 是一列全纯函数. 设在 Ω 的任意紧子集中，它们一致收敛于 f，则 $\{f'_n\}$ 在任意 Ω 的紧子集中一致收敛于 f'. [2]

评注 只需要反复应用定理44以及此命题，就可以证明任意阶导数的一致收敛性.

证明 用 $|f_n - f|$ 来估计 $|f'_n - f'|$ 即可. 若设 $\Omega_\delta = \{z \in \Omega \mid \overline{D_\delta}(z) \subset \Omega\}$ 为所有离边界距离不小于 δ 的点全体，可以证明成立不等式

$$\sup_{z\in\Omega_\delta} |F'(z)| \le \frac{1}{\delta} \sup_{z\in\Omega} |F(z)|. \quad ■$$

46 定理 (含参积分) 设 $F(z,s)$ 定义在 $\Omega \times [0,1]$ 上，其中 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的开集. 设 F 满足如下条件

1. 对任意固定的 s，$F(z,s)$ 全纯.

2. F 在 $\Omega \times [0,1]$ 上连续.

则如下定义在 Ω 上的函数 f 全纯，

$$f(z) = \int_0^1 F(z,s)\mathrm{d}s.$$

[2] f' 的存在性由定理44.

证明 可以利用定理43来证明，但这样需要验证积分换序的条件. 为了避免这件事，我们可以考虑 Riemann 积分的定义，定义

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(z, k/n).$$

这样我们就将问题化归为定理44条件的验证. ■

47 定理 (对称原理[3]) 设 f^+ 和 f^- 是分别定义在 Ω^+ 和 Ω^- 上的全纯函数，且可以连续地沿拓到 I 上且成立 $f^+(x) = f^-(x)$ 对任意 $x \in I$ 成立，则按如下定义的函数 f 在 Ω 上全纯

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z), & z \in \Omega^+, \\ f^+(z) = f^-(z) & z \in I, \\ f^-(z), & z \in \Omega^-. \end{cases}$$

48 定理 (Schwarz 镜像原理) 设 f 在 Ω^+ 上全纯且其在 I 伤的连续沿拓为实函数. 则存在在整个 Ω 上全纯函数 F，在 Ω^+ 上成立 $F = f$.

2.6 说明

对于全纯函数而言，微分和积分是一体的. 如果要证明 f 全纯，则只需要构造处它的原函数 F 即可，则根据推论35可知，f 是全纯的. 另一方面，若 f 全纯，则可以根据 Goursat 定理等，得到关于它的积分的诸多性质. 而 Cauchy 定理则意味着，除了在实函数中常见的级数展开，还可以使用积分来表示 f 在某一点的值.

如果要证明函数 f 在某个区域 Ω 内的某个性质，通常可以考虑通过逐点的取一个小圆盘的方式来证明，另外，如果这个函数全纯的话，则一般只需要取它的一个小开集即可.

[3]关于定理中的记号，见书 P58.

3 亚纯函数与对数函数

3.1 零点与极点

49 **定义 (奇点)** 对于复函数 f，称 z_0 为 f 的奇点，若 f 在 z_0 的某个去心领域内定义，但在 z_0 处无定义.

50 **定理** 设不恒为零的复函数 f 在区域 Ω 上全纯且 $z_0 \in \Omega$ 为其零点. 则在 z_0 的某个领域 $U \subset \Omega$ 中，存在一个在 U 中无零点的全纯函数 g，以及唯一的正整数 n，使得 $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.

证明 幂级数展开. ■

51 **定义 (极点)** 设 f 在 z_0 的去心领域中有定义. 考虑函数 $g = 1/f$，定义它在 z_0 处的值为 0. 若 g 在该领域中全纯，则称 z_0 为 f 的极点.

52 **定理** 设 $z_0 \in \Omega$ 是 f 的极点，则在它的某个领域中，存在一个无零点的全纯函数 h，以及唯一的正整数 n，使得 $f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$.

53 **定理** 设 z_0 是 f 的 n 阶极点，则在 z_0 的领域中存在全纯函数 G，使得

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z).$$

称 $G(z)$ 前的项为 f 在 z_0 处的主部，称 a_{-1} 为留数，计作 $\operatorname{res}_{z_0} f$.

证明 展开 $h(z) = f(z)(z - z_0)^n$ 的 L.H.S 即可. ■

54 **定理 (留数的计算)** 设 z_0 是 f 的 n 阶极点，则

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z).$$

取 $n = 1$，即为

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

3.2 留数公式

55 **定理 (留数公式)** 考虑开集 Ω 及它内部的圆 C，设 C 中的 z_0 是函数 f 的极点，除该点外 f 全纯. 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{res}_{z_0} f. \tag{3}$$

评注 此定理对于任何玩具曲线都成立，同时如果其中有不止一个极点的话，只需要把它们的留数相加即可.

证明 首先取锁孔形并进行一系列常规操作，可得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z.$$

利用定理53将 $f(z)$ 在极点展开. 沿着 C_ε 积分 $G(z)$ 的结果为零. 同时，对于常值函数 $f = a_{-k}$ 施各阶 Cauchy 积分定理，可知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-z_0} = a_{-1}, \quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} = 0.$$

从而命题得证. ■

56 命题

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \pi.$$

证明 令 $f = 1/(1+z^2)$，取以原点为圆心，半径为 R 的在上半平面的半圆. ■

57 命题 设 $0 < a < 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

58 命题

$$\int_0^1 \log(\sin\pi x)\mathrm{d}x = -\log 2.$$

3.3 奇点与亚纯函数

59 定理 (Riemann) 设 f 在开集 Ω 上除点 z_0 外全纯. 若 f 在 $\Omega\backslash\{z_0\}$ 上有界，则 z_0 是可去奇点.

证明 定义全纯函数

$$f_*(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

再证明对于 $z\in\Omega\backslash\{z_0\}$，$f(z) = f_*(z)$. 具体证明只需采用和定理34中类似的方法即可，对于固定的 z，考虑将 z_0 和 z 排除的双锁孔形，利用 Cauchy 定理并对饶 z_0 的积分做一个估计. 在估计的时候注意，积分的路径是绕 z_0 的小圆，但是分母上的却是和 z_0 不相等的 z. ■

60 推论 设 z_0 是 f 的孤立奇点. z_0 是极点的充要条件为，当 $z\to z_0$ 时，$|f(z)|\to\infty$。

评注 $|f(z)|\to\infty$ 保证了 f 不会剧烈震荡.

证明 考虑 $1/f$ 即可. ■

61 定理 (Casorati-Weierstrass) 设 f 在去心圆盘 $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ 上全纯且 z_0 是 f 的必要奇点. 则 $D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ 在 f 映射下的像集在复平面中稠密.

证明 反证法. 假设存在 $w \in \mathbb{C}$ 周围没有 $f(z)$，则函数

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

全纯. 利用定理59及其推论可以证明 z_0 或是 f 的可去奇点，或者极点，与条件矛盾. ■

62 定义 (亚纯) 称函数 f 在开集 Ω 中亚纯，若存在点列 $\{z_k\}$ 在 Ω 中无聚点，且

1. f 在 $\Omega \backslash \{z_0, z_1, \dots\}$ 上全纯；
2. z_k 是 f 的奇点.

评注 也可以在扩充复平面上讨论亚纯函数，讨论 $f(z)$ 在无穷远处的行为，即讨论 $f(1/z)$ 在原点处的行为.

63 定理 扩充复平面上的亚纯函数都是有理函数.

证明 依次取出 f 在极点处的主部. 证明剩余的部分为整有界函数，从而根据推论38，剩余的部分为一常数. ■

64 定义 (Riemann 球) TODO

3.4 辅角原理及其应用

65 引理 设 f 在开集 Ω 上亚纯，则 f 的零点和极点都是 f'/f 的简单极点，且其留数为 $\pm n$，其中 n 为对应零点/极点的阶数.

证明 设 z_0 是零点，则根据定理50可以将 f 分为

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

利用这一形式直接证明即可. 对于极点而言，证明是类似的. ■

66 定理 (辅角原理) 设 f 在一个包含了圆 C 及其内部的开集上亚纯. 若 f 在 C 上无零点无极点，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = (C \text{ 内 } f \text{ 的零点个数}) - (C \text{ 内 } f \text{ 的极点个数}).$$

其中计算个数时需要考虑重数. 这一定理对于任意玩具曲线都是成立的.

评注 也可以反过来使用，利用积分的结果来证明零点/极点的存在性. 另外，这一定理也意味着该积分的结果一定是整数，常常可以利用这一性质以及诸如连续性的性质来推出某些矛盾或者说明它是常量. 同时，如果我们给 f 加上一个常数 w，被积函数的分子并不会改变，同时我们得到了一个参量 w.

证明 利用前述引理和留数定理即可. ■

67 定理 (Rouchè) 设 f 和 g 在包含圆 C 及其内部的开集上全纯，且对于任意 $z \in C$，成立 $|f(z)| > |g(z)|$. 则在 C 内部，f 和 $f+g$ 的零点个数相同.

评注 虽然说此定理的结论说的是零点的个数，但是通过恰当的选取 g，它可以用于描述 f 的值域. 注意，$f(z)+g(z)=0$ 等价于 $f(z)=-g(z)$.

证明 定义

$$f_t(z) = f(z) + tg(z), \quad t \in [0,1].$$

同时定义 n_t 为 $f_z(t)$ 的零点个数. 利用辅角定理可以得出 n_t 的积分表达式，证明它连续，即可得 n_t 为常数. ■

68 定义 (开映射) 称一个映射为开映射，若它将任意定义域内的开集映成一个开集.

69 定理 (开映射) 若 f 在区域 Ω 上全纯且非常值，则它为一个开映射.

证明 即对于 w_0 周围的任意 w，证明 $g(z) = f(z) - w$ 有零点. 将 g 写为

$$g(z) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) = F(z) + G(z),$$

并利用定理67即可. 而为了为使之满足 Rouchè 定理的条件，可以先取一个充分小的 ε，使得可以在 w_0 周围取出一个圆 C 使得在 C 上满足 $|F(z)| > \varepsilon$. 同时注意到 G 实际上与 z 无关，所以只需要利用连续性取离 w_0 足够近的 w 即可. ■

70 定理 (最大模原理) 设 f 是区域 Ω 中的非常值全纯函数，则 f 在 Ω 中取不到最大值.

证明 反证法，假设取到最大值，会与它是一个开映射矛盾. ■

71 推论 记区域 Ω 的闭包为 $\bar{\Omega}$. 若 f 在 Ω 上全纯且在 $\bar{\Omega}$ 上连续，则

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \le \sup_{z\in\bar{\Omega}\setminus\Omega} |f(z)|.$$

评注 此命题表示在对 Ω 中的值作估计的时候，常可以考虑 $\partial\Omega$ 上的值. 例如利用 $\partial D_R(0)\,(R\to\infty)$ 上的值来估计 $\mathbb{C}$ 中的值. 在应用的时候注意，虽然 $|f|$ 常常不是全纯的，但是此命题结论中包含了模运算，所以只要 f 全纯就够了. 可以用这种方法来证明 Liouville 定理[4].

[4]证明 $g(z) = (f(z) - f(0))/z \equiv 0$

3.5 同伦与单连通区域

72 定义 (同伦) 设 γ_0 和 γ_1 是开集 Ω 上的有共同端点的曲线. 设 $\gamma_0(t)$ 和 $\gamma_1(t)$ 分别是它们在 $[a,b]$ 上的参数化. 称它们是同伦的，若对于任意 $0 \leq s \leq 1$，存在与它们同端点的曲线 $\gamma_s \subset \Omega$，设它在 $[a,b]$ 上有参数化 $\gamma_s(t)$，对任意 $t \in [a,b]$，成立

$$\gamma_s(t)|_{s=0} = \gamma_0(t), \quad \gamma_s(t)|_{s=1} = \gamma_1(t),$$

并且 $\gamma_s(t)$ 关于 s 和 t 连续.

73 引理 对于不相交的紧集 K 和闭集 F，它们之间的距离 $d(K,F) > 0$.

74 定理 若 f 在开集 Ω 上全纯，则对任意同伦的曲线 γ_0 和 γ_2，成立

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

证明 总体的思路是对于两条靠的足够近的曲线，证明等式成立，如果“近”的概念是一致的，那么即完成了证明. 具体证明步骤如下:

1. 首先注意到 $F(s,t) = \gamma_s(t)$ 是一个在紧集上的连续函数.
2. 利用引理73证明可以用统一大小的圆盘覆盖所有曲线而不超出 Ω.
3. 利用一直连续性取出离得足够近的两条曲线以使得可以用足够小的一系列圆盘覆盖它们两者.
4. 在圆盘相交的部分中以及端点上取点，将曲线积分化为分段曲线积分的求和.
5. 利用圆盘上的原函数的存在性定理31得出差分式.
6. 相加相消得出结论. ■

75 定义 (单连通) 称复平面上的区域 Ω 是单连通的，若任意 Ω 内的两天同端点曲线同伦.

76 定理 任意单连通区域上的全纯函数有原函数.

77 定理 (Cauchy) 若 f 在单连通区域 Ω 上全纯，则对于任意 Ω 内的闭曲线 γ 成立

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

3.6 复对数

说明 本节的目的在于，对于非零复数 z，定义对应的对数. 首先，按照 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ 以及实对数的运算方法，很自然地会尝试定义

$$\log z = \log(re^{\mathrm{i}\theta}) = \log r + \mathrm{i}\theta. \tag{4}$$

但是我们会发现 $\log z$ 并非是单值的，所以我们可以考虑别的方法. 注意到我们实际上希望的是对数函数是一个单值的函数，且它是自然指数的逆，最好还是全纯的. 首先我们证明在一定条件下，这样的函数是存在的（定理78）. 接下来对于某个特殊条件下的这一函数讨论. (定义79).

78 定理 设 Ω 为单连通区域且 $1 \in \Omega$ 而 $0 \notin \Omega$. 则在 Ω 中存在 $F(z) = \log_\Omega(z)$ 为对数的一支，成立

1. F 在 Ω 上全纯.
2. $e^{F(z)} = z$ 对 $z \in \Omega$ 成立.
3. $F(r) = \log r$ 对 1 附近的实数成立.

即 $\log_\Omega(z)$ 的每一支都是标准对数的一个沿拓.

评注 考虑 (4) 的实际问题在哪里. 实际上对于多值的问题，我们可以通过强行规定一个 θ 的方式，使得它变成单值的，这样它也几乎可以满足我们所希望有的性质. 但是如果这样做的话，考虑绕单位圆一圈回到 1，若它是全纯的，则会发现 $\log 1$ 并非单值的. 出于这样的考虑，此定理限制定义了对数的集合，使得不会出现这样的情况.

证明 首先定义 $F(z)$ 为从 1 到 z 路径积分 $1/z$ 的结果，显然它是对数的一支. 并且容易验证 [1.] 成立. 对于 [2.]，只需要证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(ze^{-F(z)}) = 0$$

即可. 而对于 [3.]，将路径取在实轴上即可.

这一证明也给出了在固定 Ω 后，确定对数的某一支的值的具体方法. ■

79 定义 (主支) 定义对数的主支为其在 $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{(-\infty, 0\}$ 上的分支.

80 定理 (主支) 复对数的主支有表达式 $\log z = \log r + \mathrm{i}\theta$，其中 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$，$|\theta| < \pi$.

评注 注意，一般而言，$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$. 同时，对于 $|z| < 1$，成立 Taylor 展开

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

证明 只需要在实轴上从 1 到 r 的线段以及从 r 到 $re^{\mathrm{i}\theta}$ 的圆弧组成的路径作积分即可. ■

81 **定义 (指数)** 对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$，定义 $z^\alpha=e^{\alpha\log z}$.

82 **定理** 若 f 是一个在单连通区域 Ω 内无零点的全纯函数，则存在 Ω 上的全纯函数 g，成立

$$f(z)=e^{g(z)}.$$

评注 在实数域中的任意元素 x 都可以写成 e^y 的形式，这一命题是这一事实在复数域中的形式. 由于对数函数的特殊性，所以它表达方式如上. 注意，虽然那一同实数域中完全相同的形式的结论也显然是正确的，但是考虑到我们一般研究的是复函数而不是单独某个复数，所以该形式并没有多少实际上的意义.

证明 利用路径积分定义 g，通过求导证明 $f(z)=e^{g(z)}$. ■

3.7 Fourier 级数与调和函数

83 **定理** 设 f 在圆盘 $D_R(z_0)$ 上全纯，则 f 的在 z_0 处的幂级数展开的系数满足

$$a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta, \tag{5}$$

其中 $n\geq 0$，$0<r<R$. 且对于 $n<0$，成立

$$0=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{6}$$

证明 对于 (5)，只需要对 $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$ 施 Cauchy 定理即可. 而对于 (6)，仍成立

$$\mathrm{R.H.S}=\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

而此时被积函数全纯，由 Cauchy 积分定理可知该积分为零. ■

84 **推论 (中值)** 设 f 在 $D_R(z_0)$ 上全纯，则对任意 $0<r<R$，成立

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

证明 $a_0=f(z_0)$. ■

85 **推论** 设 f 在 $D_R(z_0)$ 上全纯，设 $u=\mathrm{Re}(f)$，则对任意 $0<r<R$，成立

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

评注 由于任意圆盘上的调和函数都是某个全纯函数的实部，所以上述性质对任意调和函数也成立. 这一定理可以结合

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

这一事实来使用，尤其是在有 $\log|f|$ 形式的问题中.

4 Fourier 变换

5 整函数

说明 本节默认 f 不恒为零.

5.1 Jensen 公式

86 **定理 (Jensen)** 设 Ω 是包含 $\bar{D}_R$ 的开集，f 在 Ω 中全纯且 $f(0)\neq 0$. 同时对 $z\in C_R$，$f(z)\neq 0$. 记 $z_1,\ldots,z_N$ 为 f 在 D_R 中的零点，其中每个零点被计数其重数次，则

$$\log|f(0)| = \sum_{k=1}^{N}\log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

评注

证明 首先注意到如果 f_1 和 f_2 满足 (**??**)，则 f_1f_2 也满足. 所以我们考虑将 f 拆分成更加简单的形式并分别证明. 由于全纯，所以我们可以将它拆成

$$f(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_N)g(z).$$

其中 g 在 $\bar{D}_R$ 无零点，之后对于 g 和形如 $x-w$ 的函数分别证明 (**??**).

对于无零点的 g，要证的即为

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

利用定理82和推论85的评注即可证明.

而对于形如 $z-w$ 的函数，其中 w 是圆盘内的任意一点，它在 w 处有唯一零点，所要证的式子即为

$$\log|w| = \log\left(\frac{|w|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Re^{\mathrm{i}\theta}-w|\mathrm{d}\theta \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^{2\pi}\log|e^{\mathrm{i}\theta}-a|\mathrm{d}\theta = 0,$$

其中 $a=w/R$. 作变量代换，用 $-\theta$ 替换 θ，则上式等价为

$$\int_0^{2\pi}\log|1-ae^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta = 0.$$

利用和之前相同的方法证明即可. ∎

87 **引理** 条件同前，设 $z_1,\ldots,z_N$ 是 f 在 D_R 中的零点，设 $\mathfrak{n}(r)$ 为 f 在 D_r 中的零点个数，则

$$\int_0^R \mathfrak{n}(r)\frac{\mathrm{d}r}{r} = \sum_{k=1}^{N}\log\left|\frac{R}{z_k}\right|.$$

证明 利用

$$\log\left|\frac{R}{z_k}\right| = \int_{|z_k|}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{r},\quad n_k(r) = (r > |z_k|)?. \quad \blacksquare$$

88 **推论** 条件同前. 此推论描述了零点和函数值大小之间的关系.

$$\int_0^R \mathfrak{n}(r)\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta - \log|f(0)|.$$

5.2 有限阶函数

89 **定义** 设 f 是整函数. 若存在正数 ρ 和正常量 A 和 B，使得对任意 $z\in\mathbb{C}$ 成立

$$|f(z)| \le Ae^{B|z|^\rho}, \tag{8}$$

则称 f 增长率的阶 $\le\rho$. 定义 f 增长率的阶（简称阶）为

$$\rho_f = \inf\rho.$$

其中 ρ 取遍所有满足 (**??**) 的值.

评注 阶描述了整函数在无穷远处的行为，如果它的阶为 ρ，那么在无穷远处，它的增长就类似于 $e^{|z|^\rho}$. 要证明某个函数的阶为 ρ，即证明

$$0 < \lim_{z\to\infty}\frac{|f(z)|}{e^{B|z|^\rho}} < \infty.$$

90 **定理 (等价定义)** ρ 是整函数 f 的阶的充要条件为

$$\rho = \limsup_{R\to\infty}\frac{\log(\log\|f\|_{\infty,D_R})}{\log R}.$$

证明 首先证明充分性. 记 $M(r) = \|f\|_{\infty,D_r}$，

$$\rho = \limsup_{r\to\infty}\log_r\log M(r) = \lim_{R\to\infty}\sup_{r>R}\log_r\log M(r).$$

按照定义，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $R_0>0$，使得对任意 $R>R_0$ 成立

$$\rho-\varepsilon < \sup_{r>R}\log_r\log M(r) < \rho+\varepsilon. \tag{9}$$

从而对于任意的 $r>R_0$，有

$$\log_r\log M(r) < \rho+\varepsilon \quad\Rightarrow\quad M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

由于 $M(r)$ 在 D_{R_0} 上有界，所以存在 $A>0$ 使得对任意 r 成立

$$M(r)\le Ae^{Br^\rho} \quad\Rightarrow\quad |f(z)|\le Ae^{B|z|^\rho},\quad |z|=r.$$

所以 f 的阶 $\le\rho$. 同时根据 (**??**)，可知它就是 f 的阶.

而对于必要性 TODO

91 定理 设整函数 f 的阶 $\le \rho$，则

1. 对于充分大的 r 成立 $\mathfrak{n}(r) \le Cr^\rho$.
2. 设 $z_1, z_2, \ldots$ 为 f 的零点且 $z_k \neq 0$，则对任意 $s > \rho$，成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty.$$

评注 如果有 $f(0) \neq 0$, [1.] 中的“充分大”的要求可以去掉. 这一定理用于证明 定理??条件中的收敛性.

证明 对于 [1.]，不妨设 $f(0) \neq 0$. 考虑推论??和定义??，可知

$$\text{R.H.S} \le CR^\rho - \log|f(0)|, \quad \text{L.H.S} \ge \int_{R/2}^{R} \mathfrak{n}(r) \frac{\mathrm{d}r}{r} \ge \mathfrak{n}(R/2) \log 2.$$

而对于充分大的 R，$\log|f(0)|$ 项可忽略.

对于 [2.]，首先由于有界点列必有聚点而 f 不恒为零，所以可知在单位圆中至多有有限个零点，所以我们只需要考虑 $|z_k| \ge 1$ 的零点即可. 将零点按照所处于哪一个 $2^j \le |z_k| < 2^{j+1}$ 来分类并做恰当的放缩即可. ■

5.3 无穷乘积

92 定理 若 $\sum |a_n| < \infty$，则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛. 乘积收敛于零当且仅当其中一个某一项为零.

评注 这一定理的后半部分给出了确定一个用无穷乘积表示的函数的零点的方式.

证明 正如同常见的一样，使用对数将乘积转化为求和. 由于 $\{a_n\}$ 绝对收敛，所以不是一般性的，可设 $|a_n| < 1/2$. 所以可以对 $1 + a_n$ 取对数主支，即可以有

$$\prod_{n=1}^{N}(1 + a_n) = \prod_{n=1}^{n} e^{\log(1+a_n)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \log(1 + a_n)\right).$$

而由于 $|\log(1 + a_n)| \le 2|a_n|$ 而 $\{|a_n|\}$ 收敛，所以 $\{\log(1 + a_n)\}$ 也绝对收敛，设其收敛于 B. 由于 e^z 的连续性，可知该无穷乘积收敛于 e^B. 这也意味着若 $1 + a_n \neq 0$，则乘积的结果不为 0. ■

93 定理 设 $\{F_n\}$ 是一列开集 Ω 上全纯函数. 设存在收敛的正项级数 $\{c_n\}$，使得对任意 $z \in \Omega$ 成立

$$|F_n(z) - 1| \le c_n.$$

则有

1. $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ 在 Ω 上一致收敛于全纯函数 $F(z)$.

2. 若任意 $F_n(z)$ 无零点，则
$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)}.$$

评注 关于 [2.]，考虑级数情况的求导以及对数将乘法化为加法的性质，即可明白为什么会成这样的形式. 这一定理给出了一个证明无穷乘积形式的函数为全纯函数的方法.

证明 和之前的证明相似，我们可知它确实一致收敛.

94 定理
$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

证明 整体思路是证明 $\Delta(z) = \mathrm{L.H.S}(z) - \mathrm{R.H.S}(z)$ 为一个有界整函数. 具体而言，首先分别证明两侧的周期性，并描述在原点处极点的性质，从而得出想要的结论，注意对于 R.H.S，成立
$$\mathrm{R.H.S} = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \frac{1}{z+n}. \quad \blacksquare$$

95 定理
$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

证明 首先注意到
$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f}{g}\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right).$$
而对于 f'/f 的形式，我们可以有定理??. 证明 $(\mathrm{L.H.S}/\mathrm{R.H.S})' = 0$ 即可. $\blacksquare$

5.4 Weierstrass 无穷乘积

96 定义 (自然因子) 对于正整数 k，定义自然因子
$$E_0(z) = 1 - z, \quad E_k(z) = (1-z)e^{z+z^2/2+\cdots+z^k/k}.$$

评注 对于 $|z| < 1$，成立
$$E_k(z) = \exp\left(\log(1-z) + \sum_{n=1}^{k} \frac{z^n}{n}\right) = \exp\left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right).$$
在对自然因子进行估计的时候，上式是常用的. 另外，常见的会对于自然因子的变量按照 1/2 来进行分类，通常是 z/a_n 的形式，分别考虑 D_{2R} 外和内的 $\{a_n\}$，其中 $R = |z|$.

具体来说，对任意 R，分别对 $|z|=R$ 的 z 证明，在此过程中 R 即为一个常量，此时按照 $2R$ 将 a_n 分类. 同时，很多时候不等式中的常量 c 是放缩后等比数列求和的结果，即它们与 z 无关，从而上述按照 $|z|=R$ 分类再拼起来的所取的 c 是可以是一致的.

97 引理 (自然因子估计) 设 $|z|\le 1/2$，则存在 $c>0$ 成立 $|1-E_k(z)|\le c|z|^{k+1}$. 其中 c 的选取与 k 无关.

证明 首先，由于 $|z|\le 1/2$，有 $E_k(z)=\exp(\log(1-z)+\sum_{n=1}^{k} z^k/k)=e^w$. 将 log 后级数展开相消得

$$|w|=\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right|=|z|^{k+1}\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{z^{n-k-1}}{n}\right|\le 2|z|^{k+1}.$$

因为 $|w|<1$，所以成立

$$|1-E_k(z)|=|1-e^w|\le 2|w|\le 4|z|^{k+1}. \quad \blacksquare$$

98 定理 设 $\{a_n\}$ 为任意复数序列且满足当 $n\to\infty$ 时 $|a_n|\to\infty$. 存在整函数 f，在且仅在 $z=a_n$ 处取值为零. 任意其他满足条件的函数都有形式 $f(z)e^{g(z)}$，其中 g 为整函数。

评注 这一定理表明，对于给定的零点和重数，可以构造出满足这些条件的整函数 (??). 这样构造的思路来源于 sin 的乘积展开，利用自然因子使得它收敛.

证明 对于定理的后半部分，只需要考虑 f_1/f_2 即可. 设 $\{a_n\}$ 中仅有 m 项为零，仍用 $\{a_n\}$ 表示去除了这些项以后的序列. 定义 Weierstrass 乘积为

$$f(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n(z/a_n), \tag{10}$$

下面通过考虑它在半径为 R 的圆盘内的行为来证明，即证明它在任意 D_R 内收敛且在且仅在 0 和 $a_n\in D_R$ 处有零点. 首先考虑满足 $|a_n|<2R$ 的因子，它们只有有限个，所以取出它们不影响收敛性. 它们组成的乘积满足要求. 而对于满足 $|a_n|\ge 2R$ 的因子，对于 $z\in D_R$，有 $|z/a_n|<1/2$，根据引理??，有估计 $|1-E_n(z/a_n)|\le c|z|^{n+1}$. 所以可知

$$\prod_{|a_n|\ge 2R}E_n(z/a_n)$$

收敛于一个全纯函数且在 D_R 内无零点，从而 f 满足要求. $\blacksquare$

5.5 Hadamard 分解定理

99 引理 (自然因子估计)

$$|E_k(z)|\ge e^{-c|z|^{k+1}}, \quad (|z|\le 1/2)$$
$$|E_k(z)|\ge |1-z|e^{-c'|z|^k}, \quad (|z|\ge 1/2).$$

100 引理 设 $\rho < s < k+1$，其中 ρ 为阶，$k=[\rho]$. 设 U 为以 $a_n \neq 0$ 为圆心，$|a_n|^{-k-1}$ 的圆盘的并，则对于 $z \notin U$，成立

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n)\right| \geq e^{-c|z|^s}.$$

证明 我们对于任意固定的 z 证明此结论，并在必要时指出证明中的估计中的常量是与 z 无关的. 取定 z，按照常见的思路，将 a_n 按照是否在 $D_{2|z|}$ 内分类，即

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n) = \left(\prod_{|a_n|<2|z|} E_k(z/a_n)\right)\left(\prod_{|a_n|\geq 2|z|} E_k(z/a_n)\right),$$

并对两式分别估计. 首先考虑第二部分，根据引理**??**，成立

$$\begin{aligned}\left|\prod_{|a_n|\geq 2|z|} E_k(z/a_n)\right| &= \prod_{|a_n|\geq 2|z|} |E_k(z/a_n)| \\ &\geq \prod_{|a_n|\geq 2|z|} e^{c|z/a_n|^{k+1}} \\ &= \exp\left(-c|z|^{k+1}\sum_{|a_n|\geq 2|z|}|a_n|^{-k-1}\right).\end{aligned}$$

其中 $|a_n|^{-k-1} = |a_n|^{-s}|a_n|^{s-k-1}$. 而由于 $\rho_0 < s$，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{-s} = c_1 < \infty$. 同时由于 $s < k+1$，所以对于 $|a_n| \geq 2|z|$ 有 $|a_n|^{s-k-1} \leq 2^{s-k-1}|z|^{s-k-1}$. 从而成立

$$\sum_{|a_n|\geq 2|z|}|a_n|^{-k-1} \leq 2^{s-k-1}c_1|z|^{s-k-1}.$$

因此对于第二部分有估计

$$\left|\prod_{|a_n|\geq 2|z|} E_k(z/a_n)\right| \geq e^{-c|z|^{k+1}2^{s-k-1}c_1|z|^{s-k-1}} = e^{-c_2|z|^s},$$

其中 $c_2 > 0$ 是与 z 无关的常量.

对于第一部分，首先根据引理**??**，有

$$\left|\prod_{|a_n|<2|z|} E_k(z/a_n)\right| \geq \prod_{|a_n|<2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right| \prod_{|a_n|<2|z|} e^{-c'|z/a_n|^k}. \tag{11}$$

其中 $|a_n|^{-k} = |a_n|^{-s}|a_n|^{s-k}$. 由于 $s \geq k$，所以 $|a_n|^{s-k} < 2^{s-k}|a_n|^{s-k}$，从而

$$\prod_{|a_n|<2|z|} e^{-c'|z/a_n|^k} = \exp\left(-c'|z|^k\sum_{|a_n|<2|z|}|a_n|^{-k}\right) \geq e^{-c'c_1|z|^s} = e^{-c_3|z|^s},$$

其中 $c_3>0$ 仍是与 z 无关的常量. 最后考虑 (??) 的 R.H.S 的前半部分. 因为 $z\notin U$，所以有 $|a_n-z|\geq |a_n|^{-k-1}$. 所以成立

$$\prod_{|a_n|<2|z|}\left|1-\frac{z}{a_n}\right|\geq \prod_{|a_n|<2|z|}|a_n|^{-k-2}.$$

注意 a_n 是 f 在 $D_{2|z|}$ 中的零点，对上式取对数，有

$$(-k-2)\sum_{|a_n|<2|z|}\log|a_n|\geq(-k-2)\mathfrak{n}(2|z|)\log 2|z|.$$

其中 $\mathfrak{n}$ 表示 f/z^m 的零点个数，m 为原点处的零点重数. 注意 f/z^m 和 f 的阶是相等的，而对于 f/z^m，它在原点取值不为零，所以根据定理**??**，有

$$(-k-2)\mathfrak{n}(2|z|)\log 2|z|\geq(-k-2)C2^\rho|z|^s\log 2|z|.$$

其中 C 仅与 ρ 有关. 由于 s 的选取是任意的，所以可以忽略 $\log 2|z|$ 的效果. ■

101 推论 存在一列半径 $r_1,r_2,\ldots$ 满足 $r_m\to\infty$ 使得

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}E_k(z/a_n)\right|\geq e^{-c|z|^s},\quad |z|=r_k$$

评注 这一推论表明可以躲开引理**??**中说的那些圆盘.

102 引理 设 g 为整函数，$u=\mathrm{Re}(g)$ 且对于一列 $r_n\to\infty$ 满足

$$u(z)\leq Cr_n^s,\quad |z|=r_n.$$

则 g 是多项式且它的次数 $\leq s$.

证明 将 g 幂级数展开，命题要求证明对于 $n>s$ 成立 $a_n=0$. 利用定理83 得到 a_n 的积分表达式. 利用 $2u=g+\bar{g}$ 将表达式和实部相联系. 注意由于沿圆积分 $e^{-in\theta}$ 结果为零. 所以对 $n>0$ 有

$$a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}[u(re^{\mathrm{i}\theta})-Cr^s]e^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta.$$

令 $r\to\infty$ 即可. ■

103 定理 (Hadamard 分解定理) 设整函数 f 的阶为 ρ_0. 设 $k=[\rho_0]$，$a_1,a_2,\ldots$ 为 f 的非零零点，则

$$f(z)=e^{P(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_k(z/a_n),$$

其中 $P\in\mathbb{P}_k$，m 是 f 在原点的零点的重数.

证明 这一定理的证明总结了本节的一些常用做法. 首先处理不带 $e^{g(z)}$ 的形式. 定义

$$E(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n).$$

首先要证明整，即对于任意 D_R 证明全纯. 而由于 E 是用无穷乘积定义的，所以考虑利用定理**??**，而对于条件中的收敛性，则可利用定理**??**. 在证明中需要对 E_k 进行估计，可以通过按照模是否大于 $2R$ 对 a_n 进行分类，接着利用之前证明的诸多关于 E_k 的估计来得出结论. 而关于零点，则直接应用 定理**??**即可.

接着考虑 f/E，它全纯且无零点，则 $f/E = e^g$. 利用推论**??** 来得出引理**??**的条件，从而得出结论. ■

6 附录

6.1 不等式

104 命题 对于任意 $z \in \mathbb{C}$，成立 $|e^z - 1| \le e^{|z|} - 1 \le |z|e^{|z|}$.

105 命题 对于任意 $z \in \mathbb{D}$，成立 $|e^z - 1| \le 2|z|$.

106 命题 对于任意 $z \in \mathbb{C}$，成立 $|e^z| \ge e^{-|z|}$.

6.2 数项级数

107 定理 考虑复数项级数 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$，若当 n 充分大时，

1. $|a_n| \le |c_n|$ 且 c_n 收敛，则 a_n 绝对收敛.
2. $|a_n| \ge |c_n|$ 且 c_n 发散，则 a_n 发散.

108 定理 (分部求和) 设有复序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 而 $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_n$，则

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

6.3 函数项级数

109 定理 设 $\{f_n\}$ 是一列函数且对于任意 n，成立 $\sup |f_n - f| \le M_n$ 且 $M_n \to 0$，则 f_n 一致收敛于 f.

6.4 多元微积分

110 定理 (偏导数的极坐标表示) 对于 $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$z = f(x, y)$，它的偏导数在极坐标下的表示为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta.$$

证明 利用链式法则并求解方程，得

$$\begin{pmatrix} \partial z/\partial r \\ \partial z/\partial \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial \theta & \partial y/\partial \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial z/\partial x \\ \partial z/\partial y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \partial z/\partial x \\ \partial z/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial z/\partial r \\ \partial z/\partial \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta/r \\ \sin\theta & \cos\theta/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial z/\partial r \\ \partial z/\partial \theta \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

111 命题 (极坐标) 对于 $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$z = f(x, y)$，成立

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

评注 需要说明的是，左边的偏导数中将 f 看作了关于 (x,y) 的函数而右边的偏导数中将 f 看作的是关于 (r,θ) 的函数.

证明 将 f 看作自变量为 (r,θ) 的复合函数，则

$$\frac{\partial z(r,\theta)}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial z(r,\theta)}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\sin\theta).$$

将第二个式子两边同除 r 后求上两个式的平方和即可. ■