复分析作业 W1

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

1、计算：

(1) $(1+i) \pm (1-2i)$，(并作图)

解 图见图 1.

$$(1+i)+(1-2i) = 2-i$$
$$(1+i)-(1-2i) = 3i \quad \blacksquare$$

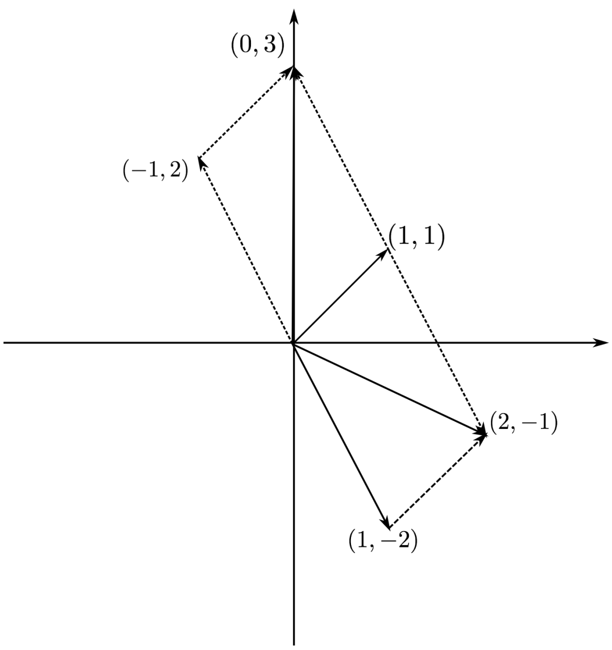

图 1:

(2) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$.

解

$$\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)} = \frac{i}{i^3+i^2(-1-2-3)+i(6+3+2)+1\times2\times3} = \frac{i}{i10} = \frac{1}{10}. \quad \blacksquare$$

(3) $\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$，其中 $0<\alpha,\beta<\pi/2$，$\alpha=\arctan 2$，$\beta=\arctan 3$.

解 已知 $\tan(\alpha+\beta)=-1$，$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1/(\tan^2(\alpha+\beta))}=-1/\sqrt{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=1/\sqrt{2}$，所以

$$\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\sqrt{2}(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))=-1+i. \quad ■$$

3、证明：

(1) 当且仅当 $z=\bar{z}$，复数 z 为实数.

证明 设 $z=a+ib$，则 $z=\bar{z}\Leftrightarrow a+ib=a-ib\Leftrightarrow b=-b\Leftrightarrow b=0$. 即 $z\in\mathbb{R}$. ■

(2) 设 z_1 和 z_2 为复数，若 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是实数，则或 z_1 和 z_2 都是实数，或它们是一对共轭复数.

证明 若 $\bar{z}_1=z_2$，则命题成立. 设 $z_1=a+ib$，$z_2=c+id$. 若 $\bar{z}_1\neq z_2$，则 $a\neq c$ 或 $b\neq -d$. 而 $z_1+z_2\in\mathbb{R}$，即 $b=-d$，所以 $a\neq c$. 而 $z_1z_2\in\mathbb{R}$，即 $ad=-bc$. 所以 $b=-d=0$，即 $z_1,z_2\in\mathbb{R}$. 综上，证毕. ■

4、求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部.

解 设 $z=a+ib$，

$$\frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{a+1+ib}=1-\frac{2(a+1)-i2b}{(a+1)^2+b^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=1-\dfrac{2(a+1)}{(a+1)^2+b^2}\\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=-\dfrac{2b}{(a+1)^2+b^2}.\end{cases} \quad ■$$

5、设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$，求证

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证明 $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$. ■

(2) $|z_1-z_2|\geq ||z_1|-|z_2||$.

证明 首先 $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\leq|z_1\bar{z}_2|=|z_1||z_2|$，而

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_z\bar{z}_2)\geq|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|=||z_1|-|z_2||^2. \quad ■$$

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义.

证明

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

几何意义：平行四边形的两对角线长度的平方和等于四边长度的平方和. ■

8、如果 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，证明 z_1，z_2，z_3 是内接于单位元内的一个正三角形的顶点.

证明 由于 $|z_i|=1$，所以 z_i 在单位圆上. $z_1+z_2+z_3=0$，所以 $|z_1+z_2|=|-z_3|=3$. 而

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)=4 \quad \Rightarrow \quad |z_1-z_2|^2=3.$$

同理，$|z_2-z_3|^2=|z_3-z_1|^2=3$. 因此 z_i 在内接于单位圆的等边三角形的顶点. ■

14 设 $|z_0|<1$，证明：

(A) 若 $|z|=1$，那么 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=1$.

(B) 若 $|z|<1$，证明：

(1) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1$.

(2) $1-\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|^2=\dfrac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{z}_0 z|^2}$.

(3) $\dfrac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\le\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|\le\dfrac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}$.

(4) $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|\le|z|+|z_0|$.

证明 首先，根据 5(1)，成立

$$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z), \quad |1-\bar{z}_0 z|^2=1+|z_0|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z). \tag{1}$$

(A) 将 $|z|=1$ 代入 (1)，得

$$|z-z_0|^2=1+|z_0|^2-2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)=|1-\bar{z}_0 z|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=1. \quad ■$$

(B1) 将 $|z|<1$ 代入 (1)，有

$$|z-z_0|^2-|1-\bar{z}_0 z|^2=|z|^2+|z_0|^2-1-|z_0|^2|z|^2=(|z_0|^2-1)(1-|z|^2)<0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}<1. \quad ■$$

(B2) 将 (1) 代入 L.H.S，得

$$\text{L.H.S}=\frac{1+|z_0|^2|z|^2-|z|^2-|z_0|^2}{|1-z_0 z|^2}=\text{R.H.S} \quad ■$$

(B3) 已知 $\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)\le|z_0||z|$，根据糖水不等式，有

$$\frac{|z-z_0|^2}{|1-z_0 z|^2}=\frac{|z|^2+|z_0|^2-2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)}{1+|z_0|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)}\ge\frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z_0||z|}{1+|z_0|^2|z|^2-2|z_0||z|}=\frac{||z|-|z_0||^2}{|1-\bar{z}_0 z|^2}.$$

不等式的另一边同理. ■

(B4) 根据 (B3)，成立

$$\frac{|z-z_0|^2}{|1-z_0 z|^2}\le\frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}\le|z|+|z_0|. \quad ■$$

15、设有限复数 z_1 和 z_2 在复球面上表示为 P_1 和 P_2 两点. 求证 P_1 及 P_2 的距离，P_1 及 N 的距离分别为

$$|P_1P_2| = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}, \quad |P_1N| = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

证明 已知 $\overrightarrow{OP_i} = (z_i + \bar{z}_i, -i(z_i - \bar{z}_i), |z_i|^2 - 1)/(|z_i|^2 + 1)$，所以

$$\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = 2(1 - \overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}) \\
&= \frac{2\left\{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2) - 4\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - 4\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) - (|z_1|^2-1)(|z_2|^2-1)\right\}}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} \\
&= \frac{4}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2)) \\
&= \frac{4|z_1 - z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}.
\end{aligned}$$

同时，令 $z_2 \to \infty$，则有

$$|P_1N|^2 = \lim_{z_2\to\infty} \frac{4|z_1 - z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)} = \lim_{z_2\to\infty} \frac{4}{1+|z_1|^2}\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)}{1+|z_2|^2}$$

由于 $|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| \le |z_1||z_2|$，所以，

$$|P_1N|^2 = \frac{4}{1+|z_1|^2} \quad \Rightarrow \quad |P_1N| = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}. \quad \blacksquare$$