实分析 笔记

任云玮

目录

3 Lebesgue Measure

56. Definition of the outer measure 注意定义中的下确界部分，这表明如果我们要证明 $m^*A \geq k$，则只需要证明对任意 $\{I_n\}$，$\sum l(I_n) \geq k$ 即可；同时这表示在 $m^*A < \infty$ 的情况下，总可以找到可列个开区间，使得 $\sum l(I_k) \leq m^*A + K\varepsilon$.

注意，外侧度并非可数可加测度.

56. Proof of Proposition 1 关于 $[a,b]$ 情况中 (a_i,b_i) 的构造：将 I_n 中的线段从左到右排列，依次取覆盖了前一个 b_i 的线段. 对于任意的有限区间，用一个闭区间从内部逼近它并利用之前的结论，这样可以得到一边的结论. 同时利用 $m^*I = m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I)$ 来得到另一边，注意其中用到了 $\bar{I}\backslash I$ 至多包含两个点且单个点的外侧度为零. 对于无穷区间的情况，同样是利用内部的闭区间.

p58. Proposition 这一命题表明任意 Borel 集都可以用开集在外侧度意义上从外部逼近；如果考虑是用 G_δ 集，则可以直接从外部在外侧度意义上相等.

p58. Definition 实际上这一定义意味着，如果我们定义相应的“内测度”m_*，则有 $m^*(E) = m_*(E)$. 首先对于 E，一个十分符合直觉的定义“内测度”的方法为 $m_*(E) = m_*(X) - m_*(X\backslash E)$，其中 X 是某个包含 X 的集合. 而这一定义的是实际上就是说对于任意 X（可能不包含 E），这一性质都是成立的.

同时注意 L.H.S $\leq$ R.H.S 是自然成立的，所以只需要验证 L.H.S $\geq$ R.H.S 即可.

p60. Lemma 11 注意我们还没有证明开区间都是 Lebesgue 可测的，但我们已经证明了对于区间，外测度和长度是一致的.

p61. Proof of Theorem 12 定理 10 表明 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ-代数且根据引理 11，它包含所有 (a,∞)；同时易证 Boreal 集 $\mathfrak{B}$ 可由全体 (a,∞) 生成，即它是包含所以 (a,∞) 的最小的 σ-代数. 因此 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$，所以 Borel 集都可测.

p64. Proposition 15 这一命题表明可测集可以用开集从外部逼近，用闭集从内部逼近. 如果考虑 G_δ 集和 F_σ，则上述可以在测度意义下近似. 同时若外侧度有限，则可以用有**限开**区间的并来逼近. 上述内容反之亦成立.

p68. Proof of Proposition 19 这里 $\bigcup_r \cdots$ 可以被诠释为：枚举所有有理数 r，对于每一个 r，它对应了 $\{x : f(x) + g(x) < \alpha\}$ 这一集和中的一部分. 取它们的并集则得到了完整的集合.

p69. Proposition 22 可测函数可以用简单函数近似；简单函数可以用阶梯函数近似；阶梯函数可以用连续函数近似. 具体见习题 23. 另外，这里的近似指的是误差超过 ε 的集合很小，在习题 31 中给出了另一种形式：不相等的集合很小.

p72. Proposition 23 注意这里的结论并非一致收敛，这里 A 的选取是可以依赖于 ε 的，即"任意 ε，δ，存在 $A, \cdots\cdots$"；但是一致收敛的结论实际上也是成立的，具体内容见习题 30.

p85. Definition 注意在之前的章节中，对于 f 我们不仅要求有界，还要求了 finitely-supported.

p86. Theorem 9 首先根据命题 6，在 f 有界的情况下才可以保证 $\int f_n$ 的极限是存在的，所以 R.H.S 在这里仅仅是下极限.

一个表明不等号可以严格成立的例子是：$f_n(x) = n\chi_{0,1/n}$，它几乎处处收敛于 0，但是 $\int_[0,1] f_n$ 始终为 1.

4 The Lebesgue Integral

p79. Proof of Proposition 3 在已知上下积分相等的前提下证明 f 可测：条件意味着可以有一列

$$\int\{\psi_n(x)-\varphi_n(x)\}\mathrm{d}x<\frac{1}{n}.$$

这一积分的不等式意味着满足 $m\Delta_v<v/n$，即 φ_n 和 ψ_n 相差太多的点不会很多. 考虑 ψ^* 和 φ^*，证明在极限情况下，这样的点（在此即不相等的点）为一个零测集.

p92. 这里之所以说大部分情况下，只需要有 $|f_n|\le g$，则之前的结论仍然成立的原因在于，$g\pm f_n$ 是非负的，而积分和极限都有线性性.

5 Differentiation and Integration

p97. Overview

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{1}$$

几乎处处成立，注意我们已知对于连续点它是成立的. 仅对某一类函数 f，可以定义 f' 使成立

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{2}$$

p98. Lemma 1 Vitali 覆盖的十分常见的例子是考虑对 E 的每个点的所有领域，或者是类似于这样的集合。这一引理的作用在于把一个全局的问题化为局部的问题. 注意在这里的描述中并没有“3 倍”的概念，所以在估计上界的时候 (?)

p100. Theorem 3 这一定理对于单调递增的函数解决了 p97 中提出的问题：首先 f 几乎处处可微（从而几乎处处连续），从而解决了(1)，同时也给出了唯一自然的 f' 的定义（由于是 Lebesgue 积分，所以我们无需考虑那些不可微的点）；同时表明在仅有单调性的情况下，对于(2)，只能成立不等式.

证明的关键点在于证明 $E_{u,v}$ 是零测集. 注意到函数值的差就是微分的积分，所以在这里我们实际上在估计 sv 和 su.

p103. Lemma 4 这一引理可用于在 f 和 P，N 以及 T 之间转换.

p105. Proof of Lemma 8 思路：反证法. 考虑满足 $f > 0$ 的非零测子集，通过一些近似得到满足 $\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$ 的区间，从而推得矛盾.

p106. Proof of Lemma 9 我们只需要证明 F' 几乎处处存在且对任意 y 成立 $\int_a^y (F' - f) = 0$ 并应用引理 8 即可. 其中 F' 的几乎处处存在性由它的定义式及引理 7 得到. 下考虑 $\int (F' - f)$. 首先把 F' 化为更方便处理的形式，由于我们已知其存在性，所以对于几乎所有 x，成立

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+1/n) - F(x)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

首先我们尝试交换积分和极限运算. 由于这是一个一般的函数，我们考虑利用 Lebesgue 收敛定理，即我们需要证明 $|f_n| \leq g$ 对某个可积函数成立. 已知 $|f| \leq K < \infty$，所以

$$|f_n(x)| = n\left|\int_x^{x+1/n} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq K.$$

从而有

$$\int_a^y F' = \lim_{n\to\infty} n\int_a^y \{F(x+1/n) - F(x)\}\mathrm{d}x.$$

接下来处理该积分，我们有

$$\int_a^y \{F(x+1/n)-F(x)\}\mathrm{d}x = \int_y^{y+1/n} F - \int_a^{a+1/n} F.$$

由于 F 的连续性（由引理 7 保证），我们有 $n\int_y^{y+1/n} F \to F(y)$. 所以我们

$$\int_a^y F' = F(y) - F(a) = \int_a^c f.$$

证毕.

p108. Fail to be absolutely continuous 首先如果一个函数不是几乎处处可微的，那么它不是绝对连续的。对于一个几乎处处可微的函数，定理 14 表明若它要是绝对连续的，那么它需要在微分后可以积回来。考虑 Cantor 函数，虽然它几乎处处可微，但是它导数全是零。直观上来讲，它的变化全集中在了不可微的点处。

p108. Proof of Lemma 11 取 $\varepsilon = 1$，把 $[a,b]$ 分成长度 $\le \delta$ 的子区间，插入这些子区间的端点。则对于每一组，成立 $\sum|f(x_i)-f(x_{i-1})| < \varepsilon$。从而整体上有 $t \le K\varepsilon$，其中 K 是任意大于组数的数。

p109. Proof of Lemma 13 考虑绝对连续的定义，对 $|f(x_i')-f(x_i)|$ 的求和天然的把一个全局性质化为了一个局部性质. 我们要证对于任意 $c \in [a,b]$，成立 $f(c) = f(a)$. 考虑 Vitali 覆盖定理，我们把 $[a,c]$ 分为两类区间，其中一类是 f 在其上的变化充分小的，这由几乎处处 $f'(x) = 0$ 保证，另一方面则是总长度充分小的区间，在其上利用绝对连续性得到在其上的变化亦充分小。