泛函分析 笔记

任云玮

目录

2 Normed Spaces. Banach Spaces

p58. Normed Spaces and metric spaces 首先它们的共同点在于在其上都定义了"距离"的概念，而不同点在于，metric space 的定义中就包含了"距离"metric，而对于 normed space，它**首先**是一个向量空间，而对应的"距离"也是通过向量的"长度"norm 来定义的.

p68. Schauder basis and Hamel basis 在 Hamel basis 的语境下，张成是指用**有限**的线性组合来张成，即 $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$. 而在 Schauder basis 的语境中，我们利用范数定义了收敛级数的概念，这允许我们用 **可数无限** 的线性组合来张成，即 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i b_i$.

p72. Lemma 2.4-1 这一定理的用处在于，通过范数得到各个坐标（及其和）的上界. 关于证明：

1. 假设存在 $\|y_m\| \to 0$，得到坐标向量各个分量序列的有界性.
2. 利用有界性逐次得到一个坐标向量所有分量都收敛的子列 (y_{m_n})，设收敛于 y.
3. 利用范数的连续性推出矛盾.

p75. 注意一个拓扑空间即为一个集合 X 和由它的满足一定性质的子集组成的集合 $\mathcal{T}$. 例如一个度量空间和其中的开集全体. 而这里的意思是，对于两个等价范数，对应的拓扑空间是相同的.

p78. F. Riesz's Lemma 考虑 $X = Z = \mathbb{R}^2$，$Y = \text{span}(x)$，则这一引理即是在说：在单位圆上我们可以找到一个点 z，使得它离 x 轴上的任意点都有一定距离. 这一例子对于理解证明的思路也是很有帮助的.

p118. Proof of Theorem 2.10-2 利用 Y 的完备性逐点地定义 T, 证明 $T \in B(X, Y)$ 且 $T_n \to T$.

p121. Examples 在这些例子总所做的事情是：(1) 求出 dual space 中对应的 norm；(2) 构造一个的线性双射. (3) 证明该双射保 norm. 其中 (1) 和 (2) 的顺序可以互换，而 (1) 时常被并入 (3). 另外注意在此并没有 dual Schauder basis 的概念.

p121. 2.10-6 首先，我们构造从 $l^{1\prime}$ 到 l^∞ 的双射. 设 $(e_k) = (\delta_{kj})$ 为 l^1 的一个 Schauder 基，则对于任意 $f \in l^{1\prime}$，定义 $Tf = (\gamma_k) = (f(e_k))$. 易得 T 是线性映射. 由于 f 的有界性，有

$$\sup_k |f(e_k)| \le \sup_k \|f\| \|e_k\| \le \|f\|, \tag{1}$$

从而 $(\gamma_k) \in l^\infty$. 同时对于任意 $(\beta_k) \in l^\infty$，我们可以定义 $g(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k\beta_k \in l^{1*}$. 同时由于 $|x_k\beta_k| \le (\sup_k \beta_k)|x_k|$ 而 $\sum |x_k| < \infty$，所以 $g \in l^{1'}$. 因此 T 是一个线性双射.

接下来我们求出 $l^{1'}$ 上的对应范数. 首先注意到级数 $\sum x_k f(e_k)$ 的收敛是一致的且 f 是连续的，从而有 $f(x) = f(\sum x_k e_k) = \sum x_k f(e_k)$. 因此

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} \left|\sum_{k=1}^\infty x_k f(e_k)\right| \le \sup_k |f(e_k)| \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \sup_k |f(e_k)|.$$

而同时根据 (1)，有 $\|f\| = \sup_k |f(e_k)|$.

最后显然线性双射 T 是保范数的，从而它是一个同构. 因此 l^1 的对偶空间为 l^∞.

p122. 2.10-7 首先和之前一样，取 (e_k) 作为 l^p 的一组 Schauder 基，对于任意 $f \in l^{p'}$，定义 $Tf = (f(e_k))$. 首先我们证明 $(\gamma_k) = (f(e_k)) \in l^q$. 即证明 $\sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q$ 关于 n 有界. 注意对于任意 x，有

$$\|f\|\|x\| \ge |f(x)| = \sum_{k=1}^\infty \xi_k\gamma_k.$$

所以我们只需要取如 (11) 所示的 x_n，即可使得不等式两边有所需的形式. 从而得 $(\gamma_k) \in l^q$. 而反之对于 $b = (\beta_k) \in l^q$，定义 $g(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k\beta_k$. g 的线性性是显然的，而有界性有 Hölder 不等式保证. 所以 T 是一个双射，而 T 的线性性是显然的. 剩余的证明略.