科学计算

MA235

任云玮

目录

1 绪论

1.1 计算机数值计算原理

1.1.1 计算机基本工作原理

1.1.2 实数的存贮方法

1.1.3 实数的基本运算原理

1.2 误差的来源与估计

1.2.1 误差的来源

1. 模型问题。例：近似地球为球体来计算。
2. 测量误差。例：测量地球半径时的误差。
3. 方法误差（截断误差）。例：对于 $y = f(x)$，求 $f(x^*)$ 时使用 Taylor 展开。
4. 舍入误差（rounding-off）。例：计算机计算时的误差。

1.2.2 误差和有效数字

1 定义 (绝对误差等) 设 $x \in \mathbf{R}$，x^* 为 x 的近似值。称

$$e(x^*) = x^* - x$$

为 x^* 的绝对误差。其误差上界 ϵ^* 满足

$$|e(x^*)| \leq \varepsilon^*$$

2 定义 (相对误差等)

3 定义 (有效数字) [1] 设 $x = + - 0.a_1 a_2 ... \times 10^m$，若在第 n 位舍入，则得到

$$x^* = + - 0.......$$

称 x^* 具 n 位有效数字。

[1]The number of significant

例　设 $\pi = 3.1415926\ldots$，则 $\pi_1 = 3$ 的有效数字为 $n(\pi_1) = 1$，而 $n(4) = 0$，因为它并非正确的舍入所得。$n(3.1416) = 5$，$n(3.1415) = 4$。

4 定义 (有效数字) *若存在最大的 n，使得*

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则称有 n 位有效数字。

5 定理 (误差与有效数字) *若 $x^* = ... \times 10^m$ 有 n 位有效数字，则其相对误差满足*

$$\varepsilon_r(x^*) \leq \frac{1}{2a_1} \times^{1-n}.$$

若相对误差满足

$$\varepsilon_r(x^*) \leq \frac{1}{2(1+a_1)} \times^{1-n}$$

则 x^* 至少有 n 位有效数字。

证明　（假设 a_1 是精确的。）//todo

1.2.3　数值运算误差估计

设有 $x_1 \Rightarrow x_1^*$，$x_2 \Rightarrow x_2^*$，考虑 $x_1 + x_2 \Rightarrow x_1^* + x_2^*$（假设运算无误差），进行估计，有

$$|(x_1 + x_2) - (x_1^* + x_2^*)| \leq \varepsilon(x_1^*) + ...$$

对于乘法是类似的。

6 定理 (运算误差估计) *设有 $_n \Rightarrow x_n^*$，...,*