线性代数 笔记

任云玮

目录

1 Linear Algebra Done Right

1.3 Linear Maps

p101. Dual Space 我们可以认为 V' 是 V 中的超平面[1]所组成的线性空间。考虑 $\mathbb{R}^n$，对于一个超平面，它由

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a^Tx = 0$$

所确定，其中 a 即为平面的一个法向量，而等式的左边即为一个线性泛函 $\varphi(x) = a^Tx$.

p103. Dual Map

1.8 Operators on Complex Vector Spaces

p243. 8.4 这一定理表明，如果 $T^{n+k}u = 0$，则 $T^nu = 0$，其中 $k \geq 0$.

p243. 8.5 一般而言，$V = \operatorname{null} T \oplus \operatorname{range} T$ 是不成立的，注意到虽然 $\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T$ 始终成立，但是 $\operatorname{null} T$ 和 $\operatorname{range} T$ 之间可能有非零的重合。所以实际上这一定理的内容主要是 $\operatorname{null} T^n \cap \operatorname{range} T^n = \{0\}$.

p247. The proof of 8.13 注意有 $(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I) = ((T-\lambda_2 I)(T-\lambda_1 I))$. 我们的思路在于逐个证明 $a_j = 0$. 要做到这一点，首先要去掉其他的项并保留当前 a_j 项，要消去其他项，只需利用 $v_k \in G(\lambda, T) = \operatorname{null}(T-\lambda_k I)^n$，即利用 $(T-\lambda_2 I)^n \cdots (T-\lambda_m I)^n$ 即可. 但是这样仅能得到

$$0 = a_1(T-\lambda_2 I)^n \cdots (T-\lambda_m I)^n v_1.$$

由于我们不能确保上式右侧的，不考虑系数的向量最后不为零，所以不能直接得出 $a_1 = 0$. 因此我们希望给 v_1 再作用一个 $(T-pI)^q$ 形式的线性算子（以确保仍可交换）使得它一定不为零。在此注意到如果 w 是 T 的非广义特征向量，则可以满足条件，同时我们有 $(T-\lambda_1 I)^k v_1$ 是 T 的一个非广义特征向量。

[1]我们所指的都是过原点的超平面

2 Multilinear Algebra and Applications

2.1 Introduction

换基公式 设 $\mathcal{B}$ 和 $\widetilde{\mathcal{B}}$ 为两组基而 $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$. 则 $[v]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = L^{-1}[v]_{\mathcal{B}}$.

2.2 Review of Linear Algebra

换基公式 设 $L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = [L^i_j]$ 且 $\Lambda = L^{-1}$. 则 $\tilde{b}_j = L^i_j b_i$ 且 $b_j = \Lambda^i_j \tilde{b}_i$. 设线性变换 T 在这两组基下的矩阵分别为 A 和 $\widetilde{A}$，则有 $\widetilde{A} = L^{-1}AL$.

2.3 Multilinear Forms

p25. For every $\alpha \in V^*$, $\alpha = \alpha(b_i)\beta^i$.

p25. 换基公式（线性泛函） 设 $\alpha \in V^*$ 且 $\widetilde{b}_j = b_i L^i_j$，则 $[\alpha]_{\widetilde{\mathcal{B}}^*} = [\alpha]_{\mathcal{B}^*}L$. 即线性泛函的坐标为 covariant 的.

p30.

covariance of a basis	contravariance of the dual basis
contravariance of the coordinate vectors	covariance of linear forms

p34. 换基公式（二次型） $\tilde{B} = L^T B L$.