科学计算作业 练习 10

任云玮

2016 级 ACM 班

516030910586

2. 设线性方程组……

证明 (1) 即证：对于 $\mathbf{J}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$，$\mathbf{G}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$，$\rho(\mathbf{J})<1$ 成立当且仅当 $\rho(\mathbf{D})<1$ 成立. 因为

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & -a_{12}\\ -a_{21} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -a_{12}/a_{11}\\ -a_{21}/a_{22} & 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1^2=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}},$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & -a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -a_{12}/a_{11}\\ 0 & a_{12}a_{21}/(a_{11}a_{22})\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \lambda_2=0 \text{ 或} \lambda_2=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}.$$

所以 $|\lambda_1|<1$，当且仅当 $|\lambda_2|=|\lambda_1^2|<1$，所以 Jacobi 迭代法和 GS 迭代法同时收敛或发散. ■

(2) 两者的渐进收敛速度之比为

$$\frac{R(\mathbf{J})}{R(\mathbf{G})}=\frac{1}{2}. \quad ■$$

4. 设 $A=$……

解

$$\mathbf{J}=\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})=\begin{pmatrix}0.1 & & \\ & 0.1 & \\ & & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -a & 0\\ -b & 0 & -b\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -0.1a & 0\\ -0.1b & 0 & -0.2b\\ 0 & -0.1a & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad 0=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{J}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0.1a & 0\\ 0.1b & \lambda & 0.2b\\ 0 & 0.1a & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{3}{100}ab \quad\Rightarrow\quad \lambda=\sqrt[3]{\frac{3ab}{100}}$$

从而 Jacobi 迭代法收敛当且仅当 $|ab|<100/3$.

$$
\mathbf{G}=(\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}=\begin{pmatrix}0.1 & & \\ -0.01b & 0.1 & \\ 0.002ab & -0.02a & 0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & a & \\ & & b \\ & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0.1a & 0\\ 0 & -0.01ab & 0.1b\\ 0 & 0.002a^2b & -0.02ab\end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow\quad 0=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{G}|=\begin{vmatrix}\lambda & -0.1a & 0\\ 0 & \lambda+0.01ab & -0.1b\\ 0 & -0.002a^2b & \lambda+0.02ab\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+0.03ab)
$$

从而 GS 迭代法收敛当且仅当 $|ab|<100/3$. ■

6. 用 Jacobi 迭代与 GS 迭代解线性方程组……

证明

$$
\mathbf{J}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2/3\\ 0 & 0 & 1/2\\ -1. & 1/2 & 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \lambda(\mathbf{J})=0\text{ 或 }\pm\frac{\sqrt{33}}{6},
$$

$$
\mathbf{G}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2/3\\ 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 11/12\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \lambda(\mathbf{G})=0\text{ 或 }\frac{11}{12}.
$$

从而两种迭代法都收敛. 且 $\rho(\mathbf{G})<\rho(\mathbf{J})$，从而 GS 迭代法收敛更快. ■

9. 设线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{A}$ 为对称正定阵⋯

证明 迭代式为

$$
\mathbf{x}^{(k+1)}=(\mathbf{E}-\omega\mathbf{A})\,\mathbf{x}^{(k)}+\omega\mathbf{x}^{(k)}. \tag{1}
$$

设 λ 为 $\mathbf{B}=\mathbf{E}-\omega\mathbf{A}$ 的特征值，则

$$
(\mathbf{E}-\omega\mathbf{A})\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{Ax}=\frac{1-\lambda}{\omega}\mathbf{x}.
$$

即 $(1-\lambda)/\omega$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值. 由于 $\mathbf{A}$ 正定，所以

$$
\frac{1-\lambda}{\omega}>0\quad\Rightarrow\quad\lambda<1.
$$

同时又有

$$
\frac{1-\lambda}{\omega}\le\beta\quad\Rightarrow\quad 1-\lambda\le\beta\omega<2\quad\Rightarrow\quad\lambda>-1.
$$

综上，$|\lambda|<1$，即 $\rho(\mathbf{B})<1$，从而 (1) 收敛. ■