实分析 笔记

任云玮

目录

3 Lebesgue Measure

56. Definition of the outer measure 注意定义中的下确界部分，这表明如果我们要证明 $m^*A \geq k$，则只需要证明对任意 $\{I_n\}$，$\sum l(I_n) \geq k$ 即可；同时这表示在 $m^*A < \infty$ 的情况下，总可以找到可列个开区间，使得 $\sum l(I_k) \leq m^*A + K\varepsilon$.

注意，外侧度并非可数可加测度。

56. Proof of Proposition 1 关于 $[a, b]$ 情况中 (a_i, b_i) 的构造：将 I_n 中的线段从左到右排列，依次取覆盖了前一个 b_i 的线段。对于任意的有限区间，用一个闭区间从内部逼近它并利用之前的结论，这样可以得到一边的结论。同时利用 $m^*I = m^*\bar{I} = l(\bar{I}) = l(I)$ 来得到另一边，注意其中用到了 $\bar{I}\backslash I$ 至多包含两个点且单个点的外侧度为零。对于无穷区间的情况，同样是利用内部的闭区间。

p58. Proposition 这一命题表明任意 Borel 集都可以用开集在外侧度意义上从外部逼近；如果考虑是用 G_δ 集，则可以直接从外部在外侧度意义上相等。

p58. Definition 实际上这一定义意味着，如果我们定义相应的“内测度”m_*，则有 $m^*(E) = m_*(E)$. 首先对于 E，一个十分符合直觉的定义“内测度”的方法为 $m_*(E) = m_*(X) - m_*(X\backslash E)$，其中 X 是某个包含 X 的集合。而这一定义的是实际上就是说对于任意 X（可能不包含 E），这一性质都是成立的。

同时注意 L.H.S $\leq$ R.H.S 是自然成立的，所以只需要验证 L.H.S $\geq$ R.H.S 即可。

p60. Lemma 11 注意我们还没有证明开区间都是 Lebesgue 可测的，但我们已经证明了对于区间，外测度和长度是一致的。

p61. Proof of Theorem 12 定理 10 表明 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ-代数且根据引理 11，它包含所有 (a, ∞)；同时易证 Boreal 集 $\mathfrak{B}$ 可由全体 (a, ∞) 生成，即它是包含所以 (a, ∞) 的最小的 σ-代数。因此 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$，所以 Borel 集都可测。

p64. Proposition 15 这一命题表明可测集可以用开集从外部逼近，用闭集从内部逼近。如果考虑 G_δ 集和 F_σ，则上述可以在测度意义下近似。同时若外侧度有限，则可以用有**限开**区间的并来逼近。上述内容反之亦成立。

p68. Proof of Proposition 19 这里 $\bigcup_r \cdots$ 可以被诠释为：枚举所有有理数 r，对于每一个 r，它对应了 $\{x : f(x) + g(x) < \alpha\}$ 这一集和中的一部分。取它们的并集则得到了完整的集合。

p69. Proposition 22 可测函数可以用简单函数近似；简单函数可以用阶梯函数近似；阶梯函数可以用连续函数近似. 具体见习题 23. 另外，这里的近似指的是误差超过 ε 的集合很小，在习题 31 中给出了另一种形式：不相等的集合很小。

p72. Proposition 23 注意这里的结论并非一致收敛，这里 A 的选取是可以依赖于 ε 的，即"任意 ε，δ，存在 $A, \cdots\cdots$"；但是一致收敛的结论实际上也是成立的，具体内容见习题 30.

p85. Definition 注意在之前的章节中，对于 f 我们不仅要求有界，还要求了 finitely-supported.

p86. Theorem 9 首先根据命题 6，在 f 有界的情况下才可以保证 $\int f_n$ 的极限是存在的，所以 R.H.S 在这里仅仅是下极限。

一个表明不等号可以严格成立的例子是：$f_n(x) = n\chi_{0,1/n}$，它几乎处处收敛于 0，但是 $\int_[0, 1] f_n$ 始终为 1.