实分析 笔记

任云玮

目录

1 测度论 **2**

1.1 绪论 2

1.2 外测度 2

1.3 可测集和 Lebesgue 测度 3

1 测度论

1.1 绪论

1 引理 设矩形 R 由有限个几乎不相交的矩形组成，即 $R=\bigcup_{k=1}^{N}R_k$，则 $|R|=\sum_{k=1}^{N}|R_k|$.

2 引理 设 $R, R_1, \ldots, R_N$ 为矩形且 $R\subset\bigcup_{k=1}^{N}R_k$，则 $|R|\leq\sum_{k=1}^{N}|R_k|$.

3 定理 设 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$ 为开集，则 $\mathcal{O}$ 可以被唯一地写成可数个不相交开区间的并.

证明 首先证明可以用不相交开区间覆盖. 分为两步，首先逐点地构造覆盖它的最大开区间，接着证明若两个"最大开区间"相交，则它们相等. 而对于可数，只需要用从每个区间中取出一个有理数作为编号即可. ■

评注 这一定义给出了定义 R 中区间的测度的思路，而定义 R^n 中集合的测度的思路，也和这个是类似的，但是需要经过一定的修改.

4 定理 R^d 中的开集 $\mathcal{O}$，$d\geq 1$，可被表示成可数个几乎不相交的立方体的并.

证明 TODO

评注 注意，并不能保证这种表示方法是唯一的，所以并不能直接用它来定义"面积".

1.2 外测度

5 定义 (外测度) 对于 $E\subset\mathbb{R}^n$，定义 E 的外测度为

$$m_*(E)=\inf\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|.$$

其中 $\{Q_j\}$ 取遍 E 的所有可数闭立方覆盖，$|Q_j|$ 为立方体 Q_j 的体积.

评注 这一定义的动机在于，立方体 $|Q_j|$ 的定义是明确，而我们尝试用立方体来覆盖原来的集合，我们可以通过把立方体取得足够小，来使得覆盖尽可能地精确. 而这一行为的极限，即其下确界，可以认为就是原来集合的测度.

6 命题

1. $\mathbb{R}^n$ 中的点的测度为零.
2. 闭立方 Q 的测度 $m_*(Q)$ 等于它的体积 $|Q|$，开立方也是.
3. $\mathbb{R}^n$ 的测度为 ∞.

证明 下给出 [2.] 的证明的概要. 需要证明 $m_*(Q) \le |Q|$ 及其反向. 对于前者，由于 Q 可以被其自身覆盖，所以根据外测度定义中的“下确界”，$m_*(Q) \le |Q|$ 成立. 而对于后者，考虑证明 $|Q| \le (1+\varepsilon)m_*(Q)$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立. 对于任意 Q 的闭立方覆盖 $\{Q_j\}$，可以取一个每个立方都比原来稍大的开立方覆盖 $\{S_j\}$，$|S_j| = (1+\varepsilon)|Q_j|$. 由于 Q 是紧集，所以可以取出有限子覆盖. 取对应的闭包再将对应的体积相加即可证明.

这一证明的动机在于，m_* 的定义中是下确界，很难证明下确界大于等于某个东西，所以考虑证明对于任意的立方覆盖，都成立大于等于号，从而导出下确界大于等于. 而由于引理2中只给出了有限的情况，所以需要紧集取出一个有限覆盖. ■

7 引理 对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$，成立

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \le m_*(E) + \varepsilon.$$

8 定理 (外测度的性质)

1. 单调性：若 $E_1 \subset E_2$，则 $m_*(E_1) \le m_*(E_2)$.
2. 可数可加性：若 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，则 $m_*(E) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.
3. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$，则 $m_*(E) = \inf m_*(\mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O}$ 取遍所有包含 E 的开集.
4. 若 $E = E_1 \cup E_2$ 且 $d(E_1, E_2) > 0$，则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$.
5. 若 E 是可数个几乎不相交的立方体 $\{Q_j\}$ 的并，则 $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$.

评注 其中 [3.] 表示任意集合的外测度可以用开集的测度逼近.

证明 关于 [2.]，按照定义展开 $m_*(E_j)$，取满足 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_{k,j} \le m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}|$ 的立方覆盖. 则 $\{Q_{k,j}\}$ 构成了 E 的一个覆盖，再利用 $m_*(E)$ 的定义以及几何级数即可证明.

对于 [3.]，$m_*(E) \le \inf m_*(\mathcal{O})$ 是显然的，下仅证明另一方向. 首先考虑 R.H.S 的含义，它是 $m_*(\mathcal{O})$ 的下确界，要证明某个东西大于它，只需要构造出一个 $\mathcal{O}$ 并让那个东西大于那一特定的 $m_*(\mathcal{O})$ 即可. 再考虑 lhs，和之前相同，可以将它看作 $m_*(E) + \varepsilon$，而这又可以换成一个稍小一点的立方覆盖. 将这一立方覆盖里的每一个立方稍稍放大，即得到了一个开立方覆盖. 它们的并是一个开集，这就是之前所需要构造的 $\mathcal{O}$.

[4.] 和 [5.] 的证明中所用的技巧和之前的是相似的. ■

1.3 可测集和 Lebesgue 测度

9 定义 (Lebesgue 测度) 称 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为 Lebesgue 可测的，若对于任意 $\varepsilon > 0$，存在开集 $\mathcal{O} \supset E$，成立 $m_*(\mathcal{O} - E) \le \varepsilon$. 对于可测集 E，定义 Lebesgue 测度 $m(E) = m_*(E)$.

评注 虽然每一个集合 E 都有外测度，但是只有特定的一类集合的外测度有一些比较好的性质，因此我们需要定义 Lebesgue 测度.

10 引理 若 F 为闭集，K 为紧集，且 F 和 K 不相交，则 $d(F,K)>0$.

11 命题 (可测集的性质)

1. $\mathbb{R}^d$ 中的开集都可测.
2. 若 F 是一个外测度为零的集合的子集，则 F 可测.
3. 可数个可测集的并可测.
4. 闭集可测.
5. 可测集的补集可测.
6. 可测集的可数交可测.

证明 [1.] 是显然的. [2.] 可以利用定理8[3.] 证明.

对于 [3.] 只需要证明紧集可测即可，因为闭集可以被表达成可数个紧集的并的形式，之后利用 [2.] 即可完成证明. 而证明紧集 F，考虑定义，即对任意 $\varepsilon>0$ 构造 $\mathcal{O}$ 使成立 $m_*(\mathcal{O}-F)\leq\varepsilon$. 根据定理8[3.] 可以构造出 $m_*(\mathcal{O})\leq m_*(F)+\varepsilon$ 的 $\mathcal{O}$，但是由于 m_* 和集合的相减不兼容，所以仍需要进一步的处理. 考虑 $\mathcal{O}-F$，它实际上是包在 F 外的一层集合，它可以被可数个几乎不相交的立方覆盖，而根据定理8 [3.]，它们是从 m_* 中拆出来的. 再利用前任意有限个，进一步处理即可. ■

12 定理 设 $E_1,E_2,\dots$ 为不相交可测集且 $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$，则

$$m(E)=\sum_{j=1}^{\infty}m(E_j).$$

13 定义 (σ-代数) 称一个 $\mathbb{R}^d$ 的子集组成的集合为一个 σ-代数，若它在可数交、可数并以及取补集操作下封闭.

14 定义 (Borel 集) Borel 集 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ 是指含有所有 $\mathbb{R}^d$ 中开集的最小的 σ-代数，即对任意含有所有开集的集合 S，成立 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\subset S$.

评注 由于 σ-代数的交依然是 σ-代数，所以也可以定义 Borel 集为所有含有所有开集的 σ-代数的交，这给出了存在性和唯一性.

15 定义 定义可数个开集的交集的全体为 G_δ；定义可数个闭集的并集的全体为 F_σ.

16 命题 设 $E\subset\mathbb{R}^d$，以下命题等价：

1. E 可测.
2. E 与 G_δ 仅相差一个零测集.
3. E 与 F_σ 仅相差一个零测集.