科学计算讲义习题及解答

Jianguo Huang & Yue Yu

目　录

1　函数的多项式插值与逼近　　1

第一章　函数的多项式插值与逼近

Ex 1.1　设 x_j 为互异节点 $(j=0,1,\cdots,n)$, 求证

(1) $\sum\limits_{j=0}^{n} x_j^k \ell_j(x) \equiv x^k \ \ (k=0,1,\cdots,n)$;

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n} (x_j-x)^k \ell_j(x) \equiv 0 \ \ (k=1,2,\cdots,n)$.

证明　(1) 对固定的 k, 设 $f(x)=x^k$, 则 $f(x)$ 关于插值节点 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 的 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_j(x)=\sum_{j=0}^{n} x_j^k \ell_j(x).$$

注意到 $f(x)$ 是次数不超过 n 次的多项式，它的 $n+1$ 个节点的插值多项式就是本身，由唯一性

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k \ell_j(x) \equiv x^k \ \ (k=0,1,\cdots,n).$$

(2) 利用二项式展开有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} (x_j-x)^k \ell_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[\ell_j(x) \sum_{i=0}^{k} C_k^i x_j^i (-x)^{k-i}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} \left[\ell_j(x) C_k^i x_j^i (-x)^{k-i}\right] = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n} \left[\ell_j(x) C_k^i x_j^i (-x)^{k-i}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-x)^{k-i} \left[\sum_{j=0}^{n} x_j^i \ell_j(x)\right] = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-x)^{k-i} x^i \qquad \text{(根据第一问)} \\
&= (-x+x)^k = 0,
\end{aligned}$$

证毕. □

注 1.1　第二问也可如下证明. 设 $f(x)=(x-t)^k$，这里 t 是个参数. 它的 Lagrange 插值多项式为

$$\sum_{j=0}^{n} (x_j-t)\ell_j(x) = (x-t)^k,$$

取 $t=x$ 即证.

Ex 1.2　设 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

解答: 根据差商的性质

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

于是

$$f[2^0, 2^1, \cdots, 2^7] = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} = 1,$$

$$f[2^0, 2^1, \cdots, 2^8] = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = 0.$$

□

注 1.2 注意到 7 次 和 8 次 Newton 插值多项式都是本身，也可利用系数关系给出答案.

Ex 1.3 证明 $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$.

证明 根据前向差分的定义，

$$\begin{aligned}\Delta(f_k g_k) &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \\ &= (f_{k+1} - f_k) g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k \\ &= \Delta f_k g_{k+1} + f_k \Delta g_k,\end{aligned}$$

即证. □

Ex 1.4 证明 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k$.

证明 根据上一题的结论，

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k + \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(f_k g_k),$$

而

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta(f_k g_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k) = f_n g_n - f_0 g_0,$$

由此即证. □

Ex 1.5 若 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ 有 n 个不同实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，证明:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-2, \\ a_n^{-1}, & k = n-1. \end{cases}$$

证明 由题意知

$$f(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n):=a_n\omega_n(x),$$

此时

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)},\qquad \omega_n'(x_j)=\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x_j-x_i).$$

令 $g(x)=x^k$，根据差商的性质，

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}=g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}.$$

显然

$$\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=\begin{cases}0, & 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ 1, & k=n-1,\end{cases}$$

由此得证. □

Ex 1.6 设 $f(x)\in P_n$，且对 $k=0,1,2,\cdots,n$ 成立 $f(k)=\frac{k}{k+1}$，求 $f(x)$.

解答: 令 $g(x)=(x+1)f(x)-x$, 则它有 $n+1$ 个不同零点 $\{0,1,\cdots,n\}$，且 $g(-1)=1$. 显然 $g(x)$ 是 $n+1$ 次多项式，于是可设

$$g(x)=Ax(x-1)\cdots(x-n),$$

其中 A 是待定常数. 由 $g(-1)=1$，得

$$A=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!},$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)\cdots(x-n)+x\right].$$

□

注 1.3 最后一个式子不太容易看出 $f(x)$ 是多项式，但从推导过程看，逻辑上是自洽的. 假设 $f(x)$ 不是多项式，为了使 $g(x)$ 为多项式，$f(x)$ 必须具有形式

$$f(x)=\frac{Q(x)}{x+1},$$

其中 $Q(x)$ 是不含 $x+1$ 因子的多项式 (否则 $f(x)$ 是多项式)，即 $Q(-1)\neq 0$. 在此假定下，

$$Q(x)=g(x)+x,$$

但直接计算有右端在 $x=-1$ 处为 0，矛盾，这表明 $f(x)$ 必须是多项式.

Ex 1.7 任给节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$，记 $h = \max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, \cdots, n-1\}$，证明对任意 $x \in [x_0, x_n]$，成立

$$|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leqslant \frac{n!h^{n+1}}{4}.$$

证明 (1) 当 $x \in [x_0, x_1]$ 时，乘积可分为两部分

$$|(x-x_0)(x-x_1)| \leqslant \frac{1}{4}h^2,$$

$$|(x-x_2)\cdots(x-x_n)| \leqslant (2h)\cdots(nh) = n!h^{n-1},$$

从而

$$|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leqslant \frac{n!h^{n+1}}{4}.$$

(2) 当 $x \in [x_{n-1}, x_n]$ 类似 (1) 证明.

(3) 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $(1 \leqslant k \leqslant n-2)$ 时，乘积可分为三部分

$$|(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})| \leqslant ((k+1)h)\cdots(2h) = (k+1)!h^k,$$

$$|(x-x_k)(x-x_{k+1})| \leqslant \frac{1}{4}h^2,$$

$$|(x-x_{k+2})\cdots(x-x_n)| \leqslant (2h)\cdots((n-k)h) = (n-k)!h^{n-k-1},$$

因此

$$|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leqslant \frac{1}{4}(k+1)!(n-k)!h^{n+1} \leqslant \frac{n!h^{n+1}}{4}.$$

□

注 1.4

- 可以使用归纳法证明.
- 可以先考虑等距节点 $x_i = x_0 + ih, \ \ i = 0, 1, \cdots, n$，对一般节点因最大间隔小于等于 h, 故可以把非等距节点往两边拉成等距的，且固定 x 不变，此时 x 与新节点的距离都比原来的大，由此获得结论.
- 对等距节点可简化为

  $$|t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)| \leqslant \frac{n!}{4}, \quad t \in [1, n].$$

  因平移不改变距离，故可设 $x_0 = 0$，此时 $x_i = ih$，令 $t_i = x_i/h$，$t = x/h$，则等价于证明

  $$|t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)| \leqslant \frac{n!}{4}, \quad t \in [1, n].$$

  对这个不等式，证明方法与前面类似，本质上没有改善.

- 有部分同学注意到 $f(x) = x^{n+1}$ 的 n 次多项式插值余项恰为 $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$，从而给出等价于证明

$$|t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)| \leqslant \frac{n!}{4}, \quad t \in [1, n].$$

参考文献

[1] 李庆扬、王能超、易大义, 数值分析 (第 5 版), 清华大学出版社, 北京, 2008.

[2] 张平文、李铁军, 数值分析, 北京大学出版社, 北京, 2007.

[3] 王沫然, MATLAB 与科学计算 (第 3 版), 电子工业出版社, 北京, 2012.

[4] K. Atkinson and W. Han, Elementary Numerical Analysis (Third Edition), John Wiley & Sons, New York, 2004.

[5] R. Neapolitan and K. Naimipour, Foundations of Algorithms (Fourth Edition), Jones and Bartlett Publishers, Boston, 2011.

[6] J. Stoer and R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis (Third Edition), Springer, New York, 2002.