

## 综合练习一

### 一、填空题(每小题 3 分, 共 18 分)

- 1、设三次独立试验中, 事件  $A$  出现的概率相等, 若已知  $A$  至少出现一次的概率为  $\frac{19}{27}$ , 则在一次试验中, 事件  $A$  出现的概率为\_\_\_\_\_.
- 2、随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda(\lambda > 0)$  的泊松分布, 则  $X$  的分布律为: \_\_\_\_\_.
- 3、设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $G = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  上服从均匀分布,  $P\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}\} =$ \_\_\_\_\_.
- 4、设随机变量  $X$  具有概率密度  $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ , 则随机变量  $X$  的数学期望  $E(X) =$ \_\_\_\_\_.
- 5、设随机变量  $X$  具有概率密度  $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ , 则随机变量  $Y = X - 1$  的概率密度函数  $f_Y(y) =$ \_\_\_\_\_.
- 6、设  $X_1, X_2, \dots, X_9$  是来自正态总体  $N(\mu, 0.81)$ , 计算得到样本观察值  $\bar{x} = 10$ , 则参数  $\mu$  的置信水平为 90% 的置信区间为\_\_\_\_\_.

### 二、选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

- 1、设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(B) > 0, P(A|B) = 1$ , 则下列结论中正确的是( ).  
(A)  $P(A \cup B) > P(A)$ ; (B)  $P(A \cup B) > P(B)$ ;  
(C)  $P(A \cup B) = P(A)$ ; (D)  $P(A \cup B) = P(B)$ .
- 2、设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $F(b) - F(a) =$  ( ).  
(A)  $P\{X \in [a, b]\}$ , (B)  $P\{X \in (a, b)\}$ , (C)  $P\{X \in [a, b)\}$ , (D)  $P\{X \in (a, b]\}$ .
- 3、随机变量  $X \sim N(0, 1)$  与  $Y \sim N(1, 1)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则( ).  
(A)  $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ ; (B)  $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ ;  
(C)  $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ ; (D)  $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ .
4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本, 且  $E(X) = \mu$ , 则下列选项中( )为  $\mu$  的无偏估计.

- (A)  $\hat{\mu}_1 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2$ ; (B)  $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ ;  
 (C)  $\hat{\mu}_3 = \frac{3}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2$ ; (D)  $\hat{\mu}_4 = \frac{3}{2}X_1 + \frac{2}{3}X_2$ .

5、设随机变量  $X \sim t(n)$ ，对给定的  $\alpha (0 < \alpha < 1)$ ， $P\{|X| < x\} = \alpha$ ，则数  $x =$  ( ).

- (A)  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$  (B)  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$  (C)  $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$  (D)  $t_{1-\alpha}(n)$

### 三、解答题 (共 10 分)

某人赴异地开会，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别为：0.3、0.2、0.1、0.4. 如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别为： $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{12}$ ，而乘飞机不会迟到. 结果他迟到了，试问他是乘火车来的可能性为多少？

### 四、(共 10 分)

设离散型随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-1	0	1	2
$p_k$	1/5	1/2	1/5	1/10

(1) 计算： $E(X), D(X)$ ；(2) 假设  $Y = X^2 + 1$ ，求  $Y$  的分布函数  $F_Y(y)$ 。

### 五、(共 12 分)

设总体  $X$  服从参数  $\theta (\theta > 0)$  的指数分布， $x_1, x_2, \dots, x_n$  是对应于样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的观察值，求参数  $\theta$  的矩估计量和极大似然估计量。

### 六、(共 8 分)

设某学校有 1200 名住校生，每人每天都以 75% 的概率去图书馆上自习，利用中心极限定理，问：某天去上自习的同学不少于 935 人的概率。

### 七、(共 12 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$  上服从均匀分布. 求：

(1)  $(X, Y)$  的联合密度函数  $f(x, y)$ ；(2) 边缘密度函数  $f_X(x)$  与  $f_Y(y)$ ；(3)  $P\{X + Y \leq 1\}$ 。

## 八、(共 10 分)

正常人的脉搏平均为 72 次/分,某医生测得 9 例慢性四乙基铅中毒患者的脉搏平均值为 67(次/分),标准差为 6(次/分). 已知这些患者的脉搏服从正态分布, 问: 四乙基铅中毒患者的脉搏与正常人的脉搏有无显著差异? (显著性水平  $\alpha = 0.05$ )

## 九、证明题(共 5 分)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$  是取自总体  $X$  的一个样本, 且总体方差为  $\sigma^2 > 0$ , 令  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 证明:

$$D(X_1 + Y) = (1 + \frac{3}{n})\sigma^2$$

## 综合练习二

### 一、单项选择题(15 分, 每小题 3 分)

1、掷 2 颗骰子, 记点数之和为 3 的事件的概率为  $p$ , 则  $p = ( \quad )$

- (A)  $\frac{1}{36}$       (B)  $\frac{1}{18}$       (C)  $\frac{1}{4}$       (D)  $\frac{1}{2}$

2、设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(B|A) = 1$ , 则必有 ( )

- (A)  $A$  是必然事件    (B)  $P(B|\bar{A}) = 0$     (C)  $A \subset B$     (D) 以上说法都不正确

3、设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 下列说法错误的是 ( )

- A.  $0 \leq F(x) \leq 1$  ;      B.  $F(-x) = 1 - F(x)$  ;  
C. 在定义域内单调非减 ;      D.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  。

4、设  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  相互独立,  $E(X_k) = 10, D(X_k) = 1 (k = 1, 2, \dots, 10)$ , 则对于任意正数  $\varepsilon > 0$ , 有 ( )

- A、  $P\left\{\left|\sum_{k=1}^{10} X_k - 100\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ ;    B、  $P\left\{\left|\sum_{k=1}^{10} X_k - 100\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{10}{\varepsilon^2}$   
C、  $P\left\{\left|\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} X_k - 10\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ ;    D、  $P\left\{\left|\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} X_k - 10\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{10}{\varepsilon^2}$

5、已知随机变量  $X$  满足  $p\{|X - E(X)| \geq 2\} = \frac{1}{16}$ , 则必有 ( )

- A.  $D(X) = \frac{1}{4}$  ;      B.  $D(X) \geq \frac{1}{4}$  ;  
C.  $D(X) < \frac{1}{4}$  ;      D.  $p\{|X - E(X)| < 2\} = \frac{15}{16}$

### 二、填空题(15 分, 每小题 3 分)

1. 一只袋中有 4 只白球和 2 只黑球,另一只袋中有 3 只白球和 5 只黑球, 如果从每只袋中独立地各摸一只球,则事件:“两只球都是白球” 的概率等于\_\_\_\_\_

2. 设  $P(A) = 0.3, P(A \cup B) = 0.6$ , 且  $A$  和  $B$  相互独立, 则  $P(B) =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $X$  服从泊松分布, 且已知  $p(X=1) = p(X=2)$ , 则  $p(X=4) =$ \_\_\_\_\_。4. 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i=1, 2, \dots, n)$ , 则  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  服从分布。

5. 设  $X_1, X_2, X_3$  是取自  $N(\mu, 1)$  的样本,  $\hat{\mu}_1 = kX_1 + 3X_2 + (2-2k)X_3$  是  $\mu$  的无偏估计量则常数  $k =$ \_\_

三、(12 分) 假设同一年级有两个班, 一班 50 名学生, 其中 10 名女生; 二班 30 名学生, 其中 18 名女生, 在两班中任意选一个班, 然后从中任选一名学生, 试求(1)选出的是女生的概率? (2)已知选到的是女生的情况下, 求该女生是一班的概率?

四、已知二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\alpha$	$\beta$

求 (1) 求  $\alpha, \beta$  取什么值时  $X$  与  $Y$  独立? 此时  $D(X)$  为多少?

### 五、统计计算题

1. (8 分) 设某种油漆的干燥时间总体服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其 9 个样本的数据为  $x_1, x_2, \dots, x_9$ , 由此算出  $\bar{x} = 6.0, s = 1.0$ , 求在置信度为 0.95 下未知参数  $\mu$  的双侧置信区间。

2. (10 分) 某种产品的一项质量指标  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 在 5 次独立的测试中, 测得数据 (单位: cm) 1.23 1.22 1.20 1.26 1.23. 试检验 ( $\alpha = 0.05$ ) 可否认为该指标的标准差  $\sigma = 0.015$ ?

六、(10 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

(1) 试确定常数  $C$ ; (2) 求  $X$  与  $Y$  的边缘概率密度函数。

七、(10 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本, 总体

$$X \sim f(x, \theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}, \quad (\theta > 0).$$

试求：(1) 未知参数  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ ；(2) 未知参数  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta}_L$ 。

八、(8分) 设  $X \sim U(a, b)$ 。证明： $E(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

### 综合练习三

#### 一、单项选择题 (15分, 每小题3分)

1、若  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 则  $E(X) = ( )$ 。

(A)  $1/\lambda$ ; (B)  $\lambda$ ; (C)  $\lambda^2$ ; (D)  $-\lambda$ 。

2、设  $X \sim U(a, b)$ , 则  $D(X) = ( )$ 。

(A)  $b^2 - a^2$ ; (B)  $(b-a)^2$ ; (C)  $\frac{(b-a)^2}{12}$ ; (D)  $\frac{a+b}{2}$ 。

3、设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本,  $E(X) = \mu$ , 则  $\mu$  的无偏估计量为  $( )$ 。

(A)  $X_1 + X_n$ ; (B)  $2X_n$ ; (C)  $X_1$ ; (D)  $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$ 。

4、设  $A$  和  $B$  是两个事件, 且  $A \subset B$ , 则有  $P(B-A) = ( )$  成立。

(A)  $P(A) - P(B)$ ; (B)  $P(B) - P(A)$ ; (C)  $1 - P(B-A)$ ; (D)  $1 - P(A)$ 。

5、设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\bar{X}$  是样本均值, 则有  $\bar{X} \sim ( )$  成立。

(A)  $N(0, 1)$ ; (B)  $N(\mu, \sigma^2/n)$ ; (C)  $N(\mu, \sigma^2)$ ; (D)  $N(n\mu, \sigma^2)$ 。

#### 二、填空题 (15分, 每小题3分)

1、若  $X \sim b(n, p)$ , 则  $D(X) = ( )$ 。

2、若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $E(3X+1) = ( )$ 。

3、若  $X, Y$  是随机变量, 则  $X$  与  $Y$  的协方差为  $Cov(X, Y) = ( )$ 。

4、设  $X \sim U(a, b)$ , 则  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = ( )$ 。

5、设  $X \sim N(0,1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ , 且  $X$  与  $Y$  独立, 则  $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim$  ( )。

三、(11 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} ce^{-5x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 求: (1) 常数  $c$ ; (2)  $P\{X > 0.2\}$ 。

四、(11 分) 设  $A$ ,  $B$  和  $C$  为三个事件, 且  $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$ ,  $P(AB) = P(BC) = 0$ ,  $P(AC) = 1/8$ , 求  $P(A \cup B \cup C)$ 。

五、(12 分) 某工厂称该厂日用水量平均不超过 350 公斤, 随机抽取该厂 11 天的用水量, 得到样本均值为  $\bar{x} = 359$ , 样本方差为  $s^2 = 429$ 。设用水量服从正态分布, 在显著性水平为  $\alpha = 0.05$  时, 你能否同意该厂的说法? (已知  $t_{0.05}(10) = 1.7959$ ,  $t_{0.025}(10) = 2.2281$ )。

六、(12 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度函数  $f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , (1) 求  $X$  与  $Y$  的边缘概率密度函数; (2)  $X$  与  $Y$  是否独立? 为什么?

七、(12 分) 设  $X$  是随机变量, 证明  $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 。

八、(12 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本,  $X \sim b(1, p)$ , (1) 求  $p$  的最大似然估计值和最大似然估计量; (2) 在 (1) 中  $p$  的最大似然估计量是否为  $p$  的无偏估计量? 为什么?

### 综合练习一答案

一、填空题: 1、 $\frac{1}{3}$ , 2、 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$ , 3、 $\frac{1}{2}$ , 4、 $\frac{2}{3}$ , 5、

$f_Y(y) = \begin{cases} 2(y+1), & -1 < y < 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  6、(9.5065, 10.4935)

二、选择题: 1、C, 2、D, 3、B, 4、B, 5、C

三、解: 设  $A$  表示此人迟到,  $B_i, i = 1, 2, 3, 4$  分别表示此人乘坐火车、轮船、汽车、飞机. 则由题意, 有:

(2 分)

$$P(B_1)=0.3, P(B_2)=0.2, P(B_3)=0.1, P(B_4)=0.4,$$

$$P(A|B_1)=\frac{1}{4}, P(A|B_2)=\frac{1}{3}, P(A|B_3)=\frac{1}{12}, P(A|B_4)=0, \quad (3 \text{ 分})$$

由贝叶斯公式, 得:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^4 P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.3 \times \frac{1}{4}}{0.3 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.1 \times \frac{1}{12} + 0.4 \times 0}=\frac{1}{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

所以, 此人还是乘火车来的概率为  $1/2$ . (1 分)

四、解: (1)  $E(X)=(-1) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5},$  (2 分)

$$E(X^2)=(-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{19}{25}. \quad (1 \text{ 分})$$

(2)  $Y$  的所有可能取值为: 1, 2, 5.

故  $Y$  的分布律为:

$Y$	1	2	5
$p_k$	$1/2$	$2/5$	$1/10$

(2 分)

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{9}{10}, & 2 \leq y < 5 \\ 1, & y \geq 5 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

五、解:  $X \sim E(\theta), f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$

(1) 令  $\mu_1=E(X)=\theta=A_1=\bar{X}$  得:  $\hat{\theta}=\bar{X}$  为  $\theta$  的矩估计量。 (4 分)

(2) 由题意, 似然函数为:  $L(\theta)=(\theta)^{-n} \exp\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}\},$  (2 分)

对数似然函数:  $\ln L(\theta)=-n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta},$  (2 分)

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$\hat{\theta} = \bar{x}$  为  $\theta$  的极大似然估计值, 则  $\theta$  的极大似然估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X}$ . (1 分)

六、解: 设随机变量  $X$  表示去图书馆的学生数目, 则 (1 分)

$$X \sim B(1200, 0.75), E(X) = 900, D(X) = 225, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{则 } P(X \geq 935) \approx 1 - \Phi\left(\frac{935 - 900}{15}\right) = 1 - \Phi(2.33) \approx 1 - 0.9901 = 0.0099 \quad (3 \text{ 分})$$

因此, 去上自习的同学不少于 935 人的概率为 0.0099. (1 分)

$$\text{七、解: (1) 由已知, 得: } \iint_G dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x dy \right) dx = \frac{1}{2}, \quad (1 \text{ 分})$$

故二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

(2) 边缘密度函数为:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 2 dy = 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad (3 \text{ 分})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 2 dx = 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \quad (3 \text{ 分})$$

$$(3) P\{X + Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_y^{1-y} 2 dx \right) dy = \frac{1}{2}. \quad (3 \text{ 分})$$

八、解: 检验假设:  $H_0: \mu = \mu_0 = 72, H_1: \mu \neq 72$ , (1 分)

$$\text{选取统计量: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{对 } \alpha = 0.05, n = 9 \text{ 得拒绝域: } |T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.3060 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{由于 } \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{67 - 72}{6 / \sqrt{9}} \right| = 2.5 > 2.3060, \quad (3 \text{ 分})$$

故拒绝原假设  $H_0$ , 即认为与正常人的脉搏有显著差异. (1 分)



九、证明：由  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$  是总体  $X$  的一个样本， $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，

$$\text{所以， } D(X_1) = D(X) = \sigma^2, \quad D(Y) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{且 } Cov(X_1, Y) = Cov\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = Cov\left(X_1, \frac{1}{n} X_1\right) = \frac{1}{n} D(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$D(X_1 + Y) = D(X_1) + D(Y) + 2Cov(X_1, Y) \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} + 2 \times \frac{\sigma^2}{n} = \left(1 + \frac{3}{n}\right) \sigma^2$$

### 综合练习二答案

一、1、B    2、D    3、B    4、B    5、D

二、1、 $\frac{1}{4}$     2、 $\frac{3}{7}$     3、 $\frac{2}{3}e^{-2}$     4、 $N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$     5、 $\frac{4}{3}$

三、设女生为 A，第 i 班学生为  $B_i, i = 1, 2$

$$\text{则 } P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{2}{5}, \quad P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{四、(1) } p\{X=1|Y=1\} = \frac{1}{2}, \quad p\{X=2|Y=1\} = \frac{1}{3}, \quad p\{X=3|Y=1\} = \frac{1}{6}$$

$$(2) \alpha = \frac{2}{9}, \beta = \frac{1}{9} \text{ 时 } X \text{ 与 } Y \text{ 独立}$$

$$E(X) = \frac{5}{3}, E(X^2) = \frac{10}{3}, D(X) = \frac{5}{9}$$

五、1、[5.231, 6.769]。

$$2、\text{设 } H_0: \sigma_0 = 0.015, \bar{X} = 1.228, S^2 = \frac{0.0019}{4} = 0.000475$$

$$\chi^2 = \frac{4S^2}{\sigma^2} = 8.444, \quad \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(4) = 11.1, \quad \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(4) = 0.484, \text{ 所以可接受假设。}$$

$$\text{六、(1) } \int_0^2 \int_0^2 C(x+y) dx dy = 1, \quad C = \frac{1}{8}$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y) dy = \frac{1+x}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y) dx = \frac{1+y}{4} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{七、(1) } \hat{\theta} = \left( \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}} \right)^2 \quad \text{其中 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad (2) \quad \hat{\theta}_L = \frac{n^2}{\left( \sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2}$$

$$\text{八、证明: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 综合练习三答案

一、1、B 2、C 3、C 4、B 5、B

二、1、 $np(1-p)$  2、 $3\mu+1$  3、 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

注：答  $E(XY) - E(X)E(Y)$  也可以。 4、 $\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  5、 $t(n)$

三、(1)  $c=5$ 。 (2)  $P\{X > 0.2\} = \int_{0.2}^{\infty} 5e^{-5x} dx = e^{-1} \approx 0.3679$ 。

四、 $P(A \cup B \cup C) = 5/8$

五、用  $X$  表示该厂日用水量， $t = \frac{359-350}{\sqrt{429}/\sqrt{11}} = 1.442 < t_{0.05}(10) = 1.8125$   
~~单边检验~~改为双边检验 ~~2.2281~~

因此，不能否定  $H_0$ ，即可以认为该厂的平均日用水量不超过 350 公斤。

$$\text{六、(1) } f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y}-y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

(2) 由于  $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ ，所以  $X$  与  $Y$  不独立。

$$\text{七、} D(X) = E\{[X-E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) - [E(X)]^2\}$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

八、(1)  $p$  的最大似然估计量为  $\hat{p} = \bar{X}$ 。 (2) 由于  $E(\hat{p}) = E(\bar{X}) = p$ ，所以在 (1) 中  $p$  的最大似然估计量  $\hat{p} = \bar{X}$  是  $p$  的无偏估计量。