Projet 2: SAT

Daniel Hirschkoff, Olga Kupriianova, Antoine Plet

http://perso.ens-lyon.fr/daniel.hirschkoff/P2

Projet2 — présentation

- implémenter plusieurs versions d'un **solveur SAT**
- dans le langage de votre choix parmi
  C Caml Java
- modalittés
  - en binôme
    appariements par "niveaux proches en programmation"
  - 4 échéances au long du semestre
- séances en salle machines, quelques séances en amphi

Évaluation

- capacité à développer du code
  - de façon réfléchie (clarté, modularité, efficacité)
  - de manière organisée (échéances, respect des consignes)
- exigences
  - adaptées à votre niveau d'expertise
  - uniformité sur l'organisation
- travail important, tout au long du semestre
  - entre les séances notamment (maison, salles machines)
- petit rapport et petite soutenance, à la fin

SAT et DPLL

Le problème SAT : description, notations

- on cherche à satisfaire
  une formule logique en forme normale conjonctive

$$(\mathtt{x}_1 \vee \overline{\mathtt{x}_3} \vee \mathtt{x}_4) \;\wedge\; (\overline{\mathtt{x}_1} \vee \mathtt{x}_2) \;\wedge\; (\mathtt{x}_2 \vee \mathtt{x}_3 \vee \mathtt{x}_5) \;\wedge\; (\overline{\mathtt{x}_3} \vee \mathtt{x}_5)$$

  quatre étages:
  - variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$
  - littéraux α, β
    exemples: $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots$ $\overline{x_1}$: "non x_1" (parfois $\neg x_1$)
    si $\alpha = \overline{x_7}$, α vrai signifie x_7 faux
  - clauses $C = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$
  - formule $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_r$
- formule satisfiable: il existe une *assignation* d'une valeur de vérité aux variables telle que chaque clause contienne au moins un littéral vrai
- cas limite:

  formule vide: satisfiable

  clause vide: insatisfiable

Positionnement

- satisfiabilitté: rôle central en théorie de la complexité
- des solveurs: utiliser la machine pour démontrer des résultats
  un domaine de recherche:

  des méthodes de toutes sortes. . .

  une technologie qui s'affine depuis des décennies

  . sur l'ensemble du spectre, de méthodes complètes à des heuristiques

  . de l'outil-exemple pour chercheur/théoricien à la dimension industrielle

  . . . pour résoudre maints problèmes

  logistique, planification, vérification de matériel et de logiciel, jeux, . . .

- ce cours
  - un peu : se faire de la culture sur SAT

    (est-ce vraiment un sujet de L3?) / "démystifier NP"

  surtout :

  SAT est un support pour apprendre à programmer/s'organiser, dans le cadre d'un projet logiciel non rikiki

  (en particulier, il ne s'agit pas de faire du "SAT ultra sophistiqué")

L'algorithme au cœur du solveur: DPLL

Davis-Putnam-Logemann-Loveland, 1962

- on explore l'espace des affectations possibles des variables

  essayer avec $x_1 = \texttt{vrai}$ ...

  essayer avec $x_2 = \texttt{vrai}\ldots$ ...récursivement

  si ça ne marche pas,

  essayer avec $x_2 = \texttt{faux}\ldots$ ...

- exploite ce que l'on appelle le *variable splitting*
  - on explore toutes les instanciations possibles *(des variables)*
  - on manipule une *instanciation partielle*, que l'on étend tant qu'elle est consistante (pas de *conflit*)
  - en cas de conflit, on élimine un ensemble d'instanciations

- on fait des paris

  à chaque pari, on **déduit des conditions nécessaires**

  p.ex. si $x_3 = \texttt{vrai}$, la clause $\overline{\texttt{x}_3} \vee \overline{\texttt{x}_{12}}$ implique $\texttt{x}_{12} = \texttt{faux}$

$\hookrightarrow$ on n'énumère ainsi pas *toutes* les affectations possibles

Algorithme DPLL — étapes essentielles

1. *boolean constraint propagation* **déduire**

   1.1 trouver les affectations *nécessaires*

   - si une clause est $\{\alpha\}$, alors α est nécessairement satisfait
     (i.e., $x =$ `vrai` si $\alpha = x$, $=$ `faux` si $\alpha = \overline{x}$)
   - si une variable x n'apparaît qu'avec une seule polarité, déduire sa valeur

   1.2 propagation des valeurs
   si nécessairement α est satisfait,
   . "éliminer" toutes les clauses contenant α
   . "éliminer" $\overline{\alpha}$ de toutes les clauses le contenant ($\star$)

   1.3 recommencer en 1.1

2. choix **décider**

   choisir une variable x_i encore inconnue,
   et lui attribuer une valeur (`vrai` ou `faux`)

3. *backtrack* **rebrousser chemin**

   l'étape ($\star$) peut engendrer une clause vide: **conflit**
   on revient alors sur le dernier *choix* ayant été fait

   (choix, pas déduction)

DPLL – exemple

autres transparents

Paris et backtrack

- à un instant donné dans l'exécution de DPLL, on a parié sur la valeur d'un certain nombre de variables
- on maintient une pile de tranches
  - on a fait n **paris** sur des variables $x_{c_1}, \ldots, x_{c_n}$
  - chaque choix a entraîné, par BCP, l'assignation d'un certain nombre de variables (elles sont dans la même tranche)
    $x_{c_1}, y^1_{c_1}, \ldots, y^{i_1}_{c_1}, \mid x_{c_2}, y^1_{c_2}, \ldots, y^{i_2}_{c_2}, \ \ldots \ \mid x_{c_n}, y^1_{c_n}, \ldots, y^{i_n}_{c_n}$
- lorsque l'on rebrousse chemin, il faut
  - retourner sa veste pour le dernier pari *où cela est possible*
    - si on a parié sur $x_{c_n} = \texttt{faux}$ car on avait déjà vu que $x_{c_n} = \texttt{vrai}$ était contradictoire, remonter à $x_{c_{n-1}}$
    - *(dans une telle situation, on peut imaginer que $x_{c_n} = \texttt{faux}$ n'était pas un pari, mais une déduction)*
  - annuler l'affectation des variables ayant découlé de ce dernier pari

Pensez avant de programmer

- choix des structures de données
  - qu'est-ce qu'une variable, un littéral, une clause ?
    (dans votre programme)
  - phase de propagation
    - à quoi veut-on accéder et comment?
      . toutes les clauses contenant telle variable
      . le nombre de littéraux "vivants" dans telle clause
      . le nombre de clauses "vivantes"
    - quelles opérations faut-il être en mesure d'effectuer?
  - l'affectaction courante
    que faire quand on revient sur l'affectation d'une variable?
- n'utilisez pas une grande fonction récursive: implémentez la récursion à la main (on manipule la pile, on a un meilleur contrôle)
- autre aspect important : programmez modulairement
  dans un mois, si vous voulez changer une des structures de données, il faudrait que cela ne soit pas une catastrophe
  (+ interdit de dire "désolé, mais je ne prévois pas de me tromper"!)

Rendu 1 — DPLL

- en entrée: une formule logique
- en sortie: non/oui et une affectation des variables
- à l'intérieur: algorithme DPLL "simple"
  - **structure modulaire**, ouvrant la voie à des raffinements successifs

    un fichier pour la boucle principale
  - **structures de données** pour
    - la représentation des variables, littéraux, clauses

      . une variable peut avoir trois états: `inconnu`, `vrai`, `faux`
    - l'état courant de la recherche
  - **efficacité raisonnable**
    - typiquement, 80-90 % du temps passé dans la propagation des informations
    - pouvoir au moins soupçonner les sources majeures d'inefficacité
  - **traitement de l'entrée**
    - déductions diverses (p.ex. détecter les $\mathtt{x} \vee \overline{\mathtt{x}}$)
    - éventuellement, tri des variables
    - éventuellement, collecte d'informations sur les clauses

Recommandations

- `minisat` est installé sur les machines des salles libre-service
  - l'exécution de référence
- faites des tests en nombre raisonnable
  - un sous-répertoire avec des fichiers de tests que vous écrivez/engendrez
- implémentez *ce qui vous est demandé*
- insistons: importance de la ponctualitté des rendus!
  - les rendus sont incrémentaux, mais ce n'est pas uniquement le résultat en fin de semestre qui compte

Soyons alphabétisés

Lisez **les sujets de rendu.**

À titre d'information: rendus $n+1$

- variations sur la manière dont on choisit le prochain pari
  - sur quelle variable miser, avec quelle valeur
- une technique *astucieuse* pour la propagation des unités
- calculer des choses *astucieuses* sur l'état courant de l'exploration
- extension, en cours de route, de l'ensemble des clauses
- backtrack *astucieux* (plus en amont que le dernier pas)
- on décidera de repartir à zéro après K conflits
- on tirera d'emblée au hasard une affectation pour toutes les variables, pour ensuite touiller de ci de là jusqu'à satisfaire la formule

ne vous effrayez pas: vous pouvez dans un premier temps faire "quelque chose qui marche", quitte à devoir reprendre une partie de la structure par la suite

Transformation de Tseitin

Formules quelconques, lois de de Morgan

- la procédure DPLL s'applique à des formules en *forme normale conjonctive* (CNF)

$$(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \;\wedge\; (x_1 \vee x_4 \vee x_5) \;\wedge\; (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

- on veut prendre en entrée une formule logique plus complexe

$$\big(\neg p \wedge (q \Rightarrow r)\big) \;\Rightarrow (q \vee \neg p)$$

Lois de de Morgan :

$$[(p \wedge q) \vee r] = (p \vee r) \wedge (q \vee r) \qquad [\neg(p \wedge q)] = \neg p \vee \neg q$$

$$[\neg(p \vee q)] = \neg p \wedge \neg q \qquad [p \Rightarrow q] = \neg p \vee q \qquad [\neg\neg p] = p$$

- on obtient une formule en CNF en itérant ces lois. . .
  . . . mais la distributivité fait exploser la taille
- inévitable si on veut préserver le sens de la formule
- or il suffit de préserver la **satisfiabilitté**
  et on veut aussi pouvoir engendrer, le cas échéant, un contre-exemple de la formule de départ

Transformation de Tseitin, définition

- pour chaque sous-formule p de la formule de départ, on introduit une nouvelle variable ξ_p
- on y va inductivement, pour associer à chaque sous-formule p une formule $[p]$, *directement en forme normale conjonctive*:

$$[p = p_1 \vee p_2] = (\neg\xi_p \vee \xi_{p_1} \vee \xi_{p_2}) \wedge (\xi_p \vee \neg\xi_{p_1}) \wedge (\xi_p \vee \neg\xi_{p_2})$$

$$[p = p_1 \wedge p_2] = (\neg\xi_p \vee \xi_{p_1}) \wedge (\neg\xi_p \vee \xi_{p_2}) \wedge (\xi_p \vee \neg\xi_{p_1} \vee \neg\xi_{p_2})$$

$$[p = \neg p_1] = (\neg\xi_p \vee \neg\xi_{p_1}) \wedge (\xi_p \vee \xi_{p_1})$$

$$[p = x] = (\neg\xi_p \vee x) \wedge (\xi_p \vee \neg x)$$

ainsi, par exemple, lorsque $p = p_1 \vee p_2$, $[p]$ exprime que p est satisfaite si et seulement si $p_1 \vee p_2$ l'est

- une formule p est transformée en la conjonction

$$\xi_p \wedge \bigwedge_{p' \text{ sous-formule de } p} [p']$$

le ξ_p impose que la formule initiale (à la racine) soit satisfaite

Tseitin, propriétés

on se donne une formule p, on en calcule la transformée de Tseitin, notée (par abus) $[p]$

- $[p]$ se calcule en temps **linéaire** par rapport à la taille de p
- p et $[p]$ sont **équi-satisfiables**
  - toute valuation qui satisfait $[p]$ satisfait p (et satisfait toujours p en modifiant la valeur de variables ne se trouvant pas dans p)
  - une valuation qui satisfait p peut être étendue en une valuation qui satisfait $[p]$
- (on peut optimiser la représentation en mémoire en partageant des sous-expressions)

Retour au rendu 1

- deux versions de votre solveur
  1. le solveur SAT “brut”
     qui mange des formules en CNF
  2. le “solveur convivial”
     qui mange des formules quelconques
- 2 applique Tseitin pour s’appuyer sur 1

  cela rappelle (une partie de) la structure d’un *compilateur*

Très rapidement,

quelques éléments de compilation

analyses lexicale et syntaxique: fabriquer des arbres

Intepréter / compiler

- **interprète:** implémentation de la sémantique opérationnelle
  exécuter le programme
- **compilateur:** traduction
  traduire (en préservant le sens)
  (p.ex. IMP $\rightsquigarrow$ *assembleur)*

interprètes et compilateurs sont des programmes manipulant des programmes

Un compilateur

- traducteur de code à code (de *fichier source* à *fichier objet*)
- anatomie sommaire $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3}$
  1. **front end**
     du fichier de texte à une représentation arborescente
     `"let x = 3 in (f x)+2"`
     ou plutôt
     `['l';'e';'t';' ';'x';' ';'=';' ';'3';' ';'i';'n';' ';' ';'(';'f';' ';'x';')';'+';'2';'\n']`

     `Let( Var "x", Cst 3, Add(App(Var "f", Var "x"), Cst 2) )`
  2. des tas de **transformations** (*représentations intermédiaires*)
  3. **back end**
     génération de code: d'une représentation arborescente à un fichier de texte
     `[Push(rx);Set(rj,f_addr);Call;Pop;Set(r0,2);Add]`

```
start:    push(rx);
          set(rj,f_addr);
          call;
          pop;
          set(r0,2);
          add;
```

- "tout" est dans l'étape **2**: analyses, transformations, réécritures, algorithmique, optimisations, ...

Les deux étapes dans le front end

- analyse lexicale

  flot de caractères (source) → flot de *lexèmes*

  - lexème (*token*): "atome" du langage
  - typiquement:
    - mots-clefs (`let`, `begin`, `while`,...)
    - symboles réservés (`(`, `+`, `;;`, `;`,...)
    - identificateurs (`f`, `toto`, ...)

  ainsi `32*52+(let x = 5 in x*x)`

  → `INT(32), MULT, INT(52), ADD, LPAREN, LET, ID("x"), EGAL, INT(5), IN, ID("x"), MULT, ID("x"), RPAREN`

  (`INT` et `ID` ont un *attribut*, entier et chaîne de caractères respectivement)

- analyse syntaxique

  flot de lexèmes → *arbre de syntaxe abstraite*

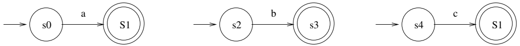
```
→ Add( Mult(Int(32), Int(52)),
       Let("x", Int(5), Mult(Var("x"), Var("x"))) )
```

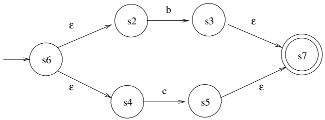
  - étape intermédiaire: arbre d'analyse syntaxique *(parse tree)*

Analyse lexicale

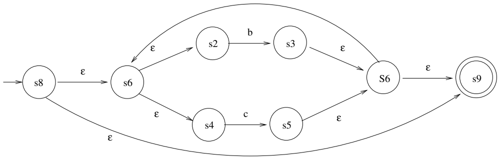
- chaque lexème est décrit par une *expression régulière*
- principaux éléments (syntaxe de `ocamllex`):
  - caractère `'$'`, chaîne de caractères `"else"`
  - intervalle `['0'-'9']` *(un chiffre)*
  - disjonction (de caractères)
    `['\t' ' ']` *(tabulation ou espace)*
  - juxtaposition `['A'-'Z']['a'-'z' 'A'-'Z']`
    (mot de 2 lettres commençant par une majuscule)
  - répétitions: `+` signifie au moins 1, `*` zéro ou plus
    `['a'-'z']+['a'-'z' '0'-'9']*`
    (ça commence par une lettre puis des lettres ou des chiffres)
  - disjonction `a* | b*`
- en sortie de l'analyse lexicale: des *mots*

Expression régulière ↔ automate non déterministe

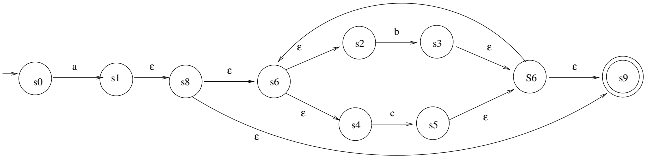




NFA pour b|c



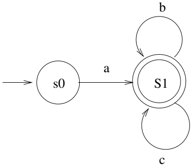
NFA pour (b|c)*



NFA pour a(b|c)*

Déterminisation, minimisation

- à partir de l'automate du transparent précédent, on dispose de procédures pour *déterminiser* l'automate (explosion du nombre d'états), puis le *minimiser*
- on aboutit à



- comment implémenter l'automate résultant?
  - une table (très creuse)

état	a	b	c	d	e
e1	-	e2	e3	-	-
e2	e4	-	-	-	-
e3	-	-	e3	-	-

  - éliminer les états: un plat de spaghetti, fait de `if` et de `goto`

Analyse lexicale : au total

- on décrit le **dictionnaire**

  ensemble d'expressions régulières,
  auxquelles on associe un nom *(avec éventuellement un attribut)*
  un lexème

```
| "let"                { LET }
| "in"                 { IN }
| ['0'-'9']+  as s     { INT (int_of_string s) }
```

- "magiquement", on obtient un programme qui reconnaît les mots du dictionnaire (et proteste sinon)

Démo

Analyse syntaxique

- l'analyse syntaxique se fonde sur une approche plus puissante: **règles de grammaire**
  - les règles de grammaire font intervenir les lexèmes et des "variables" (les non terminaux)
  - exemple de grammaire:

$$E \quad ::= \quad K \;\mid\; E + E \;\mid\; E * E \;\mid\; (E) \;\mid\; \texttt{let}\ Id = E\ \texttt{in}\ E$$

    - E non terminal (il peut y en avoir plusieurs)
    - $K, \texttt{let}, Id, +, *, (,), \texttt{in}, =$ lexèmes

présentation alternative:

$$E \;\rightarrow\; K \qquad E \;\rightarrow\; E + E \qquad E \;\rightarrow\; E * E \qquad E \;\rightarrow\; (E) \qquad E \;\rightarrow\; \texttt{let}\ Id = E\ \texttt{in}\ + E$$

- analyse lexicale : du flot de caractères au flot de lexèmes
- analyseur syntaxique (ou *parser*) : applique les règles de grammaire pour *reconnaître* une suite de lexèmes
  - on change la structure : un flot (de lexèmes) devient un arbre
  - on construit des *phrases* à partir de *mots*

Reconnaître une séquence de lexèmes

- l'idée est de construire un *arbre de dérivation* permettant de reconnaître le flot de lexèmes
  - grammaire : $E \quad ::= \quad E + E \quad | \quad E * E \quad | \quad K \qquad K$ un entier
  - soit le flot `32, +, 26, *, 2`
  - on peut reconnaître de deux manières:

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E + E \\ & \rightarrow & K_{32} + E \\ & \rightarrow & K_{32} + E * E \\ & \rightarrow\rightarrow & K_{32} + K_{26} * K_2 \end{array} \qquad \text{ou alors} \qquad \begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E * E \\ & \rightarrow & E * K_2 \\ & \rightarrow & E + E * K_2 \\ & \rightarrow\rightarrow & K_{32} + K_{26} * K_2 \end{array}$$

deux arbres différents: *ambiguïté*

  - aucun moyen en revanche de reconnaître `9 * 1 + + 1`

Ce que fait le parser

$$E \quad ::= \quad E + E \mid E * E \mid (E) \mid a \mid b \mid c$$ `a+b*c`

pile	entrée	action
$\$$	$a + b * c\$$	shift
$\$a$	$+b * c\$$	reduce : $E \to a$
$\$E$	$+b * c\$$	shift
$\$E+$	$b * c\$$	shift
$\$E + b$	$*c\$$	reduce : $E \to b$
$\$E + E$	$*c\$$	shift **(très malin)**
$\$E + E*$	$c\$$	shift
$\$E + E * c$	$\$$	reduce : $E \to c$
$\$E + E * E$	$\$$	reduce : $E \to E * E$
$\$E + E$	$\$$	reduce : $E \to E + E$
$\$E$	$\$$	accept

- à la fin, on a un arbre `add(id(a),mul(id(b),id(c)))`

Lex & Yacc, Flex & Bison, . . .

- analyse syntaxique : on écrit la grammaire, et on associe à chaque règle une *action sémantique* *(construction de l'arbre)*
- DÉMO avec ocamllex ocamlyacc
- *remarque :* avec yacc, on ôte les ambiguïtés en "bricolant", pas en réécrivant la grammaire (comme en FDI)
- on trouve *"partout"* les outils pour les analyses lexicale et syntaxique

```
%{
(* —— preambule: ici du code Caml —— *)

open Expr   (* rappel: dans expr.ml:
             type expr = Const of int | Add of expr*expr | Mull of expr*expr *)

%}
/* description des lexemes */

%token <int> INT        /* le lexeme INT a un attribut entier */
%token PLUS TIMES
%token LPAREN RPAREN
%token EOL              /* retour a la ligne */

%left PLUS
%left TIMES


%start main              /* "start" signale le point d'entree: c'est ici main */
%type <Expr.expr> main     /* on _doit_ donner le type du point d'entree */

%%
    /* —— debut des regles de grammaire —— */
                              /* a droite, les valeurs associees */
main:                         /* le point d'entree */
    expr EOL                  { $1 }  /* on veut reconnaitre un "expr" */
;
expr:     /* regles de grammaire pour les expressions */
  | INT                       { Const $1 }
  | LPAREN expr RPAREN        { $2 } /* on recupere le deuxieme element */
  | expr PLUS expr            { Add($1,$3) }
  | expr TIMES expr           { Mul($1,$3) }
;
```

```
%{ // useful functions.
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <iostream>
#include <fstream> //for dag output
#include "ast.h"

using namespace std;

int line_number = 1; /* number of current source line */
extern int yylex(); /* lexical analyzer generated from lex.l */
extern char *yytext; /* last token, defined in lex.l
*/

void yyerror(char *s){
fprintf(stderr, "line %d: syntax error. Last token was \"%s\"\n", line_number, yytext);
exit(1);
}

void error(char *s){
fprintf(stderr, "line %d: error: %s\n", line_number, s);
exit(1);
}

 struct expr *parsing_result = NULL;
%}

//type of non terminals
%union {
  double number;
  char* id_string;
  struct expr *expr;
}

//token declaration for minic input

%token TK_PLUS TK_MINUS TK_MUL TK_DIV
%token TK_NUM TK_VAR
%token TK_LPAR TK_RPAR

/* Associativity */
%left TK_PLUS TK_MINUS
%left TK_MUL TK_DIV

%type<number> TK_NUM
%type<id_string> TK_VAR
%type<expr> e_expr t_expr f_expr
/* Axiom */
%start expr

%%

//ETF (sub-)grammar

e_expr:
e_expr TK_PLUS t_expr { $$ = expr_binop($1, $3, PLUS) ;}
| e_expr TK_MINUS t_expr { $$ = expr_binop($1, $3, MINUS) ;}
| t_expr
;

t_expr:
  t_expr TK_MUL f_expr { $$ = expr_binop($1, $3, MULT) ;}
| t_expr TK_DIV f_expr { $$ = expr_binop($1, $3, DIV) ;}
| f_expr
;

f_expr:
TK_NUM { $$ = expr_number($1); }
| TK_VAR { $$ = expr_var($1); }
| TK_LPAR e_expr TK_RPAR { $$ = $2; }
;

expr:
e_expr { parsing_result = $1; }
;
```

Les deux semaines à venir

- **la semaine prochaine**
  - TP: analyses lexicale et syntaxique
    Tseitin

    tout le monde commence le projet, seul(e)
  - constitution des binômes
    1. *questionnaire*
    2. stratification

       `http://perso.ens-lyon.fr/daniel.hirschkoff/P2`
    3. vous m'envoyez un mail

       "nous sommes X et Y, et nous choisissons le langage Z"

  contrainte : X et Y distants d'au plus un "niveau" dans la stratification

- **la semaine suivante**
  - démarrage du projet (les binômes sont constitués)

- **premier rendu**
  - pour le **????** *sans doute le 16 février*

Améliorer DPLL

Watched literals

(littéraux surveillés)

Watched literals

- une technique permettant d'économiser du temps lors de la propagation des contraintes
  - *"Chaff: Engineering an Efficient SAT Solver"*, Moskewicz, Madigan, Zhao, Zhang, Malik, DAC 2001.
  - questions de droits: technique brévetée ?

- remarque:
  les clauses ont toutes au moins deux littéraux
- *propagation* lorsque tous les littéraux sauf un sont à `faux`

Watched literals — principes

- pour chaque clause, on ne regarde que deux littéraux...
  ...qui ne sont pas à `faux` (`vrai` ou `inconnu`)
  - si c'est impossible, c'est que la clause en question est inactive

    autrement dit, un littéral est à vrai
- lorsque le littéral α est mis à `faux`,
  - pour toutes les clauses C où α est surveillé, on cherche un autre littéral à surveiller
    - si pas possible, déclenchement de propagation supplémentaire

    NB: là où α apparaît sans être surveillé, *on ne fait rien*

  - *optionnel:* pour toutes les clauses C contenant $\overline{\alpha}$ (surveillé ou non),
    - on se fait la remarque que C est satisfaite
    - si on vient de rendre la clause satisfiable,
      on installe $\overline{\alpha}$ comme littéral surveillé (priorité aux littéraux vrais par rapport aux inconnus)

    $\hookrightarrow$ on détermine plus facilement si une clause est satisfaite

Watched literals — commentaires

- alors donc :
  - on ne regarde qu'au plus deux littéraux pour savoir si une clause est satisfaite
  - invariant: tant que la clause n'est pas satisfaite, aucun des deux littéraux n'est à `faux`
  - ce faisant, on regarde moins de pointeurs
    "α apparaît-il dans C_i?" vs *"α est-il surveillé dans C_i?"*
- backtrack: on laisse les littéraux surveillés inchangés!

  (on ne bouge pas les jumelles)
  - les jumelles ne doivent pas revenir à leur position antérieure
  - l'état n'est pas nécessairement le même, mais essentiellement équivalent
  - remarque: si on surveille $(\texttt{faux}, \_)$, alors, par l'invariant, on surveille $(\texttt{faux}, \texttt{vrai})$, et lors d'un backtrack on passera de `faux` à ? avant de modifier les littéraux non surveillés de la clause

- particulièrement efficace sur les entrées ayant de longues clauses
- NB : avec WL, pas de propagation "littéral pur"

Apprentissage de clauses

(clause learning)

La méthode historique

Résolution

Engendrer une nouvelle clause

supposons que la formule contienne deux clauses de la forme

$$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{\alpha_1} \vee \cdots \vee \boldsymbol{\alpha_k} \qquad C_n$$

et

$$\boldsymbol{\overline{x}} \vee \boldsymbol{\beta_1} \vee \cdots \vee \boldsymbol{\beta_n} \qquad C_k$$

avec $\{x, \overline{x}\} \cap (\{\alpha_i\}_i \cup \{\beta_j\}_j) = \emptyset$

alors la clause

$$\boldsymbol{\alpha_1} \vee \cdots \vee \boldsymbol{\alpha_k} \vee \boldsymbol{\beta_1} \vee \cdots \vee \boldsymbol{\beta_n}$$

s'appelle le *résolvant* de C_n et C_k

- elle est obtenue en "mariant" C_n et C_k selon x
- elle est conséquence logique (déduite) de $C_n \wedge C_k$
  - elle implique $C_n \wedge C_k$

Résolution — correction, complétude

- la résolution est correcte (le résolvant découle des clauses utilisées)
- la résolution n'est pas complète (il existe des formules conséquences qui ne sont pas construites par la résolution)
- la résolution est complète *réfutationnellement* : la clause vide est obtenue si et seulement si la formule de départ est insatisfiable
- approche pour SAT :

  appliquer la résolution jusqu'à obtenir la clause vide (insatisfiable) ou ne plus pouvoir résoudre (satisfiable)

$\overline{x} \vee z$	(1)		$\overline{x}$	(par (1), (3))	(5)
$\overline{y} \vee z$	(2)		$\overline{y}$	(par (2), (3))	(6)
$\overline{z}$	(3)		y	(par (4), (5))	(7)
$x \vee y$	(4)		$\varnothing$	(par (6), (7))	(8)

Algorithme de Davis Putnam (1960)

- on suppose les variables ordonnées $x_1 < \cdots < x_k$
- idée: résoudre le plus possible par rapport à la plus grande variable, puis itérer

- k seaux $S_k, S_{k-1}, \ldots, S_1$
- chaque clause C est ajoutée au seau S_i si
  - x_i apparaît dans C
  - pas de variable $x_{j>i}$ dans C
- on engendre *tous les résolvants possibles* pour le seau S_k, en les insérant en-dessous dans le bon seau

  cas particulier:

  pas de résolution, car x_k n'apparaît qu'avec une seule polarité

  $\hookrightarrow$ on passe directement à S_{k-1}
- cas d'arrêt? (insatisfiable, ou solution trouvée)

Apprentissage de clauses, donc

Étendre la formule traitée par DPLL

- principe : ajouter une **clause dérivable**
  pendant l'exécution de l'algorithme
- cette clause dérivable sera construite en s'appuyant sur la **résolution**
- NB : on travaille avec la propagation unitaire,
  sans la propagation par polarité unique

Quand ça coince

- focalisons-nous sur **un conflit**
  le conflit est détecté sur une clause

$$C \quad = \quad \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n \qquad \longleftarrow \textit{ tout le monde est à faux}$$

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

  telle que tous les litéraux α_i sont à faux

  cette clause est contradictoire

- d'où vient la valeur des α_i?
  - de **paris** faits (*paris*, ou *hypothèses*)
  - de conséquences **déduites**

    déduction par clause unitaire : une clause dont tous les litéraux sauf un sont à faux C' ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ? ◇

- ces affectations ont une date : **niveau de décision**

Déroulement de l'algorithme DPLL

- niveaux de décision
  - niveau de décision: 0 au départ, $+1$ à chaque pari
  - niveau de décision d'un littéral déduit :
    niveau de décision courant au moment où la déduction est faite
- *backtrack stack*

$$|3^1 \;\; -2^1 \;\; 17^1 \;|-5^2 \;\; 4^2 \;\; -1^2 \;\; -7^2 \;|3^3 \;\; 10^3$$

(chaque littéral est annoté avec son niveau de décision)

"tranches de temps"

par exemple :

$$C \;=\; \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$$

$$\diamond^5 \;\; \diamond^2 \;\; \diamond^5 \;\; \diamond^1 \;\; \diamond^2 \;\; \diamond^5 \;\; \diamond^3 \;\; \diamond^1$$

- $\boxed{\text{transparents de Oliveras et Rodríguez-Carbonell}}$

il y a une petite erreur : au moment de déduire p10, on se sert de la clause 4, or on ne devrait pas car c'est 2, ça n'est pas -2.

Mener l'enquête à partir d'un conflit

- on part de la clause où se manifeste le conflit

  T_0 ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ $\longleftarrow$ *tout le monde est à faux*

  $T_0 = C_i$ pour un certain i

- elle contient *au moins deux littéraux* qui ont été déterminés *(découverts faux, de fait)* au niveau de décision courant

  T_0 ◇ ◇ ◇ • ◇ ◇ • ◇

  (sinon elle aurait engendré un conflit, ou une propagation, plus tôt)

- *au moins un littéral* de la clause a été *déduit* faux au niveau de décision courant

  T_0 ◇ ◇ ◇ • ◇ ◇ • ◇

  on cherche la **justification** de cette déduction :

  c'est une clause C_j contenant l'opposé de ce littéral

  C_j ▽ $\bar{\bullet}$ ▽ ▽ ▽ • ▽ • ▽ ▽

- on construit T_1 à partir de T_0 et C_j : $\boxed{\textbf{résolution}}$ via •

  T_1 ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ • ◇ ▽ ▽ ▽ ▽ • ▽ • ▽ ▽

Engendrer de nouvelles clauses

- on "remonte la causalité" en construisant T_1 à partir de T_0

T_0 ◇ ◇ ◇ • ◇ ◇ • ◇ C_j ▽ $\bar{\bullet}$ ▽ ▽ ▽ • ▽ • ▽ ▽

T_1 ◇ ◇ ◇ • ◇ • ◇ ▽ ▽ ▽ ▽ • ▽ ▽ ▽ ▽

  - il reste au moins un • dans T_1, la clause résultante

    • : littéral ayant été fixé à faux dans le niveau de décision courant

    <u>NB:</u> *il peut n'en rester qu'un, par idempotence* $(\alpha_t \vee \alpha_t \leftrightarrow \alpha_t)$
  - T_1 est déduite à partir de $T_0 = C_i$ et C_j, donc
    T_1 est une conséquence du problème courant
  - T_1 est contradictoire, car T_0 l'est et seul $\bar{\bullet}$ est à "vrai" dans C_j

- si T_1 a au moins deux •, on itère, en construisant T_2, T_3, ...
  - invariants :
    - il y a au moins un •
    - T_i conséquence du problème courant
    - T_i contradictoire
  - on s'arrete lorsqu'il ne reste qu'un •
  - ça termine : intuitivement, on ne peut pas boucler car on "remonte dans le temps"

Visualiser les justifications : **Graphe des conflits**

- graphe orienté, dont les nœuds sont étiquetés par des littéraux
- si lors de la propagation, on utilise la clause

$$C \;=\; \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k \vee \beta$$

pour déduire, à partir de $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_k$, que β est vrai,

on insère les nœuds $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_k$,

et, pour chaque $\overline{\alpha}_i$, un arc (orienté) $\overline{\alpha}_i \curvearrowright \beta$

- le conflit est représenté par un noeud supplémentaire $\perp$

$\perp$ est fils des nœuds intervenant dans le conflit

(variante: on a deux nœuds α et $\overline{\alpha}$ ayant $\perp$ comme fils)

transparents de Oliveras et Rodríguez-Carbonell (p.11)

Circonscrire le conflit

- remonter les causes du conflit nous conduit à mettre en évidence un ensemble N de nœuds
  - qui contient $\perp$
  - qui ne contient que des littéraux • dont la valeur a été *déduite* au niveau de décision courant
- la phase de "remontée" $(T_i \rightsquigarrow T_{i+1})$ s'arrête lorsque l'on trouve un UIP (*Unique Implication Point*):
  - un seul littéral du niveau courant pointe vers un nœud de N
  - tous les autres littéraux pointant vers N sont de niveau strictement inférieur au niveau courant

transparents de Oliveras et Rodríguez-Carbonell (p.12)

- on rassemble la négation des littéraux desquels part un arc vers un nœud de N, cela donne une clause conséquence

c'est la **clause apprise** ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ •

. 1 seul littéral au niveau courant
. "explication" du conflit

Vers où revenir en arrière ?

- contemplons la clause apprise C_a $\diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \bullet$

  un seul littéral, α, au niveau courant
- une telle clause
  - peut être déduite, par résolution, à partir de la formule sur laquelle on travaille
  - est contradictoire dans l'affectation courante *tous les littéraux sont à faux*
- C_a aurait permis de déterminer *plus tôt* la valeur de α

  p.ex., si le niveau courant est 12, avec

$$C_a \quad = \quad x_1^7 \vee \overline{x_4}^{\,9} \vee \overline{x_8}^{\,5} \vee \alpha^{\,12}$$

  on voit que la valeur de α pouvait être déterminée dès le niveau 9

  $\hookrightarrow$ on ajoute C_a et on revient au niveau 9
- backtrack : on revient au niveau

  (max des niveaux des littéraux différents de α dans C_a)

Backtracker loin, backtracker malin

- la clause apprise C_a est vue comme un *raccourci*
  - on aurait pu propager l'information plus tôt
  - et ainsi échouer plus tôt
- on remonte jusqu'à l'endroit où elle aurait pu être utilisée
  - peut-être va-t-on reparcourir le chemin qui nous a mené au conflit courant

    mêmes paris, mêmes déductions
  - on fait le pari qu'on gagne à ajouter ce raccourci

    "coupe des branches" dans l'espace des possibles
- l'UIP peut être le littéral sur lequel on a parié au niveau de décision courant

  il arrive que l'ajout de clause se ramène à revenir sur le dernier pari

Concrètement, dans votre programme

Il faut équiper les structures de données de l'information nécessaire pour expliciter les causes.

Différence par rapport à DPLL normal:

- on remplace backtrack (chronologique) par analyse de conflit
- au passage, cette version modifiée est correcte et complète, comme DPLL