1 二元关系

1.1

(1) R_1 有对称性.

(2) R_2 有对称性.

(3) R_3 有传递性，反自反性.

(4) R_4 有自反性，传递性，反对称性.

(5) R_5 有自反性，对称性，传递性.

1.2

(1) aR_1b，当且仅当 $ab \geq 0$，有

$$\begin{cases} \forall\ a \in \mathbb{Z},\ aR_1a; \\ aR_1b\ \leftrightarrow\ ab \geq 0\ \leftrightarrow\ bR_1a; \\ (-1)R_10\ ,\ 0R_11\ ,\ (-1)\not{R}_11. \end{cases}$$

(2) aR_2b，当且仅当 $a \geq b$，有

$$\begin{cases} \forall\ a \in \mathbb{Z},\ aR_2a; \\ aR_2b,\ bR_2c\ \Rightarrow\ a \geq b \geq c\ \Rightarrow\ aR_2c; \\ 5R_21\ ,\ 1\not{R}_25. \end{cases}$$

(3) aR_3b，当且仅当 $ab > 0$，有

$$\begin{cases} aR_3b\ \Rightarrow\ ab > 0\ \Rightarrow\ bR_3a; \\ aR_3b,\ bR_3c\ \Rightarrow\ ab > 0,\ bc > 0,\ ac = abcd/b^2 > 0\ \Rightarrow\ aR_3c; \\ 0 \in \mathbb{Z},\ 0\not{R}_30. \end{cases}$$

1.3

(1) $R_1 \circ R_2 = \{(c,d)\}$

(2) $R_2 \circ R_1 = \{(a,d),(a,c)\}$

(3) $R_1^2 = \{(a,a),(a,b),(a,d)\}$

(4) $R_2^3 = \{(b,c),(b,d),(c,d)\}$

1.4

证明.

$\forall\ (a,c) \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$，则

$$\exists\ (a,b) \in (R_2 \cap R_3),\ (b,c) \in R_1.$$

故

$$\begin{cases} (a,b) & \in R_2 \\ (a,b) & \in R_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,c) & \in R_1 \circ R_2 \\ (a,c) & \in R_1 \circ R_3 \end{cases} \Rightarrow\ (a,c) \in ((R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3))$$

即证 $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$.

□

1.5

证明.

(1) $\forall\ x \in A,\ (x,x) \in I_A$，故 $(x,x) \in R'$，即证 R' 在 A 上自反.

(2) $R \subseteq I_A \cup R\ \Rightarrow\ R \subseteq R'$.

(3) 若有自反关系 R'' 满足 $R \subseteq R''$，由自反性可得 $I_A \subseteq R''$，故

$$R' = I_A \cup R \subseteq R''$$

即证 R' 为 R 的自反闭包.

□

1.6

(1) 证明. (a) 自反性：

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ a+b = b+a\ \Rightarrow\ (a,b) \sim (a,b).$$

(b) 对称性：

$$\forall\ (a,b) \sim (c,d),\ 有 a+d = b+c,\ c+b = a+d\ \Rightarrow\ (c,d) \sim (a,b).$$

(c) 传递性：

$$\forall\ (a,b)\sim(c,d),\ (c,d)\sim(e,f),\ \text{有}a+d=b+c,\ c+f=d+e$$

故

$$a+f=(a+d)+(c+f)-d-c=(b+c)+(d+e)-d-c=b+e\ \Rightarrow\ (a,b)\sim(e,f).$$

综上，即证 $\sim$ 为 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的等价关系.

□

(2) 如图

1.7

证明.

(1) (a) 自反性：

$$\forall\ X\in\mathscr{P}(A),\ |X|=|X|\ \Rightarrow\ X\sim X.$$

(b) 对称性：

$$\forall\ X,Y\in\mathscr{P}(A),X\sim Y\ \Rightarrow\ |X|=|Y|,\ |Y|=|X|\ \Rightarrow\ Y\sim X.$$

(c) 传递性：

$$\forall\ X,Y,Z\in\mathscr{P}(A),X\sim Y,Y\sim Z\ \Rightarrow\ |X|=|Y|,|Y|=|Z|,|X|=|Z|\ \Rightarrow\ X\sim Z.$$

综上，即证 $\sim$ 是 $\mathscr{P}(A)$ 上的等价关系.

(2) 商集：

$$\mathscr{P}(A)/\sim=\{[\phi],[\{1\}],[\{1,2\}],[\{1,2,3\}],[\{1,2,3,4\}]\}$$

□

1.8

证明.

(1) (a) 自反性：

$$\forall\ x\in\mathbb{R}^*,\ x\cdot x=x^2>0\ \Rightarrow\ xRx.$$

(b) 对称性：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*,\ xRy \ \Rightarrow\ x \cdot y = y \cdot x > 0 \ \Rightarrow\ yRx.$$

(c) 传递性：

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^*,\ xRy, yRz \ \Rightarrow\ x \cdot y > 0, y \cdot z > 0, x \cdot z = \frac{(x \cdot y) \cdot (y \cdot z)}{y^2} > 0 \ \Rightarrow\ xRz.$$

综上，即证 R 是 $\mathbb{R}^*$ 上的等价关系.

(2) $[1],\ [-1]$.

$\square$

1.9

证明.

(1) (a) 自反性：

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x - x = 0 \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ xRx.$$

(b) 对称性：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ xRy \ \Rightarrow\ x - y \in \mathbb{Z},\ y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ yRx.$$

(c) 传递性：

$$\forall$$

综上，即证 R 是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系.

(2) $[0, 1)$.

$\square$

1.10

1.11

1.12

1.13

1.14

1.15

1.16

1.17

1.18

1.19

1.20