妮可代数结构答案

En 土土

2023 年 3 月 9 日

目录

1 集合

1.1

(1) 不相等.

(2) 相等.

(3) 相等.

1.2

证明.

$$\left\{\begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow \ \forall\, x \in A,\ x \in B. \\ \\ B \subset C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, x \in B,\ x \in C \\ \exists\, x \in C,\ x \notin B \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall\, x \in A,\ x \in C \\ \exists\, x \in C,\ x \notin A \end{array}\right. \quad \Rightarrow\ A \subset C.$$

□

1.3

(1) 不成立.

(2) 不成立.

(3) 不成立.

(4) 成立.

(5) 成立.

(6) 不成立.

1.4

(1) 不成立.

(2) 成立.

(3) 成立.

1.5

证明.

(1)

$$A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

(2)

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

$$\begin{cases} A \subseteq A \cup (A \cap B) \\ A \supseteq A \cap (A \cup B) \end{cases} \Rightarrow \ A \cup (A \cap B) = A.$$

(3) (a)

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \overline{\bigcap_i A_i} &\Rightarrow x \notin \bigcap_i A_i \\ &\Rightarrow \exists 1 \le k \le n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow \exists 1 \le k \le n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_i \overline{A_i} \\ &\Rightarrow \overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bigcup_i \overline{A_i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \forall\, x \in \bigcup_i \overline{A_i} &\Rightarrow \exists 1 \le k \le n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow \exists 1 \le k \le n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow x \notin \bigcap_i A_i \\ &\Rightarrow x \in \overline{\bigcap_i A_i} \\ &\Rightarrow \bigcup_i \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcap_i A_i} \end{aligned}$$

即证 $\overline{\bigcap\limits_i A_i} = \bigcup\limits_i \overline{A_i}$.

(b)

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \overline{\bigcup_i A_i} &\Rightarrow x \notin \bigcup_i A_i \\ &\Rightarrow \forall 1 \le k \le n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow \forall 1 \le k \le n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_i \overline{A_i} \\ &\Rightarrow \overline{\bigcup_i A_i} \subseteq \bigcap_i \overline{A_i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \forall\, x \in \bigcap_i \overline{A_i} &\Rightarrow \forall 1 \le k \le n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow \forall 1 \le k \le n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow x \notin \bigcup_i A_i \\ &\Rightarrow x \in \overline{\bigcup_i A_i} \\ &\Rightarrow \bigcap_i \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_i A_i} \end{aligned}$$

即证 $\overline{\bigcup\limits_i A_i} = \bigcap\limits_i \overline{A_i}$.

□

1.6

证明.

(1) $B \subseteq C \Rightarrow \forall x \in B, x \in C$.

$$\forall x \in (A \cap B), x \in A \text{且} \ x \in B \ \Rightarrow \ x \in A \text{且} \ x \in C \ \Rightarrow \ x \in (A \cap C)$$

(2)

$$\begin{aligned} A \subseteq C,\ B \subseteq\ C \ &\Leftrightarrow A \cup C = C,\ B \cup C = C \\ &\Leftrightarrow\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C \\ &\Leftrightarrow\ (A \cup B) \subseteq C. \end{aligned}$$

(3) 若 $|A \cup B| > |A| + |B|$, 则 $\exists x \in (A \cup B)$, 且 $x \notin A, x \notin B$, 矛盾.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,$|A \cup B| = |A| + |B|$ 当且仅当 $A \cap B = \phi$ 时.

□

1.7

(1) 设所求集合为 E.

1.（基础语句）令 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，若 $x \in\ D$，则 $x \in\ E$.

2.（归纳语句）若 x, $y \in\ E$，则 x 与 y 的连接 $\overline{xy} \in\ E$.

3.（终结语句）$x \in\ E$，当且仅当 x 是由有限次 $1, 2$ 得到的.

(2) 设所求集合为 E.

1.（基础语句）令 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，若 $x \in\ D$，则 $x. \in\ E$, $.x \in\ E$.

2.（归纳语句）若 $x = a.b$, $y = c.d \in\ E$，则 $\overline{ac}.\overline{bd} \in\ E$.

3.（终结语句）$x \in\ E$，当且仅当 x 是由有限次 $1, 2$ 得到的.

(3) 设所求集合为 E.

1.（基础语句）0, $10 \in\ E$.

2.（归纳语句）若 $x = \overline{A0} \in\ E\ (x \neq 0)$，则 $\overline{A00}$, $\overline{A10} \in\ E$.

3.（终结语句）$x \in\ E$，当且仅当 x 是由有限次 $1, 2$ 得到的.

2 数论初步

2.1

证明.

(1)

$$\forall\ x|a,\ x|b \begin{cases} x>0 & \xrightarrow{a>0,x|a}\ x\le a \\ x<0 & \xrightarrow{a>0}\ x<a \end{cases} \Rightarrow\ x<a\ \xrightarrow{a|a,a|b} (a,b)=a.$$

(2)

□

2.2

2.3

2.4

2.5

2.6

2.7

2.8

2.9

2.10

2.11

2.12

2.13

2.14

2.15

2.16

2.17

2.18

2.19

2.20

2.21

2.22

2.23

2.24

2.25

2.26

2.27

2.28

2.29

2.30

3 映射

4 二元关系

5 群论初步

6 商群

7 环和域

8 格和布尔代数