妮可代数结构答案

En 土土

2023 年 3 月 9 日

目录

1 集合

1.1

(1) 不相等.

(2) 相等.

(3) 相等.

1.2

证明.

$$\begin{cases} A \subseteq B \Rightarrow \ \forall\, x \in A,\ x \in B. \\ \\ B \subset C \Rightarrow \begin{cases} \forall\, x \in B,\ x \in C \\ \exists\, x \in C,\ x \notin B \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \in C \\ \exists\, x \in C,\ x \notin A \end{cases} \Rightarrow \ A \subset C.$$

□

1.3

(1) 不成立.

(2) 不成立.

(3) 不成立.

(4) 成立.

(5) 成立.

(6) 不成立.

1.4

(1) 不成立.

(2) 成立.

(3) 成立.

1.5

证明.

(1)

$$A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = \left(A \cap \overline{A}\right) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

(2)

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

$$\begin{cases} A \subseteq A \cup (A \cap B) \\ A \supseteq A \cap (A \cup B) \end{cases} \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A.$$

(3) (a)

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \overline{\bigcap_i A_i} &\Rightarrow x \notin \bigcap_i A_i \\ &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_i \overline{A_i} \\ &\Rightarrow \overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bigcup_i \overline{A_i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \forall\, x \in \bigcup_i \overline{A_i} &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow x \notin \bigcap_i A_i \\ &\Rightarrow x \in \overline{\bigcap_i A_i} \\ &\Rightarrow \bigcup_i \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcap_i A_i} \end{aligned}$$

即证 $\overline{\bigcap\limits_i A_i} = \bigcup\limits_i \overline{A_i}$.

(b)

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \overline{\bigcup_i A_i} &\Rightarrow x \notin \bigcup_i A_i \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_i \overline{A_i} \\ &\Rightarrow \overline{\bigcup_i A_i} \subseteq \bigcap_i \overline{A_i} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \forall\, x \in \bigcap_i \overline{A_i} &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow x \notin \bigcup_i A_i \\ &\Rightarrow x \in \overline{\bigcup_i A_i} \\ &\Rightarrow \bigcap_i \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_i A_i} \end{aligned}$$

即证 $\overline{\bigcup\limits_i A_i} = \bigcap\limits_i \overline{A_i}$.

□

1.6

证明.

(1) $B \subseteq C \Rightarrow \forall x \in B, x \in C.$

$$\forall x \in (A \cap B), x \in A 且\ x \in B \ \Rightarrow \ x \in A 且\ x \in C \ \Rightarrow \ x \in (A \cap C)$$

(2)

$$\begin{aligned} A \subseteq C,\ B \subseteq\ C \ &\Leftrightarrow A \cup C = C,\ B \cup C = C \\ &\Leftrightarrow\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C \\ &\Leftrightarrow\ (A \cup B) \subseteq C. \end{aligned}$$

(3) 若 $|A \cup B| > |A| + |B|$, 则 $\exists x \in (A \cup B)$, 且 $x \notin A, x \notin B$, 矛盾.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,$|A \cup B| = |A| + |B|$ 当且仅当 $A \cap B = \phi$ 时.

□

1.7

(1) 设所求集合为 E.

1.（基础语句）令 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，若 $x \in\ D$，则 $x \in\ E$.

2.（归纳语句）若 x, $y \in\ E$，则 x 与 y 的连接 $\overline{xy} \in\ E$.

3.（终结语句）$x \in\ E$，当且仅当 x 是由有限次 $1, 2$ 得到的.

(2) 设所求集合为 E.

1.（基础语句）令 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，若 $x \in\ D$，则 $x. \in\ E$, $.x \in\ E$.

2.（归纳语句）若 $x = a.b$, $y = c.d \in\ E$，则 $\overline{ac}.\overline{bd} \in\ E$.

3.（终结语句）$x \in\ E$，当且仅当 x 是由有限次 $1, 2$ 得到的.

(3) 设所求集合为 E.

1.（基础语句）0, $10 \in\ E$.

2.（归纳语句）若 $x = \overline{A0} \in\ E\ (x \neq 0)$，则 $\overline{A00}$, $\overline{A10} \in\ E$.

3.（终结语句）$x \in\ E$，当且仅当 x 是由有限次 $1, 2$ 得到的.

2 数论初步

2.1

证明.

(1)

$$\forall\ x|a,\ x|b \begin{cases} x>0 \xrightarrow{a>0,x|a} x\le a \\ x<0 \xrightarrow{a>0} x<a \end{cases} \Rightarrow\ x<a \xrightarrow{a|a,a|b} (a,b)=a.$$

(2)

$$\begin{cases} (a,b)|(a,b),\ (a,b)|b \\ \\ \forall\ x|(a,b),\ x|b,\ \text{有} x\le(a,b).\quad (\text{证明同}(1)) \end{cases} \Rightarrow\ ((a,b),b)=(a,b).$$

□

2.2

证明.

(1) 不妨假设 $\exists\ n>0,\ (n,n+1)=d>1$

$$\begin{aligned}(n,n+1)=d\ &\Rightarrow \exists\ x,y\in\mathbb{Z},\ n=xd,n+1=yd\\ &\Rightarrow 1=(n+1)-n=(y-x)d>0\\ &\Rightarrow y>x,\ (y-x)d\ge d>1\\ &\Rightarrow \text{矛盾，假设不成立.}\end{aligned}$$

(2) 可取 (n,k)，证明如下

由推论 2.3，取$x=1,\ a=n,\ b=k$，有$(n,k)=(n,n+k)$.

□

2.3

(1) $(314, 159) = 1$，有解。由辗转相除法

$$
\begin{aligned}
314 &= 159 \cdot 1 + 155 \\
159 &= 155 \cdot 1 + 4 \\
155 &= 4 \cdot 38 + 3 \\
4 &= 3 \cdot 1 + 1
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\
&= 4 - (155 - 4 \cdot 38) \cdot 1 \\
&= (159 - 155 \cdot 1) \cdot 39 - 155 \\
&= 159 \cdot 39 - 155 \cdot 40 \\
&= 159 \cdot 39 - (314 - 159 \cdot 1) \cdot 40 \\
&= 159 \cdot 79 - 314 \cdot 40.
\end{aligned}
$$

即 $x = -40, y = 79$.

(2) $(3141, 1592) = 1$，有解。由辗转相除法

$$
\begin{aligned}
3141 &= 1592 \cdot 1 + 1549 \\
1592 &= 1549 \cdot 1 + 43 \\
1549 &= 43 \cdot 36 + 1
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
1 &= 1549 - 43 \cdot 36 \\
&= 1549 - (1592 - 1549 \cdot 1) \cdot 36 \\
&= 1549 \cdot 37 - 1592 \cdot 36 \\
&= (3141 - 1592 \cdot 1) \cdot 37 - 1592 \cdot 36 \\
&= 3141 \cdot 37 - 1592 \cdot 73.
\end{aligned}
$$

即 $x = 37, y = -73$.

2.4

证明.

(0) $n=1, n^3-n=0$，有 $0=6\cdot 0, 6|(n^3-n)$.

(1) $n=2, n^3-n=0$，有 $6=6\cdot 1, 6|(n^3-n)$.

(2) 假设 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 时，有 $6|(k^3-k)$，则 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= k^3+3k^2+2k \\ &= (k^3-k)+3k(k+1)\end{aligned}$$

显然有 $6|(k^3-k)$，下证 $6|3k(k+1)$

1° $k=1, 3k(k+1)=6$，有 $6=6\cdot 1, 6|3k(k+1)$

2° 若 $6|3k(k+1)$，则

$$3(k+1)(k+2)=3k(k+1)+6(k+1) \ \Rightarrow\ 6|3(k+1)(k+2)$$

即证

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\ 6|3k(k+1) \ \Rightarrow\ 6|(k+1)^3-(k+1)$$

综上, 即证

$$\forall\ n>0,\ 6|(n^3-n).$$

□

2.5

证明.

$$\left\{\begin{array}{ll} 3^4\equiv 1(\mathrm{mod} 10) & \Rightarrow\ 3^{4n}\equiv 1(\mathrm{mod} 10) \\ 10|(3^m+1) & \Rightarrow\ 3^m\equiv(-1)(\mathrm{mod} 10)\end{array}\right. \Rightarrow 3^{m+4n}\equiv(-1)(\mathrm{mod} 10).$$

即证

$$10|(3^{m+4n}+1)$$

□

2.6

(1)

$$2345 = 5 \cdot 7 \cdot 67$$

(2)

$$3456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

2.7

证明. 不妨假设 $\exists\, n > 0$，使得 $n(n+1) = d^2$ 为平方数，则有

$$n^2 < n(n+1) = d^2 < (n+1)^2 \;\Rightarrow\; n < d < n+1$$

不存在相邻整数间的整数，d 不存在，假设不成立，即证. □

2.8

证明. $\qquad n = 5! + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1.$

(1)

$$n + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 = 2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 1)$$

(2)

$$n + 2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 5 + 1)$$

(3)

$$n + 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 = 4 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 + 1)$$

(4)

$$n + 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 = 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 + 1)$$

□

2.9

(1) $(1,1) = 1|2$，方程有解，$x_0 = 0, y_0 = 2$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2 - t \end{cases},\ (t \in \mathbb{Z})$$

(2)

(3)

2.10

2.11

2.12

2.13

2.14

2.15

2.16

2.17

2.18

2.19

2.20

2.21

2.22

2.23

2.24

2.25

2.26

2.27

2.28

2.29

2.30

2.31

2.32

2.33

2.34

2.35

2.36

2.37

2.38

3 映射

4 二元关系

5 群论初步

6 商群

7 环和域

8 格和布尔代数