

妮可代数结构答案

En 土土

2023 年 3 月 8 日

目录

1	集合	2
1.1	2
1.2	2
1.3	2
1.4	2
1.5	3
1.6	4
1.7	4
2	数论初步	5
3	映射	6
4	二元关系	7
5	群论初步	8
6	商群	9
7	环和域	10
8	格和布尔代数	11

1 集合

1.1

- (1) 不相等.
- (2) 相等.
- (3) 相等.

1.2

证明.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in A, x \in B. \\ B \subset C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in B, x \in C \\ \exists x \in C, x \notin B \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, x \in C \\ \exists x \in C, x \notin A \end{array} \right. \Rightarrow A \subset C.$$

□

1.3

- (1) 不成立.
- (2) 不成立.
- (3) 不成立.
- (4) 成立.
- (5) 成立.
- (6) 不成立.

1.4

- (1) 不成立.
- (2) 成立.
- (3) 成立.

1.5

证明.

(1)

$$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B.$$

(2)

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

$$\begin{cases} A \subseteq A \cup (A \cap B) \\ A \supseteq A \cap (A \cup B) \end{cases} \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A.$$

(3) (a)

$$\begin{aligned} \forall x \in \overline{\bigcap_i A_i} &\Rightarrow x \notin \bigcap_i A_i & \forall x \in \bigcup_i \overline{A_i} &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \notin A_k & &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow \exists 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} & &\Rightarrow x \notin \bigcap_i A_i \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_i \overline{A_i} & &\Rightarrow x \in \overline{\bigcap_i A_i} \\ &\Rightarrow \overline{\bigcap_i A_i} \subseteq \bigcup_i \overline{A_i} & &\Rightarrow \bigcup_i \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcap_i A_i} \end{aligned}$$

即证 $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$.

(b)

$$\begin{aligned} \forall x \in \overline{\bigcup_i A_i} &\Rightarrow x \notin \bigcup_i A_i & \forall x \in \bigcap_i \overline{A_i} &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \notin A_k & &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \notin A_k \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n, x \in \overline{A_k} & &\Rightarrow x \notin \bigcup_i A_i \\ &\Rightarrow x \in \bigcap_i \overline{A_i} & &\Rightarrow x \in \overline{\bigcup_i A_i} \\ &\Rightarrow \overline{\bigcup_i A_i} \subseteq \bigcap_i \overline{A_i} & &\Rightarrow \bigcap_i \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_i A_i} \end{aligned}$$

即证 $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$.

□

1.6

证明.

$$(1) B \subseteq C \Rightarrow \forall x \in B, x \in C.$$

$$\forall x \in (A \cap B), x \in A \text{ 且 } x \in B \Rightarrow x \in A \text{ 且 } x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C)$$

$$(2)$$

$$\begin{aligned} A \subseteq C, B \subseteq C &\Leftrightarrow A \cup C = C, B \cup C = C \\ &\Leftrightarrow (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C \\ &\Leftrightarrow (A \cup B) \subseteq C. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 若 } |A \cup B| > |A| + |B|, \text{ 则 } \exists x \in (A \cup B), \text{ 且 } x \notin A, x \notin B, \text{ 矛盾.}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, |A \cup B| = |A| + |B| \text{ 当且仅当 } A \cap B = \phi \text{ 时.}$$

□

1.7

$$(1) \text{ 设所求集合为 } E.$$

1. (基础语句) 令 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 若 $x \in D$, 则 $x \in E$.
2. (归纳语句) 若 $x, y \in E$, 则 x 与 y 的连接 $\overline{xy} \in E$.
3. (终结语句) $x \in E$, 当且仅当 x 是由有限次 1, 2 得到的.

$$(2) \text{ 设所求集合为 } E.$$

1. (基础语句) 令 $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, 若 $x \in D$, 则 $x \in E, .x \in E$.
2. (归纳语句) 若 $x = a.b, y = c.d \in E$, 则 $\overline{ac}. \overline{bd} \in E$.
3. (终结语句) $x \in E$, 当且仅当 x 是由有限次 1, 2 得到的.

$$(3) \text{ 设所求集合为 } E.$$

1. (基础语句) $0 \in E$.
2. (归纳语句) 若 $x \in E$, 则 $x + 10 \in E$.
3. (终结语句) $x \in E$, 当且仅当 x 是由有限次 1, 2 得到的.

2 数论初步

3 映射

4 二元关系

5 群论初步

6 商群

7 环和域

8 格和布尔代数