1 数论初步

1.1

证明.

(1)

$$\forall\ x|a,\ x|b \begin{cases} x>0 & \xrightarrow{a>0,x|a}\ x\le a \\ x<0 & \xrightarrow{a>0}\ x<a \end{cases} \Rightarrow\ x<a\ \xrightarrow{a|a,a|b} (a,b)=a.$$

(2)

$$\begin{cases} (a,b)|(a,b),\ (a,b)|b \\ \\ \forall\ x|(a,b),\ x|b,\ \text{有}x\le(a,b).\quad (\text{证明同(1)}) \end{cases} \Rightarrow\ ((a,b),b)=(a,b).$$

□

1.2

证明.

(1) 不妨假设 $\exists\ n>0,\ (n,n+1)=d>1$

$$\begin{aligned}(n,n+1)=d\ &\Rightarrow \exists\ x,y\in\mathbb{Z},\ n=xd,n+1=yd\\ &\Rightarrow 1=(n+1)-n=(y-x)d>0\\ &\Rightarrow y>x,\ (y-x)d\ge d>1\\ &\Rightarrow \text{矛盾，假设不成立.}\end{aligned}$$

(2) 可取 (n,k)，证明如下

$$\text{由推论 2.3，取}x=1,\ a=n,\ b=k\text{，有}(n,k)=(n,n+k).$$

□

1.3

(1) $(314, 159) = 1$，有解。由辗转相除法

$$\begin{aligned} 314 &= 159 \cdot 1 + 155 \\ 159 &= 155 \cdot 1 + 4 \\ 155 &= 4 \cdot 38 + 3 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\ &= 4 - (155 - 4 \cdot 38) \cdot 1 \\ &= (159 - 155 \cdot 1) \cdot 39 - 155 \\ &= 159 \cdot 39 - 155 \cdot 40 \\ &= 159 \cdot 39 - (314 - 159 \cdot 1) \cdot 40 \\ &= 159 \cdot 79 - 314 \cdot 40. \end{aligned}$$

即 $x = -40, y = 79.$

(2) $(3141, 1592) = 1$，有解。由辗转相除法

$$\begin{aligned} 3141 &= 1592 \cdot 1 + 1549 \\ 1592 &= 1549 \cdot 1 + 43 \\ 1549 &= 43 \cdot 36 + 1 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} 1 &= 1549 - 43 \cdot 36 \\ &= 1549 - (1592 - 1549 \cdot 1) \cdot 36 \\ &= 1549 \cdot 37 - 1592 \cdot 36 \\ &= (3141 - 1592 \cdot 1) \cdot 37 - 1592 \cdot 36 \\ &= 3141 \cdot 37 - 1592 \cdot 73. \end{aligned}$$

即 $x = 37, y = -73.$

1.4

证明.

(0) $n=1, n^3-n=0$，有 $0=6\cdot 0, 6|(n^3-n)$.

(1) $n=2, n^3-n=0$，有 $6=6\cdot 1, 6|(n^3-n)$.

(2) 假设 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 时，有 $6|(k^3-k)$，则 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= k^3+3k^2+2k\\ &= (k^3-k)+3k(k+1)\end{aligned}$$

显然有 $6|(k^3-k)$，下证 $6|3k(k+1)$

1° $k=1, 3k(k+1)=6$，有 $6=6\cdot 1, 6|3k(k+1)$

2° 若 $6|3k(k+1)$，则

$$3(k+1)(k+2)=3k(k+1)+6(k+1) \;\Rightarrow\; 6|3(k+1)(k+2)$$

即证

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\ 6|3k(k+1) \;\Rightarrow\; 6|(k+1)^3-(k+1)$$

综上, 即证

$$\forall\ n>0,\ 6|(n^3-n).$$

□

1.5

证明.

$$\begin{cases} 3^4\equiv 1(\mathrm{mod}10) \;\Rightarrow\; 3^{4n}\equiv 1(\mathrm{mod}10) \\ 10|(3^m+1) \;\Rightarrow\; 3^m\equiv(-1)(\mathrm{mod}10)\end{cases} \Rightarrow 3^{m+4n}\equiv(-1)(\mathrm{mod}10).$$

即证

$$10|(3^{m+4n}+1)$$

□

1.6

(1)

$$2345 = 5 \cdot 7 \cdot 67$$

(2)

$$3456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

1.7

证明. 不妨假设 $\exists\, n > 0$，使得 $n(n+1) = d^2$ 为平方数，则有

$$n^2 < n(n+1) = d^2 < (n+1)^2 \;\Rightarrow\; n < d < n+1$$

不存在相邻整数间的整数，d 不存在，假设不成立，即证. □

1.8

证明. $n = 5! + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1.$

(1)

$$n+1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 = 2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 1)$$

(2)

$$n+2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 5 + 1)$$

(3)

$$n+3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 = 4 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 + 1)$$

(4)

$$n+4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 = 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 + 1)$$

□

1.9

(1) $(1,1) = 1|2$，方程有解，$x_0 = 0, y_0 = 2$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2 - t \end{cases},\ (t \in \mathbb{Z})$$

(2)

(3)

1.10

1.11

1.12

1.13

1.14

1.15

1.16

1.17

1.18

1.19

1.20

1.21

1.22

1.23

1.24

1.25

1.26

1.27

1.28

1.29

1.30

1.31

1.32

1.33

1.34

1.35

1.36

1.37

1.38