1 数论初步

1.1

证明.

(1)

$$\forall\ x|a,\ x|b\begin{cases} x>0 & \xrightarrow{a>0,x|a}\ x\le a \\ x<0 & \xrightarrow{a>0}\ x<a \end{cases}\Rightarrow\ x<a\ \xrightarrow{a|a,a|b}(a,b)=a.$$

(2)

$$\begin{cases} (a,b)|(a,b),\ (a,b)|b \\ \\ \forall\ x|(a,b),\ x|b,\ 有x\le(a,b).\quad (证明同(1)) \end{cases}\Rightarrow\ ((a,b),b)=(a,b).$$

□

1.2

证明.

(1) 不妨假设 $\exists\ n>0,\ (n,n+1)=d>1$

$$\begin{aligned}(n,n+1)=d\ &\Rightarrow\exists\ x,y\in\mathbb{Z},\ n=xd,n+1=yd\\ &\Rightarrow 1=(n+1)-n=(y-x)d>0\\ &\Rightarrow y>x,\ (y-x)d\ge d>1\\ &\Rightarrow 矛盾，假设不成立.\end{aligned}$$

(2) 可取 (n,k)，证明如下

$$由推论\ 2.3，取x=1,\ a=n,\ b=k，有(n,k)=(n,n+k).$$

□

1.3

(1) $(314, 159) = 1$，有解。由辗转相除法

$$\begin{aligned}
314 &= 159 \cdot 1 + 155 \\
159 &= 155 \cdot 1 + 4 \\
155 &= 4 \cdot 38 + 3 \\
4 &= 3 \cdot 1 + 1
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\
&= 4 - (155 - 4 \cdot 38) \cdot 1 \\
&= (159 - 155 \cdot 1) \cdot 39 - 155 \\
&= 159 \cdot 39 - 155 \cdot 40 \\
&= 159 \cdot 39 - (314 - 159 \cdot 1) \cdot 40 \\
&= 159 \cdot 79 - 314 \cdot 40.
\end{aligned}$$

即 $x = -40, y = 79.$

(2) $(3141, 1592) = 1$，有解。由辗转相除法

$$\begin{aligned}
3141 &= 1592 \cdot 1 + 1549 \\
1592 &= 1549 \cdot 1 + 43 \\
1549 &= 43 \cdot 36 + 1
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
1 &= 1549 - 43 \cdot 36 \\
&= 1549 - (1592 - 1549 \cdot 1) \cdot 36 \\
&= 1549 \cdot 37 - 1592 \cdot 36 \\
&= (3141 - 1592 \cdot 1) \cdot 37 - 1592 \cdot 36 \\
&= 3141 \cdot 37 - 1592 \cdot 73.
\end{aligned}$$

即 $x = 37, y = -73.$

1.4

证明.

(0) $n=1, n^3-n=0$，有 $0=6\cdot 0, 6|(n^3-n)$.

(1) $n=2, n^3-n=0$，有 $6=6\cdot 1, 6|(n^3-n)$.

(2) 假设 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 时，有 $6|(k^3-k)$，则 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= k^3+3k^2+2k \\ &= (k^3-k)+3k(k+1)\end{aligned}$$

显然有 $6|(k^3-k)$，下证 $6|3k(k+1)$

1° $k=1, 3k(k+1)=6$，有 $6=6\cdot 1, 6|3k(k+1)$

2° 若 $6|3k(k+1)$，则

$$3(k+1)(k+2)=3k(k+1)+6(k+1) \Rightarrow 6|3(k+1)(k+2)$$

即证

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\ 6|3k(k+1) \Rightarrow 6|(k+1)^3-(k+1)$$

综上, 即证

$$\forall\ n>0,\ 6|(n^3-n).$$

□

1.5

证明.

$$\left\{\begin{array}{ll} 3^4\equiv 1(\mathrm{mod}10) & \Rightarrow 3^{4n}\equiv 1(\mathrm{mod}10) \\ & \\ 10|(3^m+1) & \Rightarrow 3^m\equiv(-1)(\mathrm{mod}10)\end{array}\right. \Rightarrow 3^{m+4n}\equiv(-1)(\mathrm{mod}10).$$

即证

$$10|(3^{m+4n}+1)$$

□

1.6

(1)

$$2345 = 5 \cdot 7 \cdot 67$$

(2)

$$3456 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

1.7

证明. 不妨假设 $\exists\, n > 0$，使得 $n(n+1) = d^2$ 为平方数，则有

$$n^2 < n(n+1) = d^2 < (n+1)^2 \;\Rightarrow\; n < d < n+1$$

不存在相邻整数间的整数，d 不存在，假设不成立，即证. □

1.8

证明. $n = 5! + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1.$

(1)

$$n+1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 = 2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 1)$$

(2)

$$n+2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 = 3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 5 + 1)$$

(3)

$$n+3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 = 4 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 + 1)$$

(4)

$$n+4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 = 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 + 1)$$

□

1.9

(1) $(1,1) = 1|2$，方程有解，$x_0 = 0, y_0 = 2$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= t \quad (t \in \mathbb{Z}) \\ y &= 2 - t \end{cases}$$

(2) $(2,1)=1|2$，方程有解，$x_0=0, y_0=2$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= t \quad (t\in\mathbb{Z}) \\ y &= 2-2t \end{cases}$$

(3) $(15,16)=1|17$，方程有解，$x_0=-17, y_0=17$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= 16t-17 \quad (t\in\mathbb{Z}) \\ y &= 17-15t \end{cases}$$

1.10

(1) $(6,-15)=3|51$，方程有解，$x_0=11, y_0=1$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= 11-5t \quad (t\in\mathbb{Z}) \\ y &= 1-2t \end{cases}$$

又要求负整数解，故 $x,y<0,\ t\geq 3$，即所以负整数解为

$$\begin{cases} x &= 11-5t \quad (t\in\mathbb{Z},\ t\geq 3) \\ y &= 1-2t \end{cases}$$

(2) $(6,15)=3|51$，方程有解，$x_0=6, y_0=1$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= 6+5t \quad (t\in\mathbb{Z}) \\ y &= 1-2t \end{cases}$$

又要求负整数解，故 $x,y<0,\ t$ 无解，即无负整数解.

1.11

设需要 x 张 5 分，y 张 1 角，$z=(30-x-y)$ 张 2 角五分. 有

$$\begin{aligned} 0.05x+0.1y+0.25(30-x-y)=5 &\Leftrightarrow x+2y+5(30-x-y)=100 \\ &\Leftrightarrow 4x+3y=50 \end{aligned}$$

$(4,3)=1|50$，方程有解，$x_0=2, y_0=14$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= 2+3t \quad (t\in\mathbb{Z}) \\ y &= 14-4t \end{cases}$$

又 $x,y,z\in\mathbb{N}$，即

$$\begin{cases} 2+3t & \geq 0 \\ 14-4t & \geq 0 \\ 14+t & \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{t\in\mathbb{Z}} t=0,1,2,3.$$

即有 4 种方案，记 x 张 5 分，y 张 1 角，z 张 2 角五分，则方案为

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 14 \\ z &= 14 \end{cases} \quad \begin{cases} x &= 5 \\ y &= 10 \\ z &= 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x &= 8 \\ y &= 6 \\ z &= 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x &= 11 \\ y &= 2 \\ z &= 17 \end{cases}$$

1.12

设买了 x 个苹果，$12-x$ 个橘子，每个苹果 y 分钱，每个橘子 $y-3$ 分钱，则有

$$\begin{cases} 0\geq 12-x<x \\ xy+(12-x)(y-3)=99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6<x\leq 12 \\ x+4y=45 \end{cases}$$

$(1,4)=1|45$，方程有解，$x_0=9, y_0=9$ 为一组特解，故通解为

$$\begin{cases} x &= 9+4t \quad (t\in\mathbb{Z}) \\ y &= 9-t \end{cases}$$

又 $6<x\leq 12$，即 $t=0,\ x=9, 12-x=3$，买了 9 个苹果和 3 个橘子.

1.13

$$6k+5\equiv 6k+1(\mathrm{mod}4)$$

又 $6k\equiv 6(\mathrm{mod}4)$，有

$$\begin{aligned} 6k+5 &\equiv 7(\mathrm{mod}4) \\ &\equiv 3(\mathrm{mod}4) \end{aligned}$$

1.14

证明.

(1) 分情况讨论 $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4\ (k \geq 1)$ 即可，不再赘述.

(2) 记素数为 $p, p > 3$.

   (a) $p < 6$，则 $p = 5$，成立.

   (b) $p > 6$，有 $(6, p) = 1$，故 p 属于 6 的缩系，故 p 模 6 或与 1 或 5 同余.

□

1.15

证明.

不妨设这两个连续的立方数为 k^3 与 $(k+1)^3$.

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3 - k^3 \equiv& 3k^2 + 3k + 1 (\bmod 3) \\
\equiv& 1 (\bmod 3)
\end{aligned}
$$

□

1.16

证明.

设该数为 $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$，则

$$
A = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \cdot 10^i, \quad \sum_{i=0}^{i=n} a_i \equiv 0 (\bmod 3)
$$

又 $\forall\ k \in \mathbb{N},\ 10^i \equiv 1 (\bmod 3)$，故

$$
\begin{aligned}
A \equiv& \sum_{i=0}^{i=n} a_i \cdot 10^i (\bmod 3) \\
\equiv& \sum_{i=0}^{i=n} a_i (\bmod 3) \\
\equiv& 0 (\bmod 3)
\end{aligned}
$$

□

1.17

证明.

(1)

$$10 \equiv -1(\mathrm{mod} 11) \ \Rightarrow \ 10^k \equiv (-1)^k(\mathrm{mod} 11)$$

(2) 设数为 $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$，则

$$A \equiv 0(\mathrm{mod} 11) \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot a_i \equiv 0(\mathrm{mod} 11)$$

即偶数位之和与奇数位之和的差能被 11 整除等价于该数也能被 11 整除.

□

1.18

(1)

$$\begin{aligned} 2x \equiv& 1(\mathrm{mod} 17) \\ \equiv& 18(\mathrm{mod} 17) \end{aligned} \xrightarrow{(2,17)=1} x \equiv 9(\mathrm{mod} 17)$$

(2) $(3, 18) = 3|6$，故有 3 组解由 $x \equiv 2(\mathrm{mod} 6)$ 得原方程解为

$$x \equiv 2 + 6t(\mathrm{mod} 18) \quad (0 \leq t \leq 2).$$

即

$$x \equiv 2, 8, 14(\mathrm{mod} 18).$$

(3) $(4, 18) = 2|6$，故有 2 组解解 $2x \equiv 3(\mathrm{mod} 9)$

$$\begin{aligned} 2x \equiv& 3(\mathrm{mod} 9) \\ \equiv& 12(\mathrm{mod} 9) \end{aligned} \xrightarrow{(2,9)=1} x \equiv 6(\mathrm{mod} 9).$$

即原方程解为

$$x \equiv 6 + 9t(\mathrm{mod} 18) \quad (t = 0, 1) \ \Rightarrow \ x \equiv 6, 15(\mathrm{mod} 18).$$

(4)

$$\begin{aligned} 3x \equiv& 1(\mathrm{mod} 17) \\ \equiv& 18(\mathrm{mod} 17) \end{aligned} \xrightarrow{(3,17)=1} x \equiv 6(\mathrm{mod} 17).$$

1.19

(1) $(2,3)=1$，有解。本题中

$$M=2\cdot 3=6, M_1=3, M_2=2.$$

由

$$\begin{cases} 3b_1 & \equiv 1(\mathrm{mod} 2) \\ 2b_2 & \equiv 1(\mathrm{mod} 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 & =1 \\ b_2 & =2 \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} y &= 3\cdot 1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 2 \\ &= 7 \end{aligned} \Rightarrow\ y\equiv 1(\mathrm{mod} 6).$$

(2) $(41,26)=1$，有解。原式等价于

$$\begin{cases} x\equiv & 31(\mathrm{mod} 41) \\ x\equiv & 7(\mathrm{mod} 26) \end{cases}$$

本题中

$$M=41\cdot 26, M_1=26, M_2=41.$$

由

$$\begin{cases} 26b_1 & \equiv 1(\mathrm{mod} 41) \\ 41b_2 & \equiv 1(\mathrm{mod} 26) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 & =30 \\ b_2 & =7 \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} y &= 26\cdot 31\cdot 30+41\cdot 7\cdot 7 \\ &= 26819 \end{aligned} \Rightarrow\ y\equiv 605(\mathrm{mod} 1066).$$

(3) $(2,3)=(2,7)=(3,7)=1$，有解。本题中

$$M=2\cdot 3\cdot 7=42, M_1=21, M_2=14, M_3=6.$$

由

$$\begin{cases} 21b_1 & \equiv 1(\mathrm{mod} 2) \\ 14b_2 & \equiv 1(\mathrm{mod} 3) \\ 6b_3 & \equiv 1(\mathrm{mod} 7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 & =1 \\ b_2 & =2 \\ b_3 & =6 \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} y &= 21\cdot 1\cdot 1 + 14\cdot 1\cdot 2 + 6\cdot 6\cdot 6 \\ &= 265. \end{aligned} \Rightarrow\ y \equiv 13(\mathrm{mod} 42).$$

(4) 原式等价于

$$\begin{cases} x & \equiv 3(\mathrm{mod}5) \\ x & \equiv 3(\mathrm{mod}7) \\ x & \equiv 3(\mathrm{mod}11) \end{cases}$$

$(5,7)=(5,11)=(7,11)=1$，有解。本题中

$$M = 5\cdot 7\cdot 11 = 385, M_1 = 77, M_2 = 55, M_3 = 35$$

由

$$\begin{cases} 77b_1 \equiv & 1(\mathrm{mod}5) \\ 55b_2 \equiv & 1(\mathrm{mod}7) \\ 35b_3 \equiv & 1(\mathrm{mod}11) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 & = 3 \\ b_2 & = 6 \\ b_3 & = 6 \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} y &= 77\cdot 3\cdot 3 + 55\cdot 3\cdot 6 + 35\cdot 3\cdot 6 \\ &= 2313. \end{aligned} \Rightarrow\ y \equiv 3(\mathrm{mod}385).$$

1.20

1.21

1.22

(1)

$$\phi(42) = \phi(2\cdot 3\cdot 7) = \phi(2)\cdot\phi(3)\cdot\phi(7) = 1\cdot 2\cdot 6 = 12.$$

(2)

$$\phi(420) = \phi(2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7) = \phi(2^2)\cdot\phi(3)\cdot\phi(5)\cdot\phi(7) = 2\cdot 2\cdot 4\cdot 6 = 96.$$

(3)

$$\phi(4200) = \phi(2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7) = \phi(2^3)\cdot\phi(3)\cdot\phi(5^2)\cdot\phi(7) = 4\cdot 2\cdot 20\cdot 6 = 960.$$

1.23

(1) 小于 18 且与 18 互素的正整数有

$$1, 5, 7, 11, 13, 17$$

(2)

$$\begin{aligned}
1 \cdot 5 &\equiv 5(\mathrm{mod} 18) & 5 \cdot 5 &\equiv 25(\mathrm{mod} 18) & 7 \cdot 5 &\equiv 35(\mathrm{mod} 18) \\
& & &\equiv 7(\mathrm{mod} 18) & &\equiv 17(\mathrm{mod} 18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11 \cdot 5 &\equiv 55(\mathrm{mod} 18) & 13 \cdot 5 &\equiv 65(\mathrm{mod} 18) & 17 \cdot 5 &\equiv 85(\mathrm{mod} 18) \\
&\equiv 1(\mathrm{mod} 18) & &\equiv 11(\mathrm{mod} 18) & &\equiv 13(\mathrm{mod} 18)
\end{aligned}$$

仍为缩系，引理 2.1 成立.

1.24

1.25

1.26

1.27

1.28

1.29

1.30

1.31

1.32

1.33

1.34

1.35

1.36

1.37

1.38

1.39

1.40

1.41

1.42