图论作业 (Week 14)

PB20000113 孔浩宇

February 25, 2023

Ch9

9.

Proof. 假设 N' 上不存在流函数 f' 使得任给 $1 \leq j \leq n$，边 (y_j, y_0) 都满载，则有

$$\exists\ 1 \leq j \leq n, f'((y_j, y_0)) < \rho(y_j)$$

又 N 中存在可行流，有

$$\sum_{e \in \alpha(y_j)} f(e) - \sum_{e \in \beta(y_j)} f(e) \geq \rho(y_j)\ (\forall\ 1 \leq j \leq n)$$

在 N' 中有

$$\sum_{e \in \alpha(y_j)} f'(e) - \sum_{e \in \beta(y_j)} f'(e) = f'((y_j, y_0)) < \rho(y_j)$$

则 N 中 y_j 的需求无法满足，N 中无可行流，矛盾. $\square$

15.

Proof.

$$f\text{为流函数} \Rightarrow \begin{cases} \forall\ v \in V(D) - \{s, t\},\ \sum\limits_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(v)} f(e) = 0. \\ \\ Val(f) = \sum\limits_{e \in \beta(s)} f(e) - \sum\limits_{e \in \alpha(s)} f(e) = \sum\limits_{e \in \alpha(t)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(t)} f(e). \end{cases}$$

$$f'\text{为流函数} \Rightarrow \begin{cases} \forall\ v \in V(D) - \{s, t\},\ \sum\limits_{e \in \alpha(v)} f'(e) - \sum\limits_{e \in \beta(v)} f'(e) = 0. \\ \\ Val(f) = \sum\limits_{e \in \beta(s)} f(e) - \sum\limits_{e \in \alpha(s)} f(e) = \sum\limits_{e \in \alpha(t)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(t)} f(e). \end{cases}$$

$\forall\ v \in V(D) - \{s, t\}$，有

$$\sum_{e \in \alpha(v)} (f - f')(e) - \sum_{e \in \beta(v)} (f - f')(e) = \left(\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) \right) - \left(\sum_{e \in \alpha(v)} f'(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f'(e) \right) = 0.$$

对于源 s，有

$$\sum_{e \in \alpha(s)} (f - f')(e) - \sum_{e \in \beta(s)} (f - f')(e) = \left[\sum_{e \in \alpha(s)} f(e) - \sum_{e \in \beta(s)} f(e) \right] - \left[\sum_{e \in \alpha(s)} f'(e) - \sum_{e \in \beta(s)} f'(e) \right] = Val(f) - Val(f') = 0.$$

对于汇 t，有

$$\sum_{e \in \alpha(t)} (f - f')(e) - \sum_{e \in \beta(t)} (f - f')(e) = \left[\sum_{e \in \alpha(t)} f(e) - \sum_{e \in \beta(t)} f(e) \right] - \left[\sum_{e \in \alpha(t)} f'(e) - \sum_{e \in \beta(t)} f'(e) \right] = Val(f) - Val(f') = 0.$$

$\square$

17.

首先执行算法 9.4，若输入的供需约束网络无可行流，结束；若得到供需约束网络的可行流 f', 则将 f' 作为初始流，利用算法 9.1 寻找 X 中点到 Y 中点的可增载轨道，并更新流函数，直到此类可增载轨道不存在，输出即为供需约束网络的最大流，算法结束.

19.

Proof. 设边子集 S 是 f 的支撑，我们对 $|S|$ 做归纳来证明引理。

(1) 若 $S = \phi$，则不需要证明什么；

(2) 若 $S \neq \phi$，则由引理 9.4 知，边导出子图 $D[S]$ 中含有一个有向圈 C。设 $e*$ 为 C 上的一条有向边，我们将 C 的方向定义为与 $e*$ 同向，从而有 $f_C(e*) = 1$。

定义一个新的函数

$$f' : E(D) \to R$$

使得任给 $e \in E(D)$，定义

$$f'(e) = f(e) - f(e*)f_C(e)$$

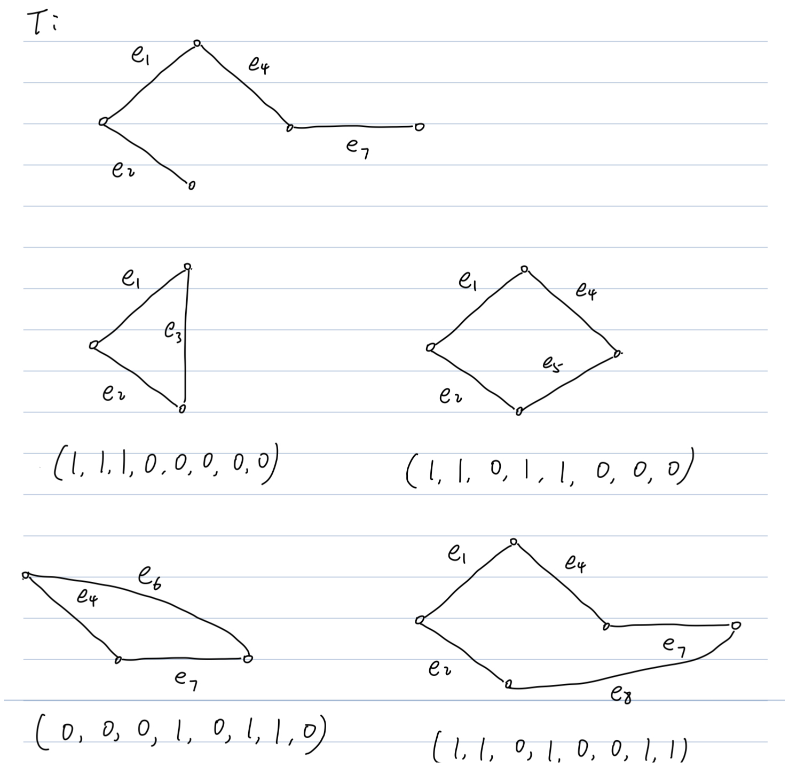
容易验证 f' 是 D 的一个循环，且 $f'(e*) = 0$。所以 f' 的支撑是 S 的一个真子集。由归纳假设，f' 是一些有向圈导出循环的线性组合，所以 $f(e) = f'(e) + f(e*)f_C(e)$ 也是。若 f 的函数值都是整数，且 $f(e*) \geq 0$，即该线性组合中的系数都是非负整数。

□

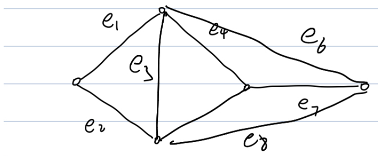
Ch10

1.

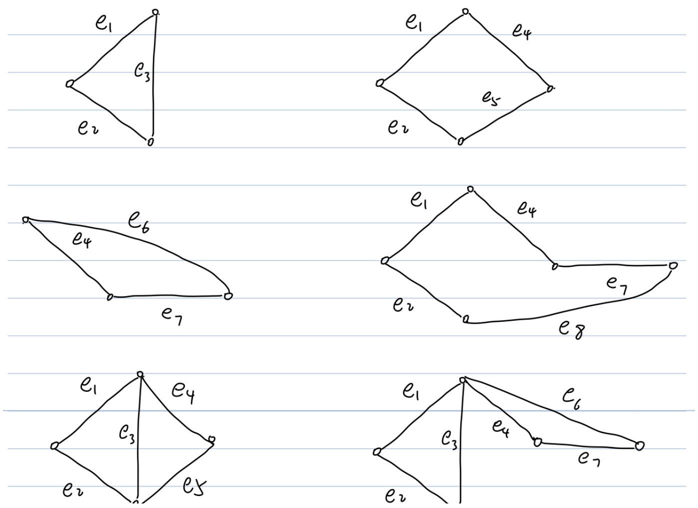
树及圈组如图

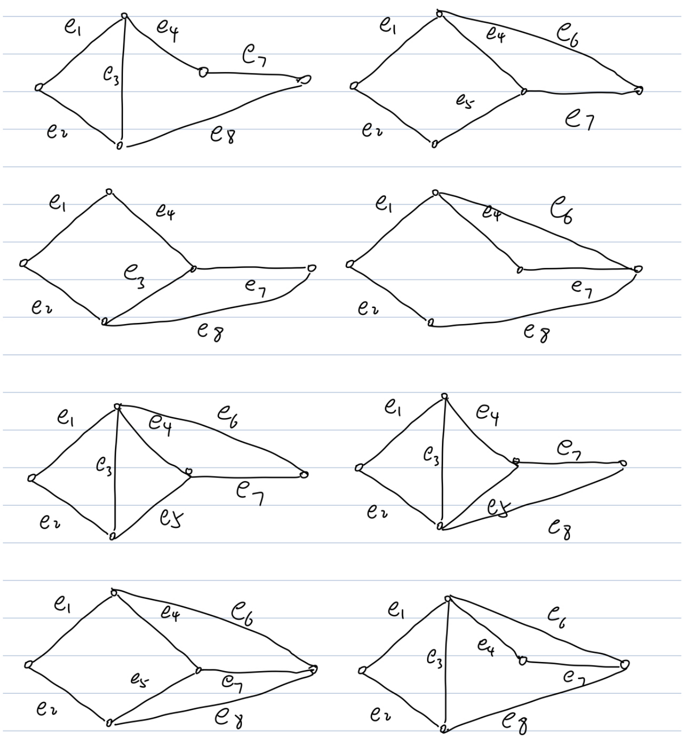


圈空间向量如图


e_1 e_4 e_6
e_3
e_2 e_7 e_8

空


e_1 e_3 e_2
e_1 e_4 e_5 e_2
e_6 e_4 e_7
e_1 e_4 e_7 e_2 e_8
e_1 e_4 e_3 e_2 e_5
e_1 e_6 e_4 e_3 e_7 e_2


e_1 e_4 e_7 e_3 e_2 e_8
e_1 e_4 e_6 e_5 e_2 e_7
e_1 e_4 e_3 e_7 e_2 e_8
e_1 e_4 e_6 e_7 e_2 e_8
e_1 e_4 e_6 e_3 e_7 e_2 e_5
e_1 e_4 e_3 e_7 e_5 e_2 e_8
e_1 e_4 e_6 e_5 e_7 e_2 e_8
e_1 e_6 e_3 e_4 e_7 e_2 e_8

3.

Proof. 我们将 G 中的边按照如下的方式编号：先将 $S_1, S_2, \ldots, S_{\nu-1}$ 中在 T 上的那条边分别标记为 $e_1, e_2, \ldots, e_{\nu-1}$，然后再将不在 T 上的边任意编号，前 $\nu - 1$ 个元素表示 T 的边，后 $\varepsilon - \nu + 1$ 个元素表示非 T 的边，则有：

$$S_1 = (1, 0, \ldots, 0, *, \ldots, *)$$

$$S_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, *, \ldots, *)$$

$$\cdots$$

$$S_{\nu-1} = (0, \ldots, 0, 1, *, \ldots, *)$$

给定一组常数 $k_1, k_2, \ldots, k_{\nu-1}$，若 $k_1 S_1 + \ldots + k_{\nu-1} S_{\nu-1}$ □