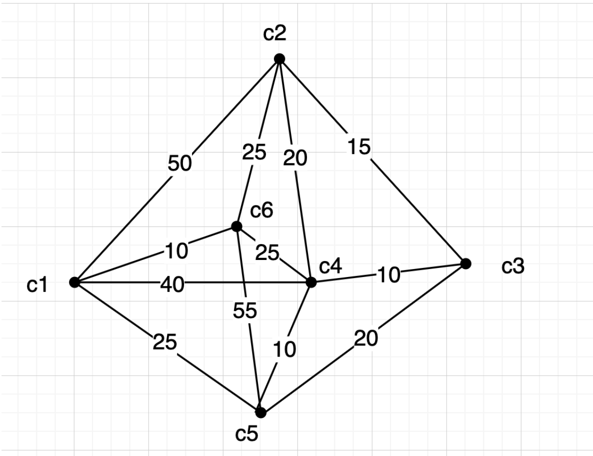
2020

1.

> 一个公司在六个城市$c_1, c2, ..., c_6$有分公司，下面的矩阵(i,j)号元素是c_i到c_j的机票价格，试为该公司制作一张c_1 到每个城市的路线图，使得每个城市的机票价格都最便宜。

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

转化为图



图二.

以c_1为起点 在图二上跑$Dijkstra$ 算法。

迭代次数i	$l(v_2)$	$l(v_3)$	$l(v_4)$	$l(v_5)$	$l(v_6)$	S
0	50	∞	40	25	10	v_1
1	50	∞	50	25	10	v_1, v_6
2	35	45	35	25	10	v_1, v_5, v_6
3	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_5, v_6
4	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_4, v_5, v_6
5	35	45	35	25	10	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

路径的答案不止一种：

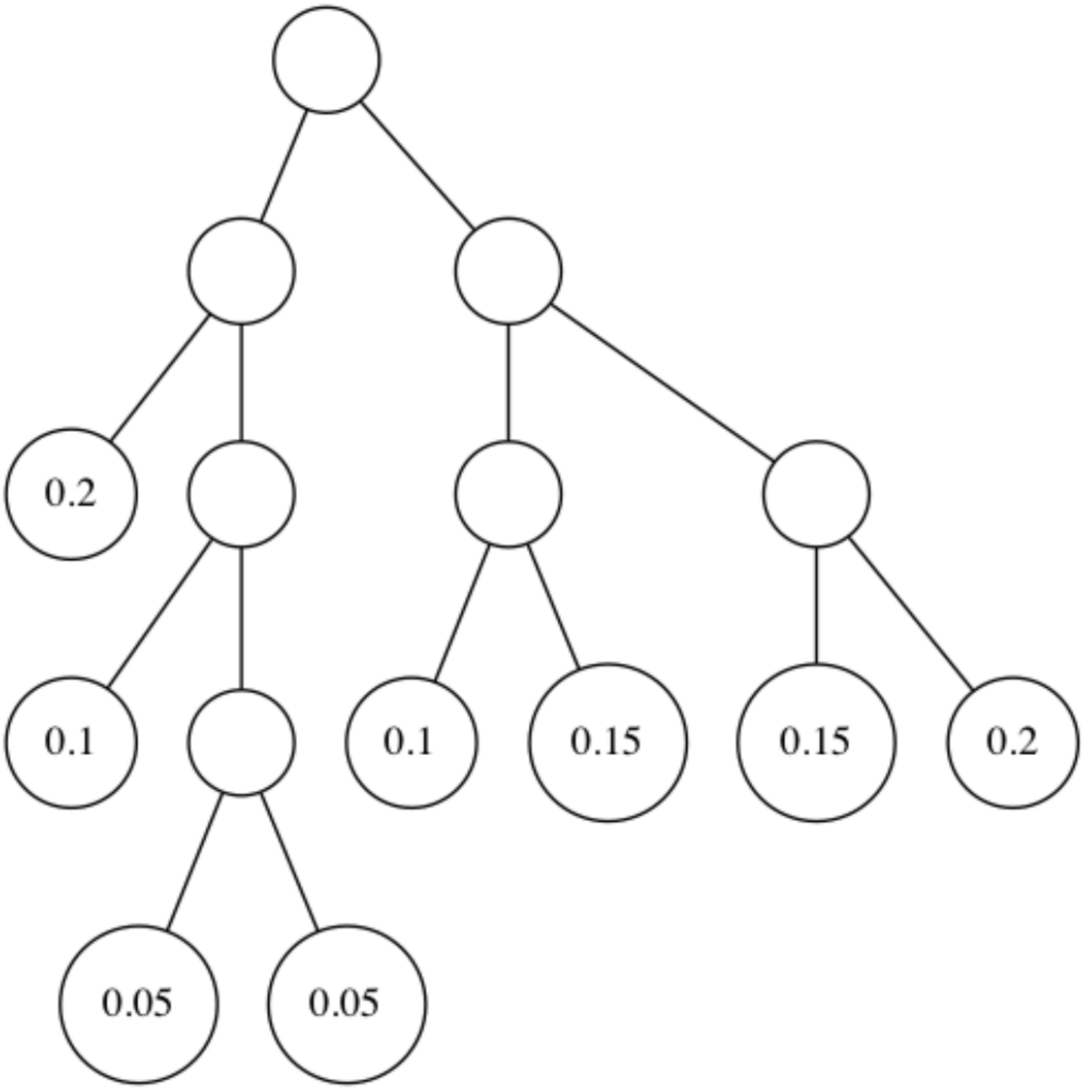
- v_2 :$v_1 \to v_6 \to v_2$
- v_3:

- $v_1 \to v_5 \to v_3$
    - $v_1 \to v_5 \to v_4 \to v_3$
    - $v_1 \to v_6 \to v_4 \to v_3$
- v_4:
    - $v_1 \to v_5 \to v_4$
    - $v_1 \to v_6 \to v_4$
- v_5:$v_1 \to v_5$
- v_6:$v_1 \to v_6$

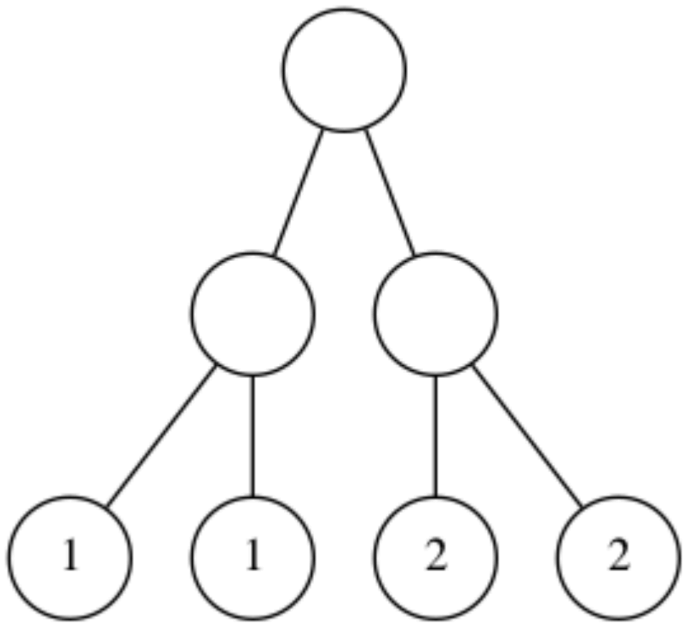
2.

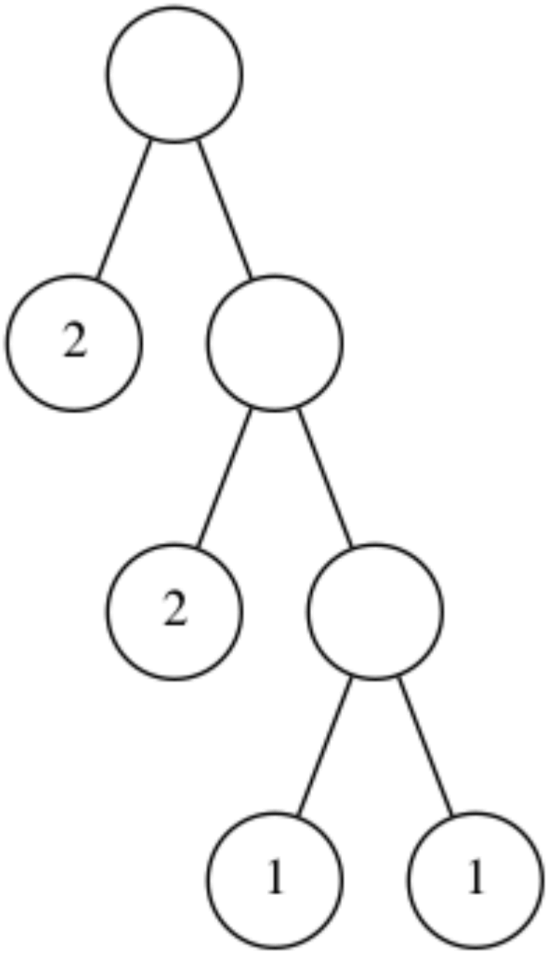
> 1. 给定$0.05, 0.05$，$0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2$， 请求出 Huffman 树
> 2. 举例说明存在权值分布，使得Huffman树不唯一

（1）



（2）权值分布：$1, 1, 2, 2$





3

> 1. 证明：若 G是k 边连通图， E'是G 中 k 条边集合，则有 $w(G-E') \leq 2$
> 2. 给出一个 k连通图， 及 G 中k 个定点集合，使得$w(g-V') > 2$

1证明：

反证法： 假设$w(G-E') \geq 3$

则$G-E'$ 至少存在三个连通片 G_1,G_2,G_3 。

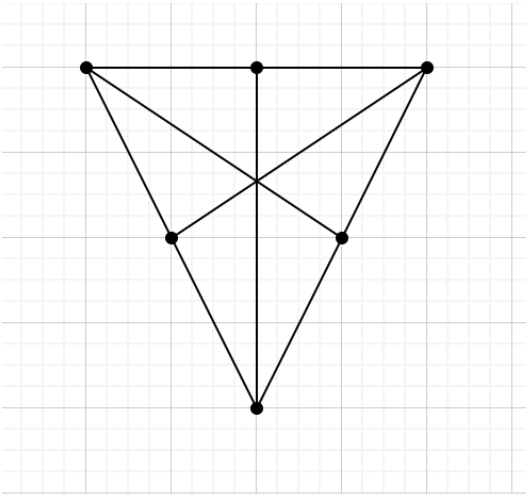
由于G 是k 边连通的。所以子图G_1 与 $G-G1$ 之间至少有k 条边。

又因为$|E'|=k$，所以E' 中的边必与G_1 相邻，才能使G_1 是一个联通片。所以除G_1外其它连通片之间无边，且G_1 与其他联通片之间均有边。

同理分析G_2 , 除G_2外其它连通片之间无边， G_2与其他联通片之间均有边。

矛盾。

2示例：



4

> 1. 偶圈可以 2-边正常着色
> 2. 对于不是奇圈的欧拉图，存在 2-边着色方案，使得两种颜色，在所有顶点出都出现

1. **证明：**

   设偶圈C有$2n$条边， 将偶圈上的边按顺时针从1 ~$2n$ 编号 。奇序号和偶序号的边各着一种颜色。由编号规则知，无相邻边同奇偶，即无相邻边同色。所以偶圈可以2 -边正常着色。

2. **证明：**

   G 是欧拉图，则G 可以表示成若干个无公共边的圈之并。

   （1）若G 没有度数大于等于4的点，则G 是一个圈，且是偶圈。由第一问的着色方法，可以证明。

   （2）若G 有度数大于等于4的点v_i。则从该顶点开始，选择一个该顶点所在的圈C_i，使用两种颜色，交替边着色。若C_i 是偶圈，则C_i 上的顶点已满足条件。若C_i 是奇圈，则C_i 中只有v_i 目前只有一种颜色。

   （3）对剩余的圈，从圈上一个度数大于4的顶点开始交替着色。若该顶点未被着色 ，起始色任选；若该顶点已满足条件，起始色任选；若该顶点临边只有一种颜色，则其实色使用另一种颜色。

5

> 若G是连通平面图，没有奇圈，且顶点数大于等于3，证明：$\epsilon \leq 2v-4$

证明： （类比书上定理）

G是平面图，所以$\sum_{f\in F} deg(f)=2\epsilon$, 且$v-\epsilon+\varphi=2$

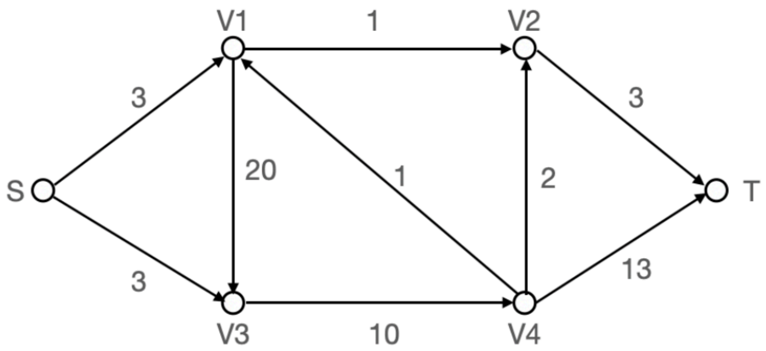
G 没有奇圈，所以 $\forall f\in F, deg(f)\geq 4$

所以$2\epsilon \geq 4\varphi$ ，$\varphi = 2+\epsilon - v$

得$\epsilon \leq 2v-4$

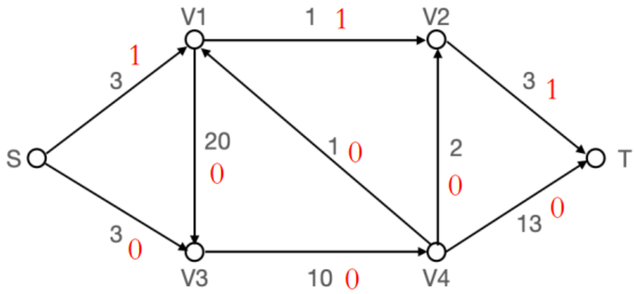
6

> 1. 求下网络的最大流；
> 2. 假定每条有向变的容量都大于0，证明：网络中存在从源s到汇t的有向轨道，等价于最大流量大于0



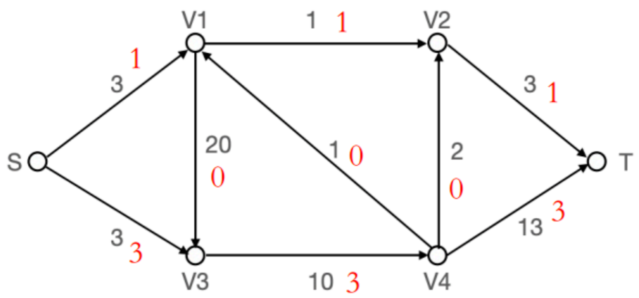
1. 2F算法：

取初始流函数f_0，



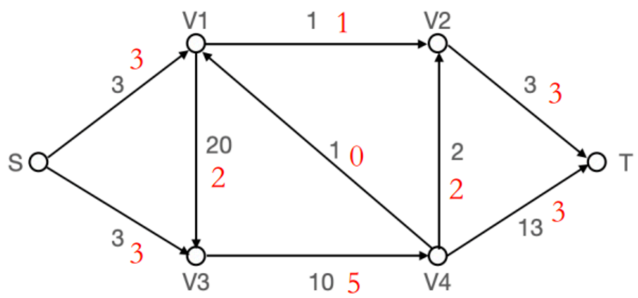
计算出一条可增载轨道 $P_0(S,T)=Sv_3v_4T$, 且$l(P_0)=3$

更新流函数得f_1:



计算出一条可增载轨道 $P_1(S,T) = Sv_1v_3v_4v_2T$, 且$l(P_1) = 2$

更新流函数得f_2:



此时无可增载轨道。得$Var(f^*) = Var(f_2) = 6$

2. 网络中存在从源s到汇t的有向轨道 $\Longrightarrow$ 最大流量大于0:

   网络中存在从源s到汇t的有向轨道$P(s,t)$,设轨道上的边的容量的最小值为b ,则$b > 0$ 。

   设f_0 表示每条边载量为0 的流函数，$Var(f_0) = 0, l(P) \geq b$, 所以将$P(s,t)$上每条边增载b 之后得流函数 f_1

   $Var(f^*) \geq Var(f_1) = b > 0$ 。即最大流量大于0。

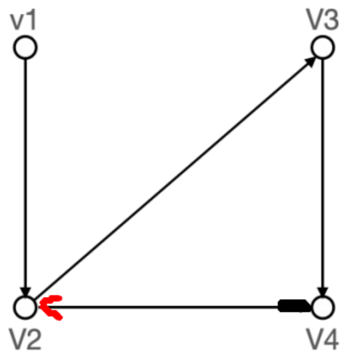
   最大流量大于0 $\Longrightarrow$ 网络中存在从源s到汇t的有向轨道 :

   使用反证法：假设网络中不存在存在从源s到汇t的有向轨道 。

   设f_0 表示每条边载量为0 的流函数，对于任意一条无向轨道$P(s,t)$ ，存在反向边e_0， 且$f_0(e_0) = 0$, 所以 $l(P) \leq l(e_0) = f(e_0) = 0$ 。所以无可增载轨道。所以$Var(f^*) = Var(f_0) = 0$, 这与最大流量大于零矛盾。

7

> 1. 给出下图的邻接矩阵，并通过邻接矩阵求出可达矩阵，由此给出该图的强连通片
> 2. 假设有向图D是单向连通图。证明：任给$S \subseteq V(D), S \neq \varnothing$ 都存在顶点$v \in S$ ，使得v 可达S中的任意一个顶点.



1. 邻接矩阵：$\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$.

   $Warshall$ 算法计算可达性矩阵： $\nu = 4$

   $R^0 = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$, 计算R_1 得，$R^1 = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$, 计算R^2得 $R^2 = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,0 \end{pmatrix}$, 再计算R^3得

   $R^3 = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$,再计算R^4得 $R^4 = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$

   即可达性矩阵为$R(D) = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$

   强连通片为v_2, v_3, v_4 的顶点导出子图。

2. **证明：**

   由于有向图D是单向连通图，所以可达性矩阵的满足 $r_{ij} \vee r_{ji} = 1$。

   不妨设$S = \{v_1, v_2, .., v_s\}$ 。下面只考虑可达性矩阵的前s 行的前s 列即可，记为A 。

   证明存在顶点$v \in S$ ，使得v 可达S中的任意一个顶点. 即证,A中存在一行，除对角线位置外全为1.

   考虑第i 行，若除对角线位置外全为1.得证。否则不妨设$a_{ij} = 0$ ，则v_i 可达的顶点，均不可达v_j ,即若$a_{ix} = 1$ 则$a_{xj} = 0$，则$a_{jx} = 1$ 。又 $\because a_{ij} = 0, \therefore a_{ji} = 1$ 。至此得到第j行的1 至少比第i 行多一个。若第j 行不是除对角线位置外全为1，则可重复上述分析，找到比第j行还多的行， 依次类推，$s-1$ 步之内可得必有一行除对角线位置外全为1.得证

8

> 若M与 M' 都是图G 的完备匹配，则边导出子图$G[M \oplus M']$ 的每个连通片都是M与M'交替出现的偶圈.

证明：

考虑G 的子图$G' = M \cup M'$ 。在G'中对边着色，属于M中的边着红色，M' 中的边着蓝色，去掉染了两种颜色的边,再去掉度数为0的点，得到的图即是$G[M \oplus M']$。

在M 中每个点的度数均为1，即每个点只有一条邻边。在M' 中同样 。所以在G' 中每个点的邻边最多为2，即G'中顶点度数最大为2。

不妨设$deg_{G'}(u) = 1$, u 关联的边为$e = uv$ 。则$e \in M$ 且$e \in M', \therefore deg_{G'}(v) = 1, e$ 被着两种颜色，所以u, v, e 被从G'中去掉。由u 的任意性。所以 $G[M \oplus M']$中点的度数均为2，所以 $G[M \oplus M']$的每个连通片均是圈。

由于$G[M \oplus M']$中每个顶点的两个邻边分别来自M, M' ，所以被染了两种不同颜色。所以$G[M \oplus M']$可以2-边正常着色，所以$G[M \oplus M']$不含奇圈，所以 $G[M \oplus M']$的每个连通片均是偶圈。

又由染色结果可知，$G[M \oplus M']$ 的每个连通片都是M与M'交替出现的偶圈.

2018

1

> 1.给了一个带权有向图，求最大流并找一个最小截；把有向边改成无向边，再求一棵最小生成树。

求最小生成树算法。

2

> 2.(1)已知一个图有 1 个 8 次顶、 6 个 6 次顶、 8 个 4 次顶，证明它不是平面图。
> (3)证明 n≥5 时，圈 Cn 的补图是 Hamilton 图。

2. G 是简单图，且$\nu(G) \geq 3, \delta(G) \geq \nu(G)/2,$ 则G是$Hamilton$图

   三个定理

3

> 1)设树的 2,3,...,k 次顶的个数为 n2,n3,...,nk，求一次顶的个数。
> (2)n 个顶的树的最大度数Δ最小是多少？最大是多少？并求出最小和最大时对应什么树。
> (3)证明树的最长轨的端点为叶。

4

> 已知有 8 种药品要用容器运输，给出它们的互斥关系（互斥的药品不能放在同一个容器内），问最少用几个容器？建立图论模型并使用图论知识解决问题。

点着色

5

> (1)二分图 G 满足$|X|=|Y|=n$，且最小度数$\delta \geq n/2$，证明 G 有完备匹配。
> (2)证明 : G 中任意一条边都包含于 G 的一个完备匹配，当且仅当对 X 的任一非空真子集 S，$|N(S)| \geq |S|+1$。

1. **证明：**

   任取$S \subseteq X$ 若$|S| \leq n/2$，则$|N(S)| \geq n/2 \geq |S|$ ，若$|S| > n/2$ ，则Y 中的点均与S 相邻，否则该点的度数小于δ 。即 $|N(S)| = n \geq |S|$ 。由$Hall$ 定理，得G有完备匹配。

2. **证明：**

   “$\Longleftarrow$”

   任取$e=uv \in G$，令，$G'=G-\{u,v\}$ 。只需证G' 有完备匹配即可 。在G'中任取$S \subset X', N'(S)$ 表示G'中S 的邻顶集合, $|N'(S)| \geq |N(S)|-1 \geq |S|$, 由$Hall$ 定理得G' 有完备匹配。即 G 中任意一条边都包含于G 的一个完备匹配。

   “$\Longrightarrow$”

   G 中任意一条边都包含于G 的一个完备匹配。即任取$e=uv \in G$，令，$G'=G-\{u,v\}$,G' 也有完备匹配。因为G 有完备匹配， 在G中任取$S \subset X, |N(S)| \geq |S|$ ，在图中去掉$\{u,v\}$ 后， S变为S' ，$N(S)$ 变为$N'(S')$，有四种变化可能，$|S|=|S'|, |N(S)|=N'(S')$; 或 $|S'|=|S|, |N'(S')|=N(S)-1;$ 或 $|S'|=|S|-1, |N'(S')|=N(S)$; 或 $|S'|=|S|-1, |N'(S')|=N(S)-1;$ 。因为G' 有完备匹配 ,应有$|N'(S')| \geq |S'|$，对上述四种情况均满足，所以 $|N(S)| \geq |S|+1$。