图论作业 (第四周)

PB20000113 孔浩宇

September 27, 2022

Ch2

19.

Proof. 设 $\nu(T)=\nu$, 则 T 中出度为 2 的顶点数为 $\nu-t$, 出度为 0 的顶点数为 t.

(1) 由二叉树性质有 $t=\nu-t+1$.

(2) 由树性质有 $\varepsilon=\nu-1$.

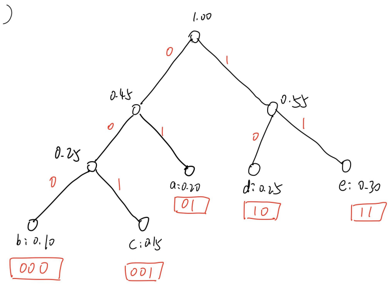
$$\begin{cases} t &= \nu - t + 1 \\ \varepsilon &= \nu - 1 \end{cases} \Rightarrow \ \varepsilon = 2t-2.$$

即证. $\square$

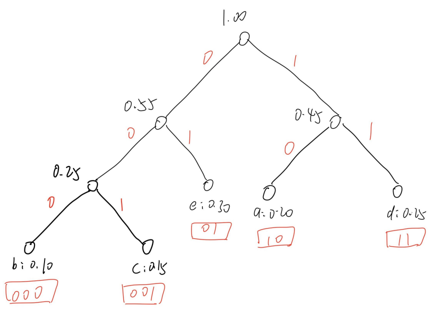
21.

如图, 编码一个符号平均需要二进制数字 $3\times 0.25+2\times 0.75=2.25$ 个.

(1)



(2)



24.

Proof.

(1) 记 $p_i = 2^{-a_i}$, 取 $A = \max\{a_i | 1 \le i \le n\}$, $K = \{i | a_i = A\}$, 记 $k = card(K)$, 则有

$$1 = \sum p_i = \frac{k + \sum\limits_{i \notin K} 2^{A-a_i}}{2^A} \Leftrightarrow k + \sum_{i \notin K} 2^{A-a_i} = 2^A$$
$$\Leftrightarrow k = 2^A - \sum_{i \notin K} 2^{A-a_i}.$$

又

$$\forall\, 1 \le i \le n\ (i \notin K),\ A - a_i \ge 1;\ \Rightarrow\ k\text{为偶数};\xrightarrow{k>0}\ k \ge 2.$$

即证概率最低 ($p = 2^{-A}$) 的消息符号至少有两个, 即概率最低的两个消息符号有相同的概率.

(2) 记 Huffman 树里顶点权值为 2^{-i} 的顶点的个数为 k_i.

先证明引理

$$\forall\, 1 \le i \le A,\ k_i\text{均为偶数, 且}k_i \cdot 2^{-i} = \sum_{a_j \ge i} p_j.$$

(a) $i = A$, 成立. k_A 个权重为 2^{-A} 的顶点两两连接, 构成 $k_A/2$ 个权重为 $2^{-(A-1)}$ 的顶点.

(b) 假设 $i = m$ $(2 \le m \le A)$ 时成立, 则

$$k_m\text{个权重为}2^{-m}\text{的顶点两两连接, 构成}\frac{k_m}{2}\text{个权重为}2^{-(m-1)}\text{的顶点.}$$

此时有

$$k_{m-1} \cdot 2^{-(m-1)} = \frac{k_m}{2} \cdot 2^{-(m-1)} + \sum_{a_i = m-1} p_i = k_m \cdot 2^{-m} + \sum_{a_i = m-1} p_i = \sum_{a_i \ge m-1} p_j$$
$$\Rightarrow k_{m-1} \cdot 2^{-(m-1)} + \sum_{a_i < m-1} p_i = \sum p_i = 1$$
$$\Rightarrow k_{m-1}\text{为偶数.}$$

综合 $(a)(b)$, 即证

$$\forall\, 1 \le i \le A,\ k_i\text{均为偶数, 且}k_i \cdot 2^{-i} = \sum_{a_j \ge i} p_j.$$

由上推理过程可知,Huffman 树里顶点权值的取值有且仅有 $2^{-i}(0 \le i \le A)$, 且

$$\omega(u) = 2 \cdot \omega(v) \Leftrightarrow L(v) = L(u) + 1. \xrightarrow{\omega(v)=\frac{1}{2}, L(v)=1} \omega(v) = 2^{-i} \Leftrightarrow L(v) = i. \Rightarrow L(v) = -\log_2 \omega(v).$$

由此可得

$$WPL = \sum \omega_i L_i = \sum p_i \cdot (-\log_2 p_i) = -\sum p_i \log_2 p_i.$$

即证.

□