第八周作业参考答案

> 绝大部分扣分点在 T4.4 和 T5.7，以及很多草草证明的答案。本次作业批改比较松，如果对作业批改有问题可以联系助教。

第四章

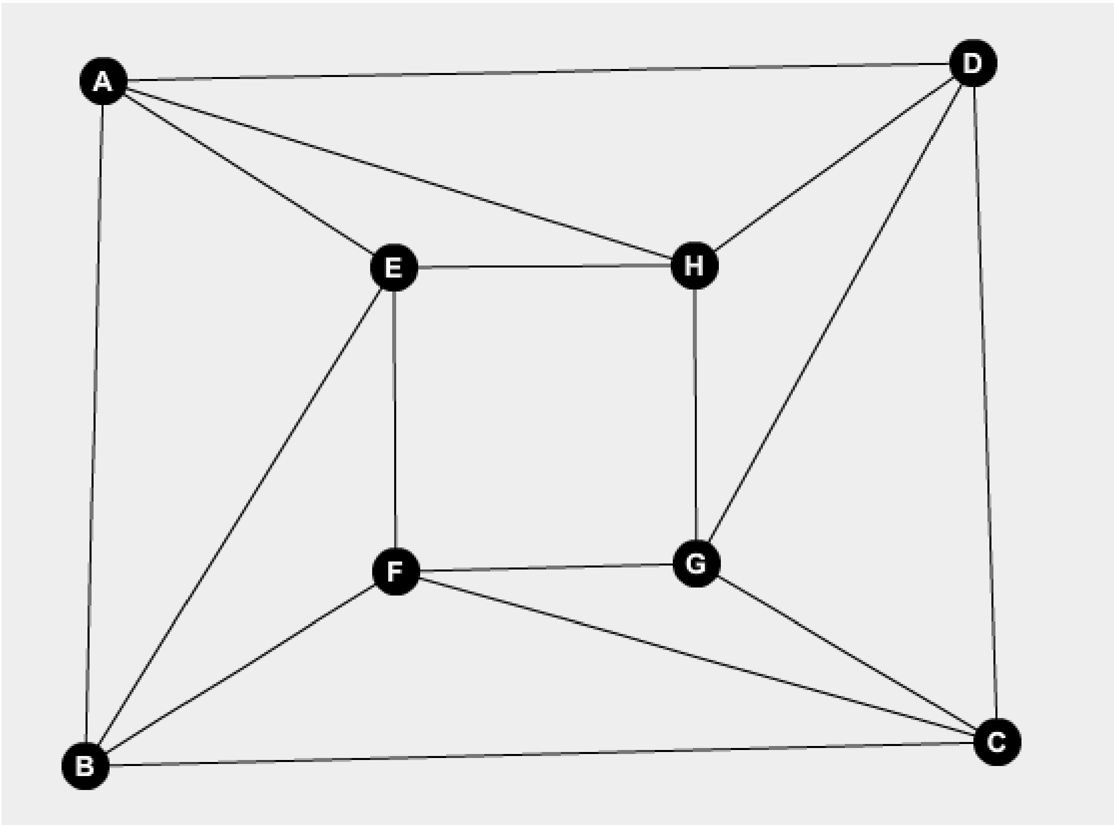
T1

> 这题不能用 $\varepsilon \le 3\nu - 6$ 来证明。这个条件是无法推出图是平面图的。

画出这些平面图即可。（不建议用定理 4.7）

T4

4 - 正则图指的是每个顶点的度数都为 4，则很容易得到这样的图 G，可以看出，它把平面分成了 10 个面（不要忘记外部图）。



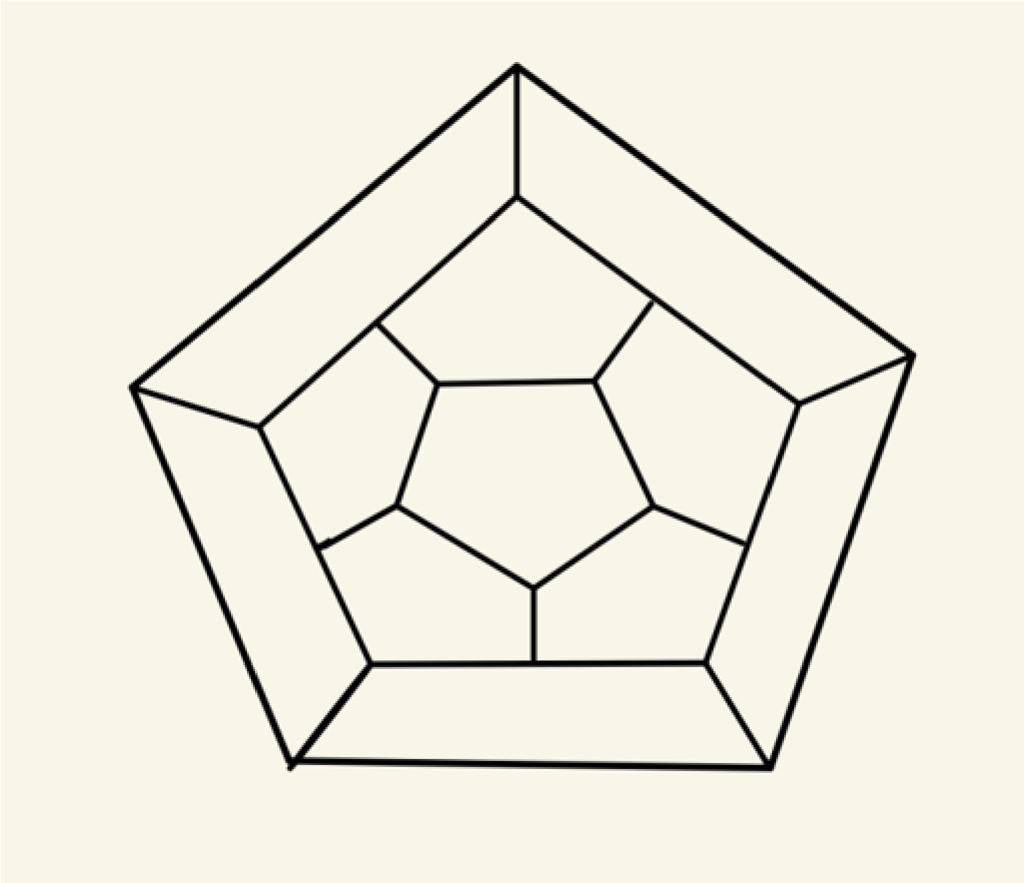
T6

由欧拉公式 $v - e + \phi = 2$ 可得 $\phi = 2 + e - v < 12$ 进而得到 $v > e - 10$，再由 $\delta(G) \ge 3$ 和欧拉公式 $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\varepsilon(G)$ 可得 $2e \ge 3v$，则可以解得 $e < 30$。

下面采用反证法。假设 G 中不存在度数小于等于 4 的面，则由定理 4.3 $\sum\limits_{f \in F(G)} \deg(f) = 2|E(G)|$ 知 $2e \ge 5\phi$，再由欧拉公式 $2e \ge 5\phi = 5(2 + e - v) \ge 10 + 5e - \frac{10}{3}e = 10 + \frac{5}{3}e$ 得到 $e \ge 30$，产生了矛盾。

所以 G 中存在度数小于等于 4 的面。

下图为正十二面体图，它是平面图，面数 $\phi=12$，$\delta(G)=3$，但是它的每个面的次数都是 5



T7

当 $\nu\le 2$ 的时候，结论显然成立。

当 $\nu\ge 3$ 的时候，下面采用反证法证明。则可以得到假设 $\delta(G)\ge 5$，那么由欧拉公式 $\sum\limits_{v\in V(G)}\deg(v)=2\varepsilon(G)$ 可知 $2\varepsilon\ge 5\nu$，同时因为它是平面图，所以可得 $\varepsilon\le 3\nu-6$，则可以推出 $\varepsilon\ge 30$，与题目条件相矛盾。

因此存在顶点 $v\in V(G)$ 使得 $\deg(v)\le 4$。

第五章

T2

> 这题很多同学的方法都是证明没有完备匹配或者只有一个完备匹配。但是我感觉绝大多数同学写的都不正确（不过这题基本也没扣分）。其实做这类题更建议采用反证法去做，然后得到的假设结果与已知定义矛盾来证明。

反证法：假设树有至少两个完备匹配 M_1,M_2。由于完备匹配中所有的顶点都被许配，构造边导出子图 $G'=G[M_1\bigoplus M_2]$，由于 G' 是边导出子图，则 G' 中不会有次数为 0 的顶点。同时 G' 中只有度数为 2 的顶点。（这里的内容可以参考课本 P96 页引理 5.1 的证明）则由于 $|M_1|=|M_2|$ 且都是完备匹配，所有 G' 对应四种交错轨道中**圈**的那种情况。这个与树中不含圈矛盾。所以树中至多有一个完备匹配。

T4

充分性：

采用反证法证明，则第一个人有必胜的策略。假设图 G 中存在一个完备匹配 M。那么当第一个人选择任何顶点 v_0 的时候，由完备匹配的定义可知，所有的顶点都被 M 所许配，那么第二个人总能找到与 v_0 相配的顶点 v_1，因此第一个人是必输的，与初始条件矛盾。故假设不成立， 图 G 中不会存在完备匹配。

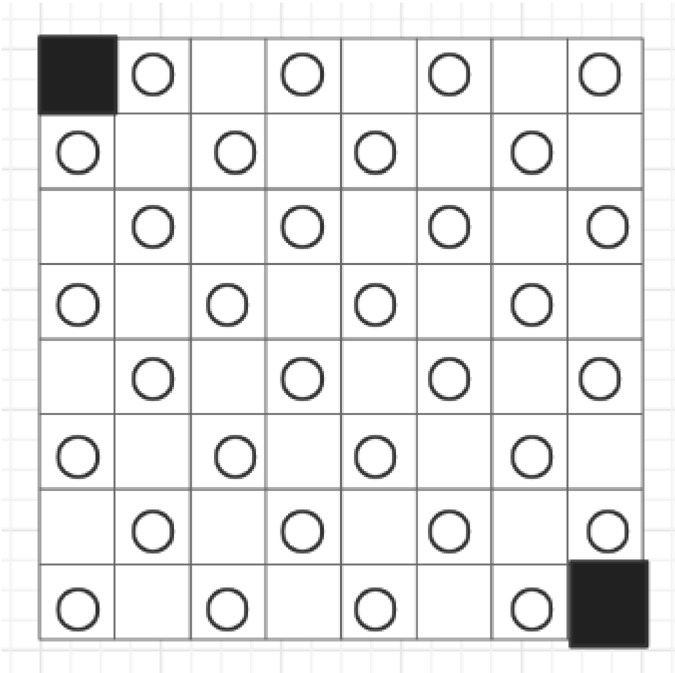
必要性：

图 G 中不存在完备匹配。则我们选择一个最大匹配 M。设 v_0 是不被 M 许配的一个顶点。当第一个人首先选择 v_0 时，则第二个选择的必定是被 M 许配的顶点 v_1（如果不是的话，因为 v_0 和 v_1 相邻，所以会存在一个新的匹配 $M' = M + v_0v_1$ 是个更大的匹配，这与 M 是最大匹配矛盾）。因此第一个人会取到最后一个被 M 许配的顶点 v'，即第二个人无法再选择出新的顶点（若第二个人还能选出顶点的话，会存在一个可增广轨道与最大匹配 M 相矛盾）。

必胜策略即上述过程。

T6

将不含 O 的顶点集合设为 X（去掉两个对角），将含有 O 的顶点集合设为 Y。则可以得到一个二分图，且 $|X| + 2 = |Y|$。因此这个二分图中不存在完备匹配。而这些 1×2 的长方形就代表这个二分图的边。因此无法用 1×2 的长方形将整个图覆盖（根据定理 5.2：二分图的匹配数等于其覆盖数）。



T7

> 这题很多同学没有看清楚题目。同时也有部分同学的证明完全错误。其实可以多参考课本中的定理证明。下面的充分性可以参考 Hall 定理的证明过程，而必要性可以参考推论 5.1 的证明过程。完备匹配最重要的是所有顶点都要被许配。部分同学并没有证明这一点，即本题要证明出 $|X| = |Y|$。

设 $V(G) = X \bigcup Y, X \bigcap Y = \emptyset$，设 $S_X = S \bigcap X$，$S_Y = S \bigcap Y$，则有 $|S| = |S_X| + |S_Y|$，$|N(S)| = |N(S_X)| + |N(S_Y)|$ （这里是因为 $N(S_X) \bigcap N(S_Y) = \emptyset$）

充分性：

二分图 G 有完备匹配，则 X 中的所有顶点都被许配。由 Hall 定理知 $|N(S_X)| \geq |S_X|$，同理 $|N(S_Y)| \geq |S_Y|$，则有 $|N(S)| = |N(S_X)| + |N(S_Y)| \geq |S_X| + |S_Y| = |S|$。

必要性：

二分图 G 中满足任意 $S \subseteq V(G)$，有 $|N(S)| \geq |S|$。则可以取得 $X \subseteq V(G)$, $|Y| \geq |N(X)| \geq |X|$，同理可以得到 $|X| \geq |Y|$，因此得到 $|X| = |Y|$。那么由 Hall 定理知，存在将 X 中顶点都许配的匹配 M，因此可知该匹配 M 就是完备匹配。（因为 X 中所有顶点都被许配，而 Y 中只有相同个数的顶点能够与 X 相配，所以 Y 中所有的顶点也会被许配。）

反例：K_3