图论作业 (第十周)

PB20000113 孔浩宇

November 8, 2022

Ch6

7.

(1) 若图中存在两个奇数度的顶点 u, v，则连接边 uv，此时图为 $Euler$ 图；若为 $Euler$ 图，不操作

(2) 利用 $Fleury$ 在图中寻找 $Euler$ 回路，删除 uv，即得到 $Euler$ 迹。(若原为 $Euler$ 图，任删去一边)

8.

由 EJ 算法

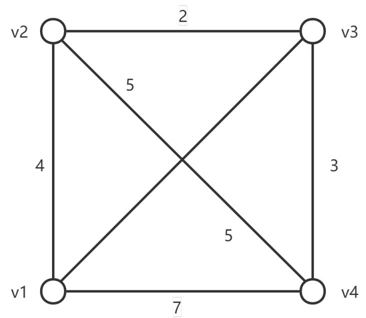
(1) 图 G 中的奇度顶点集合为 $V_0 = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$.

(2) 由 $Dijkstra$ 算法得

$$dist_G(v_1,\ v_2) = 4, \quad dist_G(v_1, v_3) = 5, \quad dist_G(v_1,\ v_4) = 7.$$

$$dist_G(v_2,\ v_3) = 2, \quad dist_G(v_2,\ v_4) = 5, \quad dist_G(v_3,\ v_4) = 3.$$

(3) 构造加权完全图 K_4



(4) 得到 K_4 中最小的完备匹配 $\{v_1v_2,\ v_3v_4\}$，在 G 中将 v_1, v_2 间最短轨道 $P(v_1v_2) = v_1v_7v_2$ 及 v_3, v_4 间最短轨道 $P(v_3v_4) = v_3v_4$ 重复一次得到 $Euler$ 图 $G*$.

(5) 在图 $G*$ 中找到 $Euler$ 回路即为最优投递路线。不妨取 v_5 为起点，可得一条 $Euler$ 回路

$$v_5\ v_1\ v_6\ v_2\ v_3\ v_4\ v_3\ v_7\ v_2\ v_7\ v_1\ v_7\ v_4\ v_5.$$

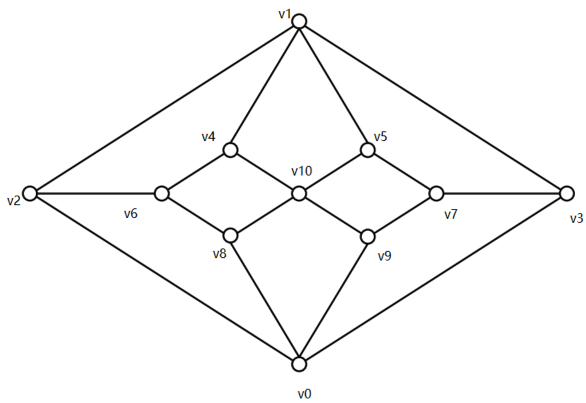
9.

(1) *Proof.* 不妨设二分图 $G=(X,E,Y)$，$X\cup Y=V(G)$，$X\cap Y=\phi$.

$$\begin{cases}\omega(G-X) & =\omega(Y)\le |X| \\ \\ \omega(G-Y) & =\omega(X)\le |Y|\end{cases} \xrightarrow[\omega(Y)=|Y|]{\omega(X)=|X|} \begin{cases}|X| & \le |Y| \\ \\ |Y| & \le |X|\end{cases} \Rightarrow\ |X|=|Y|.$$

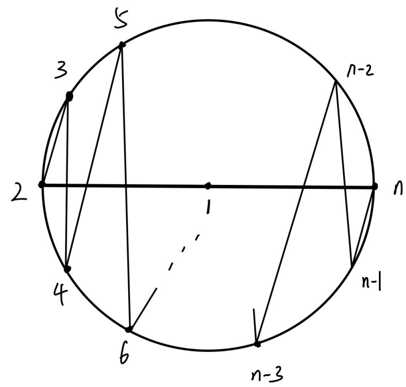
显然 $|G|=2|X|$ 为偶数，即证. □

(2) 图 6.27 不是 Hamilton 图，因为 $V(G)=\{v_0,\ v_1,\ v_6,\ v_7,\ v_{10}\}\cup\{v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_8,\ v_9\}$，为二分图，且 $|G|=11$，故不是 Hamilton 图。



12.

(1) n 为奇数，如图



显然，$(1,2,3,4,\ldots,n-2,n-1,n)$ 为 K_n 的一条 *Hamilton* 圈。现将圆周上的点的编号依次旋转 $\dfrac{2k\pi}{n-1}$ $(k=0,1,\ldots,\dfrac{n-3}{2})$，它们分布对于不重边的 *Hamilton* 圈:

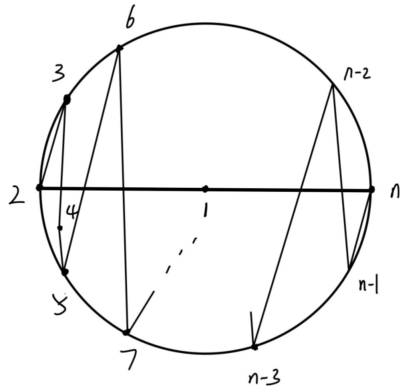
$(1,4,2,6,3,8,\ldots,n-1,n-4,n,n-2,1)$

$(1,6,4,8,2,10,\ldots,n,n-6,n-2,n-4,1)$

$\cdots$

$(1,n-1,n-3,n,n-5,n-2,\ldots,7,2,5,3,1)$

(2) n 为偶数，如图 (在结点 3，结点 5 的边上添加结点 4)



显然，$(1, 2, 3, 4, \ldots, n-2, n-1, n)$ 为 K_n 的一条 $Hamilton$ 圈。现将圆周上的点的编号依次旋转 $\frac{2k\pi}{n-2}$ $(k = 0, 1, \ldots, \frac{n-4}{2})$，它们分布对于不重边的 $Hamilton$ 圈:

$(1, 5, 2, 4, 7, 3, \ldots, n-1, n-4, n, n-2, 1)$

$(1, 7, 5, 4, 9, 2, \ldots, n, n-6, n-2, n-4, 1)$

$\ldots$

$(1, n-1, n-3, 4, n, n-5, \ldots, 8, 2, 6, 3, 1)$

综上，K_n 共有 $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 个不重边的 $Hamilton$ 圈。

17.

Proof.

(1) 假设存在 $u,\ v \in V(G)$，使得

$$\deg(u) + \deg(v) \leq \nu - 1$$

取 $G' = G - \{u,\ v\}$，此时有

$$\begin{aligned}|E(G')| &\geq m - (\nu - 1)\\ &= \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) + 2 - (\nu - 1)\\ &= \frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-3) + 1\\ &> |E(K_{\nu-2})|.\end{aligned}$$

显然矛盾，即 $\forall\ u,\ v \in V(G)$，有

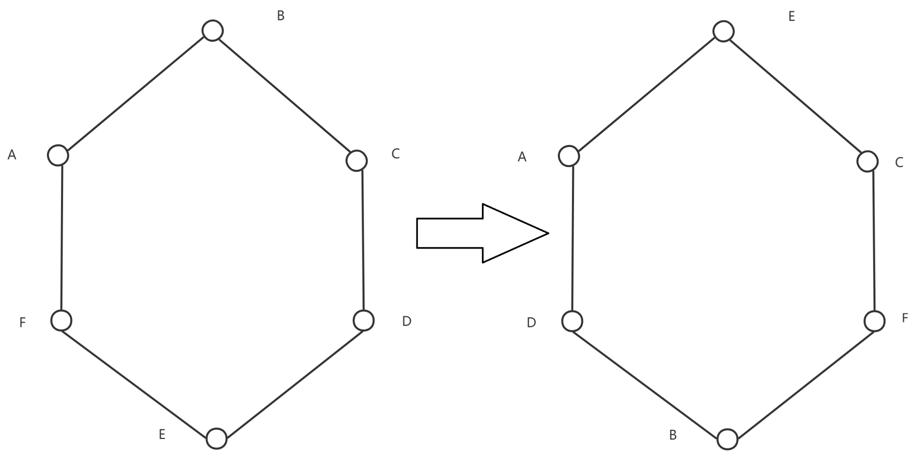
$$\deg(u) + \deg(v) \geq \nu \ \Rightarrow\ G\text{为}Hamilton\text{图}.$$

(2) 比如构造图 $G = K_{\nu-1} + u$，连接 u 与 K_n 中任一点，此时 $m = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) + 1$，但显然不是 $Hamilton$ 图.

□

19.

不妨设这 6 个人顺时针依次为 A,B,C,D,E,F，解法如图



20.

做 ν 阶无向简单图 $G=<V,E>$, 其中 $V=\{v|\ v\text{为人群中的成员}\}$, $E=\{uv|\ u,v\in V,\ u\neq v\text{且}u,\ v\text{相互认识}\}$, 则

$$\forall\ u,\ v\in V,\ \deg(u)+\deg(v)\geq \nu-2.$$

对于不相邻的顶点 u, v，若 $\exists\ w\in V,\ w\neq u, w\neq v$, 且$wu, wv$ 有一不属于 E (不妨设 $wu\notin E$)，则

$$w,v\text{合起来认识的人不包括}u\ \Rightarrow\ \text{矛盾}.$$

即

$$\deg(u)+\deg(v)\geq 2(\nu-2).$$

当 $\nu\geq 3$ 时，有

$$2(\nu-2)\geq \nu-1\ \Rightarrow\ G\text{有}Hamilton\text{轨道}.$$

当 $\nu\geq 4$ 时，有

$$2(\nu-2)\geq \nu\ \Rightarrow\ G\text{有}Hamilton\text{圈}.$$

将人群按 $Hamilton$ 轨道及 $Hamilton$ 圈排列即为所求.

22.

(1) $1°$ 从 a 出发，形成轨道 $P_1 = a$.

$2°$ 从 $V(G) - a$ 中，选取与 a 最近的顶点 d. 形成 $P_2 = ad$.

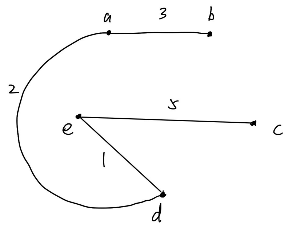
$3°$ 从 $V(G) - a, d$ 中，选取与 d 最近的顶点 e. 形成 $P_3 = ade$.

$4°$ 从 $V(G) - a, d, e$ 中，选取与 e 最近的顶 b. 形成 $P_4 = abeb$.

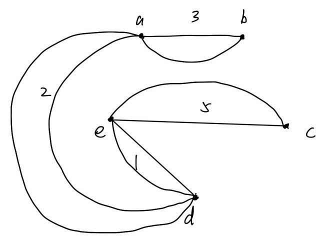
$5°$ 从 $V(G) - a, d, e, b$ 中，选取与 b 最近的顶点 c. 形成 $P_5 = abebc$.

$6°$ 得 $Hamilton$ 圈，$H = adebca$，$W = 26$.

(2) $1°$ 求 G 的一颗最小生成树 T.



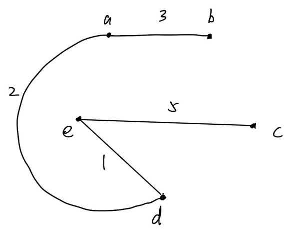
$2°$ 将 T 各边加平行边得 G^*.



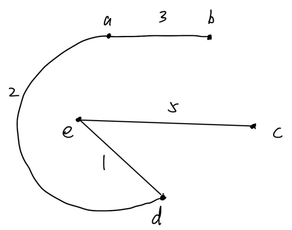
$3°$ 从 a 出发，求 G^* 的一条欧拉回路 $C_a = adecedaba$ ，”抄近路”访问 G 的各顶点。得 $H_a = adecba$，$W_a = 21$。

$4°$ 从 b 出发，求 G^* 的一条欧拉回路 $C_b = badecedab$ ，”抄近路”访问 G 的各顶点。得 $H_b = badecb$，$W_b = 21$。

(3) 1° 求 G 的一颗最小生成树 T.



2° T 中奇度数顶点得集合为 $V_o = b, c$, V_o 的导出子图中总权最小得完备匹配 $M = bc$，M 加入 T 中得 $G*$.



3° 在 G^* 中求从 a 出发得一条欧拉回路 $C_a = adecba$

3° 在 G 中，从 a 出发，沿 C_a 中得边按" 抄近路" 走出 $Hamilton$ 圈 $H_a = adecba$.

$W = 21$.