第三周作业参考答案

8

8. 证明: 若 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$ 是正整数序列, 则此序列是树的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$.

充分性：

若此序列为树的度数序列，则 $\sum_{i=1}^{v} d_i = 2\epsilon(G) = 2(v-1)$

必要性：

设正整数序列满足：$\sum_{i=1}^{v} d_i = 2(v-1)$。则$\epsilon(G) = v(G) - 1$

由定理2.1知G为树。

(3) G 不含圈, 且 $\varepsilon(G) = \nu(G) - 1$;
(4) G 是连通图, 且 $\varepsilon(G) = \nu(G) - 1$;
(5) G 是连通图, 且删去任意一条边后都不连通;
(6) G 不含圈, 且任意添加一条边后恰好含一个圈.

注：默认了为简单图

13

13. 证明: $\tau(K_\nu - e) = (\nu - 2)\nu^{\nu-3}$.

证明：

由定理2.5知$\tau(K_v) = v^{v-2}$

定理 2.5

$$\tau(K_n) = n^{n-2}.$$

考虑K_v中的各条边，它们在K_v的所有生成树中出现的次数相同，设某条边e在这些生成树中的t棵出现，由K_v共$\binom{v}{2}$条边，有：$\binom{v}{2} \cdot t = \tau(K_v) \cdot (v-1)$，得$t = 2v^{v-3}$

故$\tau(K_v - e) = \tau(K_v) - t = v^{v-2} - 2v^{v-3} = (v-2)v^{v-3}$

16

16. (1) 试给出破圈法的算法.
(2) 证明: 破圈法得到的生成树是最小生成树.
(3) 分析破圈法的时间复杂度.

(1)

输入：加权图$G(V, E, W)$

输出：G的最小生成树边集E'

步骤：

1.记$E' = E$;

2.在E'中找一圈，记e为圈中权最大的边，$E' = E' - e$

3.重复操作2直至E'中无圈

(2)

证明：

设由(1)所得生成树为T', 下证明T'为最小生成树

设T为G的一棵最小生成树，若$E(T')=E(T)$, 结论成立。

否则，设e为破圈法删边过程中一条被E'删去但在T中的边, 则在该圈中，存在一边$e'\in T'$, 且$e'\notin T$：

由(1)知，$w(e')\leq w(e)$, 而由T为最小生成树，$w(e')<w(e)$不成立。

否则令$E(T)=E(T)-e+e'$。$W'(T)=W(T)-w(e)+w(e')<W(T)$矛盾。

调整e'为e, $E(T')$权值不变，故所得树为MST

(3)

时间复杂度：

找圈次数$E-V+1$次

说明图以什么方式实现，分析找圈时间复杂度

17

17. 证明: 一棵有向树 T 是有根树, 当且仅当 T 中有且仅有一个顶点的入度为 0.

必要性：

由有根树的定义可知，一棵有向树T为有根树，则它仅有一个顶点入度为0.

定义 2.6 在有根树中仅有一个顶点入度为 0, 其余顶点的入度均为 1. 有根树 T 中入度为 0 的顶点就是**根**, 入度为 1 出度为 0 的顶点称为**树叶**, 入度为 1 出度不为 0 的顶点称为**内点**, 内点和根统称为**分支点**. 从根到 T 的任一顶点 v 的距离称为 v 的**深度** $L(v)$, 深度的最大值称为**树高** $h(T)$.

充分性：

设T中各顶点的入度为$deg^-(v), v\in V(G)$, 则 $\sum\limits_{v\in v(G)} deg^-(v)=\epsilon(G)=v(G)-1.$

当图中仅有一个顶点入度为0，设该顶点为u,

若剩余顶点中有入度大于1的顶点，设其中之一为w,

则 $\sum\limits_{v\in V(G)} deg^-(v)=\sum\limits_{v\in V(G), v\notin u,w} deg^-(v)+deg^-(u)+deg^-(w)\geq(v(G)-2)+0+deg^-(w)\geq v(G)-2+2=v(G)$, 矛盾.

故其余顶点入度均为1，该有向树为有根树.