第四周作业

Ch2 19

> 设 T 是二叉正则树, 有 t 片树叶, 证明 T 的边数 $\varepsilon = 2t - 2$

- T中度数为1的结点有t个，度数为2的结点有1个（根节点)，则度数为3的结点有v-1-t个

  根据定理1.1：

  $$\sum_{v\in V(T)} deg(v) = t + 2 + 3(v-1-t) = 3v - 2t - 1 = 2\varepsilon$$

  根据树的性质,有:

  $$v = \varepsilon + 1$$

  带入上式即可得

  $$\varepsilon = 2t - 2$$

CH2 21

> 用 Huffman 编码来编码具有给定频率的如下符号: a : 0.20, b : 0.10, c : 0.15, d : 0.25, e : 0.30. 编码一个符号平均需要多少个二进制数字?

一种编码方式: a:01 b:000 c:001 d:10 e:11 (答案不唯一但 **b**和**c**一定是三位 **a**，**d**，**e**一定是两位 并且互相不为对方的前缀)

平均一个字符需要 (0.2+0.25+0.3) * 2+(0.1+0.15) * 3=2.25位二进制数字(**注意算加权平均数**)

CH2 24

> 考虑 *n* 个消息符号, 假设它们出现的概率分别为 *p*1, *p*2, · · · , *p***n*, 任意 *p***i* 均是 1/2 的幂
>
> 且 ∑*p***i* = 1(1) 证明: 概率最低的两个消息符号有相同的概率(2) 证明: 在此概率分布下, Huffffman 编码的平均编码长度为 −∑*p***i* lg *p***i*.

- 将pi从小到大排列，设排列后为：

$$p_1, p_2 \cdots\cdots p_{n-1}, p_n$$
$$p_1 + p_2 + \cdots\cdots p_{n-1} + p_n = 1$$

假设p_{n-1}!=p_n

两边同时除以p_n，得到

$$\frac{p_1}{p_n} + \frac{p_2}{p_n} + \cdots\cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} + 1 = \frac{p_1}{p_n}$$

等号左边为奇数（左n-1项皆为2的倍数），等号右边为偶数，矛盾

所以p_{n-1}=p_n

- 只需证明**当消息符号为p1，p2...pn=$(1/2)^q$时概率为$(1/2)^k$的符号huffman树中的深度为k**（k<=q）

  q=1时，p1=p2=1/2，在huffman树中的深度都为1,命题显然成立

  假设q=n-1时命题成立，下面证明q=n时成立：

  由第（1）问得知：概率取到最小值$(1/2)^q$的消息符号有偶数个,将他们两两结合成为$(1/2)^{q-1}$的消息符号。此时根据假设可以构造一个huffman树使得权为$(1/2)^k$的结点在中的深度为k（k<q-1），将$(1/2)^q$的消息符号作为$(1/2)^{q-1}$的孩子结点加入其中（如此构造的二叉树一定也是huffman树），它的深度为$(1/2)^q$。故k=n时假设成立所以 概率为$(1/2)^k$的符号的在huffman树中的深度为k。

  显然Hufffman 编码的平均编码长度为 $-\sum pi \lg pi$.

第十周作业

7. 给出一个算法，在有 Euler 迹的图中求出一条 Euler 迹.

（1）若G中不存在deg(v)=2k+1 直接用教材算法6.1或6.2求出Euler回路即 Euler 迹

（2）若G中存在v,u deg(v)=deg(u)=2k+1,在u与v直接添一条边，此时G'存在Euler回路

用教材算法6.1或6.2求出Euler回路

删除uv即是图G的Euler 迹

8. 求图 6.28 的一条最优投递路线.

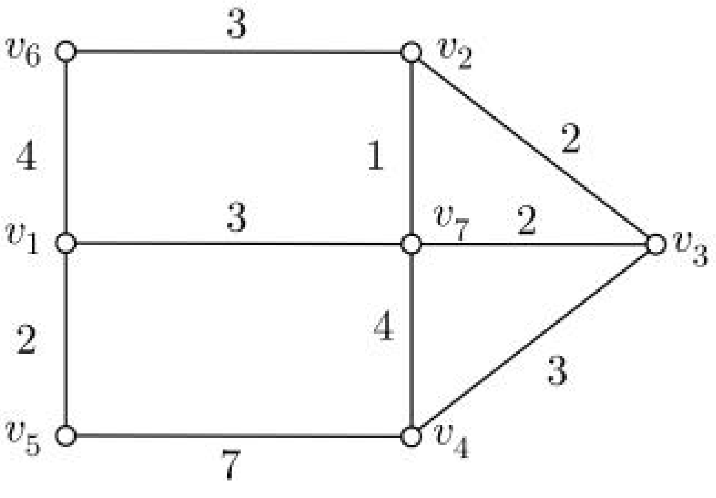
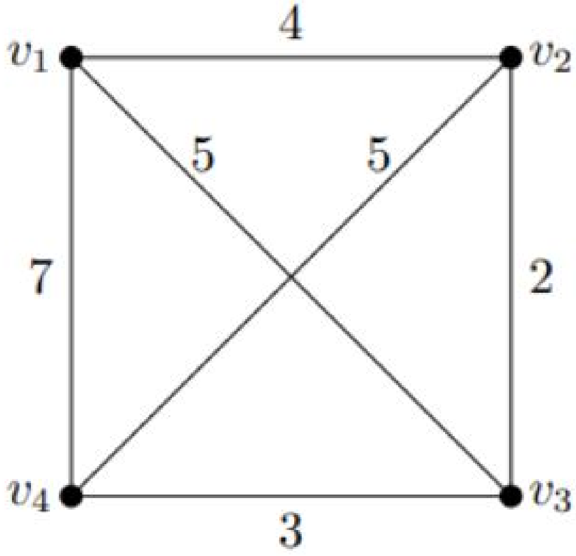


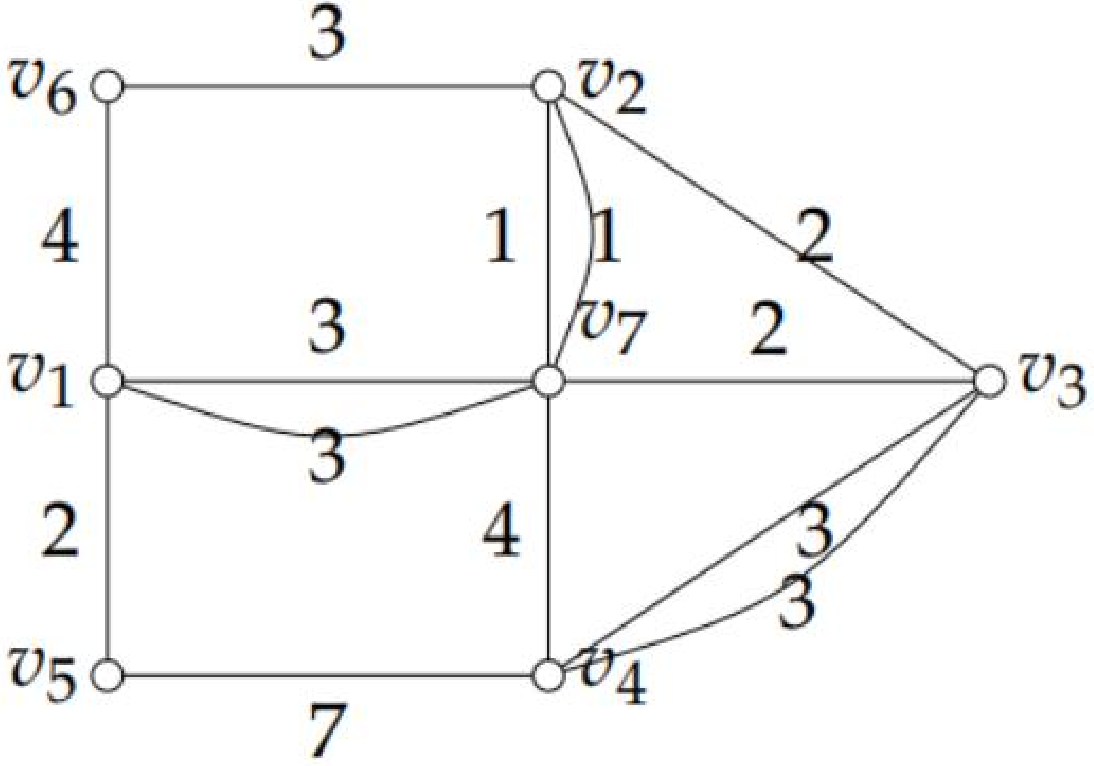
图 6.28 G

- 图G的奇度顶集$V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- 求V_0中各顶点间的最短距离

  $d(v_1, v_2) = 4, d(v_1, v_3) = 5, d(v_1, v_4) = 7$
  $d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 5, d(v_3, v_4) = 3$
- 包含V_0中所有顶点的带权完成图K_4:



- K_4的最佳匹配$M=\{v_1v_2, v_3v_4\}$.在G中v_1, v_2间最短轨为$P(v_1, v_2)=v_1v_7v_2, P(v_3, v_4)=v_3v_4$.
- 添加边后的$Euler$图G^*:



- 求出G^*的欧拉回路（不唯一）： $v_6v_2v_3v_4v_3v_7v_2v_7v_1v_7v_4v_5v_1v_6$

9. 设 G 是二分图, 证明: 若 G 是 Hamilton 图, 则 G 必有偶数个顶点. 习题 1 中的图 6.27是 Hamilton 图吗? 为什么?

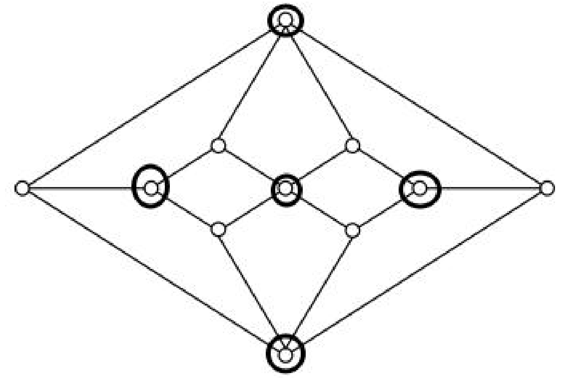


图 6.27　Herschel 图

若G是Hamilton 图且G有奇数个顶点，则G的Hamilton圈是奇圈，与二分图无奇圈矛盾。

- 删除标注的五个顶点，剩下六个连通片。不满足 ω(G − S) <=|S| 的条件,所以图 6.27不是 Hamilton 图

12. 求 Kn 中无公共边的 Hamilton 圈的个数

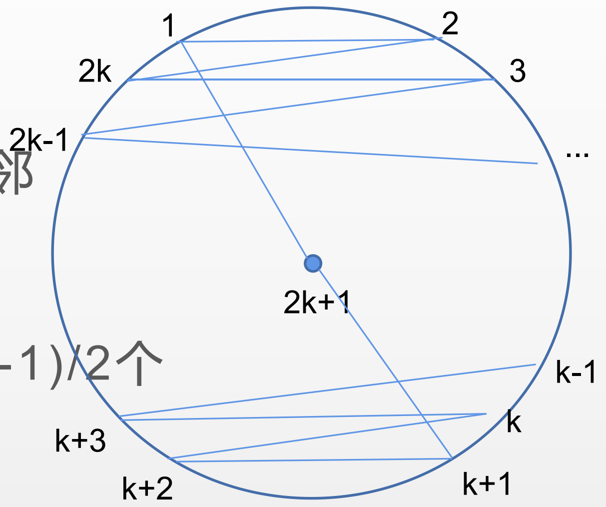
- n为奇数（n>=3)：将2k+1个顶点如图所示放置。

1-2-2k-3-(2k-1)-...-(k+1)-(2k+1)是一个Hamilton 圈

将所有点旋转360°/(n-1) 对于任意点v旋转后都与新的点相邻

这样的旋转可以进行k-1次

所以Kn 中无公共边的 Hamilton圈的个数为C（Kn）=k=(n-1)/2个



n为奇数

n为偶数时 Kn的无公共边的 Hamilton 圈的个数不少于

Kn-1（任何一个Kn-1的Hamilton 圈可以扩展为Kn的一个Hamilton 圈）

所以C（Kn）>=C（Kn-1）=(n-2)/2

同时最多有(n(n-1)/2) /n=(n-1)/2个Hamilton 圈

所以n为偶数时 C（Kn）=(n-2)/2个

17. 设 G 是 ν 阶无向简单图, 边数 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)+2$.

(1) 证明: G 是 Hamilton 图.

(2) 举例说明, 当 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)+1$ 时, G 不一定是 Hamilton 图.

- 假设存在u，v 使得$deg(v)+deg(u) <= v-1$

  设$G' = G - \{u, v\}$

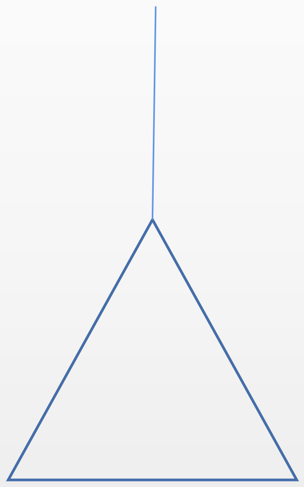
  则$\varepsilon(G') >= (v-1)(v-2)/2+2-(v-1) = (v-2)(v-3)/2+1$

  由于$V(G') = v-2$，$\varepsilon(G') <= (v-2)(v-3)/2$

  矛盾

  所以G中任意u，v，都有$deg(v)+deg(u) >= v$

  由定理6.7得出结论G是Hamilton图



v=4,ε=4,
非Hamiton

19. 若围一张圆桌坐着至少 6 个人，那么一定可以调整他们的位置，使得每个人两侧都挨着新邻居

用以下规则作图G：

- 每个人对应一个点v_i $V(G) = v > 6$
- 若两人i,j不相邻则 $e(i,j) \in E(G)$

每个人只有两个邻居，v-2个不相邻的人则$\forall v_i, deg(v_i) = v - 3$

所以$\forall v, u, deg(v) + deg(u) = 2v - 6 \geq v(v \geq 6)$

由定理6.7得出结论G是Hamilton图,图G存在一个Hamilton圈，该圈即为满足题意的座法

20. 今有 v 个人，已知他们中的任何两人合起来认识其余的 v − 2 人. 证明：当 v >= 3 时，这v 个人能排成一列，使得中间任何人都认识两边的人，而两头的人认识左边（或右边）的人. 当 v >= 4 时，这 v 个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识两边的人.

用以下规则作图G:

- 每个人对应一个点v_i $V(G) = v$
- 若两人i,j认识则 $e(i, j) \in E(G)$

下面证明$\forall u, deg(u) \geq v - 2$

假设存在u,$deg(u) <= v - 3$,那么有w1,w2使得$e(w1, u) \notin E(G) \wedge e(w2, u) \notin E(G)$

则w1与w2合起来并不能认识其余的 v − 2 人（不认识u） 与题设矛盾

所以$\forall u, deg(u) \geq v - 2,\qquad \forall u, v, deg(u) + deg(v) \geq 2v - 4$

- 当v >= 3 $deg(u) + deg(v) \geq 2v - 4 \geq v - 1$ 根据定理6.7 G存在Hamlton轨道，该轨道即为所求
- 当v >=4 $deg(u) + deg(v) \geq 2v - 4 \geq v$ 根据定理6.7 G存在Hamlton圈，该圈即为所求

22. 5 阶完全加权图如图 6.30 所示.
(1) 用最近邻法求以 a 为起点的旅行商问题的近似解
(2) 用最小生成树法求以 a, b 为起点的旅行商问题的近似解;
(3) 用最小权匹配法求旅行商问题的近似解

(1) 用最邻近法求以a 为起点的旅行商问题的近似解;

$W=26$

从a出发， 形成轨道$P_1=a$。

从$V(G)-\{a\}$中，选取与a 最近的顶点d。形成 $P_2=ad$

从$V(G)-\{a,d\}$中，选取与d 最近的顶点e。形成 $P_3=ade$

从$V(G)-\{a,d,e\}$中，选取与e 最近的顶b。形成 $P_4=adeb$

从$V(G)-\{a,d,e,b\}$中，选取与b 最近的顶点c。形成 $P_5=adebc$

得$Hamilton$ 圈，$H=adebca$

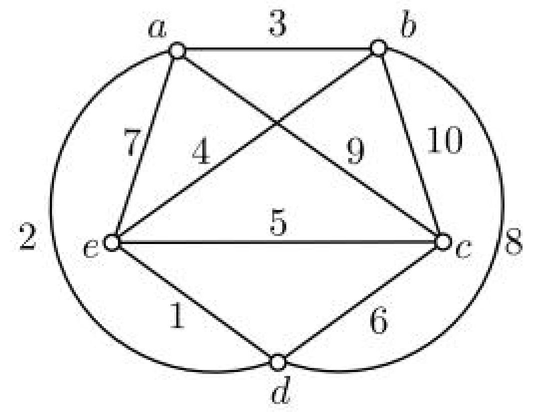
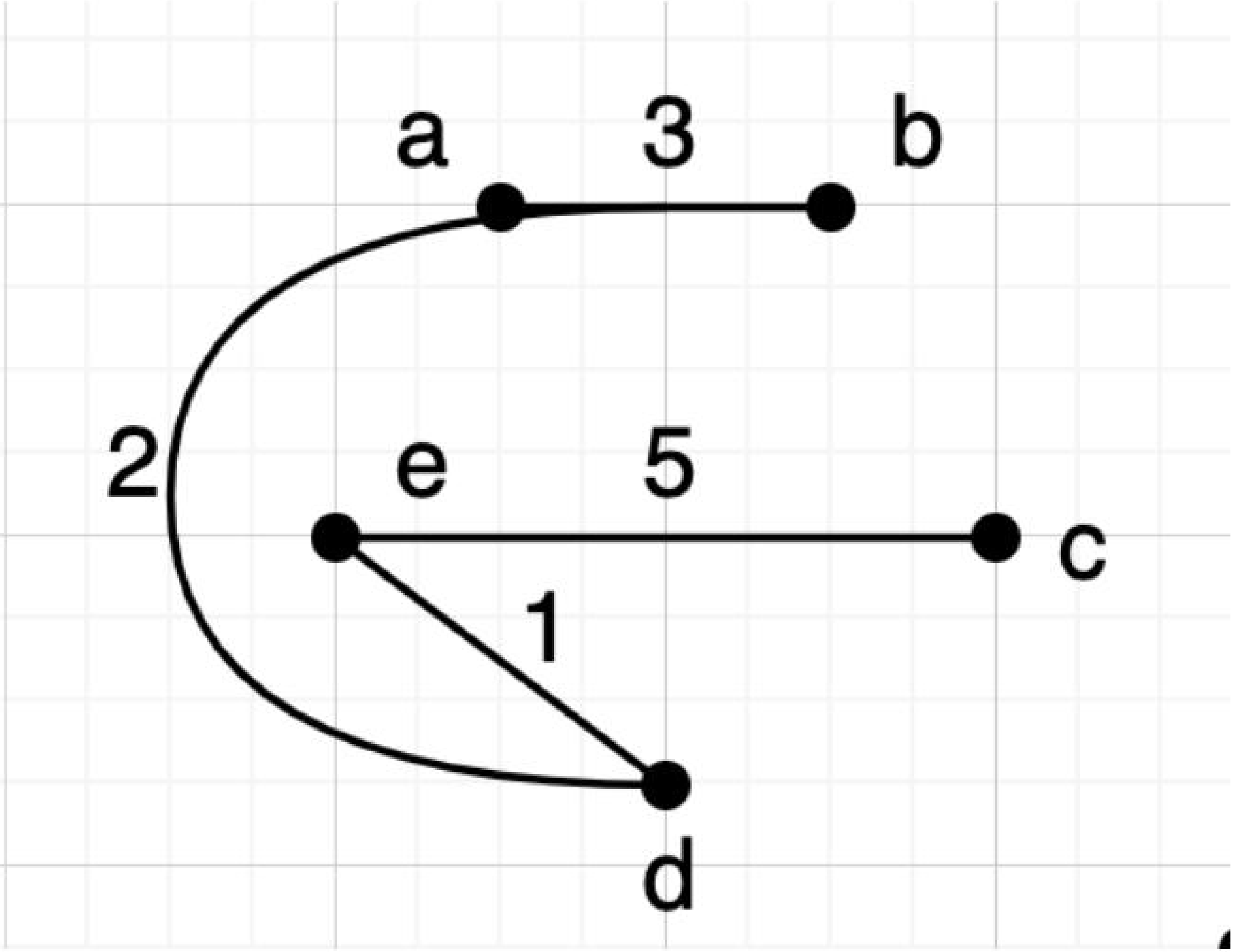


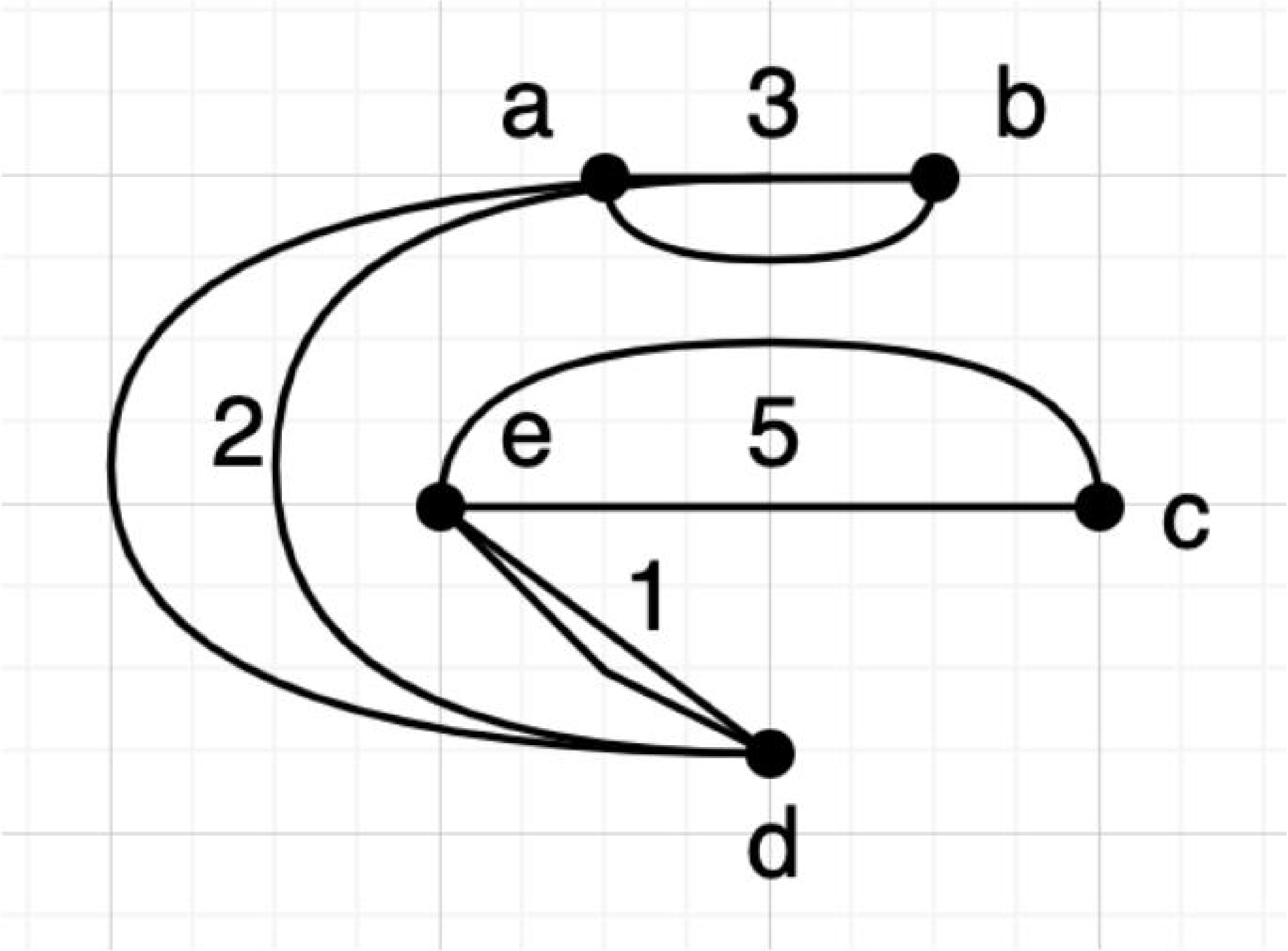
图 6.30 G

(2)用最小生成树法求以a，b 为起点的旅行商问题的近似解；

1. 求G 的一颗最小生成树T.



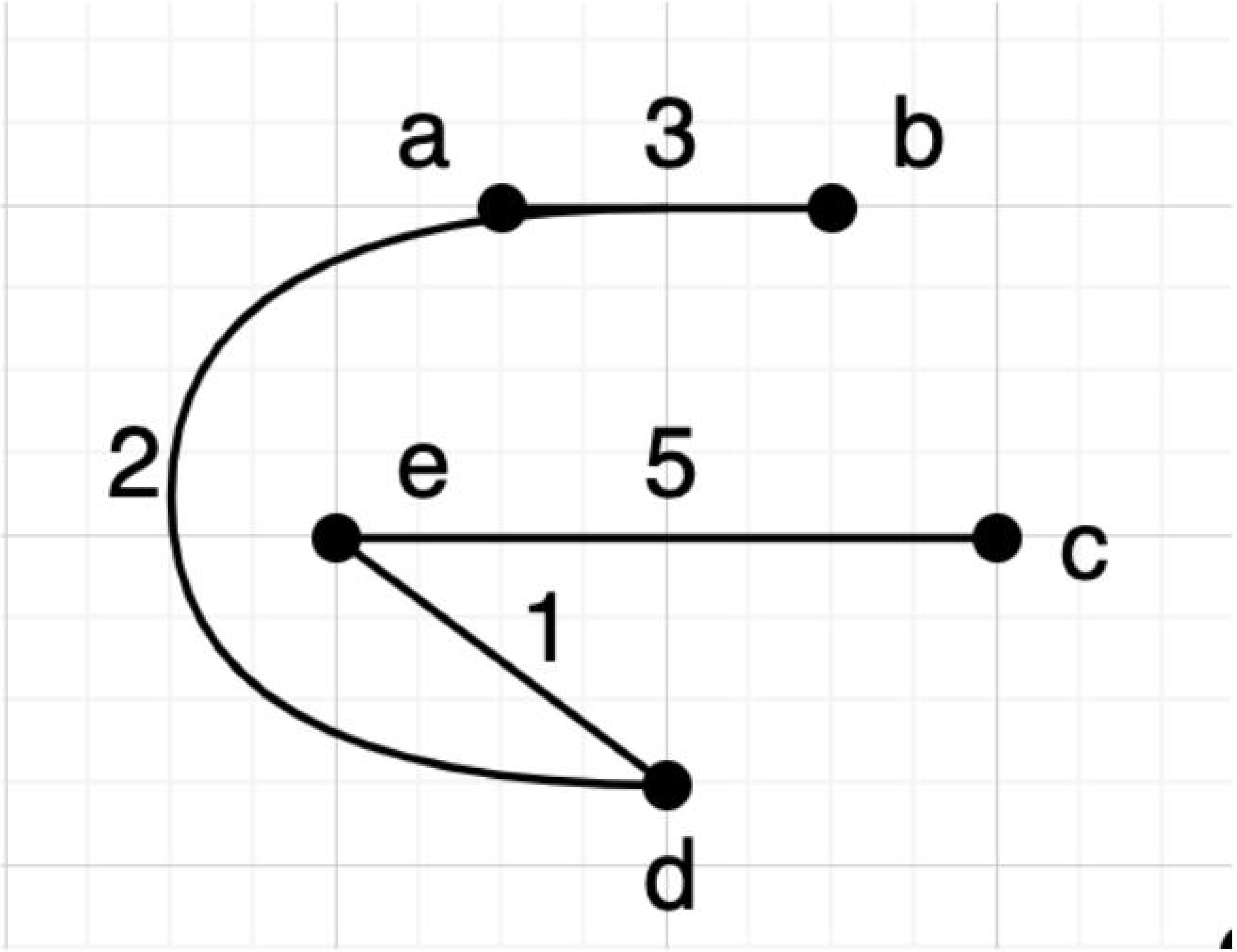
2. 将T 各边加平行边得G^*



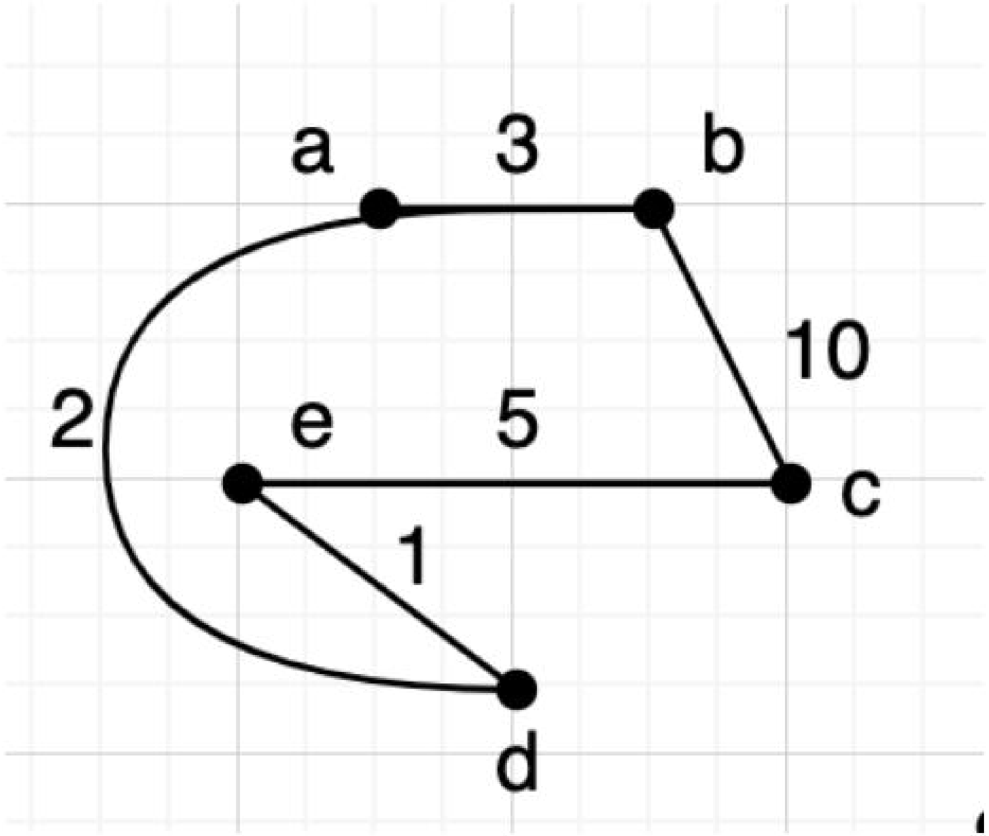
从a 出发，求G^* 的一条欧拉回路$C_a = adecedaba$ ，"抄近路" 访问G 的各顶点。得$H_a = adecba$ 。$W_a = 21$

从b 出发，求G^* 的一条欧拉回路$C_b = badecedab$ ，"抄近路" 访问G 的各顶点。得$H_b = badecb$ 。$W_b = 21$

1. 求G 的一颗最小生成树T.



2. T 中奇度数顶点得集合为$V_o = \{b, c\}$ ，V_o的导出子图中总权最小得完备匹配$M = \{bc\}$ ，M 加入 T 中得G^*



3. 在G^* 中求从a 出发得一条欧拉回路$C_a = adecba$

4. 在G 中，从a 出发，沿C_a 中得边按 "抄近路" 走出$Hamilton$ 圈$H_a = adecba$

$W = 21$