图论作业 (第八周)

PB20000113 孔浩宇

October 25, 2022

Ch4

1.

Proof.

(1) $K_5 - e$ 中四个顶点度为 4，一个顶点度为 3，无法收缩为顶点度均为 4 的 K_5 和顶点度均为 3 的 $K_{3,3}$.

(2) $K_{3,3} - e$ 中五个顶点度为 3，一个顶点度为 2，无法收缩为顶点度均为 4 的 K_5 和顶点度均为 3 的 $K_{3,3}$.
即证. □

4.

$$\phi = 2 - \nu + \varepsilon = 2 - 8 + \frac{8 \times 4}{2} = 10.$$

6.

(1) *Proof.* 取 G 的任意连通片 G_1, 记 $\phi(G_1) = \phi_1$, $\nu(G_1) = \nu_1$, $\varepsilon(G_1) = \varepsilon_1$.

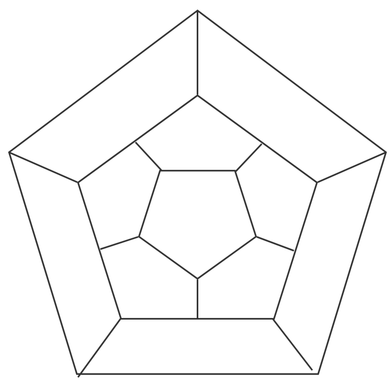
$$\begin{cases} \nu_1 - \varepsilon_1 + \phi_1 & = 2 \\ \phi_1 & < 12 \end{cases} \Rightarrow \ \nu_1 > \varepsilon_1 - 10 \xrightarrow{2\varepsilon_1 = \sum \deg(v) \geq 3\nu_1} \varepsilon_1 < 30.$$

$$\text{if } \forall\ f \in G_1,\ \deg(f) \geq 5 \ \Rightarrow\ 2\varepsilon_1 \geq 5\phi_1 = 60 \ \Rightarrow \varepsilon_1 \geq 30,$$

□

矛盾，即证 $\exists\ f \in G,\ \deg(f) \leq 4$.

(2) 如图.



7.

Proof.

(1) $\nu \le 5$, 显然成立.

(2) $\nu \ge 6$. 假设 $\delta \ge 5$.

$$\begin{cases} 2\varepsilon & \ge 5\nu \\ \varepsilon & \le 3\nu - 6 \end{cases} \Rightarrow \ \nu \ge 12 \ \Rightarrow \ \varepsilon \ge \frac{5\nu}{2} = 30.$$

矛盾，即证 $\delta \le 4$, 即 $\exists\, v \in V(G)$, $\deg(v) \le 4$.

□

Ch5

2.

Proof. 假设存在两个不同的完备匹配 M_1 和 M_2，则 $\exists\, u \in G$, $up_0 \in M_1$, $uq_0 \in M_2 (p_0 \ne q_0)$.

(1) $\exists\, p_0q_1 \in M_2$, $q_0p_1 \in M_1$，若 $p_1 = q_1$，则 $up_0q_1q_0u$ 构成圈，与树矛盾。

(2) 若 $p_1 \ne q_1$，则 $\exists\, p_1q_2 \in M_2$, $q_1p_2 \in M_1$. 以此类推，若 $\exists\, p_i = q_j$，则

$$\begin{cases} up_0q_1 \cdots p_iq_jp_{j-1} \cdots q_0u & (i, j = 2k) \\ \\ up_0q_1 \cdots q_jp_iq_{i-1} \cdots q_0u & (i, j = 2k+1) \\ \\ q_jp_{j+1} \cdots p_iq_j & (j - i = 2k+1, j > i) \\ \\ p_iq_{i+1} \cdots q_jp_i & (i - j = 2k+1, i > j) \end{cases}$$

又 G 存在完备匹配，则 $\nu = 2k$，总会有 $p_i = q_j$. 即证矛盾，树至多存在一个完备匹配。

□

4.

Proof.

(1) $\Rightarrow$: 假设 G 中有完备匹配 M.

记第一个人第 i 次选的为 p_i，每选出一个 p_i，第二个人均可找到 q_i，使得 $p_iq_i \in M$. 无论如何取 p_i，总有 q_i 与之相对应，故第二个人有必胜策略。即证当第一个人有必胜策略时，G 中无完备匹配。

(2) $\Leftarrow$: 假设 G 中没有完备匹配，最大匹配为 M.

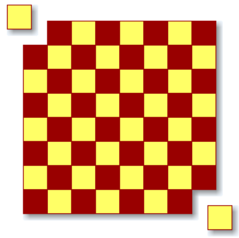
取 $p_1 \notin E(M)$，若 $\exists\, q_1 \notin E(M)$, $p_1q_1 \in E(G)$，则 $p_1q_1 \in M$，矛盾。故 $q_1 \in E(M)$，则此时等价于以 M 对应的子图为图，原来的第二个人首次选，则原来的第一个人有必胜策略 (见上一问)。

即证当 G 中无完备匹配时，第一个人有必胜策略。

□

6.

如图，将正方形方格用红黄相间覆盖，不妨设去除的两个对角为黄色（必同色）。



将每个格视为一个点，取 $E = \{pq|\ p, q\text{在图中相邻}\}$，

$$X = \{p|\ p\text{在黄色格子}\},\ Y = \{q|\ q\text{在红色格子}\}.$$

则 X, Y 为图的一个二分划分。由于 $|N(Y)| = |X| < |Y|$，故不存在完备匹配。即证不能覆盖。

7.

Proof. 记 $V(G) = X \cup Y,\ X \cap Y = \phi,\ S_X = S \cap X,\ S_Y = S \cap Y.$

(1) $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} \text{二分图}G\text{有完备匹配} &\Rightarrow X, Y\text{中的顶点均被许配} \\ &\Rightarrow |N(S_X)| \geq |S_X|,\ |N(S_Y)| \geq |S_Y| \\ &\Rightarrow |N(S)| = |N(S_X)| + |N(S_Y)| \geq |S_X| + |S_Y| = |S|. \end{aligned}$$

(2) $\Leftarrow$:

$$\begin{cases} |X| \geq |N(X)| & \geq |Y| \\ |Y| \geq |N(Y)| & \geq |X| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |X| & = |Y| \\ N(X) & = Y \\ N(Y) & = X \end{cases} \Rightarrow G\text{中存在将 } X \text{ 的点与 } Y \text{ 的点一一相配的完备匹配。}$$

(3) 对一般图不成立，如 K_3 满足 $\forall\ S \subseteq V(K_3)$，$|N(S)| \geq |S|$，但没有完备匹配。

$\square$