图论作业 (Week 11 & Week 12)

PB20000113 孔浩宇

November 22, 2022

Ch7

2.

Proof. 将图 G 分为 $\chi(G)$ 个内部无连边的子图，记为划分 $C=(V_1,\ldots,V_{\chi(G)})$，$v_i=|V_i|$. 则

$$2\varepsilon \le \sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i\cdot(\nu-v_i)=\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i\nu-\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i^2=\nu^2-\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i^2.$$

又有

$$\chi(G)\cdot\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i\right)^2 \ \Rightarrow\ \nu^2-\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i^2 \le 2\varepsilon \le \nu^2\left(1-\frac{1}{\chi(G)}\right)$$

可得

$$\chi(G)\ge\frac{\nu^2}{\nu^2-2\varepsilon}.$$

□

4.

Proof. 不妨设 $\chi(G)\ge 6$，则有无交划分 $C=(V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_k)$ $(k\ge 6)$. 取顶点导出子图

$$\begin{cases} G_1 &= G[V_1\cup V_2\cup V_3] \\ \\ G_2 &= G[V_4\cup V_5\cup V_6]\end{cases} \ \Rightarrow\ \chi(G_1)=\chi(G_2)=3\ \Rightarrow\ G_1,G_2\text{均含奇圈}$$

又

$$V(G_1)\cap V(G_2)=\phi\ \Rightarrow\ \text{矛盾!}$$

即证 $\chi(G)\le 5$. □

6.

Proof. 记 G 的最小着色划分为 $C=(V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_{\chi(G)})$，不妨设 $\max\{|V_i|\ 1\le i\le\chi(G)\}=|V_k|=v_k$. 则

$$v_k\le\nu-(\chi(G)-1)$$

又对于图 G^c，$\{uv|\ u\in V_i,\ v\in V_j,\ 1\le i\ne j\le\chi(G)\}=\phi$，存在着色

$$C=(M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{v_k}),\ Card[M_i\cap V_j]\le 1\ \Rightarrow\ \chi(G^c)=v_k$$

可得

$$\chi(G)+\chi(G^c)\le\chi(G)+\nu-(\chi(G)-1)=\nu+1.$$

□

8.

记该图为 G，中心顶点编号为 v_0，圈上的顶点按顺时针依次为 $v_1, v_2, \cdots, v_{\nu-1}$。显然

$$\chi'(G) \geq \Delta(G) = \deg(v_0) = \nu - 1.$$

考虑下面的 $\nu - 1$ 着色方法：

$$\begin{cases} v_0\text{与}v_i\text{之间着第 } i \text{ 色}(1 \leq i \leq \nu - 1) \\ \\ v_i\text{与}v_{i+1}\text{之间着第}i+2(\text{模 } k \text{ 意义下}) \text{ 色} \end{cases} \Rightarrow \text{ 可知其为 } G \text{ 的正常着色 } \Rightarrow \chi'(G) \leq \nu - 1.$$

即

$$\chi'(G) = \nu - 1.$$

14.

根据矩阵 $A = (a_{ij})_{4\times 5}$ 构造二分图

$$G = (X, E, Y),\ X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},\ Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\},\ E = \{x_i y_j |\ a_{ij} \geq 0\}.$$

(1) 最少需要 $\Delta = 4$ 个课时。

(2) 有 $\lceil \frac{\varepsilon}{\Delta} \rceil = \lceil \frac{13}{4} \rceil = 4$，最少需要 4 间教室. 课表安排如图 (同时满足 (1) (2) 要求)

课时 / 教师	1	2	3	4
x_1	y_1	$-$	y_3	$-$
x_2	y_3	y_4	y_1	$-$
x_3	y_2	y_3	y_4	y_5
x_4	y_4	y_5	y_5	y_2

17.

Proof.

$$G\text{为极大平面图} \Rightarrow \begin{cases} G\text{每个面均为三角形} \\ \\ G\text{无环}, G^*\text{无桥} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G^* \quad \text{为 3 次正则图} \\ \\ G^* \quad \text{为 2-边连通的} \end{cases}$$

□

Ch8

1.

不妨设顶点为 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

(1) 定向与 v_1 关联且未定向的边

$$\text{共有 4 条，且等价，故共有 5 种定向方式}$$

(2) 定向与 v_2 关联且未定向的边

$$\text{共有 3 条，且等价，故共有 4 种定向方式}$$

(3) 定向与 v_3 关联且未定向的边

$$\text{共有 2 条，且等价，故共有 3 种定向方式}$$

(4) 定向与 v_4 关联且未定向的边

$$\text{共有 1 条，故共有 2 种定向方式}$$

(5) 不存在与 v_5 关联且未定向的边，故共有 1 种定向方式.

(6) 又 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 等价，故

$$\text{共有定向方式}\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5}=24\text{种}.$$

2.

Proof. 记 $|V(D)| = \nu$.

(1) 假设 $\delta^- \geq 1$，则 $\forall\, v \in V(D)$，都有 $\deg^-(v) \geq 1$。取 $v_1 \in V(D)$，令 $S_1 = v_1$，则

$$\text{存在 } v_2 \text{ 使得 } (v_2, v_1) \in E(D)\text{，且 } v_2 \notin S_1\text{（否则有有向圈）}.$$

令 $S_2 = S_1 \bigcup v_2$，再找到 v_3 使得 $(v_3, v_2) \in E$，且 $v_3 \notin S_2$。以此类推，

$$\forall\ S_\nu = V(D) = \{v_1, v_2, \cdot\cdot\cdot, v_\nu\},\ \exists\ v_{\nu+1} \notin S_\nu \text{ 且 } (v_{\nu+1}, v_\nu) \in E(D)\text{, 显然矛盾.}$$

故有 $\delta^- = 0$。

(2)

(a) 先证 $\delta^+ = 0$

假设 $\delta^+ \geq 1$，则 $\forall\, v \in V(D)$，都有 $\deg^+(v) \geq 1$。取 $v_1 \in V(D)$，令 $S_1 = v_1$，则

$$\text{存在 } v_2 \text{ 使得 } (v_1, v_2) \in E(D)\text{，且 } v_2 \notin S_1\text{（否则有有向圈）}.$$

令 $S_2 = S_1 \bigcup v_2$，再找到 v_3 使得 $(v_2, v_3) \in E$，且 $v_3 \notin S_2$。以此类推，

$$\forall\ S_\nu = V(D) = \{v_1, v_2, \cdot\cdot\cdot, v_\nu\},\ \exists\ v_{\nu+1} \notin S_\nu \text{ 且 } (v_\nu, v_{\nu+1}) \in E(D)\text{, 显然矛盾.}$$

故有 $\delta^+ = 0$。

(b) 记 $D = D_1$ 由 $\delta^+(D_1) = 0$ 可得 $\exists\ v_1 \in D_1$，$\deg^+(v_1) = 0$，取 $D_2 = D_1 - v_1$.

$$D_2 \subseteq D_1 \ \Rightarrow\ D_2\text{不含有向圈} \ \Rightarrow\ \exists\ v_2 \in D_2,\ \deg^+(v_2) = 0.$$

以此类推，可得顶点序列 v_1，$v_2, \ldots$，v_ν，且满足要求.

□

3.

Proof.

由奇度顶点为偶数，不妨设 G 中奇度顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}\ (k \in N)$，则

$$\text{取}E = \{v_i v_{i+k} |\ 1 \le i \le k\},\ G' = G + E\text{为欧拉图},$$

G' 中存在一条欧拉回路，沿着回路给图中每条边定向得到有向图 D'，显然有

$$\forall\ v \in V,\ \deg^+_{D'}(v) = \deg^-_{D'}(v).$$

取 G 的一个定向图 $D = D' - E$，从 D' 到 D，每个顶点关联的边至多减少 1，故

$$\forall\ v \in V,\ |\deg^+_D(v) - \deg^-_D(v)| \le 1.$$

□