中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

图论复习课

中国科学技术大学，计算机学院

2022 年 1 月 11 日

一

一个公司在六个城市 $c_1, c_2, \ldots, c_6$ 有分公司，下面的矩阵 (i,j) 号元素是 c_i 到 c_j 的机票价格，试为该公司制作一张 c_1 到每个城市的路线图，使得每个城市的机票价格都最便宜。

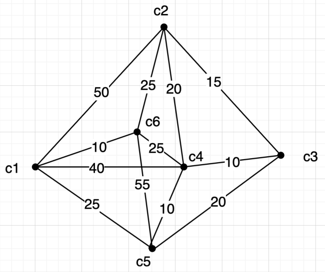
$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

提要:

考最短路径算法，*Dijkstra* 算法

转化为图模型:

在下图中求 c_1 到其他顶点的最短路径



图二.

以c_1为起点 在图二上跑$Dijkstra$ 算法。

迭代次数i	$l(v_2)$	$l(v_3)$	$l(v_4)$	$l(v_5)$	$l(v_6)$	S
0	50	∞	40	25	10	v_1
1	50	∞	50	25	10	v_1, v_6
2	35	45	35	25	10	v_1, v_5, v_6
3	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_5, v_6
4	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_4, v_5, v_6
5	35	45	35	25	10	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

路径的答案不止一种：

- v_2 :$v_1 \to v_6 \to v_2$
- v_3:
  - $v_1 \to v_5 \to v_3$
  - $v_1 \to v_5 \to v_4 \to v_3$
  - $v_1 \to v_6 \to v_4 \to v_3$
- v_4:
  - $v_1 \to v_5 \to v_4$
  - $v_1 \to v_6 \to v_4$
- v_5:$v_1 \to v_5$
- v_6:$v_1 \to v_6$

二

1. 给定 $0.05, 0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.15, 0.2, 0.2$ ，请求出 *Huffman* 树
2. 举例说明存在权值分布，使得 Huffman 树不唯一

提要:

考 *Huffman* 算法, 构造 *Huffman* 树

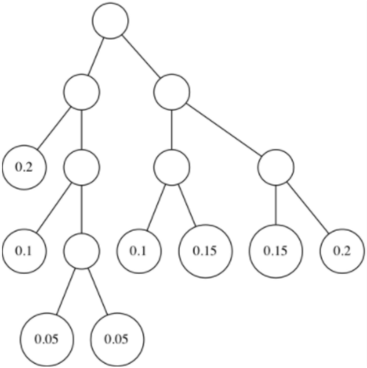


图: 1.

例子权值分布:1,1,2,2

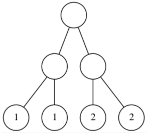


图: 2.1

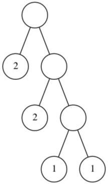


图: 2.2

三

1. 证明: 若 G 是 k 边连通图, E' 是 G 中 k 条边集合, 则有 $w(G-E')\leq 2$

2. 给出一个 k 连通图, 及 G 中 k 个顶点集合 V' , 使得 $w(g-V')>2$

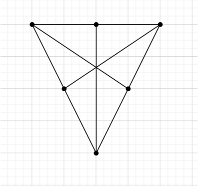
提要:

考顶连通和边连通。

1. 证明

反证法：假设 $w(G-E')\geq 3$ 则 $G-E'$ 至少存在三个连通片 G_1, G_2, G_3 。由于 G 是 k 边连通的。所以子图 G_1 与 $G-G1$ 之间至少有 k 条边。又因为 $|E'|=k$ ，所以 E' 中的边必与 G_1 相邻，才能使 G_1 是一个联通片。所以除 G_1 外其它连通片之间无边，且 G_1 与其他联通片之间均有边。同理分析 G_2 ，除 G_2 外其它连通片之间无边，G_2 与其他联通片之间均有边。矛盾。

2. 示例



四

1. 偶圈可以 2-边正常着色。
2. 对于不是奇圈的欧拉图，存在 2-边着色方案，使得两种颜色，在所有顶点出都出现

提要:

考边着色

- k-边着色, 正常 k-边着色, 边色数, 最佳 k-边着色
- 定理 7.3: 若 G 是二分图, 则 $\chi'(G) = \Delta(G)$
- 定理 7.4: (vizing) 若 G 是简单图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 或 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$

1. 证明

设偶圈 C 有 $2n$ 条边，将偶圈上的边按顺时针从 $1\sim 2n$ 编号。奇序号和偶序号的边各着一种颜色。由编号规则知，无相邻边同奇偶，即无相邻边同色。所以偶圈可以 2 -边正常着色。

2. 证明

G 是欧拉图，则 G 可以表示成若干个无公共边的圈之并。
(1) 若 G 没有度数大于等于 4 的点，则 G 是一个圈，且是偶圈。由第一问的着色方法，可以证明。
(2) 若 G 有度数大于等于 4 的点 v_i。则从该顶点开始，选择一个该顶点所在的圈 C_i，使用两种颜色，交替边着色。若 C_i 是偶圈，则 C_i 上的顶点已满足条件。若 C_i 是奇圈，则 C_i 中只有 v_i 目前只有一种颜色。
(3) 对剩余的圈，从圈上一个度数大于 4 的顶点开始交替着色。若该顶点未被着色，起始色任选；若该顶点已满足条件，起始色任选；若该顶点临边只有一种颜色，则其实色使用另一种颜色。

五

若 G 是连通平面图，没有奇圈，且顶点数大于等于 3，证明:
$\epsilon \leq 2v - 4$

提要:

考平面图性质

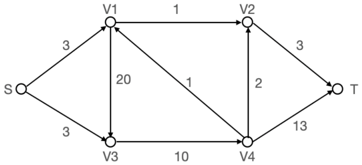
- 定理 4.3: 任给平面图 G，$\sum_{f\in F(G)} deg(f) = 2|E(G)|$
- 定理 4.4: 设 G 是连通平面图,$\nu - \epsilon + \phi = 2$
- 推论 4.2: 若 G 是 $v \geq 3$ 的连通简单平面图，则 $\epsilon \leq 3v - 6$
- 推论 4.3: 若 G 是连通简单平面图，则 $\delta \leq 5$
- 推论: $K_{3,3}, K_5$，是非平面图

证明:(类比书上定理)

G 是平面图，所以 $\sum_{f \in F} deg(f) = 2\epsilon$, $v - \epsilon + \varphi = 2$
G 没有奇圈，所以 $\forall f \in F, deg(f) \geq 4$
所以 $2\epsilon \geq 4\varphi$，$\varphi = 2 + \epsilon - v$
得 $\epsilon \leq 2v - 4$

六

1. 求下网络的最大流；
2. 假定每条有向边的容量都大于 0，证明：网络中存在从源 s 到汇 t 的有向轨道，等价于最大流量大于 0



提要：

考网络流算法，2F 算法。

- 无向轨道 $P(s, t)$，正向边，反向边
- e 的可增载量

$$l(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{e 是正向边} \\ f(e) & \text{e 是反向边} \end{cases}$$

- P 的可增载量

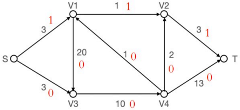
$$l(P) = min_{e \in E(P)} l(e)$$

- 可增载轨道

2020-6-答案

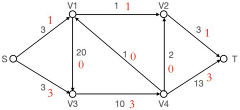
1. 2F算法：

取初始流函数f_0，



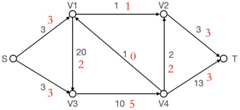
计算出一条可增载轨道 $P_0(S,T) = Sv_3v_4T$, 且$l(P_0) = 3$

更新流函数得f_1：



计算出一条可增载轨道 $P_1(S,T) = Sv_1v_3v_4v_2T$, 且$l(P_1) = 2$

更新流函数得f_2:



此时无可增载轨道。得$Var(f^*) = Var(f_2) = 6$

2. 证明

网络中存在从源 s 到汇 t 的有向轨道 $\Longrightarrow$ 最大流量大于 0:

网络中存在从源 s 到汇 t 的有向轨道 $P(s,t)$，设轨道上的边的容量的最小值为 b，则 $b>0$ 。

设 f_0 表示每条边载量为 0 的流函数，$Var(f_0)=0, l(P)\geq b$，所以将 $P(s,t)$ 上每条边增载 b 之后得流函数 f_1，有 $Var(f^*)\geq Var(f_1)=b>0$ 。即最大流量大于 0。

最大流量大于 0 $\Longrightarrow$ 网络中存在从源 s 到汇 t 的有向轨道:

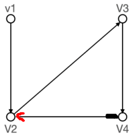
使用反证法: 假设网络中不存在存在从源 s 到汇 t 的有向轨道。

设 f_0 表示每条边载量为 0 的流函数，对于任意一条无向轨道 $P(s,t)$ ， 存在反向边 e_0， 且 $f_0(e_0)=0$，所以 $l(P)\leq l(e_0)=f(e_0)=0$ 。所以无可增载轨道。所以 $Var(f^*)=Var(f_0)=0$，这与最大流量大于零矛盾。

七

1. 给出下图的邻接矩阵，并通过邻接矩阵求出可达矩阵，由此给出该图的强连通片

2. 假设有向图 D 是单向连通图。证明：任给 $S \subseteq V(D), S \neq \varnothing$ 都存在顶点 $v \in S$，使得 v 可达 S 中的任意一个顶点.



提要:

考邻接矩阵的表示，可达性算法，可达性矩阵含义

1. 邻接矩阵：$\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$.

$Warshall$ 算法计算可达性矩阵： $\nu = 4$

$R^0 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$，计算$R_1$ 得， $R^1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$，计算$R^2$得 $R^2 = \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$，再计算$R^3$得

$R^3 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix}$,再计算$R^4$得 $R^4 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix}$

即可达性矩阵为$R(D) = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix}$

强连通片为v_2, v_3, v_4 的顶点导出子图。

2. 证明

由于有向图 D 是单向连通图，所以可达性矩阵满足 $r_{ij} \vee r_{ji} = 1$。不妨设 $S = \{v_1, v_2, .., v_s\}$ 。下面只考虑可达性矩阵的前 s 行的前 s 列即可，记为 A 。

证明存在顶点 $v \in S$ ，使得 v 可达 S 中的任意一个顶点. 即证,A 中存在一行，除对角线位置外全为 1.

考虑第 i 行，若除对角线位置外全为 1. 得证。否则不妨设 $a_{ij} = 0$ ，则 v_i 可达的顶点，均不可达 v_j ，即若 $a_{ix} = 1$ 则 $a_{xj} = 0$ ，则 $a_{jx} = 1$ 。 $\because a_{ij} = 0, \therefore a_{ji} = 1$ 。至此得到第 j 行的 1 至少比第 i 行多一个。若第 j 行不是除对角线位置外全为 1，则可重复上述分析，找到比第 j 行还多的行，依次类推，$s-1$ 步之内可得必有一行除对角线位置外全为 1. 得证

八

若 M 与 M' 都是图 G 的完备匹配，则边导出子图 $G[M \oplus M']$ 的每个连通片都是 M 与 M' 交替出现的偶圈.

提要:

考匹配，完备匹配的含义

证明

考虑 G 的子图 $G' = M \cup M'$ 。在 G' 中对边着色，属于 M 中的边着红色，M' 中的边着蓝色，去掉染了两种颜色的边，再去掉度数为 0 的点，得到的图即是 $G[M \oplus M']$。

在 M 中每个点的度数均为 1，即每个点只有一条邻边。在 M' 中同样。所以在 G' 中每个点的邻边最多为 2，即 G' 中顶点度数最大为 2。

不妨设 $deg_{G'}(u) = 1$ ，u 关联的边为 $e = uv$ 。则 $e \in M$ $e \in M', \therefore deg_{G'}(v) = 1, e$ 被着两种颜色，所以 u, v, e 被从 G' 中去掉。由 u 的任意性。所以 $G[M \oplus M']$ 中点的度数均为 2，所以 $G[M \oplus M']$ 的每个连通片均是圈。

由于 $G[M \oplus M']$ 中每个顶点的两个邻边分别来自 M, M' ，所以被染了两种不同颜色。所以 $G[M \oplus M']$ 可以 2-边正常着色，所以 $G[M \oplus M']$ 不含奇圈，所以 $G[M \oplus M']$ 的每个连通片均是偶圈。又由染色结果可知，$G[M \oplus M']$ 的每个连通片都是 M 与 M' 交替出现的偶圈.

- 1.Dijkstra，第一章
- 2.Haffman，第二章
- 3. 连通性, 第三章
- 4. 边着色, 第七章
- 5. 平面图, 第四章
- 6. 网络流, 第九章
- 7. 可达矩阵, 第十章
- 8. 匹配， 第五章

一

1. 给了一个带权有向图，求最大流并找一个最小截；把有向边改成无向边，再求一棵最小生成树。

提要:

考最大流算法。最大流最小截相等。求最小生成树

- *Kruskal* 算法, *Prime* 算法

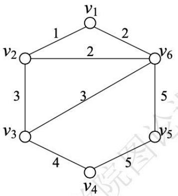


图 2.10: G

二

1. 已知一个图有 1 个 8 次顶、6 个 6 次顶、8 个 4 次顶，证明它不是平面图。2. 证明 $n \geq 5$ 时，圈 C_n 的补图是 Hamilton 图。

提要:

考平面图的性质，Hamilton 图的判定。

- 定理 6.5:(Dirac) 设 G 是简单图, 且 $\nu(G) \geq 3$, $\delta(G) \geq \nu(G)/2$, 则 G 是 Hamilton 图。
- 引理 6.1: 设 $G=(V,E)$ 是简单图,u,v 是 G 的两个不相邻的顶点且 $deg(u)+deg(v) \geq \nu(G)$, 则 G 是 Hamilton 图, 当且仅当 $G+uv$ 是 Hamilton 图
- 定理 6.6: 简单图 G 是 Hamilton 图, 当且仅当他的闭包 $c(G)$ 是 Hamilton 图。
- 定理 6.7: 设 $\nu(G) \geq 3$, 对 G 的任意一对顶点, 若 $deg(u)+deg(v) \geq \nu(G)$, 则 G 是 Hamilton 图,

三

1. 设树的 2,3,...,k 次顶的个数为 n2,n3,...,nk，求一次顶的个数。2.n 个顶的树的最大度数 Δ 最小是多少？最大是多少？并求出最小和最大时对应什么树。3. 证明树的最长轨的端点为叶。

提要:

考树的性质

四

已知有 8 种药品要用容器运输，给出它们的互斥关系（互斥的药品不能放在同一个容器内），问最少用几个容器？建立图论模型并使用图论知识解决问题。

提要:

点着色模型

五

1. 二分图 G 满足 $|X| = |Y| = n$，且最小度数 $n/2$，证明 G 有完备匹配。

2. 证明: G 中任意一条边都包含于 G 的一个完备匹配，当且仅当对 X 的任一非空真子集 S，$|N(S)| \geq |S| + 1$。

提要:

考二分图的完备匹配,Hall 定理

1 证明

任取 $S \subseteq X$ 若 $|S| \leq n/2$ $|N(S)| \geq n/2 \geq |S|$，若 $|S| > n/2$，则 Y 中的点均与 S 相邻，否则该点的度数小于 δ 。即 $|N(S)| = n \geq |S|$ 。由 *Hall* 定理，得 G 有完备匹配。

2. 证明

“$\Longleftarrow$”

任取 $e=uv\in G$ $G'=G-\{u,v\}$ 。只需证 G' 有完备匹配即可。在 G' 中任取 $S\subset X', N'(S)$ 表示 G' 中 S 的邻顶集合,
$|N'(S)|\geq|N(S)|-1\geq|S|$, $Hall$ 定理得 G' 有完备匹配。即 G 中任意一条边都包含于 G 的一个完备匹配。

“$\Longrightarrow$”

G 中任意一条边都包含于 G 的一个完备匹配。即任取
$e=uv\in G$ $G'=G-\{u,v\}$,G' 也有完备匹配。因为 G 有完备匹配，在 G 中任取 $S\subset X, |N(S)|\geq|S|$ ，在图中去掉 $\{u,v\}$ 后， S 变为 S' ， $N(S)$ 变为 $N'(S')$ ，有四种变化可能,
$|S|=|S'|, |N(S)|=N'(S')$; 或 $|S'|=|S|, |N'(S')|=N(S)-1$; 或
$|S'|=|S|-1, |N'(S')|=N(S)$; 或
$|S'|=|S|-1, |N'(S')|=N(S)-1$; 。因为 G' 有完备匹配, 应有
$|N'(S')|\geq|S'|$ ，对上述四种情况均满足，所以 $|N(S)|\geq|S|+1$。

谢谢!