第9周作业

第五章

11

11. 设 G 是顶点集合划分为 X 与 Y 的二分图，则 G 的最大匹配中的边数等于 $|X| - \max_{S\subset X}(|S| - |N(S)|)$.

令$B = X - S$, 则原式 $= min_{S\subset X}\{|X| - |S| + |N(S)|\} = min_{B\subset X}\{|B| + |N(X-B)|\}$

显然，$B \cup N(X-B)$为G的一个覆盖，且为G的一最小覆盖

由定理5.2知原式与G的匹配数相同

定理 5.2 (König-Egerváry) 设 G 是二分图，则 G 的匹配数等于其覆盖数，即 $\alpha(G) = \beta(G)$.

13

13. 用 Tutte 定理来证明 Hall 定理.

定理 5.3 (Tutte) G 有完备匹配，当且仅当任给 $S \subseteq V(G)$，都有

$$o(G-S) \leqslant |S|.$$

对二分图G=(X,Y,E)，当v为偶数时，加一些边使得Y为完全图;当v是奇数时，加一些边和顶点y_0使得$Y \cup y_0$是完全图。图G变成图H，G中存在将X中所有顶点都许配的匹配的充要条件是H有完备匹配，此时Hall定理等价于"H有完备匹配的充要条件是$\forall S \subseteq X$，$|N_H(S)| \geq |S|$"。

必要性：

$\forall S \subseteq X$，由Tutte定理，$o(H - N_H(s)) < |N_H(s)|$

在H$-N_H(s)$中，S中点都是孤立点，所以$|S| \leq o(H - N_H(s))$

综合$o(H - N_H(s)) \leq |N_H(s)|$，即得$|N_H(s)| \geq S$，其中$N(S)$为S的邻顶集合。

充分性：

对$\forall S \subseteq$V(H)，并设S=$S_1 \cup S_2$，且$S_1 \subseteq$X，$S_2 \subseteq$Y。

因为Y是一个完全图，则在H中删去S_1不会增加连通片个数，且最多产生一个奇片，删去S_2可能会使得X中有孤立顶点，设此时X中的孤立顶点为S_3，则$|N(S_3)| \leq |S_2|$，则有：$|S_3| \leq |N(S_3)| \leq |S_2|$

若$|S_3| = |S_2|$，则$o(H - S_2)=|S_3| = |S_2|$；

若$|S_3| \leq |S_2|$-1，则$o(H - S_2) \leq |S_3| + 1 \leq |S_2|$；

若$|S_1|$为偶数，则$o(H - S) = o(H - S_2) \leq |S_2| \leq |S|$；

若$|S_1|$为奇数，则$o(H - S) = o(H - S_2)+1 \leq |S_2| + 1 \leq |S|$；

综上，对$\forall S \subseteq$V(H)，都有$o(H - S) \leq |S|$，由Tutte定理，H为有完备匹配的图

14

14. 证明：若 G 是 $k-1$ 边连通的 k 次正则图，且 $\nu(G)$ 是偶数，则 G 有完备匹配.

证明：

当$k = 1$时命题显然成立

当$k \geq 2$时，令S为V的非空子集，记$G_1, G_2, \ldots G_n$为$G - S$的所有奇片。$o(G-S) = n$

又令m_i为G_i与S间的相连边数，由于G是k正则的，有

由于G为$k-1$边连通，故G_i与S至少有$k-1$条边相连。所以有$m_i \geq k$

于是有$o(G-S)=n\le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} m_i \le \frac{1}{k}\sum_{v\in S} d(v)=|S|$

当$S=\emptyset$时由于$v(G)$为偶数，故$o(G-S)=0$

故而对任意的$S\subset V(G), o(G-S)\le |S|$均成立，由$Tutt$定理知有完备匹配

16

16. 由 a,b,c,d,e,f 六个人组成检查团, 检查 5 个单位的工作. 若某单位与某人有过工作联系, 则不能选派此人到该单位去检查工作. 已知第一单位与 b,c,d 有过联系, 第二单位与 a,e,f, 第三单位与 a,b,e,f, 第四单位与 a,b,d,f, 第五单位与 a,b,c 有过联系, 请列出去各个单位进行检查的人员名单.

未指定算法/最多几人检查一个单位，画出图后各单位至少有一人检查即可

19

19. 证明: Kuhn-Munkreas 算法中修改顶标后, $\hat{l}$ 仍然是可行顶标.

算法 5.3 Kuhn-Munkreas 算法.

输入: 二分图 $G=(X,\Delta,Y)$, $|X|=|Y|$, 边权函数 $w:\Delta\to\mathbf{R}$.

输出: G 的最佳匹配 M.

(1) 选取 G 的一个可行顶标 l, 构造相等子图 G_l.

(2) 用匈牙利算法求 G_l 的最大匹配, 设为 M. 若 M 是 G_l 的完备匹配, 则 M 是 G 的最佳匹配, 算法停止; 否则, 转第 (3) 步.

(3) 设 u 是 G_l 中未被 M 许配的顶点, 不妨设 $u\in X$. 令

$$\begin{aligned} &Z=\{v|v\in V(G_l),\ \text{且 } u,v \text{ 之间存在交错轨道}\},\\ &S=X\cap Z,\\ &T=Y\cap Z. \end{aligned}$$

计算

$$\alpha_l=\min_{x_i\in S,y_j\notin T}\{l(x_i)+l(y_j)-w(x_iy_j)\}.$$

按如下公式修改可行顶标

$$\hat{l}(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha_l, & v\in S,\\ l(v)+\alpha_l, & v\in T,\\ l(v). & \text{其他}. \end{cases}$$

令 $l\leftarrow\hat{l}$, 转第 (1) 步.

证明：

修改后的顶标为$\hat{l}=\begin{cases} l(v)-\alpha_l, & v\in S\\ l(v)+\alpha_l, & v\in T\\ l(v), & \text{其他} \end{cases}$

$\alpha_l=min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-w(x,y)\}$

对$\forall v\in S, u\in Y$

(1)若$u\in T$, 则$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)+\alpha_l=l(v)+l(u)\ge w(u,v)$

(2)若$u\in Y$且$u\notin T$, 则$\hat{l}(v)+l(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)\ge w(u,v)$(由$\alpha_l$为最小值)

对$\forall v\notin S, u\in Y$

$\hat{l}(v)=l(v), \hat{l}(u)\ge l(u), \hat{l}(v)+\hat{l}(u)\ge w(u,v)$

综上所述，经过修改顶标后，仍然是可行顶标。

20

20. Kuhn-Munkreas 算法中修改顶标后, 由可行顶标 $\hat{l}$ 得到相等子图 $G_{\hat{l}}$. 证明: 在算法的第 (3) 步, 在 $G_{\hat{l}}$ 上找到的顶点子集 "T" 包含了在 G_l 上找到的顶点子集 "T", 且至少多一个顶点. 由此可知, Kuhn-Munkreas 算法最终能够找到某个相等子图, 该相等子图有完备匹配, 从而说明 Kuhn-Munkreas 算法的正确性.

证明：

修改顶标后，满足α_l的边x_iy_j加入边集$E(G_{\hat{l}})$

由于$y_j \notin T$，则T至少多了一个顶点。

第六章

3

3. 设 G 是恰有 $2k$ 个奇度顶点的连通图, 证明: G 中存在 k 条边不重的行迹 $P_1, P_2, \cdots, P_k$, 使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$.

证明:

设$v_1, v_2, \ldots v_{2k}$为G中的奇度顶点，在v_i与v_{i+k}顶点间再连一边$e_i(i=1,2,\ldots,k)$,所得图记为G^*,则$G*$各顶点度数均为偶数

由于G连通，故而G^*连通。由定理知G^*中存在欧拉回路。若我们去掉$e_i(i=1,2,\ldots,k)$,，则它分解为k条边不重的行迹$P_1, P_2, \ldots P_k$

5

5. 如何将 9 个 α, 9 个 β, 9 个 γ 排成一个圆形, 使得由这些 α, β, γ 产生的 27 个长为 3 的符号串在其中都出现且只出现一次?

为书写方便，以下用a, b, c指代α, β, γ

构造一个具有9个节点的有向图，节点集为$\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

从节点$x1x2$到节点$x2x3$有一条有向边，记作$x1x2x3$, 其中$xi \in \{a, b, c\}$。

可得图：每一节点有三条有向边以它为起点，且有三条有向边以它为终点。

找图中一条欧拉回路, 可得$aaabacbabbcbbbaacccbcacabcc$即为所求