第 13 周作业

T9.1

> 假设 f 是网络 $N=(D,s,t,c)$ 上的流函数，证明：
>
> $$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e) - \sum_{e\in\beta(t)} f(e) = \sum_{e\in\beta(s)} f(e) - \sum_{e\in\alpha(s)} f(e)$$

因为 $\sum\limits_{v\in V(D)}\left(\sum\limits_{e\in\alpha(v)} f(e)\right) = \sum\limits_{v\in V(D)}\left(\sum\limits_{e\in\beta(v)} f(e)\right)$，且由于 $\forall v \in V(D)-\{s,t\}$ 有 $\sum\limits_{e\in\alpha(v)} f(e) = \sum\limits_{e\in\beta(v)} f(e)$，将其代入前式，可以得到 $\sum\limits_{e\in\alpha(s)} f(e) + \sum\limits_{e\in\alpha(t)} f(e) = \sum\limits_{e\in\beta(s)} f(e) + \sum\limits_{e\in\beta(t)} f(e)$，即 $\sum\limits_{e\in\alpha(t)} f(e) - \sum\limits_{e\in\beta(t)} f(e) = \sum\limits_{e\in\beta(s)} f(e) - \sum\limits_{e\in\alpha(s)} f(e)$

T9.2

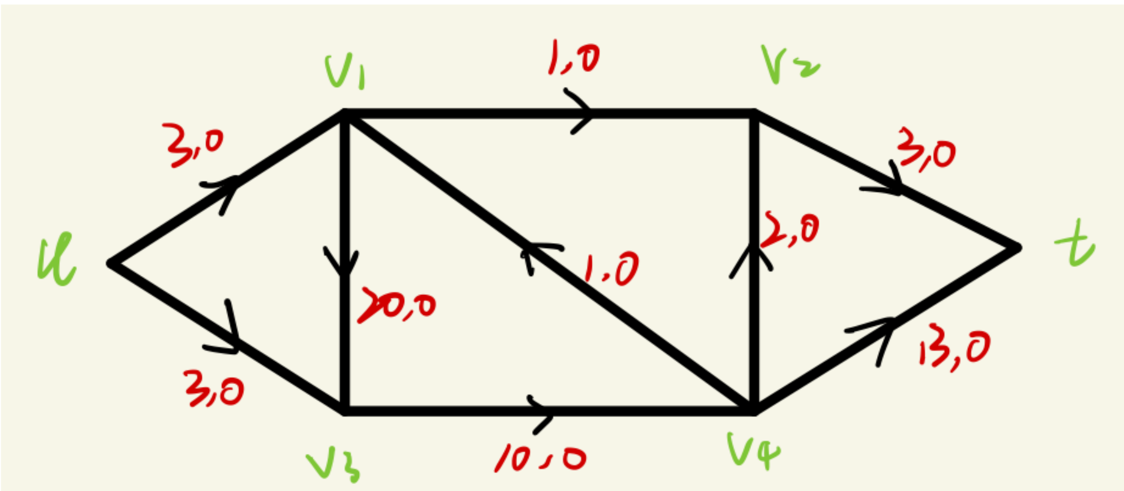
> 证明：在 Ford-Fulkerson 算法的第二步，通过可增载轨道得到的函数 $\bar{f}$ 是流函数

见引理 9.1 证明

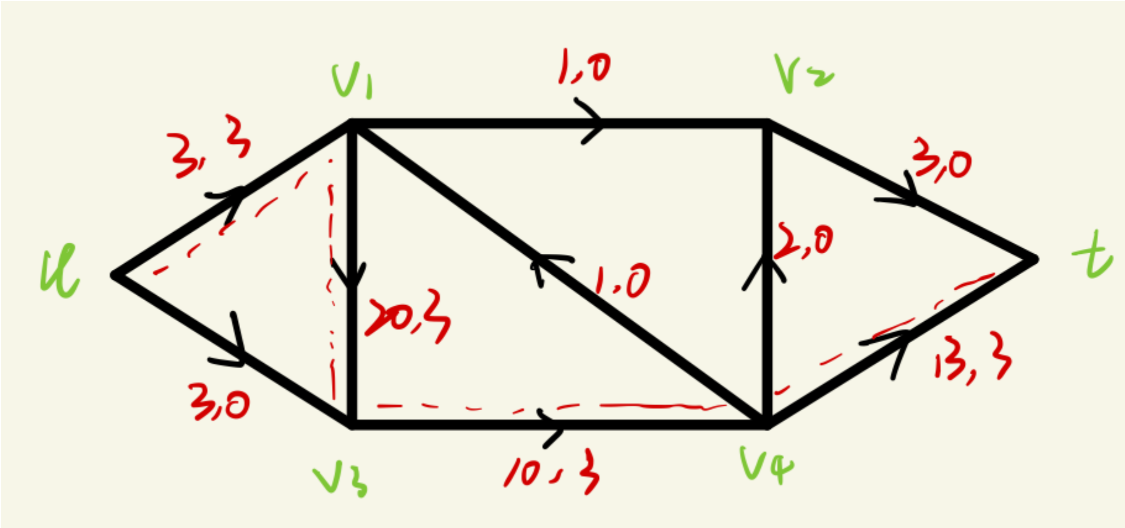
T9.4

> 求图 9.14 中网络的最大流

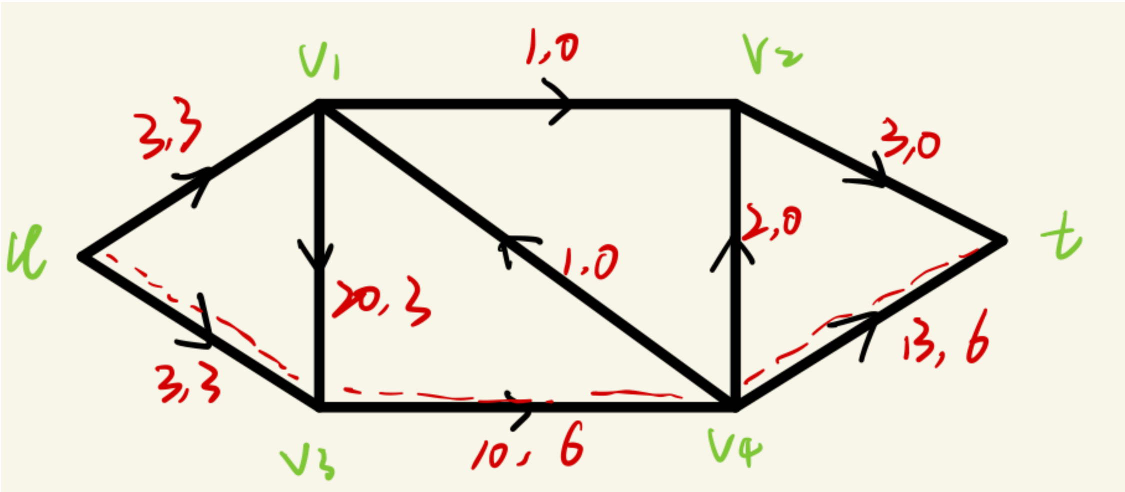
- 取初始流，$\forall e \in E(G), f(e)=0$



- 可增载轨道$uv_1v_3v_4t$



- 可增载轨道uv_3v_4t



- 无可增载轨道，最大流为6

T9.5

> 证明：若网络中每条边的容量均为整数，则最大流的流量也一定是整数

最大流流量 = 最小截截量 = $C(S,\bar{S}) = \sum\limits_{e\in(S,\bar{S})} c(e)$。因为每条边的容量都是整数，即 $c(e)$ 为整数，所以最大流流量为整数。

T9.7

> 在图 9.16 所示的网络中，除了边有容量外，源 s 与汇 t 没有容量，而其余的顶点都有容量，求此网络的最大流

设 $d \to t$ 的容量为 x

找到可增载轨道 $s \to a \to b \to t$，可增载量为 2

找到可增载轨道 $s \to e \to a \to b \to f \to t$，可增载量为 2（此时 b 已经达到容量值，无法继续增载）

找到可增载轨道 $s \to c \to f \to t$，可增载量为 2 （此时 f 已经达到容量值，无法继续增载，只剩下顶点 d 路径可以增载）

找到可增载轨道 $s \to a \to d \to t$，可增载量为 $\min(x, 1)$

找到可增载轨道 $s \to e \to d \to t$，可增载量为 $\min(3, \max(x-1, 0))$

则最大流量为 $6+\min(4,x)$

T9.8

> 1. 写一个如同 2F 算法的标志过程，但标记是由汇 t 开始的，到达 s 时即可得到一可增载轨道
> 2. 写一个定位算法，该算法能够确定某条边，当该边容量增大时，最大流量也随之增加
> 3. (2) 中表述的边是否一定存在

1.
    1. $S=\{t\}$，令 $\operatorname{succ}(t)=*$
    2. 若 $s\in S$，则已经找到可增载轨道，通过 $\operatorname{succ}(s)$ 回溯输出可增载轨道，算法终止；否则，转第 (3) 步
    3. 若存在 $u\in\bar{S}$，$v\in S$，使得 $(u,v)\in E(D)$ 且边 (u,v) 未满载，即 $f((u,v))<c((u,v))$（(u,v) 是正向边），则令 $S\leftarrow S\cup\{u\}$，$\operatorname{succ}(u)=v$，转第 (2) 步；否则，转第 (4) 步
    4. 若存在 $u\in\bar{S}$，$v\in S$，使得 $(u,v)\in E(D)$ 且边 (u,v) 正载，即 $f((u,v))>0$ （(u,v) 是反向边），$S\leftarrow S\cup\{u\}$，$\operatorname{succ}(u)=v$，转第 (2) 步；否则，输出无可增载轨道，算法停止。
2. 遍历所有边，计算其边容量变化前后的最大流量即可。
3. 不一定。

T9.10

> 证明：在有正下界 $b(e)$ 但无上界 $c(e)=+\infty$ 的网络中，存在可行流的充要条件是对每一条边 e，要么 e 在一个有向回路上，要么 e 在由 s 到 t 或由 t 到 s 的有向轨道上。

$\Rightarrow$ 存在可行流。若边 e 不满足上述条件，则设边 e 在一个有向轨道 P 上，且 P 的终点不是汇 t。那么由于轨道终点的流出流量为 0，而流入边 e 的流量至少为 $b(e)$，那么流入和流出的流量不相同，则会产生矛盾。

$\Leftarrow$ 对每一条边 e，要么 e 在一个有向回路上，要么 e 在由 s 到 t 或由 t 到 s 的有向轨道上。可以通过不断增加流量的方式找到一个可行流。

T9.13

> 在图 9.17 的两个图中，若存在可行流，请求出最大流与最小流；若不存在可行流，找出一个不含源和汇的顶点子集 V'，需冒出流或者漏掉流。

不存在可行流，因为 $c(a,d)<b(d,c)+b(d,t)$。

取 $V'=\{a,b,c,d\}$，则 $\sum\limits_{e\in\alpha(V')}c(e)-\sum\limits_{e\in\beta(V')}b(e)=(5+6)-(9+3)<0$，所以 V' 需要冒出流。