第二周作业 参考答案

> 本次批改中发现了不少问题。很多同学的证明过程都十分简略，只有个大致思路，且在证明过程中使用了较多“易得”类似的词语，但是并没有详细的说明。还有部分同学没有注意最后一题需要证明充要性，只选择了一个方向进行证明。
>
> 希望大家可以多借鉴书上的证明过程，例如最长轨道这个证明思路在后续章节也是非常重要的，希望大家能够灵活运用。

ch1

T4

> 任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多

令上述组内人的集合为图 G 的顶点集合，若两个人相互之间是朋友，则其间连一条边。则很显然，每个顶点的度数即为该人员朋友的个数。要证明存在朋友数一样多的两个人，即证明存在两个度数相同的顶点。

下面采用反证法：假设所有顶点的度数都不相同，那么就有一个度数序列：

$\overbrace{n-1, n-2, n-3, \ldots, 1, 0}^{n\text{个顶点}}$，可以看出，度数为 $n-1$ 的顶点与所有顶点相邻，但是与度数为 0 的顶点相矛盾。所以假设不成立。

所以存在朋友数一样多的两个人。

T5

> $2n(n \geq 2)$ 人中，每个人至少与其中的 n 个人认识，则其中至少有四个人，使得这四个人围桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人

令上述组内人的集合为图 G 的顶点集合，若两个人相互之间认识，则其间连一条边。要证明这个问题，即需要证明存在长度为 4 的圈。$\forall v \in V(G), deg(v) \geq n$，则 v 与 $V(G) - v$ 中至少 n 个顶点相邻，因为 $(2n-1) - deg(v) \leq n-1$，所以 $V(G) - \{v\}$ 中与 v 不相邻的顶点个数最多为 $n-1$ 个，并将其相邻顶点集合设为 V_1，不相邻顶点集合设为 V_2。$\forall u \in V_2, deg(u) \geq n$，由于 $|V_2 - \{u\}| = (2n-1) - deg(v) - 1 = 2n - deg(v) - 2$，所以顶点 u 与 V_1 相邻顶点个数至少为 $deg(u) - |V2 - \{u\}| = deg(u) + deg(v) - 2n + 2 \geq 2$。不妨设 u 与 V_1 中相邻的顶点为 u_1, u_2，则存在圈 vu_1uu_2v 长度为 4。

（总体思路就是将 $V(G)-\{v\}$ 划分为与 v 相邻和不相邻的集合，而不相邻集合中的任意一个顶点至少和相邻集合中 2 个顶点相邻，因此可以存在一个长度为 4 的圈）

T8

> 设 G 是图，给定 $V(G)$ 的非空真子集 V'，记 k 为一个端点在 V' 中，另一个端点在 $V(G)-V'$ 中的边数。若 V' 中度数为奇数的顶点数为偶数，则 k 为偶数；否则，k 为奇数

设 ε 为 V' 的顶点导出子图的边的个数，则可以把 V' 的顶点分为度数为奇数的集合 V_o'，度数为偶数的集合 V_e'，则对于这个顶点导出子图有：

$$2\varepsilon=\sum_{v\in V_o'}deg(v)+\sum_{v\in V_e'}deg(v)-k$$

由于 $\sum_{v\in V_e'}deg(v)$ 和 2ε 为偶数，所以 k 的奇偶性只与 $\sum_{v\in V_o'}deg(v)$ 有关，即只与 $|V_o'|$ 有关。

所以 k 的奇偶性与 V' 中度数为奇数的顶点数相一致。

T15

> 任给无环图 G，G 有一个生成子图 H，满足
>
> 1. H 是二分图
> 2. 任给 $u\in V(G)=V(H)$ 都有 $d_H(u)\geq d_G(u)/2$

考虑 G 中所有的生成二分子图，取其中边数最多的生成二分子图 H，下面证明这个图 H 满足题意：

假设 $\forall u_0\in V(H)=V(G),\quad d_H(u_0)<\frac{1}{2}d_G(u_0)$

下面我们将该二分图 H 分为 X,Y，其中 u_0 在 X 内，X 内的顶点互不相邻，所以 u_0 只能与 Y 内顶点相邻，即 u_0 只能与 Y 内顶点相邻，即 u_0 与 Y 内共 $d_H(u_0)$ 个顶点相邻，则 u_0 只与 X 内共 $d_G(u_0)-d_H(u_0)$ 个顶点相邻，而且在图 G 中 u_0 的相邻情况也是这样。如果 u_0 还与其他顶点相邻的话，那么 H 就不是边数最多的了。

再考虑另一个生成二分子图 H_0，其分为 $X/\{u_0\},Y\cup\{u_0\}$，那么 H_0 中，$d_{H_0}(u_0)=d_G(u_0)-d_H(u_0)>d_H(u_0)$（由假设）。而不论是 H 还是 H_0 中，与 u_0 无关联的边数是一样的。则，$\varepsilon(H_0)=d_{H_0}(u_0)+无关联边数>\varepsilon(H)=d_H(u_0)+无关联边数$，得到 $\varepsilon(H_0)>\varepsilon(H)$，与 H 是边数最多的二分子图矛盾。所以假设不成立，所以 $d_H(u_0)\geq\frac{1}{2}d_G(u_0)$。

所以存在一个生成子图满足 1. 2. 条件。

T16

> 假设 G 是简单图，且 $\delta(G)\geq k$，则 G 中有长为 k 的轨道

考虑一个最长轨道 $P(u,v)$，并设其长度为 n，顶点序列依此为 $v_0(u),v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n(v)$。由于 $\delta(G)\geq k$，则对于 v_0 这个顶点，除了相邻的 v_1 顶点，至少还有 $k-1$ 个相邻的顶点。若这些顶点不在这个最长轨道 $P(u,v)$ 上，则会存在一个更长的轨道 $P(u,v)+v_0v_{n+1}$ 与其矛盾（v_{n+1} 与 v_0 相邻），所以这些顶点都在 $P(u,v)$ 上。不妨设 v_0 与 $v_1,v_2,\ldots,v_k$ 相邻，由于 v_k 在 $P(u,v)$ 上，所以有 $k\leq n$，则可以证明最长轨道的长度 $n\geq k$，那么 G 中就会存在长为 k 的轨道（可以从最长轨道上截取）

ch2

T2

> 一棵树 T 有 n_i 个度数为 i 的顶点，$i=2,3,...,k$，其余顶点都是树叶，则 T 有几片树叶？

由树的性质 $\epsilon(T)=\nu(T)-1$ 以及 顶点度数和与边的关系 $2\times\varepsilon(T)=\sum_{i=1}^{i=\nu(T)} deg(v_i)$ 可以推导出，设 k 为树叶（度数为 1 的顶点）的数量：

$$\sum_{i=2}^{i=\nu(T)} n_i+k=\varepsilon(T)+1$$

$$2\times\varepsilon(T)=\sum_{i=2}^{i=\nu(T)} i\times n_i+k$$

解得 $k=\sum_{i=2}^{i=\nu(T)}(i-2)\times n_i+2$

T4

> 证明：如果 T 是树，且 $\Delta(T)\geq n$，则 T 至少有 n 片树叶

由第二题的式子可知，$k=\sum_{i=2}^{i=\nu(T)}(i-2)\times n_i+2$，那么就有
$k=\sum_{i=2}^{i=\nu(T)}(i-2)\times n_i+2\geq(\Delta(T)-2)*1+2=\Delta(T)\geq n$

得到 $k\geq n$，所以 T 至少有 n 片树叶。

T5

> 图 G 是森林当且仅当 $\varepsilon=\nu-\omega$，其中 ω 是 G 的连通片个数，$\omega>1$

充分性：

若图 G 是有 ω 个连通片的森林，则对每个连通片 ω_i 都有 $\varepsilon(\omega_i)=\nu(\omega_i)-1$，则有
$\varepsilon=\sum_{i=1}^{i=\omega}\varepsilon(\omega_i)=\sum_{i=1}^{i=\omega}\nu(\omega_i)-\omega=\nu-\omega$

必要性：

若图 G 有 ω 个连通片，且 $\varepsilon=\nu-\omega$，假如其中某个连通片 ω_k 中含有圈，则有 $\varepsilon(\omega_k)\geq\nu(\omega_k)$，（**树中** $\varepsilon=\nu-1$**且不含圈**），那么
$\varepsilon=\sum_{i=1}^{i=\omega}\varepsilon(\omega_i)\geq\sum_{i\neq k}\varepsilon(\omega_i)+\nu(\omega_k)=\sum_{i=1}^{i=\omega}\nu(\omega_i)-\omega+1=\nu-\omega+1$ 与 $\varepsilon=\nu-\omega$ 矛盾，所以假设不成立。

所以所有连通片都不含有圈，所以图 G 是森林。