第十一、十二周作业答案

7.2

将G按照不同的着色分为χ(G)个子图，可得 $\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i(v-v_i) \ge \sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2\varepsilon$

其中v_i*为各子图中的顶点数*

由于 $\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i(v-v_i) = \sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i v - \sum_{i=1}^{\chi(G)} {v_i}^2 = v^2 - \sum_{i=1}^{\chi(G)} {v_i}^2$，*且* $\sum_{i=1}^{\chi(G)} v_i = v$

$\therefore 2\varepsilon \le v^2 - \sum_{i=1}^{\chi(G)} {v_i}^2 \le v^2 - \frac{v^2}{\chi(G)}$

$\therefore \chi(G) \ge \frac{v^2}{v^2 - 2\varepsilon}$

7.4

$max_i \min\{d_i + 1, i\} = max_i \min\{d_i, i-1\} + 1$

可使用贪心算法，按照顶点度数非增顺序着色，该顺序与题中序列顺序一致

考虑顶点v_i*，排在*v_i*前且与其相邻的顶点至多有*$min\{d_i, i-1\}$*个*

因此这些顶点中使用过的颜色数至多为$max_i \min\{d_i, i-1\}$ *个，原命题显然得证*

7.6

以下使用数学归纳法证明：

① $v = 1$ *时，*$\chi(G) + \chi(G^c) \le v + 1$ *显然成立*

② 假设$\chi(G) + \chi(G^c) \le v + 1$ *对*$v = n$*成立，则*$v = n + 1$ *时，相当于在原图G中添加新顶点*v_{n+1}*，设新图为*G'

③$v = n + 1$ *时，考虑以下两种情况：*

Ⅰ. 若$\chi(G) + \chi(G^c) < n + 1$*，此时*$\chi(G') + \chi(G'^c) < n + 3 = v + 2$

由于v*和*n*皆为整数，故*$\chi(G') + \chi(G'^c) \le v + 1$ *成立*

Ⅱ. 若$\chi(G) + \chi(G^c) = n + 1$*，则对于*$v_{n+1}$*：当其与G中所有顶点相邻时，其必与*$G^c$*中所有顶点不相邻，故至多只需增加一种颜色；当其与G中部分顶点相邻时，其必与*G^c*中部分顶点不相邻，此时只需取一种不与*v_{n+1}*在*G'*和*G'^c*中相邻的颜色即可*

7.8

8

> 轮是一个圈加上一个新顶点，把圈上的每个顶点都和新顶点之间连一条边，求v阶轮的边色数。

记该图为G，给中心顶点编号为v_0，圈上的顶点按顺时针顺序分别编号为$v_1, v_2, \cdots, v_{v-1}$。

因为v_0关联$v-1$条边，故$\chi'(G) \ge v-1$。

考虑下面的$v-1$着色方法：v_0与v_i之间着第i色$(1 \le i \le v-1)$，v_i与v_{i+1}之间着第$i+2$(模k意义下)色。可知其为G的正常着色。故$\chi'(G) = v-1$。

7.14

1. 需要$\Delta = 4$个课时。
2. 有$\lceil \frac{13}{4} \rceil = 4$，需要4间教室。

7.16

16

> 7.16 证明：若一个平面图的平面嵌入是Euler图，则它的对偶图是二分图。

若G为Euler图，则G中所有顶点度数为偶数，G的对偶图G^*的每个面关联偶数条边，即G^*中无奇数圈，G^*为二分图。

7.17

由于 G 是极大平面图，因此 G 是无环无桥的简单图，对偶图 G*中无桥。由此可知 G*是 2-边连通图。由于顶点数 v>4，G 中每两个面的交界处至多一条公共边，因此 G*为简单图，又因为 G 的每个面次数均为 3，故 G*的每个顶点度数均为 3，得证。

8.1

K5 共 10 条边，2^10=1024(不考虑同构)

12 种(考虑同构)

(2,1), (3,1) , (4,1) , (5,1) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (1,3) , (4,1) , (5,1) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (3,1) , (1,4) , (5,1) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(1,2), (3,1) , (1,4) , (5,1) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (3,1) , (4,1) , (1,5) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(1,2), (3,1) , (4,1) , (1,5) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (1,3) , (4,1) , (1,5) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(1,2), (1,3) , (4,1) , (1,5) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (3,1) , (1,4) , (1,5) , (3,2) , (4,2) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (3,1) , (4,1) , (1,5) , (3,2) , (2,4) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(1,2), (3,1) , (4,1) , (1,5) , (3,2) , (2,4) , (5,2) , (4,3) , (5,3) , (5,4)
(2,1), (3,1) , (1,4) , (1,5) , (3,2) , (4,2) , (2,5) , (4,3) , (5,3) , (5,4)

8.2

2

> 设D是没有有向圈的有向图。
>
> (1)证明：$\delta^- = 0$。
>
> (2)试证：存在D的一个顶点序列$v_1, v_2, \cdots, v_v$，使得对于任给$i(1 \le i \le v)$，D的每条以v_i为终点的有向边在$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$种都有它的起点。

1. 假设$\delta^- \ge 1$，则任取$v \in V(D)$，都有$deg^-(v) \ge 1$。取一v_0，令$S = \{v_0\}$，则存在v_1使得$(v_1, v_0) \in E(D)$，且$v_1 \notin S$（否则有向圈）。令$S = S \bigcup \{v_1\}$，再找到v_2使得$(v_2, v_1) \in E$，且$v_2 \notin S$。以此类推，对于$S = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$，可以找到$v_{n+1}$，使得$(v_{n+1}, v_n) \in E$，且$v_{n+1} \notin S$，与图$D$顶点数有限矛盾。故有$\delta^- = 0$。
2. （拓扑排序）类似1.的证明，图D中$\delta^+ = 0$，取$v_1 \in V(D)$，使得$deg_D^+(v_1) = 0$。

   记$D_1 = D - \{v_1\}$，则D_1中也没有有向圈，则可选择$v_2 \in D_1$，使得$deg_{D_1}^+(v_2) = 0$。

   以此类推可以得到满足要求的序列。

8.3

3

> 证明：任给无向图G，G都有一个定向图D，使得对于所有的$v \in V$，$|deg^+(v) - \deg^-(v)| \le 1$成立。

若G中存在奇度顶点$v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$（奇度顶点必为偶数）

则$G' = G + \{v_i v_{i+k} | 1 \le i \le k\}$为欧拉图，图中存在一条欧拉回路，沿着回路给每条边定向得到图D'，对于$\forall v \in D'$，都有$deg^+(v) = \deg^-(v)$。

再将$\{v_i v_{i+k} | 1 \le i \le k\}$从$D'$中删去，得到$G$的一个定向图$D$，从$D'$到$D$，每个顶点关联的边之多少1，故在$D$中，对于所有的$v \in V$，$|deg^+(v) - \deg^-(v)| \le 1$成立。