第五周作业答案

3

> G 是简单图，$\delta(G) \ge v(G)-2$，则有 $\kappa(G)=\delta(G)$。

$\delta(G)$只有两种情况:

1. $\delta(G)=v(G)-1$

   此时G是完全图，显然有$\kappa(G)=\delta(G)=v(G)-1$

2. $\delta(G)=v(G)-2$

   假设$\kappa(G)=v(G)-3$，则假设删去$v(G)-3$个顶点后图失去连通性，因为$\delta(G) \ge v(G)-2$，所以对于剩下的三个顶点都至少与一个顶点相邻，即是连通的，矛盾！同理可证明$\kappa(G)$更小的时候也无法分割。

   若移出某个度数为$v(G)-2$的顶点的所有相邻顶点，则可以导致其不连通，所以$\delta(G)=v(G)-2=\kappa(G)$

7

> 任给三个非负整数$l \le m \le n$，都存在简单图G，满足$\kappa(G)=l, \kappa'(G)=m, \delta(G)=n$。

该题证明存在行即可。

- $l=n$时，完全图K_{n+1}满足条件
- $l<n$时，取两个完全图K_{n+1}，并分别记做K_1，K_2，取K_1中l个顶点(记为X),K_2中m个顶点(记为Y)

  Y中每个顶点向X中的顶点连接一条边，使得一共有m条边，且X中每个顶点都有边被连接。此时图满足条件

3.11

由 G 不是块且连通，可知 G 存在割顶

(1)若 G 存在唯一割顶 g，则 G - {g}构成两个连通图G_1和G_2，显然G_1 + {g}和G_2 + {g}为图 G 的两个块且包含唯一割顶 g

(2)若 G 存在**有限**割顶集$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$，则任选两个割顶$g_i$和$g_j$，则 G - $\{g_i, g_j\}$构成三个连通图G_1，G_2和G_3，其中g_i分割G_1和G_2，g_j分割G_2和G_3，接着进行如下操作：

判断G_1 + $\{g_i\}$是否为块，若是，则停止操作；若否，则G_1 + $\{g_i\}$存在至少一个割顶，且它的所有割顶包含于 G 的割顶集，任选一个G_1 + $\{g_i\}$的割顶将其再次分割成两个连通图，对不包含g_i的那部分重复进行上述操作，由于 G 的割顶集**有限**，故必存在某个分割出的连通图G_x和分割它的割顶g_x，令G_x + $\{g_x\}$为块。

对G_3 + $\{g_j\}$进行相同操作，也可得到一个只包含 G 的一个割顶的块

3.16

设 G 中有桥 f，则G'=G - {f}有两个连通片G_1和G_2

但$\sum_{v\in G_1}\deg(v) = \sum_{v\in G}\deg(v) - 1$ 为奇数，与G_1为连通片矛盾