图论作业 (第九周)

PB20000113 孔浩宇

November 1, 2022

Ch5

11.

Proof. 取 $S \subseteq X$，则 $(X-S) \cup N(S)$ 为 G 的一个覆盖. 任意 G 的覆盖 C，记 $C \cap X = C_X$，若

$$\exists\ u \in (X - C_X) \cup N(C_X),\ u \notin\ C \ \Rightarrow\ \exists\ e = pu\ (e \in E(G)),\ p, u \notin C\ \Rightarrow\ \text{矛盾}.$$

即覆盖 C 可以写成 $(X-S) \cup N(S)$ $(S \subseteq X)$, 又

$$G\text{为二分图} \xrightarrow{\text{定理 } 5.2} \alpha(G) = \beta(G).$$

有

$$\begin{aligned}
\alpha(G) = \beta(G)& \\
&= \min |C| \\
&= \min_{S \subseteq X} |(X-S) \cup N(S)| \\
&= \min_{S \subseteq X} (|X-S| + |N(S)|) \\
&= \min_{S \subseteq X} (|X| - |S| + |N(S)|) \\
&= |X| - \max_{S \subseteq X} (|S| - |N(S)|) .
\end{aligned}$$

□

13.

Proof. 对于二分图 $G = (X, E, Y)$，增加边使得 Y 为完全图，记此时的图为 H. 则 G 中存在将 X 都许配的匹配等价于 H 有完备匹配. $\forall\ S \subseteq X,\ N_H(S) = N_G(S)$.

(1) 必要性：G 中存在将 X 都许配的匹配.

$$\begin{cases} \forall\ S \subseteq X \qquad\qquad \xrightarrow{Tutte\text{定理}} o(H - N_H(S)) \le |N_H(S)| \\ \text{在}H - N_H(S)\text{中，}\quad \forall\ s \in S\text{为孤立点}\ \Rightarrow\ |S| \le o(H - N_H(S)) \end{cases} \Rightarrow\ |S| \le |N_H(S)| = |N_G(S)|.$$

(2) 充分性：$\forall\ S \subseteq X,\ |S| \le |N(S)|$.

$$\forall\ V \subseteq\ V(H),\ S = V \cap X,\ W = V \cap Y. \xrightarrow{Y\text{为完全图}} H - S\text{至多比}H\text{多一个奇片}.$$

$$\text{记}H - W\text{中}X\text{中的孤立点集合为}S'\ \Rightarrow\ |N(S')| \le |W|\ \Rightarrow\ |S'| \le |N(S')| \le |W|.$$

若 $|S'| = |W|$，则 $o(H-W) = |S'| = |W|$.

若 $|S'| \le |W|-1$，则 $o(H-W) \le |S'|+1 \le |W|$.

若 $|S|$ 为偶数，则 $o(H-V)=o(H-W) \le |W| \le |V|$.

若 $|S|$ 为奇数，则 $o(H-S)=o(H-W)+1 \le |W|+1 \le |V|$.

综上，$\forall\ S \subseteq\ V(H)$，$o(H-S) \le |S|$, 由 Tutte 定理可得，H 有完备匹配，即 G 中存在将 X 都许配的匹配.

□

14.

Proof.

$\forall\ W \subseteq V(G)$，记 $G-W$ 中的奇片为 $G_1,\dots,G_p$，$q_i\ (1 \le i \le p)=|E_i|$，$E_i=\{uv|\ u\in G_i, q\in W\}$.

$$q_i=\sum_{v\in V(G_i)}\deg(v)-2|E(G_i)|=k|V(G_i)|-2|E(G_i)| \xrightarrow{|V(G_i)|\text{为奇数}} q_i\text{与}k\text{奇偶性相同}.$$

又 G 是 $k-1$ 边连通的，在删去 G_i 与 W 之间的边后 G 不再连通，有

$$q_i \ge k-1, \text{又}q_i\text{与}k\text{奇偶性相同}\ \Rightarrow\ q_i \ge k.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{p} q_i \ge kp\ \Rightarrow\ p \le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{p} q_i \le \frac{1}{k}\deg(v)=|W|.$$

若 $W=\phi$，由于 $\nu(G)$ 为偶数，此时 $p=0=|W|, p\le|W|$ 仍成立. 即

$$\forall\ S \subseteq V(G),\ o(G-S) \le |S|\ \Rightarrow\ \ G\text{有完备匹配}.$$

□

16.

一	二	三	四	五
a	b	c	e	d,f
a	b	c,d	e	f
a	b	d	c	e,f
a	b	d	c,e	f
a	b,d	c	e	f
a	b,c	d	e	f
a,e	b	d	c	f
a,f	b	c	e	d
a,f	b	d	c	e

19.

Proof. 取 $x_i \in X,\ y_i \in Y$.

(1) $x_i \in S,\ y_i \in T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) - \alpha_l + l(y_i) + \alpha_l \\ &= l(x_i) + l(y_i) \\ &\geq w(x_i y_i).\end{aligned}$$

(2) $x_i \in S,\ y_i \notin T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) - \alpha_l + l(y_i) \\ &= l(x_i) + l(y_i) - \min_{x \in X, y \notin Y} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} \\ &\geq l(x_i) + l(y_i) - [l(x_i) + l(y_i) - w(x_i y_i)] \\ &= w(x_i y_i).\end{aligned}$$

(3) $x_i \notin S,\ y_i \in T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) + l(y_i) + \alpha_l \\ &\geq l(x_i) + l(y_i) \\ &\geq w(x_i y_i).\end{aligned}$$

(4) $x_i \notin S,\ y_i \notin T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) + l(y_i) \\ &\geq w(x_i y_i).\end{aligned}$$

□

20.

Proof. 取 $x_i \in X,\ y_i \in Y$.

(1) $x_i \in S,\ y_i \in T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) - \alpha_l + l(y_i) + \alpha_l \\ &= l(x_i) + l(y_i)\end{aligned}$$

修改前后顶点子集不变.

(2) $x_i \in S,\ y_i \notin T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) - \alpha_l + l(y_i) \\ &= l(x_i) + l(y_i) - \min_{x \in X, y \notin Y} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} \\ &\geq l(x_i) + l(y_i) - [l(x_i) + l(y_i) - w(x_i y_i)] \\ &= w(x_i y_i).\end{aligned}$$

且至少存在一对 (x_i, y_i) 使等号成立 (当 x_i, y_i 使得 $l(x) + l(y) - w(xy)$ 最小时)，故把 $Y - T$ 中至少 1 个顶点移入 T 中.

(3) $x_i \notin S,\ y_i \in T$.

$$\begin{aligned}\widehat{l}(x_i) + \widehat{l}(y_i) &= l(x_i) + l(y_i) + \alpha_l \\ &\geq l(x_i) + l(y_i) \\ &\geq w(x_i y_i).\end{aligned}$$

修改前后顶点子集不变.

(4) $x_i \notin S,\ y_i \notin T$.

$$\widehat{l}(x_i)+\widehat{l}(y_i)=l(x_i)+l(y_i)$$

修改前后顶点子集不变.

综上，算法第三步修改顶标后，顶点子集元素至少增加一个. □

Ch6

3.

Proof. 对 k 进行归纳。

(1) $k=1$ 时，连通图 G 有 2 个奇度顶点，则由推论 6.1 可知 G 存在 *Euler* 迹 C，显然有

$$E(G)=E(C).$$

即 $k=1$ 时结论成立。

(2) 设 $k=n$ 时结论成立. 则 $k=n+1$ 时，记 G 中奇度顶点集合为 S，取 $u,v\in S$，令

$$G'=G\cup uv\ (uv\text{为新增的边，重边也无所谓})$$

对于图 G'，奇度顶点集 $S'=S-u,v$, $|S'|=|S|-2=2n$，由于 $k=n$ 时结论成立，即

$$G\text{中存在}k\text{条不重的行迹}P_1,P_2,\ldots,P_n,\text{使得}E(G)=\bigcup_{i=1}^{n}E(P_i).$$

不妨设 P_m 中含新增的边 uv，若 P_m-uv 为 G 中两条不重的行迹, 则记为 P_{n+1},P_{n+2}，若 P_m-uv 为一条行迹，则分成两条不重的行迹 P_{n+1},P_{n+2}，此时有

$$E(G)=P_1\cup\cdots\cup P_{m-1}\cup P_{m+1}\cup\cdots P_n\cup P_{n+1}\cup P_{n+2}.$$

又 $P_i\ (1\le i\le m-1, m+1\le i\le n+2)$ 不重，即证 $k=n+1$ 时结论也成立.

综上，即证。 □

5.

定义顶点

$$V(G)=\text{所有由}\alpha,\beta,\gamma\text{组成的不重复的三位符号}$$

定义边

$$E(G)=\{\overrightarrow{uv}|\ u,v\in V(G),u\text{可以通过左移之后加上一个字母得到}v\}$$

以 $V(G),E(G)$ 构建有向图 G. 则 $\forall\ v\in V(G)$, $\deg^+(v)=\deg^-(v)=3$，由定理 6.2 可得 G 为 *Euler* 图，可根据 *Euler* 回路构造队列. 如下为其中一条

$$\to\alpha\ \beta\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \gamma\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \beta\ \beta\ \beta\ \alpha\ \beta\ \beta\ \gamma\ \gamma\ \gamma\ \alpha\ \gamma\ \gamma\ \beta\ \gamma\ \alpha\ \to$$