图论作业 (第五周)

PB20000113 孔浩宇

October 13, 2022

Ch3

3.

Proof.

(1) $\delta(G) = \nu(G) - 1$, G 为完全图, $\kappa(G) = \nu(G) - 1 = \delta(G)$, 成立.

(2) $\delta(G) = \nu(G) - 2$.

(a) 任意取 $S \subseteq V, |S| = \nu(G) - 3$, 则

$$\forall\ p \in G - S,\ d(p) \geq \nu(G) - 2 > \nu(G) - 3\ \Rightarrow\ \exists\ q \in G - S, pq \in E(G - S).$$

即 $\kappa(G) \geq \nu(G) - 2$.

(b) $\delta(G) = \nu(G) - 2\ \Rightarrow\ \exists\ p \in G,\ d(p) = \nu(G) - 2$. 取 $S = \{v |\ pv \in E(G)\}$.

$$\text{记 } q = V(G) - S - p,\ G - S = G[\{p, q\}] \xrightarrow{pq \notin E(G)} G - S\text{不连通}.$$

综合 $(a)(b)$, 可得 $\kappa(G) = \nu(G) - 2 = \delta(G)$.

综合 (1)(2), 即证. □

7.

Proof.

(1) $l = n$. 即 $l = m = n$, 取 $G = K_{n+1}$ 即可.

(2) $l < n$. 取 $n + 1$ 阶完全图 K_1, K_2, 取 K_1 中 l 个顶点记为 X,K_2 中 m 个顶点记为 Y.

(a) 取 Y 中 l 个顶点与 X 中顶点一一连线,Y 中剩余 $m - l$ 个顶点与 X 中顶点任意连接.

(b) 记 $E = \{pq |\ p \in X, q \in Y\}, G = K_1 + K_2 + E$.

$$\begin{cases} l < n\ \Rightarrow\ \exists\ w \in G, d(w) = n & \Rightarrow\ \delta(G) \leq n \\ & \\ K_1 = K_2 = K_{n+1} & \Rightarrow\ \delta(G) \geq n \end{cases} \Rightarrow\ \delta(G) = n.$$

$$\begin{cases} \{pq |\ p \in E(K_1) - X,\ q \in E(K_2)\} = \Phi & \Rightarrow G - X\text{非连通} & \Rightarrow \kappa(G) = l \\ & & \\ \{pq |\ p \in E(K_1),\ q \in E(K_2), pq \notin E\} = \Phi & \Rightarrow G - E\text{非连通} & \Rightarrow \kappa'(G) = m \end{cases}$$

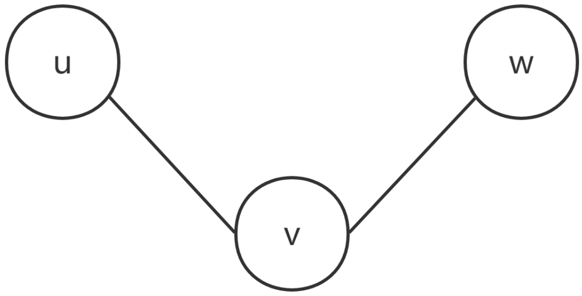
即证此时 G 满足要求.

即证. □

11.

Proof. 由 G 连通且不是块, 可得 $|G| \geq 3$. 对 $|G|$ 进行归纳.

(1) $|G| = 3$. 如图，仅有一种情况，此时顶点导出子图 $G[\{u, v\}]$ 与 $G[\{w, v\}]$ 满足要求.



(2) 假设 $|G| = n$ 时成立, 考虑 $|G| = n + 1$. 由 G 连通且不是块, 可得 G 至少有一个割顶，记为 v.
由 v 为割顶可得 $G - v$ 不连通，则 $G - v$ 中至少有两个连通片，记为 G_1, G_2.

(a) G_1, G_2 均不含割顶. 即 $\kappa(G_1), \kappa(G_2) \geq 2$. 记 $V[G_1] \cup \{v\} = V_1$，$V[G_2] \cup \{v\} = V_2$.

$$\begin{cases} \kappa(G[V_1]) & = \kappa(G_1) \geq 2 \\ \\ \kappa(G[V_2]) & = \kappa(G_2) \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \ G[V_1], G[V_2] \text{为块，且每个仅含 } G \text{ 的一个割顶.}$$

此时命题成立.

(b) 若存在一个连通片 G_1 中含有割顶.

$1°$ 由 $|G_1| < |G - v| = n$，可得 G_1 中至少有两个块，每个块仅含一个 G_1 割顶.

$2°$ 记 G_1 的割顶为 u，$G_1 - u$ 不连通可得 $G - u$ 不连通，即 G_1 的割顶也是 G 的割顶.

此时 G 中至少有两个块，每个块仅含 G 的一个割顶.

即证 $|G| = n + 1$ 时命题成立. 综上，$\forall\ |G| \geq 3$，原命题均成立.

□

16.

Proof. 假设存在图 G，G 的顶点度数均为偶数，且 G 中有桥，不妨设为 $pq = e$.

(0) e 为图 G 的桥 $\Leftrightarrow$ 存在 $V(G)$ 的一个划分 $V(G) = U \cup W$, $U \cap W = \Phi$, $U, W \neq \Phi$, 使得 $\forall\ u \in U, w \in W$, e 在每一条从 u 到 v 的轨道上.

(1) 先证明 p, q 不在同一个划分里. 不妨设 $p, q \in U$.
$\forall\ w \in W$, p 到 q 的轨道上含有 pq，记为 $pqW_{qw}w$，则 q, w 之间的轨道 W_{qw} 不含 pq，矛盾.
即证 p, q 在不同的划分中, 不妨记 $p \in U$, $q \in W$.

(2) 再证明 $\{uw|\ u \in U, w \in W, uw \neq e\} = \Phi$. 显然成立.

(3)
$$\sum_{v \in U} \deg_{G[U]}(v) = \deg_G(p) - 1 + \sum_{v \in U, v \neq q} \deg_G(v) \text{为奇数，矛盾.}$$

假设不成立，即证若图 G 的顶点度数均为偶数，则 G 中没有桥. □