图论作业 (第二周)

PB20000113 孔浩宇

September 18, 2022

Ch1

4. *Proof.* 构造图 $G=(V,E)$，其中 V 为群体里的人的集合，每个人作为一个顶点，若两个人是朋友，则在两人间连一条边，则每个人 p 来说, 朋友数即为在图 G 中的度数 $d(p), d(p) \in \{0,1,\ldots,\nu(G)-1\}$.
假设有 n 个人 $(n \geq 2)$, 且任两个人朋友数均不同, 则 $d(p)$ 有 n 个不同的取值. 又 $d(p) \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, 若 $\exists v \in V, \deg(v)=0$, 则 $\forall u \in V, d(u) \neq n-1$,$d(p)$ 至多有 $n-1$ 个不同的取值，即假设不成立，这个群体中至少有两个人朋友数相同. □

5. *Proof.* 构造图 $G=(V,E)$，其中 V 为人的集合，每个人作为一个顶点，若两个人认识，则在两人间连一条边.

   (1) $G=K_{2n}$, 显然成立.

   (2) $G \neq K_{2n}$, 取 $u, v \in V$, 且$u \neq v, uv \notin E$.

   $$d(u)+d(v) \geq 2n \Rightarrow \ \exists\, p,q \in V,\ p \neq q \text{且} up, uq, vp, vq \in E.$$

   此时使 u,v 相对而坐,p,q 坐 u,v 之间, 即可满足每个人旁边都是自己认识的人.

   即证. □

8. *Proof.* p 为 V' 中顶点, 图 G 中边 $pq\,(q \in V(G)-V')$ 的条数记为 $k(p)$. 则

   $$\deg_G(p) = \deg_{G[V']}(p) + k(p) \Rrightarrow \sum_{v \in V'} \deg_G(v) = \sum_{v \in V'} \deg_{G[V']}(v) + \sum_{v \in V'} k(v).$$

   其中 $\sum\limits_{v \in V'} \deg_{G[V']}(v) = 2\varepsilon\left(G[V']\right)$ $\sum\limits_{v \in V'} k(v) = k, \Rightarrow\ k = \sum\limits_{v \in V'} \deg_G(v) - 2\varepsilon\left(G[V']\right)$.

   (1) V' 中度数为奇数的顶点数为偶数, 即

   $$\sum_{v \in V'} \deg_{G[V']}(v) \text{为偶数} \ \Rightarrow\ k = \sum_{v \in V'} \deg_G(v) - 2\varepsilon\left(G[V']\right) \text{为偶数}.$$

   (2) V' 中度数为奇数的顶点数为奇数, 即

   $$\sum_{v \in V'} \deg_{G[V']}(v) \text{为奇数} \ \Rightarrow\ k = \sum_{v \in V'} \deg_G(v) - 2\varepsilon\left(G[V']\right) \text{为奇数}.$$

   即证. □

15. *Proof.* 令 H 是 G 的生成子图中边最多的二分图,$V(G)=V(H)=X \cup Y, X \neq \phi, Y \neq \phi, X \cap Y = \phi$.

   (1) 首先证明 $\forall\, x \in X, d_H(x) \geqslant d_{G[X]}(x)$.
   假设

   $$\exists\, x_0 \in X, d_H(x_0) < d_{G[X]}(x_0).$$

   则删去 H 中与 x_0 关联的边, 共 $d_H(x_0)$ 条, 增添边 $vx_0\,(vx_0 \in E(G), v \in X)$, 共 $d_{G[X]}(x_0)$ 条.

记此时的图为 $H', X' = X - x_0, Y' = Y + x_0$, 则 $X' \cup Y'$ 为 H' 的一个二分划分, 且

$$\varepsilon(H') = \varepsilon(H) - d_H(x_0) + d_{G[X]}(x_0) > \varepsilon(H)$$

与 H 是 G 的生成子图中边最多的二分图矛盾. 即证

$$\forall\, x \in X, d_H(x) \geqslant d_{G[X]}(x),\ \text{同理, 可证}\ \forall\, y \in X, d_H(y) \geqslant d_{G[Y]}(y).$$

(2) $\forall\, x \in X, y \in Y$,

$$\begin{cases} d_G(x) = d_H(x) + d_{G[X]}(x) \\ d_G(y) = d_H(y) + d_{G[Y]}(y) \end{cases} \xrightarrow[d_H(y) \geqslant d_{G[Y]}(y)]{d_H(x) \geqslant d_{G[X]}(x)} \begin{cases} d_H(x) \geqslant d_G(x)/2 \\ d_H(y) \geqslant d_G(y)/2 \end{cases}$$

即证

$$\forall\, u \in V(H) = V(G), d_H(u) \geqslant d_G(u)/2.$$

□

16. *Proof.* 令 $W_n = v_0 v_1 \ldots v_n$ 为 G 中最长的轨道. 若 $n < k$, 由 $d(v_n) \geqslant \delta(G) \geqslant k > n$, 可知

$$\exists\, v_{n+1} \in V(G), v_{n+1} \neq v_i (i = 1, 2, \ldots, n), \text{且}\ v_n v_{n+1} \in E(G).$$

则 $W_{n+1} = v_0 v_1 \ldots v_n v_{n+1}$ 为 G 中的轨道，且长度 $n + 1 > n$, 假设不成立，即证 $n \geqslant k$. □

Ch2

2. 设树叶有 x 片, 即度为 1 的顶点有 x 个,

$$\begin{cases} x + \sum\limits_{i=2}^{k} i \cdot n_i & = 2\varepsilon(T) \\ \\ \varepsilon(T) & = \nu(T) - 1 \end{cases} \Rightarrow\ x + 2 + \sum_{i=2}^{k} i \cdot n_i = 2 \cdot \left(x + \sum_{i=2}^{k} n_i \right)$$

解得

$$x = 2 + \sum_{i=2}^{k} (i - 2) \cdot n_i\ .$$

即有 $2 + \sum\limits_{i=2}^{k} (i-2) \cdot n_i$ 片树叶.

4. *Proof.* 记 $\nu(T) = v$, 设 T 中度数大于等于 n 的顶点有 t 个 $(t \geqslant 1)$, 树叶有 x 片.

(1) $v = 1, x = n = 0$;

(2) $v = 2, n = 1, x = 2$;

(3) $v \geqslant 3$, 首先证明 $n \geqslant 2$. 假设 $n < 2$, 即 $n = 0$或1, 则

$$\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2\varepsilon(T) = 2(v-1), \text{又} \sum_{v \in V(T)} \deg(v) \leqslant v \cdot n \leqslant v \leqslant 2(v-1), \text{矛盾}.$$

即证 $n \geqslant 2$, 又有

$$2 \cdot (v - 1) = 2 \cdot \varepsilon(T) = \sum_{u \in V(T)} \deg(u) \geqslant x + 2 \cdot (v - x - t) + t \cdot k$$

解得

$$x \geqslant t \cdot n - 2t + 2 = n + (n-2)(t-1) \geqslant n.$$

综上，即证 T 至少有 n 片树叶. □

5. *Proof.* 记 $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$ 为图 G 的连通片.

(1) 若已知 G 是森林. 则

$$\varepsilon\left(G\right)=\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon\left(G_i\right)=\sum_{i=1}^{\omega}\left(\nu\left(G_i\right)-1\right)=\nu\left(G\right)-\omega.$$

(2) 若已知 $\varepsilon=\nu-\omega$. 由

$$\varepsilon\left(G\right)=\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon\left(G_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{\omega}\left(\varepsilon\left(G_i\right)-1\right)=\nu\left(G\right)-\omega,\text{取等当且仅当 }\forall\, 1\leqslant i\leqslant\omega,\varepsilon\left(G_i\right)=\nu\left(G_i\right)-1.$$

可得 $\forall\, 1\leqslant i\leqslant\omega,\varepsilon\left(G_i\right)=\nu\left(G_i\right)-1$, 即 G 的每个连通片都是树,G 是森林.

即证. □