线性代数 homework (第十一周)

PB20000113 孔浩宇

May 4, 2022

1 周二

1.1 习题六

8. 设 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵:

(1) $\beta_1 = \alpha_3,\ \beta_2 = \alpha_1,\ \beta_3 = \alpha_2$;

(2) $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$.

(1) 设 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵为 B.

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\mathcal{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵为 B.

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

10. 如果 A 与 B 相似,C 与 D 相似, 证明 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$ 相似.

Proof. 设有可逆方阵 P 与 Q 满足 $P^{-1}AP = B,\ Q^{-1}CQ = D$, 则

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & O \\ O & Q^{-1}CQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} = I.$$

即证. □

11. 设方阵 A 与 B 相似, 证明:

(1) 对每个整数 k,A^k 相似于 B^k;

(2) 对每个多项式 f,$f(A)$ 相似于 $f(B)$.

Proof. 设有可逆方阵 $P, P^{-1}AP = B$.

(1)

$$P^{-1}A^kP = \left(P^{-1}AP\right)^k = B^k.$$

(2) 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

$$\begin{aligned}P^{-1}f(A)P =& P^{-1}(a_0I + a_1A + \cdots + a_nA^n)P\\ =& a_0I + a_1P^{-1}AP + \cdots + a_nP^{-1}A^nP\\ =& a_0I + a_1B + \cdots + a_nB^n.\end{aligned}$$

□

2 周四

2.1 习题六