线性代数 homework (第九周)

PB20000113 孔浩宇

May 1, 2022

1 周二

1.1 习题五

31. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 是 F^n 的基, 向量组 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 与 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 有关系式

$$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)T$$

证明: $\beta_1,\dots,\beta_n$ 为 F^n 的基当且仅当 T 为可逆方阵.

Proof.

(1) 充分性: 已知 T 可逆.

(a)

$$\forall\, a\in V, a=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\dots,\beta_n)T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}.$$

(b) 若 $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 线性相关, 则存在不全为 0 的一组数 $x_1,\dots,x_n$

$$(\beta_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\dots,\beta_n)T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=0.$$

矛盾, 故 $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 线性无关.

综上即证 $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 为 F^n 的一组基.

(2) 必要性: 已知 $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ 为 F^n 的一组基.

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n, \beta_i=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_{1i}\\ \vdots\\ x_{ni}\end{pmatrix}, \alpha_i=(\beta_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_{1i}\\ \vdots\\ y_{ni}\end{pmatrix}, X=(x_{ij})=T, Y=(y_{ij}).$$

则 $(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)T, (\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\dots,\beta_n)Y$, 可得

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)TY=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\Rightarrow Y=T^{-1}.$$

即证 T 可逆.

综上即证. □

48. 给定三阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix},$$

令 V 是与 A 可交换的所有实矩阵全体. 证明: V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求 V 的一组基与维数.

(1) *Proof.* $\forall\ P, Q \in V, \lambda, \mu \in R$, 则

$$(\lambda P+\mu Q)A=\lambda PA+\mu QA=\lambda AP+\mu AQ=A(\lambda P+\mu Q)\Rightarrow \lambda P+\mu Q\in V.$$

□

(2) 记 $X=(x_{ij})\in V, AX=XA$.

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{11}&x_{12}&x_{13}\\4x_{11}-2x_{21}+x_{31}&4x_{12}-2x_{22}+x_{32}&4x_{13}-2x_{23}+x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{12}+x_{13}&-2x_{13}&x_{11}+x_{13}\\x_{22}+x_{23}&-2x_{23}&x_{21}+x_{23}\\x_{32}+x_{33}&-2x_{33}&x_{31}+x_{33}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_{32}+x_{33}&2x_{32}+x_{31}&-\frac{1}{2}x_{32}\\ \\ \frac{1}{2}x_{32}+\frac{1}{2}x_{31}&\frac{9}{2}x_{32}+x_{33}+2x_{31}&-x_{32}-\frac{1}{2}b_{31}\\ \\ x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$$

显然 V 的维数为 3. 取 $(x_(31), x_{32}, x_{33})=(4,-2,1),(1,0,0),(0,0,1)$, 可得 V 的一组基:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\4&-2&1\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&2&-\frac{1}{2}\\1&0&0\end{pmatrix};\quad I.$$

49. $V=F^{n\times n}$ 是数域 F 上所有 n 阶矩阵构成的线性空间, 令 W 是数域 F 上所有满足 $tr(A)=0$ 的 n 阶矩阵的全体. 证明: W 是 V 的线性子空间，并求 W 的一组基与维数.

Proof. $\forall\ A, B\in W, \lambda, \mu\in F$, 有

$$tr(\lambda A+\mu B)=\lambda tr(A)+\mu tr(B)=0\Rightarrow \lambda A+\mu B\in W.$$

□

假设 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$.

$$tr(A)=\sum_{i=1}a_{ii}=0\Rightarrow\quad a_{nn}=-\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}\Rightarrow\quad A=\sum_{i=1}^{n-1}a_{ii}(E_{ii}-E_{nn})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}E_{kl}.$$

又 $E_{ii}-E_{nn}\ (i=1,\dots,n-1), E_{ij}\ (1\leqslant i\neq j\leqslant n)$ 线性无关, 可得

$$E_{ii}-E_{nn}\ (i=1,\dots,n-1), E_{ij}\ (1\leqslant i\neq j\leqslant n)\text{构成}W\text{的一组基}, \dim W=n^2-1.$$

51. 证明: 有限维线性空间的任何子空间都有补空间.

Proof. 设 V_1 是有限维线性空间 V 的子空间,$\dim V=n, \dim V_1=r$, 即证存在 V 的子空间 V_2 满足 $V=V_1\oplus V_2$.

(1) $V_1=\{0\}$, 即 $r=0$. 则有 $V_2=V$, 满足

$$V_1\cap V_2=\{0\}, V=V_1+V_2\Rightarrow\quad V=V_1\oplus V_2.$$

(2) $V_1\neq\{0\}$, 即 $r\neq 0$. 设 V_1 的一组基为 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$, 扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

$$\text{取}V_2=\langle\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n\rangle, \text{显然}V=V_1\oplus V_2.$$

□

2 周四

2.1 习题六

1. (1) 非线性变换.$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{A}\left(\lambda(a,b)\right)=\mathcal{A}\left(\lambda a,\lambda b\right)=(\lambda a+\lambda b,\lambda^2a^2)\neq(\lambda(a+b),\lambda a^2)=\lambda\mathcal{A}(a,b).$$

   (2) 非线性变换.$\forall\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{A}\left(\lambda(a,b,c)\right)=\mathcal{A}\left(\lambda a,\lambda b,\lambda c\right)=(\lambda a-\lambda b,\lambda c,\lambda a+1)\neq(\lambda(a-b),\lambda c,\lambda(a+1))=\lambda\mathcal{A}(a,b,c).$$

   (3) 线性变换.$\forall\ X,Y\in M_n(F),\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{A}(\lambda X+\mu Y)=A(\lambda X+\mu Y)-(\lambda X+\mu Y)B=\lambda(AX-XB)+\mu(AY-YB)=\lambda\mathcal{A}(X)+\mu\mathcal{A}(Y).$$

   (4) 若 $\alpha\neq 0$, 非线性变换.$\forall\ x\in V,\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{A}\left(\lambda x\right)=\alpha\neq\lambda\alpha=\lambda\mathcal{A}(x).$$

   $\alpha=0$, 线性变换.$\forall\ x,y\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathcal{A}\left(\lambda x+\mu y\right)=0=\lambda\mathcal{A}(x)+\mu\mathcal{A}(y).$$

2. (1)

$$(\mathcal{A}(e_1),\mathcal{A}(e_2),\mathcal{A}(e_3))=(e_1,e_2,0)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

   (2)

$$(\mathcal{A}(e_0),\mathcal{A}(e_1),\dots,\mathcal{A}(e_n))=(0,e_0,\dots,e_{n-1})=(e_0,e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

   即 $\mathcal{A}$ 在此组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

   (3)

$$\begin{aligned}(\alpha_1)'&=a\cdot e^{ax}\cos bx-b\cdot e^{ax}\sin bx\\&=a\cdot\alpha_1-b\cdot\alpha_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_2)'&=a\cdot e^{ax}\sin bx+b\cdot e^{ax}\cos bx\\&=b\cdot\alpha_1+a\cdot\alpha_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_3)'&=a\cdot xe^{ax}\cos bx-b\cdot xe^{ax}\sin bx+e^{ax}\cos bx\\&=\alpha_1+a\alpha_3-b\alpha_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_4)'&=a\cdot xe^{ax}\sin bx+b\cdot xe^{ax}\cos bx+x^{ax}\sin bx\\&=\alpha_2+b\cdot\alpha_3+a\cdot\alpha_4.\end{aligned}$$

$$(\mathcal{A}(\alpha_1),\mathcal{A}(\alpha_2),\mathcal{A}(\alpha_3),\mathcal{A}(\alpha_4))=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0\\ -b & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & -b & a\end{pmatrix}.$$

即 $\mathcal{A}$ 在此组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0\\ -b & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & a & b\\ 0 & 0 & -b & a\end{pmatrix}.$$

(4) 记 $A=(a_{ij})$.

$$\mathcal{A}(e_1)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0\\ a_{21} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=-a_{12}\cdot e_2+a_{21}\cdot e_3;$$

$$\mathcal{A}(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & a_{11}\\ 0 & a_{21}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=-a_{21}\cdot e_1+(a_{11}-a22)\cdot e_2+a_{21}\cdot e_4;$$

$$\mathcal{A}(e_3)=\begin{pmatrix} a_{12} & 0\\ a_{22} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0\\ a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}=a_{12}\cdot e_1+(a_{22}-a_{11})\cdot e_3-a_{12}\cdot e_4;$$

$$\mathcal{A}(e_4)=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{12}\cdot e_2-a_{21}\cdot e_3.$$

$$(\mathcal{A}(e_1),\mathcal{A}(e_2),\mathcal{A}(e_3),\mathcal{A}(e_4))=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0\\ -a_{12} & a_{11}-a_{22} & 0 & a_{12}\\ a_{21} & 0 & a_{22}-a_{11} & -a_{21}\\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0\end{pmatrix}.$$

即 $\mathcal{A}$ 在此组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0\\ -a_{12} & a_{11}-a_{22} & 0 & a_{12}\\ a_{21} & 0 & a_{22}-a_{11} & -a_{21}\\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0\end{pmatrix}.$$

4. 设 $\mathcal{A}$ 在自然基下的矩阵为 A, 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 B.

$$\mathcal{A}(e_1,e_2,e_3)=\mathcal{A}(\alpha_3-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_1,\alpha_1)=(\beta_3-\beta_2,\beta_2-\beta_1,\beta_1)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow\quad A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}.$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B\Rightarrow\quad B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$