线性代数 homework (第九周)

PB20000113 孔浩宇

April 25, 2022

1 周二

1.1 习题五

37. 设 n 元 $n-1$ 个方程的齐次线性方程组的系数阵 A 的秩为 $n-1$, 求该齐次线性方程组的基础解系.
解:

设 $A=(a_{ij})_{(n-1)*n}$, 则基础解系个数为 1; 取方阵 $B=\begin{pmatrix}A\\ \beta\end{pmatrix}, \beta=(b_1,\dots,b_n)$;

记 B 第 n 行对应的代数余子式为 $B_1,\dots,B_n$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\cdot B_i=\det(B)$;

取 $\beta=(a_{i1},\dots,a_{in})$, 则 $\mathrm{rank}(A)=n-1, \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\cdot B_i=\det(B)=0$;

即 $\alpha=(B_1,\dots,B_n)^T$ 为该齐次线性方程组的基础解系.

38. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 为非齐次方程组 $Ax=b$ 的一组解,$\lambda_1,\dots,\lambda_s$ 为常数. 给出 $\lambda_1\alpha_s+\cdots+\lambda_s\alpha_s$ 为该线性方程组的解的充要条件.

$$\begin{aligned} A(\lambda_1\alpha_s+\cdots+\lambda_s\alpha_s)=b &\Leftrightarrow \quad \lambda_1\cdot A\alpha_1+\cdots+\lambda_s\cdot A\alpha_s=b;\\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda_1+\cdots+\lambda_s)b=b;\\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_1+\cdots+\lambda_s=1. \end{aligned}$$

40. 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解:

$$(2)\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-4x_5 &=0\\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5 &=0\\ -x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5 &=0\\ x_1+2x_2-\ \ x_3+4x_4-6x_5 &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2\\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4\\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=0.$$

对增广矩阵进行线性变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2\\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4\\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6\\ 0 & 4 & -4 & 8 & -8\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即原方程组等价于

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&1&0&1&-2\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_4-2x_5&=0\\x_2+x_4-2x_5&=0\\-x_3+x_4&=0\end{cases}\xrightarrow[x_5=b]{x_4=a}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+2b\\-a+2b\\a\\a\\b\end{pmatrix}.$$

即基础解系为 $(-1,-1,1,1,0)^T,(2,2,0,0,1)^T$; 通解为 $(-a+2b,-a+2b,a,a,b)^T$.

41. 已知 $\mathbb{F}^5$ 中向量 $\eta_1=(1,2,3,2,1)^T$ 及 $\eta_2=(1,3,2,1,2)^T$. 找一个齐次线性方程组, 使得 η_1 与 η_2 为该方程组的基础解系.

$$A\begin{pmatrix}\eta_1&\eta_2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\eta_1^T\\\eta_2^T\end{pmatrix}A^T=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&2&1\\1&3&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}\\a_{15}&a_{25}&a_{35}\end{pmatrix}=O.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&2&1\\1&3&2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&5&4&1\\0&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5a_3-4a_4-a_5\\a_3+a_4-a_5\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix}\eta_1^T\\\eta_2^T\end{pmatrix}\alpha=0$ 基础解系为 $(-5,1,1,0,0)^T,(-4,1,0,1,0)^T,(-1,-1,0,0,1)^T$. 可得

$$A=\begin{pmatrix}-5&1&1&0&0\\-4&1&0&1&0\\1&-1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

43. 判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间:

(1) V 是所有实数对 (x,y) 的集合, 数域 $F=\mathbb{R}$. 定义

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),\lambda(x,y)=(x,y).$$

(2) V 是所有满足 $f(-1)=0$ 的实函数的集合, 数域 $F=\mathbb{R}$. 定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法.

(3) V 是所有满足 $f(0)\neq 0$ 的实函数的集合, 数域 $F=\mathbb{R}$. 定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法.

(4) V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体, 加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘.

解:

(1) 不构成线性空间.$\lambda(x,y)+\mu(x,y)=(2x,2y)\neq(\lambda+\mu)(x,y)\quad(x,y\neq 0)$

(2) 构成线性空间

$$\begin{aligned}\forall\, f,g,h\in V;\lambda,\mu\in\mathbb{R}:\ &(A1)\ f+g=g+f,\text{且}(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=0\Rightarrow f+g\in V;\\&(A2)\ (f+g)+h=f+(g+h);\\&(A3)\ \exists\, O=0,f+O=O+f=f;\\&(A4)\ \exists\, p,\forall\, x\in\mathbb{R},p(x)=-f(x),f+p=p+f=O=0;\\&(D1)\ \lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g,\text{且}(\lambda f)(-1)=\lambda f(-1)=0\Rightarrow\lambda f\in V;\\&(D2)\ (\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f;\\&(D3)\ \lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f;\\&(D4)\ 1f=f.\end{aligned}$$

(3) 不构成线性空间.$\forall\, f\in V$, 显然 $-f\in V,f+(-f)=0\Rightarrow f+(-f)\notin V$, 对加法不封闭.

(4) 不构成线性空间.$\forall\, A\in V$, 显然 $-A\in V,A+(-A)=O\Rightarrow A+(-A)\notin V$, 对加法不封闭.

2 周四

2.1 习题五

44. 设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间, 判断下列函数组是否线性相关.

(1) $1, x, \sin x$;

(2) $1, x, e^x$;

(3) $1, \cos 2x, \cos^2 x$;

(4) $1, x^2, (x-1)^3, (x+1)^3$;

(5) $\cos x, \cos 2x, \dots\ \cos nx$.

解:

(1) 线性无关. 若存在 $a, b, c \in \mathbb{R}, a + bx + c\sin x \equiv 0$, 取 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$, 则

$$a = a + b\pi = a + \frac{b\pi}{2} + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

(2) 线性无关. 若存在 $a, b, c \in R, a + bx + c \cdot e^x \equiv 0$, 取 $x = 0, 1, -1$, 则

$$a + c = a + b + c \cdot e = a - b + \frac{c}{e} = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

(3) 线性相关.$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 0$.

(4) 线性相关.$(x+1)^3 = (x-1)^3 + 6x^2 + 2$.

(5) 线性无关. 若存在 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \cos ix \equiv 0$, 则记 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \cos ix$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\ k \geqslant 0, f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f^{(4)}(x) = \cdots = f^{(4\cdot(n-1))}(x) = 0$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^4 & \cdots & n^4 \\ 1 & (2^4)^2 & \cdots & (n^4)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (2^4)^{n-1} & \cdots & (n^4)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos x \\ a_2 \cdot \cos 2x \\ \vdots \\ a_n \cdot \cos nx \end{pmatrix} = O \xrightarrow{\text{由 } Vandermonde \text{ 矩阵}} \begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos x \\ a_2 \cdot \cos 2x \\ \vdots \\ a_n \cdot \cos nx \end{pmatrix} = O.$$

显然有 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

46. 设 $F_n[x]$ 是次数小于或等于 n 的多项式全体构成的线性空间.

(1) 证明:$S = \left\{1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^n\right\}$ 构成 $\mathbb{F}^n[x]$ 的一组基;

(2) 求 S 到基 $T = \{1, x, \dots, x^n\}$ 之间的过渡矩阵;

(3) 求多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[x]$ 在基 S 下的坐标.

Proof.

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x-1 \\ (x-1)^2 \\ \vdots \\ (x-1)^n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_0^0 \cdot (-1)^0 & C_1^0 \cdot (-1)^1 & C_2^0 \cdot (-1)^2 & \cdots & C_n^0 \cdot (-1)^n \\ 0 & C_1^1 \cdot (-1)^0 & C_2^1 \cdot (-1)^1 & \cdots & C_n^1 \cdot (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & C_2^2 \cdot (-1)^0 & \cdots & C_n^2 \cdot (-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n \cdot (-1)^0 \end{pmatrix}.$$

由过渡矩阵

$$\det(T)=\det\begin{pmatrix} C_0^0\cdot(-1)^0 & C_1^0\cdot(-1)^1 & C_2^0\cdot(-1)^2 & \cdots & C_n^0\cdot(-1)^n \\ 0 & C_1^1\cdot(-1)^0 & C_2^1\cdot(-1)^1 & \cdots & C_n^1\cdot(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & C_2^2\cdot(-1)^0 & \cdots & C_n^2\cdot(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n\cdot(-1)^0 \end{pmatrix}=1,\Rightarrow \text{即证}.$$

(2) 由 (1) 可得过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} C_0^0\cdot(-1)^0 & C_1^0\cdot(-1)^1 & C_2^0\cdot(-1)^2 & \cdots & C_n^0\cdot(-1)^n \\ 0 & C_1^1\cdot(-1)^0 & C_2^1\cdot(-1)^1 & \cdots & C_n^1\cdot(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & C_2^2\cdot(-1)^0 & \cdots & C_n^2\cdot(-1)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_n^n\cdot(-1)^0 \end{pmatrix}.$$

(3) 记 $p(x)$ 在基 S 下的坐标为 $(b_0,b_1,\ldots,b_n)$, 则

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i\cdot(x-1)^i\Rightarrow b_i=\frac{1}{i!}p^{(i)}(1)\Rightarrow(b_0,b_1,\ldots,b_n)=\left(\sum_{i=0}^{n}C_i^0a_i,\sum_{i=1}^{n}C_i^1a_i,\ldots,\sum_{i=n}^{n}C_i^na_i\right)$$

□

47. V 是数域 $\mathbb{F}$ 上所有 n 阶对称矩阵的全体, 定义加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘. 证明: V 是线性空间，并求 V 的一组基及维数.

Proof.

(1) 证明 V 是线性空间:

$$\begin{aligned}\forall\ A,B,C\in V;\lambda,\mu\in\mathbb{R}:\ &(A1)\ A+B=B+A,\text{且}(A+B)^T=A^T+B^T=A+B\Rightarrow A+B\in V;\\ &(A2)\ (A+B)+C=A+(B+C);\\ &(A3)\ \exists\ O\in V,A+O=O+A=A;\\ &(A4)\ \exists\ A'=-A,(-A)^T=-A\Rightarrow A'\in V,\text{且}A+A'=0;\\ &(D1)\ \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,\text{且}(\lambda A)^T=\lambda A^T=\lambda A\Rightarrow\lambda A\in V;\\ &(D2)\ (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A;\\ &(D3)\ \lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A;\\ &(D4)\ 1A=A.\end{aligned}$$

(2)

$$\forall\ A=(a_{ij})\in V,A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_{ii}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}(E_{ij}+E_{ji}).$$

又 $S=\{E_{ii}(1\le i\le n),E_{ij}+E_{ji}(1\le i\le j\le n)\}$ 为线性无关组, 故可取 S 为 V 的一组基.
即

$$\text{基}S=\{E_{ii}(1\le i\le n),E_{ij}+E_{ji}(1\le i\le j\le n)\},\ \mathrm{rank}V=\mathrm{rank}S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

□