线性代数 homework (第二周)

PB20000113 孔浩宇

March 8, 2022

1 周二

1.1 习题三

1. 解下列线性方程组:

(2)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4, \\ \quad\quad x_2 - \ x_3 + \ x_4 &= -3, \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad - 3x_4 &= 1, \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3. \end{cases}$$

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[7r_2 \to r_4]{-5r_2 \to r_3 \ 2r_2 \to r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{\frac{1}{4}r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_4, r_3 \to r_2]{-r_3 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 &= -8, \\ x_2 - x_4 &= 3, \\ x_3 - 2x_4 &= 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= -8, \\ x_2 &= x_4 + 3, \\ x_3 &= 2x_4 + 6, \\ x_4 &= x_4. \end{cases}$$

令 $x_4 = t$, 解得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 &= 2, \\ \ x_1 - \ x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - \ x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1 \to r_1]{r2 \to r_3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -14 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{-4}{3}r_3 \to r_1]{\frac{14}{3}r_3 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 6 & 0 & 25/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/18 & 4/9 \\ 0 & 6 & 0 & 25/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

即:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{18}x_4 & = \frac{4}{9}, \\ 6x_2 + \frac{25}{3}x_4 & = \frac{14}{3}, \\ 3x_3 + 2x_4 & = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{5}{18}x_4 + \frac{4}{9}, \\ x_2 & = \frac{-25}{18}x_4 + \frac{7}{9}, \\ x_3 & = \frac{-2}{3}x_4 + \frac{1}{3}, \\ x_4 & = x_4, \end{cases}$$

令 $x_4 = t$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ -25/18 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4/9 \\ 7/9 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0. \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 & = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 & = 0, \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 & = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 15 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[4r_3 \to r_4]{3r_3 \to r_1, 2r_3 \to r_2} \begin{pmatrix} 0 & 16 & -11 & 7 & 0 \\ 0 & 17 & -13 & 7 & 0 \\ -1 & 7 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 43 & -23 & 21 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{-r_1 \to r_2, -3r_1 \to r_4}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -11 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-16r_2 \to r_3]{5x_2 \to x_4, -7r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 10 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3x_3 \to x_1]{\frac{1}{7}x_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 - 2x_3 & = 0, \\ 3x_3 + x_4 & = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = x_3, \\ x_2 & = 2x_3, \\ x_4 & = -3x_3. \end{cases}$$

令 $x_3 = t$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} t$$

2. 当 a 为何值时，下列线性方程组有解？有解时求出它的通解:

(1)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = -3, \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 6; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-ax_2 \to r_3]{-3x_2 \to x_1} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & a-2 & 2a+2 & 3a+6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\frac{1}{5}r_1 \to r_2, \frac{2-a}{5}x_1 \to x_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & (3a+24)/5 & (4a+52)/5 \end{pmatrix} \xrightarrow[5x_1]{5x_3} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3(a+8) & 4(a+13) \end{pmatrix}$$

即解:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_3 & = -4, \\ 5x_2 + 7x_3 & = 11, \\ 3(a+8)x_3 & = 4(a+13). \end{cases}$$ ，当 a+8 $\neq$0, 即 a $\neq$ -8 时有解 $$\begin{cases} x_1 & = 4/(a+8), \\ x_2 & = (20-a)/(3a+24), \\ x_3 & = (4a+52)/(3a+24). \end{cases}$$

即 a≠-8 时有解，通解为 $\left(\dfrac{4}{a+8},\dfrac{20-a}{3(a+8)},\dfrac{4(a+13)}{3(a+8)}\right)$

3. a 为何值时，下述线性方程组有唯一解？a 为何值时，此方程组无解？

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 3, \\ x_1+2x_2-ax_3 &= 9, \\ 2x_1-x_2+3x_3 &= 6. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -a & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1\to r_3]{-r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3r_2\to r_3]{-r_2\to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+2 & -3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{pmatrix}$$

即解:

$$\begin{cases} x_1+(a+2)x_3 &= -3, \\ x_2-(a+1)x_3 &= 6, \\ -(3a+2)x_3 &= 18. \end{cases}$$ ，当 $3a+2\neq 0$, 即 $a\neq\frac{-2}{3}$ 时有解，且为唯一解.

即 $a\neq\frac{-2}{3}$ 时有唯一解,$a=\frac{-2}{3}$ 时无解.

5. 求三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足:

$$f(0)=1, f(1)=2, f'(0)=1, f'(1)=-1.$$

代入, 得:

$$\begin{cases} d &= 1 \\ a+\ b+c+d &= 2 \\ c &= 1 \\ 3a+2b+c &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3\to r_2,-3r_2\to r_4]{-r_1\to r_2,-r_3\to r_4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

即解:

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -b &= -2 \\ c &= 1 \\ d &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= -2 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \\ d &= 1 \end{cases}$$

即 $f(x)=-2x^3+2x^2+x+1$.

7. 给定线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4 &= 2, \\ 2x_1+5x_2-2x_3+\ x_4 &= 1, \\ 3x_1+8x_2-\ x_3-2x_4 &= 0. \end{cases}$$

将常数项改为零得到另一个方程组, 求解这两个方程组, 并研究这两个方程组的解之间的关系, 对其他方程组做类似的讨论.

解:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4 &= a, \\ 2x_1+5x_2-2x_3+\ x_4 &= b, \\ 3x_1+8x_2-\ x_3-2x_4 &= c. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & a \\ 2 & 5 & -2 & 1 & b \\ 3 & 8 & -1 & -2 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1\to r_3]{-2r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 4 & -7 & b-2a \\ 0 & 2 & 8 & -14 & c-3a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2\to r_3]{-2r_2\to r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -11 & 18 & 5a-2b\\ 0 & 1 & 4 & -7 & b-2a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2b+c\end{pmatrix}$$

齐次方程 (a=b=c=0):

$$\begin{cases} x_1 \quad -11x_3+18x_4 &= 0,\\ \quad x_2+\ 4x_3-\ 7x_4 &= 0.\end{cases} \xrightarrow[x_4=n]{x_3=m} \begin{cases} x_1 &= 11m-18n,\\ x_2 &= -4m+7n,\\ x_3 &= m,\\ x_4 &= n.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ -4\\ 1\\ 0\end{pmatrix} m + \begin{pmatrix}-18\\ 7\\ 0\\ 1\end{pmatrix} n$$

非齐次方程 (a=2,b=1,c=0):

$$\begin{cases} x_1 \quad -11x_3+18x_4 &= 8,\\ \quad x_2+\ 4x_3-\ 7x_4 &= -3.\end{cases} \xrightarrow[x_4=n]{x_3=m} \begin{cases} x_1 &= 11m-18n+8,\\ x_2 &= -4m+7n-3,\\ x_3 &= m,\\ x_4 &= n.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ -4\\ 1\\ 0\end{pmatrix} m + \begin{pmatrix}-18\\ 7\\ 0\\ 1\end{pmatrix} n + \begin{pmatrix}8\\ -3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

非齐次方程的通解比对应的齐次方程多一组常量.

1.2 习题四

2. 证明: 每个方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和的形式.
   $\forall A=(a_{ij})_{n*n}$, 假设 $\exists B=(b_{ij}), C=(c_{ij})$,$B$ 为对称矩阵,C 为反对称矩阵, 且 $B+C=A$, 即:

$$\begin{cases} b_{ij}+c_{ij} &= a_{ij};\\ b_{ij}-c_{ij} &= a_{ji}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{ij} &= \dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2};\\ c_{ij} &= \dfrac{a_{ij}-a_{ji}}{2}.\end{cases} \text{满足} \begin{cases} b_{ij} &= b_{ji};\\ c_{ij} &= -c_{ji}.\end{cases}$$

   即 $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$.
   即证每个方阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和的形式.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. 计算 AB, BC, ABC, B^2, AC, CA.

   (1)

$$AB=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & -11 & 16\\ 30 & 11 & -26\end{pmatrix}$$

   (2)

$$BC=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 12 & 11\\ -5 & 13\end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned}ABC &= \begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-18 & -11 & 16\\ 30 & 11 & -26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}10 & -61\\ 12 & 93\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4)

$$B^2 = \begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -4 & -6\\ -12 & -3 & 8\\ 8 & -4 & -11\end{pmatrix}$$

(5)

$$AC = \begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ -15 & -4\end{pmatrix}$$

(6)

$$CA = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 3 & 7 & 12\\ 1 & -5 & -6\end{pmatrix}$$

5. 计算 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}.\end{aligned}$$

6. 举出满足下列条件的 2 阶实方阵 A:

(1) $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a^2+bc = d^2+bc & = 0\\ ab+bd = ac+cd & = 1\end{cases}$$

1° $(a = d \neq 0)$:

$$b(a+d) = c(a+d) = 1 \Rightarrow b = c = \frac{1}{a+d} \neq 0 \Rightarrow a^2 = d^2 = -bc < 0.$$

矛盾.

2° $(a = -d)$:

$$b(a+d) = c(a+d) = 0 \neq 1.$$

矛盾.

即不存在满足此条件的方阵 A.

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$A : \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(3) $A^3 = I$ 且 $A \neq I$.

$$A : \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

8. 设 A, B 都是 n 阶对称方阵, 且 AB=BA. 证明:AB 也是对称方阵.

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

即证.

9. 证明: 两个 n 阶上 (下) 三角方阵的乘积仍是上 (下) 三角方阵.

(1) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 为 n 阶上三角方阵, 则 $a_{ij} = b_{ij} = 0,\ \forall 1 \leq j < i \leq n$.

设 $AB = C = (c_{ij})$ 则 $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, 考察 $1 \leq j < i \leq n$ 时 c_{ij} 的取值情况.

$$\begin{cases} a_{ik} & = 0 \quad 1 \leq k \leq j, \\ b_{kj} & = 0 \quad j < k \leq n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ik} b_{kj} & = 0 \quad 1 \leq k \leq j, \\ a_{ik} b_{kj} & = 0 \quad j < k \leq n. \end{cases} \Rightarrow \forall 1 \leq j < i \leq n, c_{ij} = 0.$$

即证两个 n 阶上三角方阵的乘积仍是上三角方阵.

(2) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 为 n 阶下三角方阵, 则 $a_{ij} = b_{ij} = 0,\ \forall 1 \leq i < j \leq n$.

设 $AB = C = (c_{ij})$ 则 $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$,, 考察 $1 \leq i < j \leq n$ 时 c_{ij} 的取值情况.

$$\begin{cases} b_{kj} & = 0 \quad 1 \leq k \leq j, \\ a_{ik} & = 0 \quad j < k \leq n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ik} b_{kj} & = 0 \quad 1 \leq k \leq j, \\ a_{ik} b_{kj} & = 0 \quad j < k \leq n. \end{cases} \Rightarrow \forall 1 \leq i < j \leq n, c_{ij} = 0.$$

即证两个 n 阶下三角方阵的乘积仍是下三角方阵.