概统作业 (Week 12)

PB20000113 孔浩宇

May 31, 2023

1

选 B

(A)

$$(X_i-\mu)\sim N(0,1)\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2_n$$

(B)

$$(X_n-X_1)\sim N(0,2)\ \Rightarrow\ \frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2_1\ \Rightarrow\ 2(X_n-X_1)^2\text{不服从}\chi^2\text{分布}$$

(C)

$$\sum_{i=1}^{n}(X_n-\overline{X})^2=(n-1)S^2\sim\chi^2_{n-1}$$

(D)

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)\ \Rightarrow\ n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2_1$$

2 (P205 T15)

$$\begin{cases}E(X_1-2X_2)=0, & Var(X_1-2X_2)=20\\ E(3X_3-4X_4)=0, & Var(3X_3-4X_4)=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1-2X_2 & \sim N(0,20)\\ 3X_3-4X_4 & \sim N(0,100)\end{cases}$$

要使 T 服从 χ^2 分布，有

$$\begin{cases}\sqrt{a}(X_1-2X_2) & \sim N(0,1)\\ \sqrt{b}(3X_3-4X_4) & \sim N(0,1)\end{cases}\Rightarrow\ 20a=100b=1\ \Rightarrow\ a=\frac{1}{20},\ b=\frac{1}{100}$$

3 (P205 T16)

Proof.

服从自由度为 2 的 t 分布. 不妨设 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$ $(1\le i\le 9)$，有

$$E(Y_1)=E(Y_2)=\mu,\quad Var(Y_1)=\frac{\sigma^2}{6},\quad Var(Y_2)=\frac{\sigma^2}{3}$$

故

$$E(Y_1-Y_2)=0,\quad Var(Y_1-Y_2)=\frac{\sigma^2}{2},\quad Y_1-Y_2\sim N(0,\frac{\sigma^2}{2})$$

记 $M=\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(Y_1-Y_2)$，则

$$M\sim N(0,1)$$

记 $N=\frac{2S^2}{\sigma^2}$，由定理可得

$$N=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi_2^2$$

则

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{M}{\sqrt{N/2}}\sim t_2.$$

□

4 (P232 T8)

(1)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^\theta\frac{x}{2\theta}dx+\int_\theta^1\frac{x}{2(1-\theta)}dx=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}$$

有

$$\overline{X}=\frac{1}{4}+\frac{\hat{\theta}}{2}\ \Rightarrow\ \hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}.$$

(2) 不是。理由如下

$$E(4\overline{X}^2)=4\left[Var(\overline{X})+\left(E(\overline{X})\right)^2\right]=4\left[\frac{Var(X)}{n}+\left(E(X)\right)^2\right]$$

又

$$E(X)=\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2},\quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}$$

故

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}-\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{12}-\frac{\theta}{12}+\frac{5}{48}.$$

原式即为

$$E(4\overline{X}^2)=4\left[\left(\frac{\theta^2}{12n}-\frac{\theta}{12n}+\frac{5}{48n}\right)+\left(\frac{\theta^2}{4}+\frac{\theta}{4}+\frac{1}{16}\right)\right]=\frac{3n+1}{3n}\theta^2+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+5}{12}\neq\theta^2$$

即证 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

5 (P234 T27)

有最大似然函数

$$L(X_1,X_2,\dots,X_n;\lambda)=\prod_{i=1}^n\frac{\lambda^{x_i}}{X_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^n\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}.$$

$$\ln L=-n\lambda+\sum_{i=1}^n\left(X_i\ln\lambda-\ln X!\right)$$

令

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^nX_i-n=0.$$

得

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i=\overline{X}$$

检验二阶导

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial\lambda^2}=-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^nX_i$$

对于所有 λ 与 $\overline{X}$ 非零时为负，故所求驻点为 L 极大值点，$P(X=0)$ 的最大似然估计为

$$P(X=0)=e^{-\widehat{\lambda}}=e^{-\overline{X}}$$

6 (P235 T29)

(1) 即 $X \sim U(\theta, 0)$, $\theta \in \Theta$，有矩估计

$$E(X) = \frac{0+\theta}{2} = \overline{X} \ \Rightarrow \ \hat{\theta} = 2\overline{X}$$

有最大似然函数

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X = X_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{(-\theta)^n}, & X_1, X_2, \dots, X_n \in [\theta, 0] \\ \\ 0. & \text{其他} \end{cases}$$

显然当 $(-\theta)^n$ 最小，即 θ 最大时，L 最大，又

$$\theta \le \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\},\ \theta \in (-\infty, 0)$$

有最大似然估计

$$\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

(2) 即 $X \sim U(\theta, 2\theta)$, $\theta \in \Theta$，有矩估计

$$E(X) = \frac{\theta+2\theta}{2} = \overline{X} \ \Rightarrow \ \hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X}$$

有最大似然函数

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X = X_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & X_1, X_2, \dots, X_n \in [\theta, 2\theta] \\ \\ 0. & \text{其他} \end{cases}$$

显然当 θ^n 最小时，L 最大，又

$$\theta \le \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\},\ \theta \ge \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},\ \theta \in (0, +\infty)$$

有最大似然估计

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$