1.设某种昆虫单只每次产卵的数量服从参数为λ的$Poisson$分布，而每个虫卵能孵出幼虫的概率均为p且相互独立. 分别以Y和Z记一只昆虫一次产卵后孵出幼虫和未能孵出幼虫的虫卵的个数，试问Y和Z分别服从什么分布？它们是否相互独立？（利用条件概率）

解：设单只昆虫每次产卵的数量为X，则有$X \sim P(\lambda)$，有$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

$$\begin{aligned}
P(Y=m) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=m|X=k)P(X=k) \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} P(X=k) \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m!(k-m)!} p^m (1-p)^{k-m} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(k-m)!}{(1-p)^{k-m}\lambda^{k-m}} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

因此，$Y \sim P(\lambda p)$. 同理，

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z=n|X=k)P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^n (1-p)^n p^{k-n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} e^{-\lambda(1-p)}.
\end{aligned}$$

因此，$Z \sim P(\lambda(1-p))$. 考虑

$$\begin{aligned}
P(Y=m|Z=n) &= \frac{P(Y=m, Z=n)}{P(Z=n)} \\
&= \frac{P(X=m+n, Z=n)}{P(Z=n)} \\
&= \frac{P(Z=n|X=m+n)P(X=m+n)}{P(Z=n)} \\
&= \frac{C_{m+n}^n (1-p)^n p^m \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} e^{-\lambda(1-p)}} \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p} = P(Y=m)
\end{aligned}$$

因此Y, Z独立.

2.(习题18)设随机变量X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{4}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{x-1}{4}, & 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{5}{6}, & 2 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

试求：

(1)$P(X=k), k=1,2,3;$

(2)$P(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})$.

解：

(1)$P(X=1)=F(1)-F(1-0)=\frac{1}{2}+\frac{1-1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=F(2)-F(2-0)=\frac{5}{6}-(\frac{1}{2}+\frac{2-1}{4})=\frac{1}{12}$,

$P(X=3)=F(3)-F(3-0)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$;

(2)$P(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2})=F(\frac{3}{2})-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}-1}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{2}$.

3.(习题21)设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2},-\infty<x<\infty.$$

试求

(1)常数a;

(2)分布函数$F(x)$;

(3)概率$P(|X|<1)$.

解:

(1)由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$得$a\arctan x|_{-\infty}^{+\infty}=1$，解得$a=\frac{1}{\pi}$;

(2)$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\arctan x|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$;

(3)$P(|X|<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{\pi}(\arctan 1-\arctan(-1))=\frac{1}{2}$.

4.(习题27)设随机变量X只在区间$(0,1)$内取值，且其分布函数$F(x)$满足：对任意$0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$，$F(b)-F(a)$的值仅与差$b-a$有关.试证明$X$服从$(0,1)$上的均匀分布.

证明:

因为X只在$(0,1)$内取值，则$F(x)=0,x\leqslant 0;F(x)=1,x\geqslant 1$.

又$F(b)-F(a)$只与$b-a$有关，故$F(ka)-F((k-1)a)=F((k-1)a)-F((k-2)a)=\ldots=F(2a)-F(a)=F(a)-F(0)=F(a)$，得$F(ka)=kF(a),k\in\mathbb{N}^*$，同理，有$F(a)=\frac{1}{k}F(ka)$，则有$F(\frac{q}{p}a)=\frac{q}{p}F(a)$，其中$p,q\in\mathbb{Z}$，即$F(ka)=kF(a),\forall k\in\mathbb{Q}$，取$k=x,a=1$有$F(x)=xF(1)=x,x\in\mathbb{Q}$.

因为$F(x)$单调不减，对任意$x_0\in(0,1)$取有理数列$\{r_n\},\{s_n\}$使得$r_n<x_0<s_n$，且$\lim_{n\to\infty}r_n=x_0=\lim_{n\to\infty}s_n$，则$r_n=F(r_n)\leqslant F(x_0)\leqslant F(s_n)=s_n$，令$n\to\infty$，夹逼定理得$F(x_0)=x_0$，则得到$F(x)=x,\forall x\in(0,1)$.因此，$X$服从$(0,1)$上的均匀分布.

5.(习题29)设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X服从参数为$\lambda=\frac{1}{5}$的指数分布(单位: min). 假设某顾客一旦等待时间超过$10min$他就立即离开，且一个月内要到该银行5次，试求他在一个月内至少有一次未接受服务而离开的概率.

解：由题，$X\sim Exp(\lambda)$，$P\{$某次未接受服务离开$\}=P(X\geqslant 10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\mathrm{d}t=e^{-2}$，则$P\{$一个月至少一次未接受服务离开$\}=1-P\{$五次均接受服务$\}=1-(1-e^{-2})^5$.