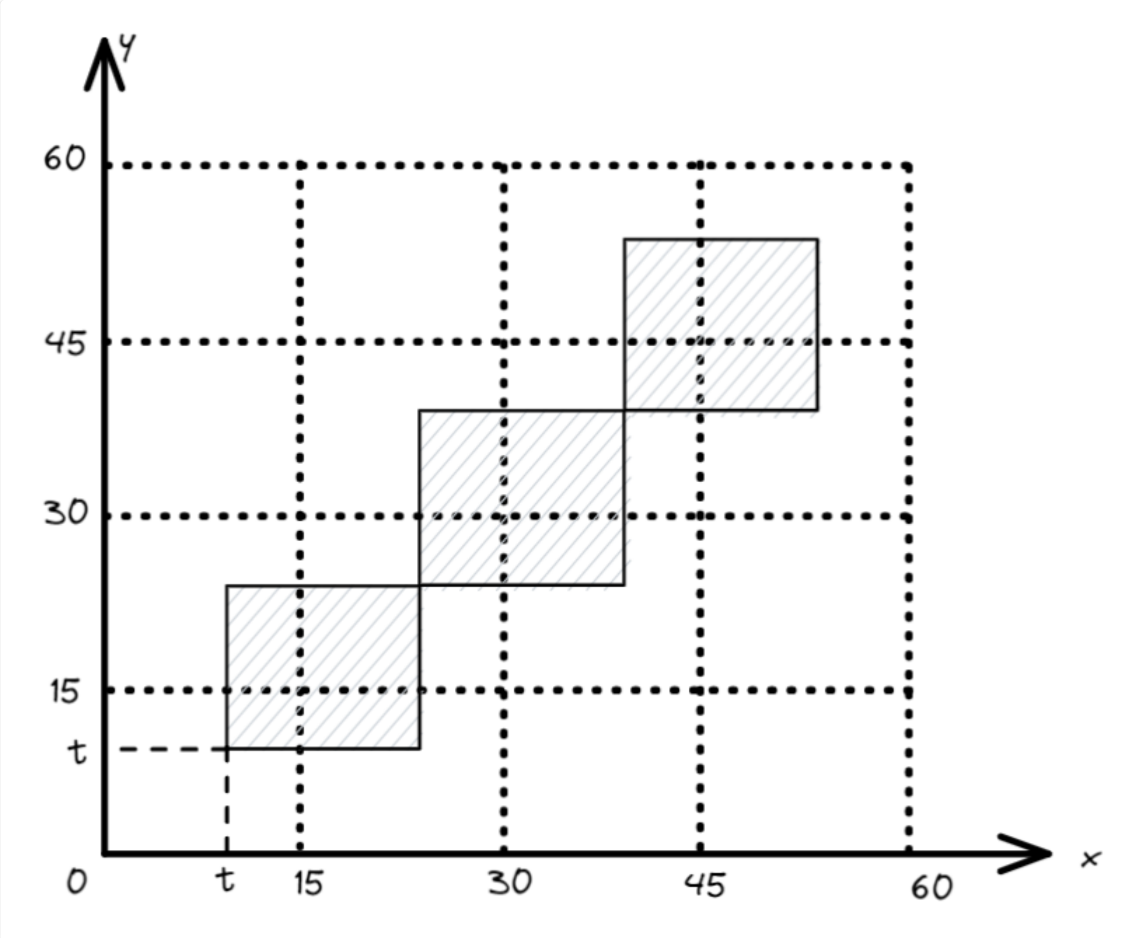
1.(习题17)甲、乙两人约定在下午3:00和4:00之间到某公交始发站乘公交车, 该公交始发站每隔15min发出一辆公交车. 假定甲、乙两人在这期间到达为等可能. 现约定见车就乘, 求甲、乙同乘一辆车的概率.

解：



如图，两人上同一辆公交车概率为$P=\frac{3\times15\times15}{60\times60}=\frac{3}{16}$.

2.一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为P, 若第一次及格则第二次及格的概率也为P; 若第一次不及格则第二次及格的概率为$\frac{P}{2}$.

(1)若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率;

(2)若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解：设事件$A=\{$第一次及格$\}$，事件$B=\{$第二次及格$\}$，

(1) 由题，取得资格概率为$P(A\cup B)=P(A)+P(B|\overline{A})P(A)=P+\frac{P}{2}(1-P)=-\frac{1}{2}P^2+\frac{3}{2}P$;

(2) 所求概率为$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})}=\frac{P^2}{P^2+\frac{P}{2}(1-P)}=\frac{2P}{P+1}$.

3.(习题9, 博雷尔-坎泰利(Borel-Cantelli)引理)

设$\{A_n,n\geqslant1\}$为事件列, 事件$B_n=\cup_{k=n}^{\infty}A_k$表示事件$A_k,A_{k+1},...$中至少有一个发生, 而事件$C=\cap_{n=1}^{\infty}B_n$表示事件$B_1,B_2,...$同时发生, 所以事件$C$表示事件列$A_n,n\geqslant1$中有无穷个事件发生, 我们把事件$C$记为$\{A_n,i.o.\}$($i.o.$是无限频繁(infinitely often)的缩写). 试证明如下的博雷尔-坎泰利引理: 对于事件列$A_n,n\geqslant1$,
(1)如果$\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)<\infty$, 那么$P(A_n,i.o.)=0$;

(2)如果$\{A_k,n\geqslant1\}$相互独立, $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\infty$, 那么$P(A_n,i.o.)=1$.

证明：(1) 由题，设$\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=p<\infty$，则根据$Cauchy$收敛准则，有$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=0$.

又因为当$i < j$时有$B_i \supset B_j$，则$P(A_n, i.o.) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P(\cup_{k=n}^{\infty} A_k)$，又有$0 \leqslant P(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$，根据夹逼定理，$P(A_n, i.o.) = 0$;

(2) 由极限的性质，对任意有限的n，$\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \infty$，考虑$1 - P(A_n, i.o.) = P((\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k)^C) = P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^C)$，因为$\cap_{k=1}^{\infty} A_k^C \subset \cap_{k=2}^{\infty} A_k^C \subset \ldots \subset \cap_{k=n}^{\infty} A_k^C$，则有$P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^C) = \lim_{n\to\infty} P(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^C)$，又$1 - x \leqslant e^{-x}, 0 < x < 1$，则

$$P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C) = \prod_{k=n}^{\infty} P(A_k^C) = \prod_{k=n}^{\infty}(1 - P(A_k)) \leqslant \prod_{k=n}^{\infty} e^{-P(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\right),$$

由夹逼定理，上式$\to 0$，故$1 - P(A_n, i.o.) = 0$，因此$P(A_n, i.o.) = 1$.

4.(习题27)设男性色盲的概率为0.05, 女性色盲的概率为0.0025, 现发现从人群中任选的一人为色盲患者, 求此人为男性的概率.

解：设事件$A = \{$任选一人是男性$\}$，事件$B = \{$任选一人是色盲患者$\}$，则所求概率为
$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0.05\times0.5}{0.05\times0.5 + 0.0025\times0.5} = \frac{20}{21}$.

5.(习题26)某工厂的一、二、三号车间生产同一种产品, 产量各占总产量的$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 次品率分别为$1\%$,$1\%$和$2\%$. 现从该厂产品中随机抽取一件产品.

(1) 求该产品是次品的概率;

(2) 若发现该产品是次品，求它是一号车间生产的概率.

解：设事件$A_i = \{$产品产自i号车间$\}$，事件$B = \{$产品是次品$\}$，

(1) 所求概率为$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) = 1\% \times \frac{1}{2} + 1\% \times \frac{1}{3} + 2\% \times \frac{1}{6} = \frac{7}{600}$;

(2) 所求概率为$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{1\%\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{600}} = \frac{3}{7}$.

6.计算黑人被告和白人被告分别被判死刑的概率, 比较大小关系; 再计算固定受害者种族时白人被告和黑人被告被判死刑的比例, 比较大小关系. 两次计算结果大小关系是否一致, 请做出合理的解释.

受害者种族	被告种族	死刑 是	死刑 否
白人	白人	53	414
	黑人	11	37
黑人	白人	0	16
	黑人	4	139
合计	白人	53	430
	黑人	15	176

解：设事件$A = \{$被告被判死刑$\}$，事件$B_1 = \{$被告是白人$\}$，事件$B_2 = \{$被告是黑人$\}$，事件$C_1 = \{$受害者是白人$\}$，事件$C_2 = \{$受害者是黑人$\}$，

则由题，$P(A|B_1) = \frac{P(AB_1)}{P(B_1)} = \frac{53}{483}$，$P(A|B_2) = \frac{P(AB_2)}{P(B_2)} = \frac{15}{191}$，$P(A|B_1) > P(A|B_2)$，黑人被告被判死刑概率低于白人被告；

$P(A|B_1C_1)=\frac{P(AB_1C_1)}{P(B_1C_1)}=\frac{53}{467}$，$P(A|B_2C_1)=\frac{P(AB_2C_1)}{P(B_2C_1)}=\frac{11}{48}$，$P(A|B_1C_1)<P(A|B_2C_1)$，受害者为白人时，黑人被告被判死刑概率高于白人被告；

$P(A|B_1C_2)=\frac{P(AB_1C_2)}{P(B_1C_2)}=\frac{0}{16}$，$P(A|B_2C_2)=\frac{P(AB_2C_2)}{P(B_2C_2)}=\frac{4}{143}$，$P(A|B_1C_2)<P(A|B_2C_2)$，受害者为黑人时，黑人被告被判死刑概率高于白人被告。

计算结果不一致，可能的解释是样本量不足，受害者为黑人被告为白人的案件数量过少，且被判死刑概率为0，而受害者为黑人被告为黑人被判死刑概率也很低，但案件数量较多，导致虽然固定被害者时黑人被告被判死刑概率相比更高但总的情况下黑人被告被判死刑概率相比更低。