概率论与数理统计

第六章

韩潇

xhan011@ustc.edu.cn

第六章：　参数点估计

大纲：

- ➢参数点估计的概念
- ➢矩估计法
- ➢最大似然估计
- ➢优良性准则
- ➢点估计的大样本理论

6.1 参数点估计的基本概念

- 统计推断经常需要对研究总体的某个(些)参数做出一些特定的结论, 例如，我们对某种电池的平均寿命感兴趣，随机抽查三个电池测量寿命，则样本均值可以被认为是一个合理的估计。
- 一般地, 设有一个统计总体，记为 $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, 统一约定其为总体分布，它包含了k个未知参数
  - 连续型：概率密度函数
  - 离散型：概率质量函数

6.1 参数点估计的基本概念

- 参数估计问题的一般提法是，在有了从总体中抽取的样本 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$后，要用样本 $\mathbf{X}$ 对参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$的值(或部分值)进行估计，当然我们也可以估计它们的函数$\mathrm{g}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$，其中g已知
- 例如，为估计参数θ_1，我们需要构造适当的统计量$\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$. 当我们有了样本$\mathbf{X}$的实现$\mathbf{x}$之后，即可得到一个值$\hat{\theta}_1(\boldsymbol{x})$作为估计值
- $\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$称为$\theta_1$的估计量，$\hat{\theta}_1(\boldsymbol{x})$称为$\theta_1$的估计值

例 6.1 对某种环氧树脂片的击穿电压 (单位:kV/mm) 进行 20 次观察得到

24.46	25.61	26.25	26.42	26.66	27.15	27.31	27.54	27.74	27.94
27.98	28.04	28.28	28.49	28.50	28.87	29.11	29.13	29.50	30.88

有证据表明击穿电压值的分布服从均值为 μ 的正态分布. 讨论 μ 的估计问题.

由于正态分布是对称的，μ也是该分布的中位数. 直观上它的估计量可以为

- 样本均值作$\bar{X}$为估计量
- 样本中位数m_{n}作为估计量
- 样本范围的中心$(X_{(1)}+X_{(n)})/2$作为估计量

6.1 参数点估计的基本概念

- 点估计常用的构造方法有矩估计（Moment Estimation）和最大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, 简写 MLE)
- 两种方法总的来讲是基于某种直观上的考虑，因而估计方法并不唯一
- 需要制定标准，比较哪个估计量更好

6.2 矩估计法

- 连续型总体分布的j阶原点矩和中心矩分别为

$$\alpha_j = \mathbb{E}(X)^j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)dx$$

$$\mu_j = \mathbb{E}(X-\alpha_1)^j = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^j f(x;\theta_1,\ldots,\theta_k)dx.$$

- 离散型总体分布的j阶原点矩和中心矩分别为

$$\alpha_j = \sum_{i\geq 1} x_i^j f(x_i;\theta_1,\ldots,\theta_k),$$

$$\mu_j = \sum_{i\geq 1} (x_i-\alpha_1)^j f(x_i;\theta_1,\ldots,\theta_k).$$

6.2 矩估计法

- 由大数定律，样本矩依概率收敛到总体矩，所以我们可以用样本矩来近似总体矩

$$\alpha_j = \alpha_j(\theta_1, \ldots, \theta_k) \approx a_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j,$$

$$\mu_j = \mu_j(\theta_1, \ldots, \theta_k) \approx m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^j$$

- 取j=1, …, k, 把上面的近似式改为等式，选择适当的k个样本原点矩或样本中心矩, 可以得到由k个方程组成的方程组, 解这个方程组，所得解记为 $\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, i=1, …, k, 则我们可以把 $\hat{\theta}_i$ 作为 θ_i 的估计。

- 方程可以是原点矩，也可以是中心矩，或者两者的混合

6.2 矩估计法

由于估计量是统计量，有二重性，所以在理论研究中我们把估计量写成随机变量的形式，常用英文大写字母表示，以便研究估计量的概率性质．在实际计算中，估计量是一个数，我们用英文小写来表示．例如$\bar{x}$

例 6.2 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的一个样本, 用矩估计法估计 μ, σ^2.

例 6.3 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从指数总体 $X \sim Exp(\lambda)$ 中抽取的一个样本, 求矩估计量 $\hat{\lambda}_M$.

6.2 矩估计法

例 6.4 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从均匀分布总体 $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$ 中抽取的一个样本, 求 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$.

例 6.5 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从总体 $X \sim F$ 中抽取的一个样本, 求偏度系数 $\beta_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$, 峰度系数 $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ 的矩估计.

6.2 矩估计法

例 6.6 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的一个样本, 求概率 $\mathbb{P}(X > 3)$ 的矩估计.

◆可以证明低阶矩优于高阶矩. 所以在矩估计中, 能用低阶矩的就尽量用低阶矩来估计参数.


Thank you!