概率论与数理统计

第八章

韩潇
xhan011@ustc.edu.cn

第八章： 假设检验

大纲：

- 基本概念
- 正态总体参数检验
- 比例p的检验
- 似然比检验
- P值

8.2正态总体参数检验

关于单个正态总体均值μ的假设检验问题, 也称为一样本均值检验问题, 在应用中常见的假设形式有如下几种

$$(1)\quad H_0:\mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu < \mu_0, \longrightarrow \text{左侧检验}$$

$$(2)\quad H_0':\mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1':\mu > \mu_0, \longrightarrow \text{右侧检验}$$

$$(3)\quad H_0'':\mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1'':\mu \neq \mu_0, \longrightarrow \text{双侧检验}$$

设$(X_1,\dots,X_n)$是从该正态分布总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的一个简单样本, 对均值μ的假设检验问题(1)-(3), 我们分别讨论σ^2已知或未知两种情况下的检验方法

8.2 σ^2已知的情形

以(1)为例：μ的优良点估计为$\bar{X}$, 若检验问题(1)中备择假设成立，则$\bar{X}$应该比μ_0小，因此$\bar{X}$越小，直观上与备择假设越吻合，即越倾向于拒绝原假设

考虑$\bar{X}$的分布，直观上一个合理的检验为

Ψ：当 $Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma} < C$ 时拒绝原假设 H_0, 否则不能拒绝 H_0

考虑功效函数，依照定义我们有

$$\begin{aligned} \beta_\Psi(\mu) &= \mathbb{P}_\mu(Z < C) \\ &= \mathbb{P}_\mu\left(\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma < C + \sqrt{n}(\mu_0-\mu)/\sigma\right) \end{aligned}$$

σ^2已知，$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$, 所以

$$\beta_\Psi(\mu) = \Phi(C + \sqrt{n}(\mu_0-\mu)/\sigma)$$

8.2 σ^2已知的情形

由于 $C+\sqrt{n}(\mu_0-\mu)/\sigma$ 是 μ 的严格减函数, 故 $\beta_\Psi(\mu)$ 也是 μ 的严格减函数, 因此要对一切 $\mu \geq \mu_0$ 都有 $\beta_\Psi(\mu) \leq \alpha$, 只要 $\beta_\Psi(\mu_0)=\alpha$ 即可. 由标准正态上 α 分位点的定义, 应取 C 满足

$$C = u_{1-\alpha} = -u_\alpha, \tag{8.12}$$

把 (8.12) 代入 (8.11) 得到 Ψ 的功效函数为

$$\beta_\Psi(\mu) = \Phi(\sqrt{n}(\mu_0-\mu)/\sigma - u_\alpha), \tag{8.13}$$

8.2 σ^2已知的情形

- 若我们同时要求犯第二类错误的概率要小于指定的数, 等价于要求

$$\beta_\Psi(\mu) \geq 1-\beta, \quad \forall \mu < \mu_0$$

- 当$\mu \in H_1$但接近于μ_0时，则样本量不大时上述要求无法达到. 所以我们放松要求:μ距离原假设远一些，即对于某个指定的$\mu_1 < \mu_0$,有

$$\beta_\Psi(\mu) \geq 1-\beta, \quad \forall \mu \leq \mu_1$$

- 由于 $\beta_\Psi(\mu)$ 是 μ 的减函数, 故上式等价于

$$\beta_\Psi(\mu_1) \geq 1-\beta, \quad \forall \mu \leq \mu_1$$

- 由(8.13)式，我们有

$$\Phi\left(\sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)/\sigma - u_\alpha\right) \geq 1-\beta$$

- 由此，解得样本量需要满足 $n \geq \sigma^2(u_\alpha+u_\beta)^2/(\mu_0-\mu_1)^2$

8.2 σ^2已知的情形

对检验问题 (2), 仿照上述方法, 可以得到基于 Z 的检验是:

$$\Psi': \text{当 } Z > u_\alpha \text{ 时拒绝 } H_0', \text{否则不能拒绝 } H_0'$$

对检验问题 (3),$H_0'' : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1'' : \mu \neq \mu_0$, 直观上一个合理的检验为

$$\Psi'': \text{当 } |Z| > C \text{ 时拒绝 } H_0'', \text{否则不能拒绝 } H_0''.$$

由正态分布的对称性，可以得到$C = \mathrm{u}_{\alpha/2}$，事实上

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \mathbb{P}_{\mu_0}(|Z| \le C) \\ &= \Phi(C) - \Phi(-C) = 2\Phi(C) - 1 \\ &\Rightarrow \Phi(C) = 1 - \alpha/2 \\ &\Rightarrow C = u_{\alpha/2}. \end{aligned}$$

8.2 σ^2 已知的情形

例 8.4 随机地从一批铁钉中抽取 16 枚, 测得它们的长度 (单位: 厘米) 如下:

3.17 3.02 3.24 3.03 3.16 3.16 3.06 2.95 3.06 3.09 2.91 3.09 2.93 2.89 3.04 3.06

已知铁钉长度服从标准差为 0.1 的正态分布, 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下, 能否认为这批铁钉的平均长度为 3 厘米? 如显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 呢?

8.2 σ^2未知的情形

- 在σ^2未知的情况下，$\bar{X}$依然为μ的相合估计, 直观上可以用于确定三类问题的拒绝域方向，但此时我们不能使用统计量Z
- 注意到样本方差S^2是σ^2的良好估计，因此在统计量Z中用S^2代替σ^2，得到统计量 $T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}$
- 拒绝域的方向不变，注意到在正态总体下$S^2\sim\chi^2_{n-1}$，当$\mu=\mu_0$时，$T\sim t_{n-1}$

对检验问题 (1), 检验 Ψ 为:

$$\Psi: 当T<-t_{n-1}(\alpha)时拒绝H_0, 否则不能拒绝H_0,$$

其功效函数

$$\beta_\Psi(\mu,\sigma)=\mathbb{P}_{\mu,\sigma}(T<-t_{n-1}(\alpha))=\mathbb{P}_{\mu,\sigma}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}<\frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu)}{S}-t_{n-1}(\alpha)\right)$$

8.2 σ^2未知的情形

$\beta_\Psi(\mu,\sigma)$是 $\delta=(\mu-\mu_0)/S$ 的单调减函数, 且当 $\delta=0$ 时其值为 α, 从而当 $\mu\geq\mu_0$, 即 $\mu\in H_0$ 时, 犯第一类错误的概率 $\beta_\Psi(\mu,\sigma)\leq\beta_\Psi(\mu_0,\sigma)=\alpha$, 这说明检验 Ψ 有水平 α.

类似地, 对检验问题 (2), 检验 Ψ' 为:

$$\Psi':\text{当}T>t_{n-1}(\alpha)\text{时拒绝}H_0',\text{否则不能拒绝}H_0',$$

对检验问题 (3), 检验 Ψ'' 为:

$$\Psi'':\text{当}|T|>t_{n-1}(\alpha/2)\text{时拒绝}H_0'',\text{否则不能拒绝}H_0''$$

这三类检验称为一样本t检验， 是应用中最重要和最常见的检验

例 8.5 (例8.4续) 设方差未知, 则在水平 0.01 和 0.05 下能否认为铁钉平均长度为 3 厘米?

◆ 当样本量充分大时, 由大数定律和中心极限定理， 上述方差未知的检验可以把$t_{n-1}(\alpha)$, $t_{n-1}(\alpha/2)$分别用u_α, $u_{\alpha/2}$代替, 总体分布不必是正态.

8.2如何设立原假设和备择假设

- 显著性检验：控制第一类错误的概率，由于第一类错误的概率一般控制在较小值，因此原假设成立时拒绝原假设是一个小概率事件.
  -原假设和备择假设是不平等的

- 反过来说，一旦原假设被拒绝，说明我们有充分的证据说明原假设不成立

- 设立原假设和备择假设的两条原则
  - 把已有的经过考验的结论或事实作为原假设H_0
  - 把你希望得到的结论放在备择假设H_1，希望能通过拒绝原假设得到你的结论

- 第一条:保护原假设，所以接受原假设不一定是原假设一定成立,只不过是“没有充分的证据说明原假设不对”,这也是我们使用“拒绝原假设或不能拒绝原假设”作为检验结论的原因.
- 第二条:在充分保护原假设的情况下还是拒绝了原假设,那么我们就有充分的理由说明原假设不成立,即有充分的理由说明备择假设成立.

8.2 σ^2未知的情形

例 8.6 某超市食品经理从以往营业中认为顾客每次购买熟食的平均费用为 26.5 元. 设消费额服从正态分布, 随机抽查了 25 人, 得知顾客每次购买熟食的平均消费为 24.2 元, 样本标准差为 6.3 元,

(1) 分别在 $\alpha = 0.1$ 和 $\alpha = 0.05$ 显著性水平下, 问该超市食品经理的结论是否正确?

(2) 如果随机抽查人数为 60 人, 在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下, 问该超市食品经理的结论是否正确?

8.2 σ^2未知的情形

例 8.7 产品说明书称普通 6 号尼龙钓鱼绳平均折断强度不小于 12kg. 现在随机抽查了 16 根, 测到平均折断强度为 11.8kg, 标准差为 0.4kg. 分别在 $\alpha = 0.10$ 和 $\alpha = 0.05$ 水平下检验产品是否与说明书相同. (设尼龙钓鱼绳折断强度服从正态分布)

例 8.8 设某地区 12 个测量点测得某时刻空气质量指数 AQI($\mu g/m^3$) 为

$$29,\ 37,\ 47,\ 57,\ 53,\ 60,\ 54,\ 51,\ 46,\ 44,\ 33,\ 32,$$

设 AQI 服从正态分布, 在显著性水平 $\alpha = 0.1$ 和 $\alpha = 0.05$ 下检验该地区空气是否为优? (AQI 不超过 50 为优)

8.2两个正态总体均值差的检验

成组比较: 设$(X_1, \dots, X_m)$是从正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$中抽取的一个简单样本, $(Y_1, \dots, Y_n)$是从正态总体$N(\mu_2, \sigma^2)$中抽取的一个简单样本，且两组样本相互独立, 其中总体均值μ_1, μ_2未知，两个独立总体有相同的方差σ^2可以已知，也可以未知.

考虑如下检验问题：设δ是给定的常数, 考虑

$$(1) \quad H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta \leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta,$$

$$(2) \quad H_0': \mu_1 - \mu_2 \leq \delta \leftrightarrow H_1': \mu_1 - \mu_2 > \delta,$$

$$(3) \quad H_0'': \mu_1 - \mu_2 = \delta \leftrightarrow H_1'': \mu_1 - \mu_2 \neq \delta,$$

在应用中常见的情况是σ^2未知, δ=0.

8.2两个正态总体均值差的检验

- 所有概念和方法上的讨论与一个正态总体均值的检验没有本质差异.
- 由点估计和区间估计的理论和方法, $\bar{X}-\bar{Y}$是$\mu_1-\mu_2$的优良点估计, 由于两个总体方差相等, σ^2已知且$\mu_1-\mu_2=\delta$时，易得$\bar{X}-\bar{Y}-\delta\sim N(0,(\frac{1}{\mathrm{m}}+\frac{1}{n})\sigma^2)$检验统计量为

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\mathrm{m}}+\frac{1}{n}}}$$

8.2两个正态总体均值差的检验

检验问题(1), (2), (3)的水平α的检验分别为

$$g:当Z<-u_\alpha,拒绝H_0,否则不能拒绝H_0,$$

$$g':当Z>u_\alpha,拒绝H_0,否则不能拒绝H_0,$$

$$g'':当|Z|>u_{\alpha/2},拒绝H_0,否则不能拒绝H_0.$$

σ^2未知时，需要估计它，在区间估计中已得到的优良点估计为

$$S_T=\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$$

其中S_1^2,S_2^2分别为X,Y的样本方差。类似地, 可以得到统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\delta}{S_T\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

8.2两个正态总体均值差的检验

两样本t检验：在$\mu_1 - \mu_2 = \delta$时$T \sim t_{m+n-2}$，由此得到(1)-(3)的检验为

$$h: 当T < -t_{m+n-2}(\alpha), 拒绝H_0, 否则不能拒绝H_0,$$

$$h': 当T > t_{m+n-2}(\alpha), 拒绝H_0, 否则不能拒绝H_0,$$

$$h'': 当|T| > t_{m+n-2}(\alpha/2), 拒绝H_0, 否则不能拒绝H_0.$$

如果样本量 m, n 充分大，则不必要求方差相等，由大数定律和中心极限定理知，统计量在 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 时

$$Z = \left(\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}\right)^{-1/2}(\overline{X} - \overline{Y} - \delta) \text{ 近似} \sim N(0, 1),$$

8.2两个正态总体均值差的检验

例 8.9 某企业巡查两条生产线 A 和 B 的生产情况, 假设两条生产线相互独立, 两条生产线下每包产品重量均服从正态分布且方差相同. 现在分别从生产线 A 和 B 随机抽取 17 包和 10 包来检查每包的重量 (克). 数据如下:

$$A: \quad m = 17, \quad \overline{x} = 498, \quad s_1 = 20$$
$$B: \quad n = 10, \quad \overline{y} = 507, \quad s_2 = 16$$

取 $\alpha = 0.05$, 问两条生产线下每包的平均重量有无差异?

8.2两个正态总体均值差的检验

例 8.10 设甲乙两煤矿的煤含灰率服从正态分布, 为检验这两矿煤含灰率有无差异, 从甲矿抽取 40 个样本, 得 $\bar{x} = 24.3\%, s_1 = 2\%$, 从乙矿抽取 50 个样本, 得 $\bar{y} = 26\%, s_2 = 3.5\%$. 问甲矿煤的含灰率是否比乙矿低? 如果是低, 能否说甲矿煤的含灰率是否比乙矿低一个百分点? 注：单位为%

例 8.11 设学生 A, B 的各门成绩服从正态分布, 学生 A, B 的成绩有相同的方差. 现观测到本学期学生 A, B 的几门专业基础课成绩如下：

$$A: \quad 86, \quad 92 \quad 85 \quad 78 \quad 88$$

$$B: \quad 94, \quad 80 \quad 85 \quad 76$$

能否根据这些数据来判断哪个学生的成绩更好一点?

注:此题假设检验的提法需要考虑问题的背景

8.2两个正态总体均值差的检验

成对比较:有一类试验中数据是成对出现的，称为成对比较

设$\{(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)\}$满足：1. 数据对之间通常可以认为是独立的
2. 数据对内部的两个观测值通常不独立

当感兴趣的是数据集A和数据集B的均值有无差异的检验问题时，
通常是先对数据对内部的样本取差，构造一个虚拟$Z=Y-X$及样本$Z_1=Y_1-X_1,\ldots,Z_n=Y_n-X_n$考虑如下假设检验问题：

(1). $H_0:\mu_z=C \leftrightarrow H_1:\mu_z\neq C,$

(2). $H_0':\mu_z\geq C \leftrightarrow H_1':\mu_z< C,$

(3). $H_0'':\mu_z\leq C \leftrightarrow H_1'':\mu_z> C.$

8.2两个正态总体均值差的检验

- 其中u_z为虚构总体Z的均值，常数C=0是最常见的

- 如果数据是连续数据时候，可以假设Z服从正态分布，则相应的假设检验转为一样本正态检验问题

- 在大样本场合，由中心极限定理构造标准正态检验统计量也能得到上面三种检验问题的渐近水平α 检验的拒绝域.

- 这类问题的检验统称为成对t检验.

8.2两个正态总体均值差的检验

例 8.13 为了比较 A, B 两种玉米品种哪个更适合在某地区种植, 可以选择 n 块地, 再将每一块地分为两部分, 然后随机选择一块种植玉米 A, 另一块种植玉米 B, 这两部分土地在土质、阳光、水、肥力等诸方面的外部条件都完全相同 (至少基本相同), 待收获后, 折算为 $kg/$亩. 然后计算两个品种 A 与 B 的亩产量之差, 得到样本 $Z_1, \ldots, Z_n$. 由于每对数据外部条件基本相同, 所以它们的差反映了两个品种之间的差异. 可以用这个样本对两种玉米品种的亩平均产量的差异进行检验, 其本质已经是一样本均值的检验问题了.

8.2.3 正态总体方差的检验

一个正态总体方差的检验:设$(X_1, \ldots, X_n)$是从正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$中抽取的一个简单样本,σ_0^2为给定的常数,考虑如下检验问题:

$$(1).\quad H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$(2).\quad H_0' : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$(3).\quad H_0'' : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1'' : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

先考虑(1),样本方差S^2为σ^2的优良点估计,如果原假设成立,则比值S^2/σ_0^2不能比1小太多,一个直观上合理的检验为

$\phi : \chi^2 = (n-1)S^2/\sigma_0^2 < C$ 时拒绝H_0,否则不能拒绝H_0.

观察到$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$,可得$C = \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$

8.2.3 正态总体方差的检验

➢ (2)和(3)可以使用同一个统计量，它们的检验分别为

$$\phi': \quad \chi^2 > \chi^2_{n-1}(\alpha) \quad \text{时拒绝}H_0', \text{否则不能拒绝}H_0',$$

$$\phi'': \quad \chi^2 < \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \text{ 或 } \chi^2 > \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$$

$$\text{时拒绝}H_0'', \text{否则不能拒绝}H_0''.$$

例 8.15 (例8.4续) 在水平 0.1 下能否认为铁钉的标准差大于 0.1 厘米?

8.2.3 正态总体方差的检验

两个正态总体方差比的检验：设$(X_1, \dots, X_m)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$分别是从正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$中抽取的简单样本，且两组样本相互独立。考虑如下检验问题

$$(1).\quad H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \geq b \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 < b$$

$$(2).\quad H_0' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq b \leftrightarrow H_1' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > b$$

$$(3).\quad H_0'' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = b \leftrightarrow H_1'' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq b$$

S_1^2, S_2^2分别为$(X_1, \dots, X_m)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$的样本方差，类似地，我们提出由方差比转化而来的检验统计量

$$F = S_1^2/(\mathrm{b}S_2^2)$$

8.2.3 正态总体方差的检验

- 容易得到相应检验为

φ : $F < F_{m-1,n-1}(1-\alpha)$ 时拒绝H_0', 否则不能拒绝H_0',

φ' : $F > F_{m-1,n-1}(\alpha)$ 时拒绝H_0', 否则不能拒绝H_0',

φ'' : $F < F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)$ 或者 $F > F_{m-1,n-1}(\alpha/2)$ 时拒绝H_0'', 否则不能拒绝H_0''.

- 这三个检验统称为***F*检验**.

例 8.16 (例8.9续) 试在水平 0.05 下检验两条生产线的每包产品质量的方差是否相同.

8.3 比例p的检验

- 设$(X_1, \dots, X_n)$是0-1分布总体$B(1,p)$的一个样本，关于p的常见假设有:

$$(1).\quad H_0: p \le p_0 \leftrightarrow H_1: p > p_0$$

$$(2).\quad H_0': p \ge p_0 \leftrightarrow H_1': p < p_0$$

$$(3).\quad H_0'': p = p_0 \leftrightarrow H_1'': p \ne p_0$$

其中$p_0 \in (0,1)$为已知常数.

- 先考虑(1). 由于(1)的良好估计为$\bar{X}$,因此直观上，我们的检验是

$$\psi: \text{当}\overline{X} > C\text{时拒绝}H_0,\text{否则不能拒绝}H_0.$$

8.3 比例p的检验

➢注意到$X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$，因此上述检验可以等价表示为

ψ: 当$X > C$时拒绝H_0, 否则不能拒绝H_0

由于X只取整数，所以C限制为整数，对给定的α，检验的功效函数为

$$
\begin{aligned}
\beta_\psi(p) &= \mathbb{P}(X > C) = 1 - \mathbb{P}(X \le C) \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{C} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1 - F_p(C)
\end{aligned}
$$

上式关于p是严格单调增函数，只需取C使得

$$
\beta_\psi(p_0) = 1 - \sum_{i=0}^{C} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} = 1 - F_{p_0}(C) = \alpha
$$

C是整数，不一定能正好取到

8.3 比例p的检验

➢寻找C_0使得

$$F_{p_0}(C_0)=\sum_{i=0}^{C_0}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}<1-\alpha<\sum_{i=0}^{C_0+1}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}=F_{p_0}(C_0+1)$$

由此，得到两种检验

$$\psi_1: \text{当}X>C_0\text{时, 拒绝}H_0\text{; 否则不能拒绝}H_0.$$

以及

$$\psi_2: \text{当}X>C_0+1\text{时, 拒绝}H_0\text{; 否则不能拒绝}H_0.$$

检验ψ_1和ψ_2检验水平均不为α, 如果我们要求检验水平等于α, 需要采用随机化检验

8.3 比例p的检验

$\psi_3:$ 当$X \le C_0$时, 不拒绝H_0;

当$X > C_0 + 1$时, 拒绝H_0;

当$X = C_0 + 1$时, 从 $[0,1]$ 中任取一个随机数 U, 如果

$$U > \frac{1-\alpha-F_{p_0}(C_0)}{F_{p_0}(C_0+1)-F_{p_0}(C_0)}$$

则拒绝原假设 H_0, 否则不能拒绝 H_0.

随机化检验在实践中不够自然,实际上不太采用。

➢对于假设(2),可以得到类似的检验为

ψ': 当X $< C$时拒绝H_0', 否则不能拒绝H_0'

8.3 比例p的检验

➢其中C由下式确定

$$F_{p_0}(C-1)=\sum_{i=0}^{C-1}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}=\alpha$$

➢对假设(3),可以得到类似的检验为

ψ'': 当$C_1<\mathrm{X}<C_2$时不拒绝H_0'', 否则拒绝H_0''

其中C_1, C_2由下式确定

$$\sum_{i=0}^{C_1-1}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}+\sum_{i=C_2+1}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}=\alpha$$

8.3 比例p的检验

为了确定C_1, C_2,常令

$$F_{p_0}(C_1-1)=\sum_{i=0}^{C_1-1}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}=\alpha/2,$$

$$1-F_{p_0}(C_2)=\sum_{i=C_2+1}^{n}\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}=\alpha/2,$$

与(1)类似，确定常数C, C_1, C_2时,常常找不到恰好满足要求的整数.此时要么允许犯第一类错误的概率超过或者低于指定的水平,要么采用随机化检验方法.

8.3 比例p的检验

例 8.17 一工厂向零售商供货, 零售商要求废品率不超过 $p = 0.05$. 经双方同意, 制定抽样方案: 每批 (假定批量很大) 随机抽 $n = 24$ 件, 检查其中废品个数 X, 当 $X \leqslant C$ 时, 商店不拒收该批产品, 否则就拒收. 试确定 C. 约定检验检验水平为 $\alpha = 0.05$.

8.3 比例p的检验

➢ 当样本量较大时,根据中心极限定理有

$$1-\alpha = F_{p_0}(C) = \mathbb{P}_{p_0}\Big(\frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \le \frac{C-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\Big)$$

$$\approx \Phi\Big(\frac{C-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\Big)$$

8.3 比例p的检验

➢因此$C \approx np_0 + u_\alpha\sqrt{np_0(1-p_0)}$,此时渐进水平为$\alpha$的检验为

$$\psi:当\frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} > u_\alpha时拒绝H_0,否则不能拒绝H_0$$

$$\psi':当\frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} < -u_\alpha时拒绝H_0',否则不能拒绝H_0'$$

$$\psi'':当\left|\frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right| > u_{\alpha/2}时拒绝H_0'',否则不能拒绝H_0''$$

8.3 比例p的检验

例 **8.19** 一查帐员声称某公司发票 10% 不正确, 为检验之, 随机抽取 100 张, 其中 15 张不正确, 设 $\alpha = 0.05$, 问查帐员结论是否正确?

Thank you!