- 条件概率的定义：

设事件 A 和 B 是随机试验 Ω 中的两个事件，$P(B)>0$ ，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率.

Definition

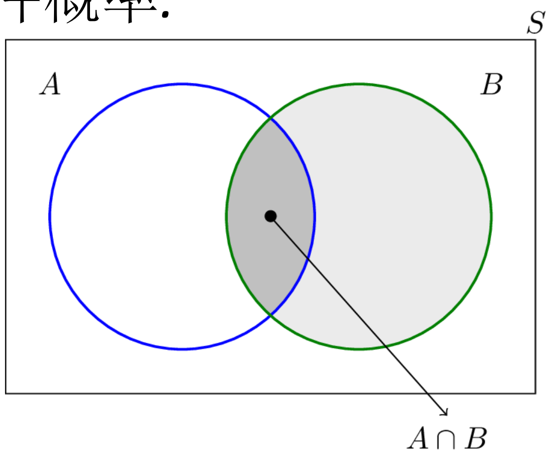
1) 将概率理解为图中给定部分的面积，则 *P* (*A*/*B*) 表示在 *B* 中, *A* 所占的比例。

2) 从概率的统计定义, 即用频率来近似概率这一角度来理解条件概率.

设在 *n* 次独立试验中, $|A|=n_A, |B|=n_B, |AB|=n_{AB}$

则事件 *B* 发生下事件 *A* 发生的频率为

$$\frac{n_{AB}}{n_B}\approx\frac{P(AB)}{P(B)}$$



例子

↑Example

有 10 个产品, 内有 3 个次品, 从中一个个地抽取 (不放回) 检验, 问第一次取到次品后第二次再取到次品的概率.

↓Example

例子

- (数学家、信息论的创建者之一韦弗 (Warren Weaver, 1894—1978) 于 1950 年发表在《科学美国人》杂志上的一个科普读品)

桌上有大小、颜色相同的三张卡片和一顶帽子. 第一张卡片两面都画一个圈, 第二张一面画一个圈、一面画一个点, 第三张两面都画一个点. 庄家把卡片放在帽子中摇晃后, 让玩家任取一张放在桌上. 设该卡片上面画的是圈, 然后庄家与玩家以对等的赌金赌卡片下面的图案与上面的图案是否相同 (相同就算庄家赢). 庄家说这个赌博是非常公平的, 因为玩家抽出的卡片上、下面图案不可能是“点点”, 因此, 图案要么是“圈圈”, 要么是“圈点”, 都有 1/2 的概率. 请问该赌博是否公平?

乘法定理

由 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(A|B)P(B)$

由归纳法容易推广为 n 个事件同时发生的概率有如下公式:

若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

上面公式的右边看似麻烦, 其实在实际中很容易算出. 在没有给出 n 个事件之间相互关系时, 这是计算 n 个事件同时发生的一个重要公式.

注意, 这里不依赖于脚标顺序, 只需要有 $n-1$ 个事件同时发生的概率非零, 然后以此 $n-1$ 个事件为条件, 乘法公式即成立.

例子

↑Example

某人忘了某饭店电话号码的最后一个数字，因而随意拨号，问他三次之内拨通电话的概率.

↓Example

例子

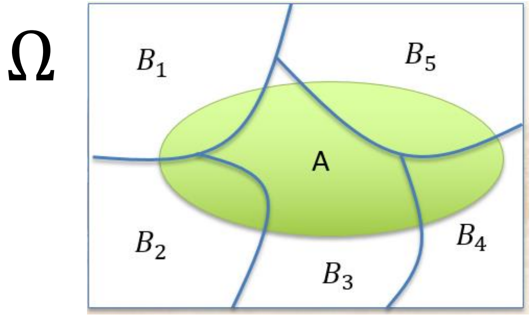
将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接, 试求恰好连成 n 个圈的概率.

↑Example
↓Example

- 完备事件群

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 Ω 中的一组概率大于 0 的事件，满足 $B_iB_j = \varnothing, i \neq j$，$\sum_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件群 (也称为 Ω 的一个划分 (partition)).

(分割, 两两不相容)



- 全概率公式(Law of total probability)

设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个完备事件群，A 为 Ω 中任一事件，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

例子

↑Example

设某厂产品的一个零部件是由三家上游厂商供货的. 已知有一半是 B_1 厂提供的, B_2 厂商和 B_3 分别提供 25% . 已知厂商 B_1 和 B_2 的次品率都是 2%, B_3 的次品率为 4%, 从该厂产品中任取一个产品, 问该产品的这个零部件是次品的概率.

↓Example

例子（敏感性问题的调查—随机化回答法）

如果我们提出这样一个问题:“你考试作弊过吗?”恐怕我们得不到正确的回答。对此，我们的另一种做法是列出如下两个问题 (其中一个是无关紧要的):

S: 你考试作弊过吗?

T: 你的电话号码末尾是偶数吗?

要求被提问者在无人旁观情况下投掷一个硬币，出现正面时正确回答 S，反面时正确回答 T。提问者并不知道被提问者回答的是哪个问题。在一次对 120 名学生的调查中，有 40 个回答“是”。试计算考试作弊的概率。

例子

↑Example

将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接, 求恰好连成 n 个圈的概率.

↓Example

Hint: 利用全概率公式，B ={第1根短绳连成1个圈}

用 B 和 B^c 作为对 Ω 的一个分划

(Polya 罐子模型) 罐中放有 a 个白球和 b 个黑球, 每次从罐中随机抽取一个球, 并连同 c 个同色球一起放回罐中, 如此反复进行. 试证明: 在第 n 次取球时取出白球的概率为 $\frac{a}{a+b}$.

↑Example

↓Example

例子

- 甲、乙二人轮流抛掷一枚均匀的骰子. 甲先掷, 一直到掷出了 1 点, 交给乙掷, 而到乙掷出了 1 点, 再交给甲掷, 并如此一直下去. 试求第 n 次抛掷时由甲掷的概率.

例子

- 设在n张彩票中有一张奖券，求第二个人摸得奖券的概率是多少？