1.(P176,43)设$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$为一随机变量序列，且

$$X_n \sim Ge\left(\frac{\lambda}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中$\lambda > 0$为常数. 定义随机变量Y_n为

$$Y_n = \frac{1}{n} X_n, n = 1, 2, 3, \dots.$$

证明$\{Y_n\}$依分布收敛于Y,其中$Y \sim Exp(\lambda)$.

证明：

由题，$P(X_n = k) = (1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1} \frac{\lambda}{n}, k = 1, 2, \dots$

$$F_n(y) = P(Y_n \leqslant y) = P(X_n \leqslant ny) = \sum_{i=1}^{ny} (1 - \frac{\lambda}{n})^{i-1} \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n} \frac{1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{ny}}{1 - (1 - \frac{\lambda}{n})} = 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^{ny},$$

当$n \to \infty$时，$F_n(y) \to 1 - e^{-\lambda y}$，因此有$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y, Y \sim Exp(\lambda)$.

2.(P176,44)设$\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$和$\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$为定义在同一样本空间上的两个随机变量序列, 如果$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X, Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} c$, 其中$c$为常数. 证明

(1)$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$;

(2)$X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$;

(3)$X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X / c$, 这里$c$非零.

证明：由$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$有$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$，由$Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} c$知$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| > \varepsilon) = 0$

(1)因为$F_{X+c}(x) = P(X + c \leqslant x) = P(X \leqslant x - c) = F_X(x - c)$则有

$$\begin{aligned}
F_{X_n+Y_n}(x) &= P(X_n + Y_n \leqslant x) \\
&= P(X_n \leqslant x - Y_n, Y_n < c - \varepsilon) + P(X_n \leqslant x - Y_n, Y_n \geqslant c - \varepsilon) \\
&\leqslant P(|Y_n - c| > \varepsilon) + F_{X_n}(x - c + \varepsilon) \\
F_{X_n}(x - c - \varepsilon) &= P(X_n \leqslant x - c - \varepsilon) \\
&= P(X_n \leqslant x - c - \varepsilon, Y_n \leqslant c + \varepsilon) + P(X_n \leqslant x - c - \varepsilon, Y_n > c + \varepsilon) \\
&\leqslant F_{X_n+Y_n}(x) + P(|Y_n - c| > \varepsilon)
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
n \to \infty, F_X(x - c - \varepsilon) = F_{X_n}(x - c - \varepsilon) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \leqslant F_{X_n}(x - c + \varepsilon) \\
= F_X(x - c + \varepsilon)
\end{aligned}$$

令$\varepsilon \to 0$得证.

(2)由(1)，当$A_n \xrightarrow{\mathcal{L}} A, B_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$有$A_n + B_n \xrightarrow{\mathcal{L}} A$，又$X_n Y_n = X_n(Y_n - c) + cX_n$，显然有$cX_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$，只需证$X_n(Y_n - c) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$即可

而$\forall \varepsilon, \delta > 0$，因为$\{|X_n(Y_n - c)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n| > \delta\} \cup \{|Y_n - c| > \varepsilon/\delta\}$所以$P(|X_n(Y_n - c)| > \varepsilon) \leqslant P(|X_n| > \delta) + P(|Y_n - c| > \varepsilon/\delta)$根据$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - c| > \varepsilon/\delta) = 0$以及$\delta$的任意性，可知$\lim_{n\to\infty} P(|X_n(Y_n - c)| > \varepsilon) = 0$，得证

(3)由第(2)问，同理立得。

3.(P177,50) 某种计算机在进行加法时, 要对每个加数进行取整. 设每次取整的误差相互独立且服从$(-0.5, 0.5)$上的均匀分布.

(1)若现在要进行1500次加法运算, 求误差总和的绝对值超过15的概率;

(2)若要保证误差总和的绝对值不超过10的概率不小于0.90, 至多只能进行多少次加法运算?

解：由题，有$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, i.i.d. X_i \sim U(-0.5, 0.5), \bar{X} = S_n/n, E(\bar{X}) = 0, Var(\bar{X}) = \frac{1}{12}$.

(1)根据中心极限定理，有

$$
\begin{aligned}
P(|S_{1500}|>15)&=P(S_{1500}>15)+P(S_{1500}<-15)\\
&=P(\frac{S_{1500}-1500E(\bar{X})}{\sqrt{1500^2Var(\bar{X})}}>\frac{15-1500E(\bar{X})}{\sqrt{1500^2Var(\bar{X})}})+P(\frac{S_{1500}-1500E(\bar{X})}{\sqrt{1500^2Var(\bar{X})}}<\frac{-15-1500E(\bar{X})}{\sqrt{1500^2Var(\bar{X})}})\\
&=2P(\frac{S_{1500}}{\sqrt{1500^2/12}}>\frac{15}{\sqrt{1500^2/12}})\\
&=2(1-\Phi(\frac{\sqrt{3}}{50}))\\
&=2(1-\Phi(0.03))=0.976
\end{aligned}
$$

(2)由题，要求

$$P(|S_n|\leqslant 10)\geqslant 0.90,$$

有

$$P(\frac{-10}{\sqrt{n^2/12}}\leqslant\frac{S_n}{\sqrt{n^2/12}}\leqslant\frac{10}{\sqrt{n^2/12}})=2\Phi(\frac{10}{\sqrt{n^2/12}})-1\geqslant 0.90,$$

取$\frac{10}{\sqrt{n^2/12}}>1.64$得$n<21.12$，至多21次。

4.(P177,52)设某保险公司每年平均承保车险的车辆数为2400, 每个参保车辆所交保险费为5000元. 设每年内每个参保车辆的事故数(即索赔次数)服从参数(速率)为2的泊松分布, 即

$$P(X=k)=e^{-2}\frac{2^k}{k!},k=0,1,2,\ldots$$

且每次事故的索赔额度(元)服从$[1000,5000]$上的均匀分布. 求平均每年保险公司盈利200万元的概率.

解：对每一次索赔，金额为$i.i.d.Y_n\sim U(1000,5000),n=1,2,\ldots,EY_n=3000,Var(Y_n)=\frac{4000000}{3}$，对每一辆参保车辆索赔次数为$i.i.d.X_n\sim P(2),n=1,2,\ldots,EX_n=2,Var(X_n)=2$，索赔金额$W_i=\sum_{j=1}^{X_i}Y_j,i=1,2,\ldots$，则有

$$EW_i=E(E(W_i|X_i))=E(E(\sum_{j=1}^{k}Y_j|X_i=k))=E(X_i)E(Y_j)=6000$$

$$
\begin{aligned}
Var(W_i)=E(Var(W_i|X_i))+Var(E(W_i|X_i))&=E(X_i)Var(Y_j)+E^2(Y_j)Var(X_i)\\
&=2\frac{4000000}{3}+2\cdot 3000^2=\frac{62000000}{3}
\end{aligned}
$$

因此，总理赔金额为$S_n=\sum_{i=1}^{n}W_i$，盈利200万元即$S_{2400}\leqslant 10000000$由中心极限定理，

$$
\begin{aligned}
P(S_{2400}\leqslant 10000000)=P(\frac{W_i-EW_i}{\sqrt{Var(W_i)}}\leqslant\frac{\frac{10000000}{2400}-EW_i}{\sqrt{Var(W_i)}})&=P(\frac{W_i-6000}{\sqrt{\frac{62000000}{3}}}\leqslant\frac{\frac{10000000}{2400}-6000}{\sqrt{\frac{62000000}{3}}})\\
&=\Phi(-0.403)=1-\Phi(0.403)=1-0.6554=0.3446.
\end{aligned}
$$

5.(P178,53)设随机变量$X,0<a\leqslant X\leqslant b,E(|X|)<\infty$, 证明

$$1\leqslant E(X)\cdot E(\frac{1}{X})\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

证明：

利用Cauchy不等式$E(\xi^2)\cdot E(\eta^2)\geqslant E((\xi\eta)^2)$，取$\xi=\sqrt{X},\eta=\frac{1}{\sqrt{X}}$, 由$0<a\leqslant X,E|X|<\infty$知$1\leqslant E(X)\cdot E(\frac{1}{X})$

取直线$y=cx+d$，取$(a,1/a),(b,1/b)$得$c=-\frac{1}{ab},d=\frac{a+b}{ab}$，有$0<a\leqslant X\leqslant b,\frac{1}{X}\leqslant-\frac{1}{ab}X+\frac{a+b}{ab}$

取期望，

$$abE(\frac{1}{X})+E(X)\leqslant a+b,$$

平方

$$a^2b^2E^2(\frac{1}{X})+2abE(X)\cdot E(\frac{1}{X})+E^2(X)\leqslant(a+b)^2$$

由于

$$(abE(\frac{1}{X})-E(X))^2=a^2b^2E^2(\frac{1}{X})-2abE(X)\cdot E(\frac{1}{X})+E^2(X)\geqslant 0$$

有

$$4abE(X)\cdot E(\frac{1}{X})\leqslant a^2b^2E^2(\frac{1}{X})+2abE(X)\cdot E(\frac{1}{X})+E^2(X)\leqslant(a+b)^2$$

所以

$$1\leqslant E(X)\cdot E(\frac{1}{X})\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}$$