概率论与数理统计

第三章

杨青
yangq@ustc.edu.cn

第三章：　多维随机变量及其分布

大纲：

- 多维随机变量及联合分布的概念
- 边缘分布
- 条件分布
- 相互独立的随机变量
- 随机向量函数的分布

1. 多维随机变量及联合分布的概念

定义 3.1 多维随机变量

设 $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ 为同一样本空间上的随机变量, 则称

$$\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

为 n 维随机变量, 或称为 n 维随机向量. 通常简记为 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 或 $\mathbf{X}$. ♣

- 例子:
  - 儿童的身高X_1和体重X_2, (X_1, X_2)是一个二维随机变量
  - 学生各科测试的成绩$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

- 我们可以按照对常用一维随机变量的分类把常用的随机向量分为离散型、连续型以及其他类型.

- **二维离散型随机变量**, 即每个分量都是离散型的随机变量

定义 3.3 二维离散型随机变量

设 X, Y 的可能取值为 $\{(x_i, y_j), i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \cdots\}$. 记

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

称其为离散型二维随机变量 X, Y 的联合概率质量函数或者联合分布律 (joint pmf). ♣

(1). $p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \ldots$

(2). $\sum_{i,j} p_{ij} = 1.$

当 X, Y 都取有限个值时, 也常用列表表示它们的联合分布律:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

• n维离散型随机变量

定义 3.4 n 维离散型随机变量

称 $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 为一 n 维离散随机变量, 如果每一个 X_i 都是一个离散型随机变量, 并设 X_i 的所有可能取值 (有限或可数个) 为 $\{a_{i1},a_{i2},\cdots\}$, $i=1,\ldots,n$, 则称

$$p(j_1,\ldots,j_n)=\mathbb{P}(X_1=a_{1j_1},\ldots,X_n=a_{nj_n}),\ j_1,...,j_n=1,2,... \tag{3.1}$$

为 n 维随机变量 $\mathbf{X}$ 的联合概率质量函数或者联合分布律 (joint pmf). ♣

(1) $p(j_1,\ldots,j_n)\geq 0,\quad j_i=1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,n;$

(2) $\displaystyle\sum_{j_1,\ldots,j_n} p(j_1,\ldots,j_n)=1.$

- 期末有高等数学和普通物理两门课程的考试, 高等数学先考. 对某些同学而言, 第一门课程的成绩对第二门有影响. 设某学生高等数学考试优秀的概率为 0.6, 若高等数学成绩优秀, 则他的物理考试优秀的概率为 0.8, 反之, 若他的高等数学成绩良好或以下,则物理考试成绩为良好或以下的概率为 0.7. 求该学生两门课程考试得分概率的所有情况.

Hint:令 $X = I_A, Y = I_B$, 其中 A={高等数学考试成绩优秀}, B={普通物理考试成绩优秀}. 题意就是求 X, Y 的联合分布

例子

- 从1，2，3，4中任取一个数记为X，再从$1, \dots, X$ 中任取一个数记为Y.

1. 求(X, Y)的联合分布律;
2. 求概率$P(X = Y)$.

设 $A_1, \cdots, A_n$ 为某一实验下的完备事件群，即 $A_1, \cdots, A_n$ 两两互斥且和为 Ω。记 $p_k = P(A_k)(k = 1, \ldots, n)$，则 $p_k \geq 0, p_1 + \cdots + p_n = 1$。现将实验独立的重复作 N 次，分别用 X_i 表示事件 A_i 出现的次数 $(i = 1, \cdots, n)$。则 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为一离散型随机向量，试求 X 的概率函数。此分布律称为多项分布，记为 $M(N; p_1, \ldots, p_n)$.

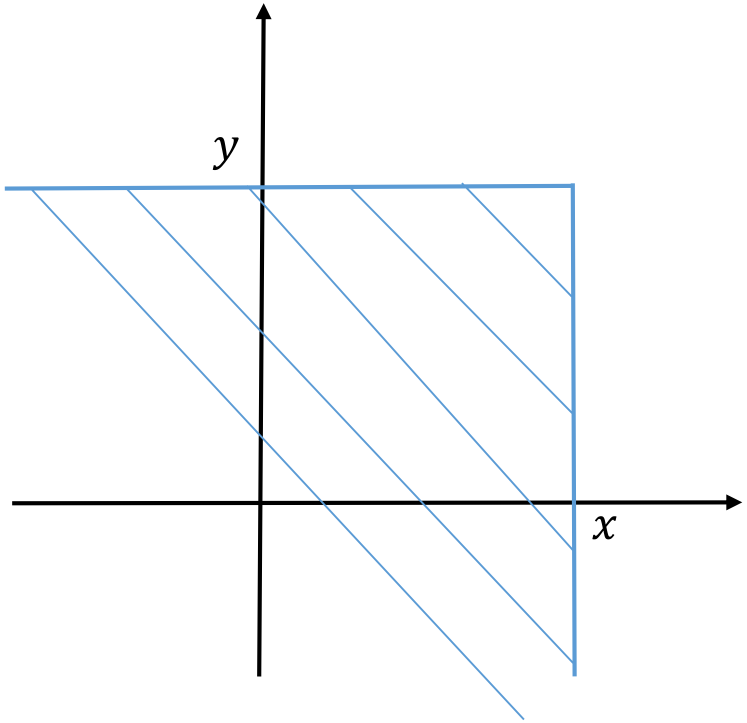
- 类似于一维连续型随机变量, 连续型随机向量的也是由密度函数来刻画的,同样涉及到**分布函数**。

定义 3.2 二维分布函数

设 (X,Y) 是二维随机变量, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 称二元函数

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \mathbb{P}(X\le x, Y\le y)=\mathbb{P}(\{\omega: X(\omega)\le x, Y(\omega)\le y\})\\
&= \mathbb{P}(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\})
\end{aligned}
$$

为 (X,Y) 的分布函数, 或 (X,Y) 的联合分布函数(joint cdf). ♣



$F(x,y)$中定义域取值范围

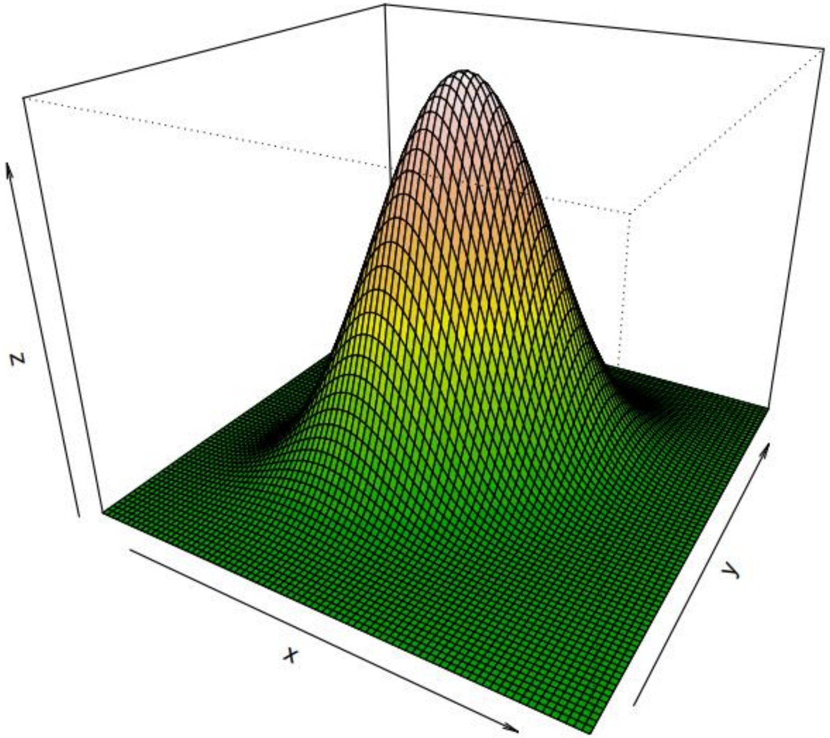


图 3.3: 二元正态密度函数图

由二维联合分布函数 $F(x,y)$, 我们可以求出随机向量 (X,Y) 落在矩形区域 $(x_1,x_2]\times(y_1,y_2]$ 上的概率 (如图3.2所示):

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)\\
&=\mathbb{P}(-\infty<X\le x_2,-\infty<Y\le y_2)-\mathbb{P}(-\infty<X\le x_1,-\infty<Y\le y_2)\\
&-\mathbb{P}(-\infty<X\le x_2,-\infty<Y\le y_1)+\mathbb{P}(-\infty<X\le x_1,-\infty<Y\le y_1)\\
&=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1).
\end{aligned}
$$

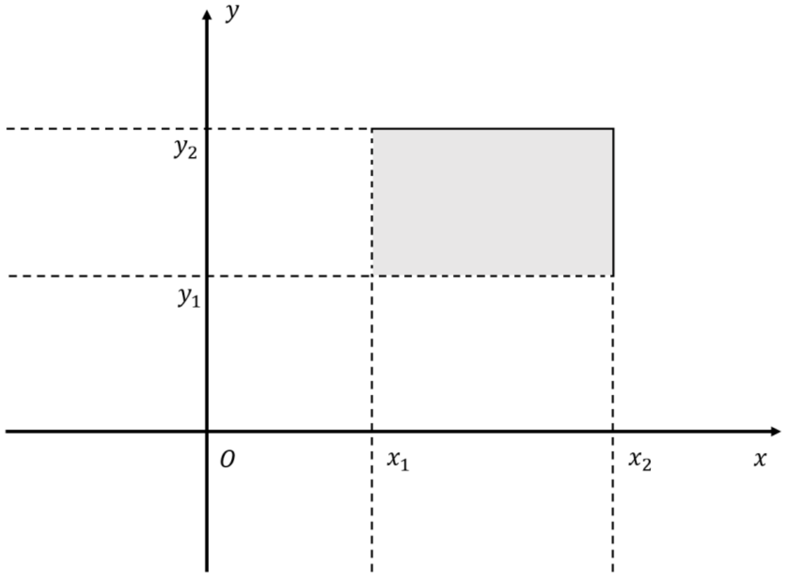


图3.2: 二维随机向量(X,Y)落在矩形区域$(x_1,x_2]\times(y_1,y_2]$中的情况

- 二维联合分布函数 $F(x,y)$性质:

1. $F(x,y)$ 分别对 x,y 单调非降
2. 对 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$0\le F(x,y)\le 1, F(+\infty,+\infty)=1,$$

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0.$$

3. $F(x,y)$ 分别关于 x,y 右连续
4. $\forall x_1<x_2, y_1<y_2, P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$ 非负，即

$$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

- 二维随机变量与一维随机变量不同，刻画一个联合分布函数需要加上第4点，条件1-3推不出4.

- 与一维随机变量类似，分布函数$F(x,y)$的定义**适用于一切类型的随机变量.**

- 对于二维离散型： $F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$.

- 例子(P7)：求$F(0,1)$，$F(3,2)$，$F(3.4,2.3)$，$F(5,5)$.

X \ Y	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	1/12
4	1/16	1/16	1/16	1/16

定义 3.5 二维连续型随机变量

设 $(X,Y)\sim F(x,y)$, 若存在可积的非负函数 $f(x,y)$, 使得对于 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv, \tag{3.2}$$

则称 (X,Y) 为连续型二维随机变量, $F(x,y)$ 称为连续型二维联合分布函数(joint cdf), 称 $f(x,y)$ 为其联合概率密度函数 (joint pdf). ♣

性质 联合概率密度函数 $f(x,y)$ 具有以下性质:

1. 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f(x,y)\geq 0$
2. $$\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)dxdy=1$$
3. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 则
$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=f(x_0,y_0)$$
4. 设 G 是平面上的一个区域, 则
$$\mathbb{P}((X,Y)\in G)=\iint_{(x,y)\in G}f(x,y)dxdy$$

- 连续型随机向量与离散型随机向量不同, 不能简单地定义为“每个分量都是一维连续型随机变量”。如:

$$X_1\sim U(0,1),\ X_2=X_1$$

随机向量 (X_1,X_2) 的两个分量都是连续型

但 (X_1,X_2) 不存在密度函数

因为 (X_1,X_2) 只能在单位正方形的对角线取非 0 值

故不可能存在一个非负函数满足性质2(二元黎曼可积函数在平面上任一有限线段上的积分为 0).

例子: 均匀分布

考虑二维随机变量 $X = (X_1, X_2)$，其概率密度函数为

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/[(b-a)(d-c)] & \text{当 } a \le x_1 \le b,\ c \le x_2 \le d, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

称此概率密度为 $[a, b] \times [c, d]$ 上的均匀分布.