HW 14

1.解：(1) 对 $X_{(n)} = \max\{x_1 \cdots x_n\}$

其概率密度函数 $f_n(x) = \begin{cases} n\frac{x^{n-1}}{\theta^n} & 0<x<\theta \\ 0 & 其他 \end{cases}$

∴ 功效函数 在检验 φ 下 H_0 被否定

∴ 犯第一类错误

功效函数 $P_\theta = \beta_\varphi(\theta) = P(X_{(n)} \leq 2.5 | H_0) = \int_0^{2.5} n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx = (\frac{2.5}{\theta})^n \quad \theta=3$

由其为 θ 严格单调减函数

∴ $\theta \in H_0 \quad P_\theta(拒绝 H_0) \leq \alpha = (\frac{2.5}{3})^n$

即 显著性水平 $\alpha = (\frac{2.5}{3})^n = (\frac{5}{6})^n$

(2) 由题 达 0.05 ∴ $\alpha = (\frac{5}{6})^n \leq 0.05$

$n \geq 16.43 \quad n \in N_+$

n至少为17

2.解：性别比服从正态分布

检验 $H_0: \mu = 105.02 \leftarrow H_1: \mu \neq 105.02$ 方差未知

检验统计量 $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{S} \sim t_{n-1} \quad (\mu=\mu_0)$

拒绝域 $\{|T| > t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\} \quad \alpha=0.05$

$n=8 \quad \bar{x} = 105.0425 \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = 13.30$

代入数据得 $T = 0.0175$

$t_7(\frac{0.05}{2}) = 2.3646$ ∴ $|T| < t_7(0.025)$ 不在拒绝域内

不能拒绝 H_0 在显著性水平5%下

3、解：(1) 均来自正态总体 $\alpha = 0.05$

旧工艺 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 新工艺 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

μ_1 μ_2 σ_1^2 σ_2^2 均未知

检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

记 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ 为检验统计量 $F \sim F_{m-1,n-1}$

拒绝域 $\{F > F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$ 或 $F < F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})\}$

$\bar{x} = 5.25$ $\bar{y} = 1.5$ $S_x^2 = 0.9318$ $S_y^2 = 1$ $m = n = 12$

$\therefore$ $F = 0.918$ $F_{11,11}(\frac{\alpha}{2}) = 3.49$ $F_{11,11}(1-\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{F_{11,11}(\frac{\alpha}{2})} = 0.287$

$\therefore \frac{1}{F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})} < F < F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$

$\therefore$ 不能拒绝 H_0 即认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

(2) 检验：$\mu_1 - \mu_2 \leq 3 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 > 3$ (研究性)

$\therefore$ 检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 3}{S_T\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{n+m-2}$

$S_T = \sqrt{\frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}}$ 由(1)

代入计算 $S_T = \sqrt{\frac{S_x^2 + S_y^2}{2}} = 0.9665$

$T = 1.8199$ 拒绝域 $\{T > t_{n+m-2}(\alpha)\}$

$t_{22}(0.05) = 1.7171$

$\therefore$ $T > t_{22}(0.05)$ $\therefore$ 拒绝 H_0

在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下 即可以认为 旧工艺下 NDMA 含量比新工艺显著大 3

比例

4解 记马克吐温 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 斯诺德格拉斯 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ σ^2 未知

∴ 比例差异

检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_T\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$

拒绝域 $\{|T| > t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\}$ $m=8$ $n=10$

$\bar{X} = 0.2319$ $\bar{Y} = 0.2097$ $S_X^2 = 2.12 \times 10^{-4}$ $S_Y^2 = 9.33 \times 10^{-5}$

$S_T = \sqrt{\dfrac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}} = 0.01205$ $\alpha = 0.05$

$T = 3.884$ $t_{16}(\frac{\alpha}{2}) = 2.1199$ $|T| > t_{16}(0.025)$

∴ 拒绝 H_0 即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下 有差异

8.解 A

对参数 μ 假设检验 $H_0: \mu = \mu_0$

对样本值固定 不论 σ^2 是否已知

检验统计量不变 称为 T_n

∴ 拒绝域 $\{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}$ (σ^2 已知) $\{|T| > t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\}$ (σ^2 未知)

均有当 α 变小 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ $t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \uparrow$

原先 $\alpha = 0.05$ 接受 H_0 即 T_n 小于 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ / $t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$ 在拒绝域外

∴ $\alpha = 0.01$

必有 $T_n < u_{0.025} < u_{0.005}$ / $T_n < t_{n-1}(0.025) < t_{n-1}(0.005)$

即仍在拒绝域外

∴ 仍接受 H_0