1.若随机变量X和Y分别服从二项分布$B(2,p)$和$B(3,2p)$，且$P(X\geqslant 1)=0.51$，试求$P(Y\geqslant 1)$.

解:

由题，$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-C_2^0p^0(1-p)^2=0.51$，解得$p=0.3$，则$Y\sim B(3,0.6)$，
$P(Y\geqslant 1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0p^0(1-2p)^3=0.936$.

2.证明A与B独立等价于$P(A|B)=P(A|B^C)$成立.

证明:

A与B独立$\Rightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$, $P(A|B^C)=\frac{P(AB^C)}{P(B^C)}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A)-P(A)P(B)}{1-P(B)}=P(A)$，
$P(A|B)=P(A|B^C)$；

$P(A|B)=P(A|B^C)\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\Rightarrow P(AB)-P(AB)P(B)=P(A)P(B)-P(AB)P(B)$$\Rightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)\Rightarrow A$与$B$独立.

3.设A, B, C两两独立, $ABC=\phi$,

(1) 若$P(A)=P(B)=P(C)=x$, 求x的最大值;

(2) 若$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, 且$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 求$P(A)$.

解：$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=3x-3x^2$

(1)$P(ABC)=\phi\Rightarrow P(AB\cap AC)=\phi\Rightarrow x\geqslant 2x^2\Rightarrow x\leqslant\frac{1}{2}$;

(2)得方程$3x-3x^2=\frac{9}{16}$，解得$x=\frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}$(舍)，$P(A)=\frac{1}{4}$.

4.在一闯关游戏中一共有4道关卡, 若每道关卡某选手能以$\frac{2}{3}$的概率顺利通过, 然后进入下一关, 或以$\frac{1}{3}$的概率被淘汰出局, 设每道关卡的通过情况相互独立, 以X表示该选手能顺利通过关卡的数目, 试求X的分布律.

解:

$P(X=0)=\frac{1}{3}$

$P(X=1)=\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

$P(X=2)=\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$

$P(X=3)=\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$

$P(X=4)=\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{81}$

5.从一副扑克牌(52张)中任意抽取5张, 求黑桃数量的分布列.

解：设黑桃数量为X

$P(X=0)=\frac{C_{39}^5}{C_{52}^5}=0.222$

$P(X=1)=\frac{C_{13}^1C_{39}^4}{C_{52}^5}=0.411$

$P(X=2)=\frac{C_{13}^2C_{39}^3}{C_{52}^5}=0.274$

$P(X=3)=\frac{C_{13}^3C_{39}^2}{C_{52}^5}=0.082$

$P(X=4)=\frac{C_{13}^4C_{39}^1}{C_{52}^5}=0.011$

X	0	1	2	3	4
P	0.222	0.411	0.274	0.082	0.011

6.假设某种定期发行的奖券的中奖率为$p(0<p<1)$, 某人每次购买一张, 若没中奖则接着再买一张, 直到中奖为止, 以X表示该人购买奖券的次数, 试求X的分布律.

解:

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,3,\ldots$$