

1. 设某种昆虫单只每次产卵的数量服从参数为 λ 的 Poisson 分布, 而每个虫卵能孵出幼虫的概率均为 p 且相互独立. 分别以 Y 和 Z 记一只昆虫一次产卵后幼虫和未能孵出幼虫的虫卵的个数, 试问 Y 和 Z 分别服从什么分布? 它们是否相互独立? (利用条件概率)
2. (习题 18)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/4, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1/2 + (x-1)/4, & 1 \leq x < 2, \\ 5/6, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

试求: (1) $P(X = k)$, $k = 1, 2, 3$; (2) $P(1/2 < x < 3/2)$.

3. (习题 21)

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

试求 (1) 常数 a ; (2) 分布函数 $F(x)$; (3) 概率 $P(|X| < 1)$.

4. (习题 27) 设随机变量 X 只在区间 $(0,1)$ 内取值, 且其分布函数 $F(x)$ 满足: 对任意 $0 \leq a \leq b \leq 1$, $F(b) - F(a)$ 的值仅与差 $b - a$ 有关. 试证明 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.
5. (习题 29) 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X 服从参数为 $\lambda = 1/5$ 的指数分布 (单位: min). 假设某顾客一旦等待时间超过 10 min 他就立即离开, 且一个月内要到该银行 5 次, 试求他在一个月内至少有一次未接受服务而离开的概率。