古典概型的两个条件往往不能满足，此时如何定义概率？常用的一种方法是把含有事件 A 的随机试验独立重复做 n 次 ($Bernouli$ 试验)，设事件 A 发生了 n_A 次，称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率，当 n 越来越大时，频率会在某个值 p 附近波动，且波动越来越小，这个值 p 就定义为事件 A 的概率.

- 历史上，蒲丰（Georges Buffon，1707—1788）和皮尔逊（Karl Pearson，1857—1936）等人用投掷硬币验证了硬币的均匀性，从这个例子可以看出随着试验次数的增加，频率越来越接近 1/2.

试验者	掷硬币的次数	正面出现的次数	频率
蒲丰	4040	2048	.5069
皮尔逊	12000	6019	.5016
皮尔逊	24000	12012	.5005

2.3. 主观概率的定义

- **主观概率：** 一个事件发生的概率规定为某人在主观上相信该事件会发生程度的数字衡量 .
- 个人对某个结果发生可能性的一个判断, 如某人认为有 80% 的可能性房价暴跌. 另一人则认为仅有 20% 的可能性.
- 有相当的生活基础 . 日常生活中, “某事发生的可能性有多大” 一类的说法, 都是这类主观概率的表达 .
- 有大量应用 .（一次性事件, 无法通过试验去考察和验证 ,这些事件根本不能重复, 例如, 某项工程能在一年内完成的概率有多大? 火星上有生命的概率有多大? ）
- 数据分析方面，基于此形成贝叶斯 (Bayes) 学派 .
- 但是当前用频率来定义概率的频率派仍是数理统计的主流. 焦点是频率派认为概率是客观存在，不可能因人而异.

2.4. 概率的公理化定义

以上介绍了在样本空间中事件概率如何定义，但是如何从理论上来给出定义？1933 年, 苏联的数学大家科尔莫戈罗夫综合诸多数学家的研究，提出了概率的公理化体系．该公理化体系给出了一些简单的基本规则，而不是给出具体概率如何定义．

称 $P(\cdot)$ 为一概率，如果

(i) 设 A 是随机事件，则 $0 \leq P(A) \leq 1$ (非负性)

(ii) 设 Ω 为必然事件，则 $P(\Omega) = 1$ (规范性)

(iii) 若事件 $A_1, A_2, \ldots$ 为两两不相容的事件序列，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$ (可数可加性)

Definition

概率的基本性质

1. $P(\phi) = 0$

2. (有限可加性) 若 $A_k \in \mathcal{F}, k = 1, \cdots, n$ 且两两互斥，则

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. (可减性) 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B)-P(A)$.

4. (单调性) 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$，则 $P(A) \leq P(B)$.

5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

6 (加法定理, 也称容斥原理 (inclusion-exclusion principle)) 对任意的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

7 (次可加性) 对任意的事件列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 有 $P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

8 (下连续性) 若事件列满足 $A_n \subset A_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

9 (上连续性) 若事件列满足 $A_n \supset A_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

例子

设 A, B, C 为样本空间 Ω 中的三个事件. 已知 $P(A) = P(B) = 1/4$, $P(C) = 2/5$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = 1/6$, 求 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

解 由概率的性质有

$$\begin{aligned} P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)] \\ &= 1 - \frac{9}{10} + \frac{2}{6} = \frac{13}{30}. \end{aligned}$$

例子

求证对任意 n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$ 有

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - n + 1.$$