概统作业 (Week 11)

PB20000113 孔浩宇

May 21, 2023

1 (P176 T42)

Proof.

(1)

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \ \forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$
$$\Rightarrow \ \forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \forall \ \frac{\delta}{2} > 0,\ \exists \ N_1 > 0,\ \forall \ n > N_1,\ P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\delta}{2}.$$

(2)

$$Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow \ \forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$
$$\Rightarrow \ \forall \ \frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \forall \ \frac{\delta}{2} > 0,\ \exists \ N_1 > 0,\ \forall \ n > N_1,\ P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\delta}{2}.$$

(3) $\forall \ \varepsilon > 0,\ \forall \ \delta > 0,\ \exists \ N_1, N_2 > 0$,

$$\forall \ n > \max\{N_1, N_2\},\ P(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \delta.$$

即证 $\forall \ \varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon) = 0.$$

即证

$$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y.$$

□

2 (P177 T45)

(1) 记 500 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数为 X，则 $X \sim B(500, 0.2)$

$$E(X) = 500 \times 0.2 = 100. \qquad Var(X) = 500 \times 0.2 \times (1 - 0.2) = 80.$$

$$P(80 < X < 120) = P(|X - 100| < 20) = 1 - P(|X - 100| \geq 20) \geq 1 - \frac{80}{20^2} = 0.8.$$

即用切比雪夫不等式估计，概率大约为 0.8.

(2) 记第 i 次实验中事件 A 发生的次数为 X_i，则 $X_i \sim B(1, 0.2)$，有

$$S_n = \sum_{i=1}^{500} X_n, \quad np = 100, \quad \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

记事件 A 发生次数在 80 和 120 之间为事件 M，则

$$P(M) = P(80 \le S_n \le 120) = P\left(-\sqrt{5} \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \sqrt{5}\right) = 2P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \sqrt{5}\right) - 1$$

又

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \ \Rightarrow\ P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \sqrt{5}\right) \approx \Phi(\sqrt{5}) \approx 0.9868$$

有

$$P(M) \approx 2 \times 0.9868 - 1 = 0.9736.$$

即用中心极限定理估计，概率大约为 0.9736.

3 (P175 T51)

(0) 设第 i 件产品的组装时间为 X_i 分钟，则 $X_i \sim Exp(\lambda)$，有

$$\mu = E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = 10 \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{1}{10},\ \sigma^2 = Var(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 100.$$

(1) 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$

$$P(15 \times 60 \le S_n \le 20 \times 60) = P(S_n \le 1200) - P(S_n \le 900)$$

由中心极限定理有

$$P(S_n \le 1200) = P\left(\frac{\sqrt{n}(S_n/n - \mu)}{\sigma} \le 2\right) \approx \Phi(2)$$

$$P(S_n \le 900) = P\left(\frac{\sqrt{n}(S_n/n - \mu)}{\sigma} \le -1\right) \approx \Phi(-1)$$

故

$$P(900 \le S_n \le 1200) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8185.$$

(2) 设保证有 95% 的可能性下，$16h$ 内最多可以组装 k 件产品，记 $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$，则有

$$P\left(S_k \le 16 \times 60\right) = P\left(S_k \le 960\right) \ge 0.95$$

又由中心极限定理

$$P(S_k \le 960) = P\left(\frac{\sqrt{k}(S_k/k - \mu)}{\sigma} \le \frac{\sqrt{k}(960/k - \mu)}{\sigma}\right) = P\left(\frac{\sqrt{k}(S_k/k - \mu)}{\sigma} \le \frac{96 - k}{\sqrt{k}}\right) \approx \Phi\left(\frac{96-k}{\sqrt{k}}\right)$$

有

$$\Phi\left(\frac{96-k}{\sqrt{k}}\right) \ge 0.95,\ \Phi(1.645) = 0.950015 \ \Rightarrow\ \frac{96-k}{\sqrt{k}} \ge 1.645 \ \Rightarrow\ k_{\max} = 81.$$

即要保证有 95% 的可能性下，$16h$ 内最多可以组装 81 件产品，

4 (P175 T59)

Proof.

设 X_i $(i=0,1,2,...)$ 为服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布，且相互独立的一系列分布，则

$$\mu=E(X_i)=\lambda=1,\quad \sigma^2=Var(X_i)=\lambda=1$$

记 $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n}X_i$，由中心极限定理有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sqrt{n}(S_n/n-\mu)}{\sigma}\le 0\right)=\lim_{n\to\infty}P(S_n\le n)=\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\le n\right)=\frac{1}{2}.$$

又 $Y_n=\sum\limits_{i=0}^{n}X_i$ 服从参数 $\lambda=n$ 的泊松分布，故

$$P\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\le n\right)=P\left(Y_n\le n\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{e^{-n}\cdot n^k}{k!}=e^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

即证

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\lim_{n\to\infty}P\left(\sum_{i=0}^{n}X_i\le n\right)=\frac{1}{2}.$$

□

5 (P240 T8)

(1) 样本空间：

$$\Omega=\{(x_1,x_2,...,x_5)\mid x_i=0,1\ \text{且}\ 1\le i\le 5\}$$

抽样分布： $k=\sum\limits_{i=1}^{5}x_i$，

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_5=x_5)=p^k(1-p)^{5-k}.$$

(2) 统计量：

$$X_1+X_2,\quad \min_{1\le i\le 5}X_i$$

非统计量：因为依赖于未知的参数 p，所以不是统计量

$$X_5+2p,\quad X_5-E(X_1),\quad \frac{(X_5-X_1)^2}{Var(X_1)}$$