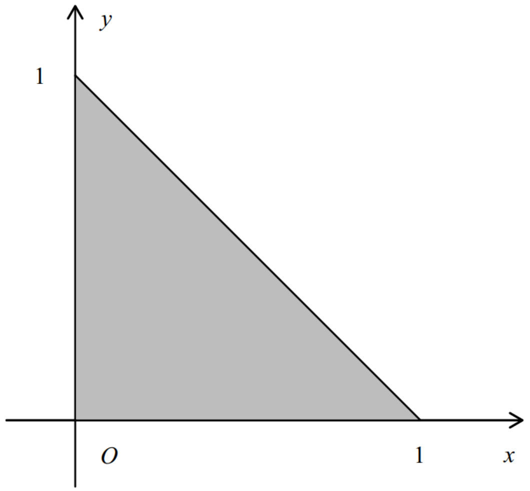
设$(X,Y)\sim f(x,y)=e^{-(x+y)}I_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y)$, 设区域G由

$$x+y\le 1,\qquad x\ge 0,\qquad y\ge 0$$



围成. 求$F(x,y)$, $P\big((X,Y)\in G\big)$.

例子: 二元正态分布

设 (X,Y) 的概率密度函数有形式

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} -2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中 $-\infty < a,b < \infty$, $0 < \sigma_1,\sigma_2 < \infty$, $-1 \le \rho \le 1$. 称 (X,Y) 服从参数为 $a,b,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布，记为 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

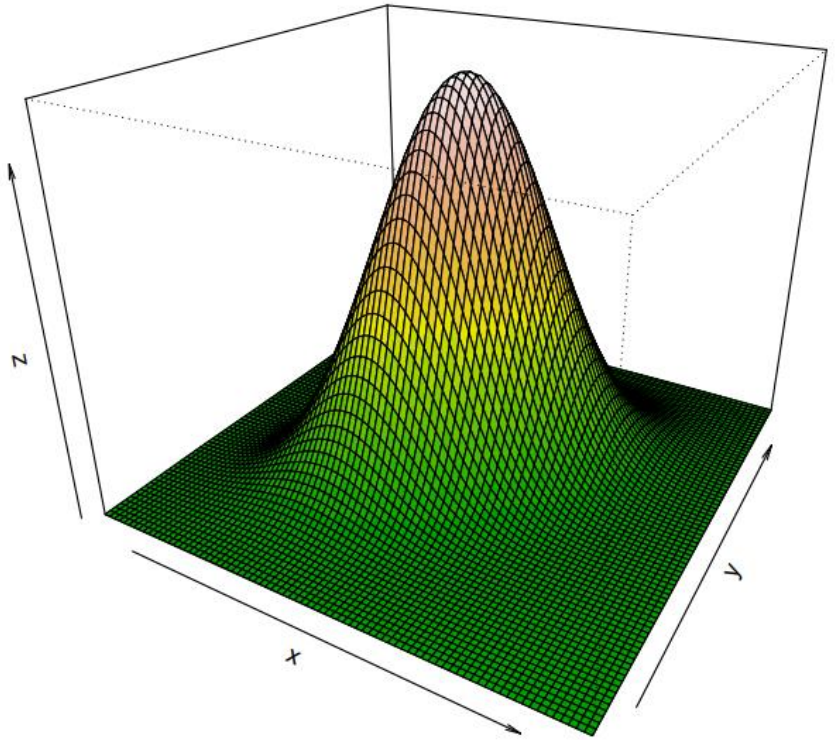
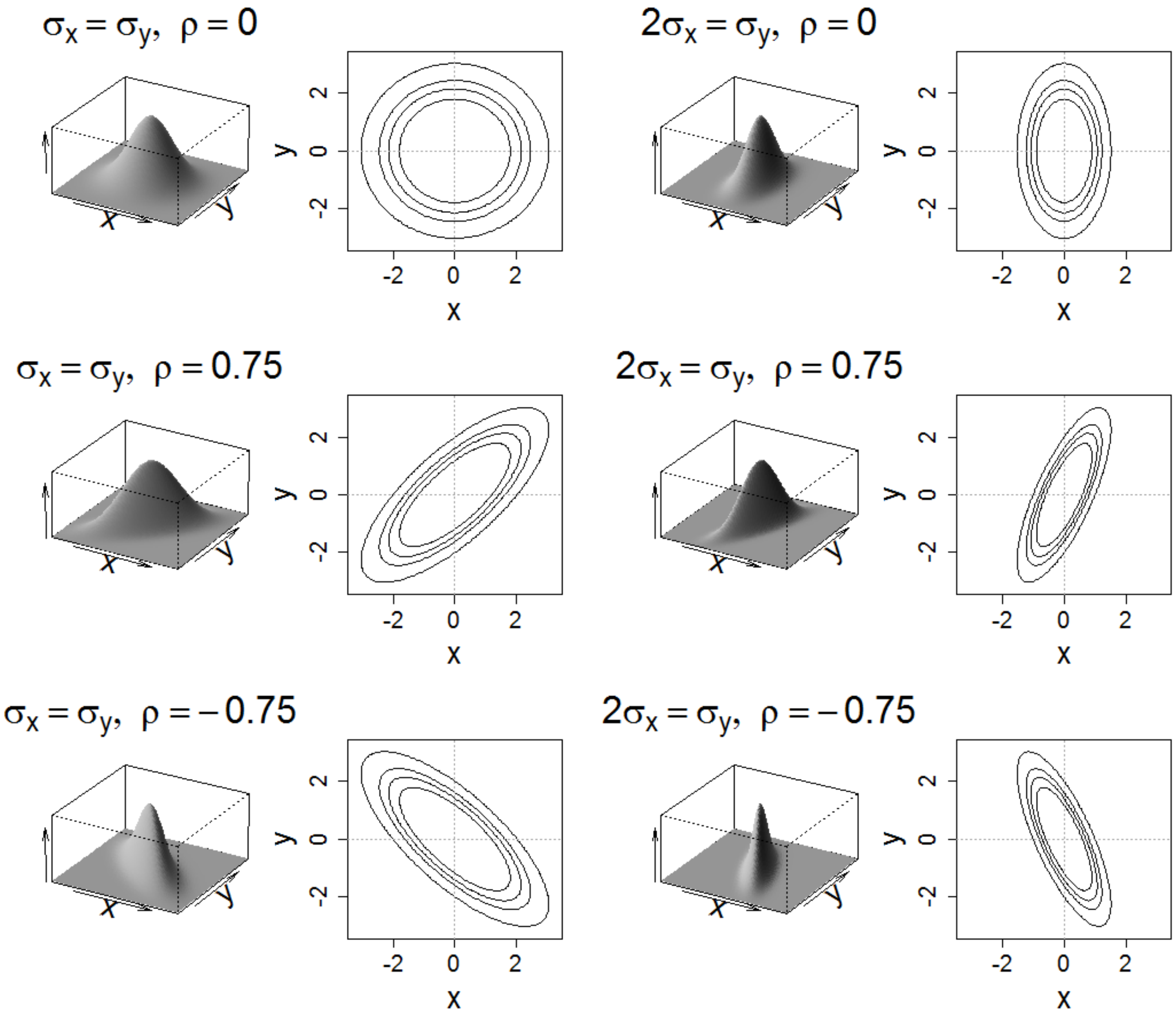


图 3.3: 二元正态密度函数图


$\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0$
$2\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0$
$\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0.75$
$2\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = 0.75$
$\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = -0.75$
$2\sigma_x = \sigma_y,\ \rho = -0.75$
x
y
-2
0
2

推广至n维

设 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)'$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$, 称

$$F(\mathbf{x})\equiv F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathbb{P}(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n)\equiv\mathbb{P}(\mathbf{X}\le\mathbf{x})$$

为 n 维随机变量 $\mathbf{X}$ 的联合分布函数. 若存在非负的 n 元函数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 使得

$$F(\mathbf{x})\equiv F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1du_2\cdots du_n\equiv\int_{(-\infty)^n}^{\mathbf{x}}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$

则 $f(\mathbf{x})\equiv f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 称为 $\mathbf{X}$ 的联合密度函数, $\mathbf{X}$ 称为连续型的 n 维随机变量, 对应的联合分布函数 $F(\mathbf{x})\equiv F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 称为连续型的联合分布函数.

性质

(1) $F(x_1,\cdots,x_n)$ 对每个变元单调非降;

(2) 对任意的 $1\le j\le n$ 有, $\lim\limits_{x_j\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=0$;

(3) $\lim\limits_{x_1\to\infty,\cdots,x_n\to\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=1$.

- 多维联合分布函数含有丰富的信息：
  - ➢ 若干分量的分布，即边缘分布 ➡ 2
  - ➢ 给定若干个分量时，其余分量的分布，即条件分布 ➡ 3
  - ➢ 分量之间的关联程度，即独立性、协方差和相关系数

    ➡ 4和下一章

设 $(X_1, ..., X_n) \sim F$ 已知. 令 $(i_1, ..., i_m) \subset (1, ..., n)$, 则 $X_{i_1}, ..., X_{i_m}$ 的分布称为 $X_1, ..., X_n$ 或 F 的一个m维边缘分布. **如何得到该分布?**

- 从二维到n维
- 从离散到连续

定义 3.6 边缘 (际) 分布

设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 则其分量 X 和 Y 的分布函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$ 称为 (X,Y) 或 F 的边缘 (际) 分布(marginal distribution). ♣

由于 $\{Y < +\infty\} = \Omega$, 故

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\{X \le x\} \cap \Omega) = \mathbb{P}(X \le x, Y < +\infty) \\ &= \lim_{y \to +\infty} F(x,y) \equiv F(x,+\infty) \end{aligned}$$

同理, $F_2(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = F(+\infty, y)$.

由此知联合分布可以唯一确定边缘分布.

边缘分布函数：n维

- 假设$(i_1, \ldots, i_m) = (1, \ldots, m)$，则

$$\mathrm{F}_{(X_1,\ldots,X_m)}(x_1, \ldots, x_m)$$

$$= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_m \leq x_m)$$

$$= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_m \leq x_m, X_{m+1} < +\infty, \ldots X_n < +\infty)$$

$$= \lim_{x_{m+1}\to+\infty,\ldots,x_n\to+\infty} F(x_1,\ \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

$$\doteq F(x_1,\ \ldots, x_m, +\infty, \ldots, +\infty)$$

- 称$F(x_1,\ \ldots, x_m, +\infty, \ldots, +\infty)$为$(X_1, \ldots, X_m)$的边缘分布函数.
- n维随机变量的边缘分布函数有$2^n - 2$个.

边缘分布律（离散型）

边缘密度函数（连续型）

边缘分布率(离散型)：二维

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\ldots,$$

则随机变量 X 的边际分布律 (概率质量函数) 为

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x_i) &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij} \\ &\equiv p_{i\cdot}, \quad i=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

同理随机变量 Y 的边缘分布律为

$$\mathbb{P}(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\equiv p_{\cdot j}, \quad j=1,2,\cdots$$

Y\ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$	$P(Y=y_j)$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\vdots$	p_{nm}	$\vdots$	$p_{\cdot m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P(X=x_i)$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{n\cdot}$	$\cdots$	1

边缘分布率(离散型)：n维

类似地, 可对 n $(n > 2)$ 维的随机变量定义边缘分布. 设 $X_1, ..., X_n$ 为 n 维随机变量，其概率分布 F 已知. 令 $i_1 < \cdots < i_m$ 为 $1, ..., n$ 的任一子集，则 $X_{i_1}, ..., X_{i_m}$ 的概率函数为

$$
\begin{aligned}
& p_{i_1 \dots i_m}(j_{i_1}, ..., j_{i_m}) = P(X_{i_1} = a_{i_1 j_{i_1}}, ..., X_{i_m} = a_{i_m j_{i_m}}) \\
= \quad & P(X_{i_1} = a_{i_1 j_{i_1}}, ..., X_{i_m} = a_{i_m j_{i_m}}) \\
= \quad & \sum_{j_{i_{m+1}}, ..., j_{i_n}} P(X_1 = a_{1 j_1}, ..., X_{i_1} = a_{i_1 j_{i_1}}, ..., X_{i_m} = a_{i_m j_{i_m}}, \\
& X_{i_{m+1}} = a_{i_{m+1} j_{i_{m+1}}}, ..., X_n = a_{n j_n}) \\
= \quad & \sum_{\text{除} j_{i_1}, ..., j_{i_m} \text{的所有}} p(j_1, ..., j_n).
\end{aligned}
$$

其中和是对除 $X_{i_1}, ..., X_{i_m}$ 之外的所有变量来求和.

例子

- 口袋中有5张外形相同的卡片，其中3张写上数字“0”，2张写上数字“1”。现从中任取两张卡片，分别以X,Y表示第一张和第二张卡片上的数字，分别在有放回和不放回的情形下，试求(X,Y)的联合分布律和边缘分布律。

Y\ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
$p_{i\cdot}$	3/5	2/5	1

Y\ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	6/20	6/20	3/5
1	6/20	2/20	2/5
$p_{i\cdot}$	3/5	2/5	1

边缘分布律不能决定联合分布律!

边缘密度函数(连续型)：二维

设二维随机变量 $(X,Y) \sim f(x,y)$，由于

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dudy$$

右边在积分号下对 x 求导, 得 X 的边缘密度函数为

$$f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy,$$

联合密度f(x,y)对另一变量求积分

同理, Y 的边缘密度函数为

$$f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx.$$

定义 3.7 边缘密度

X 和 Y 的概率密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 或者联合概率密度函数 $f(x,y)$ 的边缘概率密度函数 (marginal pdf). ♣

或简称边缘密度函数.

边缘密度函数(连续型)：n维

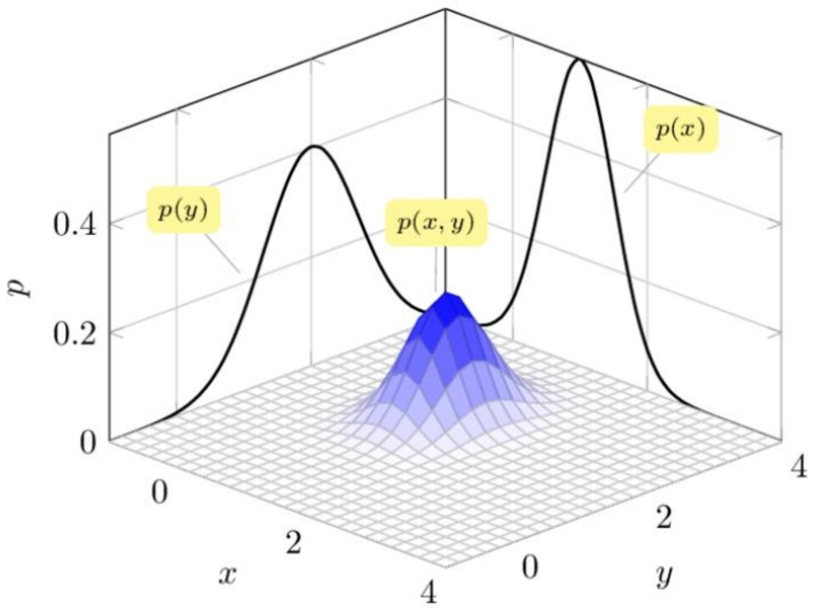
当 $n > 2$ 时, 令 $f(x_1, ..., x_n)$ 为 n 维连续型随机变量 $(X_1, ..., X_n)$ 的概率密度函数. 设 $(i_1, \cdots, i_m)$ 为 $(1, 2, ..., n)$ 的一个子集. 则同上可证, 则 $(X_{i_1}, ..., X_{i_m})$ 的概率密度函数是联合密度函数 $f(x_1, ..., x_n)$ 对除 $X_{i_1}, ..., X_{i_m}$ 之外的所有变量求积分.

例子

设 (X,Y) 的联合概率密度有形式 $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \quad = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\
& \left.\left. -2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $-\infty < a,b < \infty; 0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty; -1 \le \rho \le 1$. 则称 (X,Y) 服从参数为 $a,b,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布，记为 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 试计算 X 和 Y 的边际概率密度。



考虑两个概率密度函数

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= x+y, \qquad 0<x,y<1 \\
q(x,y) &= (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}), \qquad 0<x,y<1
\end{aligned}
$$

试求边际概率密度。

边缘概率密度函数不能决定联合概率密度函数!