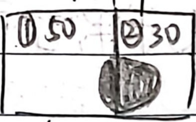
ch2

1. 有两种同种类型的零件，第一箱装50只，其中10只为一等品；第二箱装30只，其中18只为一等品。今从两箱中任挑一箱，然后从该箱中取两次零件，每次任取一只，不放回



(1) 第一次取到的零件是一等品的概率

解：B_i={第i箱产品} $i=1,2$　A_i={第i次取到一等品} $i=1,2$

$P(A_1)=P(A_1B_1)+P(A_1B_2)=P(A_1|B_1)P(B_1)+P(A_1|B_2)P(B_2)=\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

(2) 第1次取到的零件是一等品的条件下，第二次也是一等品的概率

解：设A_i={第i次取到一等品} $i=1,2$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}}{\frac{2}{5}}\approx 0.4856$$

2. 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中B,C分别是将一枚均匀骰子连续掷两次先后出现的点数。求该方程有实数根的概率和有重根概率

解：① 方程有实根　$\Delta=B^2-4C\geq 0$　$C\leq\frac{B^2}{4}$

1° 当$B=1$时，C无　2° 当$B=2$时，$C=1$　3° 当$B=3$时，$C=1,2$

4° 当$B=4$时，$C=1,2,3,4$　5° 当$B=5$时，$C=1,2,3,4,5,6$　6° 当$B=6$时，$C=1,2,3,4,$

设A={方程有实根}

$P(A)=\frac{19}{6\times6}=\frac{19}{36}$

② 方程有重根　$\Delta=B^2-4C=0$　$C=\frac{B^2}{4}$

1° 当$B=1$时，C无　2° 当$B=2$时，$C=1$　3° 当$B=3$时，C无

4° 当$B=4$时，$C=4$　5° 当$B=5$时，C无　6° 当$B=6$时，C无

设B={方程有重根}

$P(B)=\frac{2}{6\times6}=\frac{1}{18}$

3. 定义：若事件A,B满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A和B独立

证明A与B独立等价于$P(A|B)=P(A|B^c)$

证明：① 若A,B独立，则满足$P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

B^c是B的对立事件 $P(B^c)=1-P(B)$

$$P(A|B^c)=\frac{P(AB^c)}{P(B^c)}$$ 因为 $A\supset AB \Rightarrow P(AB^c)=P(A)-P(AB)$

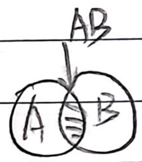
$$P(A|B^c)=\frac{P(A)-P(A)P(B)}{P(B^c)}=\frac{P(A)(1-P(B))}{1-P(B)}=P(A)$$

综上：$P(A|B)=P(A|B^c)$

② 若$P(A|B)=P(A|B^c)$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad P(A|B^c)=\frac{P(AB^c)}{P(B^c)}$$

$$\Rightarrow P(AB)\cdot P(B^c)=P(B)\cdot P(AB^c)\Rightarrow P(AB)\cdot(1-P(B))=P(B)\cdot P(A-AB)$$



又因为$AB\subset A$ $P(AB^c)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$$P(AB)\cdot(1-P(B))=P(B)\cdot(P(A)-P(AB))$$

化简得：$P(AB)=P(A)P(B)$ A与B独立

综上：证毕

4. 设A,B,C是三事件，已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(AC)=0$，求A,B,C至少一个发生的概率

解：即求$P(A\cup B\cup C)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-0+0$$

$$=1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$$

5. 如果把 $P(A|B)>P(A)$ 理解为"B对A有促进作用"，那么直观上似乎有如下结论：由 $P(A|B)>P(A)$ 及 $P(B|C)>P(B)$ 推出 $P(A|C)>P(A)$ 意思是B促进A，C促进B，故C促进A。举一简例说明上述直观看法不对

例：记A,B,C是三事件，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(AC)=0$.

① $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}>P(A)=\frac{1}{3}$

② $P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}>P(B)=\frac{1}{3}$

③ $P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{0}{\frac{1}{3}}=0<P(A)=\frac{1}{3}$ 矛盾