解 B

$X_1 \cdots X_n \sim N(\mu,1)$

由定义 ∵ 对总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则有 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\sim \chi_n^2$ $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})\sim \chi_{n-1}^2$

∴ 有

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim \chi_n^2$ A正确

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim \chi_{n-1}^2$ C正确

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(\mu,\frac{1}{n})$

∴ $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$

$n(\bar{X}-\mu)^2\sim \chi_1^2$ D正确

$X_n-X_1 \sim N(0,2)$ ∴ $\frac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$\frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim \chi_1^2$ 对于B: $2(X_n-X_1)^2$ 不为 χ^2 分布

解 ∵ T服从 χ^2 分布 随机样本 $X_1\ X_2\ X_3\ X_4$ 独立且服从 $N(0,2^2)$

∴ 有 $X_1-2X_2\sim N(0,2^2+(-2)^2\cdot 2^2)$ 即 $X_1-2X_2\sim N(0,20)$

$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$

∴ $(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}})^2\sim \chi_1^2$ $(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}})^2\sim \chi_1^2$ 且两者独立

又T服从 χ^2 分布

∴ $T=20a(\frac{X_1-2X_2}{\sqrt{20}})^2+100b(\frac{3X_3-4X_4}{\sqrt{100}})^2$

∴ 有 $20a=100b=1$

$a=\frac{1}{20}$ $b=\frac{1}{100}$

有 $T\sim \chi_2^2$

3.解. $X_1 X_2 \cdots X_9$ iid $\sim N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布

∴ $Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$

$Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$

∴ $Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{1}{2}\sigma^2)$

$i=7,8,9$ $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$ $Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{9} X_i$

∴有 $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_2$ 且 Y_2 与 S^2 相互独立

Y_1 Y_2 S^2 相互独立

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}/2}} \sim t_2$$

服从自由度为2的t分布

4.解 (1) 已知 $f(x)$

∴ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}dx + \int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}dx = \frac{1}{4}\theta + \frac{1-\theta^2}{4(1-\theta)} = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2}$

令 $\bar{X} = E(X)$ 即 $\bar{X} = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{2}$

∴ θ 矩估计量 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}$

(2) $E(4\bar{X}^2) = 4E(\bar{X}^2) = 4[Var(\bar{X}) + (E\bar{X})^2]$

$= 4[\frac{1}{n}Var(X) + (\frac{1}{4} + \frac{\theta}{2})^2] = \frac{4}{n}Var(\bar{X}) + \theta^2 + \theta + \frac{1}{4} > \theta^2$

∴ $4\bar{X}^2$ 不为 θ^2 的无偏估计量

5.解. 泊松分布 $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$ $k=0,1,2,\cdots$

∴似然函数 $L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} P(X = x_k) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{x_k}}{x_k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{k=1}^{n} x_k}}{\prod_{k=1}^{n} x_k!}e^{-n\lambda}$

∴ $\ln L(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} x_k \ln\lambda - n\lambda - \ln(\prod_{k=1}^{n} x_k!)$

令 $\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} x_k - n = 0$

∴ λ 最大似然估计 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \overline{X}$

∵ $P(X=0) = e^{-\lambda}$

∴ $P(X=0)$ 最大似然估计为 $\hat{P}(X=0) = e^{-\hat{\lambda}} = e^{-\overline{X}}$

6.解 (1) $\Theta = (-\infty, 0)$ $\quad \theta \in \Theta$ $\quad$ ∴ $\theta + |\theta| = 0$

$X \sim U(\theta, 0)$ $\quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta} & \theta \le x \le 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩估计

$EX = \frac{\theta+0}{2} = \frac{\theta}{2}$ $\quad$ 令 $EX = \overline{X}$

∴ θ 矩估计量 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$

最大似然估计 $\quad$ 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} (-\frac{1}{\theta})^n & \theta \le x_1 \cdots x_n \le 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

要使 $L(\theta)$ 为最大 $\quad$ 对 $(-\frac{1}{\theta})^n$ 为 随 n, θ 已固定的常数

当 $\theta > \min\limits_{1\le i\le n} x_i$ $\quad L=0$ $\qquad$ $\theta<0$ $\quad (-\frac{1}{\theta})^n$ 为单调增函数

$\theta \le \min\limits_{1\le i\le n} x_i < 0$ $\quad L(\theta) = (-\frac{1}{\theta})^n > 0$ $\qquad$ $\theta = \min\limits_{1\le i\le n} x_i$ 时 L 达到 max

∴ θ 最大似然估计 $\quad \theta = \min\limits_{1\le i\le n} x_i$

(2) $\Theta \in (0, +\infty)$ $\quad \theta \in \Theta$ $\quad \theta + |\theta| = 2\theta$ $\quad X \sim U(\theta, 2\theta)$ $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \theta \le x \le 2\theta \\ 0 & 其他 \end{cases}$

矩估计 $\quad EX = \frac{\theta+2\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$ $\quad$ 令 $EX = \overline{X}$

θ 矩估计量 $\quad \hat{\theta} = \frac{2\overline{X}}{3}$

最大似然估计 $\quad$ 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} (\frac{1}{\theta})^n & \theta \le x_1 \cdots x_n \le 2\theta \\ 0 & 其他 \end{cases}$

要使 $L(\theta)$ 为最大 $\quad (\frac{1}{\theta})^n$ 对 θ 为单调减函数 $\quad (\theta > 0)$

$\theta > \min\limits_{1\le i\le n} x_i$ $\quad \theta < \frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n} x_i$ $\quad L=0$ $\qquad$ 对 $x_i \in [\theta, 2\theta]$ 上述 θ 区间存在

当 $\frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n} x_i \le \theta \le \min\limits_{1\le i\le n} x_i$ $\quad L = (\frac{1}{\theta})^n$ $\qquad$ ∴ 当 $\theta = \frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n} x_i$ $\quad L(\theta)$ 为最大

∴ θ 最大似然估计 $\quad \theta = \frac{1}{2}\max\limits_{1\le i\le n} x_i$