

1. P173, 第 16 题

设 X 为一随机变量, 它的符号函数定义为

$$\operatorname{sgn}(X) = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0. \end{cases}$$

(1) 若 $X \sim U(-2, 1)$, 试求 $\operatorname{Var}(\operatorname{sgn}(X))$;

(2) 若 X 服从标准正态分布, 试求 $E[\operatorname{sgn}(X) \cdot X]$.

2. P173, 第 18 题

设随机变量 X 的分布律为 $P(X=1) = P(X=2) = 1/2$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i)$ ($i=1, 2$).

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求期望 $E(Y)$.

3. P174, 第 24 题

设某两个风险 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(\mu, 2\mu, \sigma^2, 2\sigma^2, \sqrt{2}/4)$, 某投资者购买了一个基于这两个风险和的金融衍生品 (欧式看涨期权), 即到期收益为

$$(X + Y - 3\mu)_+ = \max\{X + Y - 3\mu, 0\}.$$

(1) 求到期收益的期望 $E((X + Y - 3\mu)_+)$;

(2) 求到期收益的方差 $\operatorname{Var}((X + Y - 3\mu)_+)$.

4. P174, 第 26 题

设 X_1, X_2, X_3 服从球面 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 上的均匀分布, 求 $X_1 + X_2 + X_3$ 的期望 $E(X_1 + X_2 + X_3)$ 和方差 $\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$.

5. P178, 第 55 题

设随机变量 X 取值于 $[0, 1]$, 证明 $\operatorname{Var}(X) \leq 1/4$. 什么时候等号成立? 把该结果推广到 $0 < a \leq X \leq b$ 的情况.