1.一个无线通信公司，考虑改变按分钟收费为包月不限时间。公司预计新的策略会增加顾客每个月的通话时间。为了验证这个结论，公司随机抽取了900个包月客户，其一个月平均使用时间是$220\mathrm{min}$，样本标准差为$90\mathrm{min}$。同时也随机抽取了800个按流量收费的客户，其一个月平均使用时间和标准差分别为$160\mathrm{min}$和$80\mathrm{min}$，假设使用时间服从正态分布。

(1)求包月客户平均使用时间的95%置信区间；

(2)求按流量收费的客户平均使用时间的95%置信区间；

(3)包月客户使用时间方差的95%置信区间；

(4)按流量收费的客户使用时间方差的95%置信区间。

解：总体方差未知，使用枢轴变量$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t_{n-1}$，方差枢轴变量$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$

(1)有$\mu\in\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)=220\pm\frac{90}{\sqrt{900}}t_{899}(0.025)=220\pm3t_{899}(0.025)$

(2)有$\mu\in\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)=160\pm\frac{80}{\sqrt{800}}t_{799}(0.025)=160\pm2\sqrt{2}t_{799}(0.025)$

(3)有$\sigma^2\in[(n-1)s^2/\chi^2_{n-1}(\alpha/2),(n-1)s^2/\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)]=[899\frac{90^2}{\chi^2_{899}(0.025)},899\frac{90^2}{\chi^2_{899}(0.975)}]$

(4)有$\sigma^2\in[(n-1)s^2/\chi^2_{n-1}(\alpha/2),(n-1)s^2/\chi_{n-1}(1-\alpha/2)]=[799\frac{80^2}{\chi^2_{799}(0.025)},799\frac{80^2}{\chi^2_{799}(0.975)}]$

2.一批零件的长度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从这批零件中随机抽取10件，测得长度(单位：mm)分别为

$$49.5, 50.4, 49.7, 51.1, 49.4, 49.7, 50.8, 49.9, 50.3, 50.0.$$

在下列两种情况下求这批零件长度总体方差σ^2的95%置信区间

(1)$\mu=50\mathrm{mm}$;

(2)μ未知.

解：

(1)已知μ，则枢轴变量$\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_n$，有$P(\chi^2_{10}(1-\frac{\alpha}{2})\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\leqslant\chi^2_{10}(\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$，于是，$\sigma^2$的95%置信区间为$[\frac{2.9}{\chi^2_{10}(0.025)},\frac{2.9}{\chi^2_{10}(0.975)}]=[0.1416,0.8931]$

(2)由题，有$\bar{x}=50.08$，则枢轴变量$\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{x})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$，有$P(\chi^2_9(1-\frac{\alpha}{2})\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\leqslant\chi^2_9(\frac{\alpha}{2}))=1-\alpha$，于是$\sigma^2$的95%置信区间为$[\frac{2.836}{\chi^2_9(0.025)},\frac{2.836}{\chi^2_9(0.975)}]=[0.1491,1.0504]$

3.假设湖中有N尾鱼（N很大），现钓出r尾鱼，做上标记后放回湖中。一端时间后，再钓出s尾鱼（设s远大于r），其中有t尾鱼有标记（s,t已知）

(1)若r,N未知，求r/N的$1-\alpha$置信区间；

(2)若只有N未知，求N的$1-\alpha$置信区间。

解：由题，$N>>s>>r>t$

(1)首先有$p=r/N$的点估计为$\hat{p}=t/s$，因为$s>>r$且N很大，于是$p\in\hat{p}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{s}}=\frac{t}{s}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{t(s-t)}{s^3}}$

(2)$N=r/p\in[r/(\frac{t}{s}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{t(s-t)}{s^3}}),r/(\frac{t}{s}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{t(s-t)}{s^3}})]$

4.设一农作物的单位面积产量服从正态分布$N(80,\sigma^2)$，其标准差$\sigma=5$，问至少需要几块试验田，才能有99%把握保证这些试验田的单位面积平均产量大于75?

解：

由题，枢轴变量$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$，则$P(\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma}\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$

要求即化为$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\leqslant5,n\geqslant(\frac{\sigma u_{0.01}}{5})^2=5.4$，所以至少需要6块试验田

5.在某一商学院毕业的某届硕士生中随机抽取了40位，调查得知他们的平均起薪是8000元，样本标准差是900元，求这一届毕业生平均起薪的95%置信区间和95%置信下限。

解：取枢轴变量$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$，则有95%置信区间为$\mu \in \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) = 8000 \pm \frac{900}{\sqrt{40}} t_{39}(0.025) = 8000 \pm 45\sqrt{10} t_{39}(0.025)$，95%置信下限为$\mu \geqslant \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha) = 8000 - \frac{900}{\sqrt{40}} t_{39}(0.05) = 8000 - 45\sqrt{10} t_{39}(0.05)$