概统作业 (Week 1)

March 10, 2023

1 (P42，习题 11)

(1) 基本事件共有 $|\Omega| = \binom{52}{10}$ 个.

(1) 有 1 种花色: 基本事件有 $\binom{4}{1}\binom{13}{10} = 4\binom{13}{10}$ 个.

(2) 有 2 种花色: 基本事件有 $\binom{4}{2}\sum_{i=1}^{9}\binom{13}{i}\binom{13}{10-i} = 6\left[\binom{26}{10} - 2\binom{13}{10}\right]$ 个.

(3) 有 3 种花色: 基本事件有

$$
\begin{aligned}
\binom{4}{3}\sum_{i=1}^{8}\binom{13}{i}\left[\sum_{j=1}^{9-i}\binom{13}{j}\binom{13}{10-i-j}\right] =& 4\sum_{i=1}^{8}\binom{13}{i}\left(\binom{26}{10-i} - 2\binom{13}{10-i}\right) \\
=& 4\sum_{i=1}^{8}\left[\binom{13}{i}\binom{26}{10-i} - 2\binom{13}{i}\binom{13}{10-i}\right] \\
=& 4\left[\binom{39}{10} - 3\binom{26}{10} + 3\binom{13}{10}\right]
\end{aligned}
$$

即:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= 1 - \frac{4\binom{39}{10} - 6\binom{26}{10} + 4\binom{13}{10}}{\binom{52}{10}} \\
&= 1 - \frac{4\times 39\times\cdots\times 30 - 6\times 26\times\cdots\times 17 + 4\times 13\times\cdots\times 4}{52\times\cdots\times 43} \\
&\approx 0.8413
\end{aligned}
$$

2 (P42，习题 12)

记胜为 +, 负为-. 记甲在三局两胜制中胜利为事件 A, 甲在五局三胜制游戏中胜利为事件 B.

(1) 三局两胜制 (甲胜情况:+++,++-,+-+,-++)

(a) 甲:+++

$$\mathbb{P}(a) = p^3.$$

(b) 甲:++-

$$\mathbb{P}(b) = p^2(1-p).$$

(c) 甲:+-+

$$\mathbb{P}(c) = p(1-p)p = p^2(1-p).$$

(d) 甲:-++

$$\mathbb{P}(d) = (1-p)p^2.$$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(a) + \mathbb{P}(b) + \mathbb{P}(c) + \mathbb{P}(d) = p^2(3-2p).$

(2) 五局三胜制 (甲胜情况:5+,4+,3+)

(a) 甲:5+

$$\mathbb{P}(a) = \binom{5}{5} p^5 = p^5.$$

(b) 甲:4+

$$\mathbb{P}(b) = \binom{4}{5} p^4(1-p) = 5p^4(1-p).$$

(c) 甲:3+

$$\mathbb{P}(c) = \binom{3}{5} p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) =& \mathbb{P}(a) + \mathbb{P}(b) + \mathbb{P}(c) \\ =& p^3[p^2 + 5p - 5p^2 + 10(p^2 - 2p + 1)] \\ =& p^3(6p^2 - 15p + 10)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}f(p) =& \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \\ =& p^3(6p^2 - 15p + 10) - p^2(3-2p) \\ =& 3p^2(2p^3 - 5p^2 + 4p - 1)\end{aligned}$$

则

$$f(0) = f(0.5) = f(1) = 0 \Rightarrow f(p) = 3p^2(2p-1)(p-1)^2 > 0, \mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A)$$

即五局三胜制对甲更有利.

3 (P42，习题 14)

$|\Omega| = P_N^n = n! \cdot C_N^n$. 分别用 A, B, C 表示上述 $(1)-(3)$ 各事件.

(1) 即等价于将 n 个人和 $N-n$ 个座位排成一排，而且每个人不相邻

$$|A| = n! \cdot C_{N-n+1}^n \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{N-n+1}^n}{C_N^n}.$$

(2) 将两个人视为一对，则等价于将 $n/2$ 对和 $N-n$ 个座位排成一排，而且每对不相邻. 若 $2|n$，有

$$|B| = n! \cdot C_{N-n+1}^{n/2} \;\Rightarrow\; P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_{N-n+1}^{n/2}}{C_N^n}.$$

(3)

$$|C| = \begin{cases} 2^n \cdot n! \cdot C_{N/2}^n & (N \equiv 0(\mathrm{mod} 2)) \\ n \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot C_{(N-1)/2}^{n-1} + 2^n \cdot n! \cdot C_{(N-1)/2}^n & (N \equiv 1(\mathrm{mod} 2)) \end{cases}$$

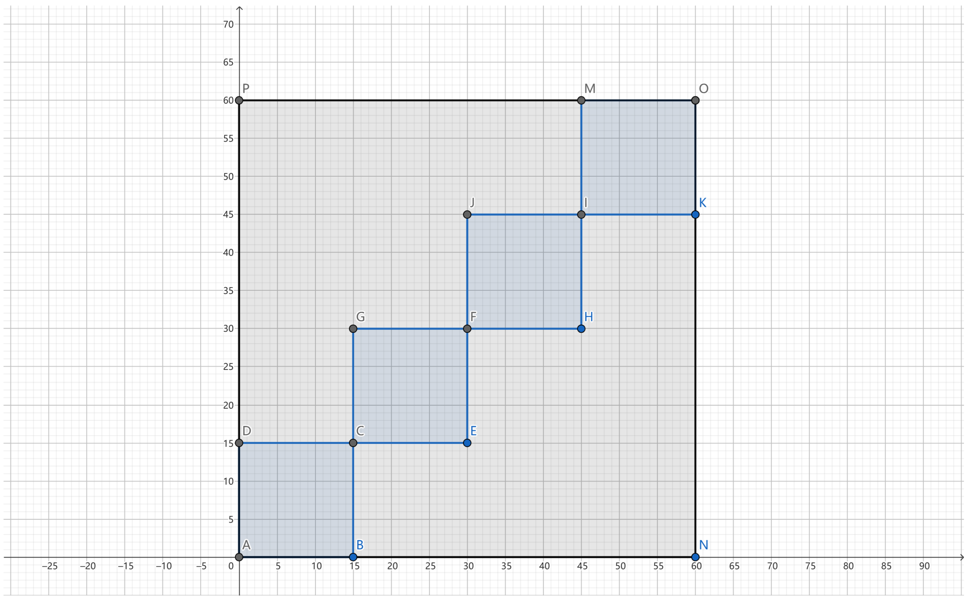
$$\Rightarrow\; P(C) = \begin{cases} \dfrac{2^n \cdot C_{N/2}^n}{C_N^n} & (N \equiv 0(\mathrm{mod} 2)) \\ \\ \dfrac{2^{n-1} \cdot C_{(N-1)/2}^{n-1} + 2^n \cdot C_{(N-1)/2}^n}{C_N^n} & (N \equiv 1(\mathrm{mod} 2)) \end{cases}$$

4 （P42，习题 18）

设甲到达时距 3 点 x 分钟，乙到达时距 3 点 y 分钟，以第 i 班公交车在 3 点后 t_i $(t_0=0)$ 分钟到达.

$$\text{甲乙均上了第 } i \text{ 班车} \ \Leftrightarrow\ t_{i-1}<x,y\le t_i,\ (i=1,2,3,4)$$

如图



$$P=\frac{S_{\text{蓝}}}{S_{\text{总}}}=\frac{4\times 15\times 15}{60\times 60}=\frac{1}{4}$$

即概率为 $\frac{1}{4}$.

5 （P42，习题 22）

除始发站外有 11 站，$|\Omega|=11^8$. 分别用 A,B,C 表示上述 (1) − (3) 各事件.

(1)

$$|A|=8!\cdot C_{11}^{8}\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{8!\cdot C_{11}^{8}}{11^8}$$

(2)

$$|B|=C_{11}^{1}\ \Rightarrow\ P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{1}{11^7}$$

(3)

$$|C|=C_{11}^{3}\cdot 5!\cdot C_{8}^{5}\ \Rightarrow\ P(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{5!\cdot C_{11}^{3}\cdot C_{8}^{5}}{11^8}$$