1.解：证明：$X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$，故

$\forall \varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P(|Y_n-Y|\geq\varepsilon)=0$

又 $|X_n+Y_n-X-Y|\leq|X_n-X|+|Y_n-Y|$

故 $\{|X_n+Y_n-X-Y|\geq\varepsilon\}\subset(\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\})$

则 $P\{|X_n+Y_n-X-Y|\geq\varepsilon\}\leq P\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}+P\{|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n+Y_n-X-Y|\geq\varepsilon\}=0$

即 $X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$ 得证.

2.解：记 $X=\{$事件A发生的次数$\}$，则 $X\sim B(500,0.2)$

故 $\mu=EX=500\times0.2=100$，$Var(X)=500\times0.2\times(1-0.2)=80$

①切比雪夫不等式，

$\forall\varepsilon>0$，$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

则 $P(80\leq X\leq120)=1-P(|X-100|\geq20)\geq1-\frac{80}{20^2}=0.8$

②中心极限定理，

$P(80\leq X\leq120)\approx\Phi\left(\frac{120-100}{\sqrt{80}}\right)-\Phi\left(\frac{80-100}{\sqrt{80}}\right)=2\Phi(\sqrt{5})-1=0.9748$

3.解：(1) 记 $X_i=\{$组装第 i 件产品所需的时间(h)$\}$

由题知，$X_i\sim Exp(\lambda)$，$EX_i=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{6}\Rightarrow\lambda=6$

故 $X_i \sim Exp(6)$, $Var(X_i)=\frac{1}{36}$

则 $P(15 \le \sum_{i=1}^{100} X_i \le 20) = \Phi\left(\frac{20-100/6}{10/6}\right) - \Phi\left(\frac{15-100/6}{10/6}\right) = \Phi(2)-\Phi(-1)$

$= \Phi(2)+\Phi(1)-1 = 0.8413+0.9772-1 = 0.8185$

(2) 由题，设16h内最多可组装n件产品，则应

$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 16) \ge 0.95$

故 $\Phi\left(\frac{16-n/6}{\sqrt{n}/6}\right) \ge 0.95 \Rightarrow \frac{96-n}{\sqrt{n}} \ge 1.65 \Rightarrow n+1.65\sqrt{n}-96 \le 0$

则 $0 \le \sqrt{n} \le 9$ ，故取 $n=81$

4. ~~解~~ 证明: 设 $X_i \overset{i.i.d}{\sim} P(1)$, $i \in N_+$, 故 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n)$, $\mu=1$, $\sigma^2=1$

则 $P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$,

又由中心极限定理,

$\lim_{n\to\infty} P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le n\} = \Phi\left(\frac{n-n\times 1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

即 $e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}$ $(n\to\infty)$ 得证.

5. 解: (1) 样本空间为 $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i = 0$ 或 1, $i=1,2,3,4,5\}$

抽样分布为

$P(X_1=x_1, X_2=x_2, X_3=x_3, X_4=x_4, X_5=x_5) = p^k (1-p)^{5-k}$,

$\sum_{i=1}^{5} x_i = k$, $0 \le k \le 5$

(2) X_1+X_2，$\min\limits_{1\le i\le 5} X_i$ 是完全由样本决定的量，是统计量.

X_5+2p，$X_5-E(X_1)$，$\dfrac{(X_5-X_1)^2}{Var(X_1)}$ 中含未知参量，故不是统计量.