概统作业 (Week 4)

PB20000113 孔浩宇

April 2, 2023

1 (P82 第 12 题)

(1) 记一次产卵数量为 X.

$$P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=n,Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=n)P(Y=k\mid X=n)$$

又

$$P(X=n)P(Y=k\mid X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\quad(n\geq k)$$

故

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\frac{n!\cdot p^k}{k!\cdot(n-k)!}\cdot(1-p)^{n-k}\\&=\frac{\lambda^k\cdot p^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!}\\&=\frac{\lambda^k\cdot p^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda-\lambda p}\\&=\frac{\lambda^k\cdot p^k}{k!}e^{-\lambda p}.\end{aligned}$$

同理有

$$P(Z=k)=\frac{\lambda^k\cdot(1-p)^k}{k!}e^{-\lambda(1-p)}.$$

即 Y 服从参数为 λp 的泊松分布，Z 服从参数为 $\lambda(1-p)$ 的泊松分布.

(2)

$$P(Y=m,Z=n)=\frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!}e^{-\lambda}\cdot\ p^m(1-p)^n$$

2 (P83 第 19 题)

3 (P83 第 21 题)

4 (P84 第 26 题)

5 (P84 第 28 题)

6 (P84 第 29 题)