1.(P121,43)设随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明：X,Y不独立，但是X^2,Y^2相互独立.

证明：

因为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 有$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以X,Y不独立.

又$F_{X^2}(x)=P(X^2\leqslant x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$同理，有$F_{Y^2}(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$而

$F_{X^2,Y^2}(x,y)=P(X^2\leqslant x,Y^2\leqslant y)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x\text{或}y<0,\\ \sqrt{xy}, & 0\leqslant x,y<1,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\leqslant y,\\ \sqrt{y}, & 0\leqslant y<1\leqslant x,\\ 1, & x,y\geqslant 1.\end{cases}$则有$F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y)=F_{X^2,Y^2}(x,y)$，因此$X^2,Y^2$相互独立.

2.(P121,44)设连续型随机变量$X\sim f(x)$，Y为取有限值的离散型随机变量,且X,Y相互独立.

(1)求$Z=X+Y$的分布.由此回答随机变量Z是否为连续型的?

(2)求$W=XY$的分布,问W是不是连续型随机变量?以$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim B(1,p)$为例求出$W$具体的分布.

解：设Y的概率空间为I_Y

(1)利用全概率公式，由于X,Y独立，有

$$\begin{aligned}F_Z(z)=&P(X+Y\leqslant z)\\=&\sum_{i\in I_Y}P(X\leqslant z-i,Y=i)\\=&\sum_{i\in I_Y}P(X\leqslant z-i|Y=i)P(Y=i)\\=&\sum_{i\in I_Y}P(X\leqslant z-i)P(Y=i)\\=&\sum_{i\in I_Y}P(Y=i)\int_{-\infty}^{z-i}f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

已知$f(x)$连续，则$\int f(x)$连续，$F_Z(z)$为连续函数的求和，也连续，则Z是连续型的.

(2)同(1)，有

$$\begin{aligned}F_W(w)=&P(XY\leqslant w)\\=&\sum_{i\in I_Y\cap R^+}P(X\leqslant\frac{w}{i},Y=i)+\sum_{i\in I_Y\cap R^-}P(X\geqslant\frac{w}{i},Y=i)+P(Y=0)I_{[0,+\infty)}(w)\\=&\sum_{i\in I_Y\cap R^+}P(Y=i)\int_{-\infty}^{w/i}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{i\in I_Y\cap R^-}P(Y=i)\int_{w/i}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x+P(Y=0)I_{[0,+\infty)}(w),\end{aligned}$$

如果$P(Y=0)=0$，则$F_W(w)$为连续函数求和，W是连续型的，否则不是。

代入$P(Y=1)=p,P(Y=0)=1-p$，得

$$\begin{aligned}F_W(w)=&P(Y=1)\int_{-\infty}^{w}f(x)\mathrm{d}x+P(Y=0)I_{[0,+\infty)}(w)\\=&pP(X\leqslant w)+(1-p)I_{[0,+\infty)}(w)\\=&\begin{cases}p\Phi(\frac{w-\mu}{\sigma})+1-p, & w\geqslant 0,\\ p\Phi(\frac{w-\mu}{\sigma}), & w<0.\end{cases}\end{aligned}$$

3.设随机变量φ和ω独立,同服从参数$\lambda=1$的指数分布,求$\frac{\varphi}{\omega}$的密度函数.

解：由题，φ和ω的密度函数为$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}I_{[0,+\infty)}(x)$，令$Z=\frac{\varphi}{\omega}$，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|t|f_{\varphi,\omega}(zt,t)\mathrm{d}t$$

因为φ和ω相互独立，有

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}|t|f(zt)f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{\infty}t\lambda e^{-\lambda zt}\lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\lambda^2}{(\lambda z+1)^2},\end{aligned}$$

注意当$z<0$时，有$f(zt)=0$，则有

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{\lambda^2}{(\lambda z+1)^2}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

4.设随机变量X_1和X_2相互独立,并具有相同的几何分布:$P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\ldots(i=1,2)$,求$Y=\max(X_1,X_2)$的分布.

解：因为X_1,X_2相互独立，所以有

$$\begin{aligned}F_Y(y)=&P(Y\leqslant y)\\=&P(X_1\leqslant y,X_2\leqslant y)\\=&P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\\=&\sum_{1=0}^{y}P(X_1=k)\sum_{k=1}^{y}P(X_2=k)\\=&\left(\sum_{k=1}^{y}p(1-p)^{k-1}\right)^2=(1-(1-p)^y)^2,\qquad y=1,2,\ldots\end{aligned}$$

则$P(Y=k)=F_Y(k)-F_Y(k-1)=(1-(1-p)^k)^2-(1-(1-p)^{k-1})^2,k=1,2,\ldots$

5.设随机变量X和Y相互独立,且都服从标准正态分布$N(0,1)$,试证：$U=X^2+Y^2$和$V=\frac{X}{Y}$相互独立.

证明：由题，$U\sim\chi_2^2$，$f_U(u)=\frac{1}{2}e^{-u/2}I(u>0),F_U(u)=\int_{-\infty}^{u}f_U(x)\mathrm{d}x=(1-e^{-\frac{u}{2}})I(u>0)$，$V$服从柯西分布，$f_V(v)=\frac{1}{\pi(1+v^2)},F_V(v)=\int_{-\infty}^{v}f_V(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\arctan v+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\pi}\arctan v+\frac{1}{2}$.

因为X,Y独立，有$f_{X,Y}(x,y)=f(x)f(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，则

$$\begin{aligned}F_{U,V}(u,v)=&P(X^2+Y^2\leqslant u,\frac{X}{Y}\leqslant v)\\=&\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&I(u>0)2\int_0^{\sqrt{u}}\int_{\arctan(1/v)}^{\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\=&I(u>0)\frac{1}{\pi}(1-e^{-u/2})(\pi-\arctan(1/v)\\=&I(u>0)\frac{1}{\pi}(1-e^{-u/2})(\pi-(\frac{\pi}{2}-\arctan v))\\=&(\frac{1}{\pi}\arctan v+\frac{1}{2})(1-e^{-\frac{u}{2}})I(u>0)\\=&F_U(u)F_V(v).\end{aligned}$$

因此，U,V独立.