一个随机变量 (或向量) 的条件概率分布，就是在给定 (或已知)某种条件(某种信息) 下该随机变量 (向量) 的概率分布.

(1). 二维离散型随机变量的条件分布

当 (X, Y) 为二维离散型随机变量时, 设联合分布律为

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

如果 $\mathbb{P}(Y = y_j) > 0$, 则根据条件概率的定义, 在给定 $Y = y_j$ 下 X 的条件分布律为

$$p_{i|j} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

同理如果 $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$, 则给定 $X = x_i$ 下 Y 的条件分布律为

$$p_{j|i} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

设二维随机向量 (X_1, X_2) 的联合分布律如下所示:

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	5
1	0.17	0.05	0.21
3	0.04	0.28	0.25

试求当 $X_2 = 0$ 时，X_1 的条件分布律

例子

- 设$(X_1,\dots,X_n)\sim M(N;p_1,\dots,p_n)$，试求$X_1$在给定$X_2=k$的条件下的条件分布律.

(2). 二维连续型随机变量的条件分布

当 (X,Y) 为二维连续型随机变量时, 记联合概率密度函数为 $f(x,y)$. 由于连续型随机变量取任意一点的概率为 0, 故此时不能直接使用条件概率. 但是注意到如果定义条件分布函数

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y) &= \mathbb{P}(X \le x|Y=y) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{P}(X \le x|y \le Y \le y+\epsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(F(x,y+\varepsilon)-F(x,y))/\varepsilon}{\mathbb{P}(y<Y\le y+\varepsilon)/\varepsilon} \\
&= \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\Big/\frac{\partial F_2(y)}{\partial y} \\
&= \int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_2(y)}du \\
&\equiv \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)du,
\end{aligned}
$$

其中 Y 的概率密度函数在 y 处的值 $f_2(y) > 0$.

由连续型随机变量的定义和概率密度函数的性质，左式定义了X在给定条件$Y=y$下的分布函数和概率密度函数. 即：条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y)$ 可以表示为非负函数$f_{X|Y}(x|y)$的积分，故其为条件概率密度函数.

定义 3.8 条件密度函数

如果 Y 的概率密度函数在 y 处的值 $f_2(y) > 0$, 则称

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \tag{3.10}$$

为给定 $Y = y$ 下随机变量 X 的条件概率密度函数 (conditional pdf). 同理, 给定 $X = x$ 下随机变量 Y 的条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$ 为:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}, \text{当} f_1(x) > 0 \tag{3.11}$$

♣

给定 $X = x$ 下随机变量 Y 的条件密度函数也常常表为 $Y|X = x \sim f_{Y|X}(y|x)$, 或 $Y|x \sim f_{Y|X}(y|x)$. 由条件密度函数的定义, 我们有

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_1(x) = f_{X|Y}(x|y)f_2(y).$$

由此得到连续型随机变量的贝叶斯公式版本:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_2(y)}{f_1(x)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_1(x)}{f_2(y)}.$$

设 (X,Y) 服从二元正态分布 $N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，试求 $X|Y=y$ 的条件概率密度。

- 设(X, Y)服从单位圆上的均匀分布，试求$f_{X|Y}(x|y)$.

(3). n维随机变量的条件分布

把随机变量X,Y都换成随机向量$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$, 我们可以把两个随机变量的条件分布推广到$n$维随机变量的条件分布. 设

$$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k),\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_{n-k}),$$

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_{n-k}).$$

记随机向量 $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ 的边缘密度分别为 $f_X(\mathbf{x})$ 和 $f_Y(\mathbf{y})$, 则给定随机向量 $\mathbf{Y}=\mathbf{y}$ 下随机向量 $\mathbf{X}$ 的条件密度 $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 定义为

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\frac{f(\mathbf{x},\mathbf{y})}{f_Y(\mathbf{y})},\ f_Y(\mathbf{y})>0.$$

同理, 给定随机向量 $\mathbf{X}=\mathbf{x}$ 下随机向量 $\mathbf{Y}$ 的条件密度 $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ 定义为

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})=\frac{f(\mathbf{x},\mathbf{y})}{f_X(\mathbf{x})},f_X(\mathbf{x})>0.$$