1. P122,48

48.* 设 $(X,Y) \sim N(0,0,1,1,\rho)$, 证明

(1) 随机变量 X 与随机变量 $Z = \dfrac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ 相互独立;

(2) 利用 (1) 的结论证明

$$P(XY<0) = 1 - 2P(X>0, Y>0) = \pi^{-1}\arccos\rho. \tag{3.28}$$

2. P171,1

1. 篮球联赛的总决赛采用七战四胜制, 即哪支球队先获得四场比赛的胜利即可获得该年度的总冠军. 假设 A, B 两队势均力敌, 即每场各队获胜的概率都为 $p=0.5$, 以 X 表示一届总决赛的比赛场次, 试求 $E(X)$. 若 A 队每场获胜的概率均为 $p=0.6$ 呢?

3. P171,2

设随机变量 X 的期望存在, 试证明:

(1) 若 X 为非负整值随机变量, 则

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n);$$

(2) 若 X 为非负连续型随机变量, 且分布函数为 $F(x)$, 则

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\mathrm{d}x;$$

(3) 若 X 为非负随机变量, 则 (2) 中的结论依然成立.

4. P171，8

某零食厂商设计了一种营销策略, 即在产品中放入一套有趣的卡片. 假设这套卡片由 $n=12$ 张不同的卡通人物头像组成, 且在每袋零食中随机放入其中一张. 某人想集齐这套卡片, 设他一共需要买 X_n 袋该零食. 试求:

(1) $E(X_n)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{X_n}{n\ln n}\right)$.

5. P173,11

设随机变量 X 只能取有限个正值 $x_1, x_2, \cdots, x_k (k \geqslant 2)$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X^{n+1})}{E(X^n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant k} x_i.$$