1.(P84,31) 设随机变量$X \sim N(1,4)$,

(1) 试求概率$P(0 \leqslant X \leqslant 4)$, $P(X > 2.4)$和$P(|X| > 2)$;

(2) 试求常数c, 使得$P(X > c) = 2P(X \leqslant c)$.

解：由题，$\frac{X-1}{2} \sim N(0,1)$

(1)$P(0 \leqslant X \leqslant 4) = P(-\frac{1}{2} \leqslant \frac{X-1}{2} \leqslant \frac{3}{2}) = \Phi(\frac{3}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2}) = \Phi(\frac{3}{2}) + \Phi(\frac{1}{2}) - 1 = 0.9332 + 0.6915 - 1 = 0.6247,$

$P(X > 2.4) = P(\frac{X-1}{2} > 0.7) = 1 - \Phi(0.7) = 1 - 0.7580 = 0.242,$

$P(|X| > 2) = P(X > 2) + P(X < -2) = P(\frac{X-1}{2} > \frac{3}{2}) + P(\frac{X-1}{2} < -\frac{5}{2}) = 1 - \Phi(\frac{3}{2}) + 1 - \Phi(\frac{5}{2}) = 2 - 0.9332 - 0.9938 = 0.073;$

(2)$P(X > c) = P(\frac{X-1}{2} > \frac{c-1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{c-1}{2})$，$P(X \leqslant c) = P(\frac{X-1}{2} \leqslant \frac{c-1}{2}) = \Phi(\frac{c-1}{2})$，则有$1 - \Phi(\frac{c-1}{2}) = 2\Phi(\frac{c-1}{2})$，$\Phi(\frac{c-1}{2}) = \frac{1}{3}$，查表有$\Phi(0.43) = 0.6664$，则$c \approx 0.14$.

2.(P84,32) 在一个流水线上, 我们测量每个电阻器的电阻值R, 只有电阻值介于96Ω和104Ω之间的电阻器才是合格的, 对下列情形试求合格电阻器的比例:

(1) 若R服从区间$(95,105)$上的均匀分布;

(2) 若R服从正态分布$N(100,4)$.

解:

(1)由题，$P(96 \leqslant R \leqslant 104) = \frac{104-96}{105-95} = \frac{4}{5}$;

(2)由题，$P(96 \leqslant R \leqslant 104) = P(-2 \leqslant \frac{R-100}{2} \leqslant 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544.$

3.(P85,37) 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x) = a + b\arctan x, -\infty < x < \infty.$$

(1) 试求常数a, b的值;

(2) 试求随机变量$Y = 3 - X^{1/3}$的密度函数$p(y)$.

解:

(1)由方程

$$\begin{cases} F(-\infty) = 0 \\ F(+\infty) = 1 \end{cases}$$

解得$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{\pi}$;

(2)由(1)得$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$，且$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$，又$Y = 3 - X^{1/3} \Rightarrow X = (3-Y)^3$，则有$p(y) = f(h(y))|h'(y)| = \frac{3(y-3)^2}{\pi(1+(y-3)^6)}$.

4.(P85,40) 设随机变量$X \sim U(0,1)$, 试求下列随机变量的密度函数.

(1) $Y_1 = e^X$;

(2) $Y_2 = X^{-1}$;

(3) $Y_3 = -\frac{1}{\lambda}\ln X, \lambda > 0$为常数.

解：$X \sim U(0,1) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1)$Y_1=e^X\Rightarrow X=\ln Y_1$，因此$f_1(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y\leqslant e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

(2)$Y_2=X^{-1}\Rightarrow X=Y_2^{-1}$，因此$f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & y\geqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

(3)$Y_3=-\frac{1}{\lambda}\ln X\Rightarrow X=e^{-\lambda Y_3}$，因此$f_3(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

5.(P86,49) 设随机变量$X\sim U(0,1)$, 求下列随机变量的分布函数或分布密度:

(1) $Y=\frac{X}{1-X}$;

(2) $Z=X\mathbf{I}_{(a,1]}(X)$, 其中$0\leqslant a\leqslant 1$;

(3) $W=X^2+X\mathbf{I}_{(0,b]}(X)$, 其中$0\leqslant b\leqslant 1$.

解：$X\sim U(0,1)\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(1)$Y=\frac{X}{1-X}\Rightarrow X=1-\frac{1}{Y+1}$，因此$f_1(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ \frac{1}{(y+1)^2}, & y>0\end{cases}$，$F_1(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ 1-\frac{1}{y+1}, & y>0\end{cases}$；

(2)$Z=X\mathbf{I}_{(a,1]}(X)$，则$X\notin(a,1]$时$Z\equiv 0$，因此不存在反函数，$F_2(z)=P(Z\leqslant z)=\int_{X\mathbf{I}_{(a,1]}(X)\leqslant z}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ a, & 0<z\leqslant a\\ z, & a<z\leqslant 1\\ 1, & z>1\end{cases}$，在零点不连续，不存在分布密度函数;

(3)$W=X^2+X\mathbf{I}_{(0,b]}(X)$，则存在$X_1\in(0,b],X_2\in(b,1]$，对应$W$值相等，即不存在反函数。此时对$b^2+b-1$的正负性进行讨论。

当$0\leqslant b<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即$b^2+b<1$时，$F_3(w)=P(W\leqslant w)=\int_{X^2+X\mathbf{I}_{(0,b]}(X)\leqslant w}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & w\leqslant 0\\ \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}, & 0<w\leqslant b^2\\ \sqrt{w}, & b^2<w\leqslant 1\\ 1, & w>1\end{cases}$, 因为不连续，不存在分布密度函数;

当$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant b\leqslant 1$，即$b^2+b\geqslant 1$时，$F_3(w)=P(W\leqslant w)=\int_{X^2+X\mathbf{I}_{(0,b]}(X)\leqslant w}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & w\leqslant 0\\ \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}, & 0<w\leqslant b^2\\ \sqrt{w}, & b^2<w\leqslant 1\\ \frac{-1+\sqrt{1+4w}}{2}, & 1<w\leqslant b^2+b\\ 1, & w>b^2+b\end{cases}$，因为不连续，也不存在分布密度函数.