1.(P116,1) 箱中装有6个球，其中红、白、黑的个数分别为1,2,3，现从箱中随机抽出2个球，记X为取出红球的个数，Y为取出白球的个数，求随机变量(X,Y)的联合分布函数。

解:

$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$

$P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{2}{5}$

$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

$P(X=1,Y=0)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{1}{5}$

$P(X=1,Y=1)=\frac{C_1^1C_2^2}{C_6^2}=\frac{2}{15}$

则联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,y<0,\\ \frac{1}{5}, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1,\\ \frac{3}{5}, & 0\leqslant x<1,1\leqslant y<2,\\ \frac{2}{3}, & 0\leqslant x<1,2\leqslant y,\\ \frac{2}{5}, & 1\leqslant x,0\leqslant y<1,\\ \frac{14}{15}, & 1\leqslant x,1\leqslant y<2,\\ 1, & 1\leqslant x,2\leqslant y.\end{cases}$$

2.(P1116,7) 设某个射手每次射中目标的概率为$p(0<p<1)$，射击进行到第二次射中目标为止，X表示第一次射中目标所进行的射击次数，Y表示第二次射中目标所进行的射击次数。

(1)求二维随机变量(X,Y)的联合分布律;

(2)求X,Y的边缘分布。

解:

(1)当$i<j$有$P(X=i,Y=j)=(1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-i-1}p=(1-p)^{j-2}p^2$，则$P(X=i,Y=j)=\begin{cases}(1-p)^{j-2}p^2, & 1\leqslant i<j,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2)$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p,i\geqslant 1,$

$P(Y=j)=C_{j-1}^1(1-p)^{j-2}p^2=(j-1)(1-p)^{j-2}p^2,j\geqslant 2.$

3.(P117,10) 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\cos x\cos y,0<x,y<\frac{\pi}{2}$

(1)试求(X,Y)的分布函数;

(2)试求概率$P(0<X<\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}<Y<\frac{\pi}{2})$.

解:

(1)$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^x\cos u\mathrm{d}u\int_0^y\cos v\mathrm{d}v=\sin x\sin y$

(2)$P(0<X<\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}<Y<\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})-F(0,\frac{\pi}{2})-F(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})+F(0,\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-0-\frac{1}{2}+0=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$

4.(P117,15) 设X和Y是相互独立的随机变量，$X\sim N(0,\sigma_1^2),Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，其中$\sigma_1,\sigma_2>0$是常数，引入随机变量:

$$Z=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$$

求Z的分布律。

解：由题，$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}},f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}},$

假设$W=X-Y$，有

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,x-w)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x-w)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}\exp\left\{-\frac{(x-w)^2}{2\sigma_2^2}\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left\{-\frac{w^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}\exp\left\{-\frac{(x-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z)^2}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left\{-\frac{w^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right\}
\end{aligned}
$$

因此，有$W\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，则$P(Z=1)=P(W\leqslant 0)=\frac{1}{2}, P(Z=0)=1-P(Z=1)=\frac{1}{2}$.

> **5.(P121,42) 设随机向量(X,Y,Z)的密度函数为**
>
> $$f(x,y,z)=\begin{cases}(8\pi^3)^{-1}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\leqslant x,y,z\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
>
> **证明：X,Y,Z两两独立但不相互独立。**

证明:

$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\begin{cases}\int_0^{2\pi}(8\pi^3)^{-1}(1-\sin x\sin y\sin z)\mathrm{d}z=(8\pi^3)^{-1}(z+\sin x\sin y\cos z)|_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi^2}, & 0\leqslant x,y\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

同理，有$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\leqslant y\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\leqslant z\leqslant 2\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则$f(x,y)=f(x)f(y)$，因此X,Y独立.同理，有X,Z独立，Y,Z独立，则X,Y,Z两两独立.

但$f(x,y,z)\neq f(x)f(y)f(z)$，因此$X,Y,Z$不相互独立.

> **6.(P121,39(2)) 设(X,Y)服从正方形$\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$内的均匀分布，问$X,Y$是否相互独立?**

解：X,Y相互独立.

理由：因为(X,Y)服从正方形$\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$内的均匀分布，因此有

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & |x|+|y|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 同理，有$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则有$f(x,y)=f(x)f(y)$，因此X,Y相互独立.