1.(P230,1)设总体X的概率分布如下:

X	1	2	3
P	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$

其中，$0<p_1,p_2<1$为未知参数. 现从此总体中抽出一样本量为n的简单随机样本, 其中1出现了n_1次, 2出现了n_2次, 3出现了n_3次, 试求p的矩估计.

解：用一阶原点矩$a_1=\bar{X}$和二阶中心矩m_2分别估计EX和$Var(X)$，则有

$$\begin{cases} EX=p_1+2p_2+3(1-p_1-p_2)=\bar{X} \\ Var(X)=p_1(1-EX)^2+p_2(2-EX)^2+(1-p_1-p_2)(3-EX)^2=m_2 \end{cases}$$

且已知$\bar{X}=\frac{n_1+2n_2+3n_3}{n}, m_2=\frac{n_1}{n}(\frac{-n_2-2n_3}{n})^2+\frac{n_2}{n}(\frac{n_1-n_3}{n})^2+\frac{n_3}{n}(\frac{2n_1+n_2}{n})^2=\frac{n_1n_2+4n_1n_3+n_2n_3}{n^2}$ 得方程

$$\begin{cases} 3-2p_1-p_2=\frac{n_1+2n_2+3n_3}{n} \\ -(2p_1+p_2)^2+4p_1+p_2=\frac{n_1n_2+4n_1n_3+n_2n_3}{n^2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \hat{p}_1=\frac{n_1}{n} \\ \hat{p}_2=\frac{n_2}{n} \end{cases}$$

2.(P231,4)设$(X_1,X_2,...,X_n)$是总体X的一个简单随机样本, 试求总体X在具有下列概率密度函数时参数θ的矩估计:

(1)$f(x;\theta)=\begin{cases} 2(\theta-x)/\theta^2, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(2)$f(x;\theta)=\begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0<x<1,\theta>0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(3)$f(x;\theta)=\begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\theta>0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(4)$f(x;\theta)=\begin{cases} \theta c^\theta/x^{\theta+1}, & x>c(c>0\text{已知}),\theta>1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(5)$f(x;\theta)=\begin{cases} 6x(\theta-x)/\theta^3, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(6)$f(x;\theta)=\begin{cases} \theta^2x^{-3}e^{-\theta/x}, & x>0,\theta>0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

解:

(1)

$$EX=\int_0^\theta x\frac{2(\theta-x)}{\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\theta$$

则用一阶中心矩估计得$\hat{\theta}=3a_1=3\bar{X}$

(2)

$$EX=\int_0^1 x(\theta+1)x^\theta\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

则用一阶中心矩估计得$\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$

(3)

$$EX=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

则用一阶中心矩估计得$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}^2}{(1-\bar{X})^2}$

(4)

$$EX=\int_c^{\infty}x\theta\frac{c^\theta}{x^{\theta+1}}\mathrm{d}x=\frac{c\theta}{\theta-1}$$

则用一阶中心矩估计得$\hat\theta=\frac{\bar X}{\bar X-c}$

(5)

$$EX=\int_0^{\theta}x\frac{6x(\theta-x)}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\theta$$

则用一阶矩估计得$\hat\theta=2\bar X$

(6)

$$EX=\int_0^{+\infty}x\theta^2x^{-3}e^{-\theta/x}\mathrm{d}x=\theta$$

则用一阶矩估计得$\hat\theta=\bar X$

3.(P230,1)设总体X的概率分布如下:

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中，$0<\theta<1/2$为未知参数. 现从此总体中抽出一样本量为100的简单随机样本, 其中0出现了10次，1出现了53次, 2出现了16次, 3出现了21次, 试求θ的矩估计和极大似然估计.

解：$EX=2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta$，$\bar X=\frac{53+2\times16+3\times21}{100}=1.48$，矩估计得$3-4\hat\theta=1.48,\hat\theta=0.38$

由题，$L(\theta)=(\theta^2)^{10}(2\theta(1-\theta))^{53}(\theta^2)^{16}(1-2\theta)^{21}=2^{53}\theta^{105}(1-\theta)^{53}(1-2\theta)^{21}$，取对数，得

$$\ell(\theta)=\ln L(\theta)=53\ln2+105\ln\theta+53\ln(1-\theta)+21\ln(1-2\theta)$$

求导，得

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta}=\frac{\theta}{105}-\frac{53}{1-\theta}-\frac{42}{1-2\theta}$$

令其等于零，解得$\hat\theta=0.387$或0.759(舍)

故矩估计为$\hat\theta=0.38$，极大似然估计为0.387

4.(P233,14) 设$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，已知$\hat\theta_1=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2$为$\sigma^2$的无偏估计. 证明$\hat\theta_2=\frac{n-1}{n+1}\hat\theta_1$虽然不是$\sigma^2$的无偏估计，但是$\hat\theta_2$的均方误差较小，即$E(\hat\theta_2-\sigma^2)^2<E(\hat\theta_1-\sigma^2)^2$. 这说明无偏估计不一定是最好的选择.

证明：已知$E\hat\theta_1=\sigma^2$,则$E\hat\theta_2\neq\sigma^2$，所以$\hat\theta_2$不是$\sigma^2$的无偏估计

$$E(\hat\theta_1-\sigma^2)^2=E\hat\theta_1^2-2\sigma^2E\hat\theta_1+\sigma^4=\frac{1}{(n-1)^2}E(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2)^2-2\sigma^4+\sigma^4$$

$$E(\hat\theta_2-\sigma^2)^2=E\hat\theta_2^2-2\sigma^2E\hat\theta_2+\sigma^4=\frac{1}{(n+1)^2}E(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2)^2-2\frac{n-1}{n+1}\sigma^4+\sigma^4$$

令$A=\frac{1}{(n-1)^2}E(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2)^2-2\sigma^4,B=\frac{1}{(n+1)^2}E(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2)^2-2\frac{n-1}{n+1}\sigma^4$，则$\frac{n+1}{n-1}B=\frac{1}{(n+1)(n-1)}E(\sum_{i=1}^n(X_i-\bar X)^2)^2-2\sigma^4<A$，因此$B<A,E(\hat\theta_2-\sigma^2)^2<E(\hat\theta_1-\sigma^2)^2$

5.(P235,28)设电话总机在某一段时间内接到呼叫的次数服从泊松分布. 观察1min内接到的呼叫次数，设总共观察了40次，得如下数据

接到的呼叫次数	0	1	2	3	4	5	$\geqslant6$
观察到的次数	5	10	12	8	3	2	0

试求泊松分布参数λ的最大似然估计.

解：由题，$X\sim P(\lambda),P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$L(\lambda)=(\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda})^5(\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda})^{10}(\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda})^{12}(\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda})^8(\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda})^3(\frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda})^2=\frac{\lambda^{80}}{2^{18}3^85^2}e^{-40\lambda}$$

则

$$\ell(\lambda)=\ln L(\lambda)=80\ln\lambda-40\lambda-18\ln 2-8\ln 3-2\ln 5$$

$$\frac{\partial\ell(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{80}{\lambda}-40$$

得$\hat{\lambda}=2$

> **6.(P238,52)设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为来自指数分布总体**
>
> $$f(x,\theta)=e^{-(x-\mu)},\quad x\geqslant\mu,-\infty<\mu<\infty$$
>
> **的简单样本.**
>
> (1)试求μ的最大似然估计$\hat{\mu}^*$，$\hat{\mu}^*$是μ的无偏估计吗？如果不是，试对它作修正得到μ的无偏估计$\hat{\mu}^{**}$；
>
> (2)试求μ的矩估计$\hat{\mu}$，并证明它是μ的无偏估计；
>
> (3)试问$\hat{\mu}^{**}$和$\hat{\mu}$哪一个有效?

解:

(1)

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}e^{-(X_i-\mu)}I_{[\mu,+\infty)}(X_i)=I_{[\mu,\infty)}(X_{(1)})\prod_{i=1}^{n}e^{-X_i+\mu}$$

易知，$\mu<X_{(1)},L(\mu)>0$关于μ是单调递增函数，$\mu>X_{(1)},L(\mu)=0$，故$L(\mu)$在$\mu=X_{(1)}$处取最大值，$\hat{\mu}^*=X_{(1)}$

对如题指数分布，有$F(x)=\int_{\mu}^{x}e^{-(x-\mu)}\mathrm{d}x=\begin{cases}1-e^{-(x-\mu)}, & x\geqslant\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$，则

$$F_{X_{(1)}}(x)=P(X_{(1)}\leqslant x)=P(\text{有至少一个}X_i\leqslant x)=\sum_{i=1}^{n}C_n^i(1-e^{-(x-\mu)})^i(e^{-(x-\mu)})^{n-i}$$

故

$$\begin{aligned}f_{X_{(1)}}(x)=&\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{n!}{i!(n-i)!}i(1-e^{-(x-\mu)})^{i-1}(e^{-(x-\mu)})^{n-i+1}-\frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)(1-e^{-(x-\mu)})^i(e^{-(x-\mu)})^{n-i}\right\}\\=&\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(1-e^{-(x-\mu)})^{i-1}(e^{-(x-\mu)})^{n-i+1}-\frac{n!}{i!(n-i-1)!}(1-e^{-(x-\mu)})^i(e^{-(x-\mu)})^{n-i}\right\}\\&+n(1-e^{-(x-\mu)})^{n-1}e^{-(x-\mu)}\\=&n(e^{-(x-\mu)})^nI_{[\mu,+\infty)}(x)\end{aligned}$$

因此

$$E(\hat{\mu}^*)=\int_{\mu}^{\infty}nx(e^{-(x-\mu)})^n\mathrm{d}x=\mu+\frac{1}{n}$$

故$\hat{\mu}^*$不是无偏估计，修正为$\hat{\mu}^{**}=X_{(1)}-\frac{1}{n}$

(2)

$$EX=\int_{\mu}^{\infty}xe^{-(x-\mu)}\mathrm{d}x=\mu+1$$

则用一阶矩估计得$\hat{\mu}=\bar{X}-1$，$E(\hat{\mu})=E(\bar{X})-1$是无偏估计

(3)因为$Var(\hat{\mu}^*)=Var(X_{(1)}-\frac{1}{n})=Var(X),Var(\hat{\mu})=Var(\bar{X}-1)=\frac{Var(X)}{n}$，因此$Var(\hat{\mu}^*)>Var(\hat{\mu})$，$\hat{\mu}$更有效