面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材

线 性 代 数

崔国生　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是高等职业教育工科类、管理类及经济类基础课“线性代数”教材，该书借鉴了国内外同类教材的最新研究成果，并融入了作者多年高等职业教育的教学经验，较好地体现了教育部高职、高专“数学课程教学基本要求”。

全书共分 6 章，内容包括：行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，以及线性规划初步。不同学校、不同专业可以根据其教学要求自行选择教学内容。本书语言叙述通俗、简练，富有启发性；知识背景交代清楚，难点分散；关键之处均提醒读者注意或思考；每节后配有习题，章末配有学习指导和复习题；书末配有习题答案或提示。该书既便于教，又便于学，适合专科层次的读者学习使用，是高等职业教育一本较好的“线性代数”教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/崔国生编著．—北京：北京大学出版社，2005.6
(面向 21 世纪全国高职高专数学规划教材)
ISBN 7-301-08449-8

I．线…　II．崔…　III．线性代数－高等学校：技术学校－教材　IV．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 135339 号

书　　名：线性代数
著作责任者：崔国生　编著
责 任 编 辑：温丹丹　沈欣
标 准 书 号：ISBN 7-301-08449-8/O·0630
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765013
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电 子 信 箱：xxjs@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　10.75 印张　232 千字
2005 年 6 月第 1 版　2005 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：16.00 元

前　　言

本书是我们依照教育部制定的高职、高专“数学课程教学基本要求”，并借鉴国内外同类教材的最新研究成果，为高等职业教育工科类、管理类及经济类学生编写的《线性代数》课程教材。

在编写过程中，我们力求使教学内容体系及其呈现方式符合高等职业教育规律，体现高等职业教育特点，既便于教，又便于学。

本书内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型，以及线性规划初步 6 章，涵盖了专科线性代数教学大纲的基本要求。不同学校、不同专业可以根据教学要求自行选择教学内容，带“*”的内容可以选讲或不讲，不会影响后面的教学。将线性规划初步写入此书，目的是使读者能够加深对线性代数的理解，初步了解线性代数的应用，本章供学有余力的同学自学之用。

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面，遵循了“以应用为目的，以必需、够用为度”的高职、高专基础课程教学原则，适度淡化了理论体系和逻辑论证，将重点放在了基本概念阐述、基础理论解释，以及基本方法归纳上，力争使读者通过学习本书，不仅知道线性代数是什么，更知道线性代数能做什么，以便实现线性代数“基础+应用”的双重教育功能。

本书融入了作者多年高等职业教育的教学经验，语言叙述通俗、简练，富有启发性；知识背景交代清楚，难点分散；关键之处均提醒读者注意或思考，或总结出结论；为使读者及时理解所学概念，掌握基本方法，每节后均配有一定数量的习题，供读者练习使用，章末配有学习指导和复习题，以期增加读者知识的结构度，做到融会贯通；书末配有习题答案或提示，供读者参考。

沈阳工程学院刘严老师审阅了初稿，王娜、钱明辉老师演算了全部习题，并提出了修改意见，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中必有不当乃至错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 4 月于沈阳

目　　录

第 1 章　行 列 式

行列式是线性代数研究的主要对象之一．行列式理论不仅是我们后面所要学习的矩阵和线性方程组理论的研究工具，而且在工程技术中也有直接的应用．本章将介绍行列式的概念、主要性质和一般计算方法.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶、三阶行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2=c_1, \\ a_2x_1+b_2x_2=c_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1,x_2 为未知数，$a_i,b_i(i=1,2)$ 为未知数的系数，$c_i(i=1,2)$ 为常数项.

用代入消元法从式(1.1)中消去 x_2，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x_1=b_2c_1-b_1c_2\text{.}$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，可得

$$x_1=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\text{.}$$

同样地，从式(1.1)中消去 x_1，可得

$$x_2=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\text{.}$$

不难发现，x_1，x_2 的结构非常相似，并且它们的分子、分母均为两个数乘积之差，为此，我们引入二阶行列式的概念.

定义 1.1　由 a_1，a_2，b_1，b_2 这 4 个数排成的如下式子

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**．它表示a_1b_2与a_2b_1之差，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \ . \tag{1.2}$$

二阶行列式含有 2 行 2 列（横排的称为**行**，竖排的称为**列**）．组成行列式的数字或字母叫做行列式的**元素**．例如a_2就是定义 1.1 中二阶行列式的第 2 行第 1 列的元素．

通常用大写字母 $\boldsymbol{D}$ 表示行列式．

有了上面二阶行列式的定义，则式(1.1)的解就可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} .$$

如果把式(1.1)未知数的系数组成的行列式$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$叫做**系数行列式**，把将 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 列换成常数项列所得到的行列式记作$\boldsymbol{D}_j \ (j=1,2)$，则$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$．于是，当$\boldsymbol{D} \neq 0$时，方程组(1.1)的解可以简单地表示为

$$x_j = \frac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}} \quad (j=1,2). \tag{1.3}$$

例 1　计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$；　　　（2）$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$．

解

（1）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$；

（2）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = a\times(-1) - 0\times 2 = -a$ ．

例 2　用二阶行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$$

解　计算二阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}=7,\quad \boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix}3 & -1\\5 & 3\end{vmatrix}=14,\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}=7,$$

由 $\boldsymbol{D}\neq 0$，得方程组的解为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{7}{7}=1.$$

与二阶行列式的定义类似，我们可以定义三阶行列式.

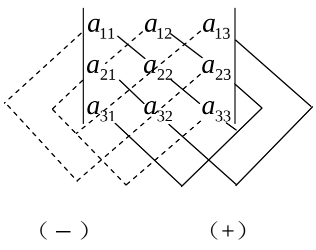
定义 1.2　由 9 个元素排成的 3 行 3 列的式子

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

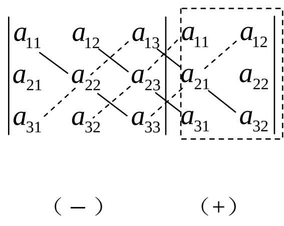
称为**三阶行列式**．规定三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\qquad(1.4)$$

观察式(1.4)可以发现，三阶行列式共含 6 项，每项均为选自不同行、不同列的 3 个元素的乘积，再冠以正负号．其规律遵循如图 1-1 所示的对角线法则（图 1-1 之(a)和(b)刻画的是同一规律）：图中每条实线（共 3 条）所连结的 3 个数的乘积前面加正号，每条虚线（共 3 条）所连结的 3 个数的乘积前面加负号，然后相加就是三阶行列式的值.



(a)



(b)

图 1-1

例 3　用对角线法则计算行列式$\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 0 & 4\\5 & -2 & -3\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\times0\times(-3)+1\times4\times5+3\times(-1)\times(-2)$

$$-3\times0\times5-1\times(-1)\times(-3)-2\times4\times(-2)$$

$$=39\,.$$

1.1.2 n 阶行列式

1. 余子式和代数余子式

对角线法则只适用于计算二阶与三阶行列式．为了研究 4 阶以及更高阶数的行列式，我们来考察二阶行列式与三阶行列式的关系．

由式(1.2)和式(1.4)可以得出，三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1.5}$$

即三阶行列式等于它第一行的每个元素分别乘以一个二阶行列式再作代数和．

为了进一步了解这 3 个二阶行列式与原来三阶行列式的关系，我们引入余子式和代数余子式的概念．

在三阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 a_{ij} (i =1,2,3; j =1,2,3)所在第 i 行和第 j 列划去后，剩下的元素保持原来相对位置不变构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 $\boldsymbol{M}_{ij}$.

例如，对于上面的三阶行列式 $\boldsymbol{D}$ ，元素 a_{11} 的余子式是划去 $\boldsymbol{D}$ 的第一行和第一列，剩下的元素所构成的二阶行列式，即 $\boldsymbol{M}_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ；元素 a_{13} 的余子式是划去 $\boldsymbol{D}$ 的第一行和第三列，剩下的元素所构成的二阶行列式，即 $\boldsymbol{M}_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

若记 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$ ，则 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**． $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{12} 的代数余子式为

$$\boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

例 4　求如下行列式 $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{11}，a_{23}，a_{32} 的代数余子式，其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 4 & 5 & -1\end{vmatrix}.$$

解　元素 a_{11} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-16$，

元素 a_{23} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-5$，

元素 a_{32} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-7$．

应用余子式和代数余子式的概念，式(1.5)可以写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=a_{11}\boldsymbol{M}_{11}-a_{12}\boldsymbol{M}_{12}+a_{13}\boldsymbol{M}_{13}\\ &=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}\end{aligned}\tag{1.6}$$

由式(1.6)可以看出，三阶行列式的值等于其第一行所有元素与它们各自的代数余子式乘积之和．

式(1.6)称为三阶行列式按第一行展开式．

我们已经定义了二阶、三阶行列式．通过分析又发现，三阶行列式可以转化为二阶行列式来计算，即三阶行列式可以通过二阶行列式来定义．按照这一规律，我们可用三阶行列式去定义 4 阶行列式，以此类推，便能够定义 n 阶行列式．

2.　n 阶行列式

由 $n\times n=n^2$ 个元素 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,n)$排成的 n 行 n 列如下的式子

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**．

n 阶行列式的代数余子式的定义与三阶行列式代数余子式的定义相同．例如上面的 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 的元素 a_{11} 的代数余子式为

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\boldsymbol{M}_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

n阶行列式的代数余子式是$n-1$阶行列式.

对于n阶行列式，规定：

$$\boldsymbol{D}=\begin{cases} a_{11} & \text{当}n=1\text{时}, \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{k1} & \text{当}n\geqslant 2\text{时}, \end{cases} \tag{1.7}$$

式(1.7)称为n阶行列式按第一行展开式.

例5 主对角线以上（下）的元素都为零的行列式称为**下（上）三角形行列式**．试求下三角形行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值.

解 将此n阶行列式依次按第一行展开得：

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}\,a_{22}\cdots(-1)^{1+1}a_{nn}=a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角行列式的值等于其主对角线上的元素之积.

例 6 应用n阶行列式定义计算行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　将行列式按第一行展开，得

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-1&1\\-1&2&0\\5&1&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&-1&1\\4&2&0\\2&1&1\end{vmatrix}$$
$$+(-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0&1\\4&-1&0\\2&5&1\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&0&-1\\4&-1&2\\2&5&1\end{vmatrix}=-70$$

习题 1.1

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}-1&2\\3&-4\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1&1\\1&\sqrt{2}+1\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}x-1&x^3\\1&x^2+x+1\end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&5&1\\-2&6&3\end{vmatrix}$．

2．解下列方程：

（1）$\begin{vmatrix}x^2&4&9\\x&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$；　　（2）$\begin{vmatrix}1&x&0&0\\0&0&0&2\\0&0&x&0\\0&3&4&5\end{vmatrix}=1$．

3．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\4&0&0&0\end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix}0&0&0&a_{14}\\0&0&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$．

1.2　行列式的性质与计算

有了 n 阶行列式的定义，在理论上，我们便可以计算任意阶的行列式．但对于 4 阶以

上的行列式，用定义计算往往是相当繁琐的，特别是某些含有字母的行列式，直接用定义计算往往是无法进行的．为此，我们来研究行列式的性质，以便用行列式的性质简化行列式的运算．

设 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将 $\boldsymbol{D}$ 的各行改写为同序号的列（即将第 $\boldsymbol{i}$ 行改写为第 $\boldsymbol{i}$ 列）后，得到新的行列式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$.

例如二阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\boldsymbol{D}.$$

可以验证三阶行列式也满足此性质.

性质 1 虽然没有起到简化行列式计算的作用，但它却揭示了一个重要的事实：在行列式中，行与列的“地位”是等同的——由于转置不改变行列式的值，而原来行列式的行，在转置行列式中则为列，因此行列式关于行成立的性质关于列也成立.

性质 2 交换行列式的任意两行（列），行列式的值仅改变正负号.

例如二阶行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

将第 1 行与第 2 行交换得

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\boldsymbol{D}.$$

通常情况下，我们用 r_i 表示行列式的第 i 行，用 c_i 表示行列式的第 i 列；交换 i，j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$，并把它们写在等号的上面或下面，例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式某两行（列）相同，则该行列式的值等于零.

事实上，把行列式中相同的这两行（列）互换，则有 $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{D}$，故 $\boldsymbol{D} = 0$.

性质 3　若行列式的某行（列）有公因子，则公因子可以提到行列式外.

以三阶行列式为例：

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式中某一行（列）中所有元素为零，则行列式的值等于零.

事实上，把元素全为零这一行的公因子“0”提到行列式外，则得行列式的值等于零.

推论 2　若行列式有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值等于零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } j \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix} = 0.$$

证明　将行列式第 j 行元素的公因子 k 提到行列式外，则行列式的第 i 行与第 j 行相同，由性质 2 的推论得行列式的值为零.

性质 3 的等价说法是：用数 k 乘以行列式 $\boldsymbol{D}$，等于用数 k 乘以 $\boldsymbol{D}$ 的某一行（列）所有元素.

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式等于相应的两个行列式之和.

以三阶行列式为例：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 1 计算行列式 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 301 & 3 & 1 \\ 198 & 2 & -1 \\ 200 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

解 由于数字较大，直接计算比较复杂. 考虑到第 1 列数字近似等于第 2 列数字的 100 倍，为此，利用性质 4，改写行列式为

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 301 & 3 & 1 \\ 198 & 2 & -1 \\ 200 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300+1 & 3 & 1 \\ 200-2 & 2 & -1 \\ 200+0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300 & 3 & 1 \\ 200 & 2 & -1 \\ 200 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} =0+38=38.$$

例 2 计算行列式 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2a_1 & b_1 \\ a_2+b_2 & 2a_2 & b_2 \\ a_3+b_3 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

解 $$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2a_1 & b_1 \\ a_2+b_2 & 2a_2 & b_2 \\ a_3+b_3 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 & b_1 \\ a_2 & 2a_2 & b_2 \\ a_3 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 2a_1 & b_1 \\ b_2 & 2a_2 & b_2 \\ b_3 & 2a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0+0=0.$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数然后加到另一行（列）对应的元素上，行列式的值不变.

我们以三阶行列式为例来验证这一性质.

设有三阶行列式 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，将 $\boldsymbol{D}$ 第 1 行每个元素都乘以数 k，然后加到第 2 行的对应元素上，则得行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

由性质 4 及性质 3 的推论 2 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{D} + 0 = \boldsymbol{D}.$$

通常情况下，数 k 乘行列式的第 i 行（列）记作 kr_i (列为kc_i)；数 k 乘行列式的第 i 行（列）然后加到第 j 行(列)上，记作 $r_j + kr_i$(列为$c_j + kc_i$)，并把它们写到等号的上面或下面.

例 3　计算行列式 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解　应用性质 5，有

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+(-2)\times r_1]{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+3\times r_2]{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times(-2)\times(-2) = -4.$$

将行列式化为三角形行列式是行列式计算中比较常用的一种方法.

例 4　计算行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 此行列式的特点是每行（列）所有元素之和都是 6，据此有

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overline{\overline{c_1+c_2+c_3+c_4}}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1\\r_4-r_1}}{=\!=\!=}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}$$

$=6\times2^3=48$.

如果一个行列式的各行（列）元素之和相等，计算时常把各列（行）加到某一列（行）上，提取公因式后再进行计算.

性质 6 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.8}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\qquad(j=1,2,\cdots,n)\tag{1.9}$$

上面两式分别称为行列式 D 按第 i 行和第 j 列的展开式.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

分析 根据性质 6，我们可以选择行列式的任意一行或列（一般选择有数字 1 且 0 较多的行或列）进行展开．事实上，我们还可以先应用性质 5（不改变行列式的值），将行列式的某一行或列化出尽量多的零，然后再按该行或列展开，从而在一定程度上简化运算.

通过比较，我们选择按第 3 行展开（因为第 3 行既有 1 又有 0）.

解 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1-2c_3\\c_4+c_3}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$（此时再按第 3 行展开）

$$=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}\text{（再按第 3 列展开）}$$

$$=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40.$$

联合使用性质 5 和性质 6——先在行列式的某行（列）选定一个非零元素，然后利用性质 5 将该行（列）其他元素均化为零，再按此行（列）进行展开，是计算数字行列式最常用的一种方法.

性质 7　行列式任一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk}=0\quad(i\neq j),\tag{1.10}$$

或

$$a_{1i}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2i}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{A}_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\boldsymbol{A}_{kj}=0\quad(i\neq j).\tag{1.11}$$

例 6　计算行列式

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&a_3&-a_3\\1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

解　从第 4 列开始，依次将后一列加到前一列（目的是使 $\boldsymbol{D}_4$ 中的零元素增多），有

$$\boldsymbol{D}_4\xlongequal{c_3+c_4}\begin{vmatrix}a_1&-a_1&0&0\\0&a_2&-a_2&0\\0&0&0&-a_3\\1&1&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_2]{c_2+c_3}\begin{vmatrix}0&-a_1&0&0\\0&0&-a_2&0\\0&0&0&-a_3\\4&3&2&1\end{vmatrix}$$

$$=4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-a_1&0&0\\0&-a_2&0\\0&0&-a_3\end{vmatrix}=4a_1a_2a_3.$$

对于以上类型的行列式，一般有

$$\boldsymbol{D}_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}=(n+1)a_1a_2\cdots a_n .$$

有兴趣的读者可以尝试证明这一结论.

习题 1.2

1．利用行列式的性质计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 201 & 5 \\ 3 & 302 & -2 \\ 1 & 99 & 0 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$；（5）$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$.

2．证明下列各式：

（1）$\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}=(x+2y)(x-y)^2$；

（2）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}=4(a-c)(c-b)(b-a)$；

（3）$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

1.3　克莱姆（Cramer）法则

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.12}$$

的方程组叫做**线性方程组**，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为未知数， $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 为未知数的系数.

当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，式(1.12)称为**非齐次线性方程组**；当 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，式(1.12)称为**齐次线性方程组**.

当线性方程组(1.12)未知数的个数和方程的个数都为 n 时，方程组变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.13}$$

方程组(1.13)未知数的全体系数按各自相对位置不变组成的行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为线性方程组(1.13)的**系数行列式**.

定理 1.1　克莱姆（Cramer）法则　如果线性方程组(1.13)的系数行列式 $\boldsymbol{D} \neq 0$，则它有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将系数行列式 D 的第 j 列换成方程组常数项列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

证明略.

例 1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=2, \\ 3x_1-x_2+2x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+x_3=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4=4. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故由克莱姆法则知该线性方程组有惟一解，而

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=1,$$

所以

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}=\frac{2}{2}=1\text{，}\qquad x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}=\frac{-4}{2}=-2\text{，}$$

$$x_3=\frac{\boldsymbol{D}_3}{\boldsymbol{D}}=\frac{0}{2}=0\text{，}\qquad x_4=\frac{\boldsymbol{D}_4}{\boldsymbol{D}}=\frac{1}{2}.$$

用克莱姆法则解线性方程组有两个前提条件：

（1）方程的个数与未知数的个数相等；

（2）方程组系数行列式 $\boldsymbol{D}$ 不等于零.

下面讨论未知数的个数与方程的个数相等的齐次线性方程组解的问题.

对于齐次线性方程组(1.14)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases} \tag{1.14}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 总是它的解，此解称为齐次线性方程组(1.14)的**零解**．如果有一组不全为零的数是方程组(1.14)的解，则称其为**非零解**.

根据克莱姆法则容易得出：

定理 1.2　如果齐次线性方程组(1.14)的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$，则其只有零解.

事实上，若方程组(1.14)的系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$，则由克莱姆法则知其只有惟一解 $x_j=\dfrac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}}(j=1,2,\cdots,n)$，而 $\boldsymbol{D}_j$ 的第 j 列元素全为零，故 $\boldsymbol{D}_j=0\,(j=1,2,\cdots,n)$，从而方程组只有零解，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

定理 1.2 的等价命题是：如果齐次线性方程组(1.14)有非零解，则其系数行列式 $\boldsymbol{D}=0$.

定理 1.2 给出了齐次线性方程组有非零解的必要条件．后面的学习我们还会知道，该定理的逆命题也成立，即如果齐次线性方程组(1.14)的系数行列式 $\boldsymbol{D}=0$，则它有非零解.

例 2　k 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+kx_2-3x_3=0, \\ -2x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

有非零解?

解 由定理 1.2 知，若方程组有非零解，则系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & k & -3\\ -2 & 3 & 3\end{vmatrix}=7k+21=0,$$

即 $k=-3$ 时，方程组有非零解.

习题 1.3

1．用克莱姆法则解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x-3y=1,\\ 5x-8y=2.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=1,\\ x_1+x_2+2x_3=2,\\ x_1+x_2+x_3=3.\end{cases}$

2．试求 k 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+kx_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+kx_3=0.\end{cases}$$

（1）只有零解;（2）有非零解?

1.4 本章学习指导

1.4.1 教学基本要求

1．知道 n 阶行列式的定义，了解几种特殊的行列式.

2．掌握行列式的性质，熟练掌握三阶、4 阶行列式的计算.

3．了解克莱姆法则.

1.4.2 考点提示

1．计算二阶、三阶行列式.

2．利用行列式的性质：

（1）计算较高阶数的行列式;

（2）化简行列式.

3．克莱姆法则

（1）用克莱姆法则解线性方程组；

（2）讨论系数含参数的齐次线性方程组有无非零解.

1.5　本章复习题

1．填空题

（1）二阶行列式由________个元素组成；n 阶行列式由________个元素组成.

（2）$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=$________；$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{vmatrix}=$________.

（3）形如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$的行列式叫做________行列式，其值为________.

（4）设$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，若$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则$\boldsymbol{D}_1$叫做$\boldsymbol{D}$的________行列式；若$\boldsymbol{D}=m$，则$\boldsymbol{D}_1=$________.

（5）$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 14 \\ 6 & 11 & 16 \\ 9 & 14 & 19 \end{vmatrix}=$________.

（6）记齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$的系数行列式为 $\boldsymbol{D}$，则当 $\boldsymbol{D}$________时，方程组有惟一解.

（7）若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$=8，则$\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_2+2b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$=________.

（8）$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$=_________.

2．**选择题**

（1）若$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$=0，则$a$ = [　　　　].

（A）0；　　（B）1；　　（C）−2；　　（D）1 或−2.

（2）设$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$=5，则$\begin{vmatrix} a_1+2a_3 & a_3 & a_2 \\ b_1+2b_3 & b_3 & b_2 \\ c_1+2c_3 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$=[　　　　].

（A）5；　　（B）−5；　　（C）10；　　（D）−10.

（3）行列式 $\boldsymbol{D}=0$ 的必要条件是[　　　　].

（A）$\boldsymbol{D}$ 有一行元素全为零；

（B）$\boldsymbol{D}$ 有两行（列）元素对应成比例；

（C）$\boldsymbol{D}$ 中至少有一行元素可用行列式的性质全化为零；

（D）$\boldsymbol{D}$ 中任意一行元素都可用行列式的性质全化为零.

（4）设$\boldsymbol{A}_{ij}$为n阶行列式$\boldsymbol{D}$的元素 a_{ij} 的代数余子式，则$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk}$　[　　　　].

（A）等于零；　（B）等于 $\boldsymbol{D}$；　（C）可能等于任何值；　（D）当 $i=j$ 时，等于 $\boldsymbol{D}$.

3．**计算下列行列式：**

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 4 & 6 & 2 \\ 30 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$；　（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

4．用克莱姆法则解方程组：

（1）$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 3x - 2y + z = 7, \\ x + 3y - 2z = 0. \end{cases}$

5．求 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}_n$ 的值，其中 $\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

6．解方程 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + x \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & a_4 \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & a_4 \\ a_1 + x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$.

第 2 章　矩　　阵

矩阵是线性代数最重要的概念之一．我们后面将要学习的向量、线性方程组、相似矩阵以及二次型等，均要用到矩阵理论．不仅如此，现代自然科学、工程技术、管理科学等，也都大量应用矩阵理论．本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的线性运算、可逆矩阵，以及矩阵的初等变换和矩阵的秩．

2.1　矩阵的概念

2.1.1　矩阵的定义

同许多数学概念一样，矩阵也是从用数学方法研究实际问题中抽象出来的一个概念．先看下面两个例子．

例 1　某高校电力学院设有电力工程、动力工程及自动控制 3 个系，该学院在校本科生人数如表 2-1 所示．

表 2-1

系 \ 年级	2001 级	2002 级	2003 级	2004 级
电力系	71	112	140	144
动力系	132	134	142	212
自控系	66	101	114	106

表 2-1 可用如下简单的矩形数表来代替：

$$\begin{bmatrix} 71 & 112 & 140 & 144 \\ 132 & 134 & 142 & 212 \\ 66 & 101 & 114 & 106 \end{bmatrix}.$$

例 2　对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(2.1)

它的解取决于其系数和常数项，而不是未知数的符号．我们可以将该方程组的系数按原来的相对位置不变排成如下的矩形数表：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

常数项可以排成数表：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

这些“矩形表格”就是我们所要学习的矩阵．

定义 2.1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m \times n$ 矩阵或矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列的**元素**．

例 1 和例 2 所给出的矩形数表都是矩阵．例 1 的矩阵是一个 3×4 矩阵，其元素 $a_{11}=71,\cdots,a_{34}=106$；例 2 的系数矩阵是一个 $m \times n$ 矩阵，常数项矩阵是一个 $m \times 1$ 矩阵．

通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵，比如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$等．

式(2.2)有时也简写为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$．

如果矩阵的组成元素均为实数，则称其为**实矩阵**；如果矩阵的组成元素有复数，则称其为**复矩阵**．本书只研究实矩阵．

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也为 $m \times n$ 矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**．

定义 2.2 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，并且它们对应位置上的元素均相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 3 & 4 \end{bmatrix}$与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & y & -1 \\ 11 & 3 & 4 \end{bmatrix}$都是 2×3 矩阵，它们是同型矩阵，

当且仅当 $x=11$，$y=2$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2.1.2　几种特殊的矩阵

有些矩阵的结构（型）比较特殊，有些矩阵的组成元素比较特殊．这些特殊的矩阵往往具有比较特殊的性质．下面介绍几种常见的特殊矩阵．

零矩阵　元素全为零的矩阵称为零矩阵，常用 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$ 表示．

注意：零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 与数字“0”不同，$\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 是由 $m\times n$ 个“0”组成的“数表”；两个矩阵即使同为零矩阵，如果不是同型矩阵，它们也不相等．

方阵　如果一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行数与列数相等都为 n，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，简称方阵．

对角矩阵　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角线以外的元素都为零，即当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$（$i,j=1,2,\cdots,n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对角矩阵或 n 阶对角方阵．例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

便是一个 4 阶对角矩阵．

单位矩阵　在 n 阶对角矩阵中，当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}_n$，简记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

上（下）三角形矩阵　主对角线以下元素全为零的方阵称为上（下）三角形矩阵．例如下面的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为下三角矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

行矩阵 仅由一行元素组成的矩阵称为行矩阵，例如 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]_{1\times n}$.

列矩阵 仅由一列元素组成的矩阵称为列矩阵，例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$.

还有一些重要的特殊矩阵，比如对称矩阵、可逆矩阵、行阶梯形矩阵、正交矩阵等，我们将在适当的章节做详细的介绍.

习题 2.1

1．说出下列特殊矩阵的名称：

（1）$[1 \quad -1 \quad 0 \quad 3]$；（2）$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$；

（5）$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$；（6）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2．若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2x+y & 4 \\ 10 & x-y \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，试求 x，y 的值.

3．试举一矩阵实例.

2.2　矩阵的运算

矩阵的意义不仅在于确定了一些形式上的数表，在对矩阵定义了一系列运算之后，它便成了进行理论研究和解决实际问题的有力工具.

2.2.1　矩阵的加法

定义 2.3　设有同型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

称矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

注意：只有同型矩阵才能进行加法运算.

例 1　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+2 & 0+6 & 3+8 & 6+4 \\ 5+(-2) & (-2)+1 & 1+5 & 7+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 & 10 \\ 3 & -1 & 6 & 13 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

矩阵的加法运算满足下面运算规律（设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{O}$ 为同型矩阵）：

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（交换律）；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（结合律）；

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，记 $(-a_{ij})_{m\times n}=-\boldsymbol{A}$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. 显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

2.2.2　数与矩阵的乘法

定义 2.4　用实数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的每一个元素所得到的矩阵，称为**数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积**，简称**数乘矩阵**，记作 $k\boldsymbol{A}$，即

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix},$$

简记为

$$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵加法和数乘矩阵统称为**矩阵的线性运算**.

矩阵的线性运算满足以下运算规律（假设 A， B 是同型矩阵， k， l 为实数）：

（1） $kA=Ak$ （交换律）；

（2） $k(A+B)=kA+kB$， $(k+l)A=kA+lA$ （分配律）；

（3） $(kl)A=k(lA)$ （结合律）；

（4） $1A=A$， $0A=O$.

例 2 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$， 求 $A+2B$.

解 由数乘矩阵及矩阵加法的定义可得

$$A+2B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 14 \end{bmatrix}.$$

由矩阵加法和数乘运算规定**矩阵减法**为：

$$A-B=A+(-B).$$

例 3 若矩阵 A, B 同例 2 所设，试求 $A-2B$.

解 $A-2B = A+(-2B)$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

例 4 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$， 且 $A+2X=B$， 试求未知矩阵 X.

解 由 $A+2X=B$ 可得

$$2X=B-A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

故

$$X=\frac{1}{2}(B-A)=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&-2&-3\\-1&1&-1\end{bmatrix}.$$

像例 4 中 $A+2X=B$ 这样含有未知矩阵的等式叫做**矩阵方程**.

2.2.3 矩阵的乘法

1. 矩阵乘法的定义

定义 2.5 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$

即 c_{ij} 是矩阵 A 第 i 行的所有元素与矩阵 B 第 j 列的所有元素对应乘积之和（如表 2-1 所示）.

表 2-1

B 的列 / $C=AB$ 的元素 / A 的行	$\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{s1}\end{bmatrix}$	$\cdots$	$\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}$	$\cdots$	$\begin{bmatrix}b_{1n}\\b_{2n}\\\vdots\\b_{sn}\end{bmatrix}$	B 有 n 列
$\boxed{a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1s}}$	$\sum_{k=1}^{s}a_{1k}b_{k1}$	$\cdots$	$\sum_{k=1}^{s}a_{1k}b_{kj}$	$\cdots$	$\sum_{k=1}^{s}a_{1k}b_{kn}$	
…………………	………………………………………					
$\boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is}}$	$\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k1}$	$\cdots$	$\boxed{\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}}$	$\cdots$	$\sum_{k=1}^{s}a_{2k}b_{kn}$	$C=AB$ 有 n 列
…………………	………………………………………					
$\boxed{a_{m1}\quad a_{m2}\quad\cdots\quad a_{ms}}$	$\sum_{k=1}^{s}a_{mk}b_{k1}$	$\cdots$	$\sum_{k=1}^{s}a_{mk}b_{kj}$	$\cdots$	$\sum_{k=1}^{s}a_{mk}b_{kn}$	
A 有 m 行	$C=AB$ 有 m 行					

注意：两个矩阵 A 与 B 相乘，只有当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时，$C=AB$ 才有

意义；当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 能够进行乘法运算时，其乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 5 & 1 & 6\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 2 行 2 列矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 2 行 3 列矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 能够相乘，由矩阵乘法定义（见式(2.4)）可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 5 & 1 & 6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1\times(-1)+4\times5 & 1\times0+4\times1 & 1\times(-2)+4\times6\\ 2\times(-1)+3\times5 & 2\times0+3\times1 & 2\times(-2)+3\times6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}19 & 4 & 22\\ 13 & 3 & 14\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 为 2 行 3 列矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 3 行 1 列矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 能够作乘法．由式(2.4)有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\ a+c\end{bmatrix};$$

而 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义（因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数）.

例 7 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为二阶方阵，由矩阵乘积的定义

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

例 6 与例 7 说明：（1）矩阵乘法不满足交换律—— $\boldsymbol{AB}$ 有意义，$\boldsymbol{BA}$ 未必有意义，即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也未必相等；（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都不是零矩阵，但它们的乘积矩阵可能为零矩阵，因此由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个为零矩阵的结论.

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&-1\\3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&1\\4&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\7&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\7&1\end{bmatrix}$.

在例 8 中，矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$，但乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$. 这一事实表明，矩阵乘法不满足消去律，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

可以证明矩阵乘法满足以下运算律：

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$（结合律）；

（2）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$（分配律）；

（3）$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$（$k$ 为常数）；

（4）$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

2. 方阵的幂

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为自然数，k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积 $\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，简称方阵的幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$.

规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

方阵的幂有如下性质：

（1）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$（其中 k，l 为自然数）；

（2）$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$（其中 k，l 为自然数）.

思考：在数的运算中，$(ab)^k=a^kb^k$，这一性质对于矩阵成立吗？即对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，式子 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$ 总能成立吗？为什么？

例 9 试求（1）$\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}^2$；（2）$\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}^5$；（3）$\begin{bmatrix}1&10\\0&1\end{bmatrix}^n$.

解 （1）$\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&8\\-4&7\end{bmatrix}$；

（2）因为 $\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，所以

$$\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-4&-3\end{bmatrix};$$

（3）用数学归纳法：

当 $n=2$ 时， $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 20\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10\times2\\0 & 1\end{bmatrix}$，

假设当 $n=k$ 时，有 $\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1 & 10k\\0 & 1\end{bmatrix}$成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10k\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10(k+1)\\0 & 1\end{bmatrix},$$

综上可得：$\begin{bmatrix}1 & 10\\0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 10n\\0 & 1\end{bmatrix}$.

矩阵乘法虽然复杂，却有其实际意义．例如，某钢厂生产 3 种碳钢，其产量见表 2-2．若每个季度每吨产品的原料费及加工费如表 2-3 所示，则年度内 3 种碳钢的总原料费和总加工费便可用矩阵乘法求得：

表 2-2

季度 / 品种	1	2	3	4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

表 2-3

费用 / 季度	原料费	加工费
1	b_{11}	b_{12}
2	b_{21}	b_{22}
3	b_{31}	b_{32}
4	b_{41}	b_{42}

$$\underset{\text{（产量矩阵）}}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}}\underset{\text{（单位费用矩阵）}}{\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\\b_{31} & b_{32}\\b_{41} & b_{42}\end{bmatrix}}=\underset{\text{（总费用矩阵）}}{\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^{4}a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{4}a_{1k}b_{k2}\\\sum\limits_{k=1}^{4}a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{4}a_{2k}b_{k2}\\\sum\limits_{k=1}^{4}a_{3k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{4}a_{3k}b_{k2}\end{bmatrix}}.$$

2.2.4 方阵的行列式

定义 2.6 方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的所有元素保持各自的位置不变所构成的行列式叫做**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**，记作$|\boldsymbol{A}|$或 $\det\boldsymbol{A}$，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

方阵的行列式具有以下性质（设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，k 为常数）：

（1）$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

（2）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；

（3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

由于矩阵乘法不满足交换律，故对任意两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，式子 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 未必成立. 但由方阵的行列式性质（3）知，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$，即对任意两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，总有$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.

例 10 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 5 & -11 & 2 \end{bmatrix}$，试求$|\boldsymbol{AB}|$.

分析 如果先求 $\boldsymbol{AB}$，再求$|\boldsymbol{AB}|$，计算量较大，而利用性质（3），不求 $\boldsymbol{AB}$，通过求$|\boldsymbol{A}|$和$|\boldsymbol{B}|$来计算$|\boldsymbol{AB}|$，可使计算大大简化.

解 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 5 & -11 & 2 \end{vmatrix}=(1\times2\times5)(3\times1\times2)=60$.

例 11 设$|\boldsymbol{A}|$是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行列式，$|\boldsymbol{A}|$的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下方阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**．试证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$．

证明
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{行列式性质 6、7}} \begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix} = |\boldsymbol{A}|E．$$

同理可证 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$．

2.2.5 矩阵的转置

定义 2.7 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行改写为同序数的列所得到的矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$．

由转置矩阵的定义可知，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $m \times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

比如，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&3&4\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&3\\2&4\end{bmatrix}$.

矩阵的转置有如下性质：

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

（3）$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（$k$ 为常数）；

（4）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

性质（1）～（3）由定义容易证得，这里我们仅证明性质（4）.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times m$ 矩阵；而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $s\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times s$ 矩阵，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $n\times m$ 矩阵，即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为同型矩阵.

若记 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素为 c_{ij}，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素为 d_{ij}，则 c_{ij} 为 $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 行第 i 列元素，故 c_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 第 j 行 $(a_{j1}\quad a_{j2}\quad\cdots\quad a_{js})$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列 $\begin{bmatrix}b_{1i}\\b_{2i}\\\vdots\\b_{si}\end{bmatrix}$ 对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si}.$$

而 d_{ij} 为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行 $(b_{1i}\quad b_{2i}\quad\cdots\quad b_{si})$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列 $\begin{bmatrix}a_{j1}\\a_{j2}\\\vdots\\a_{js}\end{bmatrix}$ 对应元素乘积之和，即

$$d_{ij}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{si}a_{js}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{js}b_{si}=c_{ij},$$

从而矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为对应元素相等的同型矩阵，故 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 12　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&-1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\\2&2\end{bmatrix}$，（1）求：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；（2）验证 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解　（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-1&2\\3&2&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&1&2\end{bmatrix}$；

（2）因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&-1&2\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&7\\2&2\\9&3\end{bmatrix}$，所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}9&2&9\\7&2&3\end{bmatrix}$；

而

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-1&2\\3&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2&9\\7&2&3\end{bmatrix},$$

故 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

定义 2.8 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**；若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$； n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵的充分必要条件是 $a_{ij}=-a_{ji}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$，当 $i=j$ 时，$a_{ii}=0$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&4\\0&4&-2\end{bmatrix}$ 是对称矩阵，它的元素关于主对角线对称 $(a_{ij}=a_{ji})$；而矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&3\\-1&0&-2\\-3&2&0\end{bmatrix}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&-1&-3\\1&0&2\\3&-2&0\end{bmatrix}=-\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵，其主对角线上的元素全为零，关于主对角线对称位置的元素互为相反数 $(a_{ij}=-a_{ji};\ a_{ii}=0)$.

对称矩阵是很重要的一类矩阵，后面我们将进一步介绍它的性质.

习题 2.2

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&4\\2&-2&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&1\\2&-1&4\end{bmatrix}$，求：（1） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；（2） $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$；（3） $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

2．已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&2&1\\5&4&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&4&3\\-1&-2&0\end{bmatrix}$$

求满足关系式 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{X}$.

3．计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$；　　（2）$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

4．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，求：（1）$(\boldsymbol{AB})^2$；　（2）$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & 5 & 2\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},|\boldsymbol{AB}|$.

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，试证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 必为对称矩阵.

2.3 逆 矩 阵

在数的运算中，若 $ab=ba=1$，则称 b 为 a 的倒数．那么，在矩阵乘法中，对于给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，能否找到矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 呢？这便是矩阵的求逆问题.

本节讨论的矩阵均为 n 阶方阵.

2.3.1 逆矩阵的定义

定义 2.9 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ **是可逆矩阵**，并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ **的逆矩阵**，简称 $\boldsymbol{A}$ 的逆，记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例如，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

由逆矩阵的定义可知，若 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的逆，则 $\boldsymbol{B}$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的逆，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵.

可逆矩阵也叫**满秩矩阵**或**非退化矩阵**.

由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 满足 $\boldsymbol{EE}=\boldsymbol{E}$，所以单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{E}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

容易证明，可逆矩阵具有以下性质（假设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵）：

（1）$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

（2）$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（3）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

（4）$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$（$k\neq 0$ 为常数）.

性质（1）～（4）均可由逆矩阵的定义加以证明，作为练习请读者自己完成.

例 1 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则它的逆矩阵只有一个.

证明 设 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，由逆矩阵定义可得

$$\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}，\quad \boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}，$$

于是

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{AB}_2)=(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{EB}_2=\boldsymbol{B}_2 .$$

例 1 表明：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则它的逆矩阵是惟一的．这是可逆矩阵的一条性质.

2.3.2 逆矩阵的求法

定理 2.1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}，\tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$.

证明 必要性：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，则有

$$\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}，$$

上式两边同时取行列式，可得

$$|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1，$$

因而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

充分性：因为 $\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$（见 2.2 节例 11），若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则可得

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}，$$

此即表明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*} .$$

上述定理不仅说明了方阵可逆的条件，并且在方阵可逆的情况下，给出了用伴随矩阵

求逆矩阵的方法.

例 2 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

解 因为$|A|=\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\1&0&2\end{vmatrix}=1\neq 0$，故$A$可逆．又

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}=0,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}=1,$$

故

$$A^*=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix},$$

于是

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

例 3 设矩阵A为n阶方阵，若矩阵B也是n阶方阵，且$AB=E$，则矩阵A可逆，且$B=A^{-1}$.

证明 因为$AB=E$，故$|AB|=|A||B|=|E|=1$，从而有$|A|\neq 0$，于是由定理 2.1 知矩阵A可逆，且

$$B=EB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}E=A^{-1}.$$

例3表明，对于方阵A，只须找到它的一个同阶方阵B，使之满足$AB=E$，便可证明A可逆，并且$B=A^{-1}$.

例 4　设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足等式

$$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

求证：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

证明　由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=10\boldsymbol{E},$$

即

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right)=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆（由本节例 3 可得），且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}).$$

再由 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，得

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=6\boldsymbol{E},$$

即

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\left(\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\right)=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).$$

2.3.3　逆矩阵的应用

逆矩阵可以用于求解某些矩阵方程——对于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为已知矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为未知矩阵，当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵时，方程两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

例 5　已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\3&1\end{bmatrix},$$

求未知矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解　由于 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\2&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆，易求 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\2&4&-1\\2&3&-1\end{bmatrix}$.

用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的两端可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$$

于是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 7 & -5\\ 5 & -4\end{bmatrix}.$$

逆矩阵也可用于解某些线性方程组.

若记线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

未知数矩阵为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}.$$

若记方程组常数项矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

由于矩阵 $\boldsymbol{AX}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times 1$ 矩阵，相应位置元素相等，由矩阵相等定义可得

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}.$$

对于代数方程 $ax=b$，当 $a\neq 0$ 时，它的解为 $x=a^{-1}b$．与此相类似，对于线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，若其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，将其左右两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，便可求得方程组的解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$．

例 6 用逆矩阵解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1, \\ \quad\ \ x_2-\ x_3=2, \\ 2x_1+x_2\qquad\ =3. \end{cases}$$

解 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

则原方程组可表示为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}.$$

由例 5 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$，故有

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix},$$

而 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，根据矩阵相等的定义，得方程组的解为 $\begin{cases} x_1=-2, \\ x_2=\ \ 7, \\ x_3=\ \ 5. \end{cases}$

习题 2.3

1．求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$；　（3）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2．解下列矩阵方程：

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{X} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3．用逆矩阵解线性方程组：

（1）$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$　（2）$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4．假设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵，试证明：

（1）$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$；　（2）$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；　（3）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

（4）$(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$（$k \neq 0$ 为常数）；　（5）$|\boldsymbol{A}^{-1}| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

*2.4　分块矩阵

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例如将 3×4 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

分成子块的方法很多，下面举出两种形式：

$$（\text{i}）\left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]；（\text{ii}）\left[\begin{array}{cc:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right].$$

分法（i）可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的子块，$\boldsymbol{A}$ 是以这些子块为元素的分块矩阵.

分法（ii）可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23}\end{bmatrix},$$

请读者写出它的各个子块.

注意：在划分矩阵时，横线和竖线都要贯穿整个矩阵.

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似，分别说明如下：

分块矩阵的加法 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，采用相同的分块法得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 是同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{bmatrix}.$$

分块矩阵的数乘运算 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{bmatrix}$，$k$ 为常数，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，则

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr}\end{bmatrix}.$$

分块矩阵的乘法 分块矩阵的乘法，就是把矩阵的子块看成它们的元素，再按矩阵的乘法进行运算，但要求相乘的子块乘积有意义．具体表述为：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵，若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的分块形式如下：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{t1} & \cdots & B_{tr}\end{bmatrix},$$

即 A 分成的“条数”和 B 分成的“层数”相等（都为 t），且 A_{i1}，A_{i2}，…，A_{it} $(i=1,2,\cdots,s)$ 的列数分别等于 B_{1j}，B_{2j}，…，B_{tj} $(j=1,2,\cdots,r)$ 的行数，则

$$AB=C=\begin{bmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ C_{s1} & \cdots & C_{sr}\end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\ (i=1,2,\cdots,s;\ \ j=1,2,\cdots,r)$.

例 1　设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{bmatrix}$，求 AB.

解　把 A, B 分块成

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}E & O\\ A_1 & E\end{bmatrix},\quad B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11} & E\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix},$$

则

$$AB=\begin{bmatrix}E & O\\ A_1 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & E\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & E\\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22}\end{bmatrix},$$

而

$$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&4\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&1\end{bmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\3&1\end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{bmatrix}.$$

分块对角矩阵 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 能够分块成如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2&\cdots&\boldsymbol{O}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{A}_k\end{bmatrix},$$

其中主对角线上的子块 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 都是方阵，其余子块都是零矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵或准对角阵**.

例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&9\\0&0&3&7\end{bmatrix},$$

因为其可以分块成

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&2&0&0\\\hdashline 0&0&4&9\\0&0&3&7\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}4&9\\3&7\end{bmatrix}$ 均为方阵，故 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵.

实际上，$\boldsymbol{A}$ 采取如下分块形式也能够说明它是分块对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c:cc}1&0&0&0\\\hdashline 0&2&0&0\\\hdashline 0&0&4&9\\0&0&3&7\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_3\end{bmatrix},$$

其中$A_1=[1]$，$A_2=[2]$，$A_3=\begin{bmatrix}4&9\\3&7\end{bmatrix}$.

分块对角矩阵$A=\begin{bmatrix}A_1&O&\cdots&O\\O&A_2&\cdots&O\\\vdots&\vdots&&\vdots\\O&O&\cdots&A_k\end{bmatrix}$具有下列性质：

（1）$|A|=|A_1|\,|A_2|\cdots|A_k|$；

（2）若$A_i\ (i=1,2,\cdots,k)$可逆，则A可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&O&\cdots&O\\O&A_2^{-1}&\cdots&O\\\vdots&\vdots&&\vdots\\O&O&\cdots&A_k^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

例 2 设$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&9\\0&0&3&7\end{bmatrix}$，求：（1）$|A|$；（2）$A^{-1}$.

解 因为A是分块对角矩阵，将其分块为

$$A=\left[\begin{array}{c:c:cc}1&0&0&0\\\hdashline 0&2&0&0\\\hdashline 0&0&4&9\\0&0&3&7\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_1&&\\&A_2&\\&&A_3\end{bmatrix},$$

其中$A_1=[1]$，$A_2=[2]$，$A_3=\begin{bmatrix}4&9\\3&7\end{bmatrix}$，则

（1）$|A|=|A_1||A_2|\,|A_3|=1\times2\times1=2$；

（2）因为$A_1^{-1}=[1]$，$A_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$A_3^{-1}=\begin{bmatrix}7&-9\\-3&4\end{bmatrix}$，于是由式(2.7)得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

习题 2.4

1．用分块矩阵法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

2．设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

求：（1）$|\boldsymbol{A}|$，（2）$\boldsymbol{A}^{-1}$.

2.5　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是对矩阵进行的一种等价变形．利用矩阵的初等变换可以求可逆矩阵的逆矩阵，也可以求矩阵的秩．后面我们还将用矩阵的初等变换求向量组的秩和极大线性无关组，以及解线性方程组．可以说，从这一节开始，矩阵的初等变换便成了我们解决问题最常用的手法和最有力的工具之一．

2.5.1　矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换分为对行的初等变换和对列的初等变换．

定义 2.10 以下三种变换称为矩阵的初等行（列）变换：

（1）**互换变换**：互换矩阵两行（列）的位置（互换第 i 行与第 j 行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，互换第 i 列与第 j 列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$）；

（2）**倍乘变换**：用一个不等于零的数乘以矩阵某一行（列）的所有元素（数 k 乘以第 i 行，记作 $k \times r_i$，数 k 乘以第 i 列，记作 $k \times c_i$）；

（3）**消去变换**：把矩阵某一行（列）的所有元素乘以不等于零的数 k 以后，加到另一行（列）的对应元素上（第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，记作 $r_j + k \times r_i$，第 i 列的 k 倍加到第 j 列上，记作 $c_j + k \times c_i$）.

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+(-2)\times r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

矩阵行的初等变换和列的初等变换统称为**矩阵的初等变换**.

注意：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化为 $\boldsymbol{A}_1$，则表示为 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_1$，并把所用的变换方法写在“$\to$”的上面或下面（如上例），而不能表示为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1$，因为一般情况下，经过初等变换得到的矩阵与原矩阵已经不再相等.

定义 2.11 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**，简称**初等阵**.

根据矩阵初等变换及初等矩阵的定义可知，初等矩阵有以下三种：

$$\boldsymbol{E}_{(i,j)} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第}i\text{行}) \\ \\ (\text{第}j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array},$$

$$\boldsymbol{E}_{(i(k))} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ (\text{第 }i\text{行}), \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$
\boldsymbol{E}_{(i+j(k))}=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\\\(\text{第}i\text{行})\\\\(\text{第}j\text{行})\\\\\\\end{array},
$$

其中 $\boldsymbol{E}_{(i,j)}$ 为互换 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行和第 j 行所得矩阵；$\boldsymbol{E}_{(i(k))}$ 为将 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行乘以常数 k 所得矩阵；$\boldsymbol{E}_{(i+j(k))}$ 为将 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行乘以常数 k 加到第 i 行上所得矩阵.

由方阵行列式定义及行列式的性质易得 $\left|\boldsymbol{E}_{(i,j)}\right|=-1$，$\left|\boldsymbol{E}_{(i(k))}\right|=k$，$\left|\boldsymbol{E}_{(i+j(k))}\right|=1$，从而可知初等矩阵均为可逆矩阵．由初等变换的可逆性易得，它们的逆矩阵也为初等矩阵.

作为练习，请读者求出 3 个初等矩阵的逆矩阵.

初等矩阵与初等变换有着密切的联系，下面的定理说明了这一点.

定理 2.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于用一个 m 阶初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于用一个 n 阶初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$.

例如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)\times r_1}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-1&6\end{bmatrix},
$$

而

$$
\boldsymbol{E}_{(2+1(-2))}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-1&6\end{bmatrix}.
$$

再比如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2]{}\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&0&4\end{bmatrix},
$$

而

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{(1,2)}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&0&4\end{bmatrix}.
$$

定义 2.12　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如果满足如下条件：

（1）从第一行起，每行第一个非零元素前面“0”的个数逐行增加；

（2）如果有零行（元素全为零的行），零行一定在矩阵的最下端：
则称其为**行阶梯形矩阵**.

例如，在下面的矩阵中，

$$（\text{i}）\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&3&0&-1\\0&0&5&6\\0&0&0&0\end{bmatrix},（\text{ii}）\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&2&3&5\\0&0&0&2\end{bmatrix},（\text{iii}）\begin{bmatrix}2&-1&3&4\\0&1&5&2\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

（i）、（ii）是行阶梯形矩阵，而（iii）不是行阶梯形矩阵.

矩阵（i）、（ii）的“零区域划分曲线”（虚线）形象地描述了它们的“阶梯形”.

注意：行阶梯形矩阵的零区域划分曲线向右每次可以前进若干步，但纵向每次只能下降 1 步，例如矩阵（iii）的零区域划分曲线由于一次下降了 2 步，故它不是行阶梯形矩阵.

定理 2.3 任意一个非零矩阵，总可以通过行的初等变换化为行阶梯形矩阵.

定理 2.3 的结论非常重要，但其证明过程比较复杂，在此我们仅用下面的例子验证它.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-1&3&-1\\2&-1&0&1&-2\\-2&-5&-4&8&3\\1&1&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+2r_1}}\begin{bmatrix}1&-2&-1&3&-1\\0&3&2&-5&0\\0&-9&-6&14&1\\0&3&2&-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+3r_2}\begin{bmatrix}1&-2&-1&3&-1\\0&3&2&-5&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1&-2&-1&3&-1\\0&3&2&-5&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

读者可以随意写出一个非零矩阵，并用矩阵行初等变换把它化成行阶梯形矩阵.

注意：如果所给矩阵第一行的第一个元素是零，而第一列存在非零元素，则可将这个元素所在的行与第一行互换，然后再按照从上到下、从左到右的顺序，利用行的初等变换，将矩阵的左下部分化出“足够多”的“0”来，直到将所给矩阵化为行阶梯形矩阵.

推论 任意一个可逆矩阵，总可以通过行的初等变换化为单位矩阵.

***证明** 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为任意一个可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 必为非零矩阵，故由定理 2.3 知，$\boldsymbol{A}$ 可以经过行的初等变换化为行阶梯形矩阵，设其为 $\boldsymbol{B}$. 而由定理 2.2 知，对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次行的初等变换，相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个初等矩阵，于是存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_t$，使得

$$P_tP_{t-1}\cdots P_2P_1A=B.$$

上式两边取行列式可得

$$\left|P_tP_{t-1}\cdots P_2P_1A\right|=|P_t||P_{t-1}|\cdots|P_1||A|=|B|.$$

因为 $P_1,P_2,\cdots,P_t,A$ 均为可逆矩阵，故 $|P_1|,\cdots,|P_t|,|A|$ 都不为零，从而 $|B|\neq 0$，于是 B 不能有零行，而其为行阶梯形矩阵，故其必为上三角形矩阵，且主对角线元素均不为零．设

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ & b_{22} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix},$$

显然 B 可以通过行的初等变换化成单位矩阵．

若矩阵 A 经过有限次初等变换得到矩阵 B，则称**矩阵 A 与矩阵 B 等价**，记作 $A\cong B$．于是定理 2.3 及其推理的等价说法是：任意一个非零矩阵都等价于某个行阶梯形矩阵；任意一个可逆矩阵都等价于同阶的单位矩阵．

定理 2.4 设 A 为可逆矩阵，则存在有限个初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 使得

$$A=P_1P_2\cdots P_t.$$

证明 因为 A 可逆，由定理 2.3 的推论知，A 可以通过行的初等变换化为单位矩阵．而由定理 2.2 知，对 A 施行一次行的初等变换，相当于对 A 左乘一个初等矩阵，于是有

$$Q_t\cdots Q_2Q_1A=E, \tag{2.8}$$

其中 $Q_i\,(i=1,2,\cdots,t)$ 为初等矩阵．

因为 $Q_i\,(i=1,2,\cdots,t)$ 为初等矩阵，故 $Q_i\,(i=1,2,\cdots,t)$ 可逆，且 $Q_i^{-1}\,(i=1,2,\cdots,t)$ 也为初等矩阵．将式(2.8)左右两端依次左乘 $Q_t^{-1},Q_{t-1}^{-1},\cdots,Q_1^{-1}$，得

$$A=Q_1^{-1}Q_2^{-1}\cdots Q_t^{-1}, \tag{2.9}$$

记 $P_i=Q_i^{-1}\ (i=1,2,\cdots,t)$，则

$$A=P_1P_2\cdots P_t,$$

即可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积．

2.5.2 用初等变换求逆矩阵

由定理 2.4，若 A 为可逆矩阵，则存在有限个初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 使得

$$A = P_1P_2\cdots P_t,$$

于是

$$A^{-1} = (P_1P_2\cdots P_t)^{-1} = P_t^{-1}P_{t-1}^{-1}\cdots P_1^{-1},$$

从而

$$P_t^{-1}P_{t-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A = A^{-1}A = E, \tag{2.10}$$

$$P_t^{-1}P_{t-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}E = A^{-1}. \tag{2.11}$$

式(2.10)表明：$\boldsymbol{A}$ 经一系列初等行变换可化为 $\boldsymbol{E}$；式(2.11)表明：$\boldsymbol{E}$ 经过同样的初等行变换则化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$．综合式(2.10)与式(2.11)可得

$$P_t^{-1}P_{t-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A \,\vdots\, E) = (E \,\vdots\, A^{-1}). \tag{2.12}$$

式(2.12)的含义为：将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 并排放在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右侧，对 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})$ 施行初等行变换，当把 $\boldsymbol{A}$ 变成单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 时，原来的单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 就变成了 $\boldsymbol{A}^{-1}$．这便是**求逆矩阵的初等行变换法**．

一般求阶数大于 3 的矩阵的逆矩阵时，都采用初等行变换法，而较少使用伴随矩阵法．

例 1 求方阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵．

解 用矩阵的初等行变换法

$$[A \,\vdots\, E] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{(-1)\times r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

故

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

这与 2.3 节例 2 的结论是一致的．

习题 2.5

1．写出初等矩阵 $\boldsymbol{E}_{(i,j)}$，$\boldsymbol{E}_{(i(k))}$，$\boldsymbol{E}_{(i+j(k))}$ 的逆矩阵.

2．用初等行变换法化下列矩阵为行阶梯形矩阵：

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

3．用初等行变换法求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.6 矩阵的秩

每个矩阵都具有惟一确定的秩，矩阵的秩是给定矩阵的固有特征．比如，以线性方程组的系数和常数组成的矩阵，它的秩便是方程组中独立方程的个数．为此，我们引入矩阵秩的概念.

2.6.1 矩阵秩的概念

定义 2.13 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，任选 $\boldsymbol{A}$ 的 k 个行与 k 个列 $(k\leqslant \min\{m, n\})$，位于这些行列交叉点的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而组成的 k 阶行列式，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的一个 **k 阶子式**.

例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

任选其两行两列，比如第 1 行、第 2 行和第 1 列、第 3 列，它们交叉点的元素所组成的行

列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

就是 $\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式.

子式是一个行列式，当它的值不为零时，称其为非零子式. 上面的二阶行列式就是 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零子式. 容易验证，$\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式都等于零，即 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最大阶数为 2.

定义 2.14 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，称 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最大阶数 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $R(\boldsymbol{A})=r$ 或秩($\boldsymbol{A}$).

由定义 2.14 知，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 2.

规定：零矩阵的秩为零.

定义 2.14 的等价说法是：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在 r 阶非零子式，且 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式都等于零，则称 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

例 1 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩.

解 易见， $\boldsymbol{A}$ 的所有 4 阶子式都等于零，而 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式（选第 1、2、3 行，第 1、2、4 列）

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-1)\times(-4)=8\neq 0,$$

故 $R(\boldsymbol{A})=3$.

通过例 1 可以得出，行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行数.

这是因为，若行阶梯矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个非零行，则选取这 r 个非零行及各非零行首个非零元素（简称非零首元）所在的列组成的 r 阶子式，是一个主对角线元素均不为零的上三角形行列式，故其为 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式，而显然 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子式都等于零（最后一行元素全为零），因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r .

2.6.2 用初等变换法求矩阵的秩

行阶梯形矩阵的秩通过观察即可得出，而一般矩阵的秩通过观察是无法得出的，通过定义 2.14 求解往往又是非常麻烦的．通过下面的定理，我们可以得到一个较为简便的求矩阵秩的方法．

定理 2.5 初等变换不改变矩阵的秩，即等价矩阵的秩相等（证明略）．

由于任意一个非零矩阵都可以通过行的初等变换化为行阶梯形矩阵（定理 2.3），而行阶梯形矩阵的秩就是其非零行数，故由定理 2.5 可得求矩阵秩的一个简便方法：求一个非零矩阵的秩，可以通过行的初等变换将矩阵化成行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵的秩（非零行数）就是所求矩阵的秩．

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\2&2&3&1\\4&2&1&5\end{bmatrix}$ 的秩．

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\2&2&3&1\\4&2&1&5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&2&5&-3\\0&2&5&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&2&5&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由于所得阶梯形矩阵非零行数为 2，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

容易证明，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩还具有以下性质：

（1） $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$;

（2） $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,\ n\}$;

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $R(\boldsymbol{A})=n$ （故可逆矩阵又称为满秩矩阵）．

例 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为任意矩阵，若 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，由定理 2.4 知，必存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_t$ ，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t,$$

所以

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 经过 t 次初等变换得到的矩阵．

由于初等变换不改变矩阵的秩，故 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$.

类似地可以证明，若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $R(\boldsymbol{CA})=R(\boldsymbol{C})$.

例 3 的结论可以作为定理直接使用.

习题 2.6

1. 用定义求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2. 用初等变换求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & -6 & -1 & -3 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，试证明 $R(\boldsymbol{A})=n$.

2.7 本章学习指导

2.7.1 教学基本要求

1. 理解矩阵的概念，了解几种常见的特殊矩阵.

2. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算，掌握各种运算的性质、规律，知道矩阵转置及方阵行列式的概念.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握矩阵可逆的充分必要条件、可逆矩阵的性质，以及用伴随阵求可逆矩阵逆矩阵的方法.

4. 熟练掌握矩阵的初等变换.

5. 理解矩阵秩的概念，熟练掌握用初等行变换求矩阵的秩，以及求逆矩阵的方法.

6. 了解分块矩阵及其运算.

2.7.2 考点提示

1. 矩阵的运算：

（1）矩阵的加法、数乘、矩阵乘法（含方阵的幂）；

（2）方阵的行列式．

2．逆矩阵：

（1）矩阵可逆条件，用伴随矩阵法求矩阵的逆矩阵；

（2）可逆矩阵的性质．

3．矩阵的初等变换：

（1）用初等变换求逆矩阵；

（2）用初等变换求矩阵的秩．

2.7.3 疑难解析

1．行列式和矩阵有什么区别？

答 行列式和矩阵尽管在形式上都是“数表”，但它们却有着质的区别：

（1）一个行列式实质上是一个算式，它按照一定的展开法则，最终对应着一个数或代数式；而矩阵则是一个“整体”，矩阵进行加法、数乘以及求逆运算和初等变换的结果仍然是同型矩阵，矩阵乘积结果还是矩阵．

（2）任意行列式都对应一个值，因此，两个阶数不同的行列式的值可能相等，此时也称这两个行列式相等；而两个矩阵相等要求它们必须是同型矩阵，且相同位置的元素相等．

（3）行列式的数乘运算 $k\boldsymbol{D}$ 是以数 k 乘以行列式 $\boldsymbol{D}$ 的某一行或某一列，而矩阵的数乘运算 $k\boldsymbol{A}$ 则是以数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素．

2．解矩阵方程时，为什么有时左乘逆矩阵，有时右乘逆矩阵？

答 这是因为矩阵乘法不满足交换律．比如对矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为未知矩阵，将上式左右两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得 $\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，而 $\boldsymbol{EX}=\boldsymbol{X}$，从而可以求出未知矩阵 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$．反之，若右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，由于 $\boldsymbol{X}$ 未必是 $\boldsymbol{A}$ 的同阶方阵，故 $\boldsymbol{AXA}^{-1}$ 未必能做乘法，即使能做乘法，由于矩阵乘法不满足交换律，即通常情况下，$\boldsymbol{AXA}^{-1}\neq\boldsymbol{AA}^{-1}\boldsymbol{X}$，从而 $\boldsymbol{X}$ 无法被“解放”出来；同理，解 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 形式的矩阵方程，则只能右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$．

这里需要指出两点：

（1）无论是左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，还是右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，都必须是对方程两端同时进行，而不能一端左乘、另一端右乘，比如，由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$ 是错误的；

（2）求解形如 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$ 的矩阵方程，其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为未知矩阵，只需将方程两端分别左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$，便可得到 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$．

3．方阵就是行列式吗？

答 不是的．虽然方阵的行数与列数相同，在形式上与行列式相像，但它仍然是矩阵而不是行列式．不过方阵的全部元素不改变各自的相对位置可以得到一个行列式，这个行列式称为方阵的行列式，它是方阵的一种运算，而不是说方阵就是行列式．

2.8 本章复习题

1．**填空题**

（1）若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ 5 & a-c \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2b+c & -1 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $a=$________，$b=$________，$c=$________．

（2）形如 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 的矩阵叫做________方阵；当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 时，该矩阵叫做________矩阵．

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ 是________型矩阵，它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\underline{\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}}$．

（4）当________时，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}_{r\times s}$ 的乘积有意义，且积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个________型矩阵．

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若存在同阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=$________，则 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$，此时称 $\boldsymbol{A}$ 可逆；若用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{AA}^*=$ ________$\boldsymbol{E}$．

（6）若矩阵运算 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{C}$ 有意义，则 $(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=$________．

（7）若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________，$|\boldsymbol{AB}|=$________．

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=5$，则 $|2\boldsymbol{A}|=$________．

（9）设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，当 $a_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为________矩阵；当 $a_{ij}=0\,(i\neq j；i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为________矩阵．

（10）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$________；单位矩阵经过一次

初等变换得到的矩阵叫做________矩阵.

2．选择题

（1）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则必有 [　　　　].

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$； （B）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（C）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$； （D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有 [　　　　].

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$； （B）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$； （C）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$； （D）$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$.

（3）如果 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$ [　　　　].

（A）$\begin{bmatrix}7 & -4\\ -5 & 2\end{bmatrix}$； （B）$\begin{bmatrix}7 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$； （C）$\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 4 & -7\end{bmatrix}$； （D）$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 4 & 7\end{bmatrix}$.

（4）若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}$，则 $R(\boldsymbol{A})$不可能等于 [　　　　].

（A）1； （B）2； （C）3； （D）4.

（5）矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的秩为[　　　　].

（A）1； （B）2； （C）3； （D）4.

（6）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵，下面运算正确的是[　　　　].

（A）$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$； （B）$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$；

（C）$\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$； （D）$(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^n\boldsymbol{B}^{-1}$.

3．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 3\end{bmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

4．计算下列各题：

（1）$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$； （2）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$； （3）$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$；

（4）$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$；（5）$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\-2 & 1 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$；（6）$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；

（7）$\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 2 & 5\\-2 & 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；（8）$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n$（$n$为正整数）.

5．下列矩阵中哪两个能够相乘，对能够相乘的算出乘积（包括左乘与右乘）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\1 & -1 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 5\\-2 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

6．设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶方阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$可交换．试求所有可与$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$交换的矩阵.

7．若矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$可交换，试证明：

（1）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

8．求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -2 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\-\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 1 & 2\\1 & 1 & 1 & -1\\1 & 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$.

9．解下列矩阵方程：

（1）$\begin{bmatrix}2 & 7\\1 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$；

（3）$\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}4 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 1\\-14 & 3\end{bmatrix}$.

10．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 2 & 3\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 2 & 1\\3 & 0 & 0\\4 & 1 & 2\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\1 & -2 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1 & 1\\-2 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

11．已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$，求：（1）$\boldsymbol{A}^2$，（2）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

12．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，试证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 均为对称矩阵.

13．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$为同阶可逆方阵，求证$\boldsymbol{ABC}$可逆，且$(\boldsymbol{ABC})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

14．将下列线性方程组化为矩阵方程求解：

（1）$\begin{cases}4x_1-5x_2 = 2,\\ 2x_1+3x_2+2x_3=10,\\ x_1-x_2+x_3=0,\end{cases}$ （2）$\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3=1,\\ 5x_1-7x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=-1.\end{cases}$

* 15．某电子公司生产T_1，T_2两种型号的计算器．每台计算器由 4 种配件构成：P_1（芯片）、P_2（晶体管）、P_3（电阻）、P_4（机身）；而生产这些配件需 4 种原料：Q_1（铜）、Q_2（锌）、Q_3（塑料）、Q_4（玻璃）．已知生产 1 件T_i ($i=1$，2) 型计算器所需各种配件的数量如下表所示：

	P_1	P_2	P_3	P_4
T_1	4	8	10	1
T_2	3	7	8	1

（1）若记 $p_{ij}=$ 生产 1 台 T_j 所需 P_i 的数量，试写出矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{4\times 2}$；

（2）若记 $q_{ij}=$ 生产 1 件 P_j 所需 Q_i 的数量，$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$，试写出矩阵 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{QP}$ 元素t_{11}的表达式，并解释它的含义.

第 3 章　n 维向量与线性方程组

在平面解析几何中，通过建立直角坐标系，平面上的点与有序数组(x, y)建立了一一对应关系，从而为用代数方法研究几何问题，提供了极大的方便．事实上，这样的有序数组几乎无处不在，比如空间的一个点可以用 3 个数组成的有序数组(x, y, z)来表示；某一质点在某一时刻的位置可以用 4 个数组成的有序数组(x, y, z, t)来表示；在计算机成像技术中，像的区域被分成许多小区域即像素，若用(x, y)表示像素的位置，用(r, g, h)表示 3 种基本颜色的强度，则彩色图像的每个像素可用数组(x, y, r, g, h)来刻画；我们前面学习的n元线性方程组，它的解实际上是由n个数组成的有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$……在线性代数中，把上述有序数组统称为向量．

3.1　n 维向量及其运算

3.1.1　n 维向量的概念

定义 3.1　由n个数$a_1, a_2 \cdots, a_n$所组成的有序数组$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$称为$n$**维向量**．其中数$a_1, a_2, \cdots, a_n$称为向量$\boldsymbol{\alpha}$的分量，$a_i$称为$\boldsymbol{\alpha}$的第$i$个分量．

分量全为实数的向量称为**实向量**，分量中含有复数的向量称为**复向量**．本书只讨论实向量．

向量可以写成$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$的形式，称其为**行向量**，也可以写成$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$的形式，称其为**列向量**．行向量可以看成列向量的转置，列向量可以看成行向量的转置，即

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)，\quad (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

本书中的向量除特殊说明外，均指列向量．

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2,\cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量，当且仅当它们的对应分量都相等，即 $a_i=b_i$（$i=1,2,\cdots,n$）时，称**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等**，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

分量都是零的向量，叫做**零向量**，记作 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^{\mathrm{T}}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

例 1　矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的第 i 行可以看成一个 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}, a_{i2},\cdots, a_{in})$　$(i=1,2,\cdots,m)$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列可以看成一个 m 维列向量 $\boldsymbol{\beta}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$（$j=1,2,\cdots,n$），从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可以表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix}.$$

3.1.2　向量的线性运算

行向量可以看成行矩阵，列向量可以看成列矩阵．因此，向量进行运算时，可以按照矩阵的运算法则进行．

定义 3.2　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2,\cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维向量，则向量 $(a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$ 叫做**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2,\cdots, a_n+b_n)^{\mathrm{T}}.$$

由向量的加法及负向量的定义可以定义向量的减法为

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^{\mathrm{T}}.$$

定义 3.3　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2,\cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 为 n 维向量，k 为实数，则向量 $(ka_1, ka_2,\cdots, ka_n)$ 叫做**数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积**，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}k$，即 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}k=(ka_1, ka_2,\cdots, ka_n)$.

向量的加法运算及数乘运算统称为**向量的线性运算**，它们满足如下运算规律（设α，β，γ都是n维向量，k，l为实数）：

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

（3）$\alpha+0=\alpha$；

（4）$\alpha+(-\alpha)=0$；

（5）$1\alpha=\alpha$；

（6）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

（7）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$；

（8）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

例 2　已知$\alpha=(1,2,0,-3)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(-1,1,-4,2)^{\mathrm{T}}$，求$2\alpha+3\beta$.

解　$2\alpha+3\beta=2(1,2,0,-3)^{\mathrm{T}}+3(-1,1,-4,2)^{\mathrm{T}}=(2,4,0,-6)^{\mathrm{T}}+(-3,3,-12,6)^{\mathrm{T}}=(-1,7,-12,0)^{\mathrm{T}}$.

例 3　已知$\alpha_1=(2,5,1,3)$，$\alpha_2=(10,1,5,10)$，$\alpha_3=(4,1,-1,1)$，如果向量$\boldsymbol{x}$满足$(3\alpha_1+\boldsymbol{x})+2(\alpha_2-\boldsymbol{x})=5(\alpha_3+\boldsymbol{x})$，试求向量$\boldsymbol{x}$.

解　因为$(3\alpha_1+\boldsymbol{x})+2(\alpha_2-\boldsymbol{x})=5(\alpha_3+\boldsymbol{x})$，故$3\alpha_1+2\alpha_2-\boldsymbol{x}=5\alpha_3+5\boldsymbol{x}$，从而

$$x=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\frac{1}{6}[(6,15,3,9)+(20,2,10,20)-(20,5,-5,5)]=\frac{1}{6}(6,12,18,24)=(1,2,3,4).$$

习题 3.1

1．已知向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\4\\-3\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}$，求：

（1）$2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$；

（2）$\alpha_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2^{\mathrm{T}}-2\alpha_3^{\mathrm{T}}$.

2．已知向量$\alpha_1=(1,2,-2,3)$，$\alpha_2=(5,1,2,1)$，$\alpha_3=(0,1,-1,1)$，且$2(\alpha_1-\boldsymbol{x})+(\alpha_2+\boldsymbol{x})=3(\alpha_3-\boldsymbol{x})$，求向量$\boldsymbol{x}$.

3．已知$\alpha-\beta=(1,3,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha+\beta=(1,3,2,-1)^{\mathrm{T}}$，求$\alpha$，$\beta$.

4．已知向量$(2,-3,4)=\boldsymbol{x}(1,1,1)+\boldsymbol{y}(1,1,0)+\boldsymbol{z}(1,0,0)$，求$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$.

3.2　向量组的线性相关性

3.2.1　向量组的线性组合

在 3.1 节例 3 的求解过程中，我们得出 $x=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2-\frac{5}{6}\alpha_3$，即向量 x 可由向量 α_1，α_2，α_3 经线性运算得到．这时我们称向量 x 是向量组 α_1，α_2，α_3 的线性组合，或称 x 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示．

定义 3.4　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和向量 β，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

则称向量 β 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的**线性组合**，或称向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性表示（表出）**.

例 1　设全体 3 维向量组成的集合为 R^3，即 $\mathrm{R}^3=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{\mathrm{T}}\,|\,a_i\in\mathbf{R},i=1,2,3\}$，则任意一个三维向量 $\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$，均可由向量组 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 线性表示，其表示式为 $\alpha=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$.

例 2　设 $\alpha_1=(1,1,-1),\alpha_2=(1,2,-1),\alpha_3=(-1,1,2)$，$\beta=(2,5,-1)$，试判断 β 是否能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．若能够表示，试求出表示式。

解　设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_1，k_2，k_3 为实数，即

$$\begin{aligned}(2,5,-1)&=k_1(1,1,-1)+k_2(1,2,-1)+k_3(-1,1,2),\\&=(k_1,k_1,-k_1)+(k_2,2k_2,-k_2)+(-k_3,k_3,2k_3),\\&=(k_1+k_2-k_3,k_1+2k_2+k_3,-k_1-k_2+2k_3).\end{aligned}$$

由两个向量相等的定义，有

$$\begin{cases}k_1+k_2-k_3=2,\\k_1+2k_2+k_3=5,\\-k_1-k_2+2k_3=-1.\end{cases}$$

由于方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$，由克莱姆法则可得方程组的惟一解为

$$\begin{cases} k_1=2, \\ k_2=1, \\ k_3=1. \end{cases}$$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，表示式为 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

例 3 若将方程组 $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2-\ \ x_3=3, \\ x_1+\ \ x_2-2x_3=4, \\ x_1-2x_2+\ \ x_3=1, \end{cases}$ 各未知数的系数和常数项依次写成如下向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}，$$

则线性方程组可写成向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{b} .$$

3.2.2 向量组线性相关与线性无关

定义 3.5 对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在一组不全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**，否则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

对于例 2 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$，由于 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，故存在一组不全为零的实数 2，1，1，$-1$，使 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关．而对于三维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，因为只有 $k_1=k_2=k_3=\boldsymbol{0}$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$ 成立，故三维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 线性无关.

只有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量组，当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时，称其为线性相关的，当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 时，称其为线性无关的．一个向量组若含有零向量，则其必是线性相关的.

线性相关与线性无关是相互对立的两个概念，一个向量组要么是线性相关的，要么是线性无关的．请读者自己给出向量组线性无关的定义，这会给以后解决线性相关性的有关问题带来方便.

例 4　讨论 n 维向量组

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots,\quad e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

的线性相关性.

解　设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使

$$k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$$

即

$$k_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+k_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},$$

因此必有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，所以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为 n **维基本向量组**. 对于任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，有 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$，故 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 也称为 n **维坐标向量**.

例 5　判断下列向量组的线性相关性:

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,2)^{\mathrm{T}}$.

解　（1）设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1(1,-1-1)+k_2(1,2,1)+k_3(2,1,1)=(0,0,0),$$

由向量相等的定义，可得齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_1+\ k_2+2k_3=0,\\-k_1+2k_2+\ k_3=0,\\-k_1+\ k_2+\ k_3=0.\end{cases}$$

由于方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=3\neq0$，所以该方程组只有零解，即只有 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$ 成立，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（2）设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1(0,2,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,1,1)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,3,2)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

由向量相等的定义，可得齐次线性方程组

$$\begin{cases}-k_2-k_3=0,\\2k_1+k_2+3k_3=0,\\k_1+k_2+2k_3=0.\end{cases}$$

由于方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0&-1&-1\\2&1&3\\1&1&2\end{vmatrix}=0$，故方程组有非零解，即存在不全为零的数 k_1，k_2，k_3，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 6 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 试证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 也线性无关.

证明 设有一组数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 代入上式得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

整理为

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0.\end{cases}$$

由于该方程组的系数行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，故其只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

3.2.3　向量组线性相关性的有关结论

定理 3.1　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m\geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

证明　必要性：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}.$$

因为 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中至少有一个不为零，不妨假设 $k_1\neq 0$, 则有

$$\alpha_1=\frac{k_2}{-k_1}\alpha_2+\frac{k_3}{-k_1}\alpha_3+\cdots+\frac{k_m}{-k_1}\alpha_m,$$

即 α_1 能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

充分性：不妨假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的向量 α_m 能由其余 $m-1$ 个向量线性表示，即有 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}$，使

$$\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1},$$

于是，存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1},-1$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}+(-1)\alpha_m=\mathbf{0},$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

定理 3.2　若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，并且表示方法惟一.

证明　因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，故存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k_{m+1}$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=\mathbf{0}.$$

要证 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，只需证明 $k_{m+1}\neq 0$．用反证法，假设 $k_{m+1}=0$，则上式变为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0},$$

且 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，这与已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关相矛盾，故 $k_{m+1}\neq 0$，于是

$$\beta=\frac{k_1}{-k_{m+1}}\alpha_1+\frac{k_2}{-k_{m+1}}\alpha_2+\cdots+\frac{k_m}{-k_{m+1}}\alpha_m,$$

即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

再证表示方法惟一：设有两个表示式

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$
$$\boldsymbol{\beta}=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

两式相减可得

$$(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，所以$\lambda_i-\mu_i=0$，或$\lambda_i=\mu_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，即表示方法惟一.

定理 3.3 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$也线性相关.

证明 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

从而有一组不全为零的数$k_1,\cdots,k_r,0,\cdots,0$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

推论 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$也线性无关.

推论的证明留作练习.

习题 3.2

1．判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1,0,-1,2\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(1,-1,2,0\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(3,0,-1,2\right)$.

2．将下列各题中的向量$\boldsymbol{\beta}$表示为其他向量的线性组合：

（1）$\boldsymbol{\beta}=\left(1,-1,0,-2\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_1=\left(1,0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=\left(0,1,0,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_3=\left(0,0,1,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_4=\left(0,0,0,1\right)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\beta}=\left(1,-1,3\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1,2,-1\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,1,4\right)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\left(1,2,3\right)$.

3．设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，求证：$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_2$也线性无关.

4．证明：线性无关向量组的部分组必线性无关.

3.3　向量组的极大无关组和向量组的秩

定义 3.6　设 $\boldsymbol{T}$ 是一个 n 维向量组，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的部分组，且满足：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

（2）$\boldsymbol{T}$ 中任意一个向量 α 均能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示；

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 T 的一个**极大线性无关组**，简称**极大无关组**.

例如，向量组 $\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(0,1)$，$\alpha_3=(1,1)$，由于 α_1,α_2 线性无关，而 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，即 α_3 能由 α_1，α_2 线性表示，所以 α_1，α_2 是该向量组的一个极大无关组.

可以验证，α_1,α_3 和 α_2,α_3 也都是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组.

定义 3.7　设 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$ 均为 n 维向量组，如果向量组 $\boldsymbol{T}_2$ 中的任意一个向量均能由向量组 $\boldsymbol{T}_1$ 线性表示，则称**向量组 $\boldsymbol{T}_2$ 能由向量组 $\boldsymbol{T}_1$ 线性表示**，记作 $\boldsymbol{T}_1\Rightarrow\boldsymbol{T}_2$. 如果向量组 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$ 能够相互线性表示，则称**向量组 $\boldsymbol{T}_1$ 与 $\boldsymbol{T}_2$ 等价**，记作 $\boldsymbol{T}_1\Leftrightarrow\boldsymbol{T}_2$.

容易证明，向量组和它的极大无关组是等价向量组；如果向量组有多个极大无关组，则它们彼此是等价的.

可以证明，等价的线性无关的向量组所含向量个数相等，故一个向量组不同的极大无关组所含向量的个数是相等的，即一个向量组的极大无关组所含向量的个数是惟一确定的，它是一个向量组的固有属性.

定义 3.8　向量组的极大线性无关组所含向量的个数叫做**向量组的秩**.

例如，向量组 $\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(0,1)$，$\alpha_3=(1,1)$，由于 α_1，α_2 是它的一个极大无关组，故它的秩为 2.

只含有零向量的向量组的秩规定其为零.

用定义求向量组的秩和极大无关组，往往是非常困难的. 下面的定理使我们可以通过矩阵的初等变换，来求向量组的秩和极大无关组.

定理 3.4　向量组的秩等于以这组向量为行组成的矩阵的秩，也等于以这组向量为列组成的矩阵的秩.（证明略）

定理 3.5　矩阵的初等行变换不改变其列向量间的线性相关性和线性组合关系.（证明略）

定理 3.5 的含义是：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关；

$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_n\alpha_n \Leftrightarrow \beta_i = k_1\beta_1 + \cdots + k_{i-1}\beta_{i-1} + k_{i+1}\beta_{i+1} + \cdots + k_n\beta_n$，$k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n$ 为实数.

根据定理 3.4 及定理 3.5，我们便可以利用矩阵初等行变换来求向量组的秩和极大无关组.

例 1 求向量组 $\alpha_1 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3 = (1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组.

解 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，化为行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

因为 $R(\boldsymbol{A}) = 2$，故向量组 α_1，α_2，α_3 的秩为 2，且 α_1，α_2 就是向量组 α_1，α_2，α_3 的一个极大无关组.

用矩阵初等行变换求向量组的秩和极大无关组的方法是：以所给向量为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换将其化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $R(\boldsymbol{B})$ 等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$，也就是向量组的秩；矩阵 $\boldsymbol{B}$ 各非零行第一个非零元素所在的列对应的初始向量就是向量组的一个极大无关组. 比如例 1，以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 有两个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2$，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2；而行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第一个非零行的第一个非零元素在第一列，第二个非零行的第一个非零元素在第二列，则 α_1,α_2 就是向量组 α_1，α_2，α_3 的一个极大无关组.

一个行阶梯形矩阵，如果其各非零行的第一个非零元素为 1，且各非零行第一个非零元素所在列的其余元素均为零，则称其为**行标准形矩阵**或**简化阶梯形矩阵**.

例如，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 都是行标准形矩阵.

例 2 求向量组 $\alpha_1 = (1,2,-1)$，$\alpha_3 = (4,-4,-2)$，$\alpha_4 = (1,2,5)$ 的秩及它的一个最大无关组，并将其他向量用该极大无关组线性表示.

解 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，并对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为行阶梯形矩阵，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{\frac{1}{2}r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+6r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 便是它的一个极大无关组.

为了将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，只需将行阶梯形矩阵化为行标准形矩阵.

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&3&4&1\\0&1&1&3\\0&0&-6&18\end{bmatrix}\xrightarrow[(-\frac{1}{6})r_3]{r_1-3r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&-8\\0&1&1&3\\0&0&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&6\\0&0&1&-3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

若记 $\boldsymbol{B}=[\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4]$，其中 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\beta_4=\begin{bmatrix}-5\\6\\-3\end{bmatrix}$，则有 $\beta_4=-5\beta_1+6\beta_2-3\beta_3$，由于矩阵的初等行变换不改变其列向量间的线性组合关系（定理 3.5），故 $\boldsymbol{\alpha}_4=-5\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$.

定理 3.6　向量组线性无关的充分必要条件是向量组的秩等于它所含向量的个数.

证明　必要性：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 便是自身的极大无关组，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩为 r .

充分性：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩为 r，即它的极大无关组所含向量的个数为 r，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 便为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大无关组，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

推论 1　向量组线性相关的充分必要条件是向量组的秩小于它所含向量的个数.

由定理 3.6 及其推论 1 可知，向量组的线性相关性可以通过向量组的秩来判定.

例 3　判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-3)$ 的线性相关性.

解　以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&-3\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&-3\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩也为 2，于是由定理 3.6 的推论 1 可得 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

推论 2　任意 m 个 n 维向量（$m>n$）必线性相关.

推论 3　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维向量组，矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

例 4　判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-2,1)$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

解　（1）因为向量组含 4 个三维向量，由定理 3.6 推论 2 知，它们必线性相关.

（2）以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

由定理 3.6 推论 3 知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

习题 3.3

1．判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,2),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,11,-3)$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-2,0,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,8,6,15)$；

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-2,3,1)^{\mathrm{T}}$.

2．t取何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$线性相关？

3．求下列向量组的秩和一个极大无关组：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,-2),\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,-16),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,6)$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-3,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,4,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-4,4,0)$.

4．求下列向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表示：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(2,-1,3,0)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-3,3,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

3.4 齐次线性方程组

形如

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{3.1}$$

的方程组，叫做**齐次线性方程组**.

该方程组有m个方程，n个未知数，称其为$m\times n$型方程组.

如果记

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

则方程组(3.1)可写成

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}. \tag{3.2}$$

式(3.2)称为齐次线性方程组的矩阵形式或矩阵表示式.

如果记$\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ (j=1,2,⋯,n)，即$\boldsymbol{\alpha}_j$是由方程组(3.1)第 j 个未知数的系数组成的列向量，则方程组(3.1)又可写成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}. \tag{3.3}$$

式(3.3)称为方程组(3.1)的向量形式或向量表示式.

如果$x_1=k_1$，$x_2=k_2,\cdots$，$x_n=k_n$是方程组(3.1)的一组解，则向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

称为方程组（3.1）的**解向量**，简称方程组的**解**.

3.4.1　齐次线性方程组解的性质

齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解具有以下性质：

性质 1　如果ξ_1与ξ_2是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的两个解，则$\xi_1+\xi_2$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

证明　因为ξ_1与ξ_2是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，所以$\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{0}$，于是

$$\boldsymbol{A}(\xi_1+\xi_2)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

即$\xi_1+\xi_2$是$\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$的解.

性质 2　如果ξ是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，$k$为任意实数，则$k\xi$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

性质 2 的证明由读者自己完成.

由性质 1 和性质 2 可得到性质 3.

性质 3　如果$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$均为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，则它们的线性组合

$$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$$

也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是任意实数.

由齐次线性方程组解的性质可以看出，如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则它必有无穷多个解.

定义 3.9　若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且满足：

（1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关；

（2）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示，

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个**基础解系**.

定理 3.7　设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$，则当 $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解（没有基础解系）；当 $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解和基础解系，并且它的任一基础解系均含有 $n-r$ 个线性无关的解向量.（证明略）

由定义 3.9 知，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，就是它的解向量组的一个极大无关组.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解可表示为：

$$=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\ . \tag{3.4}$$

式(3.4)称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的**通解**或**一般解**.

3.4.2　齐次线性方程组的解法

下列三种变换，称为方程组的初等变换：

（1）交换方程组中任意两个方程的位置；

（2）将方程组中某个方程乘以一个非零实数；

（3）将方程组中某个方程乘以一个非零实数加到另一个方程上.

可以证明，对线性方程组进行初等变换不改变线性方程组的解. 因此，求解齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，可以对其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，化成行标准形 $\boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是等价（同解）方程组，于是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，便是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，详见下面的例题.

例 1　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

的一个基础解系.

解　对齐次线性方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&1&-1&-2\\1&0&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-3&-3&-6\\0&-2&-2&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{(-\frac{1}{3})\times r_2}\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3-2x_4=0,\\x_2+x_3+2x_4=0.\end{cases}$$

取 x_3， x_4 为自由未知量，将方程组改写成

$$\begin{cases}x_1=\quad x_3+2x_4,\\x_2=-x_3-2x_4.\end{cases}$$

令 $x_3=1$，$x_4=0$，可得 $x_1=1$，$x_2=-1$；令 $x_3=0$，$x_4=1$，可得 $x_1=2$，$x_2=-2$，于是

$$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}，\quad \xi_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

就是方程组的一个基础解系.

例 2　求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-\ \ x_3+2x_4=0,\\x_1+2x_2+2x_3-\ \ x_4=0,\\4x_1+8x_2+5x_3-\ \ x_4=0\end{cases}$$

的通解.

解　对方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\1&2&2&-1\\4&8&5&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\0&0&3&-3\\0&0&9&-9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\times r_2]{r_3-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=2<4$，所以方程组有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_2\qquad +x_4=0,\\ \qquad\qquad x_3-x_4=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4,\\ x_3=\qquad\quad x_4.\end{cases}$$

分别令 $x_2=1$，$x_4=0$ 及 $x_2=0$，$x_4=1$ 可得方程组的基础解系为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

于是方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 k_1，k_2 为任意实数.

此题也可以将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行标准形矩阵所对应的线性方程组写成如下形式

$$\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4,\\ x_2=\quad x_2,\\ x_3=\qquad\quad x_4,\\ x_4=\qquad\quad x_4.\end{cases}$$

即把自由未知量 x_2,x_4 补充到等价方程组中．将上式改写为向量形式，有

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix},$$

于是自由未知量系数组成的列向量组

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

便是原方程组的一个基础解系.

习题 3.4

1．求下列齐次线性方程组的一个基础解系：

（1）$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-x_4=0. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-2x_2-4x_3+5x_4=0. \end{cases}$

2．求下列齐次线性方程组的通解：

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ 3x_1+x_2-2x_3-x_4=0. \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2-3x_3+3x_4+4x_5=0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2-5x_3-4x_4=0, \\ 4x_1-x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=0, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1-3x_2+8x_3=0. \end{cases}$

3．讨论 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2+\lambda x_3=0. \end{cases}$$

（1）只有零解；（2）有非零解，并求出它的通解.

3.5　非齐次线性方程组

3.5.1　非齐次线性方程组的概念

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{3.5}$$

的方程组叫做**非齐次线性方程组**.

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的系数矩阵，$\boldsymbol{x}$ 称为方程组的未知数矩阵（向量），$\boldsymbol{b}$ 称为方程组的常数项矩阵（向量），则方程组(3.5)等价于矩阵方程

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}. \tag{3.6}$$

式(3.6)称为方程组(3.5)的矩阵形式或矩阵表示式.

若记

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 为方程组(3.5)的第 j 个未知数的系数组成的向量，则方程组(3.5)等价于向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}. \tag{3.7}$$

式(3.7)称为方程组(3.5)的向量形式或向量表示式，它表明：非齐次线性方程组有解等价于它的常数项向量可由未知数系数向量组线性表示.

由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和常数项矩阵 $\boldsymbol{b}$ 组成的矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{b}\right)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为非齐次线性方程组的**增广矩阵**.

将非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 均改为零所得到的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，称为非齐次线性方程组的**导出方程组**，简称**导出组**.

例如，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 2x_1+\ \ x_2+3x_3+x_4=3, \\ 2x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+3x_4=5 \end{cases}$$

的系数矩阵、未知数矩阵（向量）及常数项矩阵（向量）分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

方程组的未知数系数向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

方程组的向量形式为

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{b};$$

方程组的增广矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix};$$

方程组的导出组为

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4=0,\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=0,\\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

3.5.2 非齐次线性方程组有解的条件

定理 3.8 非齐次线性方程组(3.5)有解的充分必要条件是它的系数矩阵的秩等于它增广矩阵的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$.

证明 必要性：设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非齐次线性方程组(3.5)的一组解，则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b},$$

即 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 等价，故它们的秩相等，而系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于其列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩，增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的秩等于其列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的秩，故 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$.

充分性：若 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的秩也都为 r. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的一个线性无关的部分组，又由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的秩为 r，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 的一个极大无关组，从而 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，当然也能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，即方程组(3.5)有解.

定理 3.9 对于非齐次线性方程组(3.5)，如果 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r=n$，则该线性方程组有惟一解；如果 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r<n$，则该线性方程组有无穷多个解.

证明略.

例 1 判断下列线性方程组是否有解？如果有解，有多少个解？

（1）$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2=1,\\ 2x_1-4x_2+x_3=1.\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=1,\\ x_1+2x_2+5x_3=4,\\ 2x_1+4x_2+x_3=1.\end{cases}$

解　（1）对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&0\\1&-2&0&1\\2&-4&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-2&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=2<n=3$，所以方程组有解，且有无穷多个解.

（2）对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\widetilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&3&1\\1&2&5&4\\2&4&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&3&1\\0&3&2&3\\0&6&-5&-1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-2r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&3&1\\0&3&2&3\\0&0&-9&-7\end{array}\right],$$

因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3=n$ ，所以方程组有解，且有惟一解.

3.5.3　非齐次线性方程组解的结构

定理 3.10　如果 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

证明　因为 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 的解，即 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{b}$,　$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}$ ，故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ，所以 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

定理 3.11　如果 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解可以表示为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_0\,, \tag{3.8}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为实数.

证明　设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解，因为 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，于是由定理 3.10 知 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解．而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ ，使

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}_0=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}\,,$$

即

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_0\,.$$

式(3.8)称为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的**通解**或**一般解**.

例 2　求非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\2x_1-x_2-5x_3+8x_4=5,\\x_2+x_3-2x_4=-1\end{cases}$$

的通解.

解 对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&1&1\\2&-1&-5&8&5\\0&1&1&-2&-1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&1&1\\0&-3&-3&6&3\\0&1&1&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-1&1&1\\0&1&1&-2&-1\\0&-3&-3&6&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-2&3&-2\\0&1&1&-2&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

因为 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=2$，所以方程组有解，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=2x_3-3x_4-2,\\x_2=-x_3+2x_4-1,\end{cases}$$

或写为

$$\begin{cases}x_1=2x_3-3x_4-2,\\x_2=-x_3+2x_4-1,\\x_3=\ \ x_3,\\x_4=\qquad\quad x_4,\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{\eta}_0=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$ 为非齐次线性方程组的一个特解，$\xi_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}$ 为其导出组的一个基础解系，非齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\boldsymbol{\eta}_0$（$k_1$，$k_2$ 为任意实数）.

例 3 p，q 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+\ \ x_3=4,\\x_1+3x_2+2x_3=5,\\2x_1+3x_2+px_3=q,\end{cases}$$

（1）无解；（2）有惟一解；（3）有无穷多个解，并求其通解．

解　对方程组的增广矩阵进行初等行变换，有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&4\\1&3&2&5\\2&3&p&q\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&4\\0&1&1&1\\0&-1&p-2&q-8\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&4\\0&1&1&1\\0&0&p-1&q-7\end{array}\right],$$

故

（1）当 $p=1$ 且 $q\neq 7$ 时，$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3,\ R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})\neq R(\boldsymbol{A})$，方程组无解；

（2）当 $p\neq 1$ 时，$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=3=n$，方程组有惟一解；

（3）当 $p=1$ 且 $q=7$ 时，$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=2<n$，方程组有无穷多个解．此时

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1&2&1&4\\1&3&2&5\\2&3&1&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

原方程组的等价方程组为

$$\begin{cases}x_1=\ \ x_3+2,\\x_2=-x_3+1,\\x_3=\ \ x_3,\end{cases}$$

故方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\quad k\in\mathbf{R}$$

习题 3.5

1．求下列非齐次线性方程组的通解：

（1）$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+2x_4=1,\\2x_1+x_2+4x_3+x_4=5,\\x_1+2x_2+2x_3-x_4=4.\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2,\\2x_1+7x_2-x_3+x_4=1,\\3x_1+10x_2+x_3-3x_4=4.\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1,\\2x_1+4x_2+x_3+x_4=5,\\x_1+2x_2+2x_3-x_4=4.\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3+5x_4=-4,\\3x_1+2x_2-x_3-6x_4=-1,\\2x_1+5x_2-x_3-7x_4=5,\\x_1-8x_2+2x_3-3x_4=-1.\end{cases}$

2．当 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

有解？并求出它的通解.

3．当λ取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

（1）有惟一解；（2）无解；（3）有无穷多个解，并求其通解.

4．讨论当p，q为何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = p, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = q. \end{cases}$$

（1）无解；（2）有解，并求其通解.

3.6 本章学习指导

3.6.1 教学基本要求

1．理解n维向量的概念，掌握向量的线性运算.

2．理解向量组线性相关、线性无关的定义，并知道有关的重要结论.

3．知道向量组极大无关组和向量组秩的概念，并会求已知向量组的秩和极大无关组.

4．理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

5．理解齐次线性方程组基础解系的概念，知道线性方程组通解的概念及解的结构.

6．熟练掌握用行初等变换求线性方程组通解的方法.

3.6.2 考点提示

1．向量的线性运算.

2．判断向量组的线性相关性（含简单证明题）.

3．求向量组的秩和极大无关组.

4．求解齐次线性方程组、非齐次线性方程组．

5．讨论含参数的线性方程组解的情况．

3.6.3　疑难解析

1．如何判断向量组的线性相关性？

答　如果 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中的向量均为数字向量，则可根据向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩来判断它的线性相关性——当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩小于 m 时，它是线性相关的，当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩等于 m 时，它是线性无关的．特别地，两个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例；当 $m>n$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关；当 $m=n$ 时，若记 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}|=0$．

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 不是数字向量，则可根据向量组线性相关的定义和性质来判断它的线性相关性．比如，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；如果与向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\boldsymbol{0}$ 等价的齐次线性方程组有非零解，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，如果与向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\boldsymbol{0}$ 等价的齐次线性方程组只有零解，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

2．如何判别一个向量是否可由已知向量组线性表示？

答　向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m]$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{B}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\beta]$ 的秩相等．当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=m$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，从而 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，且表示方法惟一．

3．如何求向量组的秩和极大无关组？

答　以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的各个向量为列作矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的个数 r 即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩．由于矩阵的初等行变换不改变矩阵列向量间的线性关系，取 $\boldsymbol{B}$ 中 r 个线性无关的列向量（一般取非零行的首非零元素所在的列），则 $\boldsymbol{A}$ 中与之对应的 r 个列向量即为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大线性无关组．

3.7　本章复习题

1．填空题

（1）设$\alpha=$（1,2,3），$\beta=$（2,1,4），则$\beta-2\alpha=$（_________）.

（2）已知$\alpha_1=(1,2,1)$，$\alpha_2=(-1,0,2)$，且$2\alpha_1-\alpha=\alpha_2$，则$\alpha=$________.

（3）若存在一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则称$\beta$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的________；向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性________关.

（4）向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\4\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$线性________关.

（5）若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中至少有一个向量能由其他向量线性表示，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性________关.

（6）m个n维向量组成的向量组，当m________n时，该向量组一定线性相关.

（7）向量组$\boldsymbol{T}$是向量组$\boldsymbol{A}$的一个部分组，若$\boldsymbol{A}$中任何一个向量均能由$\boldsymbol{T}$线性表示，则向量组$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{A}$向量组________.

（8）已知向量组$\alpha_1=(1,0,-1,0)$，$\alpha_2=(2,-2,t,-1)$，$\alpha_3=(0,-2,3,-1)$的秩为2，则t的值为________.

（9）n元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})$________.

（10）设$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$为$m\times n$型齐次线性方程组，如果$R(\boldsymbol{A})=r<n$，则其基础解系含有________个解向量.

（11）若向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$与$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r$均为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=0$的一个基础解系，则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$与$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_r$________.

（12）n元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})$________$n$时，方程组有惟一解.

2．判断题

（1）所有的零向量都相等.

（2）如果存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$成立，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

（3）如果n维列向量组$\boldsymbol{A}$：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\boldsymbol{A}$的秩为$s$.

（4）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$也线性相关.

（5）若一个向量组的秩是3，则该向量组中任意3个向量都线性无关.

（6）若向量组$\boldsymbol{A}$能由向量组$\boldsymbol{B}$线性表示，则$\boldsymbol{A}$所含向量个数必不超过$\boldsymbol{B}$所含向量个数.

（7）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为$n$维向量组，如果$R([\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m])=m$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

（8）如果向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$均为齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解向量，且线性无关，则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$就是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

（9）非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解的充分必要条件是其系数矩阵的秩等于其增广矩阵的秩.

3．选择题

（1）如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$线性相关，那么向量组中［　　　　］可由其余的向量线性表示.

（A）任何一个向量；　（B）最多有一个向量；　（C）至少有一个向量；　（D）没有一个向量.

（2）设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$中［　　　　］.

（A）必有一列元素全为零；

（B）必有两列元素对应成比例；

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合；

（D）任一列向量是其余列向量的线性组合.

（3）如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能够由向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，那么向量组 $\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 的秩 [　　　　].

（A）小于 $\boldsymbol{A}$ 的秩；　（B）等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩；　（C）大于 $\boldsymbol{A}$ 的秩；　（D）与 $\boldsymbol{A}$ 的秩无关.

（4）若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中方程的个数少于未知数的个数，则 [　　　　].

（A） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解；　（B） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

（C） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解；　（D） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

（5）对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，下列说法正确的是（　　　　）.

（A）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解；

（B）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

（C）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

（D）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有惟一解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

4．若 $\boldsymbol{\alpha}=(4,5,-5,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(4,1,-1,1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(5,2,1,8)$，且 $3(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\alpha})+5(\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\gamma})$，求 $\boldsymbol{\tau}$.

5．设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-3,8,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,1,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,6,-2,7)$，若向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{x}$，试求向量 $\boldsymbol{x}$，并判断 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{x}$ 的线性相关性.

6．判断下列向量组的线性相关性：

（1） $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,1)$；

（2） $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,3,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

7．求下列向量组的秩和一个极大无关组：

（1） $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,4,5)^{\mathrm{T}}$；

（2） $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,0,8)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,3,1,-2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-10,0,-16)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(5,8,1,6)$.

8．向量 $\boldsymbol{\beta}=(4,-3,1,1)$ 能否用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4,-2)$ 线性表示？若能，请写出表示式，并说明表示式是否惟一；若不能，请说明理由.

9．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$，试证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也线性无关.

10．求下列方程组的通解：

（1）$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$ （4）$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$

11．λ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + \lambda x_3 = -1. \end{cases}$$

有解？有多少解？并求出全部解．

12．当 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = \lambda, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解？求出它的通解．

13． p，q 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + px_3 = -7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = q, \end{cases}$$

（1）无解；（2）有惟一解；（3）有无穷多个解，并求其通解．

第 4 章　矩阵的特征值与特征向量

矩阵的特征值与特征向量是矩阵理论的重要组成部分，它不仅是矩阵相似变换的研究工具，而且在数学的某些分支（如微分方程、差分方程、矩阵分析等）以及工程技术、经济管理等许多领域中，也有着广泛的应用.

本章简要介绍矩阵的特征值、特征向量以及相似矩阵、对角矩阵、正交矩阵等概念及相关理论.

本章所讨论的矩阵均为实方阵.

4.1　矩阵的特征值与特征向量

4.1.1　特征值与特征向量的概念

定义 4.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果对于实数 λ，存在 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.1}$$

则实数 λ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的**特征向量**.

例如，对于三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-2&-1\\-1&5&3\end{bmatrix}$ 和向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-2&-1\\-1&5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{\alpha},$$

所以 2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，记作 $\lambda=2$，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量.

定义 4.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，称矩阵

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**；特征矩阵的行列式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$是一个关于$\lambda$的 n 次多项式，记作 $f(\lambda)$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**；方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**.

例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$的特征矩阵为

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ -3 & -6 & \lambda-1 \end{bmatrix};$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ -3 & -6 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda+2)(\lambda-1)^2;$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程是

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,$$

即

$$\lambda^3-3\lambda+2=0.$$

4.1.2 矩阵特征值与特征向量的求法

由于式(4.1)可改写成为$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值λ的特征向量$\boldsymbol{\alpha}$就是齐次线性方程组

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

的非零解．而齐次线性方程组(4.2)有非零解的充分必要条件是

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0, \tag{4.3}$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是其特征方程(4.3)的解，而特征值所对应的特征向量就是齐次线性方程组(4.2)的非零解向量．于是，我们可以按以下步骤求矩阵的特征值及其对应的特征向量：

（1）写出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$（或多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$）；

（2）解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求出其全部解 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$（即求出特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的全部根 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$），它们就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

（3）把每一个特征值 λ_i 依次代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 中，求出相应的齐次线性方程组的一个基础解系，设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$，则

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$$

就是对应于特征值 λ_i 的全部特征向量，其中 $k_1,k_2,\dots,k_r$ 为任意一组不全为零的实数．

例 1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-2&-1\\-1&5&3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量．

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-1&\lambda+2&1\\1&-5&\lambda-3\end{vmatrix}=(1-\lambda)\ (\lambda-2)(\lambda+1),$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=-1$．

把 $\lambda_1=1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\begin{cases}-2x_2-x_3=0,\\-x_1+3x_2+x_3=0,\\x_1-5x_2-2x_3=0,\end{cases}$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_2,\\x_2=x_2,\\x_3=-2x_2,\end{cases}$$

向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ 是它的一个基础解系，故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $k_1\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$（$k_1$ 为非

零实数)；把 $\lambda_2=2$ 代入齐次线性方程组$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0, \\ -x_1+4x_2+x_3=0, \\ x_1-5x_2-x_3=0, \end{cases}$$

其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_3, \\ x_2=0, \\ x_3=x_3, \end{cases}$$

向量$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$是它的一个基础解系，故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2=2$ 的特征向量为 $k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$（$k_2$ 为非零实数）.

把 $\lambda_3=-1$ 代入齐次线性方程组$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-x_3=0, \\ -x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-5x_2-4x_3=0, \end{cases}$$

其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{4}x_3, \\ x_2=-\dfrac{3}{4}x_3, \\ x_3=x_3, \end{cases}$$

向量$\begin{bmatrix}1\\-3\\4\end{bmatrix}$是它的一个基础解系，故 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $k_3\begin{bmatrix}1\\-3\\4\end{bmatrix}$（$k_3$ 为非零实数）.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

解　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & 0\\ 0 & \lambda-b & 0\\ 0 & 0 & \lambda-c\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c),$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a$，$\lambda_2=b$，$\lambda_3=c$.

把 $\lambda_1=a$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得其基础解系为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，所以 $k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$（$k_1$ 为非零实数）是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=a$ 的全部特征向量.

类似地，得到 $k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$（$k_2$ 为非零实数）是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_2=b$ 的全部特征向量；$k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$（$k_3$ 为非零实数）是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3=c$ 的全部特征向量.

由例 2 可见：对角矩阵的特征值就是它的对角线上的元素．这一结论以后我们可以直接应用.

4.1.3　特征值与特征向量的性质

定理 4.1　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

证明　因为

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{T}=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\right|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征多项式相同，因此，它们的特征值也相同.

定理 4.2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值所对应的特征向量线性无关.

证明　仅证明两个不同特征值所对应的特征向量的情形，多个不同特征值的情形可以用数学归纳法加以证明.

用反证法：设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值 λ_1 与 λ_2 所对应的特征向量.若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，则必有一个向量能够由另一个向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_2=k\boldsymbol{\alpha}_1\ (k\neq 0)$，于是有

$$A\boldsymbol{\alpha}_2 = A(k\boldsymbol{\alpha}_1) = k(A\boldsymbol{\alpha}_1) = k(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1) = \lambda_1(k\boldsymbol{\alpha}_1) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1 的特征向量，与已知条件矛盾，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

习题 4.1

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$；　（4）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

2．已知 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix}$ 的一个特征值，（1）求 a 的值；（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的其他特征值及各特征值所对应的特征向量.

3．设 λ 是 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，试证明 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

4.2　相似矩阵与矩阵的相似对角化

4.2.1　相似矩阵的概念

定义 4.3　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B},$$

则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似**或 **$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$**，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

矩阵相似具有以下性质：

（1）反身性：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

这是因为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{AE}$.

（2）对称性：如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$ ；

这是因为：如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$. 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}$，则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}$，所以 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

（3）传递性：如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，那么 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

这是因为：如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}$，于是

$$C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ),$$

因此 $A \sim C$.

除以上三点外，相似矩阵还有以下重要性质：

定理 4.3　相似矩阵的行列式相同.

证明　设 $A \sim B$，即存在可逆矩阵 P，使 $B = P^{-1}AP$，则

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}||P||A| = |P^{-1}P||A| = |E||A| = |A|.$$

定理 4.4　相似矩阵具有相同的可逆性；若可逆，它们的逆矩阵也相似.

证明　设 $A \sim B$，由定理 4.3 知，$|A| = |B|$，故它们同时为零或同时不为零，因此矩阵 A 与矩阵 B 具有相同的可逆性.

如果 A、B 均为可逆矩阵，由于 $A \sim B$，即存在可逆矩阵 P，使 $B = P^{-1}AP$，故

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P.$$

于是由定义 4.3 知 $B^{-1} \sim A^{-1}$，再由矩阵相似的对称性知 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

定理 4.5　相似矩阵具有相同的特征值.

* **证明**　设 $A \sim B$，即存在可逆矩阵 P，使 $B = P^{-1}AP$，于是

$$\begin{aligned}|\lambda E - B| &= |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}||\lambda E - A||P| \\ &= |\lambda E - A|.\end{aligned}$$

上式表明，A 与 B 有相同的特征多项式，因此有相同的特征值.

4.2.2　矩阵可相似对角化的条件

定义 4.4　对于 n 阶方阵 A，如果存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵，则称矩阵 A **可相似对角化**，简称矩阵 A **可对角化**.

定理 4.6　n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

证明　必要性：若 A 可对角化，则存在可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

从而

$$AP = P\Lambda.$$

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 P 的 n 个列向量，即 $P = [\, p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n \,]$，则

$$AP = A[\, p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n \,] = [\, Ap_1 \quad Ap_2 \quad \cdots \quad Ap_n \,]$$

$$=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$=[\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\boldsymbol{p}_n],$$

于是，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，从而知$\lambda_i$是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{p}_i$是$\boldsymbol{A}$对应于特征值$\lambda_i$的特征向量．因为$\boldsymbol{P}$为可逆矩阵，故$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$线性无关，因此$\boldsymbol{A}$有$n$个线性无关的特征向量．

充分性：若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$，其对应特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，令$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n]$，则$\boldsymbol{P}$可逆，且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n]=[\lambda_1\boldsymbol{p}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\boldsymbol{p}_n]$$

$$=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{p}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda},$$

从而，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，即$\boldsymbol{A}$可对角化．

定理 4.7 如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征根，则$\boldsymbol{A}$可对角化．

证明 如果n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征根，则由定理 4.2 知，$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量，再由定理 4.6 知，$\boldsymbol{A}$可对角化．

4.2.3 矩阵相似对角化及其应用

例 1 判断矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$能否对角化，若可对角化，求与其相似的对角矩阵．

解 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7),$$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$．

把 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0, \\ -2x_1-4x_2+4x_3=0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

把 $\lambda_3=-7$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得

$$\begin{cases} -8x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-5x_2-4x_3=0, \\ -2x_1-4x_2-5x_3=0, \end{cases}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$.

由定理 4.2 知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列作矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&2\\1&1&-2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{bmatrix}$ 就是与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角矩阵（见定理 4.6 充分性的证明）.

注意：判断一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，只要求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，然后将不同的特征值 λ_i 依次代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，并求出它的一个基础解系．如果这些基础解系所含向量个数之和小于 n，则 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化；如果这些基础解系所含向量个数之和恰好为 n，则 $\boldsymbol{A}$ 能够对角化，并且以这些向量为列组成的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就可以将 $\boldsymbol{A}$ 对角化，即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

例 2　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$，若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$，试求 $\boldsymbol{B}^{101}$.

解 由$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$可求$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{101}=(\boldsymbol{PAP}^{-1})^{101}=\underbrace{(\boldsymbol{PAP}^{-1})(\boldsymbol{PAP}^{-1})\cdots(\boldsymbol{PAP}^{-1})}_{101\text{个}}=\boldsymbol{PA}^{101}\boldsymbol{P}^{-1},$$

而

$$\boldsymbol{A}^{101}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A},$$

故

$$\boldsymbol{B}^{101}=\boldsymbol{PA}^{101}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PAP}^{-1}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}.$$

* **例 3**（矩阵相似于对角矩阵的应用之一：人口流动问题）设某国人口流动状态的统计规律是每年有十分之一的城市人口流向农村，十分之二的农村人口流向城市．假设人口总数不变，那么经过许多年后，全国人口将会集中在城市吗？

解 设最初城市、农村人口分别为y_0,z_0，则第一年末城乡人口为

$$\begin{cases}y_1=0.9y_0+0.2z_0,\\z_1=0.1y_0+0.8z_0,\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}y_1\\z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_0\\z_0\end{bmatrix};$$

第k年末城乡人口为

$$\begin{bmatrix}y_k\\z_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{k-1}\\z_{k-1}\end{bmatrix}.$$

由此推得

$$\begin{bmatrix}y_k\\z_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}y_0\\z_0\end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$，为计算 $\boldsymbol{A}^k$，将 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化：

由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0.7$，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$. 取 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{A}^k=\left[\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right]^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0.7^k & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0.7^k\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0.7^k & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0.7^k\end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{bmatrix}y_k\\ z_k\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^k\begin{bmatrix}y_0\\ z_0\end{bmatrix}=(y_0+z_0)\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}+(y_0-2z_0)0.7^k\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

当 $k\to\infty$ 时，$0.7^k\to 0$，故

$$\begin{bmatrix}y_\infty\\ z_\infty\end{bmatrix}=(y_0+z_0)\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}(y_0+z_0)\\ \frac{1}{3}(y_0+z_0)\end{bmatrix},$$

即当 $k\to\infty$ 时，城市与农村人口比例为 2:1，趋于稳定的分布状态.

习题 4.2

1．判断下列矩阵能否对角化；如果能对角化，试求出与其相似的对角阵和将其化成对角阵的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

（1）$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ -5 & 7 & -1\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 5 & 3\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

2．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，试证明 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

3．如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，试证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$．

4.3 正 交 矩 阵

4.3.1 向量的内积

定义 4.5 设有两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$，记

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n，$$

则$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$称为**向量**$\alpha$**与**$\beta$**的内积**.

如果用矩阵记号表示，向量的内积还可以写成

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

向量的内积满足下面的运算规律（设$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是 n 维向量，k 是常数）：

（1）交换性：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

（2）线性性：$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

（3）非负性：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

定义 4.6 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$是 n 维向量，称

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}$的长度.

例如，向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$的长度为$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$.

显然，零向量的长度为零，$\mathbf{R}^n$中的基本向量$\boldsymbol{e}_i$的长度为 1．长度为 1 的向量称为**单位向量**.

对任意向量$\boldsymbol{\alpha}$和任意实数k，由定义 4.6 可得$\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$．于是，对于任意的非零向量$\boldsymbol{\alpha}$，若记$\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$，则$\|\boldsymbol{\alpha}^0\|=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$，即$\boldsymbol{\alpha}^0$必是一个单位向量.

由α求α^0的过程，称为对向量α的单位化.

4.3.2　向量正交与正交向量组

定义 4.7　如果向量α与β的内积为零，即$(\alpha,\beta)=0$，则称**向量α与β正交**.

由于零向量与任何向量的内积都为零，故由定义 4.7 可知，零向量与任何向量都正交.

定义 4.8　如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中的向量两两正交，则称其为**正交向量组**.

对于 n 维基本向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，由于$i\neq j$时，$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=0$，故 n 维基本向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是一个正交向量组.

定理 4.8　不含零向量的正交向量组一定线性无关.

证明　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是一个不含零向量的正交向量组，假设数组$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0},\tag{4.4}$$

往证$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

为此，用α_1与式(4.4)左右两端分别作内积，有

$$\begin{aligned}(\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)&=k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_1,\alpha_2)+\ldots+k_s(\alpha_1,\alpha_s)\\&=(\alpha_1,0)=0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

因为α_1与$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$都正交，所以$(\alpha_1,\alpha_i)=0\quad(i=2,3,\cdots,s)$.

将$(\alpha_1,\alpha_i)=0\quad(i=2,3,\cdots,s)$代入式(4.5)可得$k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$. 因为$\alpha_1\neq0$，所以$(\alpha_1,\alpha_1)=\|\alpha_1\|^2\neq0$，故$k_1=0$.

同理可得$k_2=\cdots=k_s=0$，因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

定理 4.8 的逆命题不成立，即线性无关的向量组不一定是正交向量组.

4.3.3　线性无关向量组的标准正交化

定义 4.9　如果一个正交向量组中的每个向量都是单位向量，则称其为**标准正交向量组**.

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则一定可以找到一个与其等价的标准正交向量组. 对这一结论我们不作证明，而直接介绍一个求与已知的线性无关向量组等价的标准正交组的方法——**施密特**（Schmidt）**正交化方法**：

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，取

$\beta_1=\alpha_1$，

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$
$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1},$$

即

$$\beta_i=\alpha_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{(\alpha_i,\beta_k)}{(\beta_k,\beta_k)}\beta_k\quad(i=1,2,\cdots,s)\cdot$$

则向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$为与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的正交向量组.

再将$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$单位化，取

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\quad \ldots,\quad \gamma_s=\frac{\beta_s}{\|\beta_s\|},$$

则$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s$就是与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的标准正交向量组.

求与线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的标准正交向量组$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_s$的过程，称为对$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$进行**标准正交化**或**正交规范化**.

例 1 将向量组$\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$标准正交化.

解 先正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{bmatrix};$$

再将 β_1,β_2,β_3 单位化，取

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\0\end{bmatrix},\quad \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 便是与 α_1，α_2，α_3 等价的标准正交向量组.

4.3.4　正交矩阵及其性质

定义 4.10　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

等都是正交矩阵.

下面研究正交矩阵的结构特征.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$是一个正交矩阵，根据正交矩阵的定义有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\boldsymbol{E},$$

故

$$\begin{cases} a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=1 & (i=1,2,\cdots,n), \\ a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=0 & (\text{当} i\neq j \text{时}), \end{cases}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\ldots,n).$$

上式表明：

（1）正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意一行（列）各元素的平方和为 1；

（2）正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意不同两行（列）对应元素的乘积之和为零.

于是可以得出下面的结论：

方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组是标准正交向量组.

这一结论常用来判断一个矩阵是否为正交矩阵.

根据正交矩阵的定义及结构特征容易证明正交矩阵具有以下性质：

(1) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则$|\boldsymbol{A}|=1$ 或者$|\boldsymbol{A}|=-1$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

根据性质 1，要证明 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，只需验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 二者之一成立即可. 这是判断一个矩阵是否为正交矩阵另一常用方法.

例 2　判断下列矩阵是否为正交矩阵：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$.

解（1）因为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量不是单位向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不是正交矩阵.

（2）因为

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵.

本例也可以用检验 $\boldsymbol{B}$ 的列（行）向量组为标准正交组的方法来证明——可以验证，$\boldsymbol{B}$ 的 3 个列（行）向量都是单位向量，且两两正交.

习题 4.3

1．计算向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积：

（1）$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(-1,3,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$；　　（2）$\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,0,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,1,-3)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,-1,3)$；　　（4）$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$.

2．把下列向量单位化：

（1）$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$；　　（2）$\boldsymbol{\beta}=(2,0,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

3．用施密特正交化方法将向量组标准正交化.

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4．证明下列矩阵为正交矩阵：

（1）$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$；　　（2）$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

5．如果α与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$都正交，试证明$\alpha$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的任一线性组合也正交.

4.4　化实对称矩阵为相似对角矩阵

所有元素均为实数的对称矩阵，称为**实对称矩阵**．实对称矩阵有以下性质：

定理 4.9　实对称矩阵的特征值都是实数（证明略）.

定理 4.10　实对称矩阵 A 的不同特征值所对应的特征向量正交.

* **证明**　设α_1，α_2分别是属于A的不同特征值λ_1，λ_2的特征向量，即

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1，A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\ （\lambda_1\neq\lambda_2），$$

一方面：

$$(A\alpha_1,\alpha_2)=(\lambda_1\alpha_1,\alpha_2)=\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2),$$

另一方面：

$$\begin{aligned}(A\alpha_1,\alpha_2)&=(A\alpha_1)^{\mathrm{T}}\alpha_2=\alpha_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\alpha_2=\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_2\\&=(\alpha_1,A\alpha_2)=(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2),\end{aligned}$$

所以

$$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2),$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\alpha_1,\alpha_2)=0.$$

由于$\lambda_1\neq\lambda_2$，即$\lambda_1-\lambda_2\neq 0$，故$(\alpha_1,\alpha_2)=0$，所以$\alpha_1$与$\alpha_2$正交.

定理 4.11　设A为实对称矩阵，λ是A的特征方程$|\lambda E-A|=0$的r重根，则方阵$A-\lambda E$的秩$R(A-\lambda E)=n-r$，从而有r个线性无关的特征向量对应于特征值λ.

证明略.

定理 4.12　若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 的互不相等的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数依次为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$，则 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$.

由定理 4.11 知，对应于每个特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，存在 r_i 个线性无关的特征向量．把它们正交规范化，即得 r_i 个单位正交的特征向量．由 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$ 知，可以找到 n 个这样的特征向量.

由定理 4.10 知，对应于不同特征值的特征向量正交，故这 n 个单位特征向量两两正交．设以这 n 个列向量为列构成的矩阵为 $\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，且有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}，$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵，其对角线上含 r_i 个 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，恰是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

定理 4.12 的证明过程，就是求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵）的过程.

例 1　设有实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix},$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，故由定理 4.12 知，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵．而 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -2 & -2\\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2\\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & \lambda-1 & -2\\ 1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)^2\ (\lambda-5).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=5$.

把 $\lambda_1=-1$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

把它正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix};$$

再单位化，得

$$\gamma_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}.$$

把 $\lambda_2=5$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

将其单位化，得

$$\gamma_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}.$$

以正交单位向量$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为列作矩阵 $\boldsymbol{Q}$，即令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，且有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

习题 4.4

1．求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$；　（4）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

2．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（重特征值按重数分别记），试证明

$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 $\lambda_1 = -3$，且 $|\boldsymbol{A}| = 6$，求 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值.

4.5　本章学习指导

4.5.1　教学基本要求

1．了解矩阵的特征值与特征向量的概念并掌握其求法.

2．知道相似矩阵的概念和性质，知道矩阵相似于对角矩阵的充要条件．会求实对称矩阵的相似对角矩阵.

3．知道向量内积的概念，会把线性无关向量组标准正交化.

4．知道正交矩阵的概念和性质.

4.5.2　考点提示

1．求矩阵的特征值和特征向量.

2．判断方阵可否对角化，将可对角化的方阵对角化.

3．求向量的内积，判断向量是否正交.

4．将线性无关向量组标准正交化.

5．求正交变换，使对称矩阵相似对角化.

4.5.3　疑难解析

1．矩阵的相似矩阵是惟一的吗？

答　“相似”是矩阵之间的一种等价关系，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵和单位矩阵，则与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵不惟一——任给一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

2．如何将实对称矩阵对角化？

答　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的步骤为：

（1）解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$，求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（重根分别记），其中 λ_i 必是实数.

（2）求 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 的基础解系，即对应于 λ_i 的线性无关的特征向量.

（3）分别将属于各特征值的线性无关的特征向量正交化、单位化，得到 n 个正交的单

位特征向量$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$.

（4）以$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$为列作一个矩阵 $\boldsymbol{Q}$，则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，并且

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中λ_i是γ_i所对应的特征值.

4.6　本章复习题

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$；（3）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$；（4）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$.

2．用施密特正交化方法将下列向量组标准正交化：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-5,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,8,-7)^{\mathrm{T}}$.

3．将下列矩阵对角化：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}$；（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{bmatrix}$.

4．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & y & \\ & & -1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，试确定参数 x，y.

5．证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$不与对角矩阵相似.

6．证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵.

7．若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶正交矩阵，试证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

8．设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，试证明 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 为 1 或－1.

9．若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵．试证明幂等矩阵的特征值只能是 1 或者 0.

10．如果有正整数 k，使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为幂零矩阵．试证明幂零矩阵的特征值等于零.

11．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

第 5 章　二 次 型

二次型的理论起源于解析几何中对二次曲线和二次曲面的研究. 二次型理论在工程技术的许多领域中都有应用.

本章主要介绍二次型、二次型的标准形、正定二次型等概念，以及化二次型为标准形的方法.

5.1　二次型的概念及其矩阵表示

定义 5.1　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ & +2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & +2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

称为 n **元二次型**，简称**二次型**.

为研究问题方便，取 $a_{ij}=a_{ji}\ (i<j)$，因为 $x_ix_j=x_jx_i$，所以式(5.1)可以写成

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ = {} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{5.2}$$

当 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是实数时，称二次型为**实二次型**. 本书只讨论实二次型.

如果记

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则式(5.2)可以写成矩阵形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \tag{5.3}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为**二次型** $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ **的矩阵**，$\boldsymbol{A}$ 的秩称为**二次型** $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ **的秩**.

因为二次型 f 的系数满足 $a_{ij}=a_{ji}$，所以其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

由上面的讨论可知，任给一个二次型，可以写出它的矩阵（对称矩阵）；反之，任给一个对称矩阵，可以写出它对应的二次型.

例 1 写出二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+6x_1x_2-2x_2^2+4x_2x_3+x_1x_3-x_3^2$$

的矩阵及矩阵表示式.

解 因为 $a_{11}=4$，$a_{22}=-2$，$a_{33}=-1$，$a_{12}=a_{21}=3$，$a_{13}=a_{31}=\dfrac{1}{2}$，$a_{23}=a_{32}=2$，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & \dfrac{1}{2} \\ 3 & -2 & 2 \\ \dfrac{1}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

其矩阵表示式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix} 4 & 3 & \dfrac{1}{2} \\ 3 & -2 & 2 \\ \dfrac{1}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

例 2　已知对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

试写出其对应的二次型.

解　$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+6x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$.

例 3　求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_1x_2+10x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$$

的秩.

解　二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

易求 $R(A)=3$，所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 3.

习题 5.1

1．写出下列二次型的矩阵表达式：

（1）$f=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+4x_2x_3-3x_3^2$；

（2）$f=x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2-8x_1x_3+4x_2x_3$；

（3）$f=x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3+2x_3x_4$.

2．写出下列矩阵所对应的二次型：

（1）$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$；　（2）$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$；

（3）$C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$；　（4）$D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

5.2　二次型的标准形与规范形

5.2.1　二次型的标准形

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组变量，称

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n1}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases} \tag{5.4}$$

为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个**线性替换**.

如果系数矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

是可逆矩阵，就称式(5.4)是**可逆线性替换**或**非退化的线性替换**；如果系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵，就称式(5.4)为**正交替换**.

用变量的线性替换化二次型为标准形，是关于二次型问题的主要研究内容.

线性替换可用矩阵乘法来表示．例如式(5.4)可以写成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

如果记

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则式(5.5)可以写成

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}\ . \tag{5.6}$$

将式(5.6)代入式(5.3)，则二次型变形为

$$f = X^{\mathrm{T}}AX = (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y .$$

即同一个二次型，若用变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 替换变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则它的矩阵变为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$．特别地，如果 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 为对角矩阵，则 f 化为 $d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ 的形式，即 f 用 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 表示时，只有平方项而没有交叉乘积项．于是我们关心如何寻找适当的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 为对角矩阵．

定义 5.2　如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以通过可逆线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$（$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶可逆矩阵）化为 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则称二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与二次型 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是**等价二次型**．特别地，如果 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是一个只含平方项的二次型，即

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2 ,$$

则称 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一个**标准形**．

5.2.2　化二次型为标准形

1．用配方法化二次型为标准形

我们举例说明如何用配方法化二次型为标准型．

例 1　将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$

化为标准形，并写出相应的线性替换．

解　
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3) - (x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3) + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 . \end{aligned}$$

上式右端括号外已不含 x_1，继续配方可得

$$f = (x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 .$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

是可逆线性替换，且把 f 化成标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$.

所作可逆线性替换为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$ ，其中可逆线性替换的矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

一般情况下，若给出的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$ 中有某个 x_i^2 的系数 $a_{ii} \neq 0$,则可把所有含 x_i 的项括到一起进行一次配方(此时余下的各项中都不再含变量 x_i)，再对剩下的 $n-1$ 个变量的二次型重复上述步骤.

例 2 用配方法化二次型

$$f = 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$$

为标准形，并求所用的线性替换.

解 由于 f 中不含平方项，为了配方，我们构造平方项．因为 f 含有 x_1x_2 项，令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

代入原式可得

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 8y_2y_3 .$$

仿照例 1 的方法配方可得

$$\begin{aligned} f &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2 . \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

则可逆线性替换为

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - \ \ z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_3, \\ y_3 = \ z_3. \end{cases}$$

把二次型化为标准形

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 \ .$$

因为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\ \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故将二次型 f 化为标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$ 所用的线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + \ \ z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - 3z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

通过例 2 可知：要用配方法将没有平方项，只有交叉乘积项的二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化为标准形，可任选一个系数不为零的交叉乘积项 $x_i x_j$，作变换

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = y_i + y_j, \\ x_t = y_t, (t = 1, 2, \cdots, n, t \neq i, j) \end{cases}$$

从而使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 出现平方项，然后再按照例 1 的步骤，即可将其化成标准形.

2. 用正交变换法化二次型为标准形

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为实二次型，则其对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵．由 4.4 节可知，对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

因为$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，所以$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，于是由上式得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

作正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，有

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{Y}\\ &=\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\\ &=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2, \end{aligned}$$

其为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个标准形.

由上面讨论可知，一个实二次型总可以通过正交替换化为标准形.

用正交替换化二次型为标准形的实质，是将二次型的矩阵对角化，其步骤如下：

（1）求出二次型矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值及其对应的特征向量；

（2）用 Schmidt 正交化方法将$\boldsymbol{A}$的不同特征值各自对应的线性无关的特征向量先正交化，再单位化，设为$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$；

（3）以$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$为列构造正交矩阵$\boldsymbol{Q}=[\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \cdots\ \ \gamma_n]$，令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，则$f$化为标准形$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

例 3　试求一个正交替换，将二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

化为标准形.

解　二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

其特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$， $\lambda_3=2$.

对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一个基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

用 Schmidt 正交化方法将其标准正交化，得

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=2$，解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一个基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\gamma_3=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

令

$$Q=[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，并且有

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

即正交替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$将二次型$f$化为标准形

$$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2 .$$

5.2.3　二次型的规范形

用不同的可逆线性替换把同一个二次型化为标准形时，其结果可能不同，即二次形的标准形不惟一．但同一二次形的不同标准形中所含正平方项的个数是相同的，负平方项的个数也是相同的．

定义 5.3　如果n元实二次型$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$可以通过可逆线性替换化为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 (p\leqslant r\leqslant n), \tag{5.7}$$

则式(5.7)称为二次型$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的**规范形**，其中$r$为二次型的秩．

在二次型的规范形中，系数为正的平方项的个数p称为二次型的**正惯性指数**；系数为负的平方项的个数$q(=r-p)$称为二次型的**负惯性指数**．

定理 5.1（**惯性定理**）任意一个二次型都可以通过可逆线性替换化为规范形，并且其规范形是惟一的．

证明略．

例 4　将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-4x_2^2+x_3^2$$

化为规范形，并求其正、负惯性指数．

解　所给二次型已为标准形，只需设

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{2}x_1, \\ y_2 = \quad x_3, \\ y_3 = \ 2x_2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} y_3, \\ x_3 = \quad y_2. \end{cases}$$

则变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

将二次型化为规范形

$$f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

其正惯性指数为 2，负惯性指数为 1.

事实上，二次型标准形中正平方项的个数即为其正惯性指数，负平方项的个数即为其负惯性指数.

习题 5.2

1．用配方法化下列二次型为标准形，并写出相应的替换矩阵：

（1）$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$；

（3）$f(x_1,x_2,x_3) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2．用正交替换法化下列二次型为标准形，并写出替换矩阵：

（1）$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_3^2$.

5.3　正定二次型与正定矩阵

定义 5.4　设有二次型 $f = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，如果对任意一组不全为零的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0,$$

则称 f 为**正定二次型**；反之，如果对任意一组不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)<0,$$

则称 f 为**负定二次型**.

正定二次型的矩阵称为**正定矩阵**，负定二次型的矩阵称为**负定矩阵**.

例如，二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2$ 就是正定二次型．这是因为

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_2^2=(x_1+x_2)^2+2x_2^2,$$

所以当 x_1,x_2 不全为零时，总有 $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2+2x_2^2>0$.

而二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2$ 就不是正定二次型．这是因为，当 $x_1=x_3=0$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2x_3^2=-x_2^2\leqslant 0$.

由正定二次型和负定二次型的定义可以得出，实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是负定二次型的充分必要条件是 $-f=-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是正定二次型.

下面我们给出正（负）定二次型的性质定理.

定理 5.2 关于实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，下列命题等价：

（1） $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定二次型；

（2） $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都为正数；

（3） $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数等于未知数的个数 n；

（4） $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$\det\boldsymbol{A}_1=a_{11},\quad \det\boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\cdots,\quad \det\boldsymbol{A}_n=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

都大于零.

证明略.

定理 5.3 实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是负定二次型的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶顺序主子式都小于零，而偶数阶顺序主子式都大于零.

证明略.

例 1 判定二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

是否为正定二次型.

解　我们分别用定理 5.2 给出的三个等价命题来判定.

解法一　求二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&1\end{bmatrix}$ 的各阶顺序主子式：

$$\det\boldsymbol{A}_1=1,\ \det\boldsymbol{A}_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1,\ \det\boldsymbol{A}_3=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&1\end{vmatrix}=-3,$$

由于 $\det\boldsymbol{A}_3=|\boldsymbol{A}|<0$，故由定理 5.2 知 f 不是正定二次型.

解法二　用配方法将二次型化为标准形：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2)^2+x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2-3x_3^2\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=\quad\ \ x_2+2x_3,\\y_3=\qquad\quad\ \ x_3.\end{cases}$$

则

$$f=y_1^2+y_2^2-3y_3^2.$$

由于 f 的正惯性指数是 2，不等于未知数的个数 3，故由定理 5.2 知 f 不是正定二次型.

解法三　求 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：

因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{3+\sqrt{21}}{2})(\lambda-\frac{3-\sqrt{21}}{2}),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$，$\lambda_3=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$.

因为 $\lambda_3<0$，故由定理 5.2 知 f 不是正定二次型.

例 2　t 取何值时，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2tx_2x_3$$

为正定二次型？

解 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&5&t\\0&t&1\end{bmatrix}.$$

若 f 为正定二次型，则 A 为正定矩阵，于是 A 的各阶顺序主子式都大于零，即

$$\det A_1=1>0,\ \det A_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1>0,\ \det A_3=|A|=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&5&t\\0&t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0,$$

由此解得 $-1<t<1$.

习题 5.3

1．判断下列矩阵的正（负）定性：

（1）$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&3\\0&3&5\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}2&0&2\\0&-1&1\\2&1&3\end{bmatrix}$.

2．判断下列二次型是否正定：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

3．t 取何值时，矩阵 $A=\begin{bmatrix}2-t&1&0\\1&1&0\\0&0&t\end{bmatrix}$ 是正定的？

4．t 取何值时，二次型 $f=5x_1^2+tx_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3$ 是正定的？

5.4 本章学习指导

5.4.1 教学基本要求

1．了解二次型的概念及其矩阵表示.

2．知道可逆线性替换、正交替换的概念，会用配方法、正交替换法化二次型为标准形.

3．知道惯性定律及二次型秩的概念.

4．会判别二次型及矩阵的正定性.

5.4.2　考点提示

1．写出二次型的矩阵；写出对称矩阵对应的二次型.

2．用配方法、正交变换法将二次型化为标准形.

3．判别对称矩阵及二次型的正定性.

5.4.3　疑难解析

1．为什么要用矩阵表示二次型？

答　如果将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 用矩阵形式表示为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是列向量，$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是惟一的．于是便可以通过 $\boldsymbol{A}$ 来研究 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．这样就将对未知的二次型的研究，转化为对已知的对称矩阵的研究.

2．化二次型为标准形时，有哪些注意事项？

答（1）用配方法化二次型为标准形时，为保持变换的可逆性，应将某个 x_i^2 及含有 x_i 的交叉乘积项一次配完，此时余下的各项中不再含变量 x_i，再对剩下的 $n-1$ 个变量的二次型重复上述步骤.

只有交叉乘积项，没有平方项时，应作类似于 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 的可逆线性变换，使二次型出现平方项，然后再用前面的方法进行配方.

（2）用正交替换化二次型为标准形，即求正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\varLambda}$，其中 $\boldsymbol{\varLambda}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值组成的对角矩阵．这实质是第 4 章化实对称矩阵为对角方阵问题.

无论是用配方法还是用正交替换化二次型为标准形，所得标准形未必是惟一的，但由惯性定理可知，对确定的二次型，其正、负惯性指数及秩都是惟一确定的.

3．正定二次型有 4 个等价命题，用哪个判断二次型的正定性更方便？

答　对于系数已知的二次型，一般用其矩阵的各阶顺序主子式的正负号来判断其正定

性比较方便；对于含参数系数且已知正定的二次型，一般也用其矩阵的各阶顺序主子式都大于零的条件来确定参数的取值范围；而对于抽象的二次型，顺序主子式的方法不再适用，应视不同情况，采用不同的方法.

5.5 本章复习题

1．写出下列二次型的矩阵：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-x_2^2+6x_2x_3+2x_3x_4+4x_4^2$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_1x_2-x_2^2+x_3^2+6x_3x_4-x_4^2$；

（3） $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_1x_n)+(2x_2x_3+\cdots+2x_2x_n)+\cdots+2x_{n-1}x_n$.

2．写出下列矩阵所对应的二次型：

（1）$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$；　（3）$\begin{bmatrix}2&0&0&1\\0&1&-2&0\\0&-2&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$.

3．设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3-4x_2x_3+x_3^2$，求经过线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$ 所确定的二次型，其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

4．用配方法化下列二次型为标准形，并写出所用的线性替换.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$；

（2） $f=x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+6x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2$；

（3） $f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.

5．用正交替换化下列二次型为标准形，并写出相应的正交替换：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3+2x_3^2$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$.

6．判断下列二次型是否正定：

（1） $f=4x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3-4x_2x_3$；

（2） $f=2x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$；

（3） $f=x_1^2+2x_2^2+7x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$；

（4） $f=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2-x_4^2-4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3+2x_2x_4$.

7．当 t 取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 是正定的?

*第 6 章　线性规划初步

在工农业生产、交通运输、内外贸易等各项活动中，都希望以尽量少的投入获取最大的效益．大体上讲，提高经济效益可以通过两种途径：一是改进技术，如改善工艺、使用新型材料等；二是改进生产组织，即合理安排人力物力资源．后者就是运筹学研究的主要内容，而线性规划则是运筹学的一个重要分支．

早在 20 世纪 30 年代末，人们就已经开始研究线性规划问题，到今天，它已经成为运筹学比较成熟的一个分支．线性规划研究的问题可以分为两大类：一是一项任务确定后，如何统筹安排，尽量做到用最少的人力物力资源去完成这一任务；二是已有一定数量的人力物力资源，如何安排使用它们，以使完成的任务最多．其实这两类问题是一个问题的两个方面．

线性规划是线性代数理论的直接应用．本章主要介绍典型的线性规划模型、两变量线性规划的图解法及线性规划问题的标准形式，以加深读者对线性代数的理解，并初步了解线性代数的应用．

6.1　线性规划问题的数学模型

数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式，是一类问题的一般解法．下面介绍几个典型而又常见的线性规划问题的数学模型．

6.1.1　物资调运问题

例 1　某建筑公司从 A_1, A_2 两个水泥厂分别采购水泥 1200 吨和 2000 吨，欲调往 B_1, B_2, B_3 三个工地．两个水泥厂到三个工地每吨水泥的运输价格如表 6-1 所示，若三个工地水泥需求量分别为 800 吨、1500 吨、900 吨，问如何组织调运才能使总运费最省？

表 6-1

运价(元/吨)　工地 水泥厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	45	30
A_2	25	35	40

解　设 x_{ij} 表示从水泥厂 A_i 调往工地 B_j 水泥的数量（$i=1,2$；$j=1,2,3$），例如 x_{12} 表示从水泥厂 A_1 调往工地 B_2 水泥的数量.

依题设可得表 6-2.

表 6-2

工地 水泥厂	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	1200
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	2000
收量	800	1500	900	3200

因为从水泥厂 A_1 调往三个工地水泥的总量为 1200 吨，所以 $x_{11}+x_{12}+x_{13}=1200$，同理可得 $x_{21}+x_{22}+x_{23}=2000$.

另一方面，两个水泥厂运往 B_1 的水泥的数量应该等于 B_1 的需求量，故有 $x_{11}+x_{21}=800$，同理可得 $x_{12}+x_{22}=1500$，$x_{13}+x_{23}=900$.

因此，最优调运方案就是求变量 $x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}$ 满足如下约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=1200, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=2000, \\ x_{11}+x_{21}=800, \\ x_{12}+x_{22}=1500, \\ x_{13}+x_{23}=900, \\ x_{ij}\geqslant 0 \ \ (i=1,2;\ j=1,2,3) \end{cases}$$

的一组值，使目标函数

$$s=50x_{11}+45x_{12}+30x_{13}+25x_{21}+35x_{22}+40x_{23}$$

的值最小（即总运费最少）.

一般地，设某种物资有 m 个产地：$A_1,A_2,\cdots,A_m$，联合供应 n 个销地：$B_1,B_2,\cdots,B_n$．各

产地产量、各销地销量、物资由各产地到各销地的单位运价如表 6-3 所示.

表 6-3

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表中 a_i 表示产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 物资的产量； b_j 表示销地 $B_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 物资的销量； c_{ij} 表示从 A_i 到 $B_j(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 物资的单位运价. 问应如何组织调运才能使总运费最少？

假设产销平衡，即 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$. 若把从 A_i 运往 $B_j(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 的物资数量记作 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ ，则运输问题的数学模型为：

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使目标函数

$$s=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{mn}x_{mn}$$

的值最小，且 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{mi}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m, \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n, \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

在产销平衡运输问题的数学模型中，目标函数和约束条件都是线性函数，而且除了变量的非负性要求表示为线性不等式外，其余约束条件均为线性方程.

产销平衡运输问题的数学模型可以简写为：

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使目标函数

$$s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\quad（总运费）$$

的值最小，记作

$$\min\ s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\ ,$$

且 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 满足约束条件

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\text{（从产地}A_i\text{到各销地的发量之和等于}A_i\text{的产量），}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\text{（各产地发到销地}B_j\text{的发量之和等于}B_j\text{的销量），}\\ x_{ij}\geqslant 0\text{（调运量不能为负数）.}\end{cases}$$

如果运输问题中没有产销平衡这一限制，当产量大于销量，即 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i>\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$ 时，这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使

$$\min s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\quad（总运费最少）$$

且 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 满足约束条件

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i\text{（从产地}A_i\text{到各销地的发量之和不超过}A_i\text{的产量），}\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\text{（各产地发到销地}B_j\text{的发量之和等于}B_j\text{的销量），}\\ x_{ij}\geqslant 0\text{（调运量不能为负数）.}\end{cases}$$

虽然约束条件中出现了不等式，但由于其仍为线性函数，故这一问题仍为线性规划问题．实际上，经过一定的“技术处理”，约束不等式组可以转化为约束方程组，这便是后面将要介绍的线性规划问题的标准形．

运输问题的数学模型是线性规划的一个典型应用．早在建国初期，东北的一个物资调运小组就创造了物资调运的“图上作业法”，并由中国科学院数学研究所的专家给予了证明，

在全国广泛推广，为我国的交通运输工作做出了很大贡献. 随着计算机科学的发展和普及，线性规划的应用领域也不断扩大，线性规划的专用程序已很完善，成千上万个约束条件的线性规划问题，只要输入相关数据，结果可以即时显示和打印出来.

下面我们再介绍几个常见的线性规划问题的数学模型.

6.1.2 生产组织与计划问题

例 2 某家具厂生产衣柜和餐桌两种产品. 假设生产一个衣柜需要甲、乙两种木材，分别为 $0.23\,\mathrm{m}^3$、$0.1\,\mathrm{m}^3$，生产一张餐桌需要甲、乙两种木材，分别为 $0.12\,\mathrm{m}^3$、$0.09\,\mathrm{m}^3$；生产一个衣柜的利润是 150 元，生产一张餐桌的利润是 120 元. 若家具厂现有甲、乙两种木材的数量分别为 $80\,\mathrm{m}^3$、$50\,\mathrm{m}^3$，问衣柜和餐桌各生产多少，工厂才能获得最大利润？

解 设生产 x_1 个衣柜和 x_2 张餐桌工厂可获得最大利润，则问题转化为：求变量 x_1、x_2 的一组值，使

$$\max s = 150x_1 + 120x_2,$$

且 x_1、x_2 满足约束条件

$$\begin{cases} 0.23x_1 + 0.12x_2 \leqslant 80, \\ \ \ 0.1x_1 + 0.09x_2 \leqslant 50, \\ x_1, x_2 \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

一般地，设用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 种原料，生产 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种产品，现有原料数、每单位产品所需原料数以及每单位产品可得利润如表 6-4 所示.

表 6-4

单位产品所需原料 产品 / 原料	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	现有原料
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
单位产品可得利润	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

问如何组织生产才能使利润最大？

设 x_j 为生产产品 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的计划数，则这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使

$$\max s=\sum_{j=1}^{n}b_jx_j \quad \text{（总利润最大）},$$

且

$$\text{约束条件}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=i}^{n}c_{ij}x_j\leqslant a_i(i=1,2,\cdots,m)\\ \qquad\text{（生产各种产品所需原料}A_i\text{的总数不能超过}A_i\text{现有数}a_i\text{）},\\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\\ \qquad\text{（各种产品计划生产数不能为负数，有时要求为非负整数）}.\end{cases}$$

生产组织与计划问题的数学模型还有其他形式，在此不作详细介绍了.

6.1.3　配料问题

例 3　某养鸡场养鸡 20000 只，用精饲料和粗饲料混合喂养．如果每天每只鸡平均需喂养混合饲料 500 克，而且其中至少要有 80 克蛋白质和 0.8 克钙，而精饲料中蛋白质含量不低于 40%，钙含量不低于 0.2%，价格是每千克 1.6 元，粗饲料中蛋白质含量不低于 15%，钙含量不低于 0.1%，价格是每千克 0.7 元，问两种饲料如何搭配，才能使饲养成本最低?

解　设养鸡场每天需要精饲料和粗饲料的数量分别为 x_1，x_2 千克，每天饲料总成本为 s 元，则问题归结为

$$\min s=1.6x_1+0.7x_2,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1+x_2=0.5\times 20000,\\ 0.4x_1+0.15x_2\geqslant 0.08\times 20000,\\ 0.002x_1+0.001x_2\geqslant 0.0008\times 20000,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

一般地，设用 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 种原料，生产含有 m 种成分 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的产品，单位产品中各种成分的最低含量、原料价格，以及各种原料含有所需成分的数量如表 6-5 所示。

表 6-5

单位原料所含成分数量 原料 / 原料所含成分	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	单位产品所含成分需要量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
原料单价	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

问各种原料如何配比才能使成本最低？

设需要原料 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ x_j 个单位，则这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使

$$\min s=\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \quad \text{（产品成本最低），}$$

且

$$\text{约束条件}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=i}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i\ (\mathrm{i}=1,2,\cdots,m) \\ \qquad\text{（所有各种原料所含成分}A_i\text{的总数不能少于产品对}A_i\text{需求量}a_i\text{），} \\ x_j \geqslant 0(j=1,2,\cdots,n) \\ \qquad\text{（所需原料数不能为负数，有时要求为非负整数）.}\end{cases}$$

6.1.4 合理下料问题

例 4 用长 7.2 m 的钢材制作 100 套钢筋架子．若每套架子需 3 根长 2.7 m 的钢筋、6 根长 0.7 m 的钢筋，问最少需要多少根长 7.2 m 的钢材才能完成这项任务？

解 因为所需要的钢筋总长度是固定的，所以要想使所用的材料最少，等价于浪费的原材料即截取下来的残料最少．而截取下来的残料的多少又取决于截取的方法．例如，用长 7.2 m 的钢材截取 2 根 2.7 m 的钢筋、2 根长 0.7 m 的钢筋，残料就是 0.4 m；截取 1 根 2.7 m 的钢筋、6 根长 0.7 m 的钢筋，残料就是 0.3 m；而不截取长度为 2.7 m 的钢筋，只截取 10 根长 0.7 m 的钢筋，残料是 0.2 m（此问题再没有其他有实际意义的截取方法）．各种截取方法对应的残料数见表 6-6．

表 6-6

截取方法 / 所截长度	1	2	3	所需根数
2.7 m	2	1	0	300
0.7 m	2	6	10	600
残料长度	0.4 m	0.3 m	0.2 m	

设用第 i 种方法截取钢材的根数为 $x_i\ (i=1,2,3)$，截取下来的残料的总长度为 s，则问题归结为：

$$\min s = 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 300, \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 \geqslant 600, \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{N}. \end{cases}$$

一般地，设用某种原材料（条材或板材）下零件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的毛坯．根据以往经验，一件原材料上有 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种不同的下料方式，每种下料方式可得各种毛坯个数及每种零件需要的数量如表 6-7 所示．问如何下料，才能在满足零件数量要求的前提下，所使用的原材料最少？

表 6-7

下料方式 / 各方式下的零件个数 / 零件名称	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	零件需求量
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m

解　设用 B_j 种方式下料的原材料数为 $x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，则使用的原材料总数为 $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$．于是这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_j (j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使

$$\min s = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{（所用原材料数最少）},$$

且

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=i}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \quad (\mathrm{i}=1,2,\cdots,m) \\ \qquad \text{（所得的}A_i\text{零件总数不能少于对}A_i\text{需求量}a_i\text{），} \\ x_j \in \mathrm{N}\ (j=1,2,\cdots,n) \\ \qquad \text{（各种方式下料的原料数数不能为负数、分数）．}\end{cases}$$

上面我们建立了几个经济领域中常见的实际问题的数学模型．这些实际问题虽然各不相同，但它们的数学模型却有相同的数学形式——表示问题最优化指标的目标函数是线性函数，表示约束条件的数学式子是线性方程或线性不等式．因为目标函数和约束条件都是线性的，所以我们将具有这种数学模型的问题称为**线性规划**问题．

习题 6.1

（下列问题只需建立数学模型，不要求求解）

1．有甲、乙两个采矿场，每日分别采矿 800 吨和 1000 吨，所采矿石要送到指定的 3 个选矿场进行加工．如果这 3 个选矿场日加工能力分别为 500 吨、600 吨和 700 吨，甲采矿场离这 3 个选矿场的距离分别为 3 km、5 km 和 8 km，乙采矿场离这 3 个选矿场的距离分别为 4 km、10 km 和 11 km，问两个采矿场将所采矿石如何分配到 3 个选矿场，才能使运输的吨公里（一吨矿石运一千米称为一个吨公里）数最小？

2．某饭店日夜连续服务，一天 24 小时各时段（以 4 小时计）所需服务员的人数如表 6-8 所示．

表 6-8

时 间 段	所需服务员的最少人数
06:00～10:00	8
10:00～14:00	10
14:00～18:00	7
18:00～22:00	12
22:00～02:00	4
02:00～06:00	4

假设每个服务员每天连续工作 8 小时，试确定满足上述条件的最少人数．建立这一问题的线性规划模型．

3．用长度为 500 cm 的条材，截取长度分别为 98 cm 和 78 cm 的两种毛坯，假设其需求量分别为 1000 根和 1500 根，问怎样截法，才能最节省材料？

4．某养鸡场有 10000 只鸡，用动物饲料和谷物饲料混合喂养．已知每天每只鸡平均吃掉混合饲料 0.5 kg，其中动物饲料所占比例不得少于 20%．如果动物饲料 2 元/kg，谷物饲料 1.2 元/kg，饲料公司每周

只能供应谷物饲料 27000 kg，问饲料怎样混合才能使成本最低？

5．某农场计划在 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 块土地上，种植 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 种作物．各块土地公顷数、各种作物计划播种面积及各种作物在各块地上的单产（每公顷的产量）如表 6-9 所示．问如何安排种植计划，才能使总产量最高？这里假设计划播种面积等于现有土地面积（即 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ）.

表 6-9

单产（kg/公顷）\ 土地 / 作物	B_1　B_2　$\cdots$　B_n	计划种植面积（公顷）
A_1	c_{11}　c_{12}　$\cdots$　c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}　c_{22}　$\cdots$　c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$　$\vdots$　　$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}　c_{m2}　$\cdots$　c_{mn}	a_m
土地公顷数	b_1　b_2　$\cdots$　b_n	

表中：a_i 表示作物 A_i 的计划播种面积 $(i=1,2,\cdots,m)$；

b_j 表示土地 B_j 的公顷数 $(j=1,2,\cdots,n)$；

c_{ij} 表示在土地 B_j 上种植作物 A_i 的单产数 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

6.2　线性规划问题的标准形式

从上一节讨论的几个例子可以看出，线性规划问题，有的是求目标函数的最大值，有的是求目标函数的最小值；约束条件可以是“$\geqslant$”、“=”、或“$\leqslant$”.

一般地，线性规划问题的数学模型总可以表示为：

求

$$s = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

的最大（最小）值，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =,\geqslant) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =,\geqslant) b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =,\geqslant) b_m, \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0 . \end{cases}$$

或简记为：

求一组变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使

$$\max s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad （或 \min s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j ），$$

且

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leqslant b_j (或 \geqslant b_j, 或 = b_j)(i=1,2,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n),\end{cases}$$

其中 x_j 是需要确定的**决策变量**，简称**变量**；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个约束"方程"中第 j 个变量的**约束系数**；$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是第 i 个约束方程（或不等式）右边的常数；$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是目标函数中第 j 个变量的系数.

为了便于研究问题，规定下面的形式为线性规划问题的标准形式，并将其他形式采用一定的方法化为标准形式，以便使研究的问题统一于标准形式上.

定义 6.1 下述形式的极值问题，称为线性规划问题的标准形式：

$$\max s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$约束条件\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j\geqslant 0, (j=1,2,\cdots,n),\end{cases}$$

其中要求 $b_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$.

线性规划问题的标准形式有以下几个特点：

（1）目标函数是最大化类型（也有的书籍将其统一于最小化类型）；

（2）每一个约束方程右边的常数都是非负的；

（3）除要求变量非负的约束条件是"$\geqslant$"外，其余约束条件都是等式.

如果一个线性规划问题的数学模型不是上面的标准形式，可以通过下面的方法将其化为标准形式：

（1）如果模型的目标函数是求最小值，即

$$\min s=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n ,$$

则可令 $s'=-s$ ，而约束条件保持不变，于是求 s 的最小值等价于求 s' 的最大值，所以 $\min s$ 与 $\max s'$ 的最优解是一致的，因而只要研究

$$\max s'=-c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n$$

就可以了.

（2）如果模型的约束条件右边的常数是负数，那么可以在约束条件的两边同乘以“-1”，使每一个约束条件右边的常数都是非负的.

（3）在约束条件右边的常数都是非负数字以后，如果约束条件的符号是“$\geqslant$”或“$\leqslant$”，可以通过增加一个非负变量使约束变为等式．例如，对于

$$5x_1-3x_2+x_3\leqslant 4,$$

可以增加一个变量 $y_1(y_1\geqslant 0)$，将上式化为

$$5x_1-3x_2+x_3+y_1=4,$$

其中 y_1 称为**松弛变量**.

同样，对于约束

$$5x_1-3x_2+x_3\geqslant 4,$$

可以增加一个变量 $y_2(y_2\geqslant 0)$，将上式化为

$$5x_1-3x_2+x_3-y_2=4,$$

其中 y_2 称为**剩余变量**（也可称为松弛变量）.

（4）如果有的决策变量没有非负的限制，可以令这一变量为两个非负变量的差．例如，若变量 x_i 没有非负限制，则可令 $x_i=x_i'-x_i''$，并加上限制 $x_i'\geqslant 0$，$x_i''\geqslant 0$.

通过以上讨论可见，任何一个线性规划问题都可以化为标准形式.

例 1　试将下面的线性规划问题化为标准形式.

$$\min s=3x_1-2x_2-x_3,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\leqslant 5,\\2x_1-x_2+x_3\geqslant 1,\\3x_1-x_2-x_3=4,\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

解　此模型有三点不符合标准形式的要求：一是目标函数的最小化，二是约束条件有不等式，三是变量 x_3 没有非负限制．为此，令 $s'=-s$，把目标函数转化为最大化；引进松弛变量 y_1，y_2 及新变量 x_3'，x_3''，并令 $x_3=x_3'-x_3''$，则原线性规划问题可化为如下的标准形式：

$$\max s'=-3x_1+2x_2+x_3'-x_3'',$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1+2x_2+x_3'-x_3''+y_1=5,\\2x_1-x_2+x_3'-x_3''-y_2=1,\\3x_1-x_2-x_3'+x_3''=4,\\x_1,x_2,y_1,y_2,x_3',x_3''\geqslant 0.\end{cases}$$

习题 6.2

把下列线性规划化为标准形式：

（1）$\max s = x_1 - 4x_2$,

约束条件 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leqslant 5, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 12. \end{cases}$

（2）$\min s = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$,

约束条件 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -5, \\ 7x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 12, \\ -7x_1 + 19x_2 + 5x_3 \leqslant 11, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$

6.3 两个变量线性规划问题的图解法

在建立了线性规划模型以后，接下来要研究的便是线性规划模型的求解问题．关于线性规划问题，已经有许多比较成熟的解法及计算机软件，本书不作详细的介绍.在此，我们仅介绍两个变量线性规划问题的图解法，并据此简要介绍线性规划问题解的某些性质.

6.3.1 两个变量线性规划问题的图解法

我们结合一个例子，来介绍两个变量线性规划问题的图解法.

例 1 求解如下的线性规划模型

$$\max s = 12x_1 + 10x_2,$$
$$\text{约束条件}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 600, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 400, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 建立如图 6-1 所示的直角坐标系，画出直线 $2x_1 + 3x_2 = 600$ 和 $2x_1 + x_2 = 400$，并用箭头依次指出 $2x_1 + 3x_2 \leqslant 600$， $2x_1 + x_2 \leqslant 400$ 以及 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$ 各自包含的区域，并确定它们的公共区域——可行域．本题的可行域为以 O, A, B, C 为顶点的四边形区域．问题的最优解一定为区域 $OABC$（含边界，下同）中的某一点．这样，问题就化为在区域 $OABC$ 中寻找最优解.

由于目标函数是 $s = 12x_1 + 10x_2$，从而目标函数值相等的点在图 6-1 中就构成一条直线，例如 $s = 600$ 时对应于直线 $12x_1 + 10x_2 = 600$， $s = 1000$ 时对应于直线 $12x_1 + 10x_2 = 1000$．这两条直线斜率相等，因此是平行的.

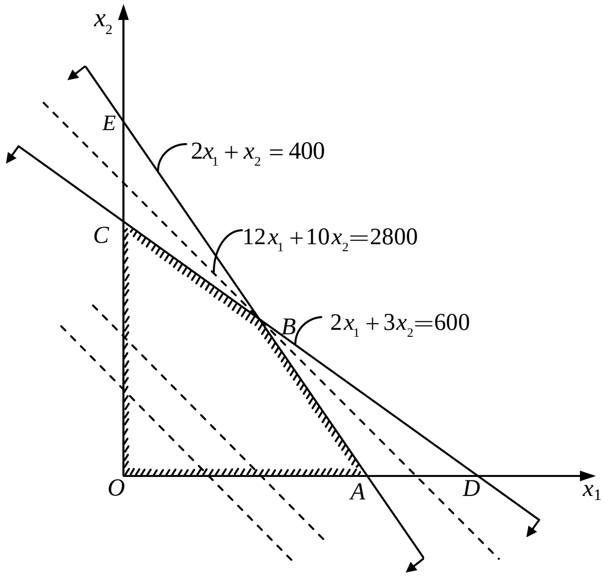


图 6-1

我们用虚线把这两条直线也画在图上（实际上，随着 s 取不同的值可得一族平行线）. 设想有一条直线平行于以上直线向右上方平行移动，于是目标函数值将随着这条直线的移动而增大. 当移动到顶点 B 时，对应的 s 值就是目标函数在可行域 $OABC$ 上的最大值. 因此，B 的坐标 (x_1, x_2) 就是所要求的最优解.

因为点 B 是直线 $2x_1+3x_2=600$ 和 $2x_1+x_2=400$ 的交点，所以解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=600, \\ 2x_1+\ \ x_2=400, \end{cases}$$

便得到 B 的坐标为 $x_1=150$，$x_2=100$，即最优决策是甲产品生产 150 件，乙产品生产 100 件.

点 B 所对应的目标函数值

$$s=12x_1+10x_2=12\times150+10\times100=2800,$$

即为最大总产值.

6.3.2　线性规划的解

对于给定的线性规划问题

$$\max s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad (\text{或} \min s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j),$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leqslant b_j (\text{或} \geqslant b_j, \text{或} = b_j)\ (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

如果有一组值满足所有约束条件，我们就称其为线性规划问题的一个**可行解**，全部可行解构成的集合称为线性规划的**可行域**. 当可行解能使目标函数达到所要求的最大或最小值时，其就是线性规划问题的一个**最优解**.

下面我们结合例 1，来说明可行域与最优解的特征.

例 1 中，线性规划的可行域是四边形区域，最优解在四边形的一个顶点达到. 与此相类似，对于多变量的线性规划，如果可行域非空并且有界，那么这一可行域是高维空间多面体，而且线性规划的最优解必能在多面体的某个顶点上达到（这一结论的详细论证可参见线性规划书籍）. 求线性规划的最优解，主要在作为可行域的多面体的顶点中去寻找.

可行域的顶点与线性规划的解有着密切的联系.

定义 6.2 对于线性规划问题的标准形式

$$\max s=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i\ (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的秩为 m，记 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$，即

$$\boldsymbol{A}=[\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{p}_n\,],$$

若从这 n 个列向量中选出 m 个线性无关的向量 $\boldsymbol{p}_{B_1},\boldsymbol{p}_{B_2},\cdots,\boldsymbol{p}_{B_m}$，就称矩阵

$$\boldsymbol{B}=[\,\boldsymbol{p}_{B_1}\ \ \boldsymbol{p}_{B_2}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{p}_{B_m}\,]$$

为线性规划的一个**基**，称 $x_{B_1},x_{B_2},\cdots,x_{B_m}$ 为关于基 B 的**基变量**，其他 $x_j\,(j\notin\{B_1,B_2,\cdots,B_m\})$ 称为关于基 B 的**非基变量**，记为 $x_{D_1},x_{D_2},\cdots,x_{D_{n-m}}$.

令 $x_{D_1}=x_{D_2}=\cdots=x_{D_{n-m}}=0$，由约束方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$$

可确定出惟一的一组解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称其为线性规划关于基 B 的一个**基本解**；如果基本解

还满足约束 $x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$，则其为线性规划关于基 B 的一个**基本可行解**.

下面以例 1 为例，进一步研究基本可行解与可行域的顶点之间的关系.

例 2　讨论例 1 中线性规划问题的基本可行解.

解　首先引入松弛变量 y_1，y_2，将线性规划问题化成如下的标准形式:

$$\max s = 12x_1 + 10x_2,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + y_1 = 600, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + y_2 = 400, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

这时,

$$\boldsymbol{A} = [\ \boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3\ \ \boldsymbol{p}_4\ ] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_4$ 线性无关，所以矩阵

$$\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以构成线性规划的一个基．此时，基变量是 y_1，y_2，非基变量是 x_1，x_2，令 $x_1 = x_2 = 0$，由约束方程组可解出 $y_1 = 600$，$y_2 = 400$ 所以

$$x_1 = 0，x_2 = 0，\ y_1 = 600，y_2 = 400$$

是这一线性规划问题的一个基本可行解，它对应于图 6-1 中的坐标原点 O．如果选取

$$\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_4\ ] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

此时基变量是 x_2，y_2，非基变量是 x_1，y_1，令 $x_1 = y_1 = 0$，可求得线性规划的另一个基本可行解为

$$x_1 = 0，x_2 = 200，\ y_1 = 0，y_2 = 200，$$

它对应于图 6-1 中可行域上的顶点 C．

类似地，若依次选取 $\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ ]$ 和 $\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_3\ ]$，则相应得到对应于图 6-1 中可行域上的顶点 B 和 A 的基本可行解 $x_1 = 150$，$x_2 = 100$，$y_1 = 0$，$y_2 = 0$ 和 $x_1 = 200$，$x_2 = 0$，$y_1 = 200$，$y_2 = 0$．

但是，若令 $\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_4\ ]$ 或 $\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ ]$，相应地可求得

$$x_1 = 300，x_2 = 0，\ y_1 = 0，y_2 = -200$$

及

$$x_1=0,\ x_2=400,\quad y_1=-600,\ y_2=0.$$

这只是基本解而不是基本可行解，它们对应图 6-1 中的点 D 和 E .

由例 2 可见，线性规划的所有基本可行解恰好和可行域 $OABC$ 的 4 个顶点相对应．可以证明，对于一个线性规划，如果其可行域是一个多面体，则其顶点是这个线性规划的基本可行解.

习题 6.3

用图解法解下面的线性规划:

（1） $\max s=-x_1+2x_2$,

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1-\ \ x_2\geqslant -2,\\ x_1+2x_2\leqslant 6,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

（2） $\max s=2x_1+5x_2$,

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1\leqslant 4,\\ x_2\leqslant 3,\\ x_1+2x_2\leqslant 8,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

（3） $\max s=x_1+2x_2$

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 6,\\ 3x_1+2x_2\leqslant 12,\\ \qquad\quad x_2\leqslant 2,\\ x_1,\ x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

（4） $\max s=x_1+x_2$

$$\text{约束条件}\begin{cases}x_1+2x_2\geqslant 2,\\ x_1-\ \ x_2\geqslant -1,\\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

习题、复习题参考答案与提示

习题 1.1

1．（1）-2；（2）0；（3）-1；（4）29．

2．（1）$x_1=2$，$x_2=3$；（2）$x=-\dfrac{1}{6}$．

3．（1）-24；（2）$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$．

习题 1.2

1．（1）-31；（2）$(y-x)(z-x)(z-y)$；（3）5；（4）$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；（5）$-24$；（6）$2(a+b+c)^3$．

2．证明略．

3．$(n+a-1)(a-1)^{n-1}$．

习题 1.3

1．（1）$x=2$，$y=1$；（2）$x_1=-5$，$x_2=9$，$x_3=-1$．

2．（1）$k\neq-2$ 且 $k\neq 1$；（2）$k=-2$ 或 $k=-1$．

第 1 章复习题

1（1）4，n^2；（2）$ad-bc$，0；（3）上三角，$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；（4）转置，$m$；（5）0；（6）$\neq 0$；（7）8；（8）0．

2（1）D；（2）B；（3）C；（4）D．

3．（1）-62；（2）120；（3）160．

4．（1）$x_1=-11$，$x_2=-18$，$x_3=23$；（2）$x=2$，$y=0$，$z=1$．

5．$-2(n-2)!$．

6．$x_1=0$，$x_2=-(a_1+a_2+a_3+a_4)$．

习题 2.1

1.（1）行矩阵；（2）列矩阵；（3）零矩阵；（4）对角矩阵；（5）下三角矩阵；（6）单位矩阵.

2. $x=2$，$y=1$.

3. 略

习题 2.2

1.（1）$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} -7 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & -14 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

3.（1）$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 26 & 11 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$.

4.（1）$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，264.

6. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

习题 2.3

1.（1）$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$；（3）$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.（1）$\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -17 & -14 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -51 & 37 & -30 \\ -35 & 26 & -22 \end{bmatrix}$.

3.（1）$x_1=0$，$x_2=-3$，$x_3=5$；（2）$x_1=\frac{17}{4}$，$x_2=2$，$x_3=-\frac{9}{4}$.

4. 提示：均可以用定义验证.

习题 2.4

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c+bd & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c+bd \end{bmatrix}$；

2.（1）6，（2）$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

习题 2.5

1. $E(i, j)$，$E(i(\frac{1}{k}))$，$E(i + j(-k))$.

2.（1）$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 47 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 17 \end{bmatrix}$；

注：答案不惟一.

3.（1）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

习题 2.6

1.（1）2；（2）1；（3）2；（4）3.

2.（1）3；（2）3；（3）4.

3. 提示：由$|\boldsymbol{A}| \neq 0$及矩阵秩的定义即得.

第 2 章复习题

1.（1）2，1，3；（2）对角，单位；（3）$3\times 2,\begin{bmatrix}1&2&3\\5&1&0\end{bmatrix}$；（4）$n=r$，$m\times s$；（5）$\boldsymbol{E},|\boldsymbol{A}|$；（6）$\boldsymbol{B}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\boldsymbol{C}^{\mathrm T}$；（7）6，0；（8）40；（9）对称，对角；（10）等价，初等.

2.（1）C；（2）D；（3）A；（4）D；（5）B；（6）A.

3. $\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&1&5\end{bmatrix}$.

4.（1）$\begin{bmatrix}4&-3\\-1&8\end{bmatrix}$；（2）$[14]$；（3）$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}2&1\\-2&-1\\0&0\end{bmatrix}$；（5）$\begin{bmatrix}2&-3\\-3&-7\\8&15\end{bmatrix}$；

（6）$\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{bmatrix}$；（7）$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+10x_2x_3$；（8）$\begin{bmatrix}\cos n\theta&\sin n\theta\\-\sin n\theta&\cos n\theta\end{bmatrix}$.

5. $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-8&13\\-7&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&1&2\\9&-5&25\\-1&-3&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}17\\8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{DB}=[-5,\ \ -8]$，$\boldsymbol{CD}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{DC}=\boldsymbol{O}$

6. $\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}$.

7. 证明略.

8.（1）$\begin{bmatrix}1&-3&-2\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}\sin\theta&-\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}$.

9.（1）$\begin{bmatrix}11&-13\\-3&4\end{bmatrix}$；（2）$\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}-2&2&8\\4&2&2\\4&5&8\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}-\dfrac{13}{2}&4\\2&0\end{bmatrix}$.

10.（1）3；（2）3；（3）2.

11.（1）$\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}2\lambda&1&0\\1&2\lambda&1\\0&1&2\lambda\end{bmatrix}$.

12. 提示：$(\boldsymbol{AA}^{\mathrm T})^{\mathrm T}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}=\boldsymbol{AA}^{\mathrm T}$

13. 提示：$(\boldsymbol{ABC})(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{E}$.

14.（1）$x_1=3$，$x_2=2$，$x_3=-1$；（2）$x_1=2$，$x_2=\dfrac{7}{5}$，$x_3=-\dfrac{1}{5}$.

*15．（1）$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 7 \\ 10 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$；　　（2）$t_{11} = 4q_{11} + 8q_{12} + 10q_{13} + q_{14}$，生产一件 T_1 所需要铜的数量．

习题 3.1

1．（1）$(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$；　（2）$(4,-4,-2)^{\mathrm{T}}$．

2．$(-\frac{7}{2},-1,-\frac{1}{2},-2)$．

3．$\boldsymbol{\alpha} = (1,3,1,\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (0,0,1,-\frac{3}{2})^{\mathrm{T}}$．

4．$x = 4, y = -7, z = 5$．

习题 3.2

1．（1）线性无关；　（2）线性相关；　（3）线性无关．

2．（1）$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_4$；（2）$\boldsymbol{\beta} = -3\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3$．

3．提示：设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = 0$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，推导 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$．

4．提示：用反证法．

习题 3.3

1．提示：可用向量组的秩来判断．

（1）线性无关；　（2）线性相关；　（3）线性相关；　（4）线性无关．

2．$t = -\frac{6}{5}$．

3．（1）3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$；　（2）3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$；　（3）3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$．

4．（1）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_4 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 + \frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3$；　（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 4\boldsymbol{\alpha}_3$．

习题 3.4

1．（1）$\boldsymbol{\xi}_1 = (3,0,-4,1)^{\mathrm{T}}$；　（2）$\boldsymbol{\xi}_1 = (-2,-3,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = (1,3,0,1)^{\mathrm{T}}$．

2．（1）$k_1(3,1,5,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-3,0,-5,1)^{\mathrm{T}}$；（2）$k_1(-2,1,0,0,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$；（3）$k(-2,7,1,-4)^{\mathrm{T}}$；

（4）$k(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},1)^{\mathrm{T}}$．

3．（1）$\lambda \neq 1$；　（2）$\lambda = 1$，$k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$．

习题 3.5

1．（1）$k_1(-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}+(2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

（2）$k_1(-17,5,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(31,-9,0,1)^{\mathrm{T}}+(18,-5,0,0)^{\mathrm{T}}$；

（3）$k_1(-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}}+(2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$；

（4）$(-2,1,3,-1)^{\mathrm{T}}$.

2．$\lambda=-2$，$k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,0,-2)^{\mathrm{T}}$；　$\lambda=1$，$k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

3．（1）$\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$；　（2）$\lambda=-2$；　（3）$\lambda=1$，$k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

4．（1）$p\neq0$ 或 $q\neq2$；

（2）$p=0$，$q=-2$；$k_1(1,-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(5,-6,0,0,1)^{\mathrm{T}}+(4,3,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

第 3 章复习题

1．（1）$(0,-3,-2)$；　（2）$(3,4,0)$；　（3）线性组合，相；　（4）相；　（5）相；　（6）$>$；（7）等价；　（8）1；　（9）$<n$；　（10）$n-r$；　（11）等价；　（12）＝.

2．（1）×；　（2）×；　（3）√；　（4）√；　（5）×；　（6）×；　（7）√；　（8）×；

（9）√.

3．（1）C；　（2）C；　（3）B；　（4）C；　（5）D.

4．$(7,4,-3,5)$.

5．$(-1,1,-4,-1)$，线性相关.

6．（1）线性相关；　（2）线性无关.

7．（1）2，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$；　（2）2，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$.

8．能；$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 但不惟一，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

9．提示：设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k_4\boldsymbol{\beta}_4=0$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，推导 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$.

10．（1）$k_1(-2,5,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$；　（2）$k_1(-3,1,0,4)^{\mathrm{T}}+k_2(3,0,1,-2)^{\mathrm{T}}$；

（3）$k_1(-2,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}}+(2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$；

（4）$k_1(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,2,1)^{\mathrm{T}}+(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

11．当 $\lambda\neq-1$ 时，方程组有解，有惟一解 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda=-1$ 时，方程组有无穷多解，通解为 $k(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}+(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$.

12．$\lambda=2$，$k(\frac{1}{5},\frac{3}{5},1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；$\lambda=-1$，$k(\frac{1}{5},\frac{3}{5},1)^{\mathrm{T}}+(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5},0)^{\mathrm{T}}$.

13．（1）$q\neq5$；（2）$p\neq-2$，$q=5$；（3）$p=-2$，$q=5$；$k(7,-5,1)^{\mathrm{T}}+(-20,13,0)^{\mathrm{T}}$.

习题 4.1

1.（1）$\lambda_1=3$，$\lambda_2=4$，其所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$k_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$k_1$，$k_2$为不等于零的任意实数；

（2）$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，其所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$k_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$k_1$，$k_2$为不等于零的任意实数；

（3）$\lambda_1=8$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，其所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，$k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$，$k_1$为不等于零的任意实数，$k_2$，$k_3$为不同时为零的任意实数；

（4）$\lambda_1=-2$所对应的特征向量为$k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k_1$为不等于零的任意实数；$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$所对应的特征向量为$k_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$，$k_2$，$k_3$，$k_4$为不同时为零的任意实数.

2.（1）a=1（提示：因为 0 是$\boldsymbol{A}$的特征值，故$\boldsymbol{A}$不可逆，从而$|\boldsymbol{A}|=0$，解之便得a=1．如果所给特征值不是零，可将其代入矩阵的特征方程，求出未知参数）；

（2）$\boldsymbol{A}$的另一特征值为$\lambda_2=\lambda_3=2$，其所对应的特征向量为$k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$k_2,k_3$为不同时为零的任意实数；$\lambda_1=0$所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$k_1$为不等于零的任意实数.

3．设$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，则$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$，因为$\boldsymbol{A}$可逆，故$\lambda\neq0$，从而$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$.

习题 4.2

1.（1）矩阵的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=-2$．因为矩阵的 3 个特征值互异，故矩阵可以对角化．记

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&2&1/2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}，则\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&&\\&4&\\&&-2\end{bmatrix}.（注：答案不惟一）$$

（2）由于 $\lambda=2$ 是矩阵的二重特征值，但它只对应一个线性无关的特征向量，故该矩阵不能相似对角化.

（3）由于 $\lambda=1$ 是矩阵的二重特征值，但它只对应一个线性无关的特征向量，故该矩阵不能相似对角化.

（4）矩阵的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3$=2．易求二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3$=2 对应 2 个线性无关的特征向量，故矩阵可以相似对角化．记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.（注：答案不惟一）.

2．提示：$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$.

3．提示：由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，可得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

习题 4.3

1．（1）0；　（2）4；　（3）−6；　（4）$-\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

2．（1）$\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{11}},-\dfrac{1}{\sqrt{11}},\dfrac{3}{\sqrt{11}}\right]^{\mathrm{T}}$；　（2）$\boldsymbol{\beta}^0=\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=\left[\dfrac{2}{3},0,\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}$.

3.（1）$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

4．提示：可以用定义证明，也可以验证所给矩阵的列（行）向量组为标准正交向量组.

5．提示：$(\boldsymbol{\alpha},k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s)=k_1(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_s)$=0.

习题 4.4

1.（1） $Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$；

（2） $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$；

（3） $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$；

（4） $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

2．提示：$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$，$|Q^{-1}AQ|=|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

3．因为 $\lambda_1\lambda_2=|A|$，所以 $\lambda_2=-2$.

第 4 章复习题

1．（1）$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$，其所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$，$k_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$k_1$，$k_2$为不等于零的任意实数；

（2）$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$，其所对应的特征向量为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$x_1,x_2,x_3$不同时为零；

（3）$\lambda_1=3$，$\lambda_2=\lambda_3=0$，其所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$k_1$为不等于零的任意实数，$k_2$，$k_3$为不同时为零的任意实数；

（4）$\lambda_1=4$，$\lambda_2=\lambda_3=-2$，其所对应的特征向量分别为$k_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，$k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$k_1$为不等于零的任意实数，$k_2$，$k_3$为不同时为零的任意实数.

2．（1）$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,2,2,-1)^{\mathrm{T}},\dfrac{1}{\sqrt{26}}(2,3,-3,2)^{\mathrm{T}},\dfrac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$.

3．（1）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&12\end{bmatrix}$.

4．$x=0$，$y=1$.

5．$\lambda=2$ 为矩阵的 3 重特征值，但其只对应一个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

6．证明略.

7．证明略.

8．证明略.

9．提示：由$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$可得$\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，进而可得$\lambda$等于 0 或 1.

10．提示：$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}=0$，而$\boldsymbol{x}\neq 0$，故$\lambda=0$.

11．$\boldsymbol{Q}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&\sqrt{2}&0\\1&-1&\sqrt{2}&0\\1&1&0&\sqrt{2}\\-1&-1&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}12&&&\\&8&&\\&&4&\\&&&4\end{bmatrix}$.

习题 5.1

1．（1）$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2．（1）$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$；（2）$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$；

（3）$f = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$；（4）$f = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_2x_4 + 8x_3x_4$.

习题 5.2

1．（1）$f = y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

（2）$f = y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2$; $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

（3）$f = -4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2$; $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2．（1）$f = y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2$，$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$；

（2）$f = y_1^2 + y_2^2 + 6y_3^2$，$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

习题 5.3

1.（1）既不正定，也不负定；（2）正定；（3）负定；（4）既不正定，也不负定.

2.（1）是；（2）不是；（3）不是.

3. $0<t<1$.

4. $t>2$.

第 5 章复习题

1.（1）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

2.（1）$f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$；（2）$f=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2$；

（3）$f=2x_1^2+x_2^2+x_4^2+2x_1x_4-4x_2x_3$.

3. 因为$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$，所以 $f=9y_1^2+y_2^2-6y_1y_2-6y_2y_3$.

4.（1）$f=y_1^2+4y_2^2-9y_3^2$，所用替换为$\begin{cases} y_1=x_1+x_2-2x_3, \\ y_2=x_2+\dfrac{1}{2}x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 或$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+\dfrac{5}{2}y_3, \\ x_2=y_2-\dfrac{1}{2}y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases}$

（2）$f=y_1^2+2y_2^2+y_3^2$，所用替换为$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2-2x_3, \\ y_2=x_2, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 或$\begin{cases} x_1=y_1-2y_2+2y_3, \\ x_2=y_2, \\ x_3=y_3. \end{cases}$

（3）$f=y_1^2+y_2^2-3y_3^2$，所用替换为$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$ 或$\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3. \end{cases}$

5.（1）$f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$，所用正交替换为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$；

（2） $f=3y_3^2$，所用正交替换为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$；

（3） $f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$，所用正交替换为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

6.（1）正定；　（2）正定；　（3）不是正定二次型；　（4）不是正定二次型.

7．$t>2$.

习题 6.1

1．设第 i 个采矿场运往第 j 个选矿场的矿石量为 $x_{ij}(i=1,2;\ j=1,2,3)$ 吨，则该问题的数学模型为

$$\min s=3x_{11}+5x_{12}+8x_{13}+4x_{21}+10x_{22}+11x_{23},$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=800, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1000, \\ x_{11}+x_{21}=500, \\ x_{12}+x_{22}=600, \\ x_{13}+x_{23}=700, \\ x_{ij}\geqslant 0(i=1,2;\ j=1,2,3). \end{cases}$$

2．设第 i 个时间段开始上班的人数为 $x_i(i=1,2,\cdots,6)$，则该问题的数学模型为

$$\min s=\sum_{i=1}^{6}x_i,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_6 + x_1 \geqslant 8, \\ x_1 + x_2 \geqslant 10, \\ x_2 + x_3 \geqslant 7, \\ x_3 + x_4 \geqslant 12, \\ x_4 + x_5 \geqslant 4, \\ x_5 + x_6 \geqslant 4, \\ x_i \in \mathbf{N}(i = 1, 2, \cdots, 6). \end{cases}$$

3．列出截取方法表

截取方法 / 所截长度	1	2	3	4	5	6	所需根数
98 cm	5	4	3	2	1	0	1000
78 cm	0	1	2	3	5	6	1500
残料长度	10	30	50	70	12	32	

设用第 i 种截取方法截取 500cm 条材 $x_i (i = 1, 2, \cdots, 6)$ 根，则该问题的数学模型为

$$\min s = 10x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 70x_4 + 12x_5 + 32x_6 ,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqslant 1000, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 6x_6 \geqslant 1500, \\ x_i \in \mathbf{N}(i = 1, 2, \cdots, 6). \end{cases}$$

4．设每周用动物饲料 x_1 kg，谷物饲料 x_2 kg，则有

$$\min s = 2x_1 + 1.2x_2 ,$$

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_1 + x_2 = 0.5 \times 10000 \times 7, \\ 4x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 27000. \end{cases}$$

5．设第 i 种作物在第 j 块土地上种植面积为 $x_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 公顷，则该问题的数学模型为

$$\max s = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i=1,2,\cdots,m),\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j=1,2,\cdots,n),\\ x_{ij} \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m;\ \ j=1,2,\cdots,n).\end{cases}$$

习题 6.2

（1） $\max s' = x_1' - x_1'' - 4x_2' + 4x_2''$,

$$\text{约束条件}\begin{cases}-x_1' + x_1'' + 2x_2' - 2x_2'' + y_1 = 5,\\ x_1' - x_1'' + 3x_2' - 3x_2'' + y_2 = 12,\\ x_1', x_1'', x_2', x_2'', y_1, y_2 \geqslant 0.\end{cases}$$

（2） $\max s' = -3x_1 - 2x_2 + 5x_3' - 5x_3''$,

$$\text{约束条件}\begin{cases}-x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' + y_1 = 5,\\ 7x_1 - 6x_2 - 9x_3' + 9x_3'' = 12,\\ -7x_1 + 19x_2 + 5x_3' - 5x_3'' + y_2 = 11,\\ x_1, x_2, x_3', x_3'', y_1, y_2 \geqslant 0.\end{cases}$$

习题 6.3

（1）最优解为 $x_1 = \frac{2}{3}$， $x_2 = \frac{8}{3}, \max s = \frac{14}{3}$；

（2）最优解为 $x_1 = 2$， $x_2 = 3, \max s = 19$；

（3）最优解有无穷多个，为从点 $(2,2)$ 到点 $(3,\frac{3}{2})$ 的线段上的所有点，目标函数的最大值为 6；

（4）最优解为 $x_1 = 0$， $x_2 = 1$， $\max s = 1$.