1921-2020 年“无解”统一考试

（高等数学）

随卷附赠绝美爱情

填涂说明：若答案为四位整数，则前两位为横坐标，后两位为纵坐标。若一题有两小问，则第一问答案为横坐标，第二问答案为纵坐标。若答案为分数，则分子为横坐标，分母为纵坐标，位数不足时在前面补足 0。

1. m 是 1007 到 9999 之间个十百千位数各不相同的整数的个数，n 是 1205（含 1205）到 9999 之间个十百千位数各不相同的奇数的个数。试求 $m-n$。

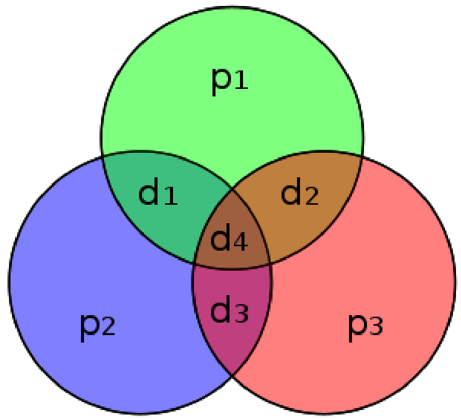
2. 求方程 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$ 满足 $x \leq 1007$ 且 $y < 1205$ 的正整数解的个数。

3. 我们称二维直角坐标系 XOY 中的一个点为有理点当且仅当该点的横坐标和纵坐标均为有理数。已知直角坐标系 XOY 中的圆 C 圆心为 $(9+19\sqrt{41}, 101+19\sqrt{41})$ 且 $(1922, 999)$ 是圆上的点，试求该圆上除点 $(1922, 999)$ 外所有有理点的横纵坐标之和。

4. 已知某本图书的国际标准书号 (ISBN) 是 10 位，但最后一位被磨损了看不清，只能看到前 9 位是 004925020。试补全该书的书号并搜索出书名。写下该书书名中第一个单词的第一个字母，并按字母表顺序 (abcdefg...a 对应 01,b 对应 02,...,z 对应 26) 把这个字母转化成数字写出来作为答案的千位和百位，而补全书号的最后两位作为答案的十位和个位。

5. $(7,4)$ 汉明码是一种线性纠错码，它把 4 比特的数据 (d_1, d_2, d_3, d_4) 增加 3 个校验码 (p_1, p_2, p_3)，编码成 7 位。规则是下图每个圆内的数的和为偶数。

   例如，(1001) 会被编码成 (1001001)。(7,4) 汉明码可以检测并纠正单个比特的差错，也能检测双比特差错。现有一个十进制的四位数，转化成二进制后它有 12 位，我们把它按顺序分成 3 个四位 01 字符串，并把它们用 $(7,4)$ 汉明码编码并进行传输。假设传输过程中这 3 个 7 位的字符串每串至多出现一位错误，接收到的最高四位到最低四位编



码依次为 (1011011)，(1101011)，(1111010)。试写出这个数的十进制表示。

6. 在数论中，对正整数 n，欧拉函数 $\varphi(n)$ 是小于等于 n 的正整数中与 n 互质的数的个数。试求 $\varphi(2685)$。

7. RSA 加密算法是一种非对称加密算法，在公开密钥加密和电子商业中被广泛使用。应用 RSA 加密算法时，首先需要产生一个公钥和一个私钥，这可以通过以下方式可以产生：

   i. 随意选择两个大素数 p 和 q，$p \neq q$，$N = pq$。

   ii. 根据欧拉函数，求得 $r = \varphi(N) = (p-1)(q-1)$。

   iii. 选择一个小于 r 的正整数 e，使得 e 与 r 互质。并求得正整数 d 使得 $ed \equiv 1 \pmod r$。

   现在 A 和 B 想要用 RSA 加密算法传递信息。A 选取 $p = 31$，$q = 37$，由此可得 $N = 1147$，并选取 $e = 17$。试求出 d，写下 $2d$。

8. A 把上题中的公钥 (N, e) 与 B 共享，这样 B 就能用这个公钥加密消息。首先 B 把想要传送的消息（按约定规则）转化成一个或一列小于 N 的非负整数，对于一个数 n，B 会用如下公式将 n 加密为 c:
   $c \equiv n^e \pmod{\mathrm{N}}$
   现在 B 想向 A 传递的信息为如下一列数：
   $(67, 79, 80, 69, 78, 72, 65, 71, 69, 78)$

请问其中的 80 会被加密成多少？

9. B 用上面的公钥和规则将 x 加密得到 430，并把加密后的数传给了 A，请问 A 利用密钥 d 解码得到的数是多少？

10. 已知欧式空间中的一个凸多面体有 1007 个面，1205 个顶点，请写出该多面体的棱的数目。

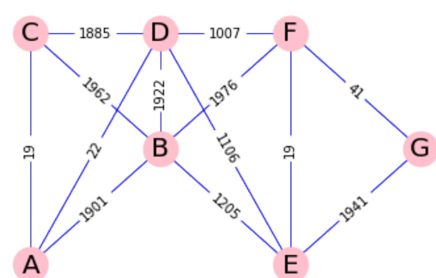
11. 将圆上的 13 个点两两连线，请问连成的线段在圆内最多有多少个交点？

12. 平面上有一个圆，圆上 17 个点两两连线，假设不存在三条或三条以上线段交于同一点，请问这些线段和圆把平面分成了多少块区域？

13. 设图 G 有 1007 个顶点，1205 条边，且 G 中每个顶点的度数不是 2 就是 3。试求图 G 中度数为 2 的顶点个数。

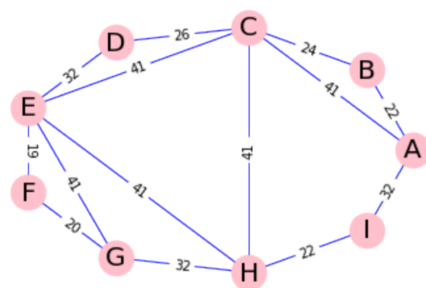
14. 在图论中，完全图是每对顶点之间都恰连有一条边的简单图。无向图 G 的生成树 (Spanning Tree) 是含有 G 的全部顶点，但边数最少的连通子图。请问，对于一个有 60 个顶点的完全图，需要删掉多少条边才能得到一个它的生成树。

15. 最小生成树是一个连通加权无向图中一棵权值最小的生成树。试求下图的最小生成树的总权值。



16. （中国邮递员问题）假设某小镇有 14 条路和 9 个路口（$A, B, \ldots, I$），其路和路口的连接情况如下图所示，图中边上的数字是对应的路的长度。邮递员每天从 A 出发送信，最后回到 A，其间需要通过每条路至少一

次。试求邮递员每天要通过的最短路程。



17. B 给 H 写了 11 封信，但他犹豫是否要将这些信寄出。为帮助自己做决定，他取出 11 个信封，依次编号为 $1,\cdots,11$，并把信按照写信的时间先后顺序编号，最近写的一封编号为 1，最早写的一封编号为 11。现在他按照如下规则分装信件：首先，他随机地将 1 号信装进 11 个信封中的一个，接下来，装 2 号信，如果 2 号信封是空的，则把 2 号信装入 2 号信封，否则随机把 2 号信装进剩下的信封。之后的信都依照这样的规则分装，即在装 i 号信时，如果 i 号信封是空的，则将 i 号信装入 i 号信封，否则，随机将 i 号信装进剩下的信封。依照这样的规则装完全部 11 封信。他会把放对信封的信全都寄出。请问：有多少种情况，B 会寄出至少两封信。

18. 第五届索尔维会议圆满结束后，29 位与会者们合影留念。大家准备按照年龄大小依次走到各自位置，但是最年长的洛伦兹开了个玩笑，他随机选了一个位置，剩下的人依次按如下规则入座：如果在他 / 她入座时，他 / 她的座位没有被占，那么他 / 她就选择自己的位置，否则，随机在剩下的空位中选择一个。已知玻尔是第 19 位年长的人，请问他坐到自己位置的概率是多少？请将答案用分数表示，视分子为横坐标，分母为纵坐标来填充答案。

19. B 和 H 约好今天一起去散步，但具体时间并未确定，假设两人在下午 5 点至 6 点间独立地随机到达约定地点会面，先到者等候 27 分钟后离去，求两人能遇见的概率 p，试写出 $3600p$。

20. B 和 H 约好今天一起去散步，但具体时间并未确定，假设两人在下午

5 点至 6 点间独立地随机到达约定地点会面，先到者只等候 1 分钟便离去，求两人能遇见的概率 p，试写出 $3600p$。

21.（赌徒破产模型）甲有本金 2100 元，想决心再赢 200 元时停止赌博，设甲每局输赢概率都是 $\frac{1}{2}$，每局输赢都是 1 元钱，甲输光后停止赌博，求甲输光的概率

22.（Polya 模型）一个箱子里有 11 个白球和 3 个黑球，从中任取一个并放回后再放入同样颜色的球 2 个，求第 1941 次取到黑球的概率。

23. 教授 A 编著了一套习题集，有许多人做了这套习题集的第 300 题，并且做对题目人数的比例是 p。现在教授希望大家给习题集提出反馈意见并且得到同学们做第 300 题的正确率。假设每位同学都知道自己这道题做对与否，但并不是每位同学都愿意告知别人自己的结果是否正确。为尊重大家的隐私，在调查中，教授在一个袋子中放入 5 个白球和 39 个黑球并让同学抽取，同学抽出球后迅速放回，不会有别人看到他抽出了什么球。假设每位同学都抽到黑球就在调查问卷上关于题目对错写真实信息，抽到白球就写假的信息。如果调查结果显示学生们做对第 300 题的概率是 25%，求 p。

24. 一个教授在一个有 1109 扇门的环形建筑里工作。他以概率 1/3(或概率 2/3) 以顺时针方向 (或相应地以逆时针方向) 打开他上一次打开的相邻门。已知教授第一次打开的是 1922 号门，用 $P(X_n = i)$ 表示第 n 次打开的是 i 号门的概率。令 $x = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1941)$，请问 $\lfloor 1/x \rfloor$ 等于多少。

25. 一个成功 / 失败试验每次试验成功的概率为固定值 p。二项分布是 n 个独立的成功 / 失败实验中成功的次数的离散概率分布。如果随机变量 X 服从参数为 n 和 p 的二项分布，我们记为 $X \sim B(n, p)$。如果 $X \sim B(4432, 0.5)$，请问其期望为多少？

26. 如果随机变量 X 服从二项分布 $B(4432, 0.5)$，请问其方差为多少？

27. 泊松分布是一种离散概率分布，它适合描述单位时间内随机事件发生的次数的概率分布。泊松分布的概率质量函数为：$P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ 如果 X 服从参数为 λ 的泊松分布（概率质量函数为上式），可记为 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$。若随机变量 $X \sim \mathcal{P}(1303)$，请问其期望为多少？

28. 若随机变量 X 服从泊松分布 $X \sim \mathcal{P}(1607)$，请问其方差为多少？

29. 假设随机变量 X_1 和 X_2 相互独立，且服从泊松分布：$X_1 \sim \mathcal{P}(1941)$，$X_2 \sim \mathcal{P}(368)$，则随机变量 $Y = X_1 + X_2$ 也服从某种泊松分布：$Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$。试求 λ。

30. 假设某放射性物质在时间 $(0,t)$ 内释放的 α 粒子数 $N(t)$ 服从泊松分布 $\mathcal{P}(7t)$。若观测某放射性物质释放 α 粒子的情况时，观测时间是随机变量 T, 观测时间的期望为 173。请问，观测到的粒子个数的期望是多少？

31. 正态分布又名高斯分布，是一种十分常见的连续概率分布。若随机变量 X 服从正态分布，且其期望为 μ，方差为 σ^2，则可记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度函数为 $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
已知若随机变量 X 服从标准正态分布：$X \sim N(0,1)$，则 X 小于 1 的概率约为 0.84134，X 小于 2 的概率约为 0.97725，X 小于 3 的概率约为 0.99865。请问，若 $X \sim N(1929, 16)$，那么 X 不在区间 $(1921, 1941)$ 中的概率 p 为多少，试写下 $10000p$。

32. 一个挑战游戏一共有 318 关。挑战者可以自由选择挑战次序。假设对于第 i 关，挑战者能挑战成功的概率为 $i/318$，如果挑战成功，就能获得奖金 $\ln(318) - \ln(i)$，并可以继续选择关卡进行下一次挑战。而一旦挑战失败，则挑战者不仅不能得到这一关的奖金，还必须终止挑战，但可以保留之前获得的全部奖金。为了达到最大的期望总奖金，请问该挑战者第一次应该挑战第几关？

33. 设 X 是一个随机变量，它的取值范围为 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，相应的取值概率分别为 $\{p_1, \cdots, p_n\}$。现假设 $p_i = \frac{1}{i(i+1)}, i = 1, \cdots, n-1$，$p_n = \frac{1}{n}$。如果 $n = 41$，$q_1, \cdots, q_n$ 是一组和为 1 的正实数，请问：当 $(-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 q_i)$ 取最小值时，$\frac{3}{q_{22}}$ 等于多少？

34. 已知直角坐标系 XOY 中的三次曲线 $y = g(x) = x^3 + (x-5)^2$。对于抛物线 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$，记 d_i^2 为三次曲线上的点 $(i, g(i))$ 到抛物线上的点 $(i, f(i))$ 的距离的平方，$i = 1, 2, \cdots, 7$。若 $y = f(x)$ 恰好使得距离的平方和 $\sum_{i=1}^{7} d_i^2$ 最小，试求 $f(i)$ 的和 $\sum_{i=1}^{7} f(i)$。

35. 设实系数多项式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，且 $f'(x) | f(x)$。已知 $n = 50$，$a_n = 1$，

$a_0=1$，求 a_{n-2} 的值。

36. 设 $f(x)=x^3+1$，$g(x)=x^2+1$。已知 $u(x)$，$v(x)$ 是满足 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$ 的次数最小的多项式。当 $x=34$ 时，求 $u(x)-v(x)$ 的值。

37. 已知 8 次实系数多项式 $L(x)=\sum_{n=0}^{8}a_nx^n$ 满足 $L(i)=2*i^8+(-1)^{1+i}9!$, $i=1,2,\cdots,9$. 求 a_8 的值。

38. 设 A, B, C 是二维直角坐标系中的三个点，它们的坐标分别为 $(0,0)$, $(19,32)$ 和 $(22,70)$。求以这三个点为顶点的三角形的面积。

39. 设 A, B, C, D 是三维直角坐标系中的四个点，它们的坐标分别为 $(0,0,0)$, $(19,0,19)$, $(0,30,0)$ 和 $(22,0,41)$。求以这四个点为顶点的四面体的体积。

40. 试求以下行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

41. 试求以下行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 73 & 1 \end{vmatrix}$$

42. 试求以下行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1922}{2\times 19} & \frac{1941}{2\times 19} & \frac{1962}{2\times 19} & \frac{1976}{2\times 19} \\ (\frac{1922}{3\times 5\times 7})^2 & (\frac{1941}{3\times 5\times 7})^2 & (\frac{1962}{3\times 5\times 7})^2 & (\frac{1976}{3\times 5\times 7})^2 \\ 1922^3 & 1941^3 & 1962^3 & 1976^3 \end{vmatrix}$$

43. 已知泡利矩阵为 $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1,0 \end{bmatrix}$，$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0,-i \\ i,0 \end{bmatrix}$，$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,-1 \end{bmatrix}$，单位矩阵 $I = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$, 求 $19iI + 22\sigma_x + 14\sigma_y + 41\sigma_z$ 的行列式的绝对值。

44. 向量组的秩指向量组中的任一极大线性无关组所含有的向量个数。设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2917}$ 是互不相同的数，求向量组
$\alpha_i = (1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{2918}), \quad i = 1, 2, \cdots, 2917$ 的秩。

45. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2918}$ 是互不相同的数，求向量组
$\alpha_i = (1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{2917}), \quad i = 1, 2, \cdots, 2918$ 的秩。

46. 一个矩阵 A 的列秩是 A 的线性独立的纵列的极大数目；行秩是 A 的线性独立的横行的极大数目。矩阵的列秩与行秩总相等，因此它们可以简单地称作矩阵的秩，我们用符号 rank(A) 表示这个数。用 $A(i,j)$ 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素，假设一个 3020×3020 的方阵 A 满足 $A(2k-1, 2k) = k, \quad A(2k, 2k-1) = \dfrac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots, 1510,$
而 A 的其他元素均为 0。我们用 I_{3020} 表示 3020×3020 的单位矩阵，试求 $\mathrm{rank}(A + I_{3020}) + \mathrm{rank}(A - I_{3020})$。

47. 一个 $n \times n$ 的矩阵 A 的迹，是指 A 的主对角线上各个元素的总和。现有 3×3 的矩阵 A，其第 i 行第 j 列的元素为
$a_{ij} = i + 2 * j + 5, \ i = 1, 2, 3, \ j = 1, 2, 3$
求 AA^T(这里 A^T 表示 A 的转置) 的迹。

48. 一个 $n \times n$ 的矩阵 A 具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} 1941 & 19 & 19 & \cdots & 19 \\ 19 & 1941 & 0 & \cdots & 0 \\ 19 & 0 & 1941 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 19 & 0 & 0 & \cdots & 1941 \end{pmatrix},$$

即：对角线全为 1941，第一行和第一列除去第一个元素全为 19，其余元素均为零。当 $n = 17$ 时，求矩阵 A 的最大特征值。

49. 已知 A 和 B 都是 2×3017 的矩阵：

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 3017 \\ 3017 & 3016 & 3015 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

请问 0 是矩阵 A^TB 的几重特征值？

50. 给定 1941×1941 的矩阵如下，试求矩阵 A^{19} 上三角部分（含对角线）所有元素的和。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

51. 给定矩阵 A 如下：

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 8/3 \\ -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

试求 A^{1007} 的全部四个元素之和。

52. A 同上题，试求 A^{1205} 的全部四个元素之和。

53. 试求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 41 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 22 \end{pmatrix}$$

的全部特征值的平方和。

54. 给定矩阵 A 和向量 b 如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&9&2&2\\1&9&4&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}41\\41\\60\\10\end{pmatrix}.$$

对 n 维实数空间中的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，我们定义它的长度为 $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$.
试求使得 $\|A^Tx-b\|$ 最小的 x，写下 $\|x\|^2$。

55. 给定矩阵 A，向量 b 和向量 x_0:

$$A=\begin{pmatrix}9&1&1&4\\1&9&4&1\\1&4&9&1\\4&1&1&9\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}840\\840\\840\\840\end{pmatrix},\qquad x_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 可以分解成 $A=D+L+U$，其中 D 为一个对角矩阵，满足 $(D)_{i,i}=(A)_{i,i}$，L 为严格下三角矩阵，U 为严格上三角矩阵。现在我们用这些已知的矩阵和向量产生一列向量:

$$x_{k+1}=(U-A)^{-1}Ux_k+(A-U)^{-1}b,\ k=0,1,\cdots$$

请问这列向量 $\{x_k\}$ 是否收敛于某个向量 x。如果收敛，请写下 x 的各元素之和，如果不收敛，请写下 1729。

56. 给定矩阵 A，向量 b 和向量 x_0:

$$A=\begin{pmatrix}9&1&2&2\\1&9&2&2\\2&2&9&1\\2&2&1&9\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1020\\1530\\2040\\2550\end{pmatrix},\qquad x_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

D 是一个对角矩阵，满足 $(D)_{i,i} = (A)_{i,i}$。现在我们用这些已知的矩阵和向量产生一列向量:

$$x_{k+1} = D^{-1}(D-A)x_k + D^{-1}b,\ k = 0, 1, \cdots$$

请问这列向量 $\{x_k\}$ 是否收敛于某个向量 x。如果收敛，请写下 x 的各元素之和，如果不收敛，请写下 1729。

57. 假设 x_1, x_2, x_3 都是非负实数且满足

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1941$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1701$$

试求 $3x_1 + 2x_2 + x_3$ 的最大值。

58. 假设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 都是非负实数且满足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \leq 122$, 试求 $(x_1-76)^2+(x_2-62)^2+(x_3-41)^2+(x_4-18)^2+(x_5-1)^2$ 的最小值。

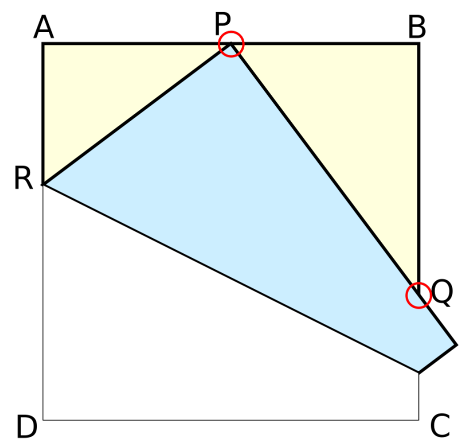
59. 两家竞争关系的公司 A 和 B 生产相同的商品。用 Q 表示两家公司的产量之和，当 $Q < 2436$ 时，商品单价为 $p = 2436 - Q$，否则 $p = 0$。为使各自公司的利润最大化，两家公司会调整产量，并最终达到了平衡。请问，达到平衡时，该商品的单价为多少？

60. 若第三家公司加入竞争，请问商品单价会变为多少？

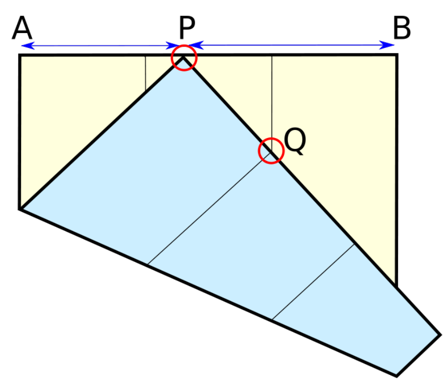
61. 若上题中的公司达成协议合作，以使得各公司的利润之和最大化。请问各公司一起调整产量之后，商品的价格会变为多少？

62. 仍是 A 和 B 两家公司竞争，商品定价规则不变，A 公司的成本为每件 2，B 公司的生产成本为每件 1。请问达到平衡时，A 公司的产量为多少？

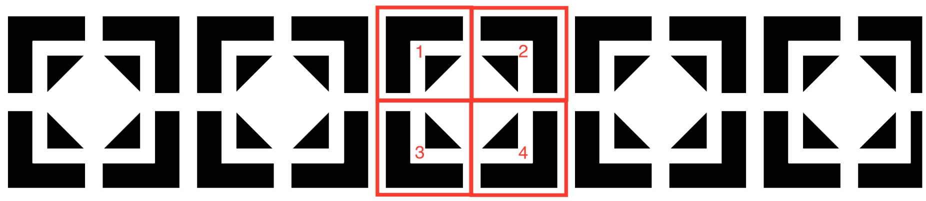
63. 将正方形纸张按如图所示折叠，假设正方形边长为 1233，P 是 AB 中点，求 BQ 的长度。

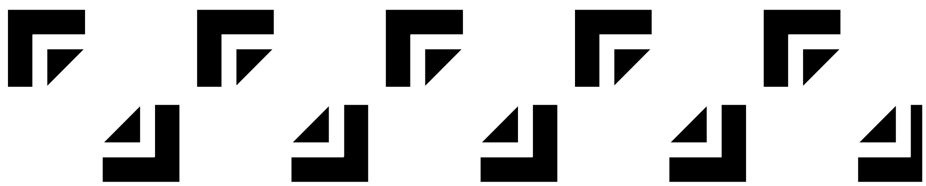


64. 将正方形的边三等分，并按如图所示折叠，使得 P 落在正方形左侧边上，Q 落在三等分线上。假设正方形的边长为 2020，请问 PB 的长度的整数部分是多少？



65. 用如下方法生成一条无穷长的带状花纹：首先选取下图方格 1、2、3、4 中的任意图案填充这 4 个方格，或者保持空白，假设方格的长度为 L，将方格水平移动 $2L*k$, $k=\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$。下面两图均是示例。请问：一共能产生多少种不同的无穷长的带状花纹？





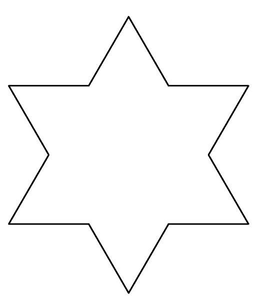
66. 科赫曲线是一种分形，它可由以下步骤生成：

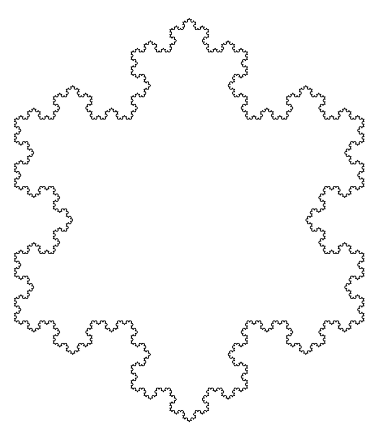
    i . 将线段分成三等份。

    ii. 以上一步中中间的线段为底，向外画一个等边三角形。

    iii. 去掉上一步中作底的线段。

    科赫曲线是以上步骤重复无限次的极限，科赫雪花是以等边三角形生成的科赫曲线组成的。下面两图是等边三角形经过一次和五次上述变换得到的。





假设初始等边三角形的边长为 41，经过 5 次变换后得到的曲线的周长为多少？请写下四舍五入精确到个位数得到的数。

67. 假设初始等边三角形的面积为 1070，试求经上题所述变换无数次得到的科赫雪花的面积为多少？请写下四舍五入精确到个位数得到的数。

68. 用二分法求已知连续函数 $f(x) = 0$ 的一个解。首先，找到一个区间 $[a,b]$，使得 $f(a)f(b) < 0$。根据介值定理，存在 $x^* \in [a,b]$ 使得 $f(x^*) = 0$。利用二分法求解步骤如下：

    i. 求该区间的中点 $m = (a+b)/2$，计算 $f(m)$。

    ii. 若 $f(m)f(a) > 0$，取 $[m,b]$ 为新区间，否则取 $[a,m]$ 为新区间。

    iii. 重复步骤 i 和 ii，直至达到理想精度。

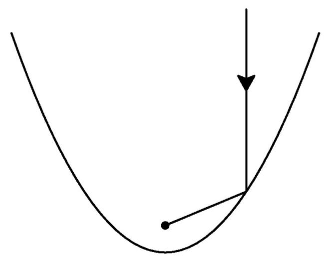
    已知函数 $F(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，且 $F(0) < 0$,

    $F(2) > 0$。请问：用二分法求解 $F(x) = 0$，最多需要多少步就能找到一个 $\hat{x}$，使得 $\hat{x}$ 到 $F(x) = 0$ 的某个解的距离小于 10^{-65}？

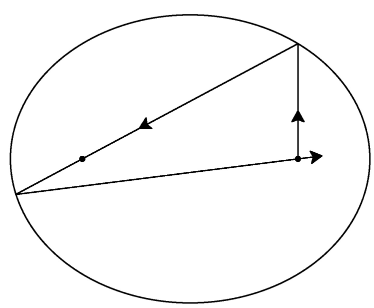
69. 令 $x_0 = 0$，$x_1 = 100$，$f(x) = x^2 - 1941$，作如下迭代：
    $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, \cdots$$
    对 x_{19} 到 x_{41} 这 23 个数取整后求和，请问等于多少？

70. 令 $x_0 = 1$，作如下迭代：
    $$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1941}{2x_n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$
    对 x_{1901} 到 x_{1921} 这些数取整后求和，请问等于多少？

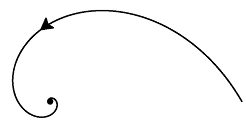
71. 已知反射镜面的形状是抛物曲线，满足方程 $4y = x^2$。有一束光从点 $(10, 1810)$ 以垂直于 x 轴的方向射向反射镜面。请问，光经过多远的距离能到达点 $(0,1)$？



72. 已知反射镜面的形状是椭圆，满足方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$。有一束光从起始点 $(4,0)$ 以垂直于 x 轴的方向射向反射镜面。请问，光经过反射第 106 次回到起始点时，经过的路程是多少？



73. 一只飞蛾从点 $(1205,0)$ 开始飞，它的飞行方向始终与它到原点的连线保持保持 60 度夹角。请问，到飞蛾与原点的距离为 198 时，飞蛾飞行的路程为多少？



74. 设 $(1+x+x^2+\cdots+x^{38})^3 = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{114}x^{114}$，求 $a_1+a_{40}+a_{79}$。

75. 将连分式 $2+\dfrac{1}{6+\frac{1}{2}}$ 化为 $\frac{a}{b}$ 形式的最简分式，分子作为横坐标，分母作为纵坐标。

76. 求矩阵乘积：$\begin{bmatrix}7,7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1,9\\0,1\end{bmatrix}^4\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}$

77. 至少给定多少个任意整数时，必可从中选出 1104 个数之和为 1104 的倍数？

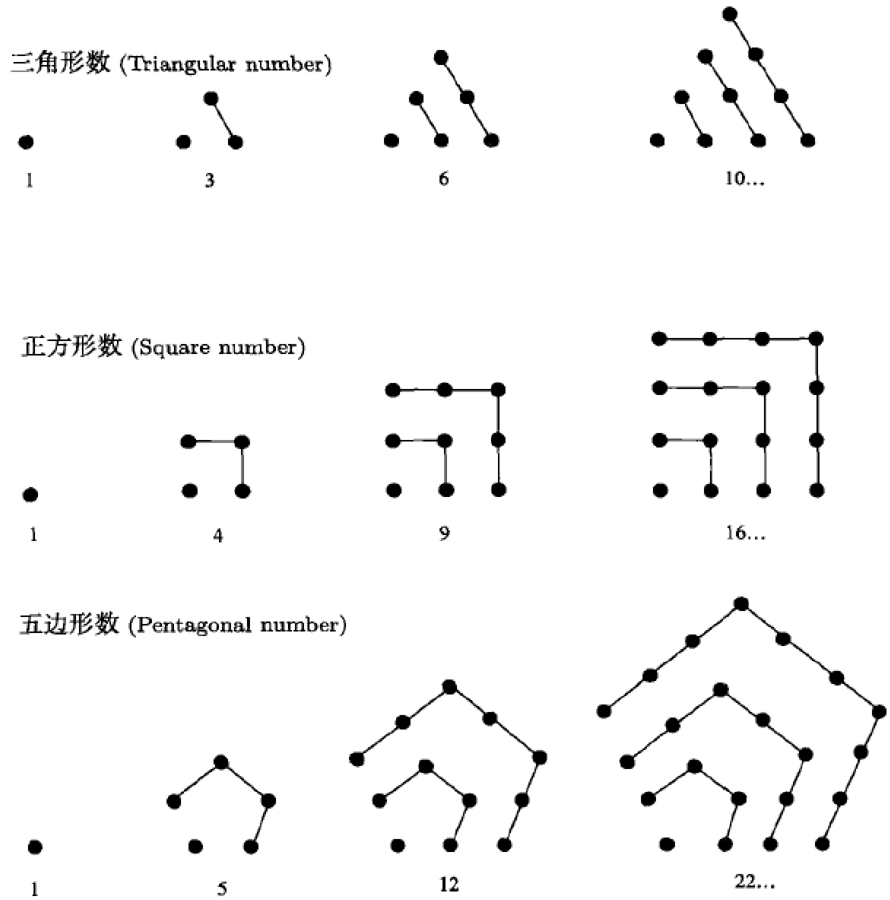
78. $a \mod 11 \equiv 4$，$a \mod 13 \equiv 8$，$a \mod 17 \equiv 16$。求 a。

79. 格兰迪玫瑰线由极坐标方程 $r=\cos 717\theta,\quad \theta\in[0,2\pi)$ 给出，请问此方程画出的图与单位圆有几个不重复的相切点？

80. 若 13 次曲线和 131 次曲线无公共分支，共有多少个实的和虚的交点？

81. $1513^{2617} \bmod 2617 \equiv ?$

82. 已知 n 角形数定义如下图：



求第 13 个 29 角形数。

83. 求 $\underbrace{\sqrt{260610+\sqrt{260610+\sqrt{260610+\cdots}}}}_{\infty\text{个根号}}$。

84. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1926^{n+1}+1925^{n+1}}{1926^{n}+1925^{n}}$。

85. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}^2+\frac{1}{3}^3+\cdots+\frac{1}{3}^n}{1+\frac{10}{11}+\frac{10}{11}^2+\frac{10}{11}^3+\cdots+\frac{10}{11}^n}$。

86. 求 $x_n=19+\frac{8n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ 序列的上确界和下确界。

87. $x_n=11(1-\frac{1}{n})+6(-1)^n$，求此序列的两个聚点，较小的为横坐标，较

大的为纵坐标。

88. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1613}}{1^{1612}+2^{1612}+3^{1612}+\cdots+n^{1612}}$。

89. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{22}+2^{22}+3^{22}+\cdots+(n+1)^{22}}{n^{23}}$。

90. 数列 $x_n(n=1,2,3...)$ 由下式决定：

$$x_1=4, x_2=931, x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

91. $R(x)=\dfrac{7+8x+9x^2+\cdots+14x^7}{19+20x+21x^2+\cdots+26x^7}$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)$。

92. $R(x)=\dfrac{7+8x+9x^2+\cdots+14x^7}{19+20x+21x^2+\cdots+26x^7}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}R(x)$。

93. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{93}-(1+93x)^2}{3x^2}$。

94. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{4567}{1-x^{4567}}-\dfrac{1941}{1-x^{1941}})$。

95. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(15+\frac{48}{n})^2+(15+\frac{96}{n})^2+\cdots+(15+\frac{48(n-1)}{n})^2\right]$。

96. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1922^3+3845^3+5768^3+\cdots+(1923n+1922)^3}{[1922+3845+5768+\cdots+(1923n+1922)]^2}$。

97. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{79\sqrt{529x+1922}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\cdots+\sqrt[1941]{x}}$。

98. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[19]{1+x}-\sqrt[19]{1-x}}{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1-x}}$。

99. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[2]{1+4814x+4813x^2+\cdots+2874x^{1941}}-1}{x+2x^2+\cdots+1941x^{1941}}$。

100. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[23]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$。

101. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{59(1-x)^3}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}$。

102. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{(x+1941)(x+1705)}-x]$。

103. 求 $\lim\limits_{x\to \infty}1659(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$。

104. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt[5]{(x+1922)(x+1941)(x+1962)(x+1976)(x+1304)}-x]$

105. 求 $\lim\limits_{x\to \infty}\log_2\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^{1019}+(x+\sqrt{x^2-1})^{1019}}{x^{1019}}$。

106. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^{653}-(\sqrt{1+x^2}-x)^{653}}{x}$。

107. 求 $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{11-\sqrt{121-36a}}{2a}$。

108. 求 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 7x}{\sin 23x}$。

109. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 1941x-\sin 920x}{\sin x}$。

110. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 65x}{x^2}$。

111. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin 1117x-\cos 1117x}{1+\sin x-\cos x}$。

112. 求 $\lim\limits_{x\to \infty}x\ln(\dfrac{x+751}{x-751})$。

113. 求 $\lim\limits_{n\to \infty}n\ln(\dfrac{n+1122}{n-1})$。

114. 求 $\lim\limits_{n\to \infty}-85n\ln(\cos\dfrac{8}{\sqrt{n}})$。

115. 求 $\lim\limits_{x\to 1121} \dfrac{x-1121}{\ln x - \ln 1121}$。

116. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^9 - x + 1)}{\ln(x^{13} + x + 1)}$。

117. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(25 + e^{9x}\right)}{\ln\left(41 + e^{19x}\right)}$。

118. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)}{\sin 17x}$。

119. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2426x} - 1}{x}$。

120. 求 $\lim\limits_{x\to \infty} -\ln\left[\dfrac{(x+1941)^{x+1941}(x+884)^{x+884}}{(x+2825)^{2x+2825}}\right]$。

121. 求 $\lim\limits_{n\to \infty} n(\sqrt[n]{e^{2817}} - 1)$。

122. 求 $\lim\limits_{n\to \infty} n^2(\sqrt[n]{e^{2723}} - \sqrt[n+1]{e^{2723}})$。

123. 求 $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{1 + \sqrt[n]{1481089}}{2}\right)^n$。

124. 求 $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{529} + \sqrt[n]{2809}}{2}\right)^n$。

125. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1089^{x^2} + 5329^{x^2}}{1089^x + 5329^x}\right)^{-\frac{1}{x}}$。

126. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty} 111\left[\ln(5x)\cdot\ln\left(\dfrac{5+\ln x}{\ln x - 5}\right)\right]$。

127. 求 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^{51}x}{6\sqrt{\left(1-\sin^3 x\right)\left(1-\sin^{48}x\right)}}$。

128. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh^2 3x}{\ln(\cosh 5x)}$。

129. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} 46\sqrt[n]{1+7^n+\left(\frac{49}{2}\right)^n}$。

130. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{47\cdot 3^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+3^{2n}}}$。

131. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\dfrac{5246k}{n^2}\right)$。

132. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 4x}$。

133. 求 $e^{\lim\limits_{n\to\infty} 2\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2710^{\frac{k}{n^2}}-1\right)}$。

134. 求 $-\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\cos\dfrac{78k}{n\sqrt{n}}$。

135. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-4\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\cdots\sqrt[41]{\cos 41x}}{x^2}$。

136. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)\cdots\cos(18x)}{1-\cos x}$。

137. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{13(x-\sqrt{x^2-1})^5+13(x+\sqrt{x^2-1})^5}{x^5}$。

138. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1003}{2}+\dfrac{1007}{2^2}+\dfrac{1011}{2^3}+\cdots+\dfrac{4n+999}{2^n})$。

139. 求 $\lim\limits_{x\to 3^{1/9}} \dfrac{(x^{20}-3^{\frac{20}{9}})-20*3^{\frac{19}{9}}(x-3^{\frac{1}{9}})}{(x-3^{\frac{1}{9}})^2}$。

140. 求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{67}-67x+66}{(x-1)^2}$。

141. 求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^{35}-35}{2x-2}$。

142. 求 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2-2x)^4}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})(1-\sqrt[5]{x})}$。

143. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$, 求 $f'(16)$。

144. 设 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)-\dfrac{1}{2(1+x)}$，求 $\dfrac{1}{f'(6)}$。

145. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，求 $f'(2)$。

146. 设 $f(x)=\dfrac{34}{(1+x^4)}+34\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$, 求 $f'(2)$。

147. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}$，求 $\dfrac{1}{f'(29)}$。

148. 设 $f(x)=\ln\dfrac{17+15\cos x+8\sin x}{15+17\cos x}$，求 $f'(\frac{\pi}{2})$。

149. 设 $f(x)=\arctan\frac{x^2}{4}$，求 $f'(1)$。

150. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$，求 $(-f'(35))^{-\frac{2}{3}}$。

151. 设 $f(x)=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$，求 $\dfrac{1}{f'(211599)}$。

152. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{x^2}{47}$，求 $\dfrac{1}{f'(47)}$。

153. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccot}\dfrac{\sqrt{2}}{x}$，求 $\dfrac{1}{f'(32)}$。

154. 设 $f(x)=3\sqrt{x}-3\arctan\sqrt{x}$，求 $f'(9)$。

155. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，求 $\dfrac{1}{f'(40)}$。

156. 设 $f(x)=\dfrac{1}{30}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{5\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$，求 $\dfrac{1}{f'(7)}$。

157. 设 $f(x)=\dfrac{1}{108\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{54\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$ ，求 $\dfrac{1}{f'(3)}$。

158. 设 $f(x)=\dfrac{5}{16}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}-\dfrac{15}{8\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$，求 $f'(2)$。

159. 设 $f(x)=\arctan(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\dfrac{1}{f'(34)}$。

160. 设

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

求 $F'(23)$。

161.

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

求 $F'(6)$。

162. 设 $f(x)=5242\,\mathrm{arccot}\,\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}$,$(4>x>0)$, 求 $f'(2)$。

163. 设 $f(x)=\sin^{2219}x\cos 2219x$ 求 $f'(\frac{\pi}{2})$。

164. 设 $x=2t-t^2, y=3t-t^3$，求 $\dfrac{1}{y''_x(t=-1508)}$。

165. 质点 $M(x,y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 $220m/s$ 沿与水平面成 45° 角的方向抛去。建立 (空气的阻力略去不计）运动的方程并求最大高度等于多少米?（重力加速度 g 取 10）

166. $f(x)=-\dfrac{1}{x^{11}}$, 求 $f'''(1)$。

167. $f(x)=\sin 4x\cos 14x$, 求 $f'''(\frac{\pi}{2})$。

168. $f(x)=\cos 46x$, 求 $f''(\frac{\pi}{2})$。

169. $f(x)=x^2e^{53x}$，求 $f'''(0)$。

170. $f(x)=(x+1)[(x+1)(x+3)-1](x-3)^4$，求 $f^{[4]}(3)$。

171. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\sin 17x}$。

172. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{15702x}-e^{15702\sin x}}{x^3}$。

173. 求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{2611\ln x}{1+\ln x}$。

174. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{218x^3}{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}$。

175. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{(2522+x)^x-2522^x}$。

176. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{arcsin}23x-23\text{arcsin}x}{x^3}$。

177. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{58}\arctan\sqrt{\frac{x}{58}}-\sqrt{52}\arctan\sqrt{\frac{x}{52}})}$。

178. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin^2x-1}{\sqrt[2519]{\tan x}-1}$。

179. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cosh x}{\sqrt[333]{\cosh x}-\sqrt[414]{\cosh x}}$。

180. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2513)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+2513}}\right]$。

181. 已知 $f(x)=(1+x)^{-10}$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$,求 $-a_3$。

182. 已知 $f(x)=e^{x^2-2x}$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$,求 $-a_5$, 答案为假分数，请化为 $\frac{a}{b}$ 的最简约分形式后，将分子作为横坐标，分母作为纵坐标填写。

183. 已知 $f(x)=\tan x$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$,求 a_5。

184. 已知 $f(x)=809\cosh\dfrac{x}{809}$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$, 求 $\dfrac{1}{a_2}$。

185. 已知 $f(x) = \ln(x + 2510)$ 在 $x = 0$ 点的泰勒展开式为 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, 求 $\dfrac{1}{a_1}$。

186. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{151x^4}{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}$。

187. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{e^{90x} + e^{-90x} - 2}{10x^2}$。

188. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{77x^7}{\tan\sin x - \sin\tan x}$。

189. $y = x^9(1-x)^5$，求其最大值点的横坐标。

190. 设 $x^3 + y^3 - 7272xy = 0$ 的渐近线方程为 $x + y + b = 0$，求 b。

191. 在方程为 $\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{67^2} = 1$ 的椭圆中，可嵌入的边平行于椭圆轴的最大矩形面积为多少？

192. 求 $\int_0^{45} (2x+2)\ \mathrm{d}x$。

193. 求 $\ln 2328 \int_0^1 2328^x\ \mathrm{d}x$。

194. 求 $\int_0^{811\pi} |\sin x|\ \mathrm{d}x$。

195. 求 $\int_1^{15} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$。

196. 求 $\int_9^{11} x^3\ \mathrm{d}x$。

197. 求 $\dfrac{\pi}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{19^2\sin^2 x + 61^2\cos^2 x}}$。

198. 求 $\int_0^{853\pi} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sqrt{2}}\ \mathrm{d}x$。

199. 对任意连续可积函数 $f(x)$，求 $\dfrac{\int_{622}^{1941} f(x)\ \mathrm{d}x}{\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(622 + k\cdot\frac{1319}{n})]}$。

200. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(752n+k)(752n+k+1)}}{n^2}$。

201. 求 $\dfrac{1}{\int_0^\pi \dfrac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1-5284\cos x+2642^2}}}$。

202. 求对任意连续可积函数 $f(x)$，求 $\dfrac{\int_{619}^{1941} f(x)\ \mathrm{d}x}{\int_0^1 f[619+1322x]\ \mathrm{d}x}$。

203. 求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{518}^{1941}(x+y)\ \mathrm{d}y$。

204. 求 $\int_{e^{-658\pi}}^{1}|[\cos(\ln\frac{1}{x})]'|\ \mathrm{d}x$。

205. 求 $\frac{3}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\ \mathrm{d}x$。

206. 求 $\int_0^\pi \frac{3}{\pi}\cos^6 x\ \mathrm{d}x$。

207. 求 $-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\ln x\ \mathrm{d}x$。

208. 求 $\frac{1024}{\pi}\int_0^\pi(\cos^{10}x\cos 10x+1)\ \mathrm{d}x$。

209. 求 $\dfrac{\pi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\cdot\cos 662x\ \mathrm{d}x}$。

210. 求 $\dfrac{2}{\int_{-1}^{1}\{\frac{1}{2^{460}460!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{460}}{\mathrm{d}x^{460}}[(x^2-1)^{460}]\}^2\ \mathrm{d}x}$。

211. 求 $\int_{\frac{1}{1515}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$。

212. 求 $\int_0^{+\infty}3e^{-3x}\cos 4x\ \mathrm{d}x$。

213. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{7}{4}e^{-3x}\sin 4x\ \mathrm{d}x$。

214. 求 $113\int_0^{+\infty}x^4e^{-x}\ \mathrm{d}x$。

215. 对任意连续可积函数 $f(x)$，求 $\dfrac{\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+1163000})\ \mathrm{d}x}{\int_0^{+\infty}f(2326x+\frac{125}{x})\ \mathrm{d}x}$。

216. 对任意连续可积函数 $f(x)$，求 $\dfrac{f(0)}{\lim\limits_{x\to+0} x^{1523}\int_x^1 \frac{f(t)}{t^{1524}}\ \mathrm{d}t}$。

217. $\int_0^{101} \frac{68}{101\pi}\sqrt{101^2-x^2}\ \mathrm{d}x$。

218. 求 $y=\dfrac{53240}{\pi(484+x^2)}$ 和 $y=0$ 两条线围成的图形面积。

219. 求 $y^2=\dfrac{x^3}{22\sqrt{5}-x}$ 和 $x=22\sqrt{5}$ 两条线围成的图形面积除以 π。

220. 求 $x=\pm(5\sqrt{42}\ln\dfrac{5\sqrt{42}+\sqrt{1050-y^2}}{y}-\sqrt{1050-y^2})$ 和 $y=0$ 两条线围成的图形面积除以 π。

221. 求 $y^2=x[\frac{49}{4}(45)^{\frac{2}{3}}-x^3]^2$ 围成的图形面积。

222. 求 $y^2=\dfrac{x^{17}}{(1+x^{19})^2}(x>0)$ 围成的图形面积除以 π。

223. 求参数方程 $x=4\sqrt{13}(t-\sin t)$,$y=4\sqrt{13}(1-\cos t)$,$y=0$ $[0\le t\le 2\pi]$ 围成的图形面积除以 π。

224. 求参数方程 $x=7\sqrt{22}(\cos t-\frac{\cos 2t}{2})$,$y=7\sqrt{22}(\sin t-\frac{\sin 2t}{2})$,$[0\le t\le 2\pi]$ 围成的图形面积除以 π。

225. 求参数方程 $x=10\cos^3 t$,$y=700\sin^3 t$,$[0\le t\le 2\pi]$ 围成的图形面积除以 π。

226. 求极坐标方程 $r^2=1611\cos 2\varphi$ 所表曲线围成的面积。

227. 求极坐标方程 $r=8\sqrt{22}(1+\cos\varphi)$ 所表曲线围成的面积除以 π。

228. 求极坐标方程 $r=12\sqrt{53}\sin 3\varphi$ 所表曲线围成的面积除以 π。

229. 求此曲线 $x^3+y^3=6\sqrt{354}xy$ 围成的封闭空间面积。

230. 求此曲线 $(x^2+y^2)^2=3238xy$ 围成的封闭空间面积。

231. 求此曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{1392}$ 围成的封闭空间面积除以 π。

232. 求曲线 $y = 1236\cosh\frac{x}{1236}$ 从点 $A(0, 1236)$ 至点 $B(1236\text{arcosh}\frac{1339}{1236}, 1339)$ 的弧长。

233. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 353^{\frac{2}{3}}$ 的弧长。

234. 求参数方程 $x = 55\cos^3 t$,$y = 82.5\sin^3 t$ 围成的曲线的弧长。

235. 求参数方程 $x = 251(t - \sin t)$,$y = 251(1 - \cos t)$,$[0 \le t \le 2\pi]$ 围成的曲线的弧长。

236. 求参数方程 $x = 1061(\cos t + t\sin t)$,$y = 1061(\sin t - t\cos t)$,$[0 \le t \le 2\pi]$ 围成的曲线的弧长除以 π^2。

237. 求极坐标方程 $r = 263(1 + \cos\varphi)$ 围成的曲线弧长。

238. 求极坐标方程 $r = 1202\sin^3\frac{\varphi}{3}$ 围成的曲线弧长除以 π。

239. 求截楔体的体积，其平行的上下底为边长分别等于 $2, 7$ 和 $4, 13$ 的矩形，而高为 20。

240. 求旋转抛物体的体积，其底面积为 211，高为 22。

241. 求下列曲面所围成的体积：$\dfrac{x^2}{17^2} + \dfrac{y^2}{71^2} = 1, z = \dfrac{3}{17}x, z = 0 (x \ge 0)$

242. 求下列曲面所围成的体积：$z^2 = \dfrac{645^2}{1792}(7 - x), x^2 + y^2 = 7x$

243. 求下列曲面所围成的体积除以 π：$\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{436^2}} + \dfrac{y^2}{z^2} = 1\ (0 < z < \sqrt[3]{436})$

244. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π : $y = 7(\dfrac{x}{67})^{\frac{2}{3}}\ (0 \le x \le 67)$ 绕 Ox 轴。

245. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π : $y = 82(\frac{x}{9})^2$, $y = 82|\frac{x}{9}|$ 绕 Oy 轴。

246. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π^2 : $x^2 + (y - 278)^2 =4$ 绕 Ox 轴。

247. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π : $x^2 - xy + y^2 = 159^{\frac{2}{3}}$ 绕 Ox 轴。

248. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π^2：$x = \sqrt[3]{103}(t - \sin t)$，$y = \sqrt[3]{103}(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$，$y = 0$，绕直线 $y = 2\sqrt[3]{103}$ 旋转。

249. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π :$x = 265\sin^3 t$，$y = \frac{21}{4}\cos^3 t$ 绕 Ox 轴。

250. 求下列曲线旋转所成曲面包围的体积除以 π^2：$(x^2 + y^2)^2 = \sqrt[3]{3628^2}(x^2 - y^2)$ 绕直线 $y = x$。

251. 求下列曲线旋转所成曲面表面积除以 π:$\pm x = \sqrt{103}\ln\dfrac{\sqrt{103} + \sqrt{103 - y^2}}{y} - \sqrt{103 - y^2}$ 绕 Ox 轴。

252. 求下列曲线旋转所成曲面表面积除以 π^2：$x = \sqrt{113}(t - \sin t)$，$y = \sqrt{113}(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 绕 Oy 轴。

253. 求下列曲线旋转所成曲面表面积除以 π：$r = \dfrac{5\sqrt{151}}{4}(1 + \cos\varphi)$ 绕极轴。

254. 求下列曲线旋转所成曲面表面积除以 π：$r^2 = 681\cos 2\varphi$ 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{4}$。

255. 由直线 $x = \frac{\sqrt[3]{681}}{2}$ 与抛物线 $y^2 = 2\sqrt[3]{681}x$ 所包围的图形绕直线 $y = \sqrt[3]{681}$ 而旋转，求此旋转体的体积除以 π。

256. 求线密度处处为 1[1]，半径为 $\sqrt{1009}$ 的半圆弧钢丝对于过此弧两端点直径的静力矩。

257. 求面密度处处为 1，底为 134，高为 9 的均匀三角形薄板对于其底边的静力矩。

258. 求抛物线 $\frac{280x}{9} = y^2$，$\frac{280y}{9} = x^2$ 所围成面积的重心坐标，直接将此坐标填涂到答题卡。

259. 求以圆心为原点，半径为 2968 的均匀上半球的重心的 z 轴坐标。

[1] 以下各物理题如无额外说明，均假设质量均匀分布

260. 求曲线 $r=2298(1+\cos\varphi)$ 所围面积的重心坐标到极坐标原点的长度 r_0。

261. 求摆线 $x=2526(t-\sin t)$，$y=2526(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的第一拱与 Ox 轴所围成面积的重心的纵坐标。

262. 求由 $0\le x\le 3309$；$y^2\le 3882x$ 围成的平面图形绕 Ox 轴旋转所成旋转体的重心的横坐标。

263. 求级数收敛和 $\frac{7}{2}-\frac{21}{4}+\frac{35}{8}-\frac{49}{16}+\cdots$。

264. 求级数收敛和，正负号规律为两正一负循环 $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}-\frac{3}{64}+\cdots$。

265. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，求 $\dfrac{1}{f(1622)}$。

266. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}\cdot\dfrac{2}{x+3}+\cdots$ 求 $\dfrac{1}{f(1723)}$。

267. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{x^4}{1-x^8}+\cdots$, 求 $\dfrac{1}{f(-2003)}$。

268. 求 $\dfrac{1}{7}\prod\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$。

269. 求 $\dfrac{4}{7}\prod\limits_{n=2}^{\infty}[1-\dfrac{2}{n(n+1)}]$。

270. 求 $\dfrac{11}{6}\prod\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{n^2-4}{n^2-1}$。

271. 求 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\dfrac{381}{\pi}r^2\sin^2\varphi\mathrm{d}r$。

272. 求圆 $(x-25)^2+(y-41)^2\le 1024$ 上的点到原点的距离之平方的平均值。

273. $\iint\limits_{\Omega}327|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 Ω 是以 2 为半径，坐标圆点为圆心的圆。

274. $\iint\limits_{\Omega}\frac{79}{63}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 Ω 是以 $y=x$，$y=x+3$，$y=3$，和 $y=9$ 为边的平行四边形。

275. $\iint\limits_{\Omega} \frac{67}{90\pi} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 Ω 是由横轴和摆线 $x = 6(t - \sin t)$，$y = 6(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的第一拱所界的区域。

276. 求 $\iint\limits_{x^2+y^2 \le 225} \frac{74}{75\pi} \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

277. 求 $\iint\limits_{|x|+|y| \le 3} \frac{142}{3}(|x| + |y|) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

278. 求 $\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \frac{x^2}{73^2} - \frac{y^2}{33^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其积分域 Ω 是由椭圆 $\frac{x^2}{73^2} + \frac{y^2}{33^2} = 1$ 所围成的域。

279. 求以下曲线围成的面积除以 π：$(x - y)^2 + x^2 = 2126$

280. 求以下曲线围成的面积除以 π：$\left(x^2 + y^2\right)^2 = \sqrt{8508}\left(x^3 - 3xy^2\right)$

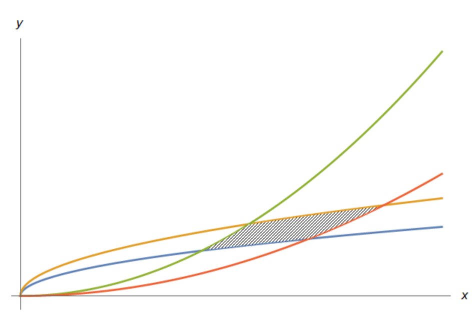
281. 求以下曲线围成的面积除以 π：$\frac{x^2}{19^2} + \frac{y^2}{68^2} = \frac{x}{19} + \frac{y}{34}$

282. 求以下曲线围成的面积：$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{50^2} = (\frac{x}{19} + \frac{y}{30})^4$，$x > 0$，$y > 0$

283. 求以下曲线围成的面积：$(\frac{x}{7} + \frac{y}{91})^4 = \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{72^2}$，$x > 0$，$y > 0$

284. 求以下曲线围成的面积：$\sqrt[4]{\frac{x}{490}} + \sqrt[4]{\frac{y}{331}} = 1$；$x = 0$，$y = 0$

285. 见下图，求以下曲线围成的阴影部分面积：$y^2 = 1899x$, $y^2 = 1941x$, $x^2 = 1831y$, $x^2 = 2025y$



286. 求以下曲线围成的面积：$\sqrt{\frac{x}{27}}+\sqrt{\frac{y}{56}}=1$，$\sqrt{\frac{x}{27}}+\sqrt{\frac{y}{56}}=2$，$\frac{x}{27}=\frac{y}{56}$，$\frac{4x}{27}=\frac{y}{56}$

287. 求用平面 $x+y+z=1941$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=1527$ 相截所得截断面之面积除以 π。

288. 求以下曲面围成的体积除以 π：$\frac{x^2}{23^2}+\frac{y^2}{19^2}=\frac{z}{8}$，$\frac{x^2}{23^2}+\frac{y^2}{19^2}=\frac{x}{23}+\frac{y}{19}$，$z=0$

289. 求以下曲面围成的体积除以 π：$(\frac{x^2}{17^2}+\frac{y^2}{11^2})^2+\frac{z}{21}=1$，$z=0$

290. 求以下曲面围成的体积：$(\frac{x}{12}+\frac{y}{43})^2+\frac{z^2}{14^2}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$

291. 求以下曲面围成的体积除以 π：$z^2=xy$，$x+y=21$，$x+y=33$

292. 求以下曲面围成的体积：$z=x^2+y^2$，$xy=\sqrt{206}$，$xy=2\sqrt{206}$，$y=\frac{x}{2}$，$y=2x$，$z=0$

293. 求以下曲面围成的体积除以 π：$\frac{x^2}{17^2}+y^2+\frac{3z}{256}=1$，$(\frac{x}{17})^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，$z=0$

294. 求以下曲面围成的体积除以 π^4：$z=151\arctan\frac{y}{x}$，$z=0$，$\sqrt{x^2+y^2}=48\arctan\frac{y}{x}$ $(y\geq 0)$

295. 求由曲面 $x^2+z^2=157$，$y^2+z^2=157$ 所围成的物体表面积。

296. 求曲面 $z=x^2-y^2$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=4638(x^2-y^2)$ 内那部分的面积除以 π。

297. 求曲面 $x^2+y^2=1109$ 被平面 $x+z=0$，$x-z=0$，$(x>0,y>0)$ 所截那部分的面积。

298. 求环面 $x=(239+2\cos\psi)\cos\varphi$，$y=(239+2\cos\psi)\sin\varphi$，$z=2\sin\psi$ $(0\leq\psi\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq 2\pi)$ 表面积除以 π^2。

299. 求曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{110}$，$x=0$，$y=0$ 围成的曲面的重心坐标，直

接将此坐标填涂到答题卡。

300. 求圆形薄板 $x^2+y^2\leq 11620^2$ 的重心横坐标，设它在点 $M(x_0,y_0)$ 的面密度与 M 点到 $A(-11620,0)$ 点的距离成正比。