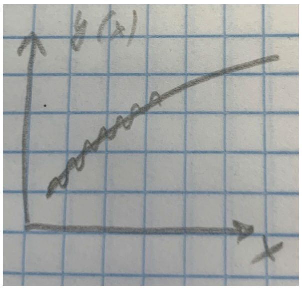
$f(x) = \tilde{f}(x) + \delta f$
$f'(x) = \tilde{f}'(x) + \delta f'$
$\delta f = \frac{1}{n} sinn^2 x$
$\delta f' = ncosn^2 x$
При $n \to \infty$, $\delta f \to 0$, $\delta f' \to \infty$
$T = \frac{2\pi}{W}$



Формулы численного дифференцирования

1) Дифференцирование полинома Ньютона
$z_i = x - x_i$
$\mathscr{P}_n = y_0 + z_0 y(x_0, x_1) + z_0 z_1 y(x_0, x_1, x_2) + z_0 z_1 z_2 y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$
$\mathscr{P}'_n = y(x_0, x_1) + (z_0 + z_1) y(x_0, x_1, x_2) + (z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_0 z_1) y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$
$\mathscr{P}''_n = 2y(x_0, x_1, x_2) + 2(z_0 + z_1 + z_2) y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$
$\mathscr{P}'''_n = 2 \cdot 3y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \dots$
$\mathscr{P}^{(k)}_n(x) = k!\ y(x_0, x_1, x_2, \dots x_k) + \dots$
$\mathscr{P}^{(k)}_n = k!\ y_0(x_0 \dots x_k) + O(h),\ h \to 0$

2) Разложение в ряды Тейлора
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!} y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{IV}_n + \dots$ (1)
$y'_n = y'(x_n), \dots y^{(k)}_n = y^{(k)}(x_n)$
$y_{n-1} = y_n - \frac{h}{1!} y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n - \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{IV}_n \dots$ (2)
Из (1) получаем:
$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{h}{2!} y''_n + \dots = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h)$, при $h \to 0$ - формула первого порядка точности
Из (2) получаем:
$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2!} y''_n + \dots = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h)$, при $h \to 0$ - односторонняя формула (низкий порядок точности)
Из (1) вычитаем (2):
$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{2h}{1!} y'_n + \frac{2h^3}{3!} y'''_n + \dots$
$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - \frac{h^2}{3!} y'''_n + \dots \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O(h^2)$ - формула второго порядка точности (центральная формула (центральная разность))
Сложим (1) и (2)
$y_{n+1} + y_{n-1} = 2y_n + \frac{2h^2}{2} y''_n + \frac{2h^4}{4!} y^{IV}_n + \dots$
$y''_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} y^{IV}_n + \dots = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + O(h^2)$, при $h \to 0$
$y''_n = \frac{y'_n + \frac{1}{2} - y'_n - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h}}{h} = ..$ иначе $.. = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$
Получение формулы численного дифференцирования заданного порядка точности в крайних узлах. Покажем это на примере получения первой производной второго порядка точности $y'_0 + O(h^2)$. Для этого надо получить и написать разложение в ряд Тейлора
$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y'_o + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0$
$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2!} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0 + \dots$
Умножаем первое уравнение на 4 и вычитаем его из второго

$$y_2 = 4y_0 - y_0 + 2hy_0' + \frac{-4h^3}{3!}y_0''' + \ldots$$
$$y_0' = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + \frac{2h^2}{3!}y_0''' + \ldots = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2)$$
$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$$

Для третьей степени написать разложение для третьего узла, значит надо избавляться от 2 и 3 степени

3) Первая и вторая формула Рунге

$$z(x) = \xi(x,h) + \underbrace{\psi(x)h^p}_{R} + O(h^{p+1}) \text{ (3)}$$
$$z(x) = \xi(x,rh) + \psi(x)(rh)^p + O(h^{p+1}) \text{ (4)}$$
$$\xi(x,h) - \xi(x,rh) = \psi(x)h^p(r^p - 1)$$
$$R = \psi(x)h^p = \frac{\xi(x,h) - \xi(x,rh)}{r^p - 1} \text{ - 1-я формула Рунге}$$
$$z(x) = \xi(x,h) + \frac{\xi(x,h) - \xi(x,rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1}) \text{ - 2-я формула Рунге}$$
$$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_{n+2} - y_n}{2h}}{2^1 - 1}$$

x	$y = \lg x$
1	0
2	0,301
3	0,478
4	0,602
5	0,699

$$y_n' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$
$$h = 1 \quad y'(3) = \frac{0{,}602 - 0{,}301}{2} \approx 0{,}151$$
$$h = 2 \quad y'(3) = \frac{0{,}699 - 0}{4} \approx 0{,}175$$

Покрытие Рунге

$$y'_{\text{Руте}}(3) = 0{,}151 + \frac{0{,}151 - 0{,}175}{2^2 - 1} = 0{,}143$$
$$y'_{\text{точ}}(3) = 0{,}145$$

$$y'_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{24h}(y_0 - 27y_1 + 27_2 - y_3)$$

Лабораторная работа 6

Задана функция, найти производные

x	y	1	2	3	4	5	6
		---		---			

		---		---			

1) $y_n' = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h}$ - В первой строке односторонняя разность

2) $y_0' \to O(h^2)$

$y_N' \to O(h^2)$

3) Центральная разность

4) Вторая формула Рунге с одностронней разностью

5) Ввести выравнивающие переменные

$y(x) = \dfrac{a_0 x}{a_1 + a_2 x}$

Ввести выравнивающие переменные так, чтобы функция стала прямой

$\xi = \xi(x)$

$\eta = \eta(x)$

$y_x' = \eta_\eta' \cdot \eta_\xi \xi_x = \dfrac{\xi_x'}{\eta_y'} \eta_\xi'$

$\eta = \ln y$

$\eta_y' = \dfrac{1}{y}$

6) Точный ответ

$a_0 = 1$

$a_1 = 2 -$ для отладки замены переменных

$a_2 = 3$

Проводя преобразования по формуле можно получить точный ответ