Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Toute série est une suite, et *réciproquement*

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ *désigne le corps* $\mathbb{R}$ *ou le corps* $\mathbb{C}$*.*

Définition 1.1 – Série numérique

On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$, la suite définie par :

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ \text{où } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Lorsque la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série de terme général u_n converge, on écrit « $\sum u_n$ converge ». L'expression $S_n(u)$ s'appelle la *somme partielle d'ordre* n *de la série*. Si elle existe, la limite $S(u)$ de la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *somme de la série de terme général* u_n et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Lorsque la suite $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge, on écrit « $\sum u_n$ diverge ».

Remarque 1.1

Ici, nous commençons systématiquement à l'indice 0, il est bien évidemment possible de commencer à un indice quelconque dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.1

La série $\sum q^n$, $q \in \mathbb{C}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Exemple 1.2

La série $\sum 1/n$ (bien sûr, ici $n \geq 1$) diverge, car

$$S_{2\,n} - S_n \text{ ne tend pas vers } 0.$$

En conséquence : $\sum 1/n^\alpha$ diverge lorsque $\alpha \leq 1$.

Démonstration de l'exemple 1.1, de la présente page

- Si $q = 1$, alors $S_n = n + 1$, la suite diverge.
- Si $q \neq 1$, alors
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$
la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de même nature que la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle converge donc si, et seulement si $|q| < 1$.

Démonstration de l'exemple 1.2, de la présente page

- En effet,
$$S_{2\,n} - S_n \geq n \times \frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}.$$
Or, si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite σ, alors
$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma \text{ et } S_{2\,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sigma \text{ donc } S_{2\,n} - S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$
- Comme la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, divergente, son terme général tend vers $+\infty$.

— De plus, pour $\alpha \leq 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 1.1 – Convergence absolue

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\sum |u_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

La réciproque est en général fausse.

Démonstration

— On pose comme pour les fonctions :

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

Le résultat en découle, en utilisant le fait qu'une suite réelle, croissante majorée est convergente.

— Un contre-exemple à la réciproque est la série de terme général $(-1)^n/n$. Car les suites

$$(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}$$

Remarque importante 1.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\boxed{x_0 = u_0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ x_n = u_n - u_{n-1}.}$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum x_n$ sont de même nature (i.e. l'une converge si, et seulement si, l'autre converge). De plus :

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

La série obtenue s'appelle la série dérivée *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Propriété 1.1

On a :

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La réciproque est fausse.

Démonstration

- Le résultat vient du fait que $u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u)$ et donc tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- La série $\sum 1/n$ fournit un contre-exemple à la réciproque.

Propriété 1.2

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que :

$$\Delta = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \neq v_n\} \text{ est de cardinal fini,}$$

posons alors $N = \max \Delta$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N+1 \ \Rightarrow S_n(v) - S_n(u) = \sum_{k\in\Delta} (v_k - u_k) \text{ (terme constant !).}$$

Le résultat en découle immédiatement.

Propriété 1.3

Lorsque $\sum u_n$ est convergente, on définit son *reste d'ordre n* par :

$$\boxed{R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

En ce cas, on a toujours :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(u) = S_n(u) + R_n(u).$$

Remarque importante 1.3

Lorsqu'une série $\sum u_n$ est convergente, on peut faire le lien avec les suites de la manière suivante :

$$u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u) = \boxed{R_{n-1}(u) - R_n(u)}.$$

Lorsque la série est divergente, seule reste la première égalité. On utilisera alors :

$$u_n = \boxed{S_n(u) - S_{n-1}(u)}.$$

Exercice(s) 1.1

1.1.1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |a_n|$ converge. Que dire de cette suite si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \ ?$$

1.1.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $v_n = 2\,u_{n+1} + u_n$, montrer que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

1.1.3 (a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle tendant vers $l \in [-\infty, +\infty]$, que dire de :

i. la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{n+1} \times \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \ ;$$

ii. la suite définie par :

$$v_n = \frac{2}{n \times (n+1)} \times \left(\sum_{k=0}^{n} k \times u_k \right) \ ;$$

iii. la suite définie par :

$$v_n = \frac{1}{2^n} \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times u_k \right).$$

(b) On suppose maintenant que $l = 0$, étudier la nature de $\sum v_n$ lorsque $\sum u_n$ converge pour les cas i., ii. et iii.

1.1.4 En admettant que la série $\sum \ln(n)/n^2$ converge, montrer que la suite de terme général :

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2 \right] - n \times (\ln(n))^2 + 2\,n \times \ln(n) - 2\,n - \frac{1}{2}\,(\ln(n))^2 \ \text{ converge.}$$

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 Principaux résultats

Définition 1.2 – Série à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n, on dit qu'elle est *à termes positifs* si les u_n sont positifs ou nuls à partir d'un certain rang.

Propriété 1.4

Une série à termes positifs converge, si et seulement si, la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration

Car la suite $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang...

Propriété 1.5

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ *à termes positifs* vérifiant, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Et par contraposée, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Soit N un rang à partir duquel on a $u_n \leq v_n$. On obtient alors :

$$\forall n \geq N,\ S_n(u) \leq S_n(v) - S_N(v) + S_N(u) \leq S(v) - S_N(v) + S_N(u).$$

Proposition 1.2 – Comparaison série/intégrale

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, décroissante, *alors :*

$$\sum f(n) \text{ converge} \iff \left(x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \text{ est majorée.}$$

De plus, lorsque la série diverge, on a :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Prenons $a = 0$. Tout s'explique alors avec le dessin 1.1, page 11
Posons S_n la somme de rang n de la série $\sum f(n)$. L'intégrale de f sur le segment $[0, n]$ (qui est l'aire de la surface sous la courbe) est comprise entre les deux aires hachurées :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(k)}_{S_n - f(0)} \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)}_{S_n - f(n)}. \tag{1.1}$$

On obtient :

- $(\Rightarrow)$ Si la série converge, sa somme partielle est majorée et alors, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante (positivité de f) et majorée par la somme S.
- $(\Leftarrow)$ Si la fonction est majorée, alors la somme partielle S_n définit une suite croissante, majorée par $f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$, elle est donc majorée...

▶ Lorsque la série diverge, on a alors :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ et, de même } \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

L'encadrement :

$$1 - \frac{f(0)}{S_n} \leq \frac{1}{S_n} \times \left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq 1 - \frac{f(n)}{S_n},$$

issue de l'inégalité ci-dessus, permet de conclure que :

$$\frac{1}{S_n} \times \left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Remarque 1.4

On peut retrouver l'inégalité 1.1, page précédente par le calcul en procédant ainsi :

— Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a alors :

$$\forall t \in [k, k+1],\ f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

— En intégrant sur le segment $[k, k+1]$ et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k).$$

En sommant sur k variant de 0 à $n-1$, on obtient le résultat.

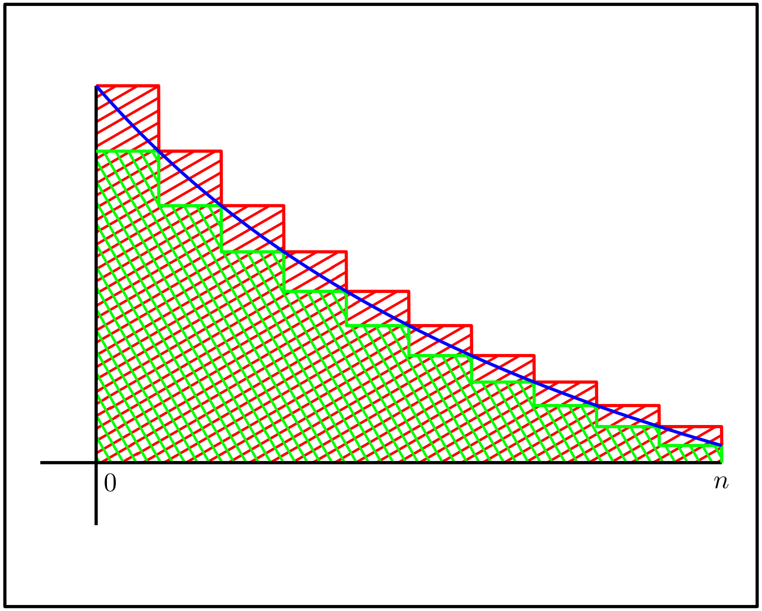
Remarque 1.5

Pour que la proposition s'applique, il suffit d'avoir une fonction décroissante à partir d'un certain rang, car les premiers termes d'une série n'interviennent pas quand on étudie la convergence ou non de cette série.

Exemple 1.3 – Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Figure 1.1 – Comparaison série/intégrale



Démonstration

C'est une comparaison série/intégrale avec la fonction décroissante ($\alpha > 0$)

$$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}.$$

Lorsque $\alpha \leq 0$, le terme général de la série ne tend pas vers 0...

Exemple 1.4 – Séries de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \times (\ln n)^\beta} \text{ converge } \iff \Big[\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\Big].$$

Démonstration

1. Si $\alpha > 1$, on utilise l'inégalité (vraie à partir d'un certain rang) :
$$\frac{1}{n^\alpha \times (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}.$$
2. Si $\alpha < 1$, on utilise l'inégalité (vraie à partir d'un certain rang) :
$$\frac{1}{n^\alpha \times (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}.$$
3. Si $\alpha = 1$, on utilise une comparaison série/intégrale avec la fonction décroissante (à partir d'un certain rang) :
$$x \mapsto \frac{1}{x \times (\ln x)^\beta}.$$

Remarque importante 1.6

La comparaison série/intégrale permet aussi d'avoir des évaluations des restes des séries de terme général $f(n)$ lorsqu'elles convergent bien sûr, mais pas toujours immédiatement un équivalent :

Soit $\sum f(n)$ une série convergente, où f est décroissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La comparaison série/intégrale nous donne :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq R_n + f(n).$$

On a donc trois cas :

1. Cas où $\boxed{f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)}$. Alors on a :
$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour les séries de Riemann convergentes ($\alpha > 1$), on a bien :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. Pour les séries de type géométrique ou proche du type géométrique, cela ne marche plus. Ainsi :

$$u_n = \frac{1}{3^n}, \quad R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\times 3^n} \text{ et } \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3^x} = \frac{1}{\ln(3)\times 3^n}.$$

Nous verrons plus loin une autre méthode...

3. Cas où $\boxed{\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = o\big(f(n)\big)}$. Alors on a :

$$R_n = R_{n+1} + f(n+1) = f(n+1) + O\left(\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \underset{+\infty}{\sim} f(n+1).$$

Si on prend :

$$u_n = \frac{1}{3^{n^2}}, \text{ alors } \int_n^{+\infty} \frac{1}{3^{x^2}}\,\mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\times\ln(3)\times n\times 3^{n^2}} = o\left(\frac{1}{3^{n^2}}\right),$$

donc

$$R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{(n+1)^2}}.$$

► On peut généraliser ces résultats lorsque f est croissante.

Proposition 1.3 – Utilisation des relations de comparaison

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* à termes positifs, *alors :*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, *les deux séries sont de même nature. Bien plus :*

$$\textit{Si elles divergent} \quad S_n(u) \underset{+\infty}{\sim} S_n(v),$$

et

$$\textit{si elles convergent} \quad R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v).$$

Démonstration

Soit $\epsilon \in]0,1[$, à partir d'un certain rang N, on a :

$$0 \leq (1-\epsilon) \times v_n \leq u_n \leq (1+\epsilon) \times v_n.$$

— L'inégalité de droite nous permet de dire que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, car ce sont des *séries à termes positifs* !

— L'inégalité de gauche nous permet de dire que si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge, pour la même raison.

▶ *Les séries sont donc bien de même nature !*

— *Si elles convergent,* alors, en sommant à partir d'un rang $n \geq N$, on obtient :

$$\forall n \geq N,\ (1-\epsilon) \times R_n(v) \leq R_n(u) \leq (1+\epsilon) \times R_n(v),$$

ce qui nous permet de dire que :

$$R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v).$$

— *Si elles divergent,* alors les sommes partielles tendent vers $+\infty$ (séries à termes positifs) et en sommant jusqu'à $n \geq N$, on obtient :

$$(1-\epsilon) \times (S_n(v) - S_N(v)) \leq S_n(u) - S_N(u) \leq (1+\epsilon) \times (S_n(v) - S_N(v)),$$

ce qui permet de conclure à :

$$S_n(u) \underset{+\infty}{\sim} S_n(v).$$

Propriété 1.6

De même, lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont *à termes positifs*, on a :

1. $$u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ diverge } \Rightarrow S_n(u) = o\left(S_n(v)\right),$$

   et

   $$u_n = o(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \left[\sum u_n \text{ converge et } R_n(u) = o\left(R_n(v)\right)\right].$$

2. $$u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ diverge } \Rightarrow S_n(u) = O\left(S_n(v)\right),$$

et

$$u_n = O(v_n) \text{ et } \sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \left[\sum u_n \text{ converge et } R_n(u) = O\left(R_n(v)\right)\right].$$

Démonstration

1. On applique la proposition précédente, en notant que :

$$u_n = o(v_n) \text{ peut se traduire par } u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} v_n.$$

2. Il existe $M \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq M \times v_n.$$

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, car ce sont des *séries à termes positifs* et, en sommant à partir d'un rang $n \geq N$, on obtient :

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq R_n(u) \leq M \times R_n(v),$$

ce qui nous permet de dire que :

$$R_n(u) = O(R_n(v)).$$

— En sommant jusqu'à $n \geq N$, on obtient :

$$0 \leq S_n(u) - S_N(u) \leq M \times (S_n(v) - S_N(v)) \leq M \times S_n(v).$$

Si $\sum v_n$ diverge alors $S_n(v) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$:

$$0 \leq S_n(u) \leq M \times S_n(v) + S_N(u) \leq (M+1) \times S_n(v),$$

ce qui permet de conclure à :

$$S_n(u) = O(S_n(v)).$$

Exemple 1.5 – Formule d'Euler

$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1).}$$

Démonstration

— Le premier terme se trouve à l'aide d'une comparaison série intégrale, notons S_n la somme partielle de rang n de la série à termes positifs divergente $\sum 1/n$, on a alors :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \ln(n).$$

— Pour trouver la suite du développement asymptotique, on étudie la différence $u_n = S_n - \ln(n)$ (en tant que suite), à l'aide de sa série dérivée $v_n = u_n - u_{n-1}$. Voir le code `Wxmaxima` 1.1, de la présente page.
On en déduit que la série $\sum v_n$ est à termes négatifs, convergente (comparaison avec une série de Riemann), on note γ sa limite. L'équivalent permet même d'avoir un équivalent de $R_n(v)$. On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où en découle la formule d'Euler.

Session `Wxmaxima` 1.1 – Formule d'Euler

```
(%i1) v(n) := 1/n-log(n)+log(n-1);
```

(%o1) $\mathrm{v}\left(n\right) := \frac{1}{n} - \log\left(n\right) + \log\left(n-1\right)$

```
(%i2) taylor(v(n),n,inf,2);
```

(%o2)/T/ $-\frac{1}{2\,n^2} + \ldots$

```
(%i3) %gamma,numer;
```

(%o3) 0.57721566490153

Exemple 1.6 – Formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$$

Démonstration

- On procède de même, en étudiant la série $\sum \ln(n)$. Comme on veut un équivalent de l'exponentielle, il faut faire un développement asymptotique jusqu'à un $o(1)$...

— Un comparaison série/intégrale (a fonction ln est croissante) nous donne immédiatement :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} n \times \ln(n).$$

Nous sommes dans le cas où le terme général de la série est négligeable devant l'intégrale (voir la remarque 1.6, page 12, cas 1).

— On étudie ensuite le terme $u_n = S_n - n \times \ln(n)$ et sa série dérivée $v_n = u_n - u_{n-1}$. Et on réitère le procédé ! Voir le code `Wxmaxima` 1.2, page suivante.

On en déduit immédiatement que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n \times \ln(n) - n + \frac{1}{2}\ \ln(n) + K + \frac{1}{12\, n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui nous donne, en prenant le logarithme :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{n} \times e^K.$$

- *En général, il n'est pas possible de trouver la constante.* Mais pour la formule de Stirling, il est possible de la trouver en utilisant les intégrales de Wallis.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t.$$

On procède alors de la manière suivante :

— La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t).$$

— Elle vérifie :

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} \times I_{n-2},$$

la relation de récurrence s'obtenant à l'aide d'une intégration par parties (n est ici ≥ 2) :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t) \times \sin(t)\ \mathrm{d}t,$$

en posant $u = \sin^{n-1}(t)$ et $v' = \sin(t)$, il vient :

$$I_n = \underbrace{\left[-\cos(t) \times \sin^{n-1}(t)\right]_{t=0}^{t=\pi/2}}_{=0 \text{ car } n\geq 2} + (n-1) \times \underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t) \times \cos^2(t)\ \mathrm{d}t\right)}_{=I_{n-2}-I_n}.$$

— Pour trouver e^K, il suffit alors de calculer $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$, et de remarquer que :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-2} \text{ et } I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}.$$

Ce qui nous donne :

$$I_{2\,p} \underset{+\infty}{\sim} I_{2\,p+1}.$$

En reportant l'équivalent trouvé ci-dessus, on obtient :

$$e^K = \sqrt{2\,\pi}.$$

Finalement :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\,\pi\,n}.$$

Session `Wxmaxima` 1.2 – Formule de Stirling

(%i1) `v(n) := log(n)-n*log(n)+(n-1)*log(n-1);`

(%o1) $\mathrm{v}\,(n) := \log\,(n) - n\log\,(n) + (n-1)\,\log\,(n-1)$

(%i2) `taylor(v(n),n,inf,0);`

(%o2)/T/ $-1 + \ldots$

(%i3) `taylor(v(n)+n-(n-1),n,inf,1);`

(%o3)/T/ $\dfrac{1}{2\,n} + \ldots$

(%i4) `taylor(v(n)+n-1/2*log(n)-((n-1)-1/2*log(n-1)),n,inf,2);`

(%o4)/T/ $-\dfrac{1}{12\,n^2} + \ldots$

Remarque 1.7

À quoi sert l'estimation du reste ? ou de la somme partielle ? En dehors, d'une notion de vitesse de convergence ou de divergence, il peut arriver que l'on ait besoin de calculer la somme d'une série : par exemple, calculons à $\varepsilon = 10^{-3}$ près la somme de la série $\sum 1/n^3$.

On a :

$$R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2n^2} \leq R_n + \frac{1}{n^3} \text{ et } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = S_n + R_n.$$

Si l'on choisit n tel que $R_n < \varepsilon$, alors S_n est une bonne estimation de la somme à ε près. Ainsi $n = 23$ convient [a]. D'où :

$$S_{23} < S < S_{23} + \varepsilon.$$

On peut même améliorer ce calcul, en remarquant que :

$$\widetilde{S_n} = S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} \text{ vérifie } \left|S - \widetilde{S_n}\right| \leq \frac{1}{4n^3}.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer n pour que $1/2n^3 < \varepsilon$. Soit [b] $n = 8$... Voir le code `Wxmaxima` 1.3, de la présente page.

a. 22 aurait suffit expérimentalement.
b. 4 aurait suffit expérimentalement.

Session `Wxmaxima` 1.3 – Estimation numérique

```
(%i1)  S : sum(1/n^3,n,1,inf),simpsum,numer;
(%o1)  1.202056903159594
(%i2)  S23 : sum(1/n^3,n,1,23),numer;
(%o2)  1.20115192553742
(%i3)  abs(S23-S);
(%o3)  9.0497762217478517 10^-4
(%i4)  Stilde8 : sum(1/n^3,n,1,p)+1/(2*p^2)-1/(2*p^3),p=8,numer;
(%o4)  1.20199618106171
```

```
(%i5)    abs(Stilde8-S);
```

(%o5) $6.072209788388072110^{-5}$

Remarque 1.8

Si l'on cherche une approximation de la somme à ϵ près, que l'on possède un encadrement du reste de la forme :

$$a_n \leq R_n \leq b_n,$$

et que a_n et b_n sont équivalents au voisinage de $+\infty$, alors on peut choisir n tel que :

$$\frac{b_n - a_n}{2} \leq \epsilon, \text{ alors } \widetilde{S_n} = S_n + \frac{a_n + b_n}{2} \text{ vérifie } \left| S - \widetilde{S_n} \right| \leq \epsilon.$$

Exercice(s) 1.2

1.2.1 Pour les séries à termes positifs suivantes, préciser la nature, puis donner un équivalent de la somme partielle (lorsque la série diverge), ou du reste (lorsque la série converge).

$$\begin{aligned} u_n &= n^n, & (1.2) \\ u_n &= e^{-(\ln(n))^\alpha}, \qquad \alpha > 0, & (1.3) \\ u_n &= \frac{1}{\ln(\ln(n))}. & (1.4) \end{aligned}$$

1.2.2 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers 0, on pose $v_n = n \times (u_n - u_{n+1})$. Montrer que les deux séries sont de même nature et que si elles convergent, les deux sommes sont égales. (On pourra en déduire que lorsque $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la série $\sum u_n$ converge, on a $n \times u_n \to 0$. Ce résultat étant faux lorsque l'on n'a plus la décroissance).

1.2.3 Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}_+$, croissante, continue par morceaux, montrer que :

$$\sum f\left(e^{-n}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ sont de même nature.}$$

1.2.4 Soit une série divergente à termes positifs, de terme général x_n, nature des séries suivantes de termes généraux :

$$\frac{x_n}{1+x_n}, \frac{x_n}{1+x_n^2}, \frac{x_n}{1+nx_n}, \frac{x_n}{1+n^2x_n} ?$$

1.2.2 Diverses techniques

Remarque importante 1.9

Une technique très efficace pour déterminer la nature d'une série a termes positifs est d'utiliser une comparaison (propositions 1.3, page 13 et 1.6, page 14) avec une des séries de référence :

— les séries de Riemann ;
— les séries de Bertrand ;
— les séries géométriques.

Propriété 1.7 – Comparaison logarithmique

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes *strictement* positifs, telles que :

$$\text{à partir d'un certain rang } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Démonstration

Soit N le rang à partir duquel l'inégalité est vérifiée et les termes sont > 0. On a donc :

$$\forall n \geq N,\ u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

En multipliant termes à termes, on obtient :

$$\forall n \geq N,\ 0 < u_n \leq \frac{u_N}{v_N} \times v_n,$$

ce qui nous permet d'obtenir le résultat.

Propriété 1.8 – Critère de d'Alembert

Le même que précédemment, en particularisant une des deux séries en une série géométrique : soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda \in [0, +\infty].$$

Alors :

$$\begin{cases} \lambda > 1 \ \Rightarrow \ \sum u_n \text{ diverge (grossièrement)} \\ \lambda < 1 \ \Rightarrow \ \sum u_n \text{ converge} \\ \lambda = 1^+ \ \Rightarrow \ \sum u_n \text{ diverge (grossièrement)} \\ \lambda = 1^- \ \Rightarrow \ \text{ euh ? rien !} \end{cases}.$$

Démonstration

C'est une comparaison logarithmique avec une série géométrique $\sum q^n$. En effet,

1. Si $\lambda > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, > 0, donc son terme général ne tend pas vers 0. La série est donc grossièrement divergente.

   Le cas $\lambda = 1^+$ est identique.
2. Si $\lambda < 1$, prenons
   $$q = \frac{\lambda + 1}{2} < 1,$$
   une comparaison logarithmique entre les séries $\sum u_n$ et $\sum q^n$ permet de conclure.
3. Si $\lambda = 1^-$, l'exemple des séries de Riemann nous donne des cas convergents et des cas divergents.

   Ce critère n'est utile que pour les séries comparables à une série géométrique !

Remarque 1.10

C'est un critère assez pauvre, affaiblissement considérable d'un résultat peu efficace, son utilisation doit se limiter aux situations où le rapport u_{n+1}/u_n se simplifie considérablement...

Exemple 1.7

$$\sum \frac{n!}{n^{k\times n}},\ (k>0) \text{ oui !} \qquad \sum e^{-\sqrt{n}} \text{ non !}$$

Démonstration

1. Si on pose :
$$u_n = \frac{n!}{n^{k\times n}} > 0 \text{ alors } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{(n+1)^k \times (1+1/n)^{k\times n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^k \times n^{k-1}}.$$
On obtient donc :
$$\sum u_n \text{ converge } \iff k \geq 1.$$
2. Clairement :
$$\frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{e^{-\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^-.$$

Remarque 1.11

En revanche, lorsqu'il permet de conclure, on peut aussi s'en servir pour obtenir des équivalents de sommes partielles et de restes.

Proposition 1.4 – Équivalents issus de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs.

1. *Si on a :*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha > 1,$$
alors
$$S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{\alpha - 1}.$$
2. *Si, au contraire, on a :*
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \in]0,1[,$$
alors
$$R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{1-\alpha}.$$

Démonstration

1. Supposons $\alpha > 1$ et
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$
La série $\sum a_n$ diverge donc (grossièrement). On a alors :
$$S_{n+1}(a) - S_n(a) = a_{n+1} \underset{\infty}{\sim} \alpha \times a_n,$$
les deux séries $\sum (S_{n+1}(a) - S_n(a))$ et $\sum \alpha \times a_n$ sont à termes positifs, divergentes, donc les sommes partielles sont équivalentes. On obtient :
$$a_{n+1} + S_n(a) = S_{n+1}(a) \underset{+\infty}{\sim} \alpha \times S_n(a).$$
Ce qui nous donne :
$$S_n(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{\alpha - 1}.$$
2. Le cas convergent ($\alpha < 1$) se traite de la même manière en écrivant :
$$a_{n+1} = R_n(a) - R_{n+1}(a) \underset{+\infty}{\sim} \alpha \times a_n.$$

Remarque 1.12

On voit donc que cette situation correspond à l'une de celle où la comparaison série/intégrale fonctionnait mal. Prenons :
$$u_n = \frac{\ln(n)}{3^n},$$
on a alors :
$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln(t)}{3^t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ln(3)}.$$
La comparaison série/intégrale ne fonctionne pas ! Mais :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \text{ donc } R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3^n}.$$

Propriété 1.9 – Règle « $n^\alpha \times u_n$ »

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, alors :

$$\begin{cases} \exists \alpha > 1,\ n^\alpha \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ converge} \\ \exists \alpha \leq 1,\ n^\alpha \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ \Rightarrow\ \sum u_n \text{ diverge} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists \lambda \in]0,+\infty[,\ n^\alpha \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \ \Rightarrow\ \text{ on aurait dû le trouver avant !} \end{cases}$$

Uniquement là pour aider ceux qui ont des difficultés à comparer à une série de Riemann...

Démonstration

1. Si on a $\alpha > 1$ et
$$n^\alpha \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ alors } u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$
d'où (série à termes positifs) la convergence de $\sum u_n$.
2. Si on a $\alpha < 1$ et
$$n^\alpha \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ alors } \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n),$$
d'où (série à termes positifs) la divergence de $\sum u_n$.
3. Si on a $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0,+\infty[$ et
$$n^\alpha \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \text{ alors } u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha},$$
ce qui permet de conclure.

Propriété 1.10 – Sommation par paquets

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\psi(0) = 0$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k \quad \text{(paquet)}.$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature, et, en cas de convergence, même somme.

Ce n'est pas vrai, en général, lorsque les séries ne sont plus à termes positifs.

Démonstration

1. On a immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand (de telle sorte que les termes soient positifs) :
$$S_n(v) = S_{\psi(n+1)-1}(u) \text{ et, si } n \in [\![\psi(p), \psi(p+1)-1]\!]\,,\ S_{p-1}(v) \leq S_n(u) \leq S_p(v).$$
La première relation nous permet de dire que (cette égalité *n'utilise pas* la positivité des u_n) :
$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ converge}\right].$$
La deuxième relation nous permet de dire que :
$$\left[\sum u_n \text{ diverge}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ diverge}\right].$$

Exemple 1.8

Soit $\alpha > 0$, on considère $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N},\, 0 \text{ n'intervient pas dans l'écriture décimale de } n\}$, on renumérote $\mathcal{P}$, sous la forme $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, φ strictement croissante, alors :
$$\sum \frac{1}{\varphi(n)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > \log_{10}(9).$$

Démonstration

On va regrouper suivant le nombre de chiffres en base 10 de $\varphi(n)$, en posant :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 10^{p-1} \leq \varphi(n) < 10^p - 1}} \frac{1}{\varphi(n)^\alpha}.$$
On a alors clairement, pour $p \in \mathbb{N}^*$:
$$9^p \times \frac{1}{\overline{9\cdots9}^\alpha} v_p \leq 9^p \times \frac{1}{\overline{1\cdots1}^\alpha},$$

où 9^p est le nombre d'entiers à p chiffres ne contenant pas de 0 dans l'écriture décimale et où l'on a minoré et majoré $\varphi(n)$ lorsque $\varphi(n)$ a p chiffres. Finalement :

$$9^p \times \frac{1}{(10^p-1)^\alpha} \leq v_p \leq 9^p \times \frac{9^\alpha}{(10^p-1)^\alpha}.$$

On en déduit que la série $\sum v_p$ converge si, et seulement si :

$$\frac{9}{10^\alpha} < 1 \text{ soit } \alpha > \frac{\ln(10)}{\ln(9)} = \log_{10}(9).$$

Propriété 1.11 – Changement de l'ordre des termes

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ (une permutation de $\mathbb{N}$), alors $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ sont de même nature et ont même somme.

Ce n'est pas vrai, en général, lorsque les séries ne sont plus à termes positifs.

Démonstration

Quitte à changer les premiers termes et sans changer la nature de la série, on peut supposer que *tous* les u_n sont positifs.

1. *Supposons que $\sum u_n$ converge.* Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, posons $v_n = u_{\sigma(n)}$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

   $$S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{N_n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S(u),$$

   où

   $$N_n = \max\left(\sigma\left(\llbracket 0, n \rrbracket\right)\right).$$

   Ce qui montre que $\sum v_n$ converge.
2. *Supposons que $\sum v_n$ converge.* Comme

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{\sigma^{-1}(n)},$$

   en inversant les rôles dans le cas précédent, on trouve que $\sum u_n$ converge. D'où le résultat.

   On a d'ailleurs clairement :

   $$S(u) = S(v).$$

Théorème 1.1 – Produit de Cauchy de deux séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs, on définit* le produit de Cauchy *des deux séries comme étant la série de terme général :*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

On a :

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\sum w_n$ *converge et*

$$S(w) = S(u) \times S(v).$$

Démonstration

Nous supposerons encore, sans perte de généralité, que tous les termes sont positifs.

1. On utilise les ensembles d'indices définis sur la figure 1.2, page ci-contre. On a alors clairement

$$\phi_n \subset \Gamma_n \subset \phi_{2\,n}.$$

   On a alors immédiatement :

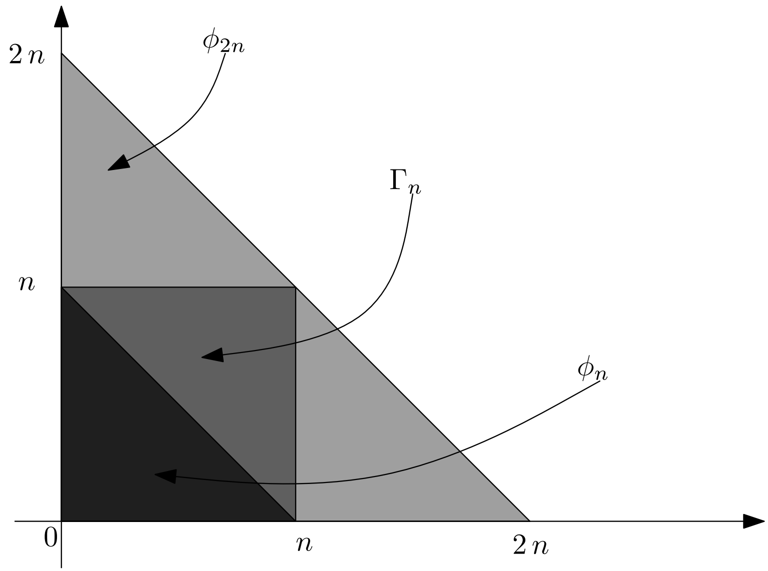
$$S_n(w) = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} u_j \times v_{k-j} \right) = \sum_{(j,k)\in\phi_n} u_j \times v_k \leq \sum_{(j,k)\in\Gamma_n} u_j \times v_k = S_n(u) \times S_n(v) \leq S(u) \times S(v).$$

   Ce qui montre que $\sum w_n$ converge et $S(w) \leq S(u) \times S(v)$.

2. L'autre inclusion nous donne :

$$S_n(u) \times S_n(v) \leq S_{2\,n}(w) \text{ d'où } S(u) \times S(v) \leq S(w).$$

Figure 1.2 – Produit de Cauchy



Exercice(s) 1.3

1.3.1 Discuter suivant les paramètres la nature des séries de terme généraux suivants :

$$u_n = \sqrt{n!} \times \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right), \text{ où } x > 0, \tag{1.5}$$

$$u_n = \left(1 - k \times \frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)^{n}, \text{ où } k > 0 \text{ et } \alpha > 0. \tag{1.6}$$

1.3.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et différents de 1, telle que :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \\ \frac{\ln n}{\ln u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -l \in [-\infty, 0] \end{cases}.$$

Étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction de l.

1.3.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *décroissante* de réels > 0. Montrer que les séries de termes généraux : u_n, $n \times u_{n^2}$ et $2^n \times u_{2^n}$ sont de même nature.

1.3.4 Soit α un réel > 1, donner un équivalent de la somme partielle de la série de terme général

$$u_n = 3^{\sqrt{n^\alpha+n+1}} \times \ln n.$$

1.3.5 Nature de la série de terme général

$$\frac{p_b(n)}{n \times (n+1)},$$

où $b \geq 2$ et où $p_b(n)$ est le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base b.

1.3 Séries à termes quelconques

Définition 1.3 – Série absolument convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors, il peut arriver l'un des cas suivants :

1. Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente* (en ce cas, elle est bien sûr convergente) ;
2. si $\sum u_n$ converge alors que $\sum |u_n|$ diverge, on dit que $\sum u_n$ est *semi-convergente* ;
3. $\sum u_n$ diverge.

Proposition 1.5 – des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \times u_{n+1} < 0$ *(i.e. un changement de signe à chaque indice) et*
2. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit *vers 0,*

alors :

1. *la série est convergente ;*
2. *et on a la propriété du reste suivante*[a] *:*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \operatorname{sg}(u_{n+1}) R_n(u) \leq |u_{n+1}|.}$$

---

a. Où sg désigne la fonction *signe* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sg}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Démonstration

Supposons par exemple que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \times |u_n|.$$

Les suites $(S_{2\,n}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2\,n+1}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2\,n+1}(u) = \sum_{k=0}^{2\,n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{2\,k} + u_{2\,k+1}) \text{ et } S_{2\,n}(u) = \sum_{k=0}^{2\,n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} (u_{2\,k-1} + u_{2\,k})\,.$$

On en déduit que :

$$(S_{2\,n+1}(u))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, et } (S_{2\,n}(u))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

Comme, de plus :

$$S_{2\,n+1}(u) - S_{2\,n}(u) = u_{2\,n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

on a le résultat.

Exemple 1.9

Un exemple simple de séries semi-convergentes :

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha \in]0,1].$$

Remarque importante 1.13

La *décroissance* de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est *indispensable*, comme le montre la série suivante :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \text{ où } n \geq 2.$$

Démonstration

On a bien :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \times u_{n+1} < 0,$$

mais la série diverge (car on n'a pas la décroissance). En effet :

$$w_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}\times\left(\sqrt{n}+(-1)^n\right)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

$\sum w_n$ est donc divergente et, comme $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ est convergente (il y a la décroissance), on en déduit que :

$$\sum u_n \text{ diverge!}$$

Remarque importante 1.14

Si l'on reprend l'exemple précédent et que l'on pose $v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, on a alors :

$$\sum v_n \text{ converge },\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et pourtant } \sum u_n \text{ diverge!}$$

On ne peut pas raisonner avec des équivalents pour étudier la nature des séries semi-convergentes ! En revanche, cela fonctionne bien pour le séries absolument convergentes.

Remarque 1.15

Il est bien sûr possible, en utilisant les techniques sur les séries à termes positifs d'obtenir des équivalents, voire des développements asymptotiques des restes des séries alternées. Ainsi :

$$\text{si } u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}, \text{ alors } R_n(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha}. \qquad (\alpha > 0).$$

Démonstration

Le plus simple est de raisonner sur l'évaluation de :

$$R_{2\,n} = \sum_{k=2\,n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \underbrace{(u_{2\,k+1} + u_{2\,k+2})}_{=v_k} = R_{n-1}(v).$$

Or,

$$v_k = \frac{1}{(2\,k+1)^\alpha} - \frac{1}{(2\,k+2)^\alpha}.$$

On a donc (voir les calculs `Wxmaxima` 1.4, page suivante) :

$$R_n(v) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}\,k^{\alpha+1}},$$

nous avons vu que pour une série de Riemann, on pouvait écrire immédiatement :

$$R_n(v) \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{\alpha+1}\,t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{\alpha+1}\,n^\alpha}.$$

Donc :

$$R_{2\,n}(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,(2\,n)^\alpha}.$$

Il est alors facile d'obtenir :

$$R_{2\,n+1}(u) = R_{2\,n}(u) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,(2\,n+1)^\alpha},$$

et, finalement :

$$R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\,n^\alpha}.$$

Session `Wxmaxima` 1.4 – Équivalents d'un reste de série alternée

```
(%i1) assume(alpha>0);
```

(%o1) $[\alpha > 0]$

```
(%i2) taylor(1/(2*k+1)^alpha-1/(2*k+2)^alpha,k,inf,1);
```

(%o2)/T/ $\dfrac{\alpha}{2\,k^{\alpha}\,2^{\alpha}\,k} + \ldots$

Propriété 1.12 – Méthode du développement asymptotique

On développe u_n jusqu'à l'obtention d'un terme du DA qui est
- — soit absolument convergent ;
- — soit de signe constant.

Exemple 1.10 – Méthode du développement asymptotique

1. Soit la série définie par :

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n} \times \sin(1/\sqrt{n})}{n + (-1)^n}, \text{ où } n \geq 2.$$

On a alors :

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\text{alternée}} + \underbrace{-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{absolument convergente}}.$$

2. Soit la série définie par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}.$$

On a alors :

$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln(n)}}_{\text{alternée}} \underbrace{- \frac{1}{\ln(n)^2} + o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)}_{\text{divergente}}.$$

Proposition 1.6 – Sommation par paquets de termes de même signe

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *et* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que :*

$$\forall n,\ \forall (p,q) \in \{\psi(n), \dots, \psi(n+1)-1\}^2,\ u_p \times u_q > 0,$$

(soit un regroupement de termes de même signe), alors :

$$\sum u_n \ \textit{et} \ \sum \underbrace{\left(\sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k \right)}_{=v_n} \ \textit{sont de même nature.}$$

Démonstration

1. On a toujours la relation :
$$S_n(v) = S_{\psi(n+1)-1}(u).$$
Donc, et cela reste vrai quel que soient les propriétés de $\sum u_n$, on a :
$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ converge.}\right]$$
2. Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge, soit $n \in \mathbb{N}$, on peut alors définir
$$p_n \in \mathbb{N},\ \psi(p_n) \leq n < \psi(p_n+1),$$
et on a alors :
$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(v)\right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\psi(p_n+1)-1} u_k \right|. \tag{1.7}$$
3. Avec les hypothèses sur $\sum u_n$, la relation ci-dessus devient :
$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(v)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\psi(p_n+1)-1} |u_k| \leq |v_{p_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
ce qui montre le résultat.

Exemple 1.11

La série de terme général ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha},$$

est convergente si, et seulement si $\alpha > 1/2$.

Démonstration

1. Si $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente.
2. Si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente, elle converge donc.
3. Regroupons des termes de même signe (donc $\psi(n) = n^2$). Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k = (-1)^n \times \left(\sum_{k=n^2}^{n^2+2\,n} \frac{1}{k^\alpha} \right).$$

On peut alors obtenir à l'aide d'une comparaison série/intégrale :

$$|v_n| - \frac{1}{n^{2\,\alpha}} \leq \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq |v_n| - \frac{1}{(n+1)^{2\,\alpha}}.$$

On obtient donc (voir le code `WXmaxima` 1.5, page ci-contre) :

- Pour $\alpha \in]0, 1[$:

$$|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{2\,\alpha-1}}.$$

On en déduit donc que

$$\left[\alpha \leq \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left[\sum v_n \text{ diverge grossièrement}\right].$$

En ce cas, on peut conclure que

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

- Pour $\alpha \in]1/2, 1]$:

$$v_n = \underbrace{\frac{2\,(-1)^n}{n^{2\,\alpha-1}}}_{\text{semi-convergente}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{2\,\alpha}}\right)}_{\text{absolument convergente}},$$

$\sum v_n$ est convergente et, comme on a fait un regroupement de termes de signe constant, $\sum u_n$ est convergente.

Session Wxmaxima 1.5 – Sommation par paquets de termes de même signe

Cas $\alpha \in]0,1[$.

```
(%i1) assume(alpha>0,n>0,alpha<1);
```

(%o1) $[\alpha > 0, n > 0, \alpha < 1]$

```
(%i2) taylor(integrate(1/t^alpha,t,n^2,(n+1)^2)-1/n^(2*alpha),n,inf,1);
```

(%o2)/T/ $\dfrac{2\,n}{(n^\alpha)^2} - \dfrac{2\,\alpha}{(n^\alpha)^2} + \dfrac{4\,\alpha^2 - 2\,\alpha}{3\,(n^\alpha)^2\,n} + \ldots$

Cas $\alpha = 1$.

```
(%i3) taylor(integrate(1/t,t,n^2,(n+1)^2)-1/n^2,n,inf,2);
```

(%o3)/T/ $\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2} + \ldots$

Proposition 1.7 – Sommation par paquets de longueur bornée

$\sum u_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, vérifiant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, tels que :

$$\exists P \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \psi(n+1) - \psi(n) \leq P,$$

(regroupement d'un nombre limité de termes tendant vers 0), alors :

$$\sum u_n \text{ et } \sum \underbrace{\left(\sum_{k=\psi(n)}^{\psi(n+1)-1} u_k \right)}_{=v_n} \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration

On reprend l'équation 1.7, page 35. On obtient maintenant :

$$\left|S_n(u) - S_{p_n}(u)\right| \leq P \times \max\left(\{|u_k|,\ k \in [\![n+1, \psi(p_n+1)-1]\!]\}\right) \leq P \times \max\left(\{|u_k|,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq n+1\}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'où le résultat.

Proposition 1.8 – Comparaison à une intégrale (quantitative)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $x \mapsto \int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t$ soit bornée sur $[0, +\infty[$, alors

$$\sum \underbrace{\left(\int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n)\right)}_{=w_n} \text{ converge.}$$

Démonstration

On écrit :

$$w_n = \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} \left(f(t) - f(n)\right)\ \mathrm{d}t,$$

puis, on effectue une intégration par parties, en s'arrangeant pour que le crochet s'annule :

$$w_n = \left[(t-(n+1)) \times (f(t) - f(n))\right]_{t=n}^{t=n+1} - \int_n^{n+1} (t-(n+1)) \times f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Finalement :

$$|w_n| \leq \int_n^{n+1} (n+1-t) \times |f'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\ \mathrm{d}t.$$

$\sum |w_n|$ est donc convergente car, par hypothèse

$$\sum \underbrace{\left(\int_n^{n+1} |f'(t)|\ \mathrm{d}t\right)}_{=x_n} \text{ converge,}$$

puisque :

$$S_n(x) = \int_0^{n+1} |f'(t)|\ \mathrm{d}t \text{ par relation de Chasles.}$$

Remarque importante 1.16

On a donc, lorsque la proposition s'applique, c'est-à-dire quand

$$x \mapsto \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ est majorée,}$$

le résultat suivant :

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \iff \left[\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}\right]$$

On a vu qu'une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est que [a] :

$$x \mapsto \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ soit majorée.}$$

---

a. C'est le même type de raisonnement que celui utilisé pour montrer que dans $\mathbb{K}$:

$$\left[\sum |u_n| \text{ converge}\right] \Rightarrow \left[\sum u_n \text{ converge.}\right]$$

On écrit $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ lorsque f est réelle et on utilise les parties réelles et les parties imaginaires lorsque f est complexe, où :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f^+(x) = \max\left(f(x), 0\right) \text{ et } f^-(x) = \max\left(-f(x), 0\right).$$

Exemple 1.12 – Comparaison quantitative avec une intégrale

Soit $\alpha > 0$, la série définie par :

$$u_n = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^\alpha} \text{ converge si, et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Démonstration

On pose :

$$f(t) = \frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}.$$

On a donc (voir le code **Wxmaxima** 1.6, page ci-contre) :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ \left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{x^{\alpha+1/2}} + \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}.$$

▶ Pour $\alpha > 1/2$, on a :

$$x \mapsto \int_1^x \left|f'(t)\right| \,\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [1, +\infty[.$$

D'après le proposition précédente, $\sum u_n$ est de même nature que la série :

$$\sum \left(\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right),$$

et, comme :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

il nous reste à étudier le comportement de cette intégrale. Mais :

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \underset{x=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2\,\sin(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\cos(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\right]_{x=1}^{x=\sqrt{n+1}} - \int_1^{\sqrt{n+1}} (2\,\alpha-1) \times \frac{\cos(x)}{x^{2\,\alpha}}\,\mathrm{d}x.$$

Il est facile de conclure puisque $\alpha > 1/2$.

▶ Lorsque $\alpha \in]0, 1/2]$, on écrit (formule de Taylor avec reste intégral) :

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \underbrace{\frac{f'(n)}{2}}_{=v_n} + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} \times f''(t)\,\mathrm{d}t}_{=w_n}.$$

On vérifie successivement que :

- $x \mapsto \displaystyle\int_1^x |f''(t)|\,\mathrm{d}t$ est majorée ;
- on en déduit facilement que $\sum w_n$ est absolument convergente ;
- $\sum v_n$ converge, par application de la proposition, puisque :

$$\left(\int_1^{n+1} f'(t)\,\mathrm{d}t \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une limite,}$$

- on conclut en montrant que :

$$\left(\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas,}$$

car

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_1^{\sqrt{n+1}} \frac{2\,\sin(x)}{x^{2\,\alpha-1}}\,\mathrm{d}x}_{=g\left(\sqrt{n+1}\right)} = g(\pi) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(g((k+1)\times\pi) - g(k\times\pi)\right) + g\left(\sqrt{n+1}\right) - g(p\times\pi),$$

où

$$p = \left\lfloor \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \right\rfloor.$$

On peut alors conclure facilement.

Session `Wxmaxima` 1.6 – Comparaison quantitative avec une intégrale

(%i1) `f(x) := sin(sqrt(x))/x^alpha;`

(%o1) $\mathrm{f}(x) := \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x^{\alpha}}$

(%i2) `diff(f(x),x);`

(%o2) $\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)\,x^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{2} - \alpha\sin\left(\sqrt{x}\right)\,x^{-\alpha-1}$

Exemple 1.13 – Comparaison qualitative avec une intégrale

La série définie par ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^{\alpha}} \text{ converge } \iff \alpha > 0.$$

Démonstration

- Pour $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.
- Pour $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement.

▶ Pour $\alpha \in]0,1]$, on procède par analogie. Pour l'intégrale, on fait une intégration par parties. On écrit donc, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) \times \frac{1}{k^\alpha},$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k).$$

Proposition 1.9 – Changement de l'ordre des termes

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente *réelle, et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors :*

$$\sum u_{\sigma(n)} \text{ converge, et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple 1.14

La série définie par :

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)^\alpha} + \frac{1}{(3n-1)^\alpha} + \frac{1}{(3n)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}, \text{ où } n \geq 1 \text{ et } \alpha > 0,$$

converge si, et seulement si, $\alpha \geq 1$, sa somme est nulle pour $\alpha > 1$ et non nulle pour $\alpha = 1$.

Exemple 1.15

Soit $\sum u_n$ à valeurs réelles, *semi-convergente*, alors :

$$\forall \lambda \in [-\infty, +\infty],\ \exists \sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}),\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \lambda.$$

Théorème 1.2 – Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente dans le corps $\mathbb{K}$ et $\sum v_n$ une série absolument convergente dans $\mathbb{K}$, alors la série $\sum w_n$, où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \times v_{n-k},$$

est absolument convergente, et

$$S(w) = S(u) \times S(w).$$

Remarque 1.17

On peut généraliser à la situation où l'une des séries est semi-convergente, l'autre absolument convergente. En ce cas, la série-produit est encore convergente. En revanche, lorsque les deux séries sont semi-convergentes, on ne peut rien dire.

Exercice(s) 1.4

1.4.1 Étudier la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \tag{1.8}$$

$$u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right) \tag{1.9}$$

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n - \sqrt{n} \times \sin(n)} \tag{1.10}$$

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}. \tag{1.11}$$

1.4.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels tendant vers 0. On suppose qu'il existe $r \in]0,1[$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r.$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

1.4.3 Montrer que

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \text{ est irrationnel.}$$

1.4.4 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\alpha \in]0, \pi/2[$. On suppose que chaque z_n a un argument dans $[-\alpha, \alpha]$ et que $\sum z_n$ converge. Montrer que $\sum |z_n|$ converge.

1.4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} S_k \ .$$

On suppose que $u_n = O(1/n)$ et que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge.

1.4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels > 0.

(a) On suppose :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow a \qquad \text{avec} \quad a \in [0, 1[.$$

Montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \ \sim \ \frac{(-1)^n u_n}{1+a} \ .$$

(b) On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow a \qquad \text{avec} \quad a > 1.$$

Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \ \sim \ \frac{(-1)^n u_n}{1+a} \ .$$

(c) Donner un énoncé analogue si $u_{n+1}/u_n \to +\infty$.

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0 en décroissant, telle que $(u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante, que $u_{n+1} \underset{\infty}{\sim} u_n$. Montrer :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \ \sim \ \frac{(-1)^n u_n}{2} \ .$$

1.4 Applications des séries aux suites récurrentes

Remarque 1.18

On peut remarquer qu'il y a une certaine *analogie* entre les séries et les fonctions, ainsi :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (S_n(u))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ressemble à } f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

c'est la primitivation... De même,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n - u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ressemble à } f \mapsto f',$$

c'est la dérivation... (On peut même aller plus loin et apparier n avec x, u_n avec $f(x)$, etc.) Cette analogie n'est que très rarement quantitative, mais l'étude du problème continu analogue peut donner de bonnes idées d'approche du problème discret.

Exemple 1.16

Soit la suite récurrente définie par (voir le comportement de la suite sur la figure 1.3, page 58.

$$u_0 \in]0,1[,\ u_{n+1} = \sin u_n.$$

Cette suite converge vers 0, et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Démonstration de l'exemple 1.16, de la présente page

On montre que (démonstration laissé comme exercice) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a alors :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\left(u_n^3\right),$$

que l'on peut lire comme :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{6}.$$

Le problème continu analogue est :

$$\frac{f'(x)}{f(x)^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{6}.$$

On voit donc que la *bonne* fonction pour étudier cette propriété est la fonction $1/f^2$, et qu'en plus, il faut la dériver ! Posons donc :

$$v_n = \frac{1}{u_n^2} \text{ et étudions la série dérivée } w_{n+1} = v_{n+1} - v_n.$$

On a alors :

$$w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_n^2} \times \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\left(u_n^2\right)\right)^{-2} - 1\right).$$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient :

$$w_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3} \text{ donc } S_{n-1}(w) = v_n = \frac{1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

On obtient alors, puisque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Exemple 1.17

Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 1.4, page 59) :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)/2.$$

Démonstration de l'exemple 1.17, de la présente page

Cette suite converge vers 0, la série est évidemment convergente d'après le critère de d'Alembert, et $R_n \sim u_n$, de manière immédiate.
Mais quel est l'équivalent de u_n ?
On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3).$$

La première idée est de résoudre le système sans second membre, et de faire une variation de la constante, soit de chercher une solution sous la forme :

$$u_n = \frac{v_n}{2^n}, \text{ avec } v_{n+1} = v_n - \frac{v_n^3}{3 \times 4^n} + o\left(\frac{v_n^3}{4^n}\right).$$

On peut continuer le calcul par analogie...

Exemple 1.18

Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 1.5, page 60) :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n).$$

Démonstration de l'exemple 1.18, de la présente page

Cette suite converge vers 0, la série est évidemment convergente d'après le critère de d'Alembert, et $R_n \sim u_{n+1}$ de manière immédiate.
On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

L'étude de la partie homogène nous incite à poser :

$$u_n = 2v_n^{2^n}, \text{ où } \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

La suite se continue par analogie...

Exercice(s) 1.5

1.5.1 Étude de la suite définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{1 + u_n^2}$$

et de la série $\sum(u_n - 1)$.

1.5.2 Étudier la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + u_n^{-5}. \end{cases}$$

Équivalent de u_n ? Terme suivant du développement asymptotique.

1.5.3 Soit la suite récurrente définie par (voir la figure 1.6, page 61) :

$$u_0 \in]0,1[,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \times \ln(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer qu'elle converge vers 0.

(b) Donner un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

1.5.4 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, nature de la série de terme général $u_n/S_n(u)^\alpha$?

1.5.5 Soit $\alpha > 0$, $u_0 > 0$ et la suite récurrente définie par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha \times u_n}.$$

(a) Si $\alpha \leq 1$, montrer que la suite diverge vers l'infini et donner un équivalent de u_n.

(b) Si $\alpha > 1$, montrer que la suite converge (vers une limite notée l) et donner un équivalent de $u_n - l$.

1.5.6 Soit $a > 0$ et $\alpha > 0$ deux réels, étudier la suite définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{S_n(u)^\alpha}.$$

1.5.7 Soit la suite définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}.$$

Déterminer un développement asymptotique de u_n.

1.5.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes ≥ 0, qui converge vers 0 et telle que $(S_n(a) - n \times a_n)$ reste bornée. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

1.5 Familles sommables

Les familles sommables sont une généralisation des séries lorsque l'ensemble des indices n'est pas nécessairement ordonné, par exemple pour des suites doubles $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, ou lorsque l'ordre de sommation n'intervient pas, comme pour les séries absolument convergentes.
Dans cette partie, on note I un ensemble dénombrable.

1.5.1 Généralités

Définition 1.4 – Famille sommable de nombres positifs

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes positifs est *sommable* lorsque :

$$\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J\subset I\right\} \text{ est borné.}$$

On définit alors sa *somme* : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J\subset I\right\}$.

Exemple 1.19

Soit $p\in[0,1[$ alors $\left(p^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et sa somme vaut :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^{|n|} = \frac{1+p}{1-p}.$$

Remarque 1.19

1. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve la notion de série à termes positifs convergente :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum u_i \text{ est convergente.}$$

2. Lorsque la famille à termes positifs $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, il est cohérent de poser :

$$\sum_{i\in I} u_i = +\infty.$$

Proposition 1.10 – Comparaison de famille sommable à termes positifs

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels avec :

$$\forall i \in I,\, 0 \leq u_i \leq v_i.$$

1. *Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et :*

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

2. *Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.*

Démonstration

1. Puisque la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $J \subset I$ fini :

$$\left\{\sum_{i\in J} v_i \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\} \subset [0, M].$$

Soit J fini et $J \subset I$ alors $0 \leq \sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in J} v_i$ et :

$$\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\} \subset [0, M],$$

donc la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. De plus :

$$\text{pour tout } J \text{ fini et } J \subset I, \quad \sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in J} v_i \leq \sup\left\{\sum_{i\in J} v_i \ \middle|\ J \text{ fini et } J \subset I\right\} = \sum_{i\in I} v_i,$$

et, en prenant la borne supérieure :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \ \middle|\ J \text{ fini et } J \subset I\right\} \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

2. Il s'agit juste de la contraposée du premier point.

Exemple 1.20

Déterminer la nature de la famille $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$.

Remarque 1.20

La proposition 1.10, page précédente permet d'étendre la définition d'une famille sommable à une famille à termes quelconques.

Définition 1.5 – Famille sommable

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes quelconques est *sommable* lorsque la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ à termes positifs est *sommable*. De plus, on définit sa somme par :

1. si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille à termes réels :
$$\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-;$$
2. si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille à termes complexes :
$$\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

Remarque importante 1.21

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ à termes réels est sommable alors

$$0 \leq u_i^+ = \max(u_i, 0) \leq |u_i| \text{ et } 0 \leq u_i^- = \max(-u_i, 0) \leq |u_i|,$$

donc, par la proposition 1.10, page 50, les familles à termes positifs $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Les sommes qui apparaissent dans la définition 1.5, page précédente sont donc bien définies.

Remarque 1.22

Lorsque $I = \mathbb{N}$, on retrouve la notion de série absolument convergente :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable } \iff \sum u_i \text{ est absolument convergente.}$$

Proposition 1.11 – Combinaison linéaire de familles sommables

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\Big(u_i + \lambda.v_i\Big)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I}\Big(u_i + \lambda.v_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda.\sum_{i\in I} v_i.$$

Démonstration

A faire.

Remarque importante 1.23

L'ensemble des familles sommables indicées par I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et :

$$(u_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} u_i \text{ est une forme linéaire linéaire.}$$

1.5.2 Sommation par paquets

Proposition 1.12 – Critère de sommabilité

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une partition de* I*, alors :*

$$(u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (|u_i|)_{i\in I_n} \text{ est sommable,} \\ \displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ est convergente.} \end{cases}$$

Remarque 1.24

1. Si I_n est vide alors, par convention, $\sum_{i\in I_n} u_i = 0$.
2. L'étude de la sommabilité se ramène souvent à l'étude de convergence de séries.
3. Attention : il ne faut jamais oublier les valeurs absolues lorsqu'on applique ce critère.

Démonstration de la proposition 1.12, de la présente page

▷ *Montrons le sens indirect.*
Soit J fini, non vide et $J\subset I$, on pose, pour $n\in\mathbb{N}$: $J_n = J\bigcap I_n$. Puisque J est fini et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, l'ensemble $\{n\in\mathbb{N} \mid J_n\neq\emptyset\}$ est fini et non vide donc admet un maximum noté N. On a donc :

$$\sum_{i\in J}|u_i| = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n}|u_i|\right) \leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) = M,$$

et, d'après les hypothèses, $M\in\mathbb{R}$. Puisque $\left\{\sum_{i\in J}|u_i| \mid J \text{ fini et } J\subset I\right\}$ est borné, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
▷ *Montrons le sens direct par contraposée.*

— Supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ n'est pas sommable alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

— Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable mais que $\displaystyle\sum_n\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right)$ est divergente. Soit $M\in\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) \geq 2M.$$

Puisque $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, il existe J_n fini et $J_n \subset I_n$ tel que :

$$\sum_{i\in J_n} |u_i| \geq \sum_{i\in I_n} |u_i| - \frac{M}{N+1}.$$

Posons $J = \bigcup_{n\in[\![0,N]\!]} J_n$ alors J est fini, $J \subset I$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J} |u_i| &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n} |u_i|\right) \text{ car } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une partition de } I,\\ &\geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i| - \frac{M}{N+1}\right) \geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) - M \geq 2M - M = M.\end{aligned}$$

Ainsi, $\left\{\sum_{i\in J} |u_i| \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\}$ n'est pas borné et $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Exemple 1.21

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Proposition 1.13 – Sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I, alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(|u_i|)_{i\in I_n}$ *est sommable,*
2. $\displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ *est convergente,*
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$

Démonstration

Les points 1. et 2. sont le sens direct de la proposition 1.12, page 53.
3. ▷ En utilisant les décompositions en parties positives et négatives et en parties réelles et imaginaires, il suffit de montrer le troisième point lorsque $(u_i)_{i\in I}$ est une famille à termes positifs.
▷ On suppose donc $u_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in I$ et soit J fini, non vide et $J \subset I$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $J_n = J \bigcap I_n$. Puisque J est fini et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset\}$ est fini et non vide donc admet un maximum noté N. On a donc :

$$\sum_{i\in J} u_i = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right) \leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable, il existe J_n fini et $J_n \subset I_n$ tel que :

$$\sum_{i\in I_n} u_i - \frac{\varepsilon}{2(N+1)} \leq \sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I_n} u_i.$$

Posons $J = \bigcup_{n\in[\![0,N]\!]} J_n$ alors J est fini, $J \subset I$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in J} u_i &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n} u_i\right) \text{ car } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une partition de } I,\\
&\geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i - \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right) \geq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) - \frac{\varepsilon}{2}\\
&\geq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par caractérisation de la borne supérieure :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \text{ fini et } J \subset I\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Exemple 1.22

1. Soit $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq k\}$, montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{k!}\right)_{(n,k)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.
2. On définit, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:
$$a_{n,p} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2 - p^2} & \text{si } n \neq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Etudier la sommabilité de la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$.

Remarque importante 1.25

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes alors :

1. si pour tout $i \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_j |u_{i,j}|$ convergent et si la série $\sum_i \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|$ converge alors la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (proposition 1.12, page 53).
2. Dans ce cas, on a (proposition 1.13, page 54) :
$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n}^{+\infty} u_{i,j} = \dots$$

Remarque 1.26

La proposition 1.13, page 54 permet de démontrer la proposition 1.9, page 42 sur le changement d'ordre des termes d'une série absolument convergente et le théorème 1.2, page 43 sur la convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Exercice(s) 1.6

1.6.1 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $u_{p,q} = e^{-ap-bq}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

1.6.2 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{a^p\, b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

1.6.3 Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, montrer que, après avoir justifier l'existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1 - z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}.$$

1.6.4 Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une énumération des rationnelles, $I_n = \left]r_n - \dfrac{1}{n^2}, r_n - \dfrac{1}{n^2}\right[$ et $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. Montrer que $I \neq \mathbb{R}$.

1.6.5 La fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_s (-1)^s \times \Big(\zeta(s) - 1\Big)$.

Figure 1.3 – $u_{n+1} = \sin(u_n)$

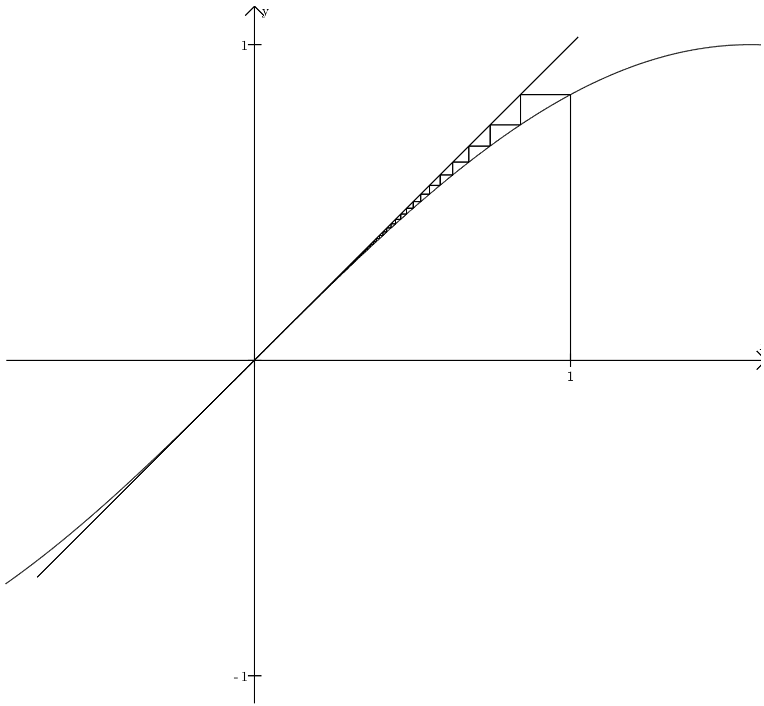


Figure 1.4 – $u_{n+1} = \arctan(u_n)/2$

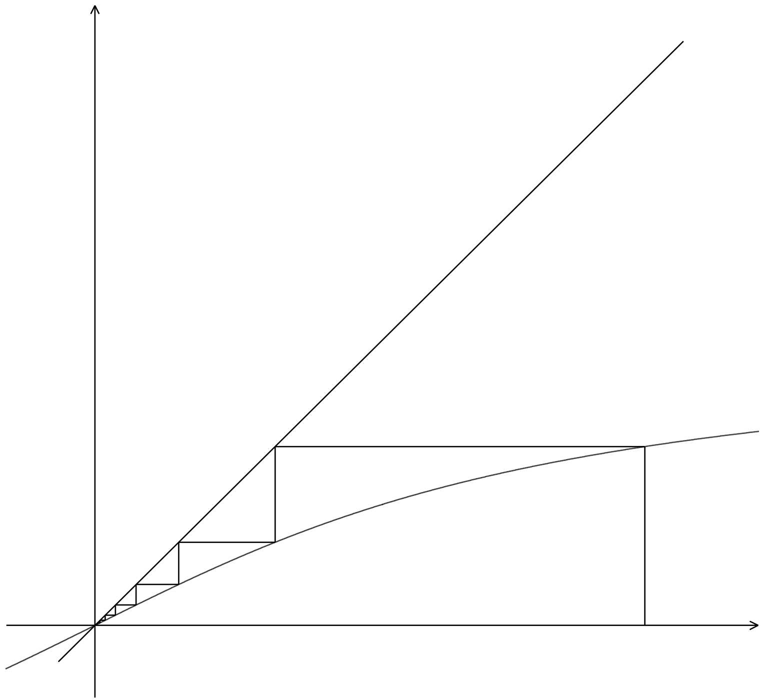


Figure 1.5 – $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$

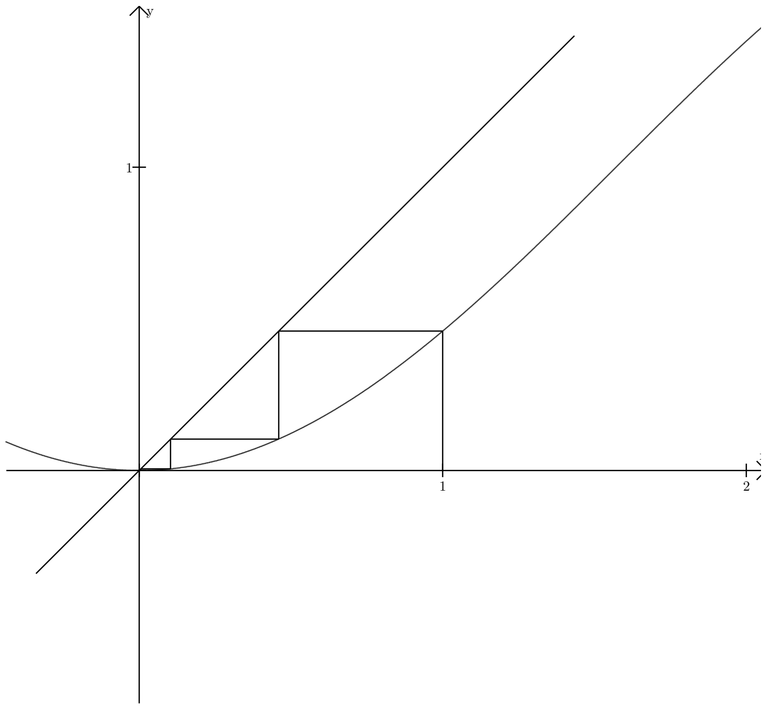
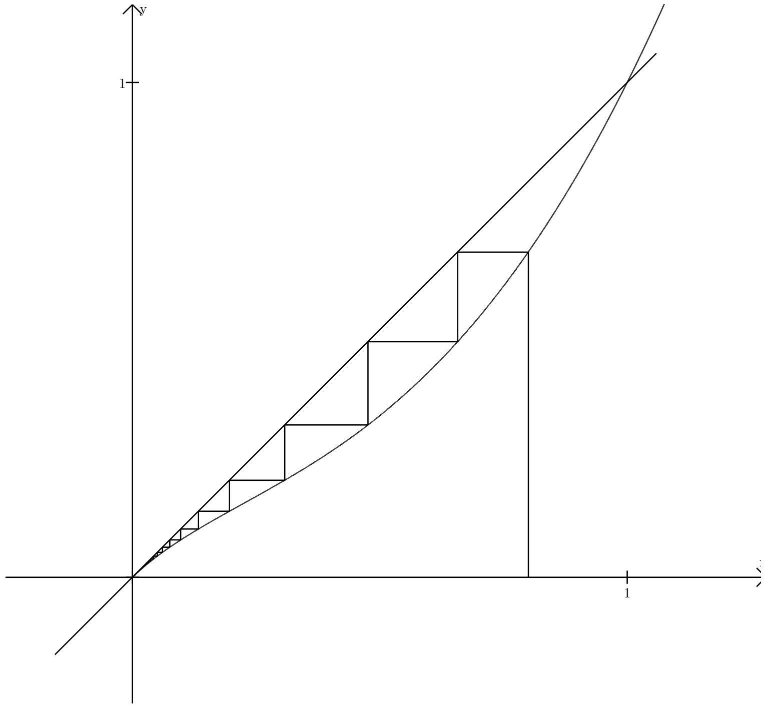


Figure 1.6 – Exercice 1.5.3, page 48



Chapitre 2

Probabilités et modélisation

2.1 Introduction

Quand on veut mettre en équations un phénomène observé, on peut procéder de plusieurs manières :

1. On connaît les relations entre les *causes* et les *effets* (exemple de la mécanique classique). On obtient un modèle parfois *prédictif* qui décrit le phénomène. On dit que l'on a un *modèle déterministe*. Ce modèle peut ne pas être prédictif (incapacité à étudier les équations) ou être trop sensible aux approximations, ce qui en rend l'évaluation numérique impossible (*système chaotique ou chaos*).
2. On ne (re)connaît pas les relations entre les causes et les effets : on a l'impression d'avoir des effets du *hasard*. On produit souvent en ce cas un *modèle probabiliste* qui va essayer de décrire ce hasard.

Remarque 2.1

L'opposition apparente entre modèle déterministe et modèle probabiliste se situe au niveau des modèles. C'est notre approche mathématique qui est différente. Qu'en est-il des phénomènes observés ? Sont-ils déterministes ou probabilistes ? Ce débat appartient plus à la philosophie qu'aux mathématiques, mais il est toutefois très intéressant.

Exemple 2.1 – Modèle déterministe

Un ressort avec un coefficient de raideur k a son déplacement décrit par une équation différentielle :

$$x''(t) + k \times x(t) = 0.$$

C'est un modèle déterministe : on a pu écrire cette équation en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

Exemple 2.2 – Modèle probabiliste

Je jette manuellement un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 (et que je suppose bien équilibré), je pense que j'ai une chance sur 6 d'obtenir le nombre 3. Je ne suis (en ce qui me concerne) pas capable d'écrire les équations permettant en fonction des données initiales de prévoir le résultat et je ne suis pas capable d'être suffisamment précis dans mon geste pour obtenir le résultat que je veux. Je choisis donc un modèle qui décrit le résultat (ou plutôt la *chance* d'obtenir le résultat 3). C'est un modèle probabiliste.

Remarque 2.2

Pour l'exemple du dé, la question qui pourrait se poser est : ne pourrait-on pas imaginer la possibilité d'avoir un modèle déterministe (équations du mouvement, précision suffisante du lancer), pour prévoir le résultat ? Je ne sais pas. Mais la réponse du modélisateur est : a-t-on besoin d'une telle précision ? Ne peut-on pas se satisfaire de l'information probabiliste pour jouer aux dés ?

Remarque 2.3

Certains phénomènes déterministes peuvent avoir une apparence probabiliste. Ainsi, si l'on regarde les décimales de π (on connaît des algorithmes exacts permettant de calculer ces décimales), elles *semblent* se répartir entre 0 et 9 de manière égale... Voir le code `Wxmaxima` 2.1, de la présente page.
L'objet de la modélisation probabiliste est de donner un sens précis à cette notion de *chance* d'obtenir un résultat.

Session `Wxmaxima` 2.1 – Décimales de π

Répartition des décimales de π. On suppose que `Wxmaxima` connaît suffisamment de décimales (ce qui n'est pas validé).

(%i1) `A : makelist(0,k,1,10);`

(%o1) $[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]$

(%i2)
```
go(n) := block([x,y,i],
for i:1 thru 10 do A[i] : 0,
fpprec : n,
x : bfloat(%pi),
y : floor(x),
for i:1 thru n do (x : 10*(x-y), y : floor(x),A[y+1] : A[y+1]+1),
ev(A/n,numer))$
```

(%i3) `go(10);`

(%o3) $[0,0.2,0.1,0.1,0.1,0.3,0.1,0,0,0.1]$

(%i4) `go(100);`

(%o4) $[0.09,0.08,0.12,0.11,0.1,0.08,0.09,0.07,0.13,0.13]$

(%i5) `go(1000);`

(%o5) $[0.093,0.116,0.103,0.102,0.093,0.097,0.094,0.095,0.101,0.106]$

(%i6) `go(10000);`

(%o6) $[0.0968,0.1026,0.1021,0.0974,0.1012,0.1046,0.1021,0.097,0.0948,0.1014]$

À titre de comparaison, regardons ce que donnerait un tirage « au hasard ».

(%i7)
```
go(n) := block([y,i],
for i:1 thru 10 do A[i] : 0,
fpprec : n,
for i:1 thru n do (y : random(10), A[1+y] : A[1+y]+1),
ev(A/n,numer))$
```

(%i8) `go(10);`

(%o8) $[0,0.1,0.2,0.1,0.2,0.2,0,0,0.1,0.1]$

```
(%i9)  go(100);
```

(%o9) $[0.11, 0.08, 0.1, 0.09, 0.07, 0.08, 0.16, 0.07, 0.09, 0.15]$

```
(%i10) go(1000);
```

(%o10) $[0.095, 0.088, 0.098, 0.101, 0.106, 0.106, 0.101, 0.087, 0.102, 0.116]$

```
(%i11) go(10000);
```

(%o11) $[0.1017, 0.0993, 0.1055, 0.0975, 0.1014, 0.1047, 0.1019, 0.0947, 0.0972, 0.0961]$

Exercice(s) 2.1

2.1.1 Pour les phénomènes suivants, quel type de modèle choisiriez-vous ? et pourquoi ?

(a) le tir au fusil ;

(b) la météorologie ;

(c) l'erreur d'approximation d'un ordinateur ;

(d) l'émission d'une particule par radioactivité ;

(e) le comportement d'un gaz.

2.2 Dénombrement

2.2.1 Les cas classiques

Proposition 2.1

Soit E un ensemble fini et $E_1, \dots, E_n$ une partition de E ; ces ensembles vérifient donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad E_i \neq \emptyset, \tag{2.1}$$

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \left[i \neq j \ \Rightarrow \ E_i \cap E_j = \emptyset \right], \tag{2.2}$$

$$\textit{et} \quad E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i. \tag{2.3}$$

Alors :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i).$$

Démonstration

Évident.

Proposition 2.2

Soit E un ensemble de cardinal p, alors le cardinal de E^n ($n \in \mathbb{N}^*$) est p^n.

Démonstration

On peut utiliser le cardinal de $E \times F$ (que l'on obtient à l'aide d'une partition), où E et F sont de cardinaux finis, puis procéder par récurrence sur n.

Propriété 2.1

C'est aussi le cardinal de l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$. En effet, pour construire une telle application f, il faut choisir $f(1), \dots, f(n)$, donc on a une bijection entre E^n et $\mathcal{F}([\![1, n]\!], [\![1, p]\!])$.

Propriété 2.2

D'un point de vue combinatoire, cela revient à choisir successivement $f(1)$ (p choix), puis $f(2)$ (p choix), puis... $f(n)$ (p choix). Ce type de construction un par un est très fréquent.

Parties

Proposition 2.3

Soit E un ensemble de cardinal p, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^p.

Démonstration

On peut procéder par récurrence sur p.

Définition 2.1 – Combinaison

Soit E un ensemble de cardinal p, soit $k \in [\![0, p]\!]$, on appelle *combinaison de k éléments parmi p* le nombre de parties de E de cardinal k. On le note :

$$\binom{p}{k},$$

et on lit souvent « k parmi p ».

Propriété 2.3

1. On a immédiatement :
$$\binom{p}{0} = 1 \text{ et } \binom{p}{p} = 1.$$
2. *Formule du triangle de Pascal* :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \binom{p}{k} = \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1}.$$

3. Et :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 2^p.$$

4. On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,p]\!]\,,\ \binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \times (p-k)!},$$

où $p!$ est défini par :

$$p! = \prod_{k=1}^{p} k,\ \text{ si } p \neq 0 \text{ et } 1 \text{ sinon.}$$

Propriété 2.4

C'est aussi le cardinal de l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. (Il suffit de choisir $\{f(1),\dots,f(k)\}$ qui est une partie à k éléments parmi p.).

Remarque 2.4

Pour calculer $\binom{p}{k}$, il est stupide d'utiliser la formule avec des factorielles. Par exemple, il est évident que $\binom{10000}{9999} = 10000$, il serait absurde de calculer 10000!. Comment le calculer (en supposant que l'outil informatique ne le connaît pas) ? On utilise, par exemple, la formule de récurrence :

$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k} \times \binom{p-1}{k-1},$$

après avoir diminué k en remarquant que :

$$\binom{p}{k} = \binom{p}{p-k}.$$

On obtient le code `Python` 2.1, page suivante.

Session Python 2.1 – Calcul de $\binom{p}{k}$

```python
def Binom(p,k):
    k=min(k,p-k)
    if (p<0 or k<0 or k>p):
        res=0
    elif (p==0 or k==0 or k==p):
        res=1
    else:
        res=Binom(p-1,k-1)*p/k
    return res
```

Remarque 2.5

Il arrive aussi que l'on calcule une ligne de combinaisons (dans la formule du binôme de Newton, par exemple). En ce cas, on utilisera la formule de récurrence :

$$\binom{p}{k} = \frac{p-k+1}{k} \times \binom{p}{k-1}.$$

Ordre

Rappel 2.1

On a déjà vu l'ensemble des *permutations* d'un ensemble E, c'est :

$$\mathfrak{S}(E) \overset{\text{Not}}{=} \{f \ : \ E \to E, \ \text{bijective}\}.$$

Et, plus particulièrement, lorsque $E = [\![1, n]\!]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\mathfrak{S}_n \overset{\text{Not}}{=} \mathfrak{S}\left([\![1, n]\!]\right).$$

Propriété 2.5

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\operatorname{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!.$$

Remarque 2.6

Si E est une ensemble de cardinal n, $\mathfrak{S}(E)$ est en bijection avec $\mathfrak{S}_n$. Choisir une telle bijection revient à donner un *ordre* sur E. Il y a donc autant d'ordres sur E qu'il y a d'éléments de $\mathfrak{S}_n$, donc $n!$ ordres possibles.

Propriété 2.6

Le nombre d'applications injectives de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ est donc égal à :

$$k! \times \binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!}.$$

On appelle parfois cette valeur *nombre d'arrangements de k éléments parmi n*.

Remarque 2.7

Il faut donc bien différencier les n-uplets des parties. Ainsi a-t-on :

$$(1,2) \neq (2,1) \text{ et } \{1,2\} = \{2,1\}.$$

Pour passer des parties à k éléments aux *k-uplets d'éléments distincts*, il faut tenir compte de tous les ordres possibles ($k!$).

Répétitions

En dehors de l'ordre, une autre considération intervient parfois : la notion de *tirage avec ou sans remises*. Il s'agit de préciser si l'on peut ou non tirer plusieurs fois le même individu. On obtient donc deux notions :

1. les *combinaisons avec répétition* : on tire k individus parmi p *avec remise*, combien de situations obtient-on ?
2. les *arrangements avec répétition* : on tire k individus parmi p *avec remise* et en tenant compte de l'ordre du tirage,

combien de situations obtient-on ?

Exemple 2.3

1. Si on lance 3 dés numérotés de 1 à 6 en même temps, les dés ne sont pas ordonnés et peuvent donner des résultats identiques : on a donc combinaisons avec répétitions.
2. Si on lance 3 dés numérotés de 1 à 6 consécutivement, les dés sont ordonnés et peuvent donner des résultats identiques : on a donc arrangements avec répétitions.

Propriété 2.7 – Combinaisons avec répétitions

Combinaisons avec répétitions de k éléments parmi p : cela revient à chercher le nombre de fonctions croissantes de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. Ce dénombrement a déjà été effectué lors du calcul de la dimension de l'ensemble des formes p-linéaires symétriques d'un espace vectoriel de dimension n ; il suffit de transformer une application croissante de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ en une application strictement croissante par :

$$f \mapsto \begin{cases} [\![1,k]\!] \to [\![1,p+k-1]\!] \\ i \mapsto f(i)+i-1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\binom{p+k-1}{k} \text{ combinaisons avec répétitions de } k \text{ éléments parmi } n.$$

Propriété 2.8 – Arrangements avec répétitions

Arrangements avec répétitions de k éléments parmi p : ce calcul a déjà été fait, c'est le calcul du nombre de k-uplets dans un ensemble de cardinal p. On a donc p^k situations différentes.

Remarque 2.8

Ce qui est plus intéressant dans ce cas est le nombre d'ordres permettant d'obtenir une situation donnée. Par exemple : combien y a-t-il de 10-uplets différents à construire avec les nombres $1,1,1,1,2,2,2,3,3,3$? Si les nombres étaient tous distincts, on obtiendrait immédiatement $10!$, mais il y a ici des répétitions. L'idée du calcul est simple :

1. On distingue les éléments en écrivant notre succession de nombres sous la forme :

$$1_1, 1_2, 1_3, 1_4, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3.$$

   Il y alors 10! manières de les ordonner.

2. Mais les 1 sont au nombre de 4 et indiscernables (on ne peut pas les différencier, les distinguer, les discerner), on peut donc les permuter sans changer le résultat ; il y a 4! manières de les ordonner. De même, il y a 3! manières d'ordonner les 2 et les 3. On a donc en tout :

$$\frac{10!}{4! \times 3! \times 3!} \text{ ordres possibles.}$$

Proposition 2.4 – Formule du multinôme

Soit A un ensemble muni de deux opérations internes $+$ et $\times$ telles que $+$ est associative et commutative et $\times$ est associative, ayant un élément neutre[a] 1_A et distributive par rapport à $+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_1, \ldots, a_p) \in A^p$ des éléments de A qui commutent 2 à 2, alors :

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_p) \in [\![0, n]\!]^p \\ n_1 + \cdots + n_p = n}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_p!} \times \prod_{k=1}^{p} a_k^{n_k}.$$

Le cas où $p = 2$ est la formule du binôme de Newton :

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a_1^k \times a_2^{n-k}.$$

---

a. On peut alors définir, pour $a \in A$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$a^p \text{ par } \begin{cases} 1_A & \text{si } p = 0 \\ a \times a^{p-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration

On peut procéder de trois manières :

1. Par récurrence sur n.
2. Par récurrence sur p.
3. Par dénombrement...

Remarque 2.9

Cette formule peut fonctionner dans des ensembles où $\times$ n'est pas commutative. Il y a seulement besoin d'avoir la commutation des individus. Ainsi, pour les matrices :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}^3 = I_2 + 3.\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^3,$$

mais

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}^3 \neq \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^3 + 3.\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}^3.$$

Voir les calculs effectués en `Wxmaxima` 2.2, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 2.2 – Illustration de la formule du multinôme

```
(%i1) A : matrix([1,2],[0,2]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$

On peut bien sûr calculer les puissances de A directement.

```
(%i2) A^^3;
```

(%o2) $\begin{bmatrix}1 & 14\\0 & 8\end{bmatrix}$

⚠ Par défaut, la puissance simple ne donne pas le résultat attendu !

```
(%i3) A^3;
```

$$(\%o3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Quand les matrices commutent, il n'y a pas de problème.

```
(%i4) B : ident(2)$
      C : A-B;
```

$$(\%o5) \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le produit des matrices se note avec un ., la multiplication fait aussi une opération bizarre !

```
(%i6) A.A;
```

$$(\%o6) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) A*A;
```

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) A^^2;
```

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i9) A^2;
```

$$(\%o9) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Revenons à la formule du binôme.

```
(%i10) B.B.B+3*B.B.C+3*B.C.C+C.C.C;
```

$$(\%o10) \quad \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Quand les matrices ne commutent pas, cela ne marche plus !

```
(%i11) B : matrix([1,0],[0,2]);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i12) C : A-B;
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i13) B.B.B+3*B.B.C+3*B.C.C+C.C.C;
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

2.2.2 Les méthodes usuelles

Pour dénombrer, plusieurs méthodes sont possibles. On a vu :

- discernable/indiscernable ;
- récurrence ;
- ordre/sans ordre ;
- répétition/sans répétition...

Toutes ces différentes méthodes peuvent être employées dans un cadre plus général ; soit, on construit le type d'objet à dénombrer à partir de ses constituants (« *bottom-up* ») ou on décompose le type d'objet à dénombrer en sous-parties (« *top-down* »).

« ***Bottom-up*** »

Exemple 2.4

Soit un jeu de 52 cartes (4 couleurs : trèfle ♣, carreau ♢, cœur ♡ et pique ♠, 13 cartes par couleur As, Roi, Dame, Valet, Dix, Neuf, Huit, Sept, Six, Cinq, Quatre, Trois et Deux). On tire 3 cartes, combien de fois sur tous les tirages possibles, a-t-on 3 cartes de même couleur ?

Démonstration de l'exemple 2.4, page ci-contre (version « bottom-up »)

Remarquons que

1. l'ordre des cartes n'intervient pas ;
2. il n'y a pas de répétition.

On tire une première carte (52 possibilités), puis une deuxième carte (de même couleur : 12 possibilités) et enfin, une troisième (11 possibilités), mais il y a $6 = 3!$ façons d'ordonner ces 3 cartes. Finalement, il y a :

$$\frac{52 \times 12 \times 11}{6} = 1144 \text{ possibilités.}$$

« *Top-down* »

Démonstration de l'exemple 2.4, page précédente (version « top-down »)

Reprenons la situation précédente. Mais procédons autrement. Pour obtenir 3 cartes de la même couleur, il nous faut d'abord choisir la couleur (4 possibilités), puis, dans cette couleur, choisir les 3 cartes ($\binom{13}{3}$ possibilités), on a donc finalement :

$$4 \times \binom{13}{3} = 1144 \text{ possibilités.}$$

Exercice(s) 2.2

2.2.1 Redémontrer, par un raisonnement de dénombrement bien détaillé, la formule du multinôme.

2.2.2 Soit E un ensemble de cardinal fini n. Calculer :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X) \tag{2.4}$$

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cup Y) \tag{2.5}$$

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cap Y)\,. \tag{2.6}$$

2.2.3 Calculer

$$\operatorname{Card}\left(\left\{(k_1, \dots, k_p) \in [\![0, n]\!]^p,\ k_1 + \cdots + k_p = n\right\}\right),$$

en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $n \in \mathbb{N}$.

2.2.4 Si vous jouez au poker (on distribue 5 cartes d'un jeu de 52 cartes), avez-vous plus de chances d'avoir un brelan (3 cartes de même niveau et deux autres cartes de niveaux distincts, par exemple, un brelan de Dames peut être : $(D\clubsuit, D\spadesuit, D\heartsuit, 8\spadesuit, 5\heartsuit)$) ou une couleur (5 cartes de la même couleur) ?

2.2.5 Soit $0 < n$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times \frac{1}{2\,k+1} \times \binom{n}{k}, \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k}^2. \tag{2.9}$$

2.2.6 Calculer le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux nombres consécutifs.

2.2.7 Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F

(a) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

(b) On suppose $p \leq n$ et on considère a un élément de E.

En observant qu'une surjection de E dans F réalise ou ne réalise pas une surjection de $E \setminus \{a\}$ dans F, montrer que

$$S_n^p = p \times \left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^{p}\right)$$

(c) En déduire

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k} \times \binom{p}{k} \times k^n.$$

2.2.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \subset E = [\![1, n]\!]$, on appelle diamètre de A et on note $d(A) = \max(A) - \min(A)$. Si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, combien de parties de E ont pour diamètre k ?

2.2.9 Soient n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. On note $E = [\![1, n]\!]$ et $A = [\![1, p]\!]$. Déterminer le nombre

(a) d'applications $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$;

(b) d'injections $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$;

(c) de surjections $f : E \to E$ telles que $f(A) = A$;

(d) de bijections $f : E \to E$ telles que $f^{-1}(A) = A$;

(e) d'applications $f : E \to E$ telles que $f^{-1}(A) = A$.

2.2.10 Calculer le nombre de manières de gravir un escalier à n marches en ne s'autorisant à monter à chaque pas que d'une ou deux marches.

2.2.11 Soit E un ensemble de cardinal n.

(a) Quel est le nombre d'involutions sur E ? (Applications telles que $p \circ p = \mathrm{Id}_E$)

(b) Quel est le nombre d'applications $p : E \to E$ vérifiant $p \circ p = p$?

2.2.12 Si $0 \leq p \leq n$, montrer que :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2.2.13 Combien y-a-t-il de relations réflexives et symétriques sur un ensemble à n éléments ?

2.2.14 On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un *dérangement* si

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,,\ \sigma(i) \neq i.$$

On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma(i) = i\}$$

et D_n l'ensemble des dérangements.

(a) Calculer $\mathrm{Card}\, A_i$.

(b) Exprimer $\mathfrak{S}_n \setminus D_n$ en fonction des A_i.

(c) En déduire $\mathrm{Card}\, D_n$.

(d) Déterminer la limite de

$$\frac{\mathrm{Card}\, D_n}{\mathrm{Card}\, \mathfrak{S}_n}.$$

2.3 Probabilités

2.3.1 Langage des probabilités

Définition 2.2 – Vocabulaire des probabilités

Soit un phénomène que l'on veut modéliser de manière probabiliste.

1. On appelle *expérience aléatoire* une expérience dont on connaît toues les résultats possibles mais dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète.
2. On appelle *univers* l'ensemble des résultats possibles.
3. On appelle *événement* certaines parties de l'univers, correspondant à ce qui peut se produire.
4. On appelle *probabilité d'un événement* la chance de réalisation de cet événement.

Exemple 2.5

1. Si on lance un dé à 6 faces équilibré, alors :
   — L'univers peut-être :
   $$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
   — Les événements sont alors les parties de l'univers.
   — On a par exemple :
   $$\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}, \ldots$$
2. On attend l'émission d'une particule par un corps radioactif. Soit T le temps de cette attente.
   — L'univers peut-être $\mathbb{R}_+$.
   — Nous nous intéresserons surtout à des événements du type :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ T \leq t.$$
   — Les physiciens (je crois) nous disent que :
   $$\mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$
   Mais on pourrait aussi s'intéresser au nombre N de particules émises avant un instant t_0. On aurait alors :

— L'univers pourrait être $\mathbb{N}$.
— Nous nous intéresserions surtout à des événements du type :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ N = k \text{ ou } N \leq k.$$

— Les probabilités seraient... nous le ferons plus tard.

Remarque 2.10

Nous pouvons constater que ce vocabulaire est trop imprécis pour faire des mathématiques correctement. Nous avons donc besoin de définir précisément l'ensemble des événements et ce qu'est une probabilité, ce sont les notions d'espace mesurable et d'espace mesuré.

Définition 2.3 – Espace mesurable

Soit Ω un ensemble, on appelle *tribu* [a] ou *σ-algèbre* sur Ω la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. $\forall A \in \mathcal{T},\ A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$;
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Un ensemble muni d'une tribu est dit *espace mesurable*, les éléments de $\mathcal{T}$ sont dites *parties mesurables*. On le note $(\Omega, \mathcal{T})$.

a. La tribu sera l'ensemble des événements que nous cherchons.

Exemple 2.6

On a toujours deux tribus évidentes :

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\} \text{ et } \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega).$$

Remarque 2.11

Dans le raisonnement probabiliste naïf, nous utilisons souvent le « ou » et le « et », de même que le « non ». Il est alors immédiat que si A et B sont deux événements, alors :

$$A \text{ et } B \text{ correspond à } A \cap B$$

$$A \text{ ou } B \text{ correspond à } A \cup B$$

$$\text{non } A \text{ correspond à } A^c = \Omega \setminus A, \text{ où } \Omega \text{ est l'univers.}$$

Définition 2.4

1. L'événement $\emptyset$ est dit *événement impossible.*
2. L'événement Ω est dit *événement certain.*
3. Si A et B sont deux événements, $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits *événements incompatibles.*

Remarque 2.12

Pour résumer, on a les correspondances suivantes :

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Univers	Ω
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \in \mathcal{T}$
Événement contraire	$\bar{A}$
Événement "A ou B"	$A \cup B$
Événement "A et B"	$A \cap B$
Événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$
A implique B	$A \subset B$
Événement impossible	$\emptyset$
Événement certain	Ω

Définition 2.5 – Espace mesuré

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, on appelle *mesure positive sur* Ω, toute application μ de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est une famille de parties mesurables 2 à 2 disjointes, alors [a] :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\textit{-additivité}).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé *espace mesuré*. Si, de plus, $\mu(\Omega) = 1$, alors on parle *d'espace probabilisé*, on a alors l'habitude de noter $\mathbb{P}(A)$ au lieu de $\mu(A)$.

a. Lorsque l'un des A_n est de mesure infinie ou lorsque la série $\sum \mu(A_n)$ diverge, nous conviendrons que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) = +\infty.$$

Exemple 2.7

Si Ω est un espace fini de cardinal > 0, et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, la tribu est engendrée par les singletons $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$. L'application : $A \mapsto \operatorname{Card}(A)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et l'application :

$$A \mapsto \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)} \text{ est une probabilité sur } \Omega.$$

Exemple 2.8

On a des probabilités très simples sur un ensemble mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$, ce sont les *mesures de Dirac* définies par :

$$\forall x \in \Omega,\ \delta_x\ : A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriété 2.9

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, on a alors [a] :

1. *la croissance* :

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ A \subset B \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \mu(B)\ ;}$$

2. de plus :

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)\ ;}$$

3. *limite croissante* :

$$\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \Big[\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}\Big]_{;} \Rightarrow \left[\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \overset{\text{Not}}{=} \lim_{n\to+\infty}\uparrow \mu(A_n)\right]\ ;}$$

4. *limite décroissante* :

$$\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \left[\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N},\ A_n \supset A_{n+1} \\ \text{et} \\ \boxed{\mu(A_0) \neq +\infty} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \overset{\text{Not}}{=} \lim_{n\to+\infty}\downarrow \mu(A_n)\right]\ ;}$$

5. *sous-additivité* :

$$\boxed{\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k).}$$

---

a. On convient que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty.$$

Remarque 2.13

Si de plus $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé :

1. On a :
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$
2. Si A et B sont des événements disjoints (donc incompatibles), on a :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
3. Si A est un événement, on a :
$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Définition 2.6

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie A de Ω est μ-négligeable si :
$$\exists B \in \mathcal{T},\ A \subset B \text{ et } \mu(B) = 0.$$

Remarque 2.14

Dans la définition ci-dessus, il n'est pas nécessaire que A soit un événement (par contre B en est un). On peut alors compléter la tribu $\mathcal{T}$ et la mesure μ en "ajoutant" les ensembles négligeables :
On note
$$\mathcal{N} = \{A \subset \Omega,\ A \ \mu\text{-négligeable}\},$$
et on définie la *tribu complétée de* $\mathcal{T}$ par
$$\mathcal{T}' = \{B \cup A,\ B \in \mathcal{T},\ A \in \mathcal{N}\}$$
et *la mesure complétée de* μ par :
$$\forall C \in \mathcal{T}',\ \mu'(C) = \mu(B),\ \text{où } C = B \cup A,\ A \in \mathcal{N},\ B \in \mathcal{T}.$$

Démonstration

On vérifie que $\mathcal{T}'$ est bien encore une tribu et que μ' est bien une mesure sur $\mathcal{T}'$.

Remarque 2.15

On peut compléter les correspondances :

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Événement négligeable	$\mathbb{P}(A) = 0$
Événement presque certain	$\mathbb{P}(A) = 1$

Remarque 2.16

Dans le reste de ce cours, on considérera un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
La description de la tribu $\mathcal{T}$ n'est pas un objectif de ce cours et pourra, sauf mention contraire, être omis.

Exercice(s) 2.3

2.3.1 On considère :

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R},\ A \text{ dénombrable, ou } A^c \text{ dénombrable}\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. Quelle probabilité peut-on mettre sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ pour en faire un espace probabilisé ?

2.3.2 Démontrer les propriétés générales des mesures énoncées ci-dessus. Où intervient la condition $\mu(A_0) \neq +\infty$ dans la démonstration de la limite décroissante ? Donner un contre-exemple sans cette hypothèse.

2.3.3 Soit Ω_1 un ensemble et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ un espace mesuré. Soit, de plus, f une application de Ω_1 dans Ω_2.

(a) Montrer que :

$$\mathcal{T}_1 = \left\{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{T}_2\right\} \text{ est une tribu sur } \Omega_1.$$

(b) La fonction définie par :

$$\forall A \in \mathcal{T}_1,\ \mu_1(A) = \mu_2\left(f(A)\right) \text{ est-elle une mesure sur } \Omega_1\,?$$

2.3.4 (a) Soit A et B deux événements, montrer que :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(b) Généraliser lorsque $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont des événements, calculer :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

2.3.2 Probabilité conditionnelle

Remarque 2.17

Il arrive que l'on possède quelque information sur le résultat. Par exemple : quelle probabilité ai-je que le dé donne 5 *sachant que l'on sait* que le résultat est impair ? La réponse est ici simple : 1/3.

Définition 2.7

Soit B un événement *de probabilité non nulle*, on appelle *probabilité conditionnelle sachant* B et on note pour A événement :

$$\mathbb{P}_{B}(A) = \mathbb{P}\left(A/B\right) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ se lit « probabilité de } A \text{ sachant } B \text{ ».}$$

Propriété 2.10

La probabilité conditionnelle sachant B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Remarque 2.18

On a envie de dire que « A ne dépend pas de B », si :

$$\mathbb{P}_{B}(A) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Définition 2.8

1. Deux événements A et B sont dits *indépendants* si, l'on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

2. Plus généralement, les événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont dits *indépendants* si :

$$\forall k \in [\![2,n]\!]\,,\ \forall (j_1, \dots, j_k) \in [\![1,n]\!]^k\,,\ \text{distincts},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{j_i}).$$

Remarque 2.19

1. L'indépendance est souvent une hypothèse de l'énoncé.
2. Si A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

Définition 2.9

Il arrive souvent que l'univers Ω soit fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, et que chaque élément de Ω ait une probabilité égale $1/n$ de se réaliser. On dit que la probabilité est *uniforme*. Les événements considérés sont alors $\mathcal{P}(\Omega)$ et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Exemple 2.9

Quand on lance un dé à 6 faces équilibré. Le mot *équilibré* signifie que tous les résultats ont même probabilité de réalisation soit $1/6$. Si $B = \{1, 3, 5\}$ et $A = \{5\}$, on a :

$$\mathbb{P}_{B}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}.$$

Exemple 2.10

On tire 3 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes, la probabilité qu'elles soient de même couleur est :

$$\mathbb{P}(\text{« les trois cartes de même couleur »}) = \frac{1144}{\binom{52}{3}} = 0,052 \pm 10^{-3}.$$

Exercice(s) 2.4

2.4.1 Soit deux événements A et B tels que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

Calculer

$$\mathbb{P}_{A \cup B^c}(A \cap B^c).$$

2.4.2 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que deux événements soient indépendants est :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \times \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A \cap B^c) \times \mathbb{P}(A^c \cap B).$$

2.4.3 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, on effectue des tirages *avec* remise. Quelle est la probabilité que sur n tirages consécutifs, il existe au moins un tirage numéroté k où l'on a tiré la boule numérotée k ?

2.4.4 Une usine possède 4 chaînes de production, les deux premières produisent des pièces défectueuses à raison de 1%, la troisième 2% et la quatrième 3%. On tire au hasard deux pièces provenant d'une même chaîne de production, elles sont toutes les deux défectueuses, calculer la probabilité qu'elles proviennent de l'une des deux premières chaînes de production.

2.4.5 n convives se placent au hasard autour d'une table ronde, Alice et Bernard, deux des convives regardent le nombre minimum de personnes assises entre eux deux. Quelle est la probabilité que ce nombre vaille k ?

2.3.3 Calcul des probabilités

Remarque 2.20

Pour calculer une probabilité, on peut établir un *arbre des probabilités* mais on doit justifier rigoureusement les calculs. Il y a deux utilisations majeures d'un arbre des probabilités : déplacement le long d'une branche et sommation des feuilles.

Proposition 2.5 – Formule des probabilités composées

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements ($n \geq 2$) avec $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Proposition 2.6 – Formule des probabilités totales

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une partition au plus dénombrable de Ω d'événements de probabilités non nulles et si A est un événement, alors la famille $\left(\mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i)\right)_{i \in I}$ est sommable et :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{E_i}(A) \times \mathbb{P}(E_i).$$

Remarque 2.21

Dans la pratique, I est soit fini (et la sommabilité est immédiate) soit $I = \mathbb{N}$ et alors la conclusion est :

$$\sum \mathbb{P}_{E_k}(A) \times \mathbb{P}(E_k) \text{ est (absolument) convergente et } \mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_k}(A) \times \mathbb{P}(E_k).$$

Proposition 2.7 – Formule de Bayes ou *probabilité des causes*

Si A et B sont des événements de probabilités non nulles, alors :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Cette formule nous donne, sachant que A est réalisé, la probabilité que B en soit la cause...

Exemple 2.11

On dispose de n urnes notées de $U_1, \ldots, U_n$ telles que l'urne U_i contient 1 boule noire et i boules blanches.
On choisit une boule au hasard dans l'urne U_1, si elle est noire on s'arrête, sinon on recommence avec l'urne U_2 et ainsi de suite jusqu'à l'urne U_n. Calculer les probabilités :

1. d'effectuer un tirage dans l'urne U_i ;
2. de tirer la boule noire à un moment du jeu (on utilisera deux méthodes différentes) ;
3. sachant que l'on a tiré la boule noire, que ce soit lors du i-ème tirage.

2.4 Variables aléatoires réelles

Beaucoup de situations amènent aux mêmes calculs de probabilités, par exemple :

1. lancer une pièce (pile ou face) ;
2. effectuer un tirage dans une urne contenant 2 types de boules (rouges et blanches) ;
3. regarder le succès (ou l'échec) d'une expérience.

Ce qui change entre ces différentes situations est l'ensemble Ω des résultats et la tribu $\mathcal{T}$ (ensemble des événements). Les variables aléatoires vont permettent de s'extraire du contexte et ne se concentrer que sur les calculs en ramenant toutes ces situations au même espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{BO}(\mathbb{R}))$ (mais en variant la probabilité sur cet espace).

2.4.1 Tribu borélienne sur $\mathbb{R}$

Propriété 2.11

Une intersection de tribus étant clairement une tribu, on peut considérer « une plus petite tribu contenant un ensemble de parties de Ω », elle existera toujours car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

Définition 2.10 – Tribu borélienne

On appelle *tribu borélienne*, la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ contenant les intervalles. Nous la noterons $\mathcal{BO}$ ou $\mathcal{BO}(\mathbb{R})$. Les éléments de ces tribus s'appelleront *boréliens*.

Remarque 2.22

En fait, on appellera encore tribu borélienne la tribu complétée (voir remarque 2.14, page 85).

Définition 2.11 – Mesure de Lebesgue

La mesure définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (et notée λ), par [a] :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b \ \Rightarrow\ \lambda([a,b]) \overset{\text{Def}}{=} b - a,$$

s'appelle la *mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}$.

a. On admettra qu'il suffit de la définir sur les segments pour la définir sur la tribu borélienne...

Remarque 2.23

On voit par exemple que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{a\}) = 0$, et donc par σ-additivité $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable...

Remarque 2.24

On définit de même la tribu borélienne $\mathcal{BO}(\mathbb{R}^p)$. sur $\mathbb{R}^p$ et la mesure de Lebesgue par :

$$\forall (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^{2\,p},\ \Big[\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ a_k \leq b_k\Big] \Rightarrow \lambda\left([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]\right) \overset{\text{Def}}{=} \prod_{k=1}^{p} (b_k - a_k).$$

Exercice(s) 2.5

2.5.1 *Mesures et probabilités sur* $\mathbb{R}$

(a) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne. On pose alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]).$$

Montrer que F vérifie les propriétés suivantes :

i. $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$;

ii. $F(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$;

iii. F est croissante sur $\mathbb{R}$;

iv. F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

(b) Réciproquement, soit F une fonction vérifiant les 4 propriétés ci-dessus, montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]).$$

(c) Peut-on obtenir un résultat semblable si on a affaire à une mesure μ au lieu d'une probabilité $\mathbb{P}$?

2.4.2 Variables aléatoires réelles

Définition 2.12 – Fonction mesurable

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables. Une fonction $X : \Omega \to E'$ est dite *mesurable* si :
$$\forall A' \in \mathcal{T}',\ X^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$
2. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et X une fonction mesurable de Ω dans E', on dit aussi que X est *variable aléatoire à valeurs dans* E'.
3. Lorsque $E' = \mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne, on dit que X est une *variable aléatoire réelle*, nous noterons en abrégé `v.a.r.`.

Définition 2.13

Si $A \in \mathcal{T}$ est une partie mesurable de Ω, on peut définir *l'indicatrice de* A (on parle aussi de *fonction caractéristique de* A, et on la note alors χ_A) par :
$$\mathbb{1}_A \ : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{c'est une } \texttt{v.a.r.}.$$

Exemple 2.12

Si Ω est un ensemble fini, muni de sa tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, alors toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une `v.a.r.` ; de plus, si l'on note $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ les éléments de Ω, on a alors :
$$X = \sum_{k=1}^{n} X(\omega_k).\,\mathbb{1}_{\{\omega_k\}}\,.$$

Remarque 2.25

Soient X une `v.a.r.` sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, $t \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{BO}(\mathbb{R})$, on note :
$$(X \in B) = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\,,\ X(\omega) \in B\}$$

$$
\begin{array}{l}
(X=t)=X^{-1}(\{t\})=\{\omega\in\Omega\,,\;X(\omega)=t\}\\
(X\leq t)=X^{-1}(]-\infty,t])=\{\omega\in\Omega\,,\;X(\omega)\leq t\}\\
(X<t)=X^{-1}(]-\infty,t[)=\{\omega\in\Omega\,,\;X(\omega)<t\}\\
(X\geq t)=X^{-1}([t,+\infty[)=\{\omega\in\Omega\,,\;X(\omega)\geq t\}\\
(X>t)=X^{-1}(]t,+\infty[)=\{\omega\in\Omega\,,\;X(\omega)>t\}
\end{array}
$$

Ce sont des éléments de $\mathcal{T}$.

Définition 2.14

Si X est une `v.a.r.` sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, on peut définir [a] la *probabilité image* sur $(\mathbb{R},\mathcal{BO})$, par :

$$\forall B\in\mathcal{BO},\;\mathbb{P}_X(B)\overset{\text{Not}}{=}\mathbb{P}(X\in B)\overset{\text{Def}}{=}\mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right).$$

On dit encore que $\mathbb{P}_X$ est la *loi de* X.

a. Voir l'exercice 2.3.3, page 86

Remarque importante 2.26

Il est souvent inutile de préciser ce qu'est l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$, car nous travaillerons essentiellement dans l'espace probabilisé $(\mathbb{R},\mathcal{BO},\mathbb{P}_X)$. C'est ainsi que nous avions procédé dans l'exemple 2.5.2, page 80.

Dans la suite de ce cours, nous nous consacrerons à l'étude des probabilités images, et nous ne préciserons pas (sauf si c'est nécessaire), l'espace probabilisé sous-jacent.

Définition 2.15 – Fonction de répartition

Soit X une `v.a.r.` de loi $\mathbb{P}_X$, on appelle *fonction de répartition de* X, la fonction :

$$F_X\;:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\mathbb{P}_X(]-\infty,x])=\mathbb{P}(X\leq x).\end{cases}$$

On dit aussi que c'est *la distribution de la probabilité* $\mathbb{P}_X$.

Proposition 2.8

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition d'une **v.a.r.** *si, et seulement si, elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *F est croissante ;*
2. *on a :*
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \, ;$$
3. *F est continue à droite en tout point*[a] *de $\mathbb{R}$.*

a. Cela signifie que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x^+) = F(x).$$

Démonstration

($\Rightarrow$) C'est l'objet de l'exercice 2.5.1, page 93.
($\Leftarrow$) On peut prendre par exemple[a] :
$$\Omega =]0,1[, \ \mathcal{T} = \{B \cap]0,1[, \ B \in \mathcal{BO}\} \text{ et } \mathbb{P} = \lambda|_{\mathcal{T}} \quad (\lambda \text{ mesure de Lebesgue}).$$
Il suffit alors de prendre X définie par[b] :
$$\forall \omega \in \Omega, \ X(\omega) = \sup \left(\{ y \in \mathbb{R}, \ F(y) < \omega \} \right),$$
et de vérifier que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \{\omega \in \Omega, \ X(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega, \ \omega \leq F(t)\} \, .$$
Prenons un $t \in \mathbb{R}$.

— ($\supset$) Soit $\omega \in \Omega$, tel que $\omega \leq F(t)$, alors $X(\omega) \leq t$, puisque
$$t \notin \{y \in \mathbb{R}, \ F(y) < \omega\} \, .$$
— ($\subset$) Par passage au complémentaire : si $\omega > F(t)$, alors, comme F est continue à droite, il existe un $\delta > 0$, tel que :
$$F(t+\delta) < \omega, \text{ et donc } X(\omega) \geq t + \delta > t.$$

Finalement,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, \ \omega \leq F(t)\}\right) = \mathbb{P}\left(]0, F(t)]\right) = F(t).$$

a. La tribu $\mathcal{T}$ définie ici sera encore appelée *tribu borélienne.*
b. C'est une sorte d'inverse généralisé de F. Cela nous sera très utile dans la pratique, pour simuler des lois particulières...

Exemple 2.13

Soit la fonction définie par :

$$F\ :\ \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in [1,2[\\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

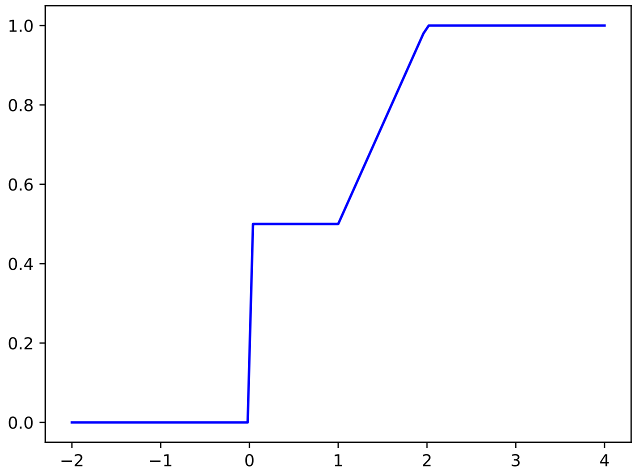
Voir le code **Python** 2.2, de la présente page et l'image 2.1, page suivante.
On a alors X qui est définie par :

$$X\ :\ \begin{cases}]0,1[\to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in]0,1/2] \\ 2\,\omega & \text{si } \omega \in]1/2,1[. \end{cases} \end{cases}$$

Session **Python** 2.2 – Exemple 2.13, de la présente page

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def F(x):
    if x<0:
        return 0
    elif x<1:
        return 1/2
    elif x<2:
        return x/2
    return 1

npts=100
plt.plot([-2+6*k/npts for k in range(npts+1)],
         [F(-2+6*k/npts) for k in range(npts+1)],'b-')
plt.show()
```

Figure 2.1 – Exemple 2.13, page précédente



Exercice(s) 2.6

2.6.1 Pour chacune de ces lois (définies par leur distribution), préciser un espace probabilisé et une variable aléatoire telle que $F = F_X$ (on pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition qui précède et tracer les variables aléatoires réelles obtenues).

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$F_3(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2^k} \tag{2.12}$$

$$F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } x \in]0,1] \\ \frac{3}{4} + \frac{x-1}{4\,x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

2.6.2 Pour chacune de ces expériences, quelle fonction de répartition de la `v.a.r.` décrivant le résultat obtient-on ?

(a) On jette au hasard un dé à 6 faces supposé équilibré. Le résultat est le numéro inscrit sur la face.

(b) On jette le même dé jusqu'à obtenir 6. Le résultat est le nombre de lancers utilisés.

(c) Dans un jeu de 52 cartes, on tire (sans remise) des cartes une par une jusqu'à obtenir un cœur (♡). Le résultat est le nombre de tirages utilisés.

(d) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$ et soit deux corps radioactifs différents qui émettent chacun une particule à partir d'un temps t_0 quelconque suivant les probabilités (indépendantes de t_0 et indépendantes entre elles) :

$$\forall k \in [\![1,2]\!]\,,\ \mathbb{P}(T_k \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_k \times x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat demandé est le temps d'attente de la première particule émise.

2.6.3 Soit X une `v.a.r.` définissant une fonction de répartition F_X. Calculer en fonction de F_X les probabilités suivantes :

(a) Si $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x)$;

(b) puis, $\mathbb{P}(X < x)$, $\mathbb{P}(X > x)$ et $\mathbb{P}(X \geq x)$;

(c) enfin, $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z})$.

2.4.3 Variables aléatoires discrètes

Définition 2.16

Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, si $X(\Omega)$ est dénombrable, on dit que X est une `v.a.r.` *discrète*.

Remarque 2.27

Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une `v.a.r.` *finie*.

Exemple 2.14

1. On lance une pièce et X vaut 0 si le côté visible de la pièce est "face" et 1 sinon, alors X est une `v.a.r.` finie.
2. Si X est le nombre de lancers nécessaire avant que la face visible soit "face", alors X est une `v.a.r.` discrète.

Remarque importante 2.28

Soit X une `v.a.r.` discrète et $X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in I}$ avec I au fini ou dénombrable.
Notons $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ alors :

— pour tout $k \in I$, $p_k \geq 0$;
— la famille $(p_k)_{k \in I}$ est sommable et $\sum\limits_{k \in I} p_k = 1$;
— pour tout $B \in \mathcal{BO}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{\substack{k \in I \\ x_k \in B}} p_k.$$

Ainsi, les (x_k, p_k) caractérisent X et on définit souvent X par la donnée de ces couples.

Remarque importante 2.29

En gardant les mêmes notations que la remarque précédente et en notant F_X sa fonction de répartition :

- les points de discontinuité de F_X sont exactement les x_k tels que $p_k \neq 0$;
- et dans ce cas, $p_k = F_X(x_k^+) - F_X(x_k^-)$ est le saut de discontinuité en x_k ;
- F_X est constante entre deux x_k consécutifs.

En particulier, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, F_X est une fonction en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Définition 2.17 – Espérance d'une `v.a.r.` prenant un nombre fini de valeurs

Soit X une `v.a.r.` finie, on appelle *espérance de* X ou *valeur moyenne de* X la valeur, en notant $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarque 2.30

$\mathbb{E}(X)$ est la moyenne pondérée des points $\Big(x_k, \mathbb{P}(X = x_k)\Big)_{k \in [\![1,n]\!]}$, qui existe toujours car c'est un ensemble fini de points.

Exemple 2.15

Prenons le cas du dé à 6 faces équilibré, X son résultat après lancer. On a alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$$\forall k \in [\![1, 6]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \text{ donc } \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Définition 2.18 – Espérance d'une `v.a.r.` discrète

Soit X une `v.a.r.` discrète avec $X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in I}$ et $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$:

- on dit que X *admet une espérance* lorsque la famille $\Big(x_k \times p_k\Big)_{k \in I}$ est sommable ;

— on appelle alors *espérance de* X ou *valeur moyenne de* X la valeur :

$$\sum_{k\in I} x_k \times p_k.$$

Remarque importante 2.31

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ alors :

— X admet une espérance si et seulement si :

$$\sum x_k \times p_k \text{ est absolument convergente } \iff \sum |x_k| \times p_k \text{ est convergente ;}$$

— et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \times p_k.$$

Remarque 2.32

Lorsque la famille $\left(x_k \times p_k\right)_{k\in I}$ est sommable, l'ordre de sommation n'a pas d'importance et notamment, puisque I est dénombrable, la numérotation des éléments de $X(\Omega)$ ne change pas l'espérance.

Remarque importante 2.33

il ne faut jamais oublier de prendre le module pour montrer qu'une famille est sommable ou qu'une série est absolument convergente.

Exemple 2.16

Si X est le nombre de lancers d'une pièce nécessaire avant que la face visible soit "face", alors X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \dots$$

Propriété 2.12

Soit X une `v.a.r.` discrète et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $\varphi(X)$ est encore une `v.a.r.` discrète.

Théorème 2.1 – Formule de transfert

Soit X une `v.a.r.` discrète et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $X(\Omega) = \{x_k\}_{k\in I}$ et $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ alors :

1. *$\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si $\Big(\varphi(x_k) \times p_k\Big)_{k\in I}$ est sommable ;*
2. *et, dans ce cas :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k\in I} \varphi(x_k) \times p_k.$$

Démonstration

C'est une conséquence de la formule de sommation par paquets.

Exemple 2.17

1. En prenant $\varphi : x \mapsto 1$, la fonction indicatrice de Ω, notée simplement 1, admet une espérance et $\mathbb{E}(1) = 1$.
2. Soit X la `v.a.r.` valant le nombre de lancers d'une pièce nécessaire avant que la face visible soit "face" et $\varphi(x) = x + 1 - 2 \times \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ alors $\varphi(X)$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \dots$$

2.4.4 Variables aléatoires absolument continues

Remarque 2.34

Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et F_X sa fonction de répartition. Si F_X est continue, on dit que X est une `v.a.r.` *continue.*
Néanmoins, l'étude des `v.a.r.` continues nécessite des notions mathématiques plus complexes et on doit se restreindre

aux `v.a.r.` absolument continues (ou à densité). Pour cela, on commence par des rappels d'intégration.

Rappel 2.2 Fonction intégrable d'une variable

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

— f est *mesurable* pour la tribu borélienne lorsque :

$$\forall B \in \mathcal{BO},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{BO};$$

ou, de manière équivalente :

$$\forall J \text{ intervalle de } \mathbb{R},\ f^{-1}(J) \in \mathcal{BO}.$$

Par simplification, on écrira souvent "fonction mesurable" sans préciser la tribu borélienne.

— Si f est mesurable et s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ vérifiant :

1. $a_0 = \inf I < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = \sup I$;
2. pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, f est continue par morceaux sur $]a_k, a_{k+1}[$;
3. pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)|\, \mathrm{d}x$ est convergente (l'intégrale est absolument convergente) ;

alors on dit que f est *intégrable* pour la mesure de Lebesgue sur I et on note :

$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Par simplification, on écrira souvent "fonction intégrable" sans préciser la mesure de Lebesgue.

Remarque 2.35

1. Dans un prochain cours, on donnera une définition plus générale d'une fonction intégrable sur I.
2. Pour l'instant, on utilise les méthodes du cours sur les intégrales généralisées pour montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)|\, \mathrm{d}x$ sont (absolument) convergente et on conclut à l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Si $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x)|\, \mathrm{d}x$ est convergente alors $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente, ce qui justifie la

définition de $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Dans les applications concrètes de ce cours, les fonctions seront mesurables pour la tribu borélienne et on se contentera de le mentionner sans le montrer.

Remarque 2.36

⚠ On n'oubliera jamais la valeur absolue lorsque l'on montre qu'une intégrale est absolument convergente ou qu'une fonction est intégrable !

Exemple 2.18

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, déterminer si f est intégrable sur :

   a) $I_1 = [-1, 1]$ **b)** $I_2 =]-1, 1[$ **c)** $I_3 = \mathbb{R}$ **d)** $I_4 =]0, +\infty[$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, déterminer si f est intégrable sur :

   a) $I_1 = [1, +\infty[$ **b)** $I_2 =]1, +\infty[$ **c)** $I_3 = \mathbb{R}$ **d)** $I_4 =]0, +\infty[$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \min\left(\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, \dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, déterminer si f est intégrable sur :

   a) $I_1 = [1, +\infty[$ **b)** $I_2 = [-1, 1]$ **c)** $I_3 = \mathbb{R}$ **d)** $I_4 =]0, +\infty[$

4. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \min\left(\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, \dfrac{1}{x^2}\right)$, déterminer si f est intégrable sur :

   a) $I_1 = [1, +\infty[$ **b)** $I_2 = [-1, 1]$ **c)** $I_3 = \mathbb{R}$ **d)** $I_4 =]0, +\infty[$

Propriété 2.13

1. Si f est intégrable sur I et J est un intervalle inclus dans I alors f est intégrable sur J.
2. Si $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $I \cap]-\infty, a[$ et sur $I \cap]a, +\infty[$ alors tout prolongement de f à I est intégrable sur I. Par abus, on dira que f est intégrable sur I.
3. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable sur I et $h : I \to \mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu borélienne et bornée alors $f \times h$ est intégrable sur I.

Définition 2.19

Une `v.a.r.` X est dite *absolument continue*, si il existe une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, mesurable, f_X appelée *densité de* X telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette densité n'a aucune raison d'être unique.

Remarque importante 2.37

1. Si F_X est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ alors X est absolument continue et une densité de X est donnée par la fonction dérivée de F_X (définie sauf, peut-être sur un ensemble dont l'intersection avec tout segment est fini).
2. Si X est une `v.a.r.` absolument continue et f_X est une densité de X alors f_X est intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

3. Si X est une `v.a.r.` absolument continue et f_X est une densité de X, on peut changer f_X en un nombre fini de points (et même sur un ensemble négligeable), ce sera toujours une densité de X.

Exercice(s) 2.7

2.7.1 Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([0,1],\mathbb{R})$, montrer que la fonction f est toujours mesurable (pour les tribus boréliennes au départ et à l'arrivée).

2.7.2 Soit X une `v.a.r.` définie sur un espace probabilisé, telle que F_X soit $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. On définit « une » densité f_X de X par $f_X(x) = F_X'(x)$ si F_X est dérivable en x, et 0 sinon.

(a) Montrer que f_X est intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$ ($a \in \mathbb{R}$).

(b) Comparer pour $a \in \mathbb{R}$,

$$F_X(a) \text{ et } \int_{]-\infty,a]} f_X \, \mathrm{d}\lambda.$$

2.7.3 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition F. Trouver, en fonction de F, la fonction de répartition de la `v.a.r.` Y lorsque :

(a) $Y = X^2$;

(b) $Y = \lfloor X \rfloor$;

(c) $Y = X - \lfloor X \rfloor$;

(d) $Y = 1/X$, lorsque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$;

(e) $Y = e^X$.

On suppose maintenant que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les densités (si elles existent) de Y dans les cas précédents, en fonction de la densité F' de X.

Rappel 2.3

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a < b$) est une fonction continue par morceaux, alors :

$$\frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme on fait une moyenne de valeurs, la limite est appelée *valeur moyenne de f sur $[a,b]$*.

Définition 2.20 – Espérance d'une `v.a.r.` absolument continue

Soit X une `v.a.r.` absolument continue et f_X une densité de X :

- on dit que X *admet une espérance* lorsque $x \mapsto |x| \times f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
- on appelle alors *espérance de* X ou *valeur moyenne de* X la valeur :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.38

il ne faut jamais oublier de prendre le module pour montrer qu'une fonction est intégrable.

Théorème 2.2 – Formule de transfert

Soit X une `v.a.r.` absolument continue, f_X une densité de X et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable :

1. *$\varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si $x \mapsto \varphi(x) \times f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
2. *et, dans ce cas :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \times f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Admis.

Exercice(s) 2.8

2.8.1 Pour les variables aléatoires suivantes (définies par leurs fonctions de répartition F_X ou leurs densités f_X). Sont-elles bien définies ? Sont-elles intégrables ? Quels sont leurs espérances ?

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \times x} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} \times x \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.16}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2+1}{x^2+2} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.17}$$

2.8.2 Soit X une `v.a.r.` de loi de probabilité :

$$F_X \; : \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp(-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $M > 0$, calculer l'espérance (si elle existe) de la `v.a.r.` définie par :

$$Y = \min(X, M).$$

Puis, faire le lien avec l'exercice précédent.

2.8.3 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition (loi de Cauchy) :

$$F_X \; : \; x \mapsto \frac{1}{\pi} \times \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Montrer qu'elle n'a pas d'espérance.

2.8.4 Soit X une `v.a.r.` de fonctions de répartition :

$$F_X \; : \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) En utilisant la formule de transfert, calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

(b) Calculer la densité de X^2.

(c) Refaire le calcul directement.

2.4.5 Moments d'ordre supérieur

Remarque importante 2.39

On a définit de deux manières différentes l'espérance d'une `v.a.r.` discrète et celle d'une `v.a.r.` absolument continue. La Théorie de la mesure permet de montrer que ce sont des cas particuliers d'une même définition plus générale qui permet de définir l'espérance des `v.a.r.` qui ne sont ni discrètes ni absolument continue ; et cela justifie la notation commune $\mathbb{E}(X)$. Ce cadre sera exposé dans un prochain cours.

Définition 2.21

Soit X une `v.a.r.` et $p \in \mathbb{N}^*$:

— on dit que X *admet un moment d'ordre* p lorsque X^p admet une espérance ;

— on appelle alors *moment d'ordre* p *de* X, la valeur :

$$m_p(X) \overset{\text{Not}}{=} \mathbb{E}\left(X^p\right).$$

Remarque 2.40

1. L'espérance est le moment d'ordre 1.
2. On utilise généralement le Théorème du Transfert pour montrer que X admet un moment d'ordre k et le déterminer.

Propriété 2.14 – Moment d'ordre 2

1. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si X^2 admet une espérance.
   Notamment :
   (a) Si X est finie alors X admet un moment d'ordre 2 et, en notant $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$m_k(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

(b) Si X est discrète alors, en notant $X(\Omega) = \{x_k\}_{k\in I}$:

$$X \text{ admet un moment d'ordre 2} \iff \left(x_k^2 \times \mathbb{P}(X = x_k)\right)_{k\in I} \text{ est sommable,}$$

et alors :

$$m_k(X) = \sum_{k\in I} x_k^2 \times \mathbb{P}(X = x_k).$$

(c) Si X est absolument continue alors, en notant f_X une densité de X :

$$X \text{ admet un moment d'ordre 2} \iff x \mapsto x^2 \times f_X(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R},$$

et alors :

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Si X admet un moment d'ordre 2 alors X admet un moment d'ordre 1.

Définition 2.22

Si X admet un moment d'ordre 2, on définit *la variance de* X par :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

C'est un *moment centré d'ordre* 2.

Remarque 2.41

La propriété 2.14, page ci-contre se généralise au moment d'ordre p quelconque. De plus :

1. si X possède un moment d'ordre p, alors elle possède un moment d'ordre k pour tout $1 \leq k \leq p$;
2. de manière équivalente, si X ne possède pas de moment d'ordre k avec $k \leq p$, alors elle ne possède pas de moment d'ordre p ;
3. si X admet un moment d'ordre p alors on définit son *moment centré d'ordre* p par : $\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^p\right)$.

Exercice(s) 2.9

2.9.1 Calculer les variances (si elles existent) pour les `v.a.r.` données dans l'exercice 2.8.1, page 109.

2.9.2 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition :

$$F_X \; : \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{1+2\,x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Calculer, si elles existent, les espérance et variance de X.

(b) Soit $M > 0$ donné, on pose $Y = \min(X, M)$. Calculer, si elles existent, les espérance et variance de Y.

2.5 Lois usuelles

2.5.1 Lois discrètes

2.5.1.1 Loi de Bernoulli

Définition 2.23 – Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli intervient pour modéliser une expérience aléatoire à deux résultats (représentés par 0 et 1). La probabilité d'obtenir 1 est notée $p \in [0, 1]$. Si X est une `v.a.r.` de loi de Bernoulli de paramètre p, on écrit :

$$X \sim \mathcal{B}(p), \text{ et on a } \mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Remarque 2.42

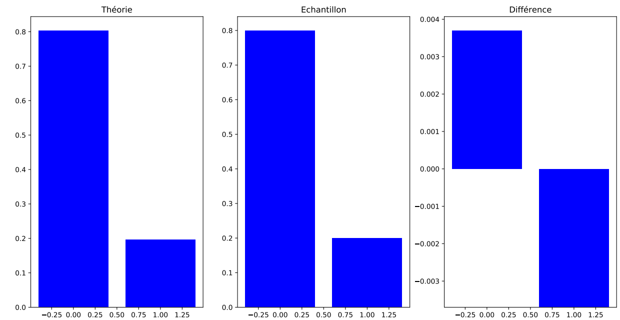
Les logiciels permettent d'obtenir la loi, la fonction de répartition et un échantillon d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli (voir la figure 2.2, page ci-contre, obtenue avec le code `Python` 2.4, page 118, dans le cas $n = 1$).

Propriété 2.15

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = p \times (1 - p).$$

Figure 2.2 – Loi de Bernoulli



Exemple 2.19

On jette deux dés à 6 faces, et on s'intéresse au fait que la somme des résultats soit divisible par 3. On a donc X qui vaut 1 si la somme est divisible par 3 et 0 sinon. Clairement, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Mais que vaut p ?

Démonstration

On peut raisonnablement supposer que les résultats de chaque dé sont indépendants les uns des autres. Si on note X_1 le résultat du premier dé et X_2 celui du deuxième dé. Pour avoir une divisibilité de la somme par 3, il faut :

$$X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2$$

où

$$(x_1, x_2) \in \{(1,2),(2,1),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(6,6)\}.$$

Chaque événement ayant une probabilité $1/6^2$ de se produire, on obtient :

$$p = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Exemple 2.20

On a un corps radioactif qui émet une particule avec une loi :

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

où τ est un paramètre > 0 dépendant du corps. On s'intéresse de savoir si la particule sera émise avant un temps $t_0 > 0$ donné. X vaut donc 1 si $T \leq t_0$ et 0 sinon. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p où

$$p = \mathbb{P}(T \leq t_0) = 1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right).$$

Exercice(s) 2.10

2.10.1 Dans un gratte-ciel, un ascenseur n'assure que la descente. Il part du sommet à l'étage n, et à chaque fermeture de porte, il descend pour s'arrêter aléatoirement à un étage strictement inférieur jusqu'à ce qu'il parvienne au rez-de-chaussée (étage 0). On suppose qu'à chaque fois le numéro de l'étage d'arrêt suit une loi uniforme sur l'ensemble des numéros des étages encore accessibles.

On note $A(p, n)$ la probabilité que lors de sa descente l'ascenseur s'arrête à l'étage p avec $0 \leq p < n$.

(a) Calculer $A(0, n)$, $A(n-1, n)$, $A(n-2, n)$.

(b) Démontrer la relation $\mathcal{R}(n)$:

$$\forall p \in [\![0, n-2]\!]\,,\ A(p, n) = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{j=p+1}^{n-1} A(p, j)\right)$$

(c) En utilisant $\mathcal{R}(n)$ et $\mathcal{R}(n-1)$, montrer que

$$\forall p \in [\![0, n-3]\!]\,,\ A(p, n) = A(p, n-1)$$

(d) Déterminer $A(p, n)$ pour $0 \leq p < n$.

(e) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts lors de la descente. Déterminer l'espérance et la variance de X.

2.10.2 L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. On effectue un tirage aléatoire d'une permutation. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1, si k est fixe par la permutation et 0 sinon. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de la permutation. Exprimer X en fonction des X_k et en déduire l'espérance de X.

2.10.3 On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue n tirages successifs sans remise. On appelle *record* tout tirage amenant un nombre plus grand que tous les tirages précédents. Déterminer l'espérance du nombre de records.

2.10.4 On considère un ascenseur qui dessert k étages d'un immeuble, avec n personnes qui rentrent dans cet ascenseur au rez-de-chaussée. On suppose que chacune de ces personnes, indépendamment les unes des autres, a une probabilité uniforme $\frac{1}{k}$ de sortir à l'un ou l'autre des étages. Et on suppose enfin que personne ne rentre dans l'ascenseur au-dessus du rez-de-chaussée.

(a) Soit j un entier entre 1 et k. Quelle est la probabilité que l'ascenseur s'arrête à l'étage j ?

(b) Quelle est l'espérance du nombre d'arrêts de l'ascenseur ?

2.10.5 On lance N fois une pièce donnant « Pile » avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et « Face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants. Pour tout entier naturel $2 \leq k \leq N$, on dit que le k-ième lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $k-1$-ième lancer. Pour tout entier naturel $2 \leq n \leq N$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

(a) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

(b) Faire de même avec X_3.

(c) On suppose $p \neq q$.

i. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$, $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n - 1)$.

ii. Déterminer la loi de X_4 et son espérance.

iii. Pour tout $2 \leq k \leq N$ on note Y_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième lancer est un changement et 0 sinon. Exprimer X_n à l'aide des Z_k et en déduire $\mathbb{E}(X_n)$.

(d) On suppose $p = q$.

i. Calculer les lois de X_2, X_3 et X_4.

ii. Calculer la loi de X_n.

iii. Pourquoi ce résultat n'est-il plus valable dans le cas $p \neq q$?

2.10.6 Un chat se fait chaque jour les griffes, soit sur le canapé soit sur les rideaux. Il ne se fait jamais les griffes deux jours de suite sur le canapé ; s'il se fait les griffes sur les rideaux un jour donné, alors il choisira le lendemain le canapé avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Le premier jour, il attaque les rideaux. On définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de jours où le chat a fait ses griffes sur les rideaux parmi les n premiers jours. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$

2.5.1.2 Loi binomiale

Définition 2.24 – Loi binomiale

La loi binomiale intervient pour modéliser une expérience aléatoire de n tirages *avec remises* dans une population où p représente la probabilité de succès. Si X est une `v.a.r.` de loi binomiale de paramètres n et p, on écrit :

$$X \sim \mathcal{B}(n,p), \text{ et on a } \forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Remarque 2.43

Les tirages sont supposés *indépendants* les uns des autres. La formule donnée représente donc la probabilité d'avoir k succès (p^k) parmi n tirages. On a donc $n-k$ échecs ($(1-p)^{n-k}$). La combinaison $\binom{n}{k}$ correspond au choix des k tirages parmi n pour lesquels nous aurons un succès.

Démonstration de la bonne définition de la loi binomiale

C'est bien une loi de probabilité car :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1.$$

Remarque 2.44

Voir les codes `Python` 2.3, page 118 et 2.4, page 118, permettent de produire les figures 2.3, page 120 et 2.4, page 121.

Propriété 2.16

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = n \times p \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = n \times p \times (1-p).$$

Démonstration

— Par définition, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Pour le calculer, le plus simple est d'utiliser la formule du binôme de Newton, et de dériver :

$$(x+(1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times x^k \times (1-p)^{n-k}, \text{ d' où : } n \times (x+(1-p))^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} \times x^{k-1} \times (1-p)^{n-k}.$$

En prenant $x = p$, on obtient :

$$n = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-k}.$$

D'où le résultat.

— Pour la variance, on a :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X \times (X-1)\right) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2.$$

En re-dérivant l'expression précédente, on a :

$$n \times (n-1) \times (x+(1-p))^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k \times (k-1) \times \binom{n}{p} \times x^{k-2} \times (1-p)^{n-k}.$$

D'où, avec $x = p$:

$$\mathbb{E}(X \times (X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = p^2 \times n \times (n-1).$$

Finalement :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = n \times (n-1) \times p^2 - n^2 \times p^2 + n \times p = n \times p \times (1-p).$$

Session Python 2.3 – Fonction de répartition d'une loi binomiale

```python
from scipy.stats import binom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n , p = 10 , 0.2

l=binom.pmf(np.arange(n+1), n, p) # loi binomiale

x=np.linspace(-1,11,300)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x,binom.cdf(x, n, p),'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.grid(True)
plt.xlim(-1,11)

plt.subplot(2,1,2)
plt.stem(np.arange(n+1),l,"b")
plt.title('Loi de Probabilité')
plt.xlim(-1,11)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.4 – Loi binomiale

```python
from scipy.stats import binom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n=10 # nombre de tirage
p=0.2 # probabilité de succès
N=10000 # nombre d'échantillons
```

```python

e=binom.rvs(n, p,size=N) # échantillon
y=[sum(e==k)/N for k in range(n+1)] # fréquence d'apparition dans e

l=binom.pmf(np.arange(n+1), n, p) # loi binomiale

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(n+1),l,color='b')
plt.title("Théorie")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(n+1),y,color='b')
plt.title("Echantillon")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(n+1),l-y,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

Exemple 2.21

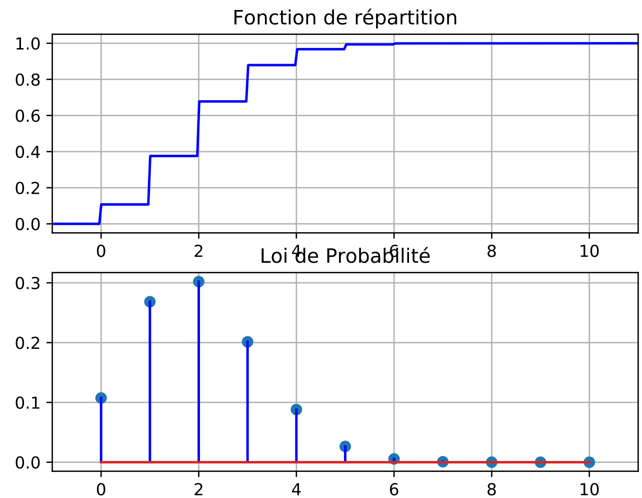
1. La cas académique est le suivant : on a une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires. On tire *avec remise* n fois une boule et il y a succès du tirage lorsque cette boule tirée est blanche.
2. On jette n fois un dé à 6 faces et on s'intéresse au nombre de fois où l'on tire un 5. C'est une loi binomiale de paramètres n et $1/6$.

Exercice(s) 2.11

2.11.1 On transmet un message en binaire sous forme d'une suite de n bits. Lors de la transmission, chaque bit a une probabilité p d'être modifié. Quelle est la probabilité que le message reçu comporte au plus une erreur ?

2.11.2 On lance 5 dés. À l'issue du premier jet, on reprend les dés qui n'ont pas amené l'as. On procède alors à un second

Figure 2.3 – Fonction de répartition d'une loi binomiale



jet et ainsi de suite avec les dés restant jusqu'à obtenir 5 as.

(a) Quelle est la probabilité que l'on obtienne les 5 as en un lancer ? En au plus deux lancers ? En au plus n lancers ?

(b) En déduire la probabilité que l'on obtienne les 5 as en exactement n lancers.

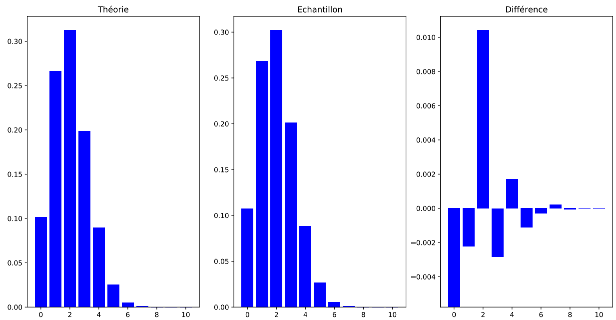
(c) Quelle est la probabilité que le nombre total de dés jetés soit égal à n ?

2.11.3 Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile.

2.11.4 Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient « pile » et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient « face ».

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois où l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

Figure 2.4 – Loi binomiale



i. Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

ii. Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas juste nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche.

i. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?

ii. Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

iii. Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geq 3$, on a :

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = p \times \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + q \times \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$

iv. En déduire que pour $n \geq 3$:

$$\mathbb{E}(Y_n) = p \times \mathbb{E}(Y_{n-1}) + q \times \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.$$

v. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ quand $n \to +\infty$.

2.11.5 Un vendeur de cycles vend des pédales de bicyclette qu'il se procure chez son grossiste par boîtes de deux. Toutes les boîtes sont supposées identiques et dans chaque boîte il y a une pédale droite et une pédale gauche. Lorsqu'un client demande le remplacement de ses deux pédales de vélo, le commerçant lui vend une boîte complète et lui fait payer la somme de $2\,r$ euros. Lorsqu'un client demande le remplacement d'une seule des deux pédales, le commerçant décide de ne pas obliger le client à acheter une boîte complète, mais majore le prix de la pédale dans une proportion α, c'est-à-dire lui fait payer la somme de $(1+\alpha)\times r$ euros. Pour la simplicité de l'étude, on suppose que chaque client demande le remplacement d'une seule pédale et que l'on sait que le nombre de pédales à poser séparément pendant la durée de l'étude vaut $2\,n$, où n est un entier naturel non nul. On suppose que le vendeur ne dispose au départ que de boîtes complètes et en nombre suffisant. Soit p la probabilité qu'un client demande une pédale droite et X le nombre de boîtes nécessaires à la satisfaction de ces $2\,n$ demandes (le commerçant n'ouvre une boîte que s'il ne dispose pas d'une boîte entamée lui permettant d'accéder à la demande du client).

(a) Quelle est la loi de X ? On précisera l'ensemble des valeurs prises par X.

(b) Montrer que X peut s'écrire $a+|Y-b|$ où a et b sont des constantes qu'on précisera et Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

(c) Donner l'expression l'espérance de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n et p.

Dans la suite, on prendra la valeur $p=\frac{1}{2}$.

(d) Simplifier l'expression de $\mathbb{E}(X)$.

(e) Quelle majoration α le marchand de cycles doit-il appliquer au prix de chaque pédale vendue séparément pour qu'en moyenne le prix de vente des $2\,n$ pédales vendues séparément soit égal au prix de vente des X boîtes nécessaires vendues $2\,r$ euros chacune.

La valeur α trouvée dépend de n et on la note dorénavant α_n.

(f) Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donner un équivalent simple de α_n.

2.11.6 On considère une population de 2^n vaches susceptibles, avec la probabilité p, d'être porteuses d'un virus donné. On dispose d'un test détectant de façon certaine ce virus dans le lait des vaches. On fixe $0\leq k\leq n$. On sépare les vaches en 2^{n-k} groupes de 2^k vaches. On mélange leur lait, on fait un test sur chacun des mélanges, puis on effectue un test sur chacune des vaches des groupes contaminés. On note Y le nombre de groupes malades et X le nombre total de tests effectués.

(a) Exprimer X en fonction de Y, k et n.

(b) Déterminer la probabilité qu'un groupe donné soit malade.

(c) Donner la loi de Y et son espérance.

(d) En déduire l'espérance de X.

(e) On suppose $n=10$ et $p=0.01$. Déterminer la meilleure valeur de k.

2.5.1.3 Loi géométrique

Définition 2.25 – Loi géométrique

La loi géométrique intervient pour modéliser un premier succès lors d'une succession d'expériences de type Bernoulli. Si X est une `v.a.r.` suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{G}(p), \text{ et on a } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = k) = p \times (1-p)^{k-1}.$$

Remarque 2.45

Il faut échouer $k-1$ fois ($(1-p)^{k-1}$) avant de réussir une fois (p). Les expériences sont, bien sûr, supposées indépendantes.

Démonstration de la bonne définition de la loi géométrique

C'est bien une loi de probabilité, car :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p \times (1-p)^{k-1} = p \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k \right) = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Remarque 2.46

Voir les codes `Python` 2.5, page suivante et 2.6, page 125, permettent de produire les figures 2.5, page 126 et 2.6, page 127.

Propriété 2.17

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi géométrique de paramètre p. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration

1. Nous serons plus à l'aise pour démontrer ces résultats avec le cours sur les séries entières.
2. On peut cependant procéder comme ceci, si $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

donc, en dérivant :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - (n+1) \times \frac{x^n}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (il est facile de voir que la série converge), il vient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \times x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Finalement :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times p \times (1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

3. En procédant de même, on montre que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k \times (k-1) \times x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3},$$

d'où

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X \times (X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2\,p \times (1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Session `Python` 2.5 – Fonction de répartition de la loi géométrique

```
from scipy.stats import geom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n , p = 10 , 0.2

l=geom.pmf(np.arange(n+1), p) # loi géométrique (tronquée)

```

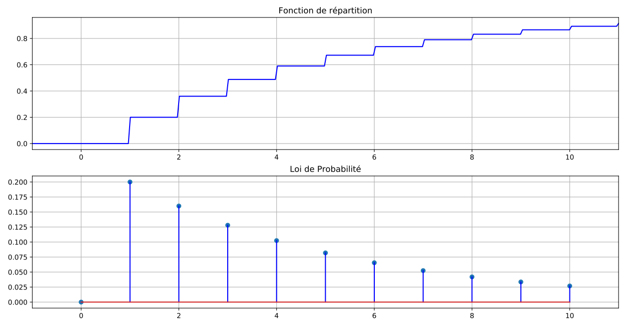
```python
x=np.linspace(-1,11,300)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x,geom.cdf(x, p),'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.grid(True)
plt.xlim(-1,11)

plt.subplot(2,1,2)
plt.stem(np.arange(n+1),l,"b")
plt.title('Loi de Probabilité')
plt.xlim(-1,11)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.6 – Loi géométrique

```python
from scipy.stats import geom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n=10 # troncature de la loi géométrique
p=0.2 # probabilité de succès
N=10000 # nombre d'échantillons

e=geom.rvs(p,size=N) # échantillon
y=[sum(e==k)/N for k in range(n+1)] # fréquence d'apparition dans e

l=geom.pmf(np.arange(n+1), p) # loi géométrique (tronquée)

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(n+1),l,color='b')
plt.title("Théorie")
```

```
plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(n+1),y,color='b')
plt.title("Echantillon")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(n+1),l-y,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

Figure 2.5 – Fonction de répartition de la loi géométrique

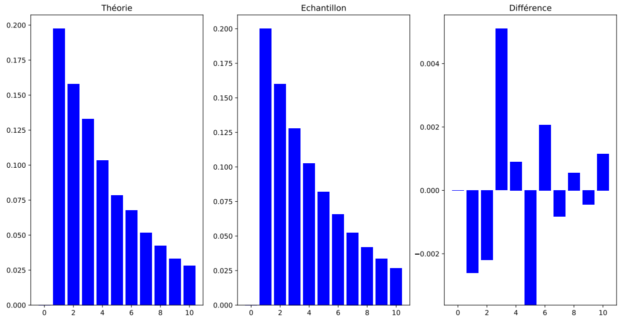


Propriété 2.18 – Caractérisation comme loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors :

$$X \text{ suit une loi géométrique si et seulement si } \forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}_{(X>n)}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k).$$

Figure 2.6 – Loi géométrique



Exercice(s) 2.12

2.12.1 Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$, on suppose que les événements $(X = k)$ et $(Y = l)$ sont toujours indépendants pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^{*2}$.

(a) Calculer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

(b) Retrouver le résultat sans calcul.

2.12.2 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ qui suit une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$. On pose : $Y = 1/X$.

(a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

(b) Établir, pour tout entier m de $\mathbb{N}^{\circ}$, l'existence du moment d'ordre m de Y.

(c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de p.

2.5.1.4 Loi de Poisson

Définition 2.26 – Loi de Poisson

La loi de Poisson intervient pour modéliser une file d'attente, plus précisément le nombre d'individus arrivant dans une file d'attente avant un temps donné. Si X est une `v.a.r.` est une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \text{ et on a } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque 2.47

La justification de la formule est donnée dans l'exemple 2.32, page 174.

Démonstration de la bonne définition de la loi de Poisson

C'est bien une loi de probabilité car :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{=e^{\lambda}} = 1.$$

Remarque 2.48

Voir les codes `Python` 2.7, page suivante et 2.8, page 130, permettent de produire les figures 2.7, page 131 et 2.8, page 132.

Propriété 2.19

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda.$$

Démonstration

1. Il faut d'abord justifier que la série
$$\sum k \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} \text{ est absolument convergente,}$$
ce qui est immédiat avec (par exemple) le critère de d'Alembert.
2. Ensuite :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \times \lambda \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$
3. De même, pour la variance :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \times (k-1) \times e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} = \cdots = \lambda^2,$$
d'où
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X \times (X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Session Python 2.7 – Fonction de répartition de la loi de Poisson

```
from scipy.stats import poisson
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n , L = 10 , 2

l=poisson.pmf(np.arange(n+1), L) # loi de Poisson (tronquée)

x=np.linspace(-1,11,300)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x,poisson.cdf(x, L),'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.grid(True)
plt.xlim(-1,11)

plt.subplot(2,1,2)
```

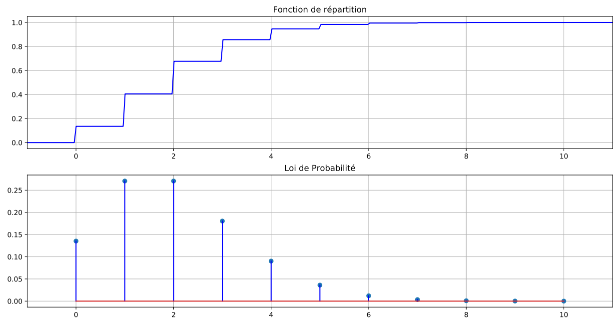
```python
plt.stem(np.arange(n+1),l,"b")
plt.title('Loi de Probabilité')
plt.xlim(-1,11)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.8 – Loi de Poisson

```python
from scipy.stats import poisson
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n=10 # troncature de la loi de Poisson
L=2 # paramètre de la loi de Poisson
N=10000 # nombre d'échantillons

e=poisson.rvs(L,size=N) # échantillon
y=[sum(e==k)/N for k in range(n+1)] # fréquence d'apparition dans e

l=poisson.pmf(np.arange(n+1), L) # loi de Poisson (tronquée)

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(n+1),l,color='b')
plt.title("Théorie")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(n+1),y,color='b')
plt.title("Echantillon")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(n+1),l-y,color='b')
plt.title("Différence")

```

```
plt.show()
```

Figure 2.7 – Fonction de répartition de la loi de Poisson



Propriété 2.20 – Comportement asymptotique

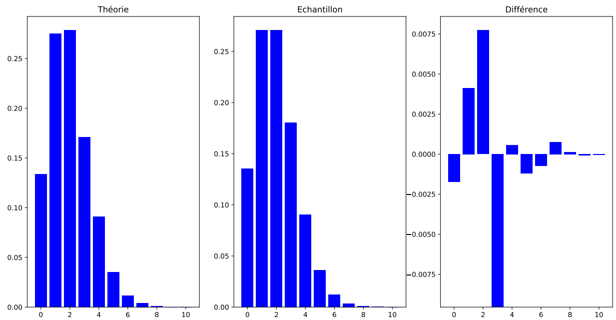
Une `v.a.r.` suivant une loi binomiale de paramètres n et p_n (p_n dépendant de n) « se comporte » lorsque $n \to +\infty$, avec

$$n \times p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda > 0,$$

comme une loi de Poisson de paramètre λ.
Plus précisément, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times p_n = \lambda > 0$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Figure 2.8 – Loi de Poisson



Démonstration

Soit $k \in \mathbb{N}$, fixé. Pour n assez grand, on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p_n^k \times (1 - p_n)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \times p_n^k \times (1 - p_n)^{n-k}.$$

Or :

$$(1 - p_n)^{n-k} = \exp\left((n - k) \times \ln(1 - p_n)\right) = \exp(-n \times p_n + o(n \times p_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda}.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

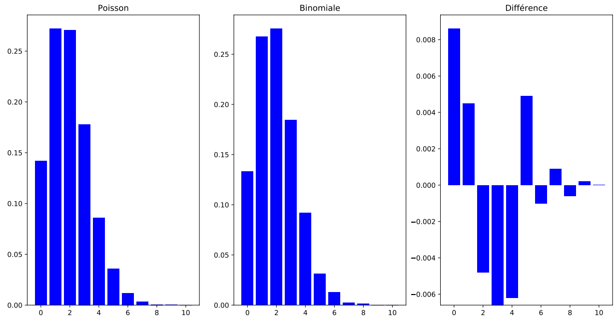
Remarque 2.49

Voir le code **Python** 2.9, page suivante qui produit la figure 2.9, page 134.

Session `Python` 2.9 – Comportement asymptotique d'une loi binomiale vers une loi de Poisson

```python
from scipy.stats import poisson
from scipy.stats import binom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

L=2 # paramètre de la loi de Poisson
n=100 # nombre de tirage
n1=10 # troncature
N=10000 # nombre d'échantillons

ep=poisson.rvs(L,size=N) # échantillon de la loi de Poisson
yp=np.array([sum(ep==k)/N for k in range(n1+1)]) # fréquence d'apparition

eb=binom.rvs(n,L/n,size=N) # échantillon de la loi binomiale
yb=np.array([sum(eb==k)/N for k in range(n1+1)]) # fréquence d'apparition


plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(n1+1),yp,color='b')
plt.title("Poisson")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(n1+1),yb,color='b')
plt.title("Binomiale")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(n1+1),yp-yb,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

Figure 2.9 – Comportement asymptotique d'une loi binomiale vers une loi de Poisson



Exercice(s) 2.13

2.13.1 Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on pose $Y = 1/(X+1)$.

(a) Déterminer la loi de Y.

(b) Montrer que Y admet des moments de tous ordres.

(c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

(d) Exprimer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ à l'aide de la somme :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)^2 \times n!}.$$

2.13.2 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, calculer pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left(X \times (X-1) \times \cdots \times (X-k)\right).$$

2.13.3 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que, pour toute fonction g définie sur $\mathbb{N}$ telle que les espérances existent, on a :

$$\mathbb{E}(N \times g(N)) = \lambda \times \mathbb{E}(g(N+1)).$$

(b) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right).$$

(c) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe un réel λ vérifiant, pour toute fonction g telle que les espérances existent,

$$\mathbb{E}(T \times g(T)) = \lambda \times \mathbb{E}(g(T+1)).$$

La variable aléatoire T suit-elle une loi de Poisson ?

2.13.4 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Quelle(s) valeur(s) de j maximise(nt) $\mathbb{P}(X = j)$?

(b) Pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé, quelle(s) valeur(s) de λ maximise(nt) $\mathbb{P}(X = j)$?

(c) Calculer pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left(|X - \lambda|\right).$$

2.5.2 Lois continues

2.5.2.1 Loi uniforme sur un segment

Définition 2.27 – Loi uniforme

La loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ *($a < b$)* intervient pour modéliser une expérience aléatoire dont le résultat varie dans $[a, b]$ et pour laquelle on n'a pas d'information autre sur le résultat. Si X est une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ (ou de paramètres a et b), on écrit :

$$X \sim \mathcal{U}(a, b), \text{ et on a } \forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b[\\ 1 & \text{si } t \geq b. \end{cases}$$

Remarque 2.50

C'est une loi absolument continue de densité (par exemple) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Remarque 2.51

Voir les codes `Python` 2.10, page suivante et 2.11, page ci-contre, permettent de produire les figures 2.10, page 138 et 2.11, page 139.

Propriété 2.21

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi uniforme sur $[a,b]$. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Démonstration

1. On a immédiatement :
$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\,(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$
2. De même :
$$\int_a^b x^2 \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2 + a\times b + b^2}{3},$$
donc
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2 + a\times b + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2\,a\times b + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Session Python 2.10 – Fonction de répartition et densité d'une loi uniforme

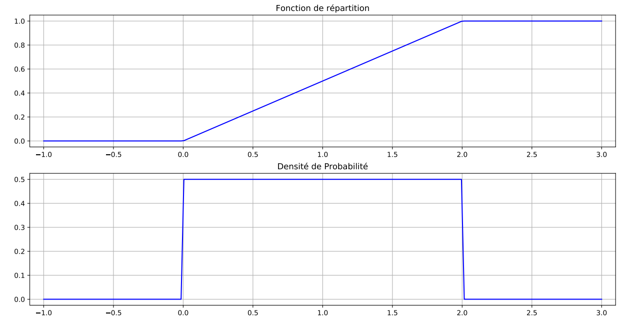
```
from scipy.stats import uniform
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a,b=0,2 # bornes
N=200 # nombre de points
x=np.linspace(a-1,b+1,N)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x,uniform.cdf(x,loc=a,scale=b-a),'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.xlim(a-1.1,b+1.1)
plt.grid(True)

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(x,uniform.pdf(x,loc=a,scale=b-a),"b-")
plt.title('Densité de Probabilité')
plt.xlim(a-1.1,b+1.1)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.11 – Loi uniforme

```
from scipy.stats import uniform
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a,b=0,2 # bornes
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons

x=np.linspace(a-1,b+1,N)
```

```
plt.hist(uniform.rvs(loc=a,scale=b-a,size=NN),normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,uniform.pdf(x,loc=a,scale=b-a),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure 2.10 – Fonction de répartition et densité d'une loi uniforme



Remarque 2.52

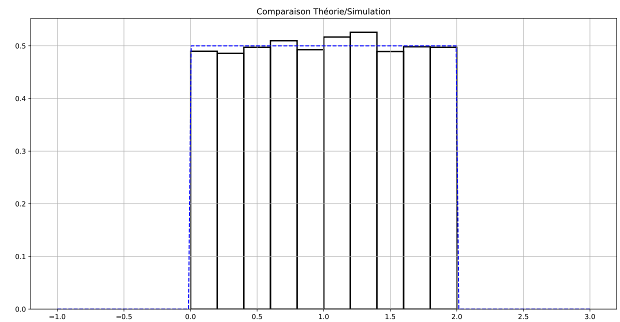
En `Wxmaxima`, on peut utiliser la fonction `random`. Voir le code `Wxmaxima` 2.3, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 2.3 – Loi uniforme

(%i1) `makelist(random(1.0),k,1,20);`

(%o1) [0.9138095996129, 0.19518461779779, 0.48239052485162, 0.35544005715929, 0.25223887668538, 0.41556272272148, 0.61257388925382, 0.84181265533592, 0.50558944464381, 0.67846199501851,

Figure 2.11 – Loi uniforme



0.036393315899922, 0.62529751834181, 0.99373145786948, 0.04158924615445, 0.6326253893666,
0.59315218151698, 0.65465776611451, 0.47071067403366, 0.051923553664518, 0.002327880375314]

(%i2)
```
a : 2$
b : 4$
makelist(a+(b-a)*random(1.0),k,1,20);
```

(%o4) [2.631215392571823, 3.720459052489623, 2.084130953081714, 3.697339885698787, 2.465955121488873,
3.382228389244319, 3.223111616387312, 3.74228361554531, 2.303489027934825, 3.272335379002933,
3.317065631954353, 3.181243957200707, 2.936893991323437, 3.54169472917822, 3.40910548616748,
3.031545302310609, 3.497207059533352, 2.640102991293867, 2.905412579006282, 2.256424015895997]

Exercice(s) 2.14

2.14.1 Un bus passe toutes les 10 minutes à l'arrêt près de chez moi. Quel va être mon temps d'attente moyen ?

2.14.2 Soit U une `v.a.r.` suivant une loi $\mathcal{U}(0,1)$, et soit $q \in]0,1[$. Quelle est la loi de :

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(q)} \right\rfloor \ ?$$

2.14.3 Soit φ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\,\pi}} \, \mathrm{d}t.$$

Soit, de plus, U_0 une `v.a.r.` de loi $\mathcal{U}(0,1)$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ U_{n+1} = \varphi(U_n).$$

(a) Montrer que l'on définit ainsi des lois à densité.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n \leq x).$$

(c) Conclusion ?

2.14.4 Soit U une `v.a.r.` suivant une loi $\mathcal{U}(0,1)$. On pose

$$X = -\ln\left(\frac{2\,U}{1+U}\right).$$

(a) Calculer la fonction de répartition de X. X est-elle une `v.a.r.` absolument continue ?

(b) Existence et calcul de $\mathbb{E}(X)$.

2.14.5 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition F_X. On pose : $Y = F_X(X)$.

(a) On suppose F_X continue, quelle est la loi de Y ? Que se passe-t-il si F_X n'est plus continue ?

(b) Lorsque F_X est strictement croissante, continue, que peut-on dire de la `v.a.r.` $Z = F_X^{-1}(U)$ où U suit une loi $\mathcal{U}(0,1)$?

(c) Dans le cas général, on pose :

$$\forall x \in]0,1[, \ G(x) = \inf\left\{u \in \mathbb{R}, \ F_X(u) \geq x\right\}.$$

Quelle est la loi de $G(U)$, lorsque U suit une loi $\mathcal{U}(0,1)$?

2.14.6 On a un feu de circulation qui fonctionne de la manière suivante : il est vert pendant un temps $v > 0$ et rouge pendant un temps $r > 0$. Un automobiliste arrive à ce feu. On appelle T le temps d'attente au feu de cet automobiliste.

(a) Comment modéliser le temps d'arrivée U de l'automobiliste au feu ?
(b) Exprimer T en fonction de U.
(c) Calculer $\mathbb{P}(T=0)$ et pour $t \neq 0$, $\mathbb{P}(T=t)$.
(d) Quelle est la loi de T ? Son espérance $\mathbb{E}(T)$?

2.5.2.2 Loi exponentielle

Définition 2.28 – Loi exponentielle

La loi exponentielle intervient pour modéliser une expérience aléatoire dont le résultat est un réel ≥ 0 et qui ne tient pas compte du passé (on dit que la loi est *sans mémoire*). Si X est une `v.a.r.` suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on écrit :

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda), \text{ et on a } \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\lambda \times x\right) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Remarque 2.53

C'est une loi absolument continue de densité (par exemple) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda \times e^{-\lambda \times x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Remarque 2.54

Pourquoi cette loi est-elle sans mémoire ? Parce que l'on a :

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \mathbb{P}(X > x + y / X > y) = \mathbb{P}(X > x).$$

Démonstration

En effet, si x et y sont > 0 :

$$\mathbb{P}(X > x + y / X > y) = \frac{\mathbb{P}\left((X > x + y) \cap (X > y)\right)}{\mathbb{P}(X > y)} = \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > y)} = \frac{e^{-\lambda \times (x+y)}}{e^{-\lambda \times y}} = e^{-\lambda \times x} = \mathbb{P}(X > x).$$

Remarque 2.55

Réciproquement, si X est une `v.a.r.` *continue*, qui vérifie la relation ci-dessus, alors c'est une loi exponentielle.

Démonstration

Soit la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \mathbb{P}(X > x),$$

elle vérifie donc l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ f(x + y) = f(x) \times f(y).$$

Elle est de plus continue, on a vu que cela caractérisait une exponentielle.

Remarque 2.56

Voir les codes **Python** 2.12, page ci-contre et 2.13, page suivante, permettent de produire les figures 2.12, page 144 et 2.13, page 145.

Propriété 2.22

Soit X est une `v.a.r.` suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Démonstration

1. La fonction $x \mapsto |x| \times \lambda \times e^{-\lambda \times x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est, par exemple, un $o(1/x^2)$ au voisinage de $+\infty$) et

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x \times \lambda \times e^{-\lambda \times x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

Par une simple intégration par parties... (Voir le code **Wxmaxima** 2.4, page 145.

2. De même, la fonction $x \mapsto x^2 \times \lambda \times e^{-\lambda \times x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et (voir le code **Wxmaxima** 2.5, page 145) :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_0^{+\infty} x^2 \times \lambda \times e^{-\lambda \times x}\, \mathrm{d}x - \left(\int_0^{+\infty} x \times \lambda \times e^{-\lambda \times x}\, \mathrm{d}x \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Session Python 2.12 – Fonction de répartition et densité d'une loi exponentielle

```python
from scipy.stats import expon
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

L=2 # paramètre
N=200 # nombre de points
x=np.linspace(-0.2,L+4,N)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x,expon.cdf(x,scale=1/L),'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.xlim(-0.4,L+6)
plt.grid(True)

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(x,expon.pdf(x,scale=1/L),"b-")
plt.title('Densité de Probabilité')
plt.xlim(-0.4,L+6)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.13 – Loi exponentielle

```python
from scipy.stats import expon
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
L=2 # paramètre
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons

x=np.linspace(-0.2,L+4,N)

plt.hist(expon.rvs(scale=1/L,size=NN),30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,expon.pdf(x,scale=1/L),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure 2.12 – Fonction de répartition et densité d'une loi exponentielle

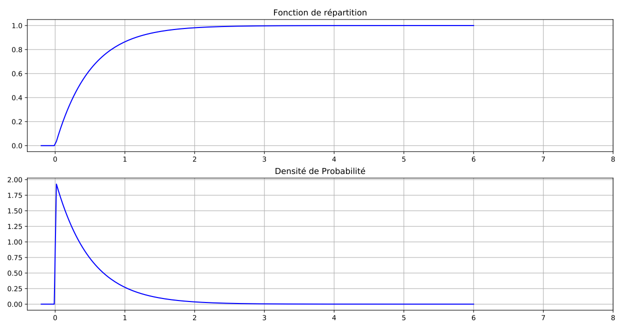
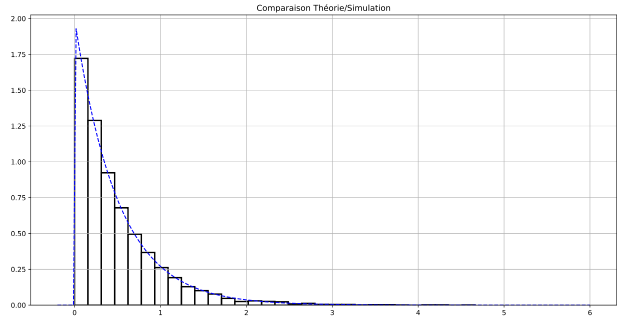


Figure 2.13 – Loi exponentielle



Session Wxmaxima 2.4 – Espérance d'une loi exponentielle

```
(%i1) integrate(x*a*exp(-a*x),x,0,inf);
```

Is a positive, negative, or zero ?p ;

(%o1) $\frac{1}{a}$

Session Wxmaxima 2.5 – Variance d'une loi exponentielle

```
(%i1) integrate(x^2*a*exp(-a*x),x,0,inf)-(integrate(x*a*exp(-a*x),x,0,inf))^2;
```

Is a positive, negative, or zero ?p ;

(%o1) $\frac{1}{a^2}$

Exercice(s) 2.15

2.15.1 Un commerçant dispose d'un stock égal à s. La demande qu'il prévoit est une `v.a.r.` X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Il se pose la question de savoir combien acheter de quantité q pour augmenter son stock. Le prix d'achat est a, le prix de vente est $v > a$. Quelle est la commande qui optimisera son bénéfice ?

2.15.2 Soit X une `v.a.r.` suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Quelles sont les lois de :

(a) $Y = X^2$?

(b) Z définie par :

$$Z = \begin{cases} X & \text{si } 0 \leq X \leq 1 \\ 2\,X & \text{sinon ?} \end{cases}$$

2.15.3 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, suivant des lois exponentielles de paramètre λ.

(a) Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

(b) Montrer que

$$\min(X, Y) \text{ et } \mathbb{1}_{X \leq Y} \text{ sont indépendantes.}$$

(c) Interpréter.

(d) Le résultat est-il encore valable si les `v.a.r.` suivent des lois exponentielles de paramètres différents ?

2.5.2.3 Loi normale

Définition 2.29 – Loi normale

La loi normale intervient pour modéliser une expérience aléatoire dans de nombreux cas (notamment, certains phénomènes naturels). Si X est une `v.a.r.` suivant une loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ (où $\sigma > 0$), on écrit :

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), \text{ et on a } \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t.$$

On a souvent affaire au cas $m = 0$, $\sigma = 1$. On dit alors que la loi est *centrée, réduite*. On la note, bien sûr :

$$\mathcal{N}(0, 1).$$

Démonstration de la bonne définition de la loi normale

C'est bien une loi de probabilité car :

$$\frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\,\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t \underset{u=(t-m)/\sigma}{=} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u = 1,$$

on reconnaît une intégrale de Gauss. On peut vérifier le calcul avec `Wxmaxima` (voir le code 2.6, de la présente page).

Session `Wxmaxima` 2.6 – Loi normale

```
(%i1) integrate(exp(-u^2/2),u,minf,inf);
```

(%o1) $\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}$

Remarque 2.57

C'est clairement une loi absolument continue de densité (par exemple) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\,\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right).$$

Remarque 2.58

On se sert souvent des lois normales pour modéliser les bruits, etc.

Remarque 2.59

Voir les codes **Python** 2.14, page suivante et 2.15, page ci-contre, permettent de produire les figures 2.14, page 150 et 2.15, page 151.

Propriété 2.23

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi normale de paramètres m et σ^2. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = m \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}(X) = \sigma^2.$$

Démonstration

1. On a, par définition :

$$\mathbb{E}\left(X-m\right) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\,\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m) \times \exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \, \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)\right) \, \mathrm{d}x,}_{=0}$$

or

$$\mathbb{E}\left(X-m\right) = 0 = \mathbb{E}(X) - m.$$

2. De même, par une intégration par parties (IPP), on a :

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\,\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \times \exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \, \mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\,\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \times \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right) \, \mathrm{d}x\,.}_{=\sigma^2}$$

Session Python 2.14 – Fonction de répartition et densité d'une loi normale

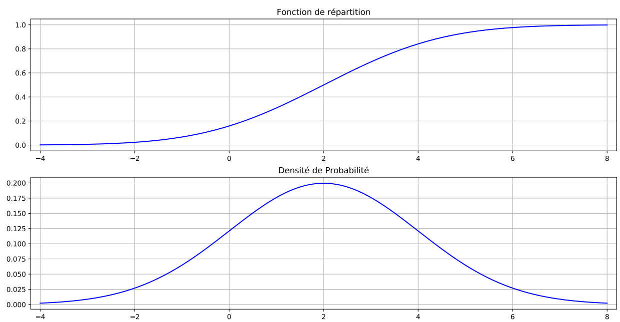
```
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

m=2 # moyenne
s=2 # écart-type
N=200 # nombre de points
x=np.linspace(m-3*s,m+3*s,N)

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(x,norm.cdf(x,loc=m,scale=s),'b-')
plt.title('Fonction de répartition')
plt.xlim(m-3*s-0.2,m+3*s+0.2)
plt.grid(True)

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(x,norm.pdf(x,loc=m,scale=s),"b-")
plt.title('Densité de Probabilité')
plt.xlim(m-3*s-0.2,m+3*s+0.2)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.15 – Loi normale

```
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

m=2 # moyenne
s=2 # écart-type
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons
```

```python

x=np.linspace(m-3*s,m+3*s,N)

plt.hist(norm.rvs(loc=m,scale=s,size=NN),30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,norm.pdf(x,loc=m,scale=s),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure 2.14 – Fonction de répartition et densité d'une loi normale

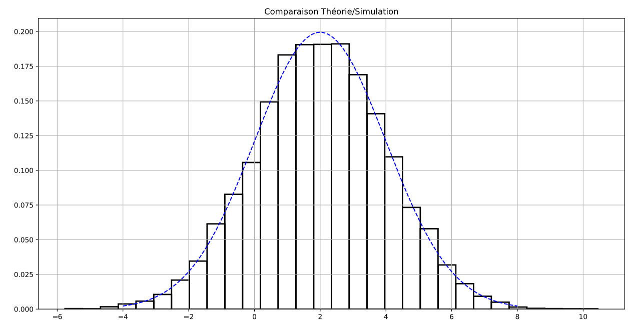


Propriété 2.24 – Comportement asymptotique d'une loi binomiale

Soit X une `v.a.r.` suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) avec $p \in]0, 1[$ et $Y_n = \dfrac{X - n \times p}{\sqrt{n \times p \times (1-p)}}$ alors Y_n tend vers une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ dans le sens suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y_n \leq t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, \mathrm{d}x.$$

Figure 2.15 – Loi normale



Remarque 2.60

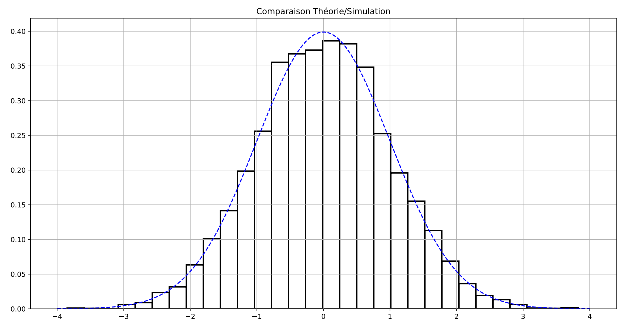
voir le code Python 2.16, de la présente page qui permet d'obtenir le figure 2.16, page suivante.

Session Python 2.16 – Comportement asymptotique d'une binomiale vers la loi normale

```python
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import binom
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n=10000 # nombre de tirage
p=0.2 # probabilité de succès
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons

eb=binom.rvs(n,p,size=NN) # échantillon de la loi binomiale
```

```python
e=(eb-n*p)/np.sqrt(n*p*(1-p)) # normalisation

x=np.linspace(-4,4,N)

plt.hist(e,30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,norm.pdf(x),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure 2.16 – Comportement asymptotique d'une binomiale vers la loi normale



Exercice(s) 2.16

2.16.1 Soit X une `v.a.r.` suivant une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer la loi de $Y = e^X$.

2.16.2 Soit X une `v.a.r.` suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que, pour $x > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x \times \sqrt{2\,\pi}} \tag{2.18}$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq x) \leq 2\,\frac{e^{-x^2/2}}{x \times \sqrt{2\,\pi}} \tag{2.19}$$

2.16.3 (Exercice avec `R`). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de `v.a.r.` définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi. On suppose qu'elles ont une espérance $m = \mathbb{E}(X_0)$ et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_0)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{X_0 + \cdots + X_{n-1}}{n} \text{ et } T_n = \sqrt{n} \times (S_n - m)\,.$$

On pourra taper `help(distributions)` dans `R`.

(a) On prend des lois exponentielles de paramètre λ. Simuler le comportement, pour un λ pris quelconque, de S_n et de T_n, pour n « grand ». Qu'observe-t-on ?

(b) Reprendre l'exercice avec des lois uniformes $\mathcal{U}(0,1)$.

(c) Reprendre l'exercice avec des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour une valeur de λ pris quelconque.

(d) On prend maintenant une loi de Cauchy, dont la densité est :

$$f\ :\ x \mapsto \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Que peut-on observer sur le comportement de S_n ?

(e) On prend maintenant une loi uniforme U sur $]0,1[$, et on pose $X_0 = 1/\sqrt{U}$. Que peut-on observer sur le comportement de S_n et de T_n ?

2.6 Compléments sur les variables aléatoires

2.6.1 Vecteur aléatoire

Définition 2.30 – et propriété

- Un *vecteur aléatoire réel* sur Ω est une fonction mesurable $X : \Omega \to \mathbb{R}^p$:

$$\forall B \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^p),\ X^{-1}(B) \in \mathcal{T}.$$

- Ses applications composantes $X = (X_1, \ldots, X_p)$ sont alors des variables aléatoires réelles.
- La loi de X s'appelle la *loi conjointe* des variables $(X_1, \ldots, X_p)$.
- Les lois des variables X_1, …, X_p s'appellent les *lois marginales*.

Remarque 2.61

Si $X_1, \ldots, X_p$ sont des variables aléatoires alors $X = (X_1, \ldots, X_p)$ est un vecteur aléatoire.

Définition 2.31

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et $X = (X_1, \ldots, X_p)$ ses variables aléatoires coordonnées.
La *fonction de répartition* de X est définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$F_X : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \mathbb{P}((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \cdots \cap (X_p \leq x_p)).$$

Remarque 2.62

Pour déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe, on peut utiliser la fonction de répartition : soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et F_X sa fonction de répartition. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante tendant vers $+\infty$:

- $(X_1 \leq x_1) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_1 \leq x_1, X_2 \leq y_n)$;
- la suite $\Big((X_1 \leq x_1, X_2 \leq y_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion) ;

— par continuité croissante : $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq y_n)$.

— Par caractérisation séquentielle on retrouve la fonction de répartition de X_1 :

$$F_{X_1}(x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) = \lim_{x_2 \to +\infty} \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \lim_{x_2 \to +\infty} F_X(x_1, x_2).$$

Exemple 2.22

Soit $\Omega = [0,1]^2$, on choisit (de manière uniforme) un point sur le carré de coordonnées données par les `v.a.r.` (X_1, X_2).

1. *Quelle est la loi de* (X_1, X_2) *?* Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, la valeur de la fonction de répartition $F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$ est donnée par l'aire de l'intersection de Ω avec $]-\infty, x_1]\times]-\infty, x_2]$. C'est donc :

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \text{ ou } x_2 \leq 0 \\ x_1 \times x_2 & \text{si } x_1 \in]0,1] \text{ et } x_2 \in]0,1] \\ x_1 & \text{si } x_2 > 1 \text{ et } x_1 \in]0,1] \\ x_2 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 \in]0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. *A-t-elle une densité ?* On trouve facilement :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Quelle est la loi marginale de* X_1 *?* On obtient immédiatement :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ x_1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x_1 > 1 \end{cases}$$

on a donc clairement (ce qui était assez évident dès le départ) :

$$X_1 \sim \mathcal{U}(0,1).$$

Exemple 2.23

Reprenons le même problème lorsque Ω est :

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [0,1],\ y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\right\},$$

(c'est donc un triangle rectangle).

1. *Quelle est la loi de* (X_1, X_2) *?* On obtient, par le même raisonnement sur les aires que :

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \text{ ou } x_2 \leq 0 \\ 2\,x_1 \times x_2 & \text{si } x_1 \in]0,1],\ x_2 \in]0,1] \text{ et } x_1+x_2 \leq 1 \\ 2\,x_1 \times x_2 - (x_1+x_2-1)^2 & \text{si } x_1 \in]0,1],\ x_2 \in]0,1] \text{ et } x_1+x_2 > 1 \\ 2\,x_2 - x_2^2 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 \in]0,1] \\ 2\,x_1 - x_1^2 & \text{si } x_2 > 1 \text{ et } x_1 \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x_1 > 1 \text{ et } x_2 > 1 \end{cases}$$

2. *A-t-elle une densité ?* On trouve facilement :

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ f_{(X_1,X_2)}(x_1 x_2) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x_1,x_2) \in \Omega \text{ (c'est l'inverse de l'aire de } \Omega) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Quelle est la loi marginale de* X_1 *?* On obtient immédiatement :

$$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ 2\,x_1 - x_1^2 & \text{si } x_1 \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x_1 > 1 \end{cases}$$

Remarque 2.63

Voir les sessions `Python` 2.17, page suivante et 2.18, page 164 qui engendrent les figures 2.17, page 158 et 2.18, page 165.

Session Python 2.17 – Fonction de répartition de l'exemple 2.23, page précédente

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def F(x):
    if x<0:
        return 0
    elif x<1:
        return 2*x-x**2
    return 1

npts=100
plt.plot([-2+4*k/npts for k in range(npts+1)],
         [F(-2+4*k/npts) for k in range(npts+1)],'b-')
plt.show()
```

2.6.1.1 Cas particulier : vecteur aléatoire discret

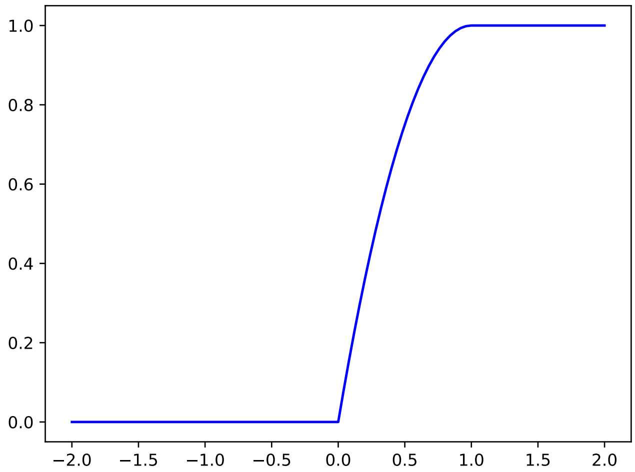
Définition 2.32

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et $X = (X_1, \ldots, X_p)$ ses variables aléatoires coordonnées.
Si X_1, …, X_p sont des variables aléatoires discrètes, on dit que X est un *vecteur aléatoire discret*.

Remarque 2.64

1. Si X est discret alors la famille $\Big(\mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_p = x_{i_p})\Big)_{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p}$ est sommable, positive et de somme 1.
2. Dans la pratique, on commence par écrire un tableau de loi conjointe.

Figure 2.17 – Fonction de répartition de l'exemple 2.23, page 156



Exemple 2.24

On lance plusieurs fois une pièce qui a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur "pile", on note X la variable aléatoire égale au rang du premier tirage donnant "pile" et Y celui du second tirage. Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

Remarque 2.65

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes, $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ et $Y(\Omega) = \{y_j\}_{j\in J}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$. Par la formule des probabilités totales :

$$\sum P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \text{ est sommable et :}$$

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j).$$

Exemple 2.25

Reprendre l'exemple précédent et déterminer la loi marginale de Y.

Remarque 2.66

A partir du tableau de la loi conjointe de (X, Y), on visualise :

- la somme $X + Y$ et la différence $Y - X$ (diagonales) ;
- le maximum $\max(X, Y)$ et le minimum $\min(X, Y)$ (demi-carrés) ;
- l'égalité $(X = Y)$ (diagonale), ...

On justifiera à chaque fois les calculs en utilisant la formule des probabilités totales. mais, d'autres méthodes peuvent êtres proposées par l'énoncé. Par exemple, si $U = \max(X, Y)$ (avec pour simplifier$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$) alors $(U \leq n) = (X \leq n, Y \leq n)$ et $P(U \leq n) = P(U \leq n - 1) + P(U = n)$ (par incompatibilité).

Exemple 2.26

Reprendre l'exemple précédent et déterminer la loi de $Z = Y - X$.

2.6.1.2 Cas particulier : vecteur aléatoire absolument continu

Remarque 2.67

Pour les vecteurs aléatoires discrets, les techniques de calculs sont basées essentiellement sur les familles sommables et le théorème de sommation par paquets. Les outils analogues dans le cas absolument continu reposent sur les fonctions intégrables de plusieurs variables et les Théorèmes de Fubini. Nous présentons ici des versions suffisantes pour ce cours et des versions plus complètent seront vues dans un prochain cours.

Remarque 2.68

Les deux Théorèmes suivants (Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue) sont présentés pour des fonctions de deux variables mais s'étendent à des fonctions de p variables pour $p \geq 2$.

Théorème 2.3 – Fubini-Tonelli

Soit $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ mesurable pour la tribu borélienne (I_1 et I_2 sont des intervalles de $\mathbb{R}$), on a l'équivalence :

$$\begin{cases} \triangleright \text{ pour presque tout } x_1 \in I_1,\ x_2 \mapsto |f(x_1,x_2)| \text{ est intégrable sur } I_2 \\ \triangleright\ x_1 \mapsto \displaystyle\int_{I_2} |f(x_1,x_2)|\,\mathrm{d}x_2 \text{ est intégrable sur } I_1 \end{cases}$$
$$\iff$$
$$\begin{cases} \triangleright \text{ pour presque tout } x_2 \in I_2,\ x_1 \mapsto |f(x_1,x_2)| \text{ est intégrable sur } I_1 \\ \triangleright\ x_2 \mapsto \displaystyle\int_{I_1} |f(x_1,x_2)|\,\mathrm{d}x_1 \text{ est intégrable sur } I_2 \end{cases}.$$

Remarque 2.69

Soit $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ mesurable pour la tribu borélienne vérifiant une des deux propriétés du Théorème précédent, alors f est **intégrable** sur $I_1 \times I_2$.

Remarque 2.70

Pour montrer que $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ de deux variables est intégrable, on est ramené à montrer l'intégrabilité de deux fonctions d'une variable.

Exemple 2.27

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{e^{-|x \times y^{1/3}|}}{1+y^2}.$$

▷ Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto f(x,y) = \dfrac{e^{-|x \times y^{1/3}|}}{1+y^2} = C(y) \times e^{-\lambda(y) \times |x|}$ (avec $C(y)$ et $\lambda(y) = |y|^{1/3} > 0$ indépendant de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}$, paire et, par les intégrales de références :

$$\forall \lambda > 0, \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, x} \, \mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

▷ On a alors, pour tout $y \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y^{1/3}| \times x}}{1+y^2} \, \mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|y^{1/3}| \times x}}{1+y^2} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{|y|^{1/3} \times (1+y^2)}.$$

▷ La fonction $\varphi : y \mapsto \dfrac{2}{|y|^{1/3} \times (1+y^2)}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a $|\varphi(y)| \underset{y \to 0^+}{\sim} \dfrac{2}{y^{1/3}}$ et, par les intégrales de Riemann, $y \mapsto \dfrac{2}{y^{1/3}}$ est intégrable sur $]0,1]$ donc φ est intégrable sur $]0,1]$.

De manière similaire, $|\varphi(y)| \underset{y \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{y^{7/3}}$ et, par les intégrales de Riemann, $y \mapsto \dfrac{2}{y^{7/3}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et, par parité (φ est paire), φ est intégrable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Par le Théorème de Fubini-Tonelli, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarque importante 2.71

1. Si $C \subset \mathbb{R}^p$ est mesurable et bornée alors $\mathbb{1}_C$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.
2. Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est mesurable et bornée alors $f \times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.
3. En conséquence, si $C \subset \mathbb{R}^p$ est mesurable et bornée et si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est continue alors $f \times \mathbb{1}_C$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$.

Théorème 2.4 – Fubini

Si $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^2$ *alors :*
$\displaystyle\int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 \overset{\text{Pté}}{=} \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1$, *et on note :*

$$\iint_{I_1\times I_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \overset{\text{Def}}{=} \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1.$$

Exemple 2.28

On reprend l'exemple précédent et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{e^{-|x\times y^{1/3}|}}{1+y^2}.$$

On a montré que f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors, par le Théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{(1+y^2)\times|y|^{1/3}}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{0}^{+\infty}\frac{4}{(1+y^2)\times|y|^{1/3}}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{0}^{+\infty}\frac{6}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{3}\,\pi}{3}\end{aligned}$$

après avoir réalisé le changement de variable $t = y^{2/3} = \varphi(y)$ où φ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

Définition 2.33

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^p$ et $X = (X_1, \dots, X_p)$ ses variables aléatoires coordonnées. On dit que X est *absolument continue* ou *admet une densité* lorsqu'il existe $f_X : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ intégrable vérifiant :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p,\ F_X(x_1, \dots, x_p) = \iiint_{\prod\limits_{k=1}^{p}]-\infty, x_k]} f_X(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}.$$

Remarque 2.72

1. On note aussi :
$$(X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap \cdots \cap (X_p \leq x_p) = (X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_p \leq x_p).$$
2. Si X admet une densité alors f_X est intégrable sur $\mathbb{R}^p$, positive et d'intégrale 1.

Remarque 2.73

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire absolument continu et :

$$(x, y) \mapsto f_{(X,Y)}(x, y) \text{ une densité de } (X, Y).$$

Par le théorème de fubini :
- $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\,\mathrm{d}y$ est défini (presque partout) ;
- f_X, la fonction prolongée par 0 ailleurs, est une densité de X.

Exemple 2.29

Reprendre les empleses 2.22, page 155 et 2.23, page 156.

Session Python 2.18 – Densité de l'exemple 2.23, page 156

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    if x<0:
        return 0
    elif x<1:
        return 2*(1-x)
    return 0

npts=100
plt.plot([-2+4*k/npts for k in range(npts+1)],
         [f(-2+4*k/npts) for k in range(npts+1)],'b-')
plt.show()
```

Remarque importante 2.74

Si (X_1, X_2) a une densité, on montre que X_1 et X_2 aussi mais si X_1 et X_2 ont une densité, il se peut que $X = (X_1, X_2)$ n'en ait pas.

Remarque 2.75

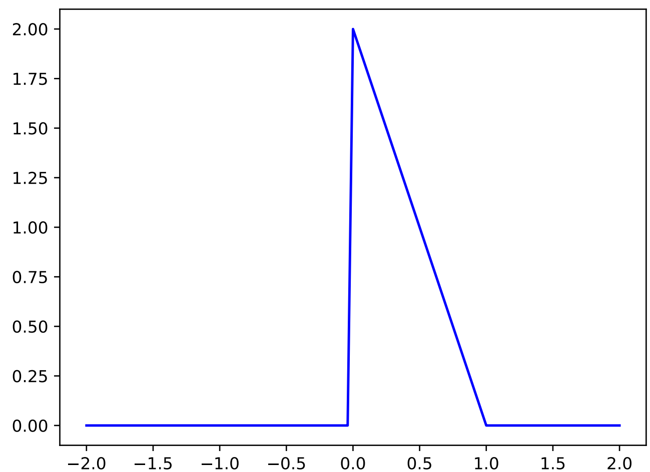
De manière plus générale, la méthode de la fonction bornée permet de montrer qu'une variable aléatoire (ou qu'un vecteur aléatoire) est absolument continue et d'en déterminer une densité.

Propriété 2.25 – Méthode de la fonction bornée

Si :

1. X est un vecteur aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ qui admet une densité ;
2. $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est mesurable et $Y = g(X)$;

Figure 2.18 – Densité de l'exemple 2.23, page 156



3. $\psi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ est telle que :

$$\forall \phi \text{ mesurable et bornée }, \iiint_{\mathbb{R}^q} \phi(\underline{y}) \times \psi(\underline{y})\, \mathrm{d}\underline{y} = \iint_{\mathbb{R}^p} \phi \circ g(\underline{x}) \times f_X(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}\,;$$

alors :

$$Y \text{ admet une densité et on peut prendre } f_Y = \psi.$$

Propriété 2.26 – Somme de deux v.a.r. absolument continues

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire absolument continue de densité $f_{(X,Y)}$, alors $X+Y$ a pour densité :

$$\boxed{x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(t, x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x-t, t)\,\mathrm{d}t.}$$

Démonstration

La fonction $g : (X,Y) \mapsto X+Y$ est mesurable et, pour toute fonction ϕ mesurable et bornée :

1. comme $\left|\phi \circ g(x,y) \times f_{(X,Y)}(x,y)\right| \leq M \times f_{(X,Y)}(x,y)$ et $x \mapsto f_{(X,Y)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour presque tout y) alors $x \mapsto \phi \circ g(x,y) \times f_{(X,Y)}(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour presque tout y) et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\phi \circ g(x,y) \times f_{(X,Y)}(x,y)\right| \mathrm{d}x \leq M \times \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$
2. De même, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\phi \circ g(x,y) \times f_{(X,Y)}(x,y)\right| \mathrm{d}x$ (prolongée par 0 quand l'intégrale est divergente) est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par le Théorème de Fubini-Tonelli, $(x,y) \mapsto \phi \circ g(x,y) \times f_{(X,Y)}(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et, par le Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \phi \circ g(x,y) \times f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x+y) \times f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) \times f_{(X,Y)}(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}y \text{ en posant } u = x+y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) \times \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u-y,y)\,\mathrm{d}y}_{=\psi(u)}\right) \mathrm{d}u \text{ par Fubini} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) \times \psi(u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Par la méthode de la fonction bornée : $X+Y$ admet une densité, par exemple :

$$f_{X+Y}(u) = \psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u-y,y)\,\mathrm{d}y,$$

et on retrouve l'autre formulation par changement de variable.

Exercice(s) 2.17

2.17.1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et un couple de `v.a.r.` (X, Y) de densité conjointe :

$$f_{(X,Y)} \ : \ (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \\ \lambda^2 \times \exp\left(-\lambda \times (x+y)\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est la loi de :

$$(X+Y, X-Y)\ ?$$

2.6.1.3 Espérance de vecteur aléatoire - covariance

Définition 2.34

Soit un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_p)$ tel X_k admette une espérance pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ alors on dit que X *admet une espérance* et on pose :

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_p)) \in \mathbb{R}^p.$$

Remarque 2.76

Comme précédemment, si $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est mesurable, on pourra utiliser un théorème du transfert pour déterminer si $\varphi(X)$ admet une espérance.

1. Cas discret : si $X = (X_1, \ldots, X_p)$ est discret alors $\varphi(X)$ *admet une espérance* lorsque la famille $\Big(\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \times \mathbb{P}(X = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}))\Big)_{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p}$ est sommable et alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p} \varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) \times \mathbb{P}(X = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})).$$

2. Cas à densité : si X admet une densité alors $\varphi(X)$ *admet une espérance* lorsque la fonction $\underline{x} \mapsto \varphi(\underline{x}) \times f_X(\underline{x})$ est

intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et alors :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \iiint_{\mathbb{R}^p} \varphi(\underline{x}) \times f_X(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}.$$

Définition 2.35

Soit $X = (X_1, \ldots, X_p)$ un vecteur aléatoire qui admet une espérance :

1. on appelle *covariance* de X_i et X_j la quantité

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}\left((X_i - \mathbb{E}(X_i) \times (X_j - \mathbb{E}(X_j))\right) = \mathbb{E}(X_i \times X_j) - \mathbb{E}(X_i) \times \mathbb{E}(X_j),$$

   qui est défini lorsque $\varphi_{i,j}(X)$ admet une espérance où $\varphi_{i,j}(\underline{x}) = x_i \times x_j$;
2. on dit alors que X_i et X_j admettent une covariance ;
3. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)$;
4. la matrice de terme général $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j)$ s'appelle la *matrice de covariance* de X.

Exemple 2.30

On lance plusieurs fois une pièce qui a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur "pile", on note X la variable aléatoire égale au rang du premier tirage donnant "pile" et Y celui du second tirage. Calculer la covariance et la matrice de covariance.

Proposition 2.9 – et définition

Soit (X, Y) un couple de **v.a.r** *admettant des variances non nulles alors :*

1. *(X, Y) admet une covariance ;*
2. $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \times \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}} \in [-1, 1]$ *est le* coefficient de corrélation linéaire *de X et de Y.*

Démonstration

On utilise une inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.6.2 `v.a.r.` indépendantes

2.6.2.1 Définition et généralités

Définition 2.36

Soit X_1,... X_p des `v.a.r.` sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On dit qu'elles sont *indépendantes* si elles vérifient, en notant $X = (X_1, \ldots, X_p)$:

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in]-\infty, +\infty[^p,\ F_X(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{k=1}^{p} F_{X_k}(x_k).$$

Remarque 2.77

Cela revient à dire qu'il suffit que les événements $\big((X_1 \leq x_1), \ldots, (X_p \leq x_p)\big)$ sont indépendants.

Remarque 2.78

On en déduit facilement que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_p) \in]-\infty, +\infty[^p,\ \forall (b_1, \ldots, b_p) \in \prod_{k=1}^{p}]a_k, +\infty[,\ \big((a_1 < X_1 \leq b_1), \ldots, (a_p < X_p \leq b_p)\big) \text{ sont indépendants.}$$

Propriété 2.27 – Cas discret

Si les `v.a.r.` sont discrètes (par exemple, à valeurs dans $\mathbb{N}$), on a alors :

$$(X_1, \ldots, X_p) \text{ indépendantes } \iff \forall (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p,\ \mathbb{P}\big((X_1 = n_1) \cap \cdots \cap (X_p = n_p)\big) = \prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}\left(X_k = n_k\right).$$

Propriété 2.28 – Cas absolument continu

Si le vecteur aléatoire X est absolument continu (de densité f_X), alors les `v.a.r.` X_k sont absolument continues (de densité f_{X_k}) et on a :

$$(X_1, \ldots, X_p) \text{ indépendantes } \iff$$

$$\left[\exists N' \subset \mathbb{R}^p,\ \lambda - \text{négligeable},\ \forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \setminus N',\ f_X(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{k=1}^{p} f_{X_k}(x_k)\right].$$

Proposition 2.10

Soit $X = (X_1, X_2)$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Soit f_1 et f_2 deux fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telles que $f_1(X_1)$, $f_2(X_2)$ et $f_1(X_1) \times f_2(X_2)$ sont intégrables, alors :

$$(X_1, X_2) \text{ indépendantes } \Rightarrow \mathbb{E}\left(f_1(X_1) \times f_2(X_2)\right) = \mathbb{E}\left(f_1(X_1)\right) \times \mathbb{E}\left(f_2(X_2)\right).$$

La réciproque est fausse...

Démonstration

1. Si on prend $f_1 = \mathbb{1}_{]-\infty, x_1]}$ et $f_2 = \mathbb{1}_{]-\infty, x_2]}$ où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)\right) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1),\ \mathbb{E}\left(f_2(X_2)\right) = \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) \text{ et } \mathbb{E}\left(f_1(X_1) \times f_2(X_2)\right) = \mathbb{P}\left((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2)\right).$$

   C'est la définition de l'indépendance de X_1 et X_2.
2. On passe aux cas où f_1 et f_2 sont quelconques par limites croissantes et théorème de convergence monotone.
3. Pour la réciproque fausse, voir la proposition 2.6.19, page suivante.

Proposition 2.11

Soit $X = (X_1, X_2)$ *une variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$. *Alors :*

$$(X_1, X_2) \text{ indépendantes } \iff \left[\forall (f_1, f_2) \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{positives} \\ \text{mesurables} \\ \text{bornées} \end{cases}, \ \mathbb{E}\left(f_1(X_1) \times f_2(X_2)\right) = \mathbb{E}\left(f_1(X_1)\right) \times \mathbb{E}\left(f_2(X_2)\right) \right].$$

Démonstration

1. ($\Rightarrow$) Comme les fonctions f_1 et f_2 sont bornées, on peut appliquer la proposition précédente.
2. ($\Leftarrow$) Il suffit de prendre f_1 et f_2 des indicatrices d'intervalles $]-\infty, x_1]$ et $]-\infty, x_2]$.

Proposition 2.12

Si (X_1, X_2) *sont deux variables aléatoires, intégrables sur* Ω *et telle que* $X_1 \times X_2$ *soit intégrable sur* Ω. *On a alors :*

$$(X_1, X_2) \text{ indépendantes } \Rightarrow \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = 0.$$

La réciproque est fausse.

Démonstration

- On applique la proposition précédente avec $f_1 = f_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Bien sûr, f_1 et f_2 ne sont pas bornées, mais on peut généraliser la propriété précédente par limite croissante.
- La réciproque est fausse. Prenons par exemple X de loi :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{3}, \ \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

  On a immédiatement $\mathbb{E}(X) = 0$ et, si l'on pose $Y = X^2$:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}.$$

  Il est alors clair que : $X \times Y = X$, donc :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = 0 = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y).$$

Mais X et Y ne sont pas indépendantes, car :

$$\mathbb{P}\left((X=0)\cap(Y=0)\right)=\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{3} \text{ alors que } \mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{9}.$$

Remarque 2.79

En particulier, si $(X_1,\ldots,X_n)$ sont indépendantes, possédant toutes des variances, on a :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_1+\cdots+X_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k).$$

Exercice(s) 2.18

2.18.1 Soit l'espace probabilisé $(]0,1[,\mathcal{BO}(]0,1[),\lambda)$ où λ est la restriction de la mesure de Lebesgue à la tribu $\mathcal{BO}(]0,1[$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$:

$$X_n\ :\begin{cases}\Omega\to\mathbb{N}\\ \omega\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } \lfloor 2^n\times\omega\rfloor \text{ est pair}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{cases}$$

(a) Calculer la loi de probabilité de X_n.

(b) Les `v.a.r.` $X_1,\ldots,X_n$ sont-elles indépendantes ?

2.18.2 Soit X et Y deux lois de Bernoulli, $X\sim\mathcal{B}(p)$ et $Y\sim\mathcal{B}(q)$. Montrer que :

$$(X,Y) \text{ indépendantes } \iff \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)=0.$$

2.18.3 On coupe un bâton de longueur 1 en trois morceaux aléatoires (on coupe donc aux abscisses indépendants X_1 et X_2).

(a) Quelles lois peut-on mettre sur X_1 et X_2 ?

On note L_1 la longueur du premier morceau (celui contenant l'abscisse 0), L_3 la longueur du dernier morceau (celui contenant l'abscisse 1) et L_2 la longueur du morceau intermédiaire.

(b) Calculer L_1, L_2 et L_3 en fonction de X_1 et X_2.

(c) Calculer la probabilité que l'on puisse fabriquer un triangle avec les trois morceaux.

2.18.4 Soit N une `v.a.r.` suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $X_1, \ldots, X_N$ des `v.a.r.` indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres 1. Quelle est la loi de :

$$Y = \min(X_1, \ldots, X_N) \ ?$$

2.6.2.2 Sommes, etc.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes (définies sur le même espace probabilisé) et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour déterminer la loi de $g(X,Y)$, on utilisera :

1. la formule des probabilités totales lorsque (X,Y) est discrètes ;
2. la méthode de la fonction bornée lorsque (X,Y) est absolument continue.

Exemple 2.31 – Somme de binomiales indépendantes

Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

Propriété 2.29 – Somme de deux `v.a.r.` absolument continues indépendantes

Soit X et Y deux `v.a.r.` définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, absolument continues, indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y, alors $X+Y$ a pour densité :

$$\boxed{x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \times f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) \times f_Y(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Cette fonction s'appelle *produit de convolution de f_X et f_Y* et se notera $f_X * f_Y$.

Démonstration

Puisque X et Y sont indépendantes alors (X, Y) admet une densité et on peut prendre :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y).$$

D'après le cas général (propriété 2.26, page 166), $X + Y$ admet pour densité la fonction définie par :

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(t, x-t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \times f_Y(x-t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) \times f_Y(t) \, \mathrm{d}t$$

où la dernière égalité provient d'un changement de variable.

Exemple 2.32 – Justification du modèle de la loi de Poisson

Soit un corps radioactif, qui émet à partir de tout instant t_0 une particule avec une loi de probabilité $\mathcal{E}(1/\tau)$, où $\tau > 0$. Pour $A > 0$, on veut compter le nombre N de particules émises par ce corps radioactif pendant la période de temps $[0, A]$.

- *Modélisation*
  - Le temps d'émission de la première particule suit une loi $\mathcal{E}(1/\tau)$.
  - Le temps d'émission de la deuxième particule suit une loi $\mathcal{E}(1/\tau)$, indépendante de la première...
  - Etc.

  Notons donc, T_n le temps d'émission de la n-ième particule à partir du temps d'émission de la $(n-1)$-ième. Les $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite de `v.a.r.` indépendantes, suivant toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/\tau$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N \geq k) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} T_j \leq A\right).$$

- *Calcul*

  Il nous faut donc calculer la loi de $S_k = \sum_{j=1}^{k} T_j$. Nous allons procéder par récurrence, en notant f_k une densité de S_k. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda \times e^{-\lambda \times x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  puis (pour $x > 0$) :

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \times f_1(x-t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \lambda^2 \times e^{-\lambda \times x} \, \mathrm{d}t = \lambda^2 \times x \times e^{-\lambda \times x}.$$

Puis (par récurrence) :

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda^k \times x^{k-1}}{(k-1)!} \times e^{-\lambda \times x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Finalement :

$$\mathbb{P}(N \geq k) = \int_0^A \frac{\lambda^k \times x^{k-1}}{(k-1)!} \times e^{-\lambda \times x} \, \mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N \geq k) - \mathbb{P}(N \geq k+1) = \cdots = \frac{(A \times \lambda)^k}{k!} \times e^{-A \times \lambda}.$$

Donc :

$$\boxed{N \sim \mathcal{P}(A \times \lambda).}$$

Exemple 2.33 – Passage en coordonnées polaires

On a une cible (représentée par un plan) sur laquelle on envoie des fléchettes, en essayant d'arriver au centre. On suppose que la position d'arrivée est, dans le repère orthonormé centré sur la cible, représenté par les coordonnées (X, Y) où X et Y sont deux **v.a.r.**. On cherche à évaluer les lois de :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \text{ et } \Theta \in [0, 2\,\pi[\,, \text{ l'argument.}$$

- *Modélisation*

  Il est naturel de supposer que X et Y sont deux `v.a.r.` indépendantes, de même loi, et, comme on vise le centre de la cible, on peut modéliser X et Y par des lois normales centrées. En choisissant l'unité convenablement, nous allons prendre des lois normales centrées réduites. Donc :

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ et } Y \sim \mathcal{N}(0, 1), \text{ indépendantes.}$$

- *Calcul*

  On va utiliser la méthode de la fonction bornée. Comme X et Y sont supposées indépendantes, on a la densité de

(X, Y) qui est le produit des densités de X et de Y, soit :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Soit $g : (x, y) \mapsto (\rho, \theta)$, où l'on impose à ρ de rester positive et à θ de varier dans $[0, 2\pi[$. Et soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mesurable, bornée. On a alors, en passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} \phi \circ g(x, y) \times \frac{1}{2\pi} \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y &= \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \phi(\rho, \theta) \times \frac{1}{2\pi} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) \times |\rho|\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \phi(\rho, \theta) \times f_{(R,\Theta)}(\rho, \theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\rho,\end{aligned}$$

et (R, Θ) admet une densité, par exemple :

$$f_{(R,\Theta)}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{2\pi} \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right).$$

Il est alors immédiat que [a] :

$$\Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \text{ et } f_R(\rho) = \rho \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right).$$

a. On pourra remarquer que $R^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$.

Exercice(s) 2.19

2.19.1 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, quelle est la loi de $X + Y$?

2.19.2 Dans un magasin, pendant une journée, chaque client a une probabilité p de se faire voler son portefeuille.

- (a) Soit N le nombre de client dans la journée, quelle loi peut-on supposer être celle de N ?
- (b) Soit P le nombre de portefeuilles volés dans la journée. Calculer les lois de $(P, N - P)$, P et $N - P$.
- (c) Les variables P et $N - P$ sont-elles indépendantes ?

2.19.3 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, positives, de fonctions de répartition F_X et F_Y, quelle est la fonction de répartition de $X \times Y$?

2.19.4 Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des `v.a.r.` indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $S = X_1 + \dots + X_n$.

(a) Soit $s \in [\![0, n]\!]$, calculer la loi de $X_1/(S = s)$.

On note :

$$\mathbb{E}(X_1/S) \ : \ s \mapsto \mathbb{E}\big(X_1/(S = s)\big).$$

(b) Calculer la loi de $\mathbb{E}(X_1/S)$.

(c) Que peut-on dire de l'espérance de cette loi ?

2.19.5 Est-il possible de truquer deux dés (aux lancers indépendants) de telle sorte que la somme des dés suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$?

2.19.6 Une marque de bonbons place dans chaque paquet une pièce d'un puzzle de n morceaux distincts. Soit N le nombre de paquets de bonbons qu'un client doit acheter pour avoir un puzzle complet.

(a) Calculer $\mathbb{E}(N)$.

(b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \times \binom{n}{k} \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(c) Proposer une méthode d'analyse pour redémontrer l'égalité précédente.

2.19.7 Soit X et Y deux `v.a.r.` indépendantes, suivant des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$. On pose :

$$U = \min(X, Y) \text{ et } V = |X - Y|.$$

Les `v.a.r.` U et V sont-elles indépendantes ?

2.19.8 On a un circuit électronique composé de n composants ayant une durée de vie suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda_k)$ indépendantes.

(a) On suppose le circuit monté en parallèle, quelle est la durée de vie du circuit ?

(b) On suppose le circuit monté en série, quelle est la durée de vie du circuit ?

2.19.9 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de `v.a.r.` indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1. On définit la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$Y_1 = X_1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1}.X_{n+1}.$$

(a) Reconnaître la loi de X_n/n.

(b) Calculer la densité de la loi de Y_2.

(c) Les variables aléatoires Y_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

(d) Montrer, par récurrence, qu'une densité de la loi de Y_n peut être :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \times e^{-x} \times (1 - e^{-x})^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.19.10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, et $(X_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de `v.a.r.` définies sur un même espace probabilisé Ω, indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0, n]$. Soit, de plus, une `v.a.r.` définie sur le même Ω, indépendante des X_q, et suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On pose :

$$Y_n = \max(X_0, \ldots, X_n),\ Z_n = \min(X_0, \ldots, X_n) \text{ et } T_n = \min(X_0, \ldots, X_{N_n}).$$

(a) Quelle est la loi de Y_n ? Son espérance ? Sa variance ?

(b) Calculer la fonction de répartition de Z_n.

(c) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(t).$$

Que peut-on en déduire ? Interpréter.

(d) Calculer la fonction de répartition de T_n.

(e) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} F_{T_n}(t).$$

Que peut-on en déduire ? Interpréter.

2.6.2.3 Loi du χ^2

Définition 2.37 – Loi du χ^2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des lois normales centrées, réduites, indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, on appelle « loi du χ^2 à n degrés de liberté », la loi de la `v.a.r.` définie par :

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

C'est une variable absolument continue, sa densité peut être :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{m_n} \times t^{n/2-1} \times e^{-t/2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où m_n est un réel strictement positif, tel que :

$$m_n = \int_0^{+\infty} t^{n/2-1} \times e^{-t/2}\ \mathrm{d}t.$$

On note :

$$X \sim \chi_n^2.$$

Cette loi intervient beaucoup en statistiques.

Démonstration de la bonne définition de la loi du χ^2

C'est bien une loi de probabilité, par définition de m_n.

Démonstration de la densité de la loi du χ^2

La densité se calcule par récurrence sur n. Notons f_n la densité de la loi du χ^2 à n degrés de liberté, et F_n sa fonction de répartition.

▶ Pour $t \geq 0$:

$$F_1(t) = \mathbb{P}\left(Y_1^2 \leq t\right) = \mathbb{P}\left(Y_1 \in \left[-\sqrt{t}, \sqrt{t}\right]\right) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \times \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\ \mathrm{d}u.$$

D'où, en dérivant, pour $t > 0$:

$$\boxed{f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi \times t}} \times \exp\left(-\frac{t}{2}\right).}$$

On en déduit aussi que $m_1 = \sqrt{2\,\pi}$.[a]
▶ Il est facile alors de trouver les autres densités, si $t > 0$:

$$f_{n+1}(t) = \int_0^t f_n(u) \times f_1(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{1}{m_1 \times m_n} \times u^{n/2-1} \times e^{-u/2} \times \frac{1}{\sqrt{t-u}} \times e^{-(t-u)/2}\,\mathrm{d}u.$$

Donc :

$$f_{n+1}(t) = \frac{e^{-t/2}}{m_1 \times m_n} \times \int_0^t \frac{u^{n/2-1}}{\sqrt{t-u}}\,\mathrm{d}u \underset{u=t\times v}{=} \frac{e^{-t/2}}{m_1 \times m_n} \times t^{n/2-1+1-1/2} \times \int_0^1 \frac{v^{n/2-1}}{\sqrt{1-v}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{m_{n+1}} \times t^{(n+1)/2-1} \times e^{-t/2}.$$

---

a. On peut aussi faire le calcul avec la méthode de la fonction bornée.

Remarque 2.80

On peut même calculer les m_n. Car :
— On a vu que $m_1 = \sqrt{2\,\pi}$.
— Il est évident que

$$m_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = 2.$$

— Si $n \geq 3$, alors :

$$m_n = \int_0^{+\infty} t^{n/2-1} \times e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\text{IPP}\\ u' = e^{-t/2} \\ v = t^{n/2-1}}}{=} (n-2) \times \int_0^{+\infty} t^{(n-2)/2-1} \times e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = (n-2) \times m_{n-2}.$$

Ce qui nous permet d'obtenir, par récurrence les formules suivantes (voir le code `Wxmaxima` 2.7, page suivante) :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ m_{2\,p} = 2^p \times (p-1)! \text{ et } m_{2\,p+1} = \sqrt{2\,\pi} \times \frac{(2\,p-1)!}{2^{p-1} \times (p-1)!}.$$

Session **Wxmaxima** 2.7 – Densité de la loi du χ^2

```
(%i1) makelist(ev(integrate(t^(k/2-1)*exp(-t/2),t,0,inf),k=2*p+1)-
      sqrt(2*%pi)*(2*p-1)!/2^(p-1)/(p-1)!,p,1,6);
```

(%o1) $[0,0,0,0,0,0]$

Propriété 2.30

Et on a, si $X \sim \chi^2_n$:

$$\mathbb{E}(X) = n \text{ et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 2\,n.$$

Démonstration

— On a immédiatement :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_k\right) = n.$$

— Pour la variance de X, on a :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_k^2\right) = n \times \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_1^2\right).$$

Or :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_1^2\right) = \mathbb{E}\left(X_1^4\right) - \underbrace{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)^2}_{=1}.$$

Et

$$\mathbb{E}\left(X_1^4\right) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}x,$$

qui se calcule avec une intégration par parties, et vaut 3. Voir le code **Wxmaxima** 2.8, de la présente page.

Session **Wxmaxima** 2.8 – Espérance et variance d'une loi du χ^2

```
(%i1) integrate(x^4*exp(-x^2/2),x,minf,inf);
```

(%o1) $3\,\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}$

Exercice(s) 2.20

2.20.1 Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des `v.a.r.` indépendantes ($n \geq 2$), définies sur un même espace probabilisé, et suivant toutes une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},\ S_n = \sqrt{\frac{(X_1 - m)^2 + \cdots + (X_n - m)^2}{n}} \text{ et } T_n = \sqrt{\frac{(X_1 - \overline{X}_n)^2 + \cdots + (X_n - \overline{X}_n)^2}{n-1}}.$$

(a) Calculer

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right),\ \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\overline{X}_n\right).$$

(b) Calculer de même :

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right) \text{ et } \mathbb{E}\left(T_n^2\right).$$

(c) Trouver les lois de probabilités que suivent :

$$\overline{X}_n,\ S_n^2 \text{ et } T_n^2.$$

2.6.3 Loi faible des grands nombres

2.6.3.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2.5 – Inégalité de Markov

Soit X une `v.a.r.` positive *définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, intégrable sur Ω, alors :*

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration

Soit $a > 0$ donné alors :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a \times \mathbb{1}_{X \geq a}(\omega) \text{ ou encore } X \geq a.\mathbb{1}_{X \geq a}.$$

En prenant l'espérance (c'est une intégrale, elle est donc croissante) :

$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}\left(a.\mathbb{1}_{X \geq a}\right) = a \times \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X \geq a}\right) = a \times \mathbb{P}(X \geq a).$$

Théorème 2.6 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une `v.a.r.` *possédant un moment d'ordre 2, alors :*

$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{\alpha^2}.$$

Démonstration

On applique l'inégalité de Markov à la `v.a.r.` $(X - \mathbb{E}(X))^2$ et $a = \alpha^2$.

Exemple 2.34

Prenons une `v.a.r.` de moyenne 3 et de variance 4 (nombres pris sans aucune considération particulière), en prenant $\alpha = 20$, on trouve que :

$$\mathbb{P}\left(|X - 3| \geq 20\right) \leq \frac{4}{400} = 0,01 = 1\,\%.$$

Donc, on a au moins $99\,\%$ de chances que X prenne une valeur entre -17 et 23.
En changeant un peu nos exigences, on a plus de $90\,\%$ de chances que X prenne une valeur entre $-3,32$ et $9,32$.

Exercice(s) 2.21

2.21.1 Soit $n \in \mathbb{N}^{\circ}$. On effectue n tirages *avec remise* dans une urne contenant $1/3$ de boules blanches et $2/3$ de boules noires. Soit X_n la `v.a.r.` dont le résultat est le nombre total de boules blanches tirées.

(a) Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.

On s'intéresse au nombre moyen de boules blanches tirées : $Y_n = X_n/n$.

(b) Quelles sont les espérance et variance de Y_n ?

(c) On suppose que $n = 20000$. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité de l'événement :

$$Y_n \in \left] \frac{1}{4}, \frac{5}{12} \right[.$$

(d) Que peut-on dire de la probabilité de l'événement :

$$Y_n \in]0,30\,,\,0.36[\ ?$$

(e) Donner un minorant du nombre de tirages n nécessaires pour que la probabilité de l'événement :

$$Y_n \in]0,33\,,\,0.34[$$

soit $\geq 0,99$.

2.6.3.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 2.7 – Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des **v.a.r.** *définies sur un même espace probabilisé, de même loi, indépendantes et possédant des variances. Si l'on pose*

$$m = \mathbb{E}(X_1) \text{ et } \overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \text{ on a } \forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration

On va utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour cela, calculons la variance de $\overline{X}_n$:

$$\mathbb{V}\text{ar}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\text{ar}\left(X_k\right)\right) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et l'espérance de $\overline{X}_n$:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k\right)\right) = m.$$

On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\overline{X}_n\right)}{\alpha^2},$$

donc :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque 2.81

En conséquence :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - m\right| < \alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc $\overline{X}_n$ « se rapproche de la constante m ». On verra en troisième année un résultat plus précis : *la loi forte des grands nombres.*

Remarque 2.82

On peut remarquer que le résultat est encore exact si l'on suppose seulement que (remplacement de « même loi ») :

$$\exists (m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}\left(X_k\right) = m,\ \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(X_k\right) = \sigma^2$$

et (remplacement de « indépendantes ») :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2},\ i \neq j \ \Rightarrow\ \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X_i, X_j\right) = 0.$$

▶ On a une justification de l'adéquation entre les probabilités théoriques et les résultats expérimentaux lors des diverses simulations des lois usuelles (voir les figures 2.4, page 121 (loi binomiale), 2.8, page 132 (loi de Poisson), 2.6, page 127 (loi géométrique), 2.10, page 138 (loi uniforme), 2.12, page 144 (loi exponentielle) et 2.14, page 150 (loi normale)).

Proposition 2.13

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, des* `v.a.r.` *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *indépendantes de même loi. Soit* $(I_1, \ldots, I_p)$ *une partition de* $\mathbb{R}$ *composée d'intervalles, notons*[a] *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ Y_n^{(k)} = \frac{1}{n} \times \left(\mathrm{Card}\left(\{j \in [\![1,n]\!]\,,\ X_j \in I_k\}\right)\right).$$

On a alors, si $\beta > 0$*, on a :*

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \mathbb{P}\left(\left|Y_n^{(k)} - \mathbb{P}\left(X_1 \in I_k\right)\right| \leq \beta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

a. On « compte » le nombre de fois où les X_j « tombent » dans I_k.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la loi faible des grands nombres aux `v.a.r.` de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$ définies par :

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\,,\ \forall j \in \mathbb{N}^*\ Z_j^{(k)} = \mathbb{1}_{(X_j \in I_k)},$$

où $p_k = \mathbb{P}(X_1 \in I_k)$.

2.6.3.3 Un exemple pratique

Remarque 2.83

Cette loi faible des grands nombres est à la base des statistiques :

1. Un marchand veut évaluer la loi que suit le nombre de clients d'une journée. Il pense que c'est peut-être une loi de Poisson. Mais de quel paramètre ?
   — Il compte ses clients pendant n jours (n « grand ») : $x_1, \ldots, x_n$ et il évalue :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \widehat{\lambda}_n.$$

   S'il considère que les x_k sont des réalisations de `v.a.r` X_k indépendantes, qui suivent toutes une loi de Poisson de paramètre λ, alors, il peut raisonnablement *estimer* que $\widehat{\lambda}_n$ est une approximation de λ. $\widehat{\lambda}_n$ est une réalisation de la v.a.r. :

$$\widehat{\Lambda}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

— Il peut même utiliser la proposition pour vérifier l'hypothèse que c'est une loi de Poisson.

Les questions qui se posent alors sont de deux ordres :

1. Quelle erreur fait-on quand on remplace λ par $\widehat{\lambda}_n$ (erreur de méthode de l'approximation). Bien sûr, cette erreur sera une v.a.r., car si l'on regarde n autres jours, on aura très probablement des valeurs différentes et une estimation différente...
2. Avec quelle marge d'erreur pourra-t-on accepter l'hypothèse que la loi est de Poisson ? C'est la problématique des tests statistiques...

2.6.4 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo qui va nous intéresser est celle qui permet de calculer des intégrales (sur $[a, b]$, sur I, multiples, etc.) Elle n'est pas très efficace et demande l'évaluation de beaucoup de valeurs de la fonction à intégrer, mais c'est parfois la seule dont on dispose (notamment pour les intégrales multiples). L'idée est de considérer l'intégrale à calculer comme une espérance et d'utiliser la loi des grands nombres.

Exemple 2.35 – Méthode de Monte-Carlo

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, intégrable sur $[a, b]$. Soit $U \sim \mathcal{U}(a, b)$, alors (par la formule du transfert) :

$$\mathbb{E}(f(U)) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. de même loi que U, indépendantes, alors la loi faible des grands nombres nous assure que, pour tout $\beta > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n} - \mathbb{E}(f(U))\right| \leq \beta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On va donc « estimer » l'intégrale cherchée, à l'aide de la moyenne des réalisations. Le code `Python` 2.19, de la présente page et la figure 2.19, de la présente page sont une illustration de cette méthode.

Session `Python` 2.19 – Méthode de Monte-Carlo

```python
import numpy as np

N=100000 # Nombre d'échantillon
def f(x):
    return 1/np.sqrt(2*np.pi)*np.exp(-x**2/2)

a,b=0,5
X= np.random.uniform(a,b,N)
I=(b-a)/N*sum(f(X)) # Calcul par la méthode de Monte-Carlo
J=np.trapz(f(np.linspace(a,b,N)),dx=(b-a)/N) # Calcul par la méthode des trapèzes
K=I-J # différence
```

Figure 2.19 – Méthode de Monte-Carlo

```
>>> I
0.50253074176538415
>>> J
0.49999471335129314
>>> K
0.0025360284140910072
```

Exemple 2.36

Cette méthode peut être intéressante pour des fonctions compliquées. Par exemple, que vaut :

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, \mathrm{d}x \ ?$$

Voir le code Wxmaxima 2.9, de la présente page et le code Python 2.20, de la présente page.

Session Wxmaxima 2.9 – Calcul d'intégrale

```
(%i1)  quad_qags(sin(1/x),x,0,1);

 ***MESSAGE FROM ROUTINE DQAGS IN LIBRARY SLATEC.
 ***INFORMATIVE MESSAGE, PROG CONTINUES, TRACEBACK REQUESTED
 *  ABNORMAL RETURN
 *  ERROR NUMBER = 1
 *
 ***END OF MESSAGE
```

(%o1) $[0.50411061321101, 3.4994456304171528\,10^{-5}, 8379, 1]$

Session Python 2.20 – Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$

```python
import numpy as np

def f(x):
    return np.sin(1/x)
a,b=0,1
n=200 # nombre de simulations
N=100000 # Nombre d'échantillon
L=[]
for _ in range(n):
    X= np.random.uniform(a,b,N)
    L.append((b-a)/N*sum(f(X))) # Calcul par la méthode de Monte-Carlo

L=np.array(L)
print(np.mean(L))
print(np.std(L))
```

Figure 2.20 – Calcul de l'intégrale de $x \mapsto \sin(1/x)$

```
0.50409018321
0.00205486266033
```

Remarque 2.84

On voit que `Wxmaxima` génère un code d'erreur un peu inquiétant (mais le résultat semble correct) et que la méthode de Monte-Carlo demande de tirer au sort un grand nombre de valeurs, sans que l'on connaisse vraiment la précision obtenue...

Remarque 2.85

On peut d'ailleurs généraliser aux intégrales multiples (c'est d'ailleurs la principale utilisation de la méthode de Monte-Carlo). Soit à calculer :

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ \text{où } \Delta \in \mathcal{BO}\left(\mathbb{R}^2\right)\ \text{ et } f\ :\ \Delta \to \mathbb{R},$$

intégrable sur Δ. On suppose ici que $\Delta \subset \Pi = [a,b] \times [c,d]$, et soit $U \sim \mathcal{U}(\Pi)$, alors :

$$\mathbb{E}(f(U)) = \frac{1}{\lambda(\Pi)} \times \iint_{\Delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Par exemple, si l'on prend pour f une indicatrice du disque, on doit trouver l'aire du disque... Le code `Python` 2.21, de la présente page et la figure 2.21, page ci-contre une illustration de cette méthode.

Session `Python` 2.21 – Calcul de π

```python
import numpy as np

N=100000 # Nombre d'échantillon
a,b=-1,1
X= np.random.uniform(a,b,(N,2))

```

```python
def f(z):
    if z[0]**2+z[1]**2<1:
        return 1
    return 0

I=(b-a)**2/N*sum([f(z) for z in X]) # Calcul par la méthode de Monte-Carlo
```

Figure 2.21 – Calcul de π

```
>>> I
3.1362
```

Remarque 2.86

- La précision ne semble vraiment pas terrible ! Combien faut-il utiliser de valeurs ?
- Pour calculer π, cela n'est pas très utile ! Mais, la méthode marchera dans tous les cas...

Propriété 2.31 – Une idée de l'erreur

Et pour une intégrale sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle non borné) ? On pourra écrire (par exemple) :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{f_X(x)} \times f_X(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}(g(X)),$$

où f_X est la densité (toujours non nulle sur le domaine d'intégration) d'une `v.a.r.` que l'on sait simuler et $g = \dfrac{f}{f_X}$. Le code `Python` 2.22, page suivante et la figure 2.22, page suivante sont une illustration de cette méthode. Une vérification avec `Wxmaxima` est proposée dans le code 2.10, page suivante.

Session Python 2.22 – Intégrale généralisée

```python
import numpy as np

N=100000 # Nombre d'échantillon
def fsurfX(x):
    return np.exp(x)/(1+x**5)

X= np.random.exponential(size=N)
I=1/N*sum(fsurfX(X)) # Calcul par la méthode de Monte-Carlo
```

Figure 2.22 – Intégrale généralisée

```
>>> I
1.0656734889016033
```

Session Wxmaxima 2.10 – Intégrale généralisée

(%i1) `integrate(1/(x^5+1),x,0,inf);`

(%o1) $\dfrac{\pi}{5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

(%i2) `%,numer;`

(%o2) 1.068959332115595

Remarque 2.87

Wxmaxima connaît la valeur exacte ! Nous aussi, nous serions capable de donner cette valeur, en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{x^5+1},$$

suivant le principe suivant :

— on la décompose dans $\mathbb{C}$;
— on regroupe les éléments simples conjugués pour revenir dans $\mathbb{R}$;
— chaque terme a une primitive connue ;
— il suffit alors de passe à la limite dans la primitive trouvée...

Nous verrons dans le cours sur les fonctions de la variable complexe une technique beaucoup plus rapide...

Exercice(s) 2.22

2.22.1 Mettre en place la méthode de Monte-Carlo pour calculer les intégrales suivantes (si elles existent !) :

(a) de la fonction

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ sur } [1, +\infty[\ ;$$

(b) de la fonction

$$(x, y) \mapsto \exp\left(-\frac{x^3 + y^3}{2}\right) \text{ sur } [1, 3]^2, \text{ puis sur } [1, +\infty[^2 \ ;$$

(c) de la fonction

$$(x_1, \ldots, x_9) \mapsto 1 \text{ sur } \left\{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{R}^9,\ x_1^2 + \cdots + x_9^2 \leq 1\right\}.$$

2.7 Simulation de lois aléatoires

Comment sont effectuées les simulations de lois de probabilités ? Dans les logiciels de calculs, de nombreuses lois ont une fonction prédéfinie appropriée ... Mais, si elle n'est pas définie, il faut savoir programmer la bonne fonction.

2.7.1 V.a.r. discrète

2.7.1.1 Lois finies

Propriété 2.32 – Simulation d'une loi finie

On suppose ici que $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ est une `v.a.r.`, telle que

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \mathbb{P}(X = k) = p_k \in]0, 1[.$$

- On découpe alors $[0, 1]$ en une réunion d'intervalles de longueurs p_k, de la forme $[u_k, u_{k+1}]$, où $u_0 = 0$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ u_k - u_{k-1} = p_k.$$

On peut alors simuler X à partir d'une loi uniforme $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, en prenant[a] :

$$(X = k) \iff U \in [u_{k-1}, u_k[.$$

Voir le code `Python` 2.23, de la présente page et la figure 2.23, page 196

[a]. C'est la méthode vue dans l'exercice 2.14.5, page 140.

Session `Python` 2.23 – Simulation d'une loi discrète (cas fini)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=100000 # Nombre d'échantillons

p=np.array([0.1,0.4,0.3,0.2]) # Probabilités
n=len(p)
u=np.cumsum(p) # Probabilités cumulées

def g(t):
    i=1
    while i<len(u) and t>u[i-1]: # en Python, les indices commencent à 0
```

```python
            i=i+1
        return i
U= np.random.uniform(0,1,N)
X= np.array([g(t) for t in U])
Y=[sum(X==k)/N for k in range(1,n+1)] # fréquence d'apparition dans X

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(1,n+1),p,color='b')
plt.title("Théorie")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(1,n+1),Y,color='b')
plt.title("Simulation")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(1,n+1),p-Y,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

2.7.1.2 Lois infinies

Propriété 2.33 – Simulation d'une loi discrète infinie

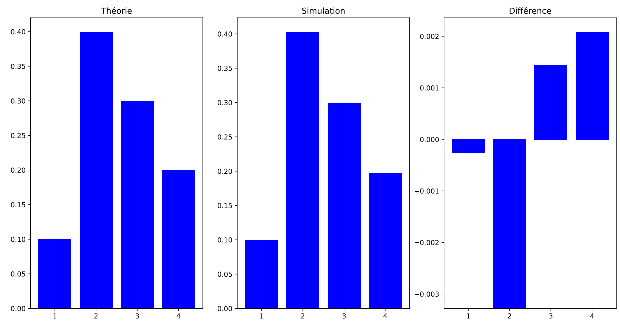
On suppose ici que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = p_k \in [0, 1].$$

- On peut procéder comme ci-dessus, mais cela demande de calculer les u_k, pour k éventuellement très grand, lorsque $U(\omega)$ sera très proche de 1. En revanche, quand on connaît les u_k, c'est une méthode appropriée. Par exemple, pour une loi géométrique de paramètre p, on a :

$$u_0 = u_1 = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} p \times (1-p)^{j-1} = 1 - (1-p)^k.$$

Figure 2.23 – Simulation d'une loi discrète (cas fini)



On a donc la simulation :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (X = k) \iff k = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor.$$

Le code `Python` 2.24, page suivante et la figure 2.24, page 198 sont une illustration de cette technique. [a]

▶ On peut aussi utiliser des résultats sur ces lois. Par exemple, on a vu d'où venait l'utilisation des lois de Poisson pour modéliser une file d'attente. Comme il est facile de simuler une loi exponentielle, on procédera ainsi :

1. On réalise des `v.a.r.` $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, et on définit une simulation de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$(X = k) \iff \Big[\sum_{j=1}^{k} T_j \leq \lambda \text{ et } \sum_{j=1}^{k+1} T_j > \lambda\Big].$$

Le code `Python` 2.25, page 198 et la figure 2.25, page 200 sont une illustration de cette technique.

---

a. Pour la loi géométrique, on peut aussi utiliser le fait que, si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :

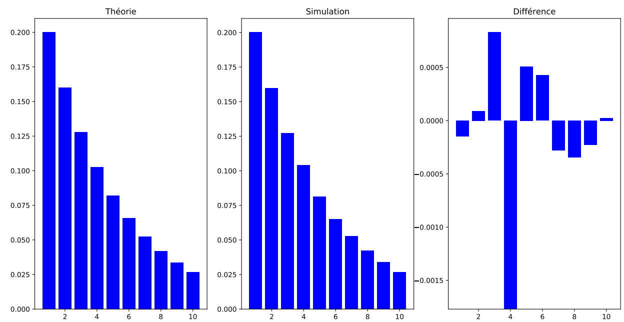
$$\lceil X \rceil \sim \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right).$$

Mais, c'est un cas particulier, où la loi discrète qui nous occupe s'obtient à partir d'une loi facile à simuler.

Session Python 2.24 – Simulation d’une loi géométrique

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import geom

N=100000 # Nombre d'échantillons
n=10 # Nombre d'observations

p=0.2 # Probabilités de succès

def g(t):
    return 1+np.floor(np.log(t)/np.log(1-p))

U= np.random.uniform(0,1,N)
X= np.array([g(t) for t in U])
Y=[sum(X==k)/N for k in np.arange(1,n+1)] # fréquence d'apparition dans X
T=geom.pmf(np.arange(1,n+1), p)

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(1,n+1),T,color='b')
plt.title("Théorie")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(1,n+1),Y,color='b')
plt.title("Simulation")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(1,n+1),T-Y,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

Figure 2.24 – Simulation d'une loi géométrique



Session `Python` 2.25 – Simulation d'une loi de Poisson

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import poisson

N=100000 # Nombre d'échantillons
n=10 # Nombre d'observations

L=2 # Paramètre de la loi

def g(V):
    nv=len(V)
    res=[]
    aux=V[0]
    j=0
    for i in range(1,nv):
        if aux <=1:
```

```
                aux,j=aux+V[i],j+1
            else:
                res.append(j)
                aux,j=V[i],0
    return res

E= np.random.exponential(scale=1/L,size=N)
X= np.array(g(E))
Y=[sum(X==k)/len(X) for k in np.arange(n)] # fréquence d'apparition dans X
T=poisson.pmf(np.arange(n), L)

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(n),T,color='b')
plt.title("Théorie")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(n),Y,color='b')
plt.title("Simulation")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(n),T-Y,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

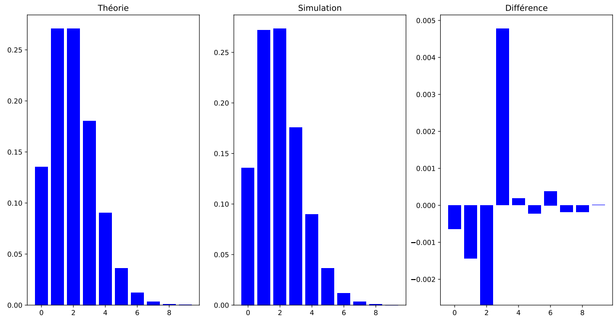
2.7.2 `V.a.r.` continue

Propriété 2.34 – Simulation d'une `v.a.r.` continue

Soit $X : (\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire continue, on utilise alors, si l'on connaît la fonction de répartition F_X la méthode de l'exercice 2.14.5, page 140.

- *Loi uniforme sur* $[a, b]$.

Figure 2.25 – Simulation d'une loi de Poisson



Il suffit alors d'utiliser

$$U \sim \mathcal{U}(0,1) \;\Rightarrow\; a + (b-a) \times U \sim \mathcal{U}(a,b).$$

Le code `Python` 2.26, page ci-contre et la figure 2.26, page 202 sont une illustration de cette technique.

▶ *Loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$.

La fonction de répartition est alors :

$$x \mapsto \left(1 - e^{-\lambda \times x}\right) \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

On a donc [a] :

$$U \sim \mathcal{U}(0,1) \;\Rightarrow\; -\frac{\ln(1-U)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

Le code `Python` 2.27, page ci-contre et le figure 2.27, page 203 sont une illustration de cette méthode.

a. Comme $1 - U$ suit aussi une loi uniforme sur $[0,1]$, on peut utiliser $-\ln(U)/\lambda$.

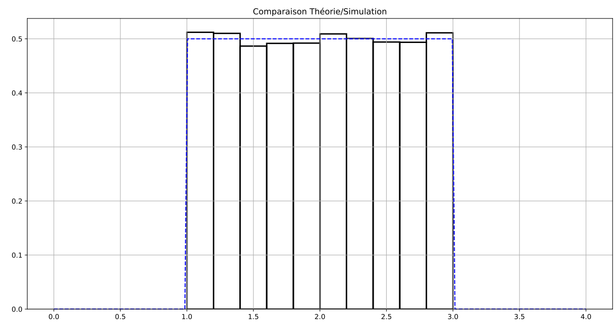
Session Python 2.26 – Simulation d'une loi uniforme

```
from scipy.stats import uniform
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a,b=1,3 # bornes
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons

x=np.linspace(a-1,b+1,N)

y=a+(b-a)*uniform.rvs(loc=0,scale=1,size=NN)

plt.hist(y,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,uniform.pdf(x,loc=a,scale=b-a),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Session Python 2.27 – Simulation d'une loi exponentielle

```
from scipy.stats import uniform
from scipy.stats import expon
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

L=1 # paramètre de la loi
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons

x=np.linspace(-0.1,L+4,N)

```

Figure 2.26 – Simulation d'une loi uniforme




```
y=-np.log(uniform.rvs(loc=0,scale=1,size=NN))/L

plt.hist(y,30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,expon.pdf(x,scale=1/L),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

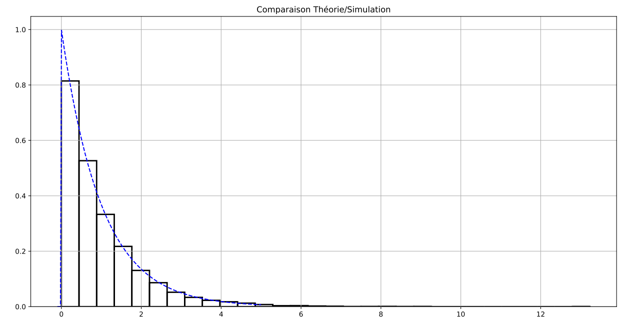
Propriété 2.35 – Simulation d'une loi normale

- ▶ *Loi normale de paramètres m et σ^2.*
  On a d'abord :

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).}$$

Nous allons donc d'abord simuler une `v.a.r.` suivant une loi normale centrée réduite.

Figure 2.27 – Simulation d'une loi exponentielle



Nous ne connaissons pas bien la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, en particulier pas sa fonction réciproque. Nous allons donc utiliser l'exemple 2.33, page 175. En faisant le calcul inverse, nous voyons que si :

$$\left[R^2 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } \Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\,\pi)\right] \iff \left[R \times \cos(\Theta) \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } R \times \sin(\Theta) \sim \mathcal{N}(0,1)\right].$$

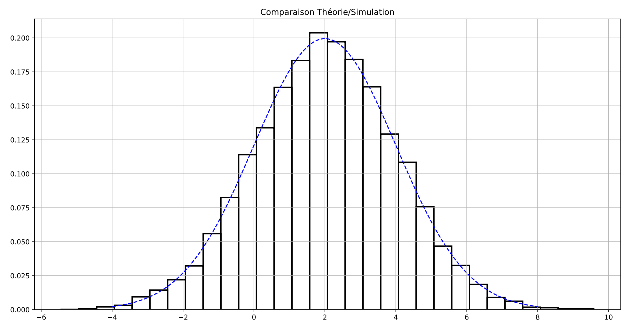
De plus, les deux lois normales centrées réduites obtenues sont indépendantes... On en génère deux d'un coup !
Le code `Python` 2.28, de la présente page et la figure 2.28, page suivante une illustration de cette méthode.

Session `Python` 2.28 – Simulation d'une loi normale

```
from scipy.stats import uniform
from scipy.stats import expon
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

L=1 # paramètre de la loi
```

```
m=2 # moyenne
s=2 # écart-type
N=200 # nombre de points (graphique)
NN=10000 # nombre d'échantillons

x=np.linspace(m-3*s,m+3*s,N)

y=m+s*np.sqrt(expon.rvs(scale=2,size=NN))*np.cos(2*np.pi*uniform.rvs(size=NN))

plt.hist(y,30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,norm.pdf(x,loc=m,scale=s),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure 2.28 – Simulation d'une loi normale



2.7.2.1 Loi uniforme

Rappel 2.4 Loi uniforme

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $B \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^p)$ un borélien de $\mathbb{R}^p$ de mesure de Lebesgue finie et non nulle ($\lambda(B) \in]0, +\infty[$). On dit qu'une variable aléatoire suit une loi uniforme sur B si :

$$\forall A \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^p),\ \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(B)}.$$

On note :

$$X \sim \mathcal{U}(B).$$

Cette loi modélise un tirage « au hasard » dans B.

Démonstration de la bonne définition de la loi uniforme

C'est bien une loi de probabilités, car $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}^2) = \frac{\lambda(B)}{\lambda(B)} = 1$.

Exemple 2.37

1. Nous avons déjà rencontré le cas où $B = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, et démontré (voir l'exemple 2.22, page 155) que X et Y (coordonnées du point dans le repère euclidien canonique) étaient indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
2. Nous avons aussi rencontré le cas où $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ et } x + y \leq 1\right\}$ (voir l'exemple 2.23, page 156). Les coordonnées su point n'étaient plus des `v.a.r.` indépendantes.

Exemple 2.38 – Loi uniforme sur un disque

Lorsque B est le disque de centre O et de rayon 1, alors $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et Θ à valeurs dans $[0, 2\,\pi[$ sont indépendantes et, de plus (voir le code `Python` 2.29, page suivante qui génère la figure 2.29, page 207) :

$$R^2 \sim \mathcal{U}(0,1) \text{ et } \Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\,\pi).$$

Notons que c'est le carré du rayon qui suit une loi uniforme et non le rayon qui donne la mauvaise simulation illustrée par la figure 2.30, page 208 générée par le code `Python` 2.30, page suivante.

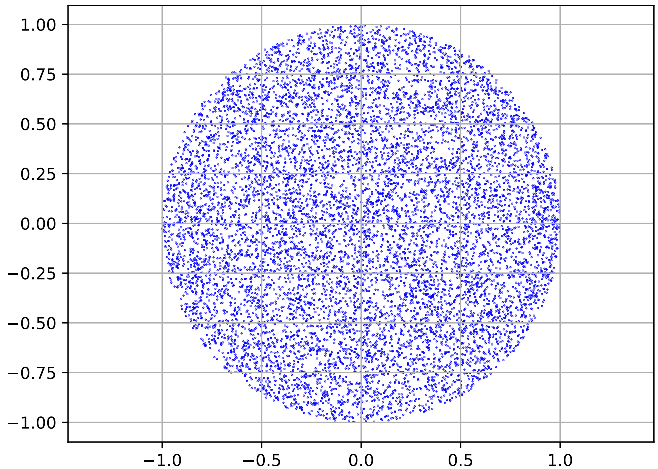
Session Python 2.29 – Loi uniforme sur un disque – bonne simulation

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

N=20000 # nombre d'échantillons

R=np.sqrt(np.random.uniform(0,1,N))
Theta=np.random.uniform(0,2*np.pi,N)

plt.scatter(R*np.cos(Theta), R*np.sin(Theta),s=0.1,c='b')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

Session Python 2.30 – Loi uniforme sur le disque – mauvaise simulation

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

N=20000 # nombre d'échantillons

R=np.random.uniform(0,1,N) # sans racine carrée
Theta=np.random.uniform(0,2*np.pi,N)

plt.scatter(R*np.cos(Theta), R*np.sin(Theta),s=0.1,c='b')
plt.grid(True)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

Figure 2.29 – Loi uniforme sur un disque – bonne simulation



2.7.3 Autres variables aléatoires

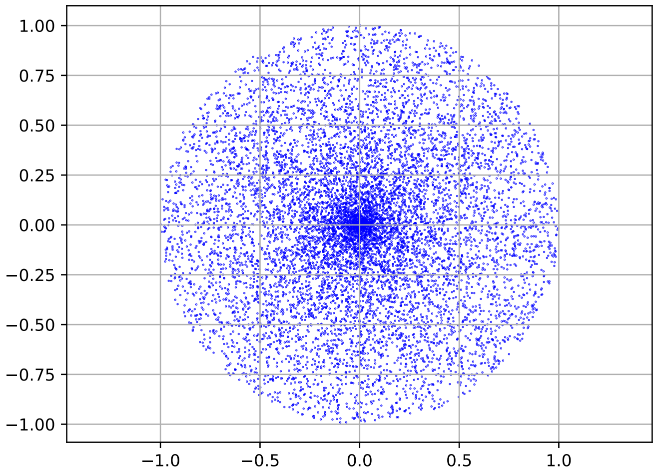
2.7.3.1 Variables discrètes

Propriété 2.36 – Simulation de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$

Soit $X = (X_1, \ldots, X_p)$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

1. *Si les lois marginales sont indépendantes*, on simule chaque loi marginale...
2. *Cas fini*

Figure 2.30 – Loi uniforme sur le disque – mauvaise simulation



On suppose donc que $X(\Omega) = \prod_{j=1}^{p} [\![1, n_j]\!]$. Et on connaît :

$$\forall (k_1, \dots, k_p) \in \prod_{j=1}^{p} [\![1, n_j]\!] \,,\ \mathbb{P}\left((X_1 = k_1) \cap \dots \cap (X_p = k_p)\right).$$

On utilise le même principe que pour les `v.a.r.` en ordonnant $X(\Omega)$, avec un ordre lexicographique :

$$x_1 = (1, \dots, 1, 1) < x_2 = (1, \dots, 1, 2) < \dots < x_{n_p} = (1, \dots, 1, n_p) <$$

$$x_{n_p+1} = (1, \dots, 2, 1) < \dots < x_{2\,n_p} = (1, \dots, 2, n_p) < \dots < x_{n_1 \times \dots \times n_p}(n_1, \dots, n_p).$$

Ainsi, pour $p = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ et $n_3 = 4$, on obtient : $(1,1,1) < (1,1,2) < (1,1,3) < (1,1,4) < (1,2,1) < (1,2,2) < (1,2,3) < (1,2,4) < (1,3,1) < (1,3,2) < (1,3,3) < (1,3,4) < (2,1,1) < (2,1,2) < (2,1,3) < (2,1,4) <$

$(2,2,1) < (2,2,2) < (2,2,3) < (2,2,4) < (2,3,1) < (2,3,2) < (2,3,3) < (2,3,4)$. Et on simule par :

$$(Y = k) \iff (X = x_k).$$

On peut utiliser aussi une méthode inspirée de la deuxième méthode de rejet, voir page 213.

3. *Cas infini*

   On applique le même principe, en mettant un ordre arbitraire sur $X(\Omega)$. [a]

---

a. On peut se rappeler comment nous avions numéroté $\mathbb{N}^2$ en première année.

Exercice(s) 2.23

2.23.1 Faire une simulation du couple (X, Y) lorsque :

$$X \sim \mathcal{E}(2),\ Y \sim \mathcal{E}(1) \text{ et } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.}$$

2.23.2 Faire une simulation du couple (X, Y) de loi conjointe :

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0.1,\ \mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0.2,\ \mathbb{P}(X=0, Y=2) = 0.3, \\ \mathbb{P}(X=1, Y=0) = 0.2,\ \mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0.1,\ \mathbb{P}(X=1, Y=2) = 0.1. \end{array}$$

Propriété 2.37 – Méthode du rejet discrète

On peut aussi mettre au point une méthode inspirée de la deuxième méthode du rejet, voir page 213. Par exemple : si on suppose $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = p_n \in [0, 1],\ \text{avec} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définissant une autre loi de probabilité Y (que l'on sait mieux simuler), et on suppose connue une constante $k > 0$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \leq k \times q_n.$$

On procède alors comme suit :

— On tire un couple $(U(\omega), Y(\omega))$, où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ est indépendante de Y (notons $n = Y(\omega)$).
— Si $k \times U(\omega) \times q_n \leq p_n$, on accepte la valeur.
— Sinon, on tire un nouveau couple, etc.

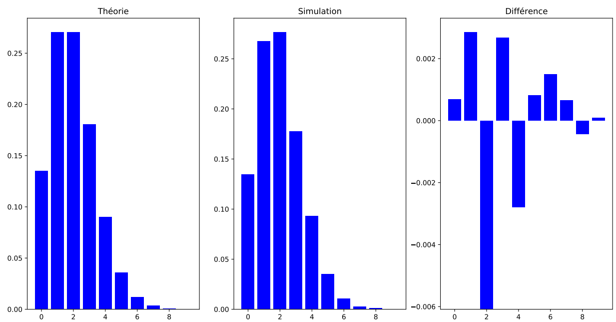
Les valeurs trouvées sont des réalisations d'une `v.a.r.` de même loi que X (Voir la démonstration dans le cas continu). Le code `Python` 2.31, de la présente page et la figure 2.31, page ci-contre sont une illustration de cette méthode. (Simulation d'une loi de Poisson de paramètre λ).

Session `Python` 2.31 – Simulation d'une loi de Poisson (méthode du rejet)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import poisson
from scipy.stats import geom

N=40000 # Nombre d'échantillons
n=10 # Nombre d'observations

L=2 # Paramètre de la loi de poisson
p=0.1 # paramètre de la loi géométrique
k=4

U=np.random.uniform(size=N)
Y=np.random.geometric(p=p,size=N)

def test(u,y):
    return k*u*geom.pmf(y,p) <=poisson.pmf(y-1,L)

X= [Y[j] for j in range(N) if test(U[j],Y[j])]
Z=[sum(X==k+1)/len(X) for k in np.arange(n)] # fréquence d'apparition dans X
T=poisson.pmf(np.arange(n), L)

plt.subplot(1,3,1)
plt.bar(np.arange(n),T,color='b')
```

```
plt.title("Théorie")

plt.subplot(1,3,2)
plt.bar(np.arange(n),Z,color='b')
plt.title("Simulation")

plt.subplot(1,3,3)
plt.bar(np.arange(n),T-Z,color='b')
plt.title("Différence")

plt.show()
```

Figure 2.31 – Simulation d'une loi de Poisson (méthode du rejet)



2.7.3.2 Variables continues

Théorème 2.8 – Méthode du rejet (première version)

Soit B un borélien de $\mathbb{R}^2$, borné, de mesure de Lebesgue non nulle. $B \subset \prod_{k=1}^{p}[a_k, b_k] = \Pi$, où Π est donc un pavé contenant B. Soit $U \sim \mathcal{U}(\Pi)$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur Π. Et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U, on pose :

$$N = \min\left(\{k \in \mathbb{N}^*,\ U_k \in B\}\right) \text{ si l'ensemble est non vide, } 1 \text{ sinon.}$$

alors N suit une loi géométrique de paramètre $\lambda(B)/\lambda(\Pi)$ et

$$\boxed{U_{_N} \sim \mathcal{U}(B).}$$

Démonstration

1. La probabilité que $U \in B$, est, par définition d'une loi uniforme :
$$\mathbb{P}(U \in B) = \frac{\lambda(B \cap \Pi)}{\lambda(\Pi)} = p, \text{ où } \lambda \text{ est la mesure de Lebesgue.}$$
On peut remarquer par ailleurs que :
$$\mathbb{P}\left(\{k \in \mathbb{N}^*,\ U_k \in B\} = \emptyset\right) = 0,$$
car
$$\left(\{k \in \mathbb{N}^*,\ U_k \in B\} = \emptyset\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\left(U_k \notin B\right),$$
et ces événements sont indépendants, donc :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\left(U_k \notin B\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}(1-p)^n = 0,$$
car $p \neq 0$, d'après l'hypothèse $\lambda(B) \neq 0$.
N suit donc bien une loi géométrique de paramètre $p = \lambda(B)/\lambda(\Pi)$.
2. Calculons la loi de $U_{_N}$. Par loi des probabilités totales, on a, pour $A \in \mathcal{BO}(\mathbb{R}^p)$:
$$\mathbb{P}\left(U_{_N} \in A\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\left(U_{_N} \in A\right) \cap (N = k)\Big).$$

Or
$$(U_N \in A) \cap (N = k) = (U_k \in A \cap B) \cap \left(\cap_{j=1}^{k-1} (U_j \notin B) \right),$$
de probabilité immédiate (par indépendance des U_k) :
$$\frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(\Pi)} \times (1-p)^{k-1}.$$
Finalement :
$$\mathbb{P}(U_N \in A) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(\Pi)} \times \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(\Pi)} \times \frac{1}{p} = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(B)}.$$

Remarque 2.88

Cela s'appelle méthode du rejet, car, lorsque le point tiré *n'est pas dans* B, on recommence le tirage.

Remarque importante 2.89

Pour tirer le moins possible de points inutiles, il faut que la probabilité de succès p soit la plus proche de 1, et donc choisir Π le plus petit possible...

Exercice(s) 2.24

2.24.1 En utilisant la méthode du rejet, simuler une loi uniforme sur l'intérieur de l'ellipse d'équation $x^2 + 3y^2 = 1$.

Théorème 2.9 – Méthode du rejet (deuxième version)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, dont on connaît la densité f_X : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$. On suppose connue une densité $f_Y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$, d'une variable aléatoire Y, telle que :
$$\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p, \ f_X(\underline{x}) \leq k \times f_Y(\underline{x}).$$

*Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes de loi de densité f_Y, et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des **v.a.r.** indépendantes, de lois uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors :*

$$N = \min\left(\{j\in\mathbb{N}^*,\ k\times U_j\times f_Y(Y_j)\leq f_X(Y_j)\}\right),\ \textit{si l'ensemble est non vide, } 1 \textit{ sinon.}$$

suit une loi géométrique de paramètre $1/k$ et

$$\boxed{Y_N \textit{ a même loi que } X.}$$

Démonstration

1. Calculons la probabilité δ que

$$(U,Y)\in\{(u,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}^p,\ k\times u\times f_Y(y)\leq f_X(y)\}.$$

C'est, par définition de la densité (en notant $y=(y_1,\ldots,y_p)$) :

$$\delta=\int_{y_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{y_p=-\infty}^{+\infty}\int_{u=0}^{\min\left(1,f_X(y)/(k\times f_Y(y))\right)} f_Y(y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y_p\ \ldots\ \mathrm{d}y_1.$$

L'hypothèse faite sur les densités, nous indique, que lorsque $f_Y(y)\neq 0$, on a [a] :

$$\min\left(1,\frac{f_X(y)}{k\times f_Y(y)}\right)=\frac{f_X(y)}{k\times f_Y(y)},$$

donc :

$$\delta=\frac{1}{k}\times\int_{\mathbb{R}^p} f_Y\ \mathrm{d}\lambda=\frac{1}{k}.$$

Le même raisonnement qu'à la démonstration précédente nous assure que $N\sim\mathcal{G}(\delta)$.

2. Calculons maintenant la loi de Y_N. Soit $(t_1,\ldots,t_p)\in\mathbb{R}^p$, on a alors :

$$\mathbb{P}\left(Y_N\in\prod_{j=1}^{p}]-\infty,t_j]\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left(Y_N\in\prod_{j=1}^{p}]-\infty,t_j]\right)\cap(N=n)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left(Y_n\in\prod_{j=1}^{p}]-\infty,t_j]\right)\cap(N=n)\right).$$

Or, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$q_n=\mathbb{P}\left(\left(Y_n\in\prod_{j=1}^{p}]-\infty,t_j]\right)\cap(N=n)\right)=\mathbb{P}\left(\left(\cap_{j=1}^{n-1}(U_j,Y_j)\in\Delta\right)\cap((U_n,Y_n)\in\Gamma)\right),$$

où

$$\Delta=\{(u,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}^p,\ k\times u\times f_Y(y)>f_X(y)\}$$

et

$$\Gamma = \left\{ (u,y) \in [0,1] \times \prod_{j=1}^{p}]-\infty, t_j], \ k \times u \times f_Y(y) \leq f_X(y) \right\}.$$

Et, de plus, les $(U_k, Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes... Donc :

$$q_n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1} \times \int_{y_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{y_p=-\infty}^{+\infty} \int_{u=0}^{\min\left(1, f_X(y)/(k \times f_Y(y))\right)} f_Y(y) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}y_p \ \ldots \,\mathrm{d}y_1.$$

Finalement :

$$q_n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1} \frac{1}{k} \times \mathbb{P}\left(X \in \prod_{j=1}^{p}]-\infty, t_j]\right).$$

Il est alors immédiat que :

$$\mathbb{P}\left(Y_N \in \prod_{j=1}^{p}]-\infty, t_j]\right) = \mathbb{P}\left(X \in \prod_{j=1}^{p}]-\infty, t_j]\right).$$

a. Et lorsque cette valeur est nulle, cela ne nous intéresse pas !

Propriété 2.38 – Simulation d'une loi du χ^2

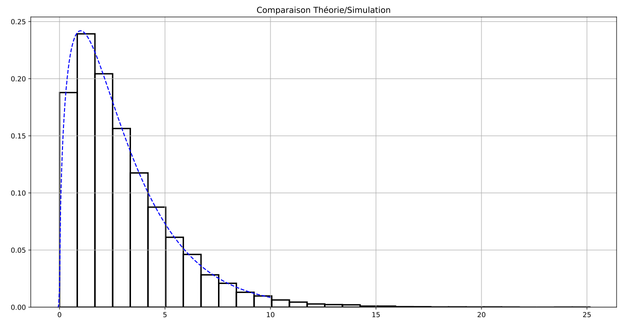
Pour la loi du χ^2_n, il suffit de s'appuyer, soit sur une somme de n carrés de `v.a.r.` indépendantes de lois normales centrées réduites. Mais, pour n « grand », cela risque d'être peu efficace, on peut faire alors appel à *la deuxième méthode du rejet*.Le code `Python` 2.32, de la présente page et la figure 2.32, page suivante sont une illustration de la première méthode. Le code `Python` 2.33, page 217 et la figure 2.33, page 219 sont une illustration de la deuxième méthode.

Session `Python` 2.32 – Simulation d'un χ^2

```python
from scipy.stats import chi2
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

N=30000 # nombre d'échantillons
NN=200 # nombre de points (graphique)

```

```
X=norm.rvs(size=(N,3)) # 3 degrés de liberté
chi= np.sum(X**2, axis=1)

x=np.linspace(-0.1,10,NN)

plt.hist(chi,30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,chi2.pdf(x,3),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure 2.32 – Simulation d'un χ^2

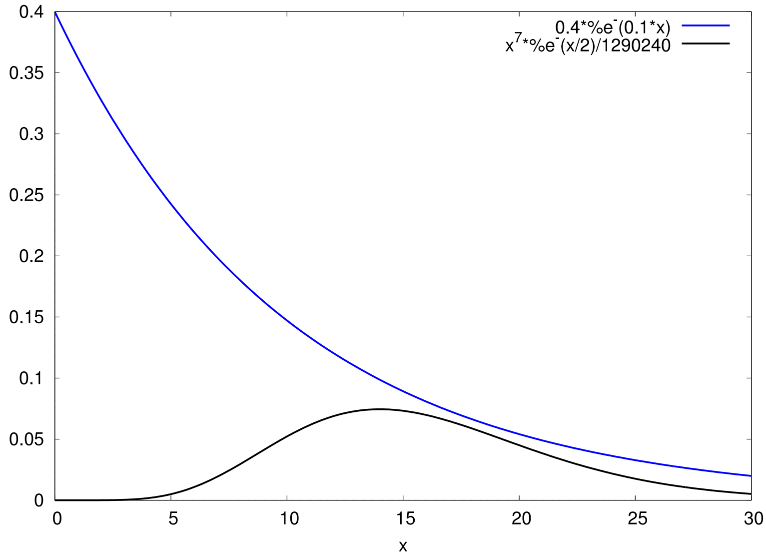


Exemple 2.39 – Simulation d'une loi du χ^2_{16}

Utilisons la deuxième méthode du rejet pour simuler une loi du χ^2_{16} (χ^2 à 16 degrés de liberté). La densité de cette loi est :

$$x \mapsto \frac{1}{1290240} \times x^7 \times e^{-t/2} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

— La première étape consiste à chercher une « bonne » loi de Y (qui doit être facilement simulable, sinon, la méthode n'a pas d'intérêt). Vu l'allure de la densité du χ^2, on pense à une loi exponentielle. Après essai, on peut prendre $\lambda = 0.1$ et $k = 4$.



— Ensuite, il suffit de se laisser porter par l'algorithme. Le code `Python` 2.33, de la présente page et la figure 2.33, page 219 sont une illustration de la méthode.

Session `Python` 2.33 – Méthode du rejet (χ^2_{16})

```
from scipy.stats import chi2
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

N=30000 # nombre d'échantillons
NN=500 # nombre de points (graphique)
L=0.1 # paramètre de l'exponentielle
```

```

U=np.random.uniform(size=N)
Y=np.random.exponential(scale=1/L,size=N)

k=4
def fx(x):
    return 1/1290240*x**7*np.exp(-x/2)

def fy(x):
    return L*np.exp(-L*x)

def test(u,y):
    return k*u*fy(y) <=fx(y)

chi= [Y[j] for j in range(N) if test(U[j],Y[j])]

x=np.linspace(-0.1,40,NN)

plt.hist(chi,30,normed=True,linewidth=2,fill=False)
plt.plot(x,chi2.pdf(x,16),"b--")
plt.title('Comparaison Théorie/Simulation')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Exercice(s) 2.25

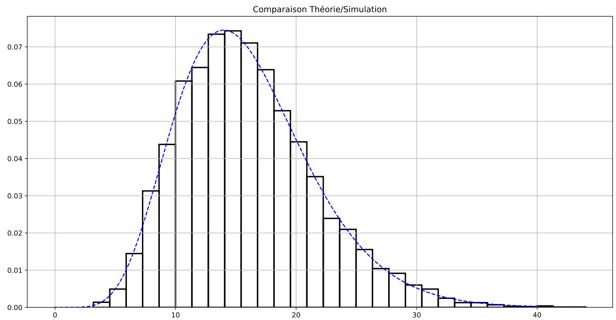
2.25.1 Proposer une simulation pour les lois suivantes :

(a) Loi de Cauchy, de densité :

$$x \mapsto \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Loi uniforme sur un pentagone régulier.

Figure 2.33 – Méthode du rejet (χ^2_{16})



(c) Loi définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}.$$

(d) Loi uniforme sur :

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1,\ y \geq 0 \text{ et } x^2 \times y \leq 1\right\}.$$

2.25.2 Utiliser la première méthode du rejet pour simuler une loi uniforme sur la boule de centre O et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$.

2.25.3 On veut simuler une loi du χ^2 à 3 degrés de liberté par la méthode du rejet, en s'appuyant sur une loi exponentielle de paramètre λ. Quel est le meilleur choix de λ (celui qui provoquera, en moyenne, le moins de rejets).

2.25.4 Mettre en place une méthode du rejet pour simuler une loi normale centrée réduite.

2.25.5 Soit X une `v.a.r.` de fonction de répartition F_X. On supposera cette fonction de répartition inversible. Soit $\beta \in \mathbb{R}$, on veut simuler la loi de :

$$Y = X/(X > \beta).$$

(a) Comment simuler Y par la méthode du rejet ?

On pose, si $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$:

$$Z = F_X^{-1}\left(F_X(\beta) + (1 - F_X(\beta)) \times U\right).$$

Quelle est la loi de Z ? En déduire une autre méthode de simulation de Y.

(b) Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, montrer que l'on peut ramener la situation à $m = 0$, $\sigma = 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque.

(c) Proposer, dans le cas précédent une simulation par la méthode du rejet en s'appuyant sur la loi de densité :

$$x \mapsto \lambda \times e^{-\lambda \times (x-\beta)} \times \mathbb{1}_{(X>\beta)}.$$

En choisissant le paramètre λ de manière optimale.

2.25.6 Soit $M = (X, Y, Z)$ suivant une loi uniforme sur la boule unité B de $\mathbb{R}^3$, où

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Quelles sont les lois de :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\ \Theta \in [-\pi, \pi] \text{ et } \Phi \in [0, 2\,\pi[,$$

telles que :

$$X = R \times \sin(\Theta) \times \cos(\Phi),\ Y = R \times \sin(\Theta) \times \sin(\Phi) \text{ et } Z = R \times \cos(\Theta)\ ?$$

2.25.7 On veut générer de manière uniforme des points aléatoires $M = (X, Y, Z)$ sur une sphère de centre O et de rayon 1, donc pour toute partie borélienne A de la sphère B, la probabilité que $M \in A$ sera

$$\mathbb{P}(M \in A) = \frac{\mathcal{A}(A)}{\mathcal{A}(B)} = \frac{\mathcal{A}(A)}{4\,\pi},$$

où $\mathcal{A}(A)$ désigne l'aire de A. Quelles sont les lois de :

$$\Theta \in [-\pi, \pi] \text{ et } \Phi \in [0, 2\,\pi[,$$

telles que :

$$X = \sin(\Theta) \times \cos(\Phi),\ Y = \sin(\Theta) \times \sin(\Phi) \text{ et } Z = \cos(\Theta)\ ?$$

Chapitre 3

Groupes

3.1 Définitions et exemples

3.1.1 Structure

Définition 3.1 – Groupe

On dit que $(G, \times)$ est un *groupe* lorsque :

— G est un ensemble non vide ;

— $\times$ est une loi de composition interne sur G vérifiant

1. $\times$ est associative :
$$\forall (x, y, z) \in G^3,\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z);$$
2. il existe un élément neutre $e \in G$ pour $\times$:
$$\forall x \in G,\ e \times x = x \times e = x;$$
3. tout élément de G possède un inverse pour $\times$:
$$\forall x \in G,\ \exists y \in G,\ x \times y = y \times x = e;$$
et on note x^{-1} l'inverse de $x \in G$.

Remarque 3.1

1. On montre que l'élément neutre pour $\times$, s'il existe, est unique et que, de la même manière, un inverse pour x, s'il existe, est unique.
2. On notera, dans le cas général, $\times$ la loi du groupe mais on utilise aussi les symboles : $+$, $\circ$, $\bullet$, ...

Définition 3.2

Soit $(G, \times)$ un groupe :

— si $\times$ est commutative, on dit que le groupe est *commutatif* ou *abélien* ;

— si G est de cardinal fini, on dit que le groupe est *fini*.

Exemple 3.1

Groupes commutatifs

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, munis de l'addition.

2. $\{-1,+1\}$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{C}^*$, munis de la multiplication.

Groupes non commutatifs

3. $\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 3)$, muni de la composition.
4. $\mathfrak{S}(E)$ (E de cardinal infini, ou fini ≥ 3), muni de la composition.
5. $\mathcal{GL}(E)$, (E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, ou de dimension ≥ 2), muni de la composition.
6. $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = +1\}$ (E un espace vectoriel euclidien de dimension n avec $n \geq 2$ pour $\mathcal{O}(E)$ et $n \geq 3$ pour $\mathcal{O}^+(E)$ [a]), muni de la composition.
7. $GL_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$, muni de la multiplication.
8. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie ou finie ≥ 2, alors :

$$\mathcal{GA}(\mathcal{E}) = \{\phi\ :\ \mathcal{E} \to \mathcal{E},\ \text{affine, bijective}\}$$

muni de la composition est un groupe nommé *groupe affine de* $\mathcal{E}$. [b]

Divers autres exemples

9. Si $(A, +, \times)$ est un ensemble muni de deux opérations internes $+$ et $\times$, telles que :
— $(A, +)$ est un groupe commutatif.
— $\times$ est associative, possède un élément neutre noté 1_A ($1_A \neq 0_A$, où 0_A est l'élément neutre de l'addition) et est distributive par rapport à $+$ (on dit, en ce cas que $(A, +, \times)$ est un anneau),

alors :

$$\mathbb{U}(A) \overset{\text{Not}}{=} \{a \in A,\ \exists b \in A,\ a \times b = b \times a = 1_A\},$$

(c'est donc l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$), muni de $\times$, est un groupe (parfois commutatif, si $\times$ l'est, par exemple, parfois non commutatif). Pour $a \in \mathbb{U}(A)$, nous noterons $b = a^{-1}$. (Voir la démonstration page suivante).

On appelle $\mathbb{U}(A)$ le groupe des *unités de* A.

Ainsi, $\{-1,+1\} = \mathbb{U}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{GL}(E) = \mathbb{U}(\mathcal{L}(E))$,...

---

a. Si $n = 2$, $\mathcal{O}^+(E)$ est commutatif.

b. Un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E est un ensemble de *points* muni d'une opération :

$$\begin{cases} \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E} \\ (A, \overrightarrow{u}) \mapsto A + \overrightarrow{u} \end{cases}$$

où le point $B = A + \overrightarrow{u}$ est l'unique point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

ϕ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ si, et seulement si, il existe un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, tel que :

$$\forall (A, \overrightarrow{u}) \in \mathcal{E} \times E,\ \phi\left(A + \overrightarrow{u}\right) = \phi(A) + \varphi\left(\overrightarrow{u}\right).$$

Démonstration que $\mathbb{U}(A)$ est un groupe

- b est unique, car si $a \times b = 1_A = a \times b'$, alors $a \times (b - b') = 0_A$, donc, en multipliant par b à gauche, $b - b' = 0_A$.
- $\mathbb{U}(A)$ est non vide, car $1_A \in \mathbb{U}(A)$.
- $\times$ est bien une opération interne car :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{A}^2,\ (x \times y)^{-1} = y^{-1} \times x^{-1}.$$

- $\times$ est associative (par définition).
- $\times$ a un élément neutre 1_A (par définition).
- Tout élément $a \in \mathbb{U}(A)$ a un inverse a^{-1}.

Remarque 3.2

Si $(G, \times)$ et $(G', \times')$ sont deux groupes, alors on peut munir facilement $G \times G'$ d'une structure de groupe (dite *structure de groupe produit*) définie par :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ \forall (x', y') \in G'^2,\ \big((x, x') \times'' (y, y')\big) \overset{\text{Def}}{=} (x \times y, x' \times y').$$

3.1.1.1 Étude particulière du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{Z}$, on appelle *classe de x modulo n* et on note :

$$\overline{x} = \{y \in \mathbb{Z} \mid n \text{ divise } (y - x)\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x\,[n]\}.$$

Propriété 3.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a :
$$\overline{x} = \{x + k \times n \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + k \times n \mid k \in \mathbb{Z}\} = r + n\mathbb{Z} = \overline{r},$$
où $r \in [\![0, n-1]\!]$ est le reste de la division euclidienne de x par n.
2. Les ensembles $\overline{0}, \ldots, \overline{n-1}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

3. L'ensemble $\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$ muni de la loi :

$$\overline{x} + \overline{y} \overset{\text{Def}}{=} \overline{x+y},$$

est un groupe noté $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}, +)$.

4. $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif fini de cardinal n.

Exemple 3.2

On obtient par exemple la « table d'addition » de $(\mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z}, +)$:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
+ & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} \\
\hline
\overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} \\
\overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{0} \\
\overline{2} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{1} \\
\overline{3} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\
\overline{4} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\
\overline{5} & \overline{5} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\
\overline{6} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\
\overline{7} & \overline{7} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6}
\end{array}.$$

Exercice(s) 3.1

3.1.1 Déterminer et comparer les tables de lois des groupes :

(a) $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}_2, \times)$;

(b) $(\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}, +)$ et $\big((\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^2, +\big)$.

Remarque 3.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

1. la relation "modulo n" sur $\mathbb{Z}$ définie par :
$$x\mathcal{R}y \iff y = x\,[n],$$
est une relation d'équivalence dont l'ensemble des classes d'équivalence est $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$.
2. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![0, n-1]\!] & \to & \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$ est bijective et vérifie :
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^2,\; a +_{\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}} b = \varphi\Big(\varphi^{-1}(a) +_{\mathbb{Z}} \varphi^{-1}(b)\,[n]\Big).$$
3. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$ vérifie :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\; \varphi(x +_{\mathbb{Z}} y) = \varphi(x) +_{\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}} \varphi(y),$$
et :
$$\varphi(x) = \overline{0} \iff x \in n\mathbb{Z}.$$

Les deux derniers points seront développés dans un cadre plus général (voir propriétés 3.8, page 255 et 3.9, page 255).

3.1.1.2 Étude particulière du groupe $\mathfrak{S}_n$

Remarque 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Une permutation de $[\![1, n]\!]$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.
2. Si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, le support de σ est :
$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \in [\![1, n]\!]\,,\; \sigma(i) \neq i\}.$$
3. On note $\mathfrak{S}_n$, et on appelle le groupe symétrique d'ordre n, l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.

Propriété 3.2 – $\mathfrak{S}_n$

1. C'est un groupe fini, de cardinal $n!$.
2. Un élément $s \in \mathfrak{S}_n$ est noté :

$$s \ : \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \cdots & s(n) \end{bmatrix}.$$

Remarque 3.5

En `Wxmaxima`, on représente s par une liste :

$$[s(1), \ldots, s(n)]\,.$$

La composition peut être alors facilement définie. (Voir le code `Wxmaxima` 3.1, de la présente page).

Session `Wxmaxima` 3.1 – Composition de permutations

```
(%i1) s : [3,2,4,1];
(%o1) [3, 2, 4, 1]
(%i2) o(l1,l2) := block([i,n],n : length(l1),
      if n=1 then [1] else makelist(l1[l2[i]],i,1,n))$
(%i3) infix(o);
(%o3) o
(%i4) s o s;
(%o4) [4, 2, 1, 3]
```

Définition 3.4 – Transposition

Soit $s \in \mathfrak{S}_n$, on dit que s est une *transposition* si :

$$\operatorname{Card}\left(\{k \in [\![1, n]\!]\,,\ s(k) \neq k\}\right) = 2.$$

Il existe alors deux indices $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ s(k) = \begin{cases} i & \text{si } k = j \\ j & \text{si } k = i \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

On la note usuellement :

$$\tau_{(i,j)} \text{ ou encore } (i \quad j).$$

Session `Wxmaxima` 3.2 – Transposition

```
(%i5) tau(i,j,n) := makelist(if k=i then j elseif k=j then i else k,k,1,n)$
(%i6) tau(2,4,6);
```

(%o6) $[1, 4, 3, 2, 5, 6]$

Proposition 3.1

Toute permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ peut se décomposer comme un produit d'au plus $n - 1$ transpositions.

Remarque 3.6

Par convention, le produit de 0 transposition (produit vide) est l'identité.

Démonstration

Par récurrence sur n. Si $s \in \mathfrak{S}_n$, alors, on pose :

$$\widetilde{s} = \begin{cases} s & \text{si } s(n) = n \\ \tau_{(n,s(n))} \circ s & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suffit alors de décomposer :

$$\widetilde{s}\Big|_{[\![1,n-1]\!]}^{[\![1,n-1]\!]}$$

Définition 3.5 – k-cycles

Si $k \in [\![2,n]\!]$, on appelle *k-cycle de $\mathfrak{S}_n$* toute permutation s vérifiant :

$$\exists (a_1,\dots,a_k) \in [\![1,n]\!]^k\,,\ \text{distincts 2 à 2,} \begin{cases} \forall i \in [\![1,k-1]\!]\,,\ s(a_i) = a_{i+1} \\ s(a_k) = a_1 \\ \forall j \notin \{a_1,\dots,a_k\},\ s(j) = j. \end{cases}$$

On le note alors

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_k).$$

L'ensemble $\{a_1,\dots,a_k\}$ s'appelle le *support* du k-cycle.
Un n-cycle de $\mathfrak{S}_n$ est appelé *permutation circulaire*. Nous nous servirons souvent du n-cycle particulier :

$$\sigma = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Une transposition est donc un 2-cycle.

Session `Wxmaxima` 3.3 – Transpositions et cycles

```
(%i7)  sigma(n) := makelist(if k=n then 1 else k+1,k,1,n)$
```

```
(%i8) cycle(l,n) := block([k,p,f], p : length(l),
      makelist(lambda([k],if member(k,l) then block([i],
          i : sublist_indices(l,lambda([x],x=k))[1],
          if not(i=p) then l[i+1] else l[1]) else k)(k),k,1,n))$

(%i9) cycle([2,4,3],6);
```

(%o9) $[1,4,2,3,5,6]$

Proposition 3.2 – Décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ se décompose de manière unique à l'ordre près comme un produit de cycles de supports 2 à 2 disjoints.

Démonstration

Immédiat par récurrence sur n.

Remarque 3.7

Un produit de cycles $c_1, \dots, c_p$ sera bien sûr noté $c_1 \circ \cdots \circ c_p$. Comme les cycles sont de supports disjoints, ils commutent deux à deux, l'ordre d'écriture n'a pas de signification particulière. En `Wxmaxima`, nous noterons la décomposition en cycles, par une liste de liste. Il est indispensable alors de savoir passer d'une forme à l'autre (la décomposition en cycles pour lire, la forme détaillée pour calculer). Voir le code `Wxmaxima` 3.4, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 3.4 – Décomposition en cycles à supports disjoints

```
(%i10) c2p(l,n) := block([k,res],
          res : makelist(k,k,1,n),
          for i:1 thru length(l) do res : res o cycle(l[i],n),
          res)$
```

```
(%i11) c2p([[1,3],[2,5,7],[4,6]],8);
```

(%o11) $[3, 5, 1, 6, 7, 4, 2, 8]$

```
(%i12) orbite(i,l) := block([k,res],
          res : [i],
          k : i,
          while not(l[k]=i) do
              ( res : endcons(l[k],res),
              k : l[k]),
          res)$
```

```
(%i13) orbite(7,%o11);
```

(%o13) $[7, 2, 5]$

```
(%i14) p2c(l) := block([k,res,s,aux],
          res : [],
          s : [],
          for k:1 thru length(l) do (
              if not(member(k,s)) then
                  ( aux : orbite(k,l),
                  if length(aux)>1 then res : endcons(aux,res),
                  s : append(aux,s))),
          res)$
```

```
(%i15) p2c(%o11);
```

(%o15) $[[1, 3], [2, 5, 7], [4, 6]]$

Remarque 3.8

Il est possible de générer $\mathfrak{S}_n$ en `Wxmaxima`. Voir le code `Wxmaxima` 3.5, page suivante.

Session `Wxmaxima` 3.5 – Génération de $\mathfrak{S}_n$

```
(%i16) S4 : permutations(makelist(k,k,1,4));
```

(%o16) $\{[1,2,3,4],[1,2,4,3],[1,3,2,4],[1,3,4,2],[1,4,2,3],[1,4,3,2],[2,1,3,4],[2,1,4,3],[2,3,1,4],$
$[2,3,4,1],[2,4,1,3],[2,4,3,1],[3,1,2,4],[3,1,4,2],[3,2,1,4],[3,2,4,1],[3,4,1,2],[3,4,2,1],[4,1,2,3],$
$[4,1,3,2],[4,2,1,3],[4,2,3,1],[4,3,1,2],[4,3,2,1]\}$

Il est très important de bien savoir calculer dans $\mathfrak{S}_n$.

3.1.2 Sous-structure

Définition 3.6 – Sous-groupe

Soit $(G,\times)$ un groupe, une partie $H \subset G$ est un *sous-groupe* de G si elle vérifie :

1. H est non vide : $H \neq \emptyset$;
2. H est stable par passage à l'inverse : $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$;
3. H est stable pour la loi $\times$: $\forall (x,y) \in H^2,\ x \times y \in H$.

Exemple 3.3

1. $\mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$.
2. $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E),\circ)$ (E est un espace vectoriel euclidien).
3. $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E),\circ)$.
4. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont de la forme :

$$n\,\mathbb{Z} \overset{\text{Not}}{=} \{p \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ p = k \times n\}\,.$$

Remarque 3.9

Si H est un sous-groupe de $(G, \times)$ alors $(H, \times)$ est un groupe.

Remarque 3.10

Si $(H_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de G, alors :

$$\bigcap_{i \in I} H_i \text{ est un sous-groupe de } G.$$

Proposition 3.3 – Sous-groupe engendré par une partie

Soit $(G, \times)$ un groupe, soit $A \subset G$, une partie de G, il existe un plus petit sous-groupe de G contenant A.
On l'appelle sous-groupe de G engendré par A *et on le note :*

$$\operatorname{Gpe}(A) \textit{ ou } \langle A \rangle$$

Démonstration

- Cette définition a un sens, car :
$$\mathcal{F} = \{H \text{ sous-groupe de } G,\ A \subset H\},$$
est non vide et stable par intersection quelconque.
- On a donc, instantanément :
$$\operatorname{Gpe}(A) = \bigcap_{H \in \mathcal{F}} H.$$

Exemple 3.4

1. Si $(G, \times)$ est un groupe et si $a \in G$, alors :
$$\operatorname{Gpe}(\{a\}) \text{ est un sous-groupe de } G.$$

▶ Il peut être fini, de cardinal $n \geq 1$, et en ce cas :

$$\operatorname{Gpe}(\{a\}) = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\right\},$$

où $a^2 = a \times a$, $a^p = a \times a^{p-1}$ et $a^n = e$.

- Il peut être de cardinal infini, et en ce cas :

$$\mathrm{Gpe}(\{a\}) = \left\{\dots, a^{-k}, \dots, a^{-1}, e, a \dots, a^k, \dots\right\},$$

où $a^{-k} = \left(a^{-1}\right)^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Par exemple dans $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}, +)$:

$$\mathrm{Gpe}(\{\overline{1}\}) = \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}\,;$$

et, dans $(\mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z}, +)$:

$$\mathrm{Gpe}(\{\overline{2}\}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \neq \mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z}.$$

3. Dans $(\mathbb{Z}, +)$, si $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\mathrm{Gpe}(\{n\}) = n\,\mathbb{Z}.$$

Exemple 3.5

Il est souvent intéressant de déterminer le sous-groupe de $(G, \times)$ engendré par $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, et surtout, de savoir si c'est G tout entier.

Par exemple, on détermine :

$$\mathrm{Gpe}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

en s'aidant de `Wxmaxima` (voir le code 3.6, de la présente page) et on trouve $\mathfrak{S}_4$.

Session `Wxmaxima` 3.6 – Génération de $\mathfrak{S}_4$

```
(%i17) generators : {tau(1,2,4),sigma(4)};
```

(%o17) $\{[2, 1, 3, 4], [2, 3, 4, 1]\}$

```
(%i18) G : {makelist(k,k,1,4)}$
       makegpe() := block([i,j,n],
           n : length(G),
           for i:1 thru n do (
               for j:1 thru length(generators) do (
                G : union(G,{part(G,i)o(part(generators,j))}))),
           if not(length(G)=n) then makegpe())$
```

```
(%i20) makegpe();
```

(%o20) $false$

```
(%i21) length(G);
```

(%o21) 24

```
(%i22) G;
```

(%o22) $\{[1,2,3,4],[1,2,4,3],[1,3,2,4],[1,3,4,2],[1,4,2,3],[1,4,3,2],[2,1,3,4],[2,1,4,3],[2,3,1,4],$
$[2,3,4,1],[2,4,1,3],[2,4,3,1],[3,1,2,4],[3,1,4,2],[3,2,1,4],[3,2,4,1],[3,4,1,2],[3,4,2,1],[4,1,2,3],$
$[4,1,3,2],[4,2,1,3],[4,2,3,1],[4,3,1,2],[4,3,2,1]\}$

```
(%i23) map(p2c,%);
```

(%o23) $\{[],[[1,2]],[[1,2],[3,4]],[[1,2,3]],[[1,2,3,4]],[[1,2,4]],[[1,2,4,3]],[[1,3]],[[1,3],[2,4]],$
$[[1,3,2]],[[1,3,2,4]],[[1,3,4]],[[1,3,4,2]],[[1,4]],[[1,4],[2,3]],[[1,4,2]],[[1,4,2,3]],[[1,4,3]],$
$[[1,4,3,2]],[[2,3]],[[2,3,4]],[[2,4]],[[2,4,3]],[[3,4]]\}$

Exemple 3.6

Calculons de même :

$$\mathrm{Gpe}\left(\left\{\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{bmatrix}\right\}\right).$$

C'est encore $\mathfrak{S}_4$. (Voir le code `Wxmaxima` 3.7, page suivante).

Session Wxmaxima 3.7 – Autre génération de $\mathfrak{S}_4$

```
(%i24) generators : {tau(1,2,4),cycle([2,3,4],4)};
```

(%o24) $\{[1,3,4,2],[2,1,3,4]\}$

```
(%i25) G : {makelist(k,k,1,4)}$
       makegpe();
```

(%o26) $false$

```
(%i27) length(G);
```

(%o27) 24

Exemple 3.7

Calculons

$$\operatorname{Gpe}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}\right\}\right).$$

Ce n'est plus $\mathfrak{S}_4$. (Voir le code Wxmaxima 3.8, de la présente page).

Session Wxmaxima 3.8 – Un sous-groupe strict de $\mathfrak{S}_4$

```
(%i28) generators : {cycle([1,2,3],4),cycle([2,3,4],4)};
```

(%o28) $\{[1,3,4,2],[2,3,1,4]\}$

```
(%i29) G : {makelist(k,k,1,4)}$
       makegpe();
```

(%o30) $false$

```
(%i31) length(G);
```

(%o31) 12

```
(%i32) map(p2c,G);
```

(%o32) $\{[], [[1,2],[3,4]], [[1,2,3]], [[1,2,4]], [[1,3],[2,4]], [[1,3,2]], [[1,3,4]], [[1,4],[2,3]], [[1,4,2]], [[1,4,3]], [[2,3,4]], [[2,4,3]]\}$

Définition 3.7

Soit $(G,\times)$ un groupe et $A \subset G$, on dit que A *engendre* G, ou que G *est engendré* par A lorsque :

$$G = \mathrm{Gpe}(A).$$

3.1.2.1 Étude particulière des groupes géométriques

Définition 3.8 – Sous-groupes du groupe affine

On s'intéresse ici aux sous-groupes de $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E, laissant invariant un sous-ensemble Δ de $\mathcal{E}$. Nous le noterons :

$$G_{\vartriangle} \overset{\text{Def}}{=} \{\phi \in \mathcal{GA}(\mathcal{E}),\ \phi(\Delta) = \Delta\}.$$

La plupart du temps, lorsque Δ n'a pas de forme particulière, $G_{\vartriangle}$ sera $\{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$.

Remarque 3.11

La démonstration du fait que $G_{\vartriangle}$ est un groupe est laissé en exercice.

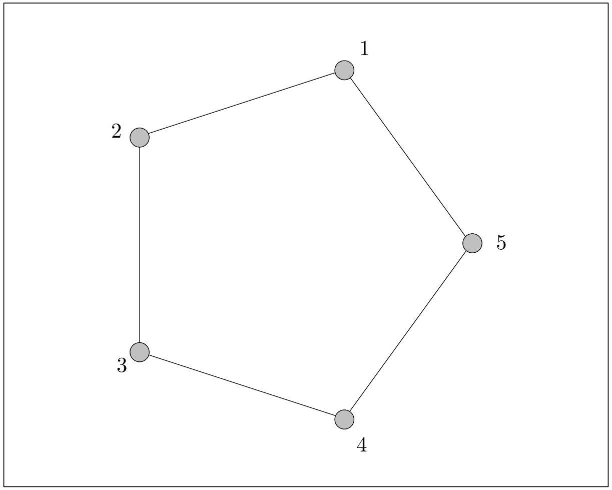
Cas des polygones convexes réguliers

Définition 3.9 – Groupe diédral

Le groupe des isométries affines laissant invariant un polygone convexe régulier à n sommets s'appelle le *groupe diédral d'ordre* n et est noté D_n.

Remarque 3.12

On peut facilement démontrer que l'on obtient le même groupe selon que l'on choisisse Δ l'intérieur du polygone ou Δ l'ensemble des arêtes ou même, Δ l'ensemble des sommets. Pour mieux visualiser, on va numéroter les sommets :



Propriété 3.3 – Démarche

1. *Combien d'éléments contient le groupe ?*

   Le sommet 1 doit être envoyé sur un autres sommet, il y a donc n possibilités.

   Une fois choisie l'image du sommet 1, le sommet 2 doit être envoyé sur un sommet joint par une arête à l'image du sommet 1, il y a donc 2 possibilités.

   Ces deux images étant choisies, il n'y a plus d'autres choix possibles. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Card}(D_n) = 2\,n.}$$

2. *Quels éléments connaît-on ?*

Si on note O le centre du polygone. On a les rotations de centre O et d'angles $2\,k \times \pi/n$ ($k \in [\![0, n-1]\!]$) et les symétries d'axes passant par O et un sommet (et donc par deux sommets si n est pair et par un sommet et le milieu du côté opposé si n est impair), si n est pair, on peut aussi prendre les symétries d'axes passant par O et le milieu d'un côté. Dans les deux cas, on a $2\,n$ éléments distincts, donc tous les éléments de D_n.

3. *Comment visualiser/représenter D_n ?*

   Avec `Wxmaxima`, on peut visualiser les éléments de D_n comme des permutations des sommets numérotés $1, \ldots, n$. Voir le code `Wxmaxima` 3.9, de la présente page.

   Nous voyons en plus que, pour $n = 5$, en notant $(A_1, \ldots, A_5)$ les sommets, on a :

$$D_5 = \mathrm{Gpe}\left(\left\{\mathrm{rot}\left(O, \frac{2\,\pi}{5}\right), s_{(OA_1)}\right\}\right).$$

Session `Wxmaxima` 3.9 – Groupe diédral

```
(%i33) generators : {sigma(5),c2p([[2,5],[3,4]],5)};
```

(%o33) $\{[1,5,4,3,2],[2,3,4,5,1]\}$

```
(%i34) G : {makelist(k,k,1,5)}$
       makegpe();
```

(%o35) $false$

```
(%i36) length(G);
```

(%o36) 10

```
(%i37) map(p2c,G);
```

(%o37) $\{[],[[1,2],[3,5]],[[1,2,3,4,5]],[[1,3],[4,5]],[[1,3,5,2,4]],[[1,4],[2,3]],$
$[[1,4,2,5,3]],[[1,5],[2,4]],[[1,5,4,3,2]],[[2,5],[3,4]]\}$

Remarque 3.13

On a « visualisé » le groupe $\mathbb{D}_5$ à l'aide de permutations. On peut aussi, le visualiser à l'aide de matrices (mais cela pose des problèmes de simplification de formules de trigonométrie). Voir le code `Wxmaxima` 3.10, de la présente page.

Session `Wxmaxima` 3.10 – Groupe diédral (version matricielle)

```
(%i1) generators : {matrix([cos(2*%pi/5),-sin(2*%pi/5)],[sin(2*%pi/5),cos(2*%pi/5)]),
      matrix([-1,0],[0,1])}$

(%i2) G : {ident(2)}$

(%i3) makegpe() := block([i,j,n],
          n : length(G),
          for i:1 thru n do (
              for j:1 thru length(generators) do
               (G : union(G,{ratsimp(trigreduce(part(G,i).(part(generators,j))))}))),
          if not(length(G)=n) then makegpe())$

(%i4) makegpe();
```

(%o4) $false$

```
(%i5) length(G);
```

(%o5) 18

```
(%i6) G;
```

(%o6) $\left\{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{bmatrix},\right.$

$\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)\end{bmatrix},$

$$\left[\begin{matrix}-\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}-\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\end{matrix}\right]\right\}$$

```
(%i7) defrule(r1,cos(8*%pi/5),cos(2*%pi/5))$
      defrule(r2,sin(8*%pi/5),-sin(2*%pi/5))$
      defrule(r3,cos(6*%pi/5),cos(4*%pi/5))$
      defrule(r4,sin(6*%pi/5),-sin(4*%pi/5))$

(%i11) apply1(G,r1,r2,r3,r4);
```

(%o11) $$\left\{\left[\begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{matrix}\right], \left[\begin{matrix}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\\ -\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\end{matrix}\right]\right\}$$

Définition 3.10 – Présentation de groupe

On peut aussi utiliser une *présentation du groupe*, à l'aide d'un ensemble de générateurs $\{r, s\}$ et de relations que vérifient ces générateurs. Le groupe cherché est alors *le plus grand groupe possible*, engendré par les générateurs. Ici les relations seraient :

$$\left\{r^5 = e,\ s^2 = e,\ s \circ r = r^4 \circ s\right\}.$$

Remarque 3.14

On peut alors générer le groupe à l'aide de l'algorithme décrit dans le code `makegpe`, qui correspond à l'arbre de la figure 3.1, page 264. [a]
Donc :

$$G = \left\{e, r, r^2, r^3, r^4, s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s, r^4 \circ s\right\}.$$

a. Les nouveaux termes sont encadrés, les ... signifient qu'il n'y a pas de nouveaux termes dans cette branche. Les branches donnant un terme déjà connu (et donc rayé), n'ont pas besoin d'être développées.

Exercice(s) 3.2

3.2.1 Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les systèmes suivants :

(a) Les transpositions ;

(b) les transpositions de la forme $(i \quad i+1)$;

(c) les transpositions de la forme $(1 \quad i)$;

(d) les deux permutations $(1 \quad 2)$ et $(1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$.

3.2.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G le groupe $\mathfrak{S}_n$. Si $\sigma \in G$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note

— $F(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ

— F_i le sous-ensemble des éléments de G qui fixent i

— $\delta(\sigma, i) = 1$ si $\sigma(i) = i$ et 0 sinon.

(a) Quel est le cardinal de F_i ?

(b) En utilisant le fait que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in G} \delta(\sigma, i) = \sum_{\sigma \in G} \sum_{i=1}^{n} \delta(\sigma, i)$$

montrer qu'en moyenne, une permutation de $\mathfrak{S}_n$ possède un seul point fixe.

3.2.3 Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de deux cycles.

3.2.4 Quels sont les carrés dans $\mathfrak{S}_n$?

3.2.5 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On l'écrit sous la forme $\sigma = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_p$ où les γ_i sont des cycles dont les supports forment une partition de $[\![1, n]\!]$ (on accepte les cycles de longueur 1). On suppose que l'on a aussi $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ où chaque τ_i est une transposition. Montrer que $k \geq n - p$.

3.2.6 Soit c un r-cycle de $\mathfrak{S}_n$ et $1 \leq p \leq r-1$. Pour quelles valeurs de p, c^p est-il un cycle ?

3.2.7 Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ et σ' sont conjuguées s'il existe $\rho \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.

(a) Montrer que tout conjugué d'un k-cycle est encore un k-cycle.

(b) Montrer que σ et σ' sont conjuguées si et seulement si les cycles à supports disjoints de σ et σ' ont deux à deux mêmes longueurs.

3.2.8 (a) Soit $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n) \in \mathfrak{S}_n$. Trouver toutes les permutations $\rho \in \mathfrak{S}_n$ commutant avec σ.

(b) Dans $\mathfrak{S}_{10}$, quelles sont les permutations qui commutent avec $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (6\ 7\ 8\ 9\ 10)$?

3.2.9 Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. $H.K = \{g = h \times k,\ h \in H,\ k \in K\}$. Montrer que $H.K$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $H.K = K.H$.

3.2.10 Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ constitué des éléments fixant n. Montrer que si H est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ tel que $G \subset H$ alors $H = G$ ou $H = \mathfrak{S}_n$.

3.1.3 Morphisme de groupe

Définition 3.11

Soit $(G, \times)$ et $(G', \times')$ deux groupes, une application $\phi : G \to G'$ est un *morphisme de groupes* si :

$$\forall (x, y) \in G,\ \phi(x \times y) = \phi(x) \times' \phi(y).$$

Le *noyau de* ϕ est :

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \phi^{-1}\left(\{e'\}\right) = \left\{x \in G,\ \phi(x) = e'\right\},$$

où e' est l'élément neutre de G' et l'*image de* ϕ est :

$$\phi(G) = \left\{x' \in G',\ \exists x \in G,\ x' = \phi(x)\right\}.$$

Remarque 3.15

On a immédiatement, si ϕ est un morphisme de $(G, \times)$ dans $(G', \times')$:

$$\phi(e) = e', \text{ et, } \forall x \in G,\ \phi\left(x^{-1}\right) = \phi(x)^{-1}.$$

Proposition 3.4

Soit $(G, \times)$ et $(G', \times')$ deux groupes et $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupes, alors :

1. $\mathrm{Ker}(\phi)$ *est un sous-groupe de G et*

$$\phi \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(\phi) = \{e\};$$

2. $\phi(G)$ est un sous-groupe de G' et
$$\phi \text{ surjective } \iff \phi(G) = G'.$$

Démonstration

A faire.

Définition 3.12

Lorsque ϕ est bijectif, on dit que ϕ est un *isomorphisme de groupes*, et on dit que les deux groupes sont *isomorphes*.

Exemple 3.8

La signature d'une permutation [a] est un morphisme de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,+1\}, \times)$. Son noyau s'appelle *le groupe alterné d'ordre n* et se note $\mathfrak{A}_n$, c'est donc :
$$\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \epsilon(\sigma) = +1\}.$$

Ceci nous permet de calculer facilement la signature d'une permutation, car :

- Si σ est un cycle de longueur p de $\mathfrak{S}_n$, alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$.
- Toute permutation se décompose en un produit de cycles (à supports disjoints), il est alors facile de trouver sa signature. Ainsi :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 9 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ donc } \sigma = (1 \quad 6 \quad 8) \circ (2 \quad 4) \circ (5 \quad 9) \text{ et } \epsilon(\sigma) = +1.$$

a. On rappelle que :
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Exemple 3.9

Le déterminant d'une matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de $(GL_n(\mathbb{K}), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$. Son noyau est appelé *groupe spécial linéaire* et se note :

$$SL_n(\mathbb{K}) \overset{\text{Def}}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{K}),\ \det(A) = 1\}.$$

Proposition 3.5

Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$.

Démonstration

Soit G un groupe, on peut alors définir, pour $g \in G$:

$$\varphi_g\ : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto g \times x. \end{cases}$$

Il est alors immédiat que :
- $\forall g \in G,\ \varphi_g \in \mathfrak{S}(G)$;
- L'application :

$$\phi\ : \begin{cases} G \to \mathfrak{S}(G) \\ g \mapsto \varphi_g \end{cases}$$

  est un morphisme de groupes de $(G, \times)$ dans $(\mathfrak{S}(G), \circ)$, injectif. Ainsi, $\phi(G)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$ isomorphe à G.

Proposition 3.6

Soit G un groupe commutatif*, ϕ un morphisme de $(G, \times)$ dans $(G', \times')$ et H un sous-groupe de G, tel que :*

$$\phi\Big|_H^{\phi(G)} \quad \textit{est un isomorphisme de groupes,}$$

alors

$$G \textit{ est isomorphe à } \operatorname{Ker}(\phi) \times H.$$

Démonstration

Montrons que l'application ψ définie par :

$$\psi \ : \begin{cases} \mathrm{Ker}(\phi) \times H \to G \\ (\omega, h) \mapsto \omega \times h \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

1. *C'est un morphisme de groupes*
   En effet, si $(\omega_1, \omega_2) \in \mathrm{Ker}(\phi)^2$ et $(h_1, h_2) \in H^2$, on a :
   $$\psi\big((\omega_1, h_1) \times'' (\omega_2, h_2)\big) = \omega_1 \times \omega_2 \times h_1 \times h_2 = \psi\big((\omega_1, h_1)\big) \times \psi\big((\omega_2, h_2)\big),$$
   car G est commutatif.
2. *ψ est injectif*
   Soit $(\omega, h) \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\omega = h^{-1} \in \mathrm{Ker}(\phi) \cap H = \{e\}$, d'après l'hypothèse sur ψ. Donc $\omega = h = e$.
3. *ψ est surjectif*
   Soit $x \in G$, alors $\phi(x) \in \phi(G)$, donc il existe un unique $h \in H$, tel que $\phi(x) = \phi(h)$, en ce cas
   $$x \times h^{-1} \in \mathrm{Ker}(\phi), \ \text{et} \ \underbrace{x \times h^{-1}}_{=\omega \in \mathrm{Ker}(\phi)} \times \underbrace{h}_{\in H} = x.$$

Exemple 3.10

Soit G le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ engendré par :

$$\left\{ \mathrm{rot}\left(\overrightarrow{OA}, \frac{\pi}{2}\right), -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

Il est égal, en notant r la rotation et e l'identité à :

$$\left\{ e, -e, r, r^2, r^3, -r, -r^2, -r^3 \right\}.$$

Soit ϕ le morphisme de G dans G défini par :

$$\forall k \in [\![0, 3]\!], \ \phi(\pm r^k) = r^k.$$

Alors $\mathrm{Ker}(\phi) = \{e, -e\}$ et $H = \left\{e, r, r^2, r^3\right\}$, alors :

$$G \text{ est isomorphe à } \mathrm{Ker}(\phi) \times H \text{ qui est isomorphe à } \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}.$$

Exemple 3.11

Prenons le groupe $\mathbb{D}_6$ des isométries de l'hexagone régulier, il a 12 éléments. Il *n'est pas commutatif*, on ne peut donc pas appliquer la proposition. Cependant, on peut trouver un isomorphisme entre $\mathbb{D}_6$ et $\mathbb{D}_3 \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ par (en décrivant $\mathbb{D}_6$ par sa présentation) :

$$\text{générateurs : } \{r, s\} \text{ et, relations : } \left\{r^6 = \mathrm{Id}, s^2 = \mathrm{Id}, s \circ r = r^5 \circ s\right\} \ :$$

$$r \mapsto (r^2, \overline{1}) \text{ et } s \mapsto (s, \overline{0}).$$

Il suffit alors, pour justifier que l'on obtient bien un isomorphisme de vérifier que les images des générateurs vérifient les mêmes relations. Or :

$$(r^2, \overline{1})^6 = (r^{12}, \underbrace{\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}+\overline{1}}_{=\overline{0}}) = (\mathrm{Id}, \overline{0}) \text{ éléments neutre de } \mathbb{D}_3 \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z},$$

et

$$(s, \overline{0})^2 = (s^2, \overline{0}) = (\mathrm{Id}, \overline{0}),$$

et enfin

$$(s, \overline{0}) \times (r^2, \overline{1}) = (s \circ r^2, \overline{1}) = (r^4 \circ s, \overline{1}) \text{ et } (r^2, \overline{1})^5 \times (s, \overline{0}) = (r^4 \circ s, \overline{1}).$$

Exercice(s) 3.3

3.3.1 Montrer que $\mathbb{D}_3$ et $\mathfrak{S}_3$ sont isomorphes.

3.3.2 Montrer que le seul morphisme de groupe différent du morphisme constant 1 de $\mathfrak{S}_n$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est la signature.

3.3.3 Trouver tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

3.3.4 Soit $\mathbb{D}_n$ le groupe diédral du polygone à n côtés, On suppose que n est pair, alors $(n = 2\,q)$.

(a) Montrer que si q est impair

$$\mathbb{D}_{2q} \text{ est isomorphe à } \mathbb{D}_q \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(b) Montrer que c'est faux si q est pair.

3.3.5 Soit $\mathbb{H}$ le groupe des quaternions $(\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $i \times j = -j \times i = k$, $j \times k = -k \times j = i$ et $k \times i = -i \times k = j)$. Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

3.2 Groupes finis

3.2.1 Ordre d'un élément

Définition 3.13

Soit G un groupe :

1. une famille $(a_i)_{i\in I}$ est une *famille de générateurs* si :

$$G = \mathrm{Gpe}\left(\{a_i,\ i\in I\}\right);$$

2. s'il existe $a\in G$ tel que $G=\mathrm{Gpe}(\{a\})$, on dit que le groupe est *monogène* ;
3. si G est monogène et fini, on dit que le groupe est *cyclique*.

Exemple 3.12

1. $\mathbb{Z}$ est un groupe monogène.
2. Si $n\in\mathbb{N}^*$, alors $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z},+)$ est un groupe cyclique.
3. Si $n\in\mathbb{N}^*$, alors :
$$\mathbb{U}_n=\{z\in\mathbb{C},\ z^n=1\}\ \text{(racines n-ième de l'unité)},$$
est un groupe cyclique, isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z},+)$.
4. Un sous-groupe d'un groupe cyclique est aussi cyclique.

Définition 3.14

Soit $(G,\times)$ un groupe fini et x un élément de G, on appelle *ordre de l'élément* x le cardinal du groupe $\mathrm{Gpe}(\{x\})$ engendré par x et on le note $o(x)$.

Propriété 3.4

Soit $(G,\times)$ un groupe fini et x un élément de G, l'ordre de l'élément x est le plus petit entier $p\geq 1$ tel que $x^p=e$.

Exemple 3.13

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en un produit de cycles à supports disjoints c_1, ..., c_p de longueurs respectives l_1, ..., l_p, alors :

$$o(\sigma) = \mathrm{PPCM}(l_1, \ldots, l_p).$$

Ainsi l'ordre de la permutation suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 2 & 9 & 10 & 1 & 4 & 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

vaut 12.

Théorème 3.1 – Lagrange

Soit $(G, \times)$ un groupe fini :

1. *si H est un sous-groupe de G alors*
$$\mathrm{Card}(H) \text{ divise } \mathrm{Card}(G);$$
2. *si x est un élément de G alors*
$$o(x) \text{ divise } \mathrm{Card}(G).$$

Démonstration

La relation d'équivalence définie par :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x\mathcal{R}_H y \iff x^{-1} \times y \in H,$$

définit une partition de G. Chaque élément de cette partition est de la forme $a \times H = \{a \times x,\ x \in H\}$ en bijection avec H, donc de même cardinal...

Propriété 3.5

Si $\mathrm{Card}(G) = p$, où p est premier, alors G est cyclique (et donc commutatif).

Propriété 3.6

1. Si ϕ est un morphisme injectif de $(G,\times)$ dans $(G',\times')$, alors :
$$\forall x \in G,\ o\left(\phi(x)\right) = o(x).$$
2. Si G est un groupe fini *commutatif*, alors :
$$\forall (x,y) \in G^2,\ \mathrm{PGCD}(o(x),o(y)) = 1 \ \Rightarrow\ o(x\times y) = o(x)\times o(y).$$
C'est clairement faux sans l'hypothèse sur le PGCD (prendre x et x^{-1}).
3. Si G est un groupe fini *commutatif*, alors :
$$\exists x_0 \in G,\ \forall x \in G,\ o(x) \text{ divise } o(x_0).$$

Démonstration

Soit x_0 d'ordre maximal, supposons donné un $x \in G$, tel que $o(x)$ ne divise pas $o(x_0)$, alors, il existe un nombre premier p, tel que $o(x) = p^\alpha \times n_1$, et $o(x_0) = p^\beta \times n_2$, où n_1 et n_2 sont premiers avec p et où $\beta < \alpha$. En ce cas :
$$o\left(x^{n_1}\right) = p^\alpha \text{ et } o\left(x_0^{p^\beta}\right) = n_2,$$
et d'après ce qui précède (comme $\mathrm{PGCD}(p,n_2) = 1$) :
$$o\left(x^{n_1} \times x_0^{p^\beta}\right) = p^\alpha \times n_2 > p^\beta \times n_2$$
ce qui contredit la maximalité de l'ordre de x_0.

Théorème 3.2 – Théorème chinois

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0,1\})^2,\ \mathrm{PGCD}(m,n) = 1 \iff \mathbb{Z}/m\times n\,\mathbb{Z} \textit{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}.$$

Démonstration

— ($\Rightarrow$) L'application :
$$x[m \times n] \mapsto (x[m], x[n]),$$
est bien définie et c'est un isomorphisme de groupes.

— ($\Leftarrow$) Soit ϕ un isomorphisme de $\mathbb{Z}/m \times n\,\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$, alors l'ordre de $\phi(\overline{1})$ est $m \times n$. Mais, l'ordre maximal d'un élément de $\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ est $\mathrm{PPCM}(m, n)$. On en déduit donc que $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$.

Exemple 3.14

1. On a donc, par exemple :
$$\mathbb{Z}/6\,\mathbb{Z} \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}.$$
2. En revanche,
$$\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \text{ ne sont pas isomorphes.}$$

Proposition 3.7

Soit G un groupe commutatif fini de cardinal $n = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i}$, les p_i étant des nombres premiers distincts. On a alors :

1. *G est isomorphe à un produit de groupes $G_1 \times \cdots \times G_q$, où $\operatorname{Card} G_k = p_k^{\alpha_k}$;*
2. *chaque G_k est isomorphe à un produit de la forme*
$$\mathbb{Z}/p_k^{n_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{n_{\beta_k}}\mathbb{Z},$$
où l'on a
$$\sum_{j=1}^{\beta_k} n_j = \alpha_k.$$

Démonstration de la première propriété

Prendre :
$$G_k = \left\{ x \in G, x^{p_k^{\alpha_k}} = e \right\},$$

et montrer que l'application :

$$\begin{cases}(G_1,\dots,G_q) \to G \\ (x_1,\dots,x_q) \mapsto x_1 \times \cdots \times x_q\end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes (pour la surjectivité, on peut utiliser une identité de Bézout généralisée).

Démonstration de la deuxième propriété

1. *Soit G un groupe commutatif fini, H un sous-groupe de G et φ un morphisme de groupes de $(H,\times)$ dans $(\mathbb{U},\times)$. On peut prolonger φ en $\widehat{\varphi}$ un morphisme de groupes de $(G,\times)$ dans $(\mathbb{U},\times)$.*

   Soit $x \in G \setminus H$, alors :

   $$\left\{k \in \mathbb{Z},\ x^k \in H\right\}$$

   est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ de la forme $m.\mathbb{Z}$, où $m \geq 2$. Soit $\gamma \in \mathbb{U}$, tel que $\gamma^m = \varphi(x^m)$. On pose :

   $$\psi\ :\begin{cases}K = \left\{x^k \times H,\ k \in \mathbb{Z},\ h \in H\right\} \to \mathbb{U} \\ x^k \times h \mapsto \gamma^k \times \varphi(h).\end{cases}$$

   ψ est un morphisme de K dans $\mathbb{U}$ qui prolonge φ. De proche en proche, comme G est fini, on peut prolonger φ à tout G.

2. *Soit G un groupe commutatif fini et x_0 un élément d'ordre maximal de G, alors il existe un sous-groupe H de G tel que*

   $$G \text{ est isomorphe à } H \times \mathrm{Gpe}(\{x_0\}).$$

   Soit $n = o(x_0)$, alors φ défini par $\varphi(x_0) = e^{2\,i \times \pi/n}$ est un morphisme de $\mathrm{Gpe}(\{x_0\})$ dans $\mathbb{U}$, que l'on peut prolonger en $\hat{\varphi}\,:\,G \to \mathbb{U}$. Par la propriété 3.6, page 250, on a en fait $\hat{\varphi}\,:\,G \to \mathbb{U}_n$ et $\hat{\varphi}\Big|_{\mathrm{Gpe}(\{x_0\})}^{\mathbb{U}_n}$ est un isomorphisme de groupes. On conclut en utilisant la proposition 3.6, page 245.

3. La démonstration se conclue par récurrence sur le cardinal de G.

Exemple 3.15

Prenons, par exemple, un groupe commutatif de cardinal 18. On cherche l'élément d'ordre maximal x_0.

— Si $o(x_0) = 18$, le groupe est cyclique, il est donc isomorphe à :

$$\mathbb{Z}/18\,\mathbb{Z} \text{ isomorphe à } \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\,\mathbb{Z}.$$

— Si $o(x_0) = 6$, le groupe n'est plus cyclique, d'après ce qui précède, il est isomorphe à :

$$\mathbb{Z}/6\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} \text{ isomorphe à } \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}.$$

Exercice(s) 3.4

3.4.1 Montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

3.4.2 Soit p un nombre premier impair, montrer que tout groupe d'ordre $2\,p$ est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/2\,p\mathbb{Z}$, soit au groupe diédral $\mathbb{D}_p$ du polygone à p côtés.

3.4.3 Montrer que tout groupe d'ordre $2\,q$, q impair, admet un sous-groupe d'indice 2. Donner un contre-exemple lorsque q est pair.

3.4.4 Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_n$?

3.4.5 Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre fini n. Quel est l'ordre de x^2 ?

3.4.6 Soit G un groupe commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini est un sous-groupe de G.

3.4.7 (a) Montrer qu'un groupe G où tous les éléments $x \in G$, vérifient $x^2 = e$ est commutatif.

(b) Donner un exemple d'un groupe fini vérifiant cette propriété.

(c) Donner un exemple d'un groupe infini vérifiant cette propriété.

(d) Montrer que si G est fini, alors :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Card}(G) = 2^n.$$

3.4.8 Soit G un groupe et A l'ensemble des éléments de G d'ordre fini impair. Montrer que A est non vide et que $x \mapsto x^2$ est une bijection de A.

3.4.9 Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$.

3.4.10 Un groupe diédral $\mathbb{D}_p$ est-il isomorphe à un groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$?

3.4.11 Déterminer le nombre d'éléments d'ordre 12 dans $\mathfrak{S}_7$?

3.2.2 Petits groupes

Nous admettrons pour le moment que si p est un nombre premier divisant le cardinal du groupe fini G, alors il existe un élément de G d'ordre p.

Propriété 3.7

Voici les petits groupes que l'on peut trouver ($n = \mathrm{Card}(G)$), à isomorphisme près :

1. $n = 1$:
$$\{e\}.$$
2. $n = 2$:
$$\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}.$$
3. $n = 3$:
$$\mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}.$$
4. $n = 4$:
$$\mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}.$$
5. $n = 5$:
$$\mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}.$$
6. $n = 6$:
$$\mathbb{Z}/6\,\mathbb{Z} \text{ et } \mathfrak{S}_3.$$
$\mathfrak{S}_3$ est donc le plus petit groupe non commutatif (à isomorphisme près).
7. $n = 7$:
$$\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z}.$$
8. $n = 8$:

   Groupes commutatifs
$$\mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \text{ et } \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}.$$
   Groupes non commutatifs

   $\mathbb{D}_4$ et $\mathbb{H}$ (voir l'exercice 5, page 247).

Exercice(s) 3.5

3.5.1 Trouver tous les groupes de cardinal 10 (il y en a 2, à isomorphisme près).

3.5.2 Trouver tous les groupes de cardinal 12 (il y en a 5, à isomorphisme près).

3.5.3 Trouver tous les groupes de cardinal 15 (il y en a un seul, à isomorphisme près !).

3.3 Compléments

3.3.1 Groupes quotients

Propriété 3.8

Si $(G, \times)$ est un groupe et que l'on connaît une bijection ϕ de G sur E (un ensemble), alors en peut définir une opération interne sur E telle que ϕ soit un isomorphisme de groupes (cela s'appelle *un transfert de structure de groupe*), par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \times' y \overset{\text{Def}}{=} \phi\left(\phi^{-1}(x) \times \phi^{-1}(y)\right).$$

Propriété 3.9

Si H est un sous-groupe de G, on peut définir une relation d'équivalence sur G, par :

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x\, \mathcal{R}_{_H}\, y \overset{\text{Def}}{\iff} x^{-1} \times y \in H.$$

L'ensemble des classes d'équivalence de G modulo $\mathcal{R}_{_H}$ est noté G/H. La classe d'un élément $x \in G$ est notée $cl(x, H)$.
Si ϕ est un morphisme de groupes de G dans G', alors :

$$G/\operatorname{Ker}(\phi) \text{ et } \phi(G) \text{ sont en bijection naturelle (notée } \widetilde{\phi}).$$

Où :

$$\forall X \in G/\operatorname{Ker}(\phi),\ \widetilde{\phi}(X) = \phi(x),\ \text{ où } x \in X.$$

On peut donc en ce cas définir (par transfert de structure) une opération interne sur $G/\operatorname{Ker}(\phi)$ le munissant d'une structure de groupe et, en ce cas, l'application :

$$s_{_\phi} \ : \begin{cases} G \to G/\operatorname{Ker}(\phi) \\ x \mapsto x.H = \{x \times y,\ y \in H\} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes. On a même la factorisation donnée à la figure 3.2, page 265.

Exemple 3.16

1. Si $G = \mathfrak{S}_n$ et ϕ est la signature, alors :

$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \text{ est isomorphe à } \{-1, +1\}.$$

2. Si $G = GL_n(\mathbb{K})$ et ϕ est le déterminant, alors :

$$GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \text{ est isomorphe à } \mathbb{K}^*.$$

3. Si $G = \mathbb{Z}$ et $\phi : x \mapsto x[n]$ (où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) est un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $[\![0, n-1]\!]$ (muni de l'opération interne déjà vue), son noyau est $n\mathbb{Z}$ et son image est $[\![0, n-1]\!]$ qui est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ce qui justifie *a posteriori* la notation).
4. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2 ($p \in \mathcal{L}(E)$). Alors p peut être vu comme un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(E, +)$. Son image est E_1, son noyau est E_2. Donc :

$$E/E_2 \text{ est un groupe isomorphe à } E_1.$$

5. De même, la factorisation générale d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, E')$ donne un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre un supplémentaire E_1 du noyau et l'image $\operatorname{Im}(f)$ de f. La factorisation en tant que morphisme de groupes nous donne alors que :

$$E/\operatorname{Ker}(f) \text{ est isomorphe en tant que groupe à } \operatorname{Im}(f).$$

6. G/H ne peut avoir une structure par transport que si H est le noyau d'un morphisme de groupes.

3.3.2 Action de groupes

Définition 3.15

Soit $(G, \times)$ un groupe, X un ensemble, on dit que G *agit sur* X ou *opère sur* X, si on a une application (dite *action de* G *sur* X) :

$$\begin{cases} G \times X \to X \\ (g, x) \mapsto g.x \end{cases} \quad \text{telle que :}$$

1. $\forall x \in X,\ e.x = x$;
2. $\forall x \in X,\ \forall (g_1, g_2) \in G^2,\ g_1.(g_2.x) = (g_1 \times g_2).x$.

Exemple 3.17

Beaucoup de problèmes rencontrés en algèbre linéaire sont des problèmes liés aux actions de groupe :

1. l'équivalence : action de $GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par :
$$((P, Q), M) \mapsto P \centerdot M \centerdot Q^{-1} \ ;$$
2. la similitude : action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :
$$(P, M) \mapsto P \centerdot M \centerdot P^{-1} \ ;$$
3. la congruence : action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$(P, M) \mapsto P \centerdot M \centerdot {}^tP.$$

Exemple 3.18

On a aussi souvent des actions d'un groupe G sur lui-même :

1. la conjugaison : action de G sur G définie par :
$$(g, x) \mapsto g \times x \times g^{-1} \ ;$$
2. la translation : action de G sur G définie par :
$$(g, x) \mapsto g \times x.$$

Exemple 3.19

En géométrie, lorsque l'on considère le sous-groupe des transformations affines qui laisse invariant un polyèdre, il agit automatiquement sur les sommets de ce polyèdre (que l'on a considéré comme des permutations des sommets).

Définition 3.16

Soit une action d'un groupe G sur un ensemble X, on appelle :

1. *orbite de* $x \in X$, l'ensemble :
$$\mathcal{O}(x) = \{g.x,\ g \in G\}\ ;$$
2. *stabilisateur de* $x \in X$, le sous-groupe de G défini par :
$$G_x = \{g \in G,\ g.x = x\}\ ;$$
3. *fixateur de* $g \in G$, l'ensemble :
$$F_g = \{x \in X,\ g.x = x\}\,.$$

Remarque 3.16

En particulier, lorsque G est un groupe fini, le stabilisateur de tout élément de X a un cardinal qui divise celui de G.

Propriété 3.10

1. Soit une action de G sur un ensemble X, alors, pour tout $(x, y) \in X^2$:
$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y) \text{ ou bien } \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) = \emptyset.$$
2. Soit une action de G sur X *fini*, alors :
$$\boxed{\mathrm{Card}(X) = \sum_{O \text{ orbite}} \mathrm{Card}(O)}\,.$$

3. Soit une action de G sur X *fini*, alors :

$$\boxed{\forall x \in X,\ \mathrm{Card}\left(\mathcal{O}(x)\right) = \frac{\mathrm{Card}\left(G\right)}{\mathrm{Card}(G_x)} \overset{\mathrm{Def}}{=} (G : G_x)}$$ (*indice de* G_x *dans* G).

4. On peut appliquer la formule précédente au cas particulier de la conjugaison d'un groupe fini, il vient la *formule des classes* :

$$\boxed{\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{Z}(G)\right) + \sum_{x \in \widetilde{X}} \left(G : G_x\right),}$$

   où $\mathcal{Z}(G)$ désigne le *centre du groupe* G (pour les éléments duquel, les orbites par conjugaison sont réduits à un élément), et où $\widetilde{X}$ désigne un sous-ensemble de G de représentants des orbites non réduites à un élément.

5. Si $p \in \mathcal{P}$ (nombre premier), G un groupe de cardinal p^α ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) (on dit que G est un p-groupe), alors son centre n'est pas réduit à $\{e\}$. En particulier, un groupe de cardinal p^2 où p est premier est toujours commutatif.
6. Si G est un groupe fini de cardinal $p^\alpha \times n$, où $\mathrm{PGCD}(n, p) = 1$, $p \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors G possède au moins un sous-groupe de cardinal p^α. (On parle de sous-groupe de Sylow).
7. Soit une action de G *fini* sur X fini, alors le nombre d'orbites de X par l'action de G est (*formule de Burnside*) :

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \times \sum_{g \in G} \mathrm{Card}\left(F_g\right).}$$

Démonstration de l'existence d'un sous-groupe de Sylow

Si on fait agir G sur

$$X = \left\{A \subset G,\ \mathrm{Card}(A) = p^\alpha\right\},$$

par l'application :

$$(g, \{x_1, \ldots, x_{p^\alpha}\}) \mapsto \{g \times x_1, \ldots, g \times x_{p^\alpha}\},$$

comme le cardinal de X n'est pas divisible par p, on trouve un élément A_0 tel que $\left(G : G_{A_0}\right)$ n'est pas divisible par p, on vérifie alors que $A_0 = G_{A_0}$ est un sous-groupe de G qui convient...

Exemple 3.20

Si G est un groupe fini et si p est un nombre premier qui divise le cardinal de G, alors, il existe au moins un élément g de G qui vérifie : $o(g) = p$.

Démonstration

Il suffit de considérer l'action du groupe S sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ engendré par la permutation circulaire sur

$$X = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p,\ x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_p = e\},$$

et de compter...

Exemple 3.21

Dénombrement : combien peut-on faire de cubes à 6 faces différents, en les coloriant avec les couleurs : bleu, blanc et rouge ? 57.

Démonstration

1. On a 6 faces et 3 couleurs possibles par faces, cela fait un ensemble X de coloriages possibles de 3^6 éléments.
2. Mais, on compte plusieurs fois les mêmes coloriages, car on peut tourner le cube. « Tourner le cube » donne une action du groupe G_6^+ (rotations du cube) qui a 24 éléments.
3. Le nombre de coloriages est donc le nombre d'orbite par cette action : il faut utiliser la formule de Burnside.
   — Pour $g = \mathrm{Id}$, on a $\mathrm{Card}(F_g) = 3^6$.
   — Pour g une rotation d'axe passant par les milieux de deux faces opposées et d'angle $\pi/2$, on a $\mathrm{Card}(F_g) = 3^3$ et il y a 6 rotations de cette sorte.
   — Pour g une rotation d'axe passant par les milieux de deux faces opposées et d'angle π, on a $\mathrm{Card}(F_g) = 3^4$ et il y a 3 rotations de cette sorte.
   — Pour g une rotation d'axe passant par deux sommets diamétralement opposés et d'angle $2\pi/3$, on a $\mathrm{Card}(F_g) = 3^2$ et il y a 8 rotations de telle sorte.
   — Pour g une rotation d'axe passant par les milieux de deux côtés opposés et d'angle π, on a $\mathrm{Card}(F_g) = 3^3$ et il y a 6 rotations de telle sorte.

   On obtient le nombre N de cubes possibles :

$$\boxed{N = \frac{1}{24} \times \left(3^6 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3\right) = 57.}$$

Exercice(s) 3.6

3.6.1 Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

(a) On suppose ici que :

$$\text{Card}(G) = 15 \text{ et } \text{Card}(X) = 17.$$

Combien y a-t-il d'orbites pour cette action ? Combien y a-t-il d'éléments dans chaque orbite ?

(b) On suppose maintenant que :

$$\text{Card}(G) = 33 \text{ et } \text{Card}(X) = 19.$$

Montrer qu'il y a au moins une orbite ne contenant qu'un élément.

3.6.2 Soit ϕ un morphisme de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans un groupe $(G', \times')$. On pose $H = \text{Ker}(\phi)$. Montrer que :

$$(1 \quad 2) \in H \ \Rightarrow \ \left[\forall x \in \mathfrak{S}_n,\ \phi(x) = e'\right],$$

où e' est l'élément neutre de G'.

3.6.3 Soit $G = O(\mathbb{R}^n)$ et $X = \mathbb{R}^n$. On considère l'action de G sur X par :

$$\forall g \in G,\ \forall x \in X,\ g.x = g(x).$$

Quelles sont les orbites de $\underline{0}$?

3.6.4 Soit G un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{F}_p), \times)$ où p est un nombre premier et où $\mathbb{F}_p$ désigne *le* corps à p éléments (c'est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ muni de l'addition usuelle et de la multiplication $x \times y \overset{\text{Def}}{=} x \times y[p]$).

(a) Calculer le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

(b) En déduire que l'ensemble S des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale et un sous-groupe de Sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

(c) On considère Δ l'ensemble des classes d'équivalence de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ par la relation d'équivalence :

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A^{-1} \times B \in S.$$

Montrer que l'application :

$$G \times GL_n(\mathbb{F}_p) \to GL_n(\mathbb{F}_p),\ (g, M) \mapsto g \times M,$$

induit une action de G sur Δ.

(d) Montrer qu'il existe un élément δ de Δ dont le stabilisateur G_δ vérifie $\text{PGCD}((G : G_\delta), p) = 1$.

(e) En déduire que G_δ est un Sylow de G.

(f) Qu'a-t-on montré ?

Figure 3.3 – Mouvement brownien

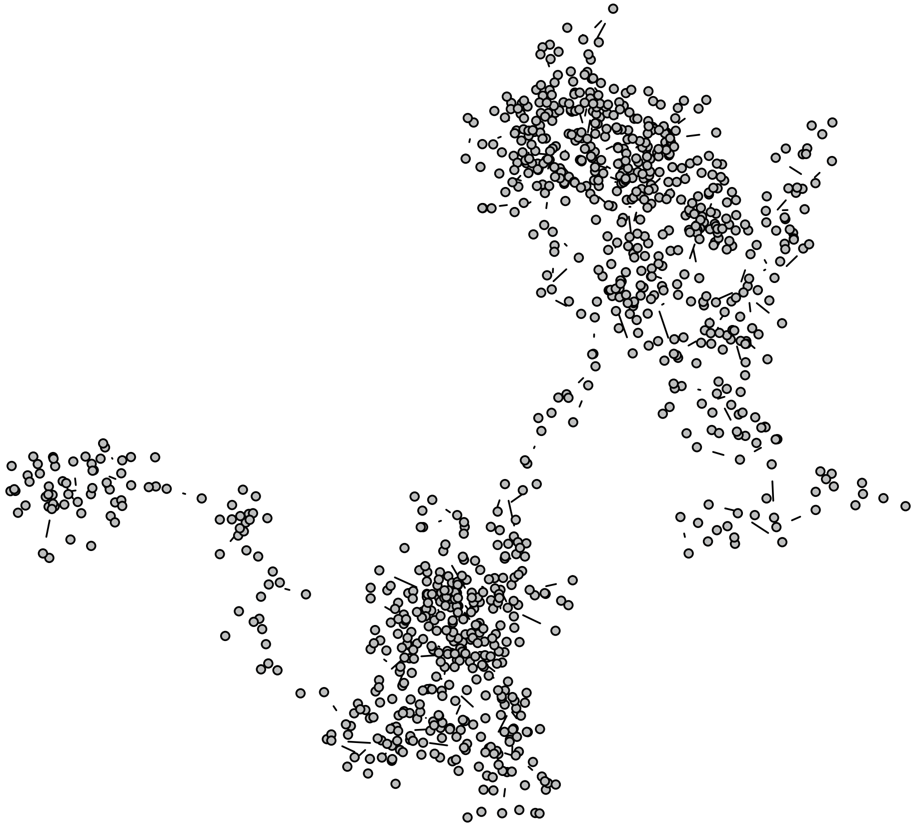


Figure 3.1 – Arbre générateur d'un groupe

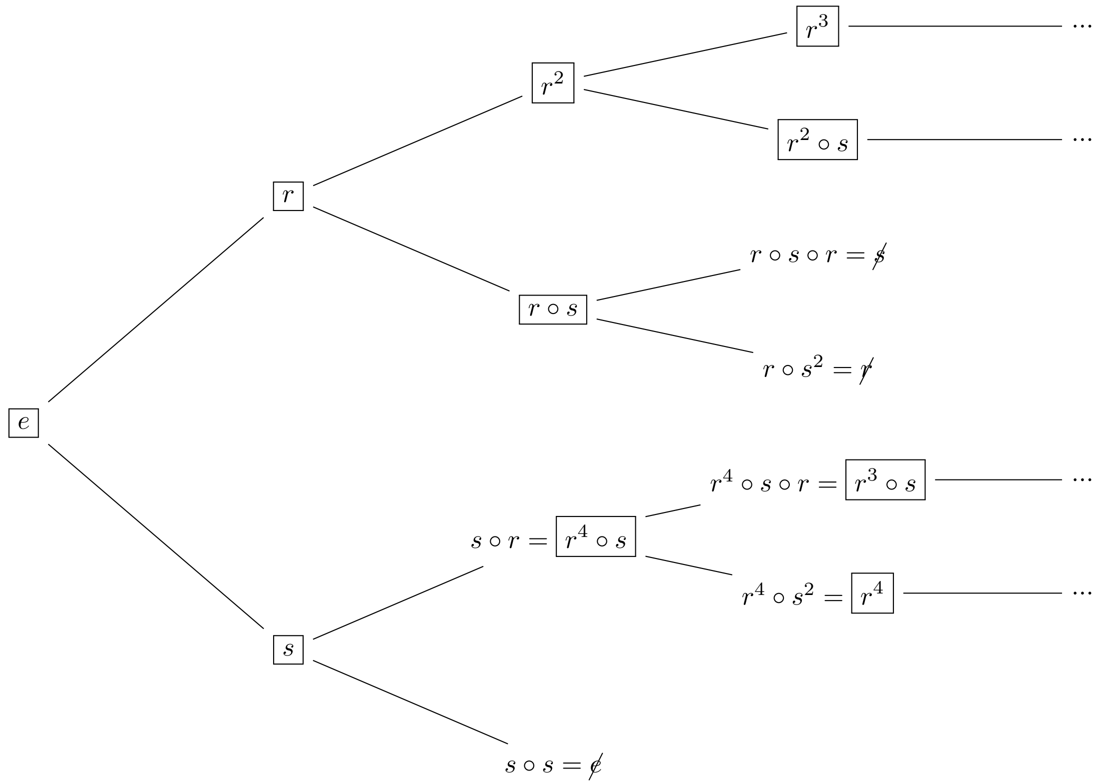


Figure 3.2 – Groupe quotient

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "s_\phi"] & G' \\
G/\mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] & \phi(G) \arrow[u, "i_{\phi(G)\subset G'}"]
\end{tikzcd}$$