Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Finančna matematika - 2. stopnja

Slučajne matrične igre

Enja Erker

Mentorja: prof. dr. Sergio Cabello Justo,
asist. dr. Gašper Domen Rolih, mag. mat.

3. 5. 2022

Uvod

Slučajna matrična igra:

- matrična igra z nivojem slučajnosti (izplačila so slučajne spremenljivke,
- dva igralca (n in m izbir),
- istočasna določitev potez,
- matrika izplačil $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Predpostavke:

- jasna nezdružljiva cilja,
- pravila v konfliktnih situacijah,
- racionalno odločanje,
- obstaja merilo koristnosti za vsako potezo.

Osnove iz teorije iger

Za osnovno razumevanje slučajnih matričnih iger je dobro poznati nekaj osnovnih pojmov iz teorije iger:

- strategija posameznega igralca je verjetnostna porazdelitev na množici vseh njegovih potez,
- pričakovana vrednost izplačila prvega igralca pri veliko ponovitvah igre, če ta uporablja strategijo x in drugi y, je

$$E(x, y) = x^T Ay,$$

- vrednost matrične igre je maksimalni dobitek prvega igralca, če drugi igra racionalno, torej

$$v = max_x min_y E(x, y) = min_y max_x E(x, y).$$

Izračuna vrednosti pov. igre in pov. vrednosti igre

Naj bosta $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\text{x}2}$ in $A \in \mathbb{R}^{n\text{x}n}$, kjer so elementi slednje slučajne spremenljivke:

- če B ima sedlo, je vrednost igre $v(B) = \text{sedlo}$,
- če B nima sedla, je vrednost igre $v(B) = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$,
- vrednost povprečne igre je $v(E(A)) = v(A_e)$,
- povprečna vrednost igre je$E(v(A)) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} v(A^k)$.

Programsko okolje in implementacija

Algoritem 1 Generator

Vhod: porazdelitev, parameter$_1$, parameter$_2$
Izhod: matrika izplačil dimenzije 2x2

function GENERATOR(*porazdelitev, parameter$_1$, parameter$_2$*)
    if (porazdelitev == "U")
        a <– parameter$_1$, b <– parameter$_2$
        M <- matrix(c(runif(1,a,b),runif(1,a,b),runif(1,a,b),runif(1,a,b)))
    if (porazdelitev == "Student")
        df <– parameter$_1$
        M <- matrix(c(rt(1,df), rt(1,df), rt(1,df), rt(1,df)))
    if (porazdelitev == "N")
        mi <– parameter$_1$, sigma <– parameter$_2$
        M <- matrix(c(rnorm(1,mi,sigma), rnorm(1,mi,sigma),
            rnorm(1,mi,sigma), rnorm(1,mi,sigma)))
    if (porazdelitev == "Gama")
        a <– parameter$_1$, b <– parameter$_2$
        M <- matrix(c(rgamma(1,a,b), rgamma(1,a,b), rgamma(1,a,b),
            rgamma(1,a,b)))
    if (porazdelitev == "Geo")
        p <– parameter$_1$
        M <- matrix(c(rgeom(1,p), rgeom(1,p), rgeom(1,p), rgeom(1,p)))
    return(M)
end function

Programsko okolje in implementacija

Algoritem 2 Vrednost

Vhod: matrika M dimenzije 2x2
Izhod: vrednost matrične igre

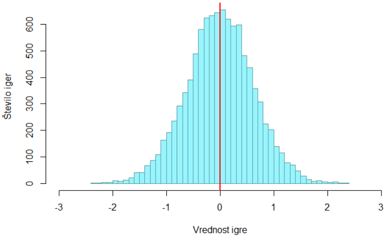
```
function VREDNOST(M)
    if (max( min(M[1,1], M[1,2]), min(M[2,1], M[2,2]) ) ==
        min( max(M[1,1], M[2,1]), max(M[1,2], M[2,2]) ) )
        return(min(max(B[1,1],B[2,1]),max(B[1,2],B[2,2])))
    else
        return((M[1,1]*M[2,2]-M[1,2]*M[2,1])/(M[1,1]-M[1,2]-M[2,1]+M[2,2]))
end function
```

Algoritem 3 Povprecna_vrednost

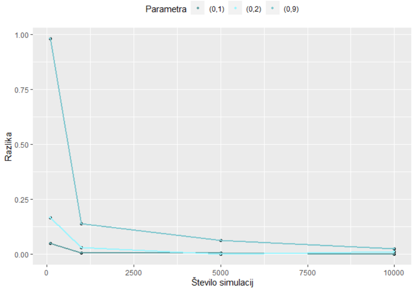
Vhod: število simulacij, porazdelitev, $parameter_1$, $parameter_2$
Izhod: povprečna vrednost matrične igre

```
function POVPRECNA_VREDNOST(s, porazdelitev, parameter1, parameter2)
    vsota <- 0
    for (i in c(1:s)){M <- Generator(porazdelitev,parameter1,parameter2)
                      vsota <- vsota + Vrednost(M)}
return((1/s)*vsota)
end function
```

Zvezne porazdelitve: normalna porazdelitev

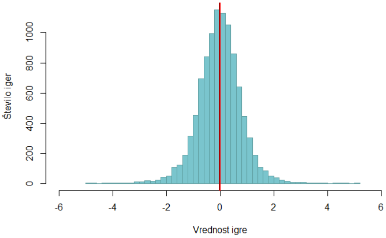


Graf 1: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - N(0,1)

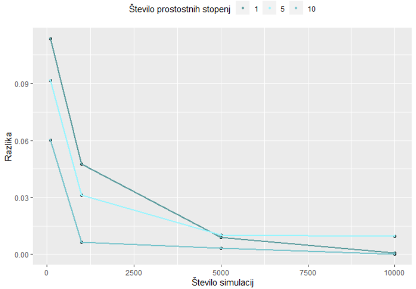


Graf 2: Normalna porazdelitev - spreminjanje standardnega odklona

Zvezne porazdelitve: Studentova porazdelitev

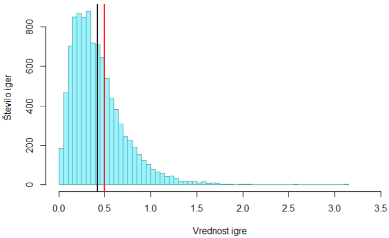


Graf 3: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Student(3)

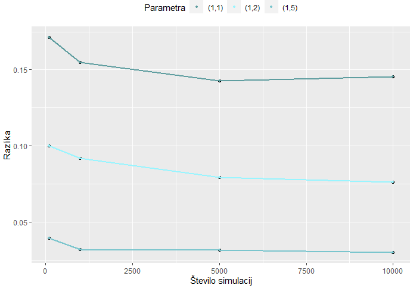


Graf 4: Studentova porazdelitev - spreminjanje števila prostostnih stopenj

Zvezne porazdelitve: gama porazdelitev

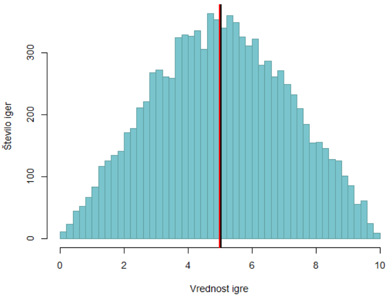


Graf 5: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Gama(1,2)

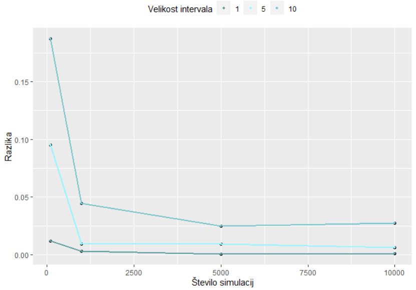


Graf 6: Gama porazdelitev - spreminjanje parametra oblike

Zvezne porazdelitve: enakomerno zv. porazdelitev

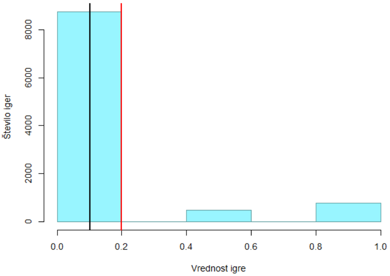


Graf 7: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - U(0,10)

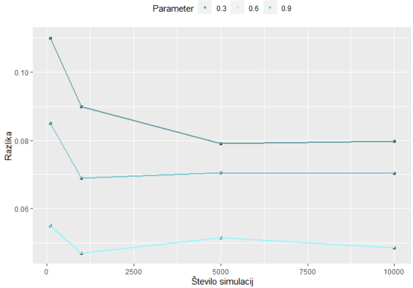


Graf 8: Enakomerno zvezna porazdelitev - spreminjanje velikosti intervala

Diskretne porazdelitve: Bernoullijeva porazdelitev

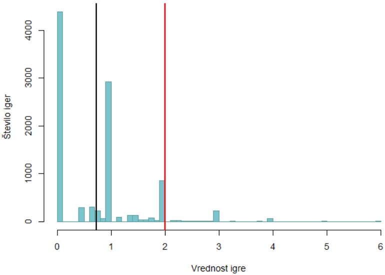


Graf 9: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Ber(0.2)

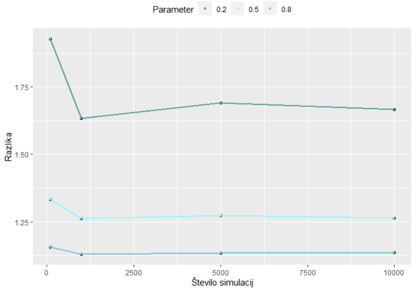


Graf 10: Bernoullijeva porazdelitev - spreminjanje parametra

Diskretne porazdelitve: geometrijska porazdelitev



Graf 11: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Geo(0.5)



Graf 12: Geometrijska porazdelitev - spreminjanje parametra

Zaključek

Rezultati vseh analiziranih porazdelitev na primeru 2x2 matričnih slučajnih iger so si med seboj zelo podobni:

- empirične povprečne vrednosti iger v konvergenci manjše ali enake vrednostim povprečne igre,
- enakost v primeru simetričnih porazdelitev,
- vpliv spreminjanja parametrov na proučevano razliko specifičen glede na porazdelitev,
- ustalitev razlike po 5000 simulacijah,
- možne razširitve naloge.

Literatura

- T. Bertok, *Slučajne matrične igre*, delo diplomskega seminarja (2020) 4–24.
- O. A. Camarena, *Matrix games*. (2021). Pridobljeno 22. 4. 2022 z naslova: https://www.matem.unam.mx/ omar/math340/matrix-games.html.
- J., Berg & A., Engel, *Matrix games, mixed strategies, and statistical mechanics*, Institute for theoretical physics (1998) 1–4.
- L. Ein-Dor & I., Kanter, *Matrix games with nonuniform payoff distributions*, Physica A (2001) 80-88.