UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Enja Erker

Slučajne matrične igre

Poročilo o projektu pri predmetu Matematika z računalnikom

Mentorja: prof. dr. Sergio Cabello Justo,
asist. Gašper Domen Romih, mag. mat.

Ljubljana, 4. 3. 2021

Kazalo

Slučajne matrične igre

Povzetek

Ključne besede: slučajne matrične igre, vrednost igre, teorija iger, Nashevo ravnovesje

1. Uvod

Slučajne matrične igre so matrične igre z dodanim nivojem slučajnosti. Matrična igra je igra med dvema igralcema, kjer ima prvi igralec n izbir, drugi igralec pa m izbir. Igralca istočasno določita svoji potezi, izid pa določi matrika izplačil A (realna matrika velikosti nxm). Predpostavimo, da prvi igralec izbere potezo oz. vrstico i in drugi igralec potezo oz. stolpec j. Če je element a_{ij} pozitivna vrednost, potem mora drugi igralec plačati prvemu a_{ij} denarnih enot. Če pa je vrednost a_{ij} negativna, potem prvi igralec drugemu plača $|a_{ij}|$ denarnih enot. Vrednost matrične igre je definirana kot maksimalni dobitek prvega igralca, če drugi igra racionalno. Dodatek slučajnosti matričnih iger pomeni, da tokrat izplačila torej niso dejanske vrednosti, ampak slučajne spremenljivke [1]. Predpostavke slučajnih matričnih iger so sledeče [1]:

- vsak igralec ima jasen cilj, cilja nasprotnih igralcev pa sta nezdružljiva (cilj doseže eden od igralcev ali pa nihče),
- v konfliktni situaciji igralca spoštujeta določena pravila (npr. moralne norme),
- igralca se odločata racionalno (izbirata možnosti z največjo koristnostjo, upoštevata zunanje okoliščine),
- obstaja merilo koristnosti za vsako potezo za vsakega igralca.

V projektni nalogi, predstavljeni v nadaljevanju, sem analizirala različne porazdelitve vrednosti matričnih iger glede na porazdelitev slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo elemente matrike izplačil. Osredotočila sem se na primerjavo vrednosti povprečne matrične igre (tu so elementi matrike izplačil pričakovane vrednosti slučajnih spremenljivk) z povprečno vrednostjo matrične igre. Slednjo ocenimo z generiranjem večih matrik, katerih elementi so dejanske vrednosti določene slučajne spremenljivke. Za vsako matriko nato izračunamo vrednost igre, nato pa izračunamo povprečje dobljenih vrednosti vseh generiranih matrik. Zaradi časovne omejitve izdelave projektne naloge sem se omejila zgolj na matrike dimenzij 2x2 in 3x3, vendar pa bi lahko podobne eksperimente izvajala na matrikah poljubnih dimenzij.

Poročilo o projektu je v nadaljevanju strukturirano v šestih poglavjih. Prvo poglavje predstavlja uvod. Drugo poglavje je namenjeno teoretičnemu ozadju, gre za kratek pregled osnovnih pojmov iz teorije iger in predstavitvijo izračuna vrednosti povprečne igre in povprečne vrednosti igre. Izbrano programsko okolje in implementacija sta opisana v tretjem poglavju. Sledi predstavitev rezultatov z diskusijo. Zadnje poglavje pa predstavlja zaključek.

2. Teoretična izhodišča

2.1. **Osnove iz teorije iger.**

Za osnovno razumevanje slučajnih matričnih iger je dobro poznati nekaj osnovnih pojmov iz teorije iger, ki so predstavljeni v nadaljevanju. Največji vrstični minimum (M_1) in največji stolpični maksimum (M_2) definiramo kot

$$M_1 = max_i min_j a_{ij} \quad \text{in} \quad M_2 = min_j max_i a_{ij}.$$

Prvi igralec lahko torej vedno dobi vsaj M_1, drugi igralec pa lahko vedno izgubi največ M_2. Velja torej $M_1 \leq M_2$. Sedlo matrike je element, ki je najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu. Natanko tedaj ko ima matrika sedlo, velja $M_1 = M_2$. V splošnem matrika izplačil navadno nima sedla [1].

Strategija posameznega igralca je verjetnostna porazdelitev na množici vseh igralčevih izbir oz. možnih potez. Pričakovana vrednost izplačila prvega igralca pri velikem številu ponovitev neke igre, če ta uporablja strategijo x in drugi igralec strategijo y, je definirana kot

$$E(x,y) = x^T Ay.$$

Vrednost matrične igre je definirana kot maksimalni dobitek prvega igralca, če drugi igra racionalno oziroma kot

$$v = max_x min_y E(x,y) = min_y max_x E(x,y)$$

(izrek o minimaksu ali osnovni izrek teorije iger). Če je vrednost igre enaka nič, potem je ta igra poštena. Če ima matrika sedlo, je to kar enako njeni vrednosti. Matrična igra je igra z ničelno vsoto, kar pomeni, da je za vsak profil vsota koristnosti obeh igralcev enaka nič [1].

Strategija x^* je optimalna strategija za prvega igralca natanko tedaj, kadar je

$$E(x^*, y_j) \geq v$$

za vse j od 1 do n, y_j označuje strategijo, kjer drugi igralec izbere stolpec j. Podobno je strategija y^* optimalna strategija za drugega igralca natanko tedaj, ko je

$$E(x_i, y^*) \leq v$$

za vse i od 1 do m, x_i pa predstavja strategijo, kjer prvi igralec izbere vrstico i. Paru (x^*, y^*) pravimo rešitev matrične igre. Rešitev matrične igre nam pove kakšno strategijo naj ubereta igralca, da bosta dosegla maksimalno koristnost. Igralec uporablja čisto strategijo, če vedno izbira isto potezo. Če pa igralec spreminja svoje poteze, potem uporablja mešano strategijo. Matrična igra dveh igralcev je simetrična, če je sta vlogi igralcev enaki. Takrat je torej matrika izplačil A poševno simetrična in velja

$$A = -A^T.$$

Vrednost simetrične matrične igre za dva igralca z ničelno vsoto je enaka nič, oba igralca pa imata enaki optimalni strategiji [1].

Točka ravnovesja v teoriji iger predstavlja najboljši izid za vse igralce v danem trenutku, to točko imenujemo Nashevo ravnovesje. Igralca se nahajata v Nashevem ravnovesju, če vsak izmed njiju s spremembo svoje strategije, ob upoštevanju fiksne strategije nasprotnika, v danem trenutku ne more izboljšati svojega položaja. Profil (x^*, y^*) je mešano Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja

$$min_y (x^*)^T Ay = max_x min_y x^T Ay \quad \text{in} \quad max_x x^T Ay^* = min_y max_x x^T Ay.$$

Max-min strategija prvega igralca je tako x^*, min-max strategija drugega igralca pa je y^* [1].

2.2. **Izračuna vrednosti povprečne igre in povprečne vrednosti igre.** Naj bo matrika B matrika velikosti 2x2, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, kjer a, b, c in d predstavljajo njene elemente. Če ima matrika B sedlo, kar se zgodi zelo redko, potem je vrednost matrike enaka sedlu. Če matrika B nima sedla, pa njeno vrednost najpreprosteje izračunamo kot $v(B) = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}$ [1].

Predpostavimo matriko A dimenzije nxn oblike

$$A = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & ... & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & ... & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & ... & X_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vrednost povprečne igre $v(E(A))$ izračunamo kot vrednost matrične igre

$$A_e = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & ... & E(X_{1n}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & ... & E(X_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & ... & E(X_{nn}) \end{bmatrix}.$$

Velja torej $v(E(A)) = v(A_e)$ [1]. Izračun povprečne vrednosti igre $E(v(A))$ pa je osnovan na vzorčenju slučajnih vrednosti iz neke dane porazdelitve, iz katerih skonstruiramo matriko A^k, ki ima za elemente tokrat dejanske vrednosti in ne več slučajne spremenljivke

$$A^k = \begin{bmatrix} x_{11}^k & x_{12}^k & ... & x_{1n}^k \\ x_{21}^k & x_{22}^k & ... & x_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^k & x_{n2}^k & ... & x_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

Slučajno matriko generiramo večkrat, k označuje zaporedno število simulacije, s pa število vseh izvedenih simulacij. V projektni nalogi sem izvedla od 100 do 10 000 000 simulacij. Vrednosti vseh iger seštejemo in delimo s številom generiranih matrik, da dobimo povprečno vrednost igre [1]

$$E(v(A)) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} v(A^k).$$

3. Programsko okolje in implementacija

Za implementacijo predstavljenega problema sem uporabila program R. Ta program sem izbrala, ker je od meni znanih programov oz. programskih jezikov najbolj primeren za izvedbo naloge. Vsi algoritmi v nadaljevanju so predstavljeni s psevdokodo. Začetek praktičnega dela projektne naloge je predstavljala konstrukcija algoritma Generator (Algoritem 1), ki za vhodne podatke sprejme eno izmed izbranih porazdelitev; to so enakomerno zvezna (U), Studentova (Student), normalna (N), Gama (Gama), χ^2 (Chi) in geometrijska (Geo). Generator nato generia 2x2 matriko z elementi, ki predstavljajo naključne realizacije izbrane slučajne spremenljivke.

Algoritem 1 Generator

```
Vhod: porazdelitev, parameter1, parameter2
Izhod: matrika dimenzije 2x2 z elementi, ki predstavljajo naključne realizacije
izbrane slučajne spremenljivke
function GENERATOR(porazdelitev, parameter1, parameter2)
    if (porazdelitev == ”U”)
            a <− parameter1
            b <− parameter2
            M <- matrix(c(runif(1,a,b), runif(1,a,b), runif(1,a,b), runif(1,a,b)),
                nrow=2,ncol=2,byrow = TRUE)
    if (porazdelitev == ”Student”)
            df <− parameter1
            M <- matrix(c(rt(1,df), rt(1,df), rt(1,df), rt(1,df)), nrow=2, ncol=2,
                byrow = TRUE)
    if (porazdelitev == ”N”)
            mi <− parameter1
            sigma <− parameter2
            M <- matrix(c(rnorm(1,mi,sigma), rnorm(1,mi,sigma),
                rnorm(1,mi,sigma), rnorm(1,mi,sigma)), nrow=2,ncol=2,
                byrow = TRUE)
    if (porazdelitev == ”Gama”)
            a <− parameter1
            b <− parameter2
            M <- matrix(c(rgamma(1,a,b), rgamma(1,a,b), rgamma(1,a,b),
                rgamma(1,a,b)), nrow=2, ncol=2, byrow = TRUE)
    if (porazdelitev == ”Chi”)
            df <− parameter1
            M <- matrix(c(rchisq(1,df), rchisq(1,df), rchisq(1,df), rchisq(1,df)),
                nrow=2,ncol=2, byrow = TRUE)
    if (porazdelitev == ”Geo”)
            p <− parameter1
            M <- matrix(c(rgeom(1,p), rgeom(1,p), rgeom(1,p), rgeom(1,p)),
                nrow=2, ncol=2, byrow = TRUE)
    return(M)
end function
```

Naslednji algoritem (Algoritem 2) je namenjen izračunu vrednosti matrične igre. Vhodni podatek je matrika dimenzije 2x2, ki predstavlja izplačila matrične igre. Algoritem 2 vrne vrednost vhodne matrične igre. Izračun vrednosti temelji na formuli predstavljeni na začetku Poglavja 2.2.

Za izračun povprečne vrednosti matrične igre sem zapisala še Algoritem 3, ki simulira k matrik dimenzije 2x2 z elementi, ki predstavljajo realizacije izbrane slučajne spremenljike. Vhodni podatki te funkcije so število simulacij, porazdelitev in njeni parametri, funkcija pa vrne povprečno vrednost igre.

Algoritem 2 Vrednost

Vhod: matrika M dimenzije 2x2

Izhod: vrednost matrične igre

```
function Vrednost(M)
    if (max( min(M[1,1], M[1,2]), min(M[2,1], M[2,2]) ) ==
        min( max(M[1,1], M[2,1]), max(M[1,2], M[2,2]) ) )
        return(min(max(B[1,1],B[2,1]),max(B[1,2],B[2,2])))
    else
        return((M[1,1]*M[2,2]-M[1,2]*M[2,1])/(M[1,1]-M[1,2]-M[2,1]+M[2,2]))
end function
```

Algoritem 3 spodaj je osnovan na formuli zapisani na koncu Poglavja 2.2. Funkcija združuje oziroma uporablja tako Algoritem 1 kot tudi Algoritem 2.

Algoritem 3 Povprecna_vrednost

Vhod: število simulacij, porazdelitev, parameter_1, parameter_2

Izhod: povprečna vrednost matrične igre

```
function Povprecna_vrednost(s, porazdelitev, parameter_1, parameter_2)
    vsota <- 0
    for (i in c(1:s)){M <- Generator(porazdelitev,parameter_1,parameter_2)
                      vsota <- vsota + Vrednost(M)}
return((1/s)*vsota)
end function
```

Izračun vrednosti povprečne igre zaobjema Algoritem 4, ki za vhodne podatke zahteva izbiro porazdelitve ter izbiro njenih parametrov. Nato za izbrano porazdelitev izračuna njeno pričakovano vrednost in ta je enaka vrednosti povprečne igre.

Algoritem 4 Vrednost_povprecne_igre

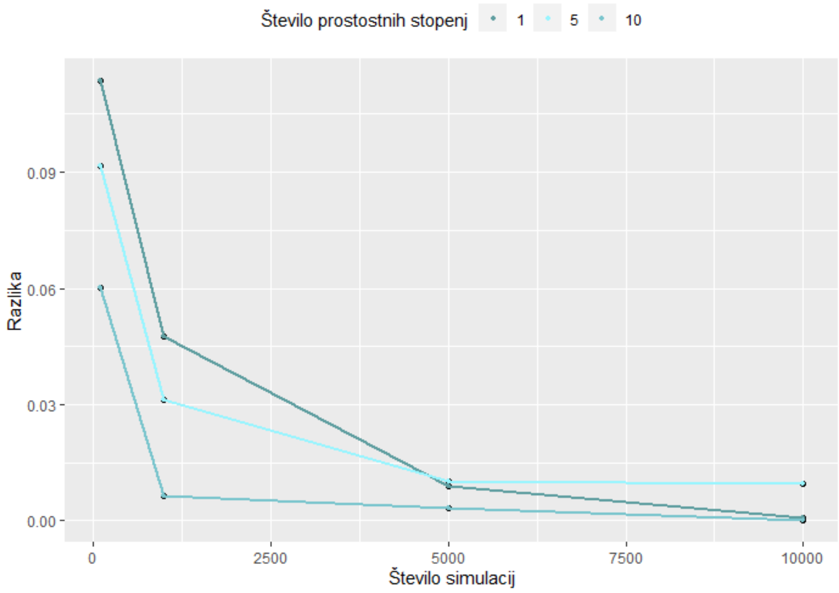
Vhod: porazdelitev, parameter_1, parameter_2

Izhod: vrednost povprečne matrične igre

```
function Vrednost_povprecne_igre(porazdelitev,parameter_1,parameter_2)
    if (porazdelitev == "U")
            E <- (parameter_1+parameter_2)/2
    if (porazdelitev == "Student")
            E <- 0
    if (porazdelitev == "N")
            E <- parameter_1
    if (porazdelitev == "Gamma")
            E <- parameter_1/parameter_2
    if (porazdelitev == "Chi")
            E <- parameter_1
    if (porazdelitev == "Ber")
            E <- parameter_1
    if (porazdelitev == "Geo")
            E <- 1/parameter_1
return(E)
end function
```

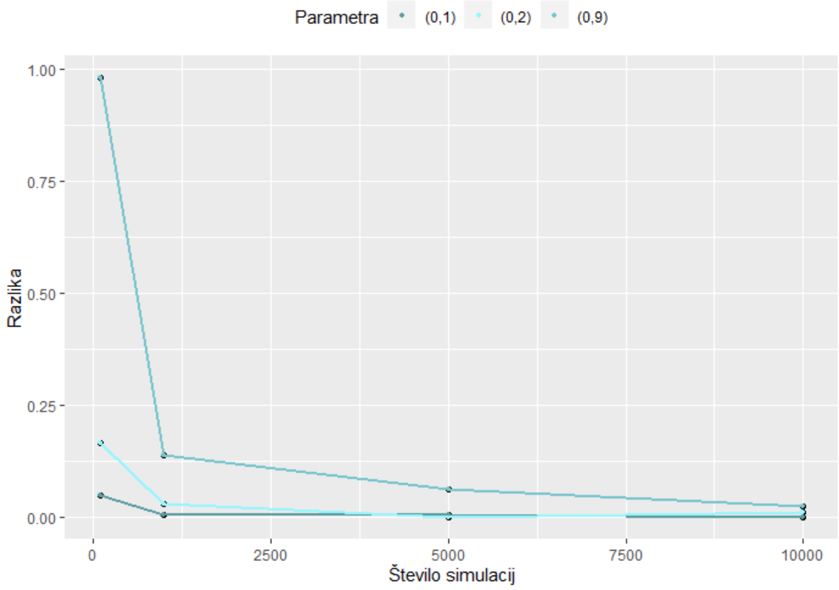
4.1. Analiza odvisnosti razlik med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre od števila simulacij s spreminjanjem paramaterov. Najprej sem se lotila analize odvisnosti razlik med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre od števila simulacij s spreminjanjem paramaterov. Za vzorec je v nadaljevanju prikazanih zgolj nekaj porazdelitev in ne vse analizirane porazdelitve zaradi omejitve obsega projektne naloge.

Graf 1 prikazuje analizo Studentove porazdelitve. Opazim, da se razlika po 5 000 simulacijah ustali približno pri razliki 0.015 ne glede na število prostostnih stopenj. Izbira prostostnih stopenj tako vpliva na proučevano razliko le pri manj izvedenih simulacijah, približno do 2 500 simulacij. Večje kot je število prostostnih stopenj, večja je razlika med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre.



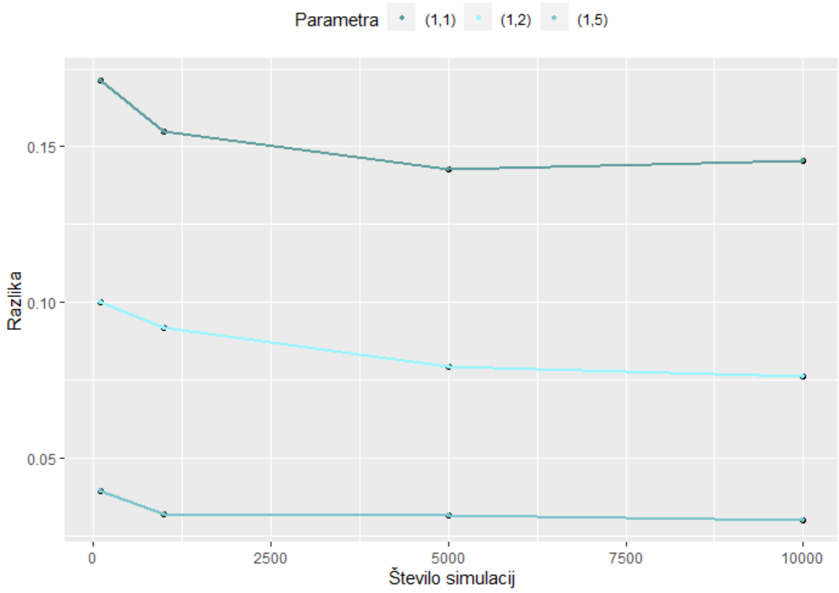
Graf 1: Studentova porazdelitev - spreminjanje števila prostostnih stopenj

Podobno opazim tudi pri analizi normalne porazdelitve ob spreminjanju parametra standardnega odklona, kar prikazuje Graf 2 spodaj. Tudi tu namreč sprememba parametra vpliva na razliko zgolj, če je izvedenih simulacij relativno malo, do 1000. Večji standardni odklon rezultira v večji razliki med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre. Če pa je število simulacij več kot 7 500, so razlike zelo majhne. V splošnem je razlika med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre ob 10 000 izvedenih simulacijah skorajda enaka 0.



Graf 2: Normalna porazdelitev - spreminjanje standardnega odklona

Nato sem analizirala še gama porazdelitev, kjer sem spreminjala parameter oblike. Iz Grafa 3 se jasno vidi, da večanje parametra merila znižuje proučevano razliko. V splošnem pa se le-ta ustali ob 5 000 izvedenih simulacijah. V najboljšem izbranem primeru, ko sem proučevala porazdelitev Gamma(1,5) je razlika znašala zgolj 0.03.



Graf 3: Gamma porazdelitev - spreminjanje parametra oblike

V splošnem sem pri vseh analiziranih porazdelitvah opazila vpliv spreminjanja parametrov porazdelitve na proučevano razliko, je pa ta specifičen glede na izbrano porazdelitev. Pri vseh grafih sem opazila, da se razlika med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre ustali približno po 5 000 simulacijah in do 10 000 simulacije že doseže relativno nizko, skorajda zanemarljivo vrednost.

5. Zaključek

Literatura

[1] T. Bertok, *Slučajne matrične igre*, Delo diplomskega seminarja (2020) 4–24.