UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Enja Erker

Slučajne matrične igre

Poročilo o projektu pri predmetu Matematika z računalnikom

Mentorja: prof. dr. Sergio Cabello Justo,
asist. Gašper Domen Romih, mag. mat.

Ljubljana, 2. 5. 2022

Kazalo

Slučajne matrične igre

Povzetek

V projektni nalogi pri predmetu matematika z računalnikom sem proučevala slučajne matrične igre dimenzij 2x2, analizirala sem različne porazdelitve vrednosti matričnih iger glede na porazdelitev slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo elemente matrike izplačil. Osredotočila sem se na primerjavo vrednosti povprečne matrične igre s povprečno vrednostjo matrične igre. Proučila sem enakomerno zvezno, Studentovo, normalno, gama, Bernoullijevo in geometrijsko porazdelitev. Vse dobljene empirične povprečne vrednosti iger v konvergenci so bile manjše ali enake vrednostim povprečne igre, enakost je nastopila v primerih simetričnih porazdelitev. Simetrija porazdelitve ima torej pomemben vpliv na razliko med vrednostjo povprečne igre in empirično povprečno vrednostjo igre. Poleg tega rezultati kažejo tudi pomemben vpliv spreminjanja parametrov porazdelitve na proučevano razliko, ki pa je specifičen glede na izbrano porazdelitev. Opazila sem, da se razlika med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre ustali približno po 5000 simulacijah in do 10000 simulacij že doseže relativno nizko, skorajda zanemarljivo vrednost.

Ključne besede: slučajne matrične igre, vrednost igre, teorija iger

1. Uvod

Slučajne matrične igre so matrične igre z dodanim nivojem slučajnosti. Matrična igra je igra med dvema igralcema, kjer ima prvi igralec n izbir, drugi igralec pa m izbir. Igralca istočasno določita svoji potezi, izid določi matrika izplačil $A \in \mathbb{R}^{nxm}$. Predpostavimo, da prvi igralec izbere potezo oz. vrstico i in drugi igralec potezo oz. stolpec j. Če je element a_{ij} pozitivna vrednost, potem mora drugi igralec plačati prvemu a_{ij} enot. Če pa je vrednost a_{ij} negativna, potem prvi igralec drugemu plača $|a_{ij}|$ enot. Vrednost matrične igre je maksimalni dobitek prvega igralca, če drugi igra racionalno. Dodatek slučajnosti matričnih iger pomeni, da so izplačila slučajne spremenljivke. Predpostavke slučajnih matričnih iger so sledeče [1]:

- vsak igralec ima jasen cilj, cilja nasprotnih igralcev pa sta nezdružljiva,
- v konfliktni situaciji igralca spoštujeta določena pravila (npr. moralne norme),
- igralca se odločata racionalno (izbirata možnosti z največjo koristnostjo),
- obstaja merilo koristnosti za vsako potezo za vsakega igralca.

V projektni nalogi sem analizirala različne porazdelitve vrednosti matričnih iger glede na porazdelitev slučajnih spremenljivk, ki predstavljajo elemente matrike izplačil. Osredotočila sem se na primerjavo vrednosti povprečne matrične igre s povprečno vrednostjo matrične igre. Zaradi časovne omejitve izdelave projektne naloge sem se omejila zgolj na matrike dimenzij 2x2, vendar pa bi lahko podobne eksperimente izvajala na matrikah poljubnih dimenzij. Poročilo o projektu je v nadaljevanju strukturirano v šestih poglavjih. Prvo poglavje predstavlja uvod. Drugo poglavje je namenjeno teoretičnemu ozadju, gre za kratek pregled osnovnih pojmov iz teorije iger in predstavitvijo izračuna vrednosti povprečne igre in povprečne vrednosti igre. Izbrano programsko okolje in implementacija sta opisana v tretjem poglavju. Sledi predstavitev rezultatov z diskusijo in zaključek.

2. Teoretična izhodišča

2.1. Osnove iz teorije iger. Za osnovno razumevanje slučajnih matričnih iger je dobro poznati nekaj osnovnih pojmov iz teorije iger, ki so predstavljeni v nadaljevanju. Največji vrstični minimum (M_1) in največji stolpični maksimum (M_2) definiramo kot $M_1 = max_i min_j a_{ij}$ in $M_2 = min_j max_i a_{ij}$. Prvi igralec lahko torej vedno dobi vsaj M_1, drugi igralec pa lahko vedno izgubi največ M_2. Velja torej $M_1 \leq M_2$. Sedlo matrike je element, ki je najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu. Natanko tedaj ko ima matrika sedlo, velja $M_1 = M_2$. V splošnem matrika izplačil navadno nima sedla [2].

Strategija posameznega igralca je verjetnostna porazdelitev na množici vseh njegovih potez. Pričakovana vrednost izplačila prvega igralca pri velikem številu ponovitev igre, če ta uporablja strategijo x in drugi igralec y, je $E(x, y) = x^T Ay$. Vrednost matrične igre je maksimalni dobitek prvega igralca, če drugi igra racionalno, torej

$$v = max_x min_y E(x, y) = min_y max_x E(x, y)$$

(izrek o minimaksu ali osnovni izrek teorije iger). Če je vrednost igre enaka 0, potem je igra poštena. Če ima matrika sedlo, je to enako njeni vrednosti. Za vsak profil je vsota koristnosti igralcev enaka 0, temu pravimo igra z ničelno vsoto [3].

Strategija x^* je optimalna strategija za prvega igralca natanko tedaj, kadar je $E(x^*, y_j) \geq v$ za vse j od 1 do n, y_j označuje strategijo, kjer drugi igralec izbere stolpec j. Podobno je strategija y^* optimalna strategija za drugega igralca natanko tedaj, ko je $E(x_i, y^*) \leq v$ za vse i od 1 do m, x_i pa predstavja strategijo, kjer prvi igralec izbere vrstico i. Paru (x^*, y^*) pravimo rešitev matrične igre. Ta nam pove, kakšno strategijo naj ubereta igralca, da bosta dosegla maksimalno koristnost. Igralec uporablja čisto strategijo, če vedno izbira isto potezo. Če pa igralec spreminja svoje poteze, potem uporablja mešano strategijo. Matrična igra dveh igralcev je simetrična, če je sta vlogi igralcev enaki. Takrat je torej matrika izplačil A poševno simetrična in velja $A = -A^T$. Vrednost simetrične matrične igre za dva igralca z ničelno vsoto je enaka 0, oba igralca pa imata enaki optimalni strategiji [1].

Točka ravnovesja v teoriji iger predstavlja najboljši izid za vse igralce v danem trenutku, to točko imenujemo Nashevo ravnovesje. Igralca se nahajata v Nashevem ravnovesju, če vsak izmed njiju s spremembo svoje strategije, ob upoštevanju fiksne strategije nasprotnika, v danem trenutku ne more izboljšati svojega položaja. Profil (x^*, y^*) je mešano Nashevo ravnovesje natanko tedaj, ko velja

$$min_y (x^*)^T Ay = max_x min_y x^T Ay \quad \text{in} \quad max_x x^T Ay^* = min_y max_x x^T Ay.$$

Max-min strategija prvega igralca je x^*, min-max strategija drugega pa je y^* [4].

2.2. **Izračuna vrednosti povprečne igre in povprečne vrednosti igre.** Naj bo $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \in \mathbb{R}^{2x2}$. Če ima matrika B sedlo, kar se zgodi zelo redko, potem je vrednost matrike enaka sedlu. Če matrika B nima sedla, pa njeno vrednost najpreprosteje izračunamo kot

$$v(B) = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}.$$

Predpostavimo še matriko A dimenzije nxn, katere elementi so slučajne spremenljivke. Vrednost povprečne igre $v(E(A))$ izračunamo kot vrednost matrične igre, katere elementi predstavljajo pričakovane vrednosti določenih slučajnih spremenljivk. Velja torej $v(E(A)) = v(A_e)$. Izračun povprečne vrednosti igre $E(v(A))$ pa temelji na vzorčenju slučajnih vrednosti iz neke porazdelitve, iz katerih skonstruiramo matriko A^k, ki ima za elemente tokrat dejanske vrednosti in ne več slučajne spremenljivke. Slučajno matriko generiramo večkrat, k označuje zaporedno število simulacije, s pa število vseh izvedenih simulacij. V projektni nalogi sem izvedla od 100 do 10 000 simulacij. Vrednosti vseh iger seštejemo in delimo s številom generiranih matrik, da dobimo povprečno vrednost igre [1]

$$E(v(A)) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} v(A^k).$$

3. Programsko okolje in implementacija

Za implementacijo predstavljenega problema sem uporabila program R. Ta program sem izbrala, ker je od meni znanih programov oz. programskih jezikov najbolj primeren za izvedbo naloge. Vsi algoritmi v nadaljevanju so predstavljeni s psevdokodo. Začetek praktičnega dela naloge je predstavljala konstrukcija osrednjega algoritma Generator (Algoritem 1). Algoritem za vhodne podatke sprejme eno izmed izbranih porazdelitev, to so enakomerno zvezna (U), Studentova (Student), normalna (N), Gama (Gama), Bernoullijeva (Ber) in geometrijska (Geo). Generator nato generira 2x2 matriko z elementi, ki predstavljajo naključne realizacije izbrane slučajne spremenljivke.

Algoritem 1 Generator

Vhod: porazdelitev, parameter_1, parameter_2
Izhod: matrika izplačil dimenzije 2x2

function GENERATOR(*porazdelitev*, *parameter_1*, *parameter_2*)
    if (porazdelitev == ”U”)
        a <− parameter_1, b <− parameter_2
        M <- matrix(c(runif(1,a,b),runif(1,a,b),runif(1,a,b),runif(1,a,b)))
    if (porazdelitev == ”Student”)
        df <− parameter_1
        M <- matrix(c(rt(1,df), rt(1,df), rt(1,df), rt(1,df)))
    if (porazdelitev == ”N”)
        mi <− parameter_1, sigma <− parameter_2
        M <- matrix(c(rnorm(1,mi,sigma), rnorm(1,mi,sigma),
            rnorm(1,mi,sigma), rnorm(1,mi,sigma)))
    if (porazdelitev == ”Gama”)
        a <− parameter_1, b <− parameter_2
        M <- matrix(c(rgamma(1,a,b), rgamma(1,a,b), rgamma(1,a,b),
            rgamma(1,a,b)))
    if (porazdelitev == ”Geo”)
        p <− parameter_1
        M <- matrix(c(rgeom(1,p), rgeom(1,p), rgeom(1,p), rgeom(1,p)))
    return(M)
end function

Nato sem skonstruirala še tri pomožne algoritme. Algoritem 2 je namenjen izračunu vrednosti matrične igre. Vhodni podatek je matrika dimenzije 2x2 z izplačili matrične igre. Elementi te matrike predstavljajo naključne realizacije izbrane slučajne spremenljivke. Algoritem 2 vrne vrednost vhodne matrične igre. Izračun vrednosti temelji na formuli predstavljeni na začetku Poglavja 2.2. Za izračun povprečne vrednosti matrične igre sem zapisala še Algoritem 3, ki simulira k matrik dimenzije 2x2 z elementi, ki predstavljajo realizacije slučajne spremenljivke. Vhodni podatki te funkcije so število simulacij, porazdelitev in njeni parametri. Funkcija vrne povprečno vrednost igre. Algoritem 3, ki uporablja oba prejšnja algoritma, je osnovan na formuli zapisani na koncu Poglavja 2.2. Poleg omenjenih algoritmov sem uporabila še nekaj pomožnih, vendar jih zaradi omejitve obsega poročila nisem podrobneje predstavila. Časovna zahtevnost vseh algoritmov skupaj znaša 1.02 sekunde.

Algoritem 2 Vrednost

Vhod: matrika M dimenzije 2x2
Izhod: vrednost matrične igre

function VREDNOST(M)
    if (max(min(M[1,1], M[1,2]), min(M[2,1], M[2,2])) ==
        min(max(M[1,1], M[2,1]), max(M[1,2], M[2,2])))
        return(min(max(B[1,1],B[2,1]),max(B[1,2],B[2,2])))
    else
        return((M[1,1]*M[2,2]-M[1,2]*M[2,1])/(M[1,1]-M[1,2]-M[2,1]+M[2,2]))
end function

Algoritem 3 Povprecna_vrednost

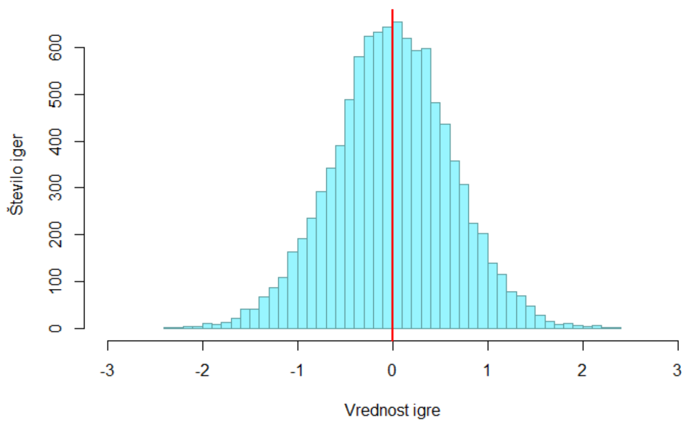
Vhod: število simulacij, porazdelitev, parameter_1, parameter_2
Izhod: povprečna vrednost matrične igre

```
function POVPRECNA_VREDNOST(s, porazdelitev, parameter_1, parameter_2)
    vsota <- 0
    for (i in c(1:s)){M <- Generator(porazdelitev,parameter_1,parameter_2)
                      vsota <- vsota + Vrednost(M)}
return((1/s)*vsota)
end function
```

4. Rezultati in diskusija

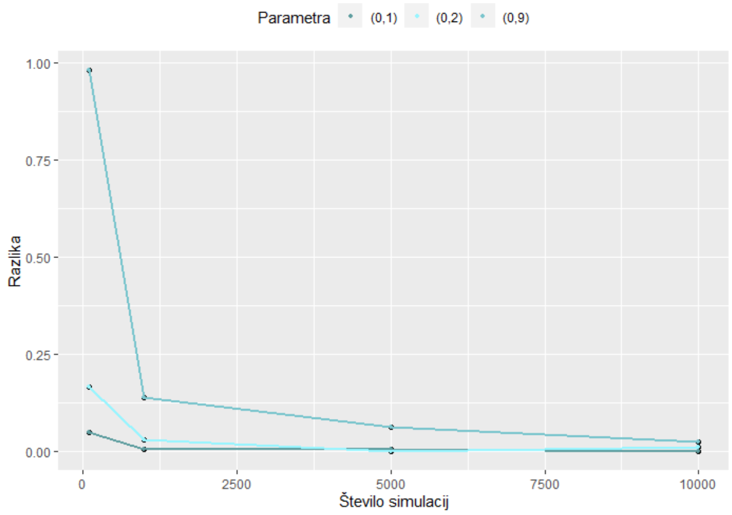
Najprej sem se lotila analize odvisnosti razlik med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre od števila simulacij. V vseh histogramih je z rdečo navpično črto označena teoretična vrednost igre, s črno pa empirična, število simulacij je 10000. Analizo vsake porazdelitve sem dopolnila z eksperimentalnim delom spreminjanja paramaterov. Proučila sem vse porazdelitve navedene na začetku 3. Poglavja. Za vsako izmed porazdelitev sem analizirala tri izbire parametrov.

4.1. **Zvezne porazdelitve.** Prvi del projektne naloge je predstavljala analiza zveznih porazdelitev. Prva analizirana zvezna porazdelitev je bila normalna, izbrala sem standardno normalno porazdelitev (Graf 1). Ob manjšem številu generiranih matrik vrednosti iger pogosto odstopajo od 0. Ob večjem številu simulacij pa skonvergirajo proti teoretični pričakovani vrednosti. Enak rezultat sugerirajo tudi normalne porazdelitve z drugačnimi parametri. Rezultati so smiselni, saj je normalna porazdelitev simetrična.



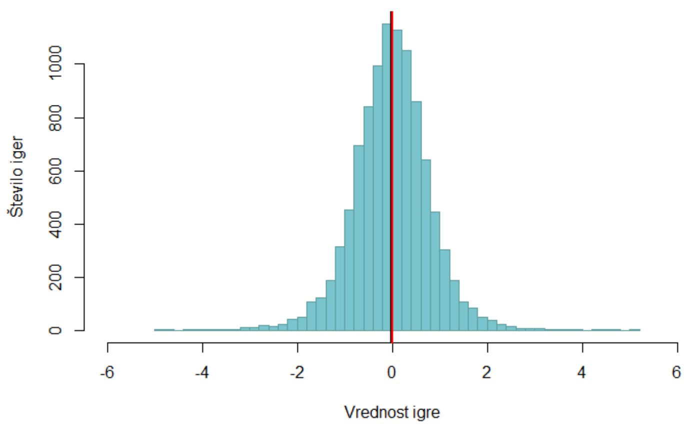
Graf 1: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - N(0,1)

Proučila sem več normalnih porazdelitev z različnimi parametri, spreminjala sem standardni odklon in izbrala vrednosti 1, 2 in 9 (Graf 2). Večji standardni odklon smiselno rezultira v večji razliki. Sprememba parametra vpliva na razliko zgolj, če je izvedenih simulacij relativno malo, do 1000. Če je število simulacij večje od 7500, so razlike zelo majhne. V splošnem je analizirana razlika ob 10000 izvedenih simulacijah skorajda enaka 0.



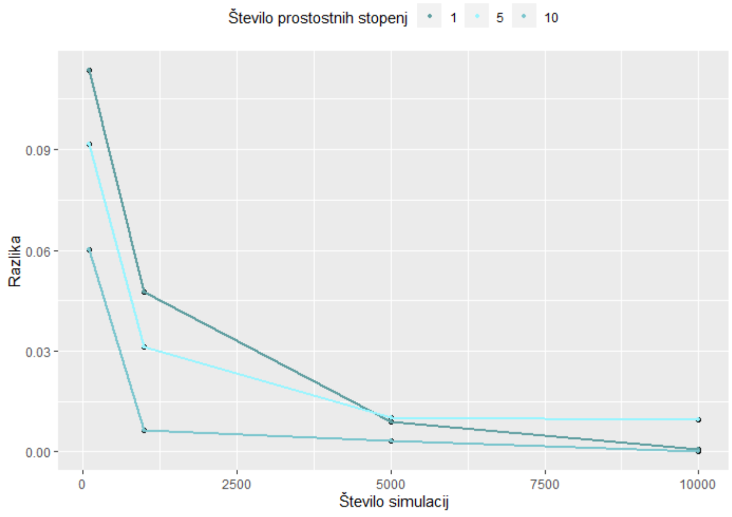
Graf 2: Normalna porazdelitev - spreminjanje standardnega odklona

Nato sem proučila še eno simetrično porazdetev in sicer Studentovo s 3 prostostnimi stopnjami (Graf 3), ki me je pripeljala do podobnih ugotovitev kot normalna porazdelitev. Matematično upanje te porazdelitve je prav tako enako 0, posledično je tudi vrednost povprečne igre 0. Empirično povprečje iger je ob povečanju števila generiranih matrik skonvergiralo k 0.



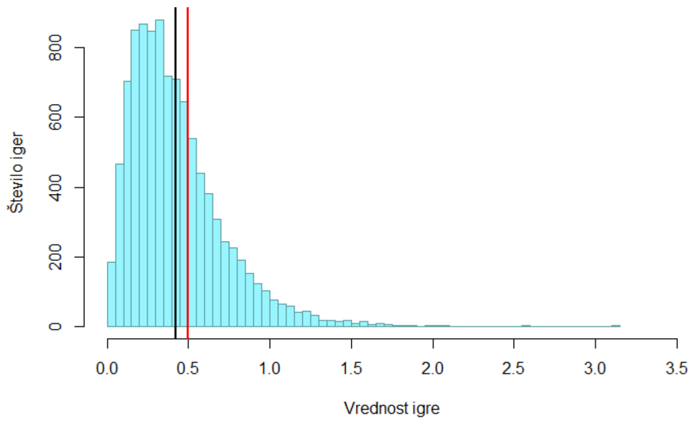
Graf 3: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Student(3)

Analizirala sem tudi Studentove porazdelitve z drugimi prostostnimi stopnjami in sicer 1, 5 ter 10 (Graf 4). Opazila sem, da se proučevana razlika po 5000 simulacijah ustali približno pri razliki 0.015 ne glede na število prostostnih stopenj. Izbira prostostnih stopenj tako vpliva na analizirano razliko le pri manj izvedenih simulacijah, približno do 2500 simulacij. Večje kot je število prostostnih stopenj, večja je razlika med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre, hitrejša je torej konvergenca k 0. Rezultati so smiselni, saj več prostih parametrov povečuje odstopanje od pričakovane vrednosti, Studentova porazdelitev pa je simetrična.



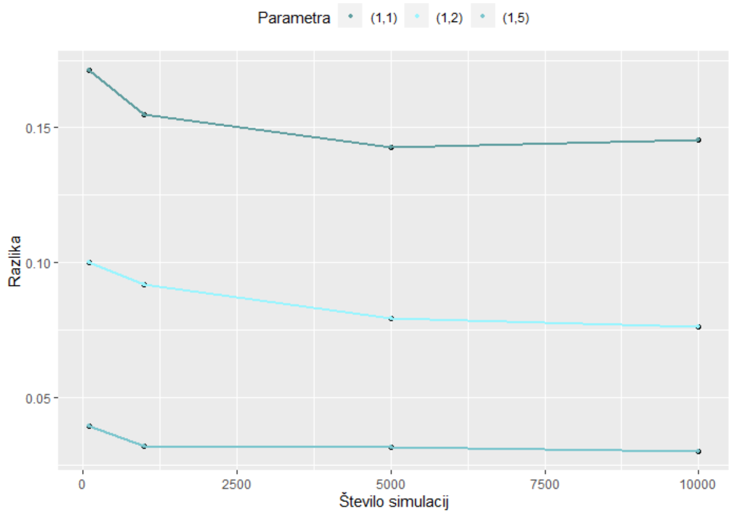
Graf 4: Studentova porazdelitev - spreminjanje števila prostostnih stopenj

Tretja analizirana porazdelitev je bila gama porazdelitev (Graf 5), ki ni simetrična. Tokrat so bili rezultati drugačni kot v ostalih proučevanih porazdelitvah, saj je bila v večini realizacij empirična povprečna vrednost igre manjša od vrednosti povprečne igre. Slednjo v grafu spodaj prikazuje rdeča navpična črta, empirično povprečno vrednost igre pa označuje črna navpičnica.



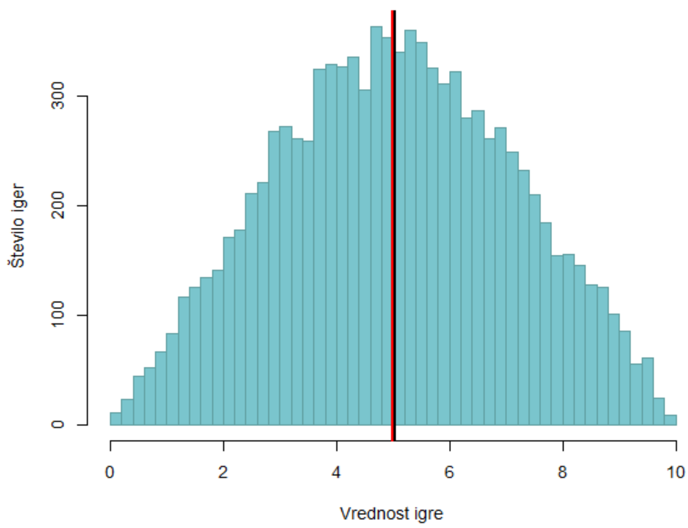
Graf 5: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Gama(1,2)

Analizirala sem še druge gama porazdelitve Gama(1,1), Gama(1,2) in Gama(1,5) ter spreminjala sem parameter oblike. Večanje parametra oblike znižuje proučevano razliko (Graf 6), ki se ustali ob 5000 simulacijah. Pomembno je omeniti, da pri gama porazdelitvi razlike ob različnih izbirah parametrov ne konvergirajo k 0, kot je bilo do sedaj. To se sklada z zgornjo ugotovitvijo o razliki med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre.



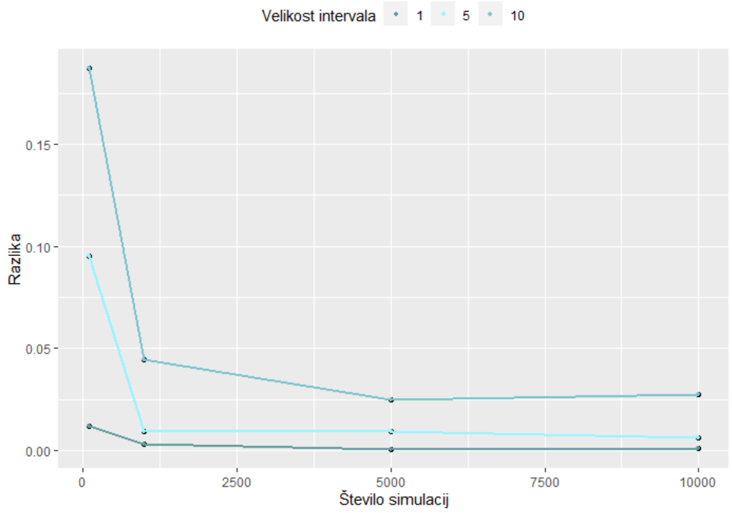
Graf 6: Gama porazdelitev - spreminjanje parametra oblike

Proučila sem še enakomerno zvezno porazdelitev (Graf 7). Izbrala sem primer U(0,10) s pričakovano vrednostjo 5. Zdi se, da tudi empirične vrednosti igre konvergirajo k 5, kar je pričakovano, saj gre ponovno za simetrično porazdelitev. Tudi iz histograma se vidi, da je razlika med rdečo in črno navpičnico relativno majhna.



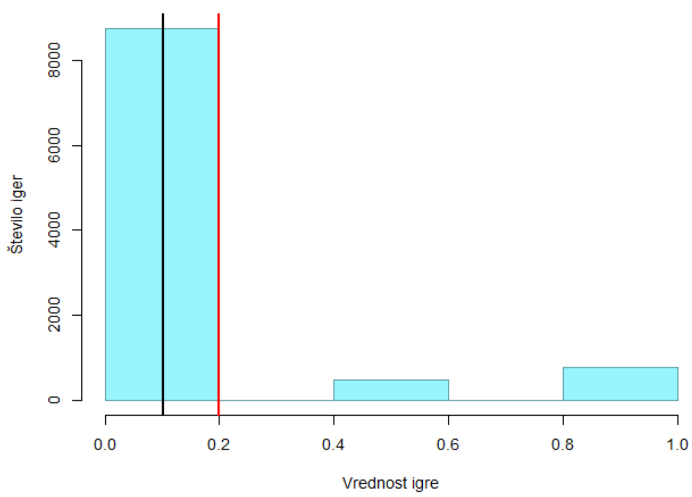
Graf 7: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - U(0,10)

Nato sem naredila podrobnejšo analizo konvergence razlik med vrednostjo povprečne igre in povprečno vrednostjo igre (Graf 8). Iz grafa vidim podoben trend nekonvergence razlike k 0, kot sem ga opazila pri enakomerno zvezni porazdelitvi. Sicer je tu trend nekoliko manj izrazit, saj vse razlike ob dovolj velikem številu simulacij padejo približno pod mejo 0.025. Vendar pa v splošnem ne morem trditi, da razlike konvergirajo k ničeni vrednosti. Poleg tega sem opazila, da zmanjševanje izbranega intervala znižuje proučevano razliko, kar je pričakovano. Manjši kot je interval, manj je možnih vrednosti simulacije in posledično je odstopanje od vrednosti povprečne igre manjše.



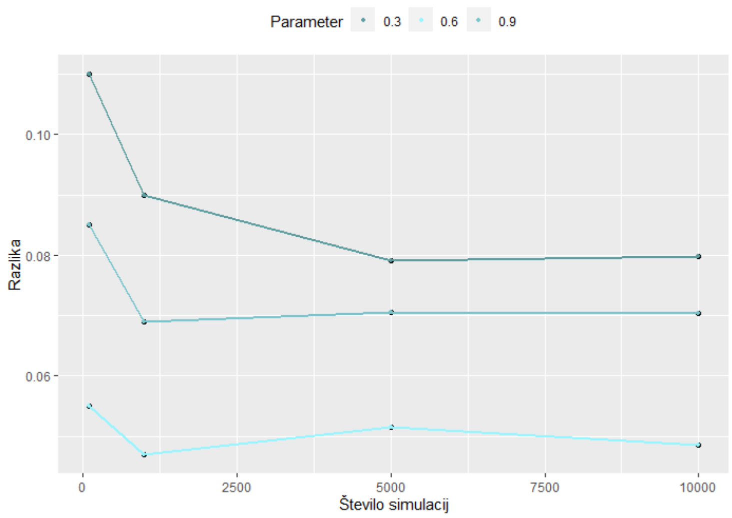
Graf 8: Enakomerno zvezna porazdelitev - spreminjanje velikosti intervala

4.2. **Diskretne porazdelitve.** Drugi del projektne naloge zaobjema analizo diskretnih porazdelitev. Najprej sem simulirala Bernoullijevo porazdelitev s parametrom 0.2 (Graf 9). V splošnem je bila empirična povprečna vrednost igre manjša od vrednosti povprečne igre, enako kot je bilo pri doslej že analiziranih nesimetričnih porazdelitvah.



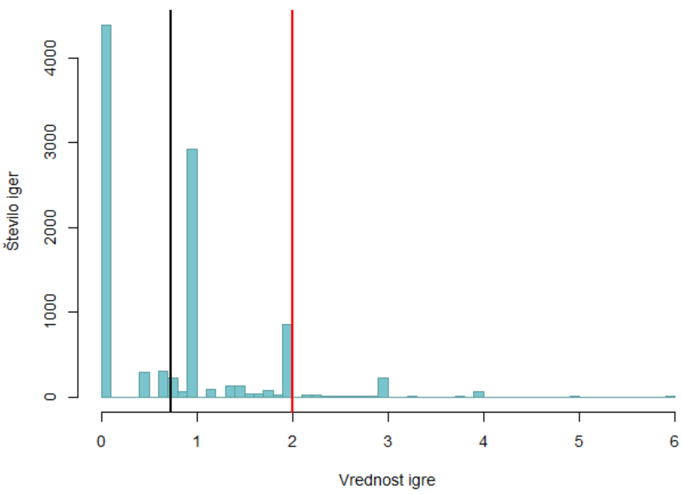
Graf 9: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Ber(0.2)

Poleg Ber(0.2) sem proučila tudi uporabo drugih parametrov 0.3, 0.6 in 0.9 (Graf 10), opazila sem podoben fenomen kot pri gama in enakomerno zvezni porazdelitvi. Več izvedenih simulacij razliko v splošnem zmanjšuje, njena konvergenca pa je odvisna od izbranega parametra. Manj kot parameter, verjetnost uspeha, odstopa od povprečne vrednosti 0.5, manjša je proučevana razlika. Zanimivo je torej, da se omenjeni trend pojavi tako pri nekaterih zveznih kot tudi pri diskretni porazdelitevi.



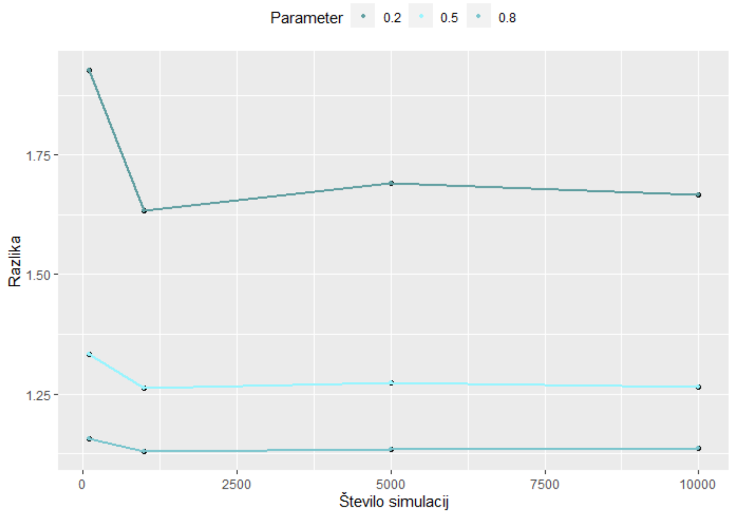
Graf 10: Bernoullijeva porazdelitev - spreminjanje parametra

Nazadnje sem analizirala še geometrijsko porazdelitev s parametrom 0.5 (Graf 11). Tudi tokrat je bila empirična povprečna vrednost igre manjša od vrednosti povprečne igre, kar ponovno vidim iz razlike med črno in rdečo navpičnico. Rezultati se torej ujemajo s preostalimi nesimetričnimi porazdelitvami.



Graf 11: Aproksimacija porazdelitve vrednosti matrične igre - Geo(0.5)

Analiza razlik geometrijske porazdelitve (Graf 12) je podobna kot pri Bernoullijevi porazdelitvi. Pri obeh namreč razlike ne konvergirajo k ničelni vrednosti. Nasprotno vsaka porazdelitev konvergira k vrednosti odvisni od izbire parametra. Večji kot je parameter verjetnosti uspeha, nižja je konvergenčna razlika.



Graf 12: Geometrijska porazdelitev - spreminjanje parametra

5. Zaključek

Rezultati vseh analiziranih porazdelitev na primeru 2x2 matričnih slučajnih iger so si med seboj zelo podobni. Prav vse dobljene empirične povprečne vrednosti iger v konvergenci so bile namreč manjše ali enake vrednostim povprečne igre, gre torej za nekakšno verzijo Jensenove neenakosti. Enakost nastopi v primerih simetričnih porazdelitev. Simetrija porazdelitve ima torej pomemben vpliv na razliko med vrednostjo povprečne igre in empirično povprečno vrednostjo igre.

Poleg tega rezultati kažejo tudi pomemben vpliv spreminjanja parametrov porazdelitve na proučevano razliko, ki pa je specifičen glede na izbrano porazdelitev. Pri vseh grafih sem opazila, da se razlika med povprečno vrednostjo igre in vrednostjo povprečne igre ustali približno po 5000 simulacijah in do 10000 simulacij že doseže relativno nizko, skorajda zanemarljivo vrednost. Nalogo bi bilo smiselno razširiti in proučiti še druge porazdelitve ter eksperimente izvesti tudi na matrikah večjih dimenzij. Kot zanimivost sem proučila še eno mešano porazdelitev in sicer med gama in Studentovo porazdelitvijo, ki je dala podobne rezultate kot doslej analizirane porazdelitve, vendar pa je zaradi omejitve obsega projekta nisem vključila v samo poročilo.

Literatura

[1] T. Bertok, *Slučajne matrične igre*, Delo diplomskega seminarja (2020) 4–24.
[2] O. A. Camarena, *Matrix games* (2021). Pridobljeno 22. 4. 2022 z naslova: https://www.matem.unam.mx/ omar/math340/matrix-games.html.
[3] J. Berg & A., Engel, *Matrix games, mixed strategies, adn statistical mechanics*, Institute for theoretical physics (1998) 1–4.
[4] L. Ein-Dor & I., Kanter, *Matrix games with nonuniform payoff distributions*, Physica A (2001) 80-88.