1. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n-1+\sin n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n, u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right)^{\frac{1}{n}}$; $<\left(\frac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$;

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln\dfrac{n-1}{n+1}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan n}{(\ln 2)^n}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(4+(-1)^n\right)^n}$;

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}\right)$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln^2\dfrac{n}{n+1}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}$;

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+10}$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n^{10}}{2^n}$;

(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$.

解:

(1) $a_{n+1}=a_n\cdot\dfrac{2+3n}{1+4n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{4n+1}=\dfrac{3}{4}<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}$ 收敛.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^n-1+\sin(n)}{2^{n+1}-1+\sin(n+1)}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n-1+\sin n}$ 收敛

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{n^2+n}}<u_n<\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\sim\dfrac{1}{n}$ $\therefore \sum\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 发散, $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

(4). $\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{n}}<u_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n>\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}\neq0$

$\therefore$ 级数发散.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=e^{\frac{1}{n}}-1=0$ $e^{\frac{1}{n}}>e^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore |u_n|>|u_{n+1}|$ $\therefore$ 交错级数 $(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 收敛.

$|u_n|=e^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}$ $\therefore \sum|u_n|$ 发散

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 条件收敛

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$ $\because \dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{\ln(n+1)}$

$\therefore |u_n|>|u_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, $\therefore \sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛

$|u_n|=\sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\sim\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}$ $\therefore \sum|u_n|$ 发散.

$\therefore \sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$ 条件收敛.

(7) $\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 收敛.

(8). $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)\sim\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\dfrac{-2}{n+1}$

$=\dfrac{-2}{n\sqrt{n+1}+n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{-2}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore$ 原级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\dfrac{n-1}{n+1}$ 收敛.

(9). $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$, $\because \ln 2<\ln e=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan n}{(\ln 2)^n}=+\infty$

$\therefore$ 级数发散.

(10) 设 $n=2k$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4+(-1)^n)^n}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{5^4}\cdots$

$=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^3}\cdots+\dfrac{1}{3^{2k+1}}\right)+\left(\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^4}\cdots+\dfrac{1}{5^{2k+2}}\right)$ $(k=0,1,2\cdots)$

故级数收敛

第十章 级数

第七节 综合例题

1.

(11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(\sqrt{n}-1)\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)$

$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-(n-\sqrt{n})}{n(n-\sqrt{n})}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2-n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-n}$

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-n}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ∴级数收敛

(12) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n}{n+1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{-1}{n+1}=\frac{-1}{n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

∴级数收敛.

(13). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^2}\,dx}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt{x^2}\,dx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$

∵$\sum\frac{2}{n^2}$收敛. ∴$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^2}\,dx}$收敛.

(14). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{n+10}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+10}=0$

$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+10)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-\sqrt{n+1}}{(n+1)(n+10)}=\frac{\frac{n+10}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+1}}{(n+1)(n+10)}$

当n充分大时,上式子于0,∴$u_{n+1}<u_n$.

∴$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+10}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

∴原级数条件收敛.

1、(15). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{10}}{2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{2^n}$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^{10}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 原级数绝对收敛

1(16). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{9n^2-4}}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{9n^2}}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2}\ln(1+\frac{1}{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})^n}{3n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2}$ 级数收敛.

$\therefore$ 原级数绝对收敛.

2. 讨论下列级数的敛散性.

(1) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x\neq -1)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(x^2-1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n-1}$ $(a>0)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k+n}{n^2}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^n\theta$;

设 $x>0$

(1). $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}x\cdot\frac{1}{1+x^{n+1}}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}$

若 $0<x<1$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=x<1$

若 $x>1$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=0<1$

$\therefore 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 绝对收敛.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(x^2-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{x^2-1}\right)^n$ 当 $e^{x^2-1}\geq 1$ 即 $|x|\geq 1$ 时，级数发散

当 $e^{x^2-1}<1$ 即 $|x|<1$ 时，级数收敛.

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=a$.

当 $a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}=\frac{1}{e}\neq 0$ 故此时发散.

故 $a\geq 1$ 时，级数发散，当 $a<1$ 时，级数收敛.

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

前者绝对收敛，后者条件收敛，故原级数条件收敛.

(5). $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|\sin\theta|\cdot n}{n+1}=|\sin\theta|$，故当 $\theta\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 时，绝对收敛.

当 $\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$，条件收敛.

当 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$k\in Z$

第十章 级数
第七节 综合例题

3. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则下面级数中哪一个必收敛. D

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$;

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$;　　$u_n = \frac{-1}{\sqrt{n}}$　$u_n^2 = \frac{1}{n}$.

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$;

D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$.

4. 设$0 \le a_n < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则下面级数中哪个必收敛.

D

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;　　$a_n = \frac{1}{n+1}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$;　　$a_n = \begin{cases} 0 & n=奇 \\ \frac{1}{2n} & n=偶 \end{cases}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$;　　或许 $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$，$a_n = \frac{1}{n^2}$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$.　　$a_n^2 < \frac{1}{n^2}$

第十章　级数
第七节　综合例题

5. 证明: (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

$\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}$

(1) $0<\frac{n!}{n^n}<\frac{2}{n^2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

(2), $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^3}{n^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}=0<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$

第十章 级数

第七节 综合例题

6. 举例说明，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 却不一定收敛.

$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=$ 收敛.

$v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$

故 u_n 收敛，v_n 发散.

第十章　级数
第七节　综合例题

7. 设$a_n>0,b_n>0$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$收敛，如果去掉$a_n>0,b_n>0$这条件，结论是否仍然成立?

$a_n>0,\ b_n>0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=A\cdot B\geqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)>0$

$\because a_n>0,b_n>0$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)>0.\ \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)$有界，收敛.

若. $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

结论不成立

第十章 级数
第七节 综合例题

8. 设 $a_n \geq 0$，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 反之，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，问 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

解：$\because a_n \geq 0$

$\exists n > N$，使 $a_n < 1$

$\therefore$ 此时 $a_n > a_n^2$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

反之，结论不成立，若 $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$，$a_n = \frac{1}{n}$ 故 $\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散，

第十章 级数
第七节 综合例题

9. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，且$a_n \le c_n \le b_n$，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$

∵ $a_n \le c_n \le b_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

$A \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \le B$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$有界，且

c_n单调减少 ∴由比较法

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛.

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} c_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p}(c_i - a_i) + a_i\right| \le \sum_{i=n+1}^{n+p}(c_i - a_i) + \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right|$$

$$\le \sum_{i=n+1}^{n+p}(b_i - a_i) + \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| \le \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i\right| + 2\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right|$$

∴级数收敛

第十章 级数
第七节 综合例题

10. 设 $a_n>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$b_n=1-\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

$$b_n=1-\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1-\frac{a_n-\frac{a_n^2}{2}+\frac{a_n^3}{3}-\cdots}{a_n}$$

$$=\frac{a_n}{2}-\frac{a_n^2}{3}+\frac{a_n^3}{4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n}a_n^{n-1}<\frac{a_n}{2}$$

$\therefore b_n<\frac{a_n}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

第十章　级数
第七节　综合例题

11. 设$a_n \geq a_{n+1}$，且$a_n \geq C > 0$（C是常数），$n=1,2,\cdots$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$与$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$都收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \leq a_1 - C$$

所给级数收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$$

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{C}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{C}\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1} \leq \frac{1}{C}(a_1 - C)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 收敛.

第十章 级数
第七节 综合例题

12. 设 $b_1=1, b_{n+1}=\dfrac{1+b_n}{2+b_n}, n=1,2,\cdots$，证明级数 $\sum\limits_{n+1}^{\infty}(b_n)^n$ 收敛.

$$\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}^{\,n+1}}{b_n^{\,n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+b_n}{2+b_n}\right)^{n+1}}{b_n^{\,n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+b_n}{2+b_n}\right.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(b_n^n)}=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+b_{n-1}}{2+b_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2+b_{n-1}}\right)$$

$0<b_{n+1}=1-\dfrac{1}{2+b_n}<1$，$b_n$ 单调递减

$\cancel{\dfrac{1}{2+b_n}\to 1+b_{n+1}}$ $\quad 0\le\lim\limits_{n\to\infty}b_n<1$

$\cancel{\dfrac{1}{2+b_n}\cdot(1+b_n+1)}$

$\therefore\ \sum\limits_{n+1}^{\infty}(b_n)^n$ 收敛

第十章　级数

第七节　综合例题

13. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sin a_n}{2}\right)^n$收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sin a_n}{2}=\frac{1}{2}<1$$

$\because\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}<1$，

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sin a_n}{2}\right)^n$收敛。

第十章 级数
第七节 综合例题

14. 若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某领域内具有二阶连续导数，且 $f(0)=1$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 的敛散性.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+o(x^2)$$

$\because f(x)$ 为偶函数，且有2阶连续导数

$$f'(0)=0,\ f(0)=1$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o(x^2)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$ 收敛

第十章　级数

第七节　综合例题

15. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛，试证：当时 $a_0=a_1=0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\cancel{a_2x^2+a_3x^3\cdots+a_nx^n}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{n}\right)^n=\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}\cdots+\frac{a_n}{n^n}$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}\cdots+\frac{a_n}{n^n}+\frac{a_{n+1}}{n^{n+1}}$$

$$\cancel{\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{f\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{a_{n+1}}{n^{n+1}}}{f\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_{n+1}}{n^{n+1}}}{\frac{a_n}{n^n}}+1=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{n}+1=1}$$

$$\cancel{\therefore\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)\text{收敛}}$$

由题 当 $x=1$ 时，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$ 收敛

设 $a_m=\max\{a_0,a_1,\cdots a_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=A+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\frac{1}{2}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\frac{1}{3}\right)^j+\cdots\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\frac{1}{n}\right)^j\right)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\frac{1}{k}\right)^j\leq a_m\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^j\quad\because a_0=a_1=0$$

$$\therefore\text{上式}\leq a_m\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^j=a_m\cdot\frac{\frac{1}{k^2}}{k-1}\cdot k=\frac{a_m}{k(k-1)}$$

$$=a_m\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)\leq A+\sum_{n=2}^{\infty}a_m\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=A+a_m$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)\text{收敛}.$$

第十章　级数
第七节　综合例题

16. 设 $a_{n+3}=a_n, n=0,1,2,\cdots$，证明当 $|x|<1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求出其和函数 $S(x)$ 的表示式.

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_0x^3+a_1x^4+a_2x^5\cdots$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2)(1+x^3+x^6\cdots+x^{3n}\cdots)$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2)\cdot\frac{1-x^n}{1-x^3}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1-x^3}(1-x^n)$$

当 $|x|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}x^n=0$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

$$\therefore S(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1-x^3}$$

第十章 级数
第七节 综合例题

17. 求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\dfrac{(x-1)^{2n}}{3^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)2^n x^{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}(x+1)^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n+1}}{n4^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n}x^{n-1}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^n}{b^{n^2}}x^n \quad (b\neq 0)$.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{1}{3}$, $R^2=(\frac{1}{3})^{-1}=3$, $R=\sqrt{3}$

当边界 $x=1-\sqrt{3}$ 或 $1+\sqrt{3}$, 当 $x=1\pm\sqrt{3}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛 ∴收敛域 $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$.

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n\cdot x^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}2^n\cdot x^{2n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=2$. ∴ $R^2=(\frac{1}{2})\Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散,

∴ 收敛域 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}})$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=2$, $R=\dfrac{1}{2}$, 中心点 $x=-1$

∴ $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=\frac{-1}{2}$. 当 $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=\frac{-1}{2}$ 时

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{\sqrt{n+1}}$ 收敛.

$x=\frac{1}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}$ 发散

∴ 收敛域 $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{4}{1}=4$

∴ $R^2=4\Rightarrow R=2$.

∴ $x=0$ 或 $x=4$ 为边界

当 $x=0$ 或 $x=4$ 时 $\sum\frac{-1}{n}$ 或 $\sum\frac{1}{n}$

发散 收敛域 $x\in(0,4)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, $x=\pm1$ 为边界点.

当 $x=-1$ 时. 为交错级数 ∴此时收敛

$x=1$ 时 级数发散

收敛域 $[-1,1)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{(n+1)\cdot b^{n^2}}{b^{(n+1)^2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1)\cdot\dfrac{1}{b^{2n+1}}$

当 $|b|\le1$ 时 $R=0$

当 $|b|>1$ 时. $l=0$ $R=+\infty$

∴ 收敛域 $\begin{cases} x=0, & |b|\le1 \\ x\in(-\infty,+\infty), & b>1. \end{cases}$

第十章 级数

第七节 综合例题

18. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，判断此级数与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处的敛散性.

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛.

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x-1)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot (-2)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(-\frac{1}{2})^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{(\frac{1}{2})^n}\right| = 0$$

$\therefore a_n = o(\frac{1}{2^n})\quad n\to\infty$

$\therefore |a_n| < |\frac{1}{2^n}|$,

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{2^n}|$ ，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处绝对收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |n \cdot a_n| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{n}{2^n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. $\because \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \frac{1}{2} < 1$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{n}{2^n}|$ 收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处绝对收敛，

同理. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot \frac{1}{n}| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n}| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{2^n}|$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处绝对收敛.

第十章　级数
第七节　综合例题

19. 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}$;

(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}$.

(1) 解: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=1-\sqrt{2}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=1-\sqrt{2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=1-\sqrt{2}.$

(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$=1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}\cdots+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\cdots-\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}1-\dfrac{1}{(n+1)!}=1$

(3). $\cancel{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)}=S(x),\ (x=\tfrac{1}{\sqrt{2}})}$

$\cancel{\therefore S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2(x^2)^{n-1}}{2^{n-1}}}$

$\cancel{=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{x^2}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{2-x^2}=\dfrac{1}{2-x^2}}$

$\cancel{=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+x}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

$\cancel{\therefore S(x)=\int_0^x S'(x)\,dx=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+x}\right)dx}$

$\cancel{=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(\sqrt{2}+x)-\ln(\sqrt{2}-x)\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}+1)\right)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$

(3) $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n-1},\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore f(x)=\dfrac{S(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1-x^2}$

$\therefore f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$S(x)=x\cdot f(x)=$

$=x\cdot f(x)=\dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$

(4). $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{2n-1},\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{S(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot x^{2n-1}}{2n-1}$

$\therefore f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=\dfrac{-1}{1+x^2}$

$\therefore f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx=-\arctan x$

$S(x)=x\cdot f(x)=-x\arctan x$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第十章　级数

第七节　综合例题

19. (5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n-1)!}x^{n-1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1=x^2\cdot e^x+3x\cdot e^x+e^x-1$

令 $x=1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=5e-1.$

(6). $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2(n+1)}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\right.$

$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n!}+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\right]=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1)$

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)\cdot x^n=x^2\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)''$

$=x^2\cdot\frac{2}{(1-x)^3}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}\quad(|x|<1)$

令 $x=-\frac{1}{2}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{4}{27}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$

24

20. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，求$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的和.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4\cdots+a_{2k-1}-a_{2k}\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_n=2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} = a_1+a_3+a_5\cdots+a_{2k-1}\cdots=5$$

$$-a_2-a_4-\cdots-a_{2k}=-3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+5=8$$

第十章 级数
第七节 综合例题

21. 求下列幂级数的收敛域及和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$;

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$;

(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$.

(1). $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$，$R=1$ ∴ $x=\pm1$时. $\lim_{n\to\infty} n(n+1)x^n = \infty$

∴收敛域 $(-1,1)$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$　$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n+1} = x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$. $\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

∴ $S(x) = d^2\left(\int_0^x S(x)dx\right) = d^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{2x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$.

(2). $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$. $R=1$, $x=\pm1$时. $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}n^2\cdot x^n = \infty$

∴ x的收敛域 $(-1,1)$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n^2\cdot x^n = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2\cdot x^{n-1} = x\cdot f(x)$

$\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = x\cdot g(x)$

$\int_0^x g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1+x}$，$g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{(1+x)^2}$　$f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3}$

∴ $S(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$，$x\in(-1,1)$

(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)} = S(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{x^2}f(x)$，$\cancel{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x^2}g(x)}$

$\cancel{g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}，\int_0^x g'(x)dx = g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x} - 1\,dx = -\ln(1-x) - x}$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$　$f'(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x)$

$f(x) = \int_0^x f'(x)dx = (1-x)\ln(1-x)+x$，$S(x) = \frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$，$R=1$，$x=\pm1$，$x=0$时. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

$x=1$时. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{n+1}\right) = 1$.

$$S(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x^2}, & x\neq 0,1 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

$x\in[-1,1]$.

第十章 级数
第七节 综合例题

21.

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$，则 $R=1$，$x=\pm1$ 另外讨论

当 $x=\pm1$ 时，级数收敛．∴ $x\in[-1,1]$.

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(x\cdot f(x)-\frac{1}{x}g(x)\right).$$

$$f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},\quad g'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=-\ln(1-x),\quad g(x)=\int_0^x g'(x)dx=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-\ln(1-x)$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(x\cdot f(x)-\frac{1}{x}g(x)\right)=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\ln(1-x)+\frac{x}{2}+1-\ln(1-x)\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x)+\frac{x}{2}+1\right]$$

当 $x=0$，$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=0$，当 $x=1$ 时．$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}$$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & x\neq0,1\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{4}, & x=1.\end{cases}\quad x\in[-1,1]$$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=\frac{x^2}{1+x^2}+f(x)$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=2\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\int_0^x 2\frac{1}{1+x^2}dx=2\arctan x,\quad f(x)=\int_0^x 2\arctan x\,dx=2x\cdot\arctan x-\ln(1+x^2)$$

$$\therefore S(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2).$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)^2-(n+1)+1}{2n^2-n+1}\cdot\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}\right|=1$，$R=1$，$x=\pm1$ 当 $x=\pm1$ 时

原级数收敛．

$$\therefore S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2},\ x\in(-1,1).$$

21、(6). $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n)!}{(3(n+1))!}=0$，$R=+\infty$ ∴ $x\in(-\infty,+\infty)$

令 $t=x^3$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(3n)!}$ 设 $=f(x)$，$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$

$y''=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$，$y''+y'+y=e^x$

∴ $r^2+r+1=0$，$r=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 又 $y(0)=\frac{x^{3\cdot 0}}{(3\cdot 0)!}=1$，$y'(0)=0$

∴ $y_0=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

$y^*=A\cdot e^{x}$，得 $A=\frac{1}{3}$

y 代入 $y(0)=1$，$y'(0)=0$，可得 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=0$

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$，$x\in\mathbb{R}$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n-\frac{1}{n+1}x^n=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\,dx=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{x}{1-x}\,dx$

$=\frac{x}{1-x}-\frac{-x-\ln(1-x)}{x}=\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$. $R=1$，$x=\pm1$ 为边界点

当 $x=\pm1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\pm1$，$x\in(-1,1)$

∴ $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot x^n=0$

∴ $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & (-1,0)\cup(0,+1)\\ 0, & x=0\end{cases}$

19

22. 证明级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$的和函数满足微分方程$xy''+y'+y=0$.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot x^n.$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}.$$

$$\therefore xy''+y'+y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}n\cdot(n-1)\cdot x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)}n\,x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot x^n.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot x^{n-1}\cdot(n^2)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot x^n.$$

整理 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{((n-1)!)^2}\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}x^n.$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}x^n+\frac{(-1)^n}{(n!)}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}0=0$$

第十章 级数
第七节 综合例题

23. 把下列级数展开成麦克劳林级数.

(1) $f(x)=3\cos^2 x-\sin^2 x$

(2) $f(x)=\left(x^2+1\right)\ln\left(1+x^2\right)-\left(x^2+1\right)$;

(3) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

(4) $f(x)=\ln\left(1+x-2x^2\right)$;

(5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$;

(6) $f(x)=\ln\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)$;

(7) $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$;

(8) $f(x)=\int_0^x t\cos t\,dt$.

(1) $f(x)=3-4\sin^2 x=1+2\cos 2x$

$=1+2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(2n)!}\cdot x^{2n}$

$x\in(-\infty,+\infty)$

(2). $f(x)=(x^2+1)\left(\ln(1+x^2)-1\right)$

$=(x^2+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{2n+2}-1\right)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}$

$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{2n+2}-x^2-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+4}$

$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}\cdot x^{2n+2}-1=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot x^{2n+2}-1,\quad -1\le x\le 1$

(3). $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(x^2)^n$

$f(x)=\int_0^x f'(x)dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot x^{2n+1}$

$(-1\le x\le 1)$

(4). $f(x)=\ln(1-x)(1+2x)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-x)^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{n+1}}{n+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n-1}{n}\cdot x^n.$

(5) $f(x)=x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(-x)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n+1}+x$

收敛半径. $R=1$, $x=-1$ 时收敛; $x=1$ 不收敛. $x\in[-1,1)$.

(6). $f(x)=\ln\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)=\ln(1-x^5)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x^5)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-x)^n}{n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n}$, $x=1$ 不符合定义域 $x\in[-1,1)$

(7). $\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$, $f(x)=\frac{d\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right)}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot\frac{x^{n-2}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{x^{n-1}}{(n+1)!}$

由题意 $x\neq 0$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(8). $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$. $x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n)!}$, $\int_0^x x\cos x\,dx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)(2n)!}x^{2n+2}$, $x\in R$.

第十章 级数
第七节 综合例题

24. 把 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展成麦克劳林级数，并求 $f^{(7)}(0),f^{(8)}(0)$.

$$\cancel{f(x)}=f'(x)=\arctan x$$

$$f(x)=\int_0^x\arctan x\,dx.$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$$

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^x x^{2n+1}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n+2)}\cdot x^{2n+2}.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)(2n+1)}\cdot x^{2(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$$

∴ ~~当……~~. 当 x 的指数为7时，系数为0

$\therefore f^{(7)}(0)=0$

当 x 的系数为8时，$n=4$

$$\therefore\ \frac{(-1)}{8\times7}\cdot x^8=\frac{f^{(8)}(0)}{8!}\cdot x^8$$

$$\therefore f^{(8)}(0)=-6!$$

第十章 级数
第七节 综合例题

25. 把 $f(x)=\dfrac{1}{x(x+3)}$ 在 $x=1$ 处展开成泰勒级数.

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+(x-1)}-\frac{1}{4+(x-1)}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+(x-1)}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{x-1}{4}\right)^n\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\right)$$

由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{4^{n+2}}}{1-\frac{1}{4^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}-1}{4^{n+2}}\cdot\frac{4^{n+1}}{4^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot 4=1$

$\therefore R=1$，$x\in(0,2)$，当 $x=0$ 或 $x=2$ 时

$$\lim_{n\to\infty}u_{n+1}\cdot(x-1)^n\neq 0$$

第十章 级数
第七节 综合例题

26. 证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12}$, $-\pi\le x\le\pi$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$, $0\le x\le 2\pi$.

(1) 由题, $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $(n=1,2,\cdots)$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$\therefore -\frac{x^2}{4}=-\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$. 为余弦展开

即证函数 $-\frac{x^2}{4}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为上式

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{4}x^2dx=-\frac{\pi^2}{12}\times 2=-\frac{\pi^2}{6}$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{4}x^2\cos nx\,dx=\frac{-\cos n\pi}{n^2}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$\therefore -\frac{x^2}{4}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12}$

(2) 由题. $-\frac{1}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx=\frac{1}{4}x^2-\frac{\pi}{2}x$, 同(1)为余弦展开

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}x^2-\frac{\pi}{2}x)dx=-\frac{\pi^2}{3}$, $\frac{a_0}{2}=-\frac{\pi^2}{6}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}x^2-\frac{\pi}{2}x)\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot x\cdot\cos nx\Big|_0^{2\pi}$

$=\frac{\cos 2n\pi}{n^2}=\frac{1}{n^2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$, $0\le x\le 2\pi$

第十章 级数
第七节 综合例题

27. 设 $f(x)$ 是可积函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上恒有 $f(x+\pi)=f(x)$，求 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶系数 a_{2n-1}.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$a_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$a_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-f(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=$

∵ π 为函数 $\int_0^{\pi}f(x)dx$ 的周期

∴ $\int_0^{\pi}f(x)dx=0$

∴ $a_{2n-1}=0$

第十章 级数
第七节 综合例题