1. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的前n项的和$S_n = \dfrac{2n}{n+1}$，求此级数的一般项，并判别级数的收敛性.

解：$a_1 = S_1 = 2.$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$ 收敛.

2. 判别下列级数的敛散性，并求出其中收敛级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n+(-2)^n}{3^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^n}{3^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，故级数发散.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

故级数发散.

(3) $a_n=\left[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]\cdot\dfrac{1}{2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{2n+1}\right]=\dfrac{1}{2}$，级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ 不存在，故级数发散.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{-1}{n+1}\cdot n}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$，故级数发散.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n+(-2)^n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ 为发散级数，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=-2$ 收敛.

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n+(-2)^n}{3^n}$ 发散

(7) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right]$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right]=\dfrac{1}{4}$，级数收敛.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{e}{3}\right)^n=\dfrac{-\frac{e}{3}}{1-\left(-\frac{e}{3}\right)}=\dfrac{-\frac{e}{3}}{\frac{3+e}{3}}=\dfrac{-e}{3+e}$，级数收敛.

(9) $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$\therefore S_n=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\cdots+\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$. 级数收敛.

第十章 级数
第一节 数项级数的基本概念和性质

3. 分别就$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛与发散两种情况讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.001)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$.

①当$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=S$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.001)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}0.001=S+\infty=\infty$，级数发散.

(2). $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+100}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$. 级数收敛.

(3). ∵$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\infty$, ∴$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$发散.

②当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.001)$，不确定. 例. $u_n=-0.001$ 级数收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+100}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$. 级数发散.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$不确定. 例 $u_n=n$ 与 $\frac{1}{u_n}=\frac{1}{n}$，其级数皆发散.

例 $u_n=n(n+1)$，其级数发散

$\frac{1}{u_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，其级数收敛.

第十章 级数

第一节 数项级数的基本概念和性质

4. 求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$的和.

解：$u_n=\ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\frac{n}{n+1}$

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

第十章 级数

第一节 数项级数的基本概念和性质

5. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}$的和.

解:

$$u_n=\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}u_n=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

第十章 级数

第一节 数项级数的基本概念和性质