1. 讨论下列级数的收敛性，如果收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2^n}\right)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{\sqrt{n^3-n+1}}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$；

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^3+n^2}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$；

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$；

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5n-4}{4n+3}\right)^n$；

(10) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$；

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(\ln n)\right]$；

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{n}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+1}\right]$.

(1). $|u_n|=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ∵ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$的级数收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$绝对收敛.

(2). $|u_n|=\frac{n+1}{2^n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}<1$. ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2^n}\right)$绝对收敛

(3). $|u_n|=\left|\frac{\arctan n}{\sqrt{n^3-n+1}}\right|<\left|\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n^3-n+1}}\right|$ 而∵ $\frac{1}{\sqrt{n^3-n+1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ∵ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛

(4). $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq0$，且 $u_{n+1}>u_n$ $\left(\frac{n+1}{n+2}>\frac{n}{n+1}\right)$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}$发散

(5). $|u_n|=\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$，∵ $\frac{1}{n}$的级数发散. $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散

∵ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0$ 且 $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}$ (由 $f(x)=x-\ln x$ 单调增加在$x>1$时)

∴ 该交错级数条件收敛

(6) $|u_n|=\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}$ ∵ $\frac{1}{\sqrt{n}}$级数发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散

∵ $\exists n$，$\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{3}{\sqrt{n+1}}$ 即 $|u_n|<|u_{n+1}|$，

∴ 该级数发散

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^3+n^2}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$ 而 $|u_n|=\left|1-n\sin\frac{1}{n}\right|=1-n\sin\frac{1}{n}$

$1-n\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}$ ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

(8) $|u_n|=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\cdots+\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

$=\sqrt[3]{n+1}-1$. 原故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散.

∵ $\lim_{n\to\infty}|u_n|=\frac{1}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}(n+1)^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}=0$

且 $|u_n|=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}>\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}=u_{n+1}$

由 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$，$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1+x)^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)<0$ 故 $u_n>u_{n+1}$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

第十章 级数
第三节 任意项级数

(9). $|u_n| = \left[\frac{5n-4}{4n+3}\right]^n$　$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{5n-4}{4n+3}\right| = \frac{5}{4} > 1$

$\therefore$ ~~$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛~~，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散.

(10). $|u_n| = \left|\sin(n\pi + \frac{1}{\ln n})\right| = \left|\sin\frac{1}{\ln n}\right|$　$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$，$\because \sin\frac{1}{\ln n}$ 单调递减

$\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{\ln n}) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{\ln n}$ 收敛.

$\because \sin\frac{1}{\ln n} \sim \frac{1}{\ln n}$，$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$，$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}|u_n|$ 发散

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi + \frac{1}{\ln n})$ 条件收敛.

(11) $|u_n| = \frac{\pi}{2} - \arctan(\ln n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$，且 $\frac{\pi}{2} - \arctan x$ 单调递减

$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\ln n)\right]$ 收敛.

$n > \ln n$　$\therefore \frac{\pi}{2} - \arctan(\ln n) > \frac{\pi}{2} - \arctan n > \frac{1}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

(12). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$，由题知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 绝对收敛.

令 $(-1)^n\frac{n}{n^2+1} = u_n$.　$|u_n| = \frac{n}{n^2+1}$　$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $x \geq 1$ 时递减

$\therefore u_n > u_{n+1}$　$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 0$.　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$ 收敛.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$ 条件收敛.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都绝对收敛，讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 的收敛性.

解：∵ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 绝对收敛

∴ $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. ∃N，当 $n>N$ 时

有当 $|u_n|<1$ 时 有 $|u_n^2|\le|u_n|$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 绝对收敛.

同理可证 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 绝对收敛.

∵ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛

∃$N\in N^+$，使 $n>N$ 时

$|v_n|<1$.

∴ $|u_nv_n|\le|u_n|$.

由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛

由题知，$(u_n+v_n)^2=u_n^2+2v_nu_n+v_n^2$

u_n^2，v_nu_n，v_n^2 都绝对收敛

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 绝对收敛

第十章 级数
第三节 任意项级数

3.设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 的敛散性.

解：$|u_n| = \cancel{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}\ \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$

∵ $\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})=0$

由 $f(x)=\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})$ 知 $f(x)$ 单调递减

∴ $u_n > u_{n+1}$

∴ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

$|u_n| = \ln(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}) = \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ 故 $|u_n|$ 的级数

$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \ln\left(\frac{1+1}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right.}$

发散

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

$u_n^2 = |u_n|^2 = \ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n}$ 故 $|u_n|^2$ 的级数发散

综上. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散

第十章 级数

第三节 任意项级数