9-1. 05011213 刘莹. 13261762

1. 计算下列第一类曲线积分.

(1) $\int_L x\mathrm{d}l$，其中 L 为抛物线 $y=2x^2-1$ 上介于 $x=0$ 与 $x=1$ 之间的一段;

(2) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成区域的边界;

(3) $\int_L y^2\mathrm{d}l$，其中 L 为摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

(4) $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$，其中 L 是 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le \sqrt{3})$;

(5) $\int_L \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}l$，其中 L 是对数螺线 $x=e^{\theta}\cos\theta, y=e^{\theta}\sin\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$;

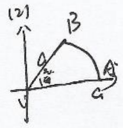
(6) $\oint_L xy(x+y)\mathrm{d}l$，其中 L 是双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 在第一象限的一支;

(7) $\int_L (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}l$，$L$ 为双曲螺线 $\rho\theta=1$ 上 $\theta=\sqrt{3}$ 从到 $\theta=2\sqrt{2}$ 的一段.

解：(1). $y'=4x$, $\int_L x\mathrm{d}l=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+16x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\int_0^1\sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}(1+16x^2)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+16x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{48}\cdot(17\sqrt{17}-1)$

(2)



$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\int_{OA}e^{x}\cdot\mathrm{d}x+\int_{OB}e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_{AB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l$

$=\int_0^a e^{x}\cdot\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}e^{\sqrt{2}x}\mathrm{d}(\sqrt{2}x)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{a}\cdot\sqrt{a^2+0}\,\mathrm{d}\theta$

$=e^{a}-1+e^{a}-1+a\cdot e^{a}\cdot\frac{\pi}{4}=e^{a}(2+\frac{\pi}{4}a)-2$

(3). $\int_L y^2\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$

$=\int_0^{2\pi}2a^3\cdot(2\sin^2\frac{t}{2})^2\cdot\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a^3\times2\times2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5u\,\mathrm{d}u$

令 $u=\frac{t}{2}$ 原式 $=32a^3\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3$

(4). $x'(t)=a\cdot t\cdot\cos t$, $y'(t)=a\cdot t\sin t$, $x^2+y^2=a^2(\cos^2t+\sin^2t+2\sin t\cos t\cdot t-2\sin t\cos t\cdot t+t^2(\sin^2t+\cos^2t))$

$=a^2(1+t^2)$ $\therefore\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l=\int_0^{\sqrt{3}}a\cdot\sqrt{1+t^2}\cdot a\cdot t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{3}\cdot(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{7}{3}a^2$

(5). $x^2+y^2=e^{2\theta}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=e^{2\theta}$, $x'=e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)$, $y'=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$

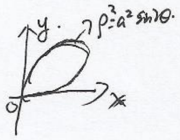
$x'^2+y'^2=e^{2\theta}\cdot2=2e^{2\theta}$

$\therefore\int_L\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}\ln e^{2\theta}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{\theta}\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi}\theta e^{\theta}\mathrm{d}\theta$

$=2\sqrt{2}\cdot e^{\theta}(\theta-1)\Big|_0^{2\pi}=2\sqrt{2}(e^{2\pi}(2\pi-1)+1)$

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

1.(6) 由题意 L: $\rho^2=a^2\sin 2\theta \Rightarrow \rho=a\cdot\sqrt{\sin 2\theta}\cdot (\rho')^2=\dfrac{a^2\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}$



$\therefore \rho^2+\rho'^2=\dfrac{a^2}{\sin 2\theta}$

$xy(x+y)=a\cdot\sqrt{\sin 2\theta}\cdot\cos\theta\cdot a\cdot\sqrt{\sin 2\theta}\cdot\sin\theta\cdot(a\sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta+a\sqrt{\sin 2\theta}\sin\theta)$

$\therefore xy\cdot(x+y)\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=2a^4\cdot\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos\theta+\sin\theta)$

$\therefore \oint_L (x+y)xy\,dl=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^4[\cos^3\theta\sin^2\theta+\sin^3\theta\cos^2\theta]d\theta$

$=2a^4\cdot[\int_0^1(1-u^2)u^2du+\int_0^1(1-t^2)t^2dt]$ 令 $u=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ 替换

$=4a^4\int_0^1(1-v^2)v^2dv$，而积分式相同可统一 $=4a^4(\frac{1}{3}v^3-\frac{1}{5}v^3)|_0^1=\frac{8}{15}a^4$

(7). $\rho=\frac{1}{\theta}$, $\rho'=\frac{-1}{\theta^2}$ $\therefore \rho^2+\rho'^2=\dfrac{\theta^2+1}{\theta^4}$

$x^2+y^2=(\frac{1}{\theta}\cdot\cos\theta)^2+(\frac{1}{\theta}\sin\theta)^2=\frac{1}{\theta^2}$

$\therefore \int_L(x^2+y^2)dl=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\theta^3\cdot\frac{1}{\theta^2}\cdot\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_3^8\sqrt{1+u}\,du$，令 $u=\theta^2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(1+u)^{\frac{3}{2}}|_3^8=\frac{1}{3}\cdot(27-8)=\frac{19}{3}$

2. 计算下列第一类曲线积分.

(1) $\int_L (x^2+y^2)z\mathrm{d}l$，其中 L 为锥面螺线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t$ 上从 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段;

(2) $\int_L \frac{\mathrm{d}l}{x^2+y^2+z^2}$，其中 L 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上 $t=0$ 到 $t=2$ 的一段;

(3) $\int_L x^2yz\mathrm{d}l$，L 为折线 $ABCD$，其中 $A(0,0,0), B(0,0,2), C(1,0,2), D(1,3,2)$;

(4) $\oint_L |y|\mathrm{d}l$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x=y\end{cases}$;

(5) $\int_L (\boldsymbol{u})_s \mathrm{d}l$，其中 $L: x=2t+1, y=t^2, z=t^3+1\ (0\le t\le 1), \boldsymbol{u}=(z,x,y)$，$s$ 为 L 的切向量，指向 t 增加的方向.

(1) $(x^2+y^2)\cdot z = t^3$，$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2 = 2+t^2$.

$\therefore \int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}l = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2+t^2}\cdot t^2\mathrm{d}t^2$ 令 $t^2=u$

原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 u\cdot\sqrt{2+u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u\cdot(2+u)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(2+u)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1\right]$

$=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} - \frac{2}{15}(3^{\frac{5}{2}}-2^{\frac{5}{2}}) = \frac{8}{15}\sqrt{2} - \frac{1}{5}\sqrt{3}$.

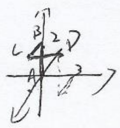
(2) $x^2+y^2+z^2 = e^{2t}+e^{2t} = 2\cdot e^{2t}$，$x'(t)=e^t(\cos t-\sin t)$，$y'(t)=e^t(\sin t+\cos t)$

$z'(t)=e^t$. $x'^2+y'^2+z'^2 = 3\cdot e^{2t}$

$\therefore \int_L \frac{\mathrm{d}l}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^2 \frac{1}{2\cdot e^{2t}}\cdot\sqrt{3}\cdot e^t\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}(-e^{-t})\Big|_0^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{1}{e^2})$

(3)



$AB:\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}(0\le z\le 2)$

$BC:\begin{cases}y=0\\ z=2\end{cases}(0\le x\le 1)$

$CD:\begin{cases}x=1\\ z=2\end{cases}(0\le y\le 3)$

对以上把如 y 看作参量有 $\sqrt{x'^2(y)+y'^2+z'^2(y)}=1$

$\therefore \int_{AB} x^2yz\mathrm{d}l = \int_{AB} 0\mathrm{d}l = 0$

$\int_{BC} x^2yz\mathrm{d}l = \int_{BC} 0\mathrm{d}l = 0$

$\int_{CD} x^2yz\mathrm{d}l = \int_0^3 2y\mathrm{d}y = y^2\Big|_0^3 = 9$

$\therefore \int_L x^2yz\mathrm{d}l = \int_{AB} x^2yz\mathrm{d}l + \int_{BC} x^2yz\mathrm{d}l + \int_{CD} x^2yz\mathrm{d}l = 9$.

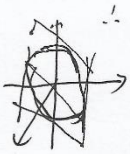
第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

2.

(4) $x'(y)=1,\ y'=1$

由 $2y^2+z^2=2 \Rightarrow z'^2=2\cdot\frac{y^2}{1-y^2}$

$\therefore x'^2+y'^2+z'^2=\frac{2}{1-y^2}$



$\therefore \oint_L |y|\,dl = 2\times 2\cdot\int_0^1 y\cdot\sqrt{\frac{2}{1-y^2}}\,dy = 4\sqrt{2}\cdot\int_0^1 y\cdot(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy$

$=4\sqrt{2}\cdot(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_1^0 = 4\sqrt{2}.$

(5) $x'=2,\ y'=2t,\ z'=3t^2.$

$\therefore \vec{s}=(x',y',z'),\ \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=|\vec{s}|$

$(u)_s = u\cdot\vec{s}\cdot\frac{1}{|\vec{s}|}$

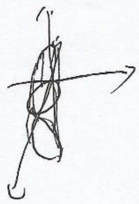
$\therefore \int_L (u)_s\,dl = \int_0^1 u\cdot\vec{s}\cdot\frac{1}{|\vec{s}|}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \int_0^1 u\cdot\vec{s}\,dt$

$=\int_0^1 (3t^4+2t^3+4t^2+2t+2)\,dt$

$=\left(\frac{3}{5}t^5+\frac{1}{2}t^4+\frac{4}{3}t^3+t^2+2t\right)\Big|_0^1$

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+3=\frac{163}{30}$

3. 求圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 所截取的有限部分的面积.



解:

$\cancel{S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} z\,dl}$

$ds=z\cdot dl$

$x^2+y^2=2ax \Rightarrow \rho(\theta)=2a\cos\theta.\quad \rho'=-2a\sin\theta$

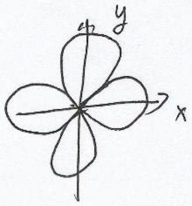
$\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}=2a.\quad ,dl=2a\,d\theta.$

$\therefore S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a\sqrt{4a^2-4a^2\cos^2\theta}\cdot d\theta.$

$=4a\cdot 2a\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin\theta|\,d\theta=16a^2.$

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

4. 求双纽柱面$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$被圆锥面$x^2+y^2=z^2$所截下的有限部分的面积.



解：$\rho^4=a^2\rho^2\cos2\theta$

$\rho^2=a^2\cos2\theta$

$\rho'^2=\frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos2\theta}$

$\rho^2+\rho'^2=\frac{a^2}{\cos2\theta}$

$S=\oint z\,dl$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos2\theta\cdot\cos^2\theta+a^2\cos2\theta\sin^2\theta}\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}a^2\,d\theta=2\pi a^2$

第九章 曲线积分与曲面积分
第一节 第一类曲线积分

5. 设曲线 $y=\ln x\left(\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}\right)$ 上任一点的线密度为 $\mu=x^2$，求此曲线的质量.

解：$M=\int_L x^2 dl$

$y'=\frac{1}{x}$

$1+y'^2=1+\frac{1}{x^2}$

$\therefore M=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx$

$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+x^2}\,dx^2$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}=\frac{1}{3}(4^3-2^3)$

$=\frac{56}{3}=18\frac{2}{3}$.

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

6. 设半圆弧$y=\sqrt{R^2-x^2}$，其线密度为常数μ，求它的质心对x轴的转动惯量.

解：$\rho=R$. $\rho'=0$. $\rho^2+\rho'^2=R^2$

$\therefore M=\int_L \mu dl=\int_0^{\pi}\mu\cdot\sqrt{R^2}\,d\theta=\pi R\mu$.

$\bar{y}=\dfrac{\int_L \mu\cdot y dl}{M}=\dfrac{\int_0^{\pi}\mu\cdot R\cdot R\sin\theta d\theta}{M}=\dfrac{2R}{\pi}$

由对称性知 $\bar{x}=0$

$\therefore(\bar{x},\bar{y})=(0,\frac{2R}{\pi})$

$I_x=\int_L\mu\cdot y^2 dl=\int_0^{\pi}\mu\cdot R^2\sin^2\theta\cdot R d\theta$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mu R^3\sin^2\theta d\theta$

$=\mu\cdot R^3\times2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\mu R^3$

$\therefore I_x=\frac{1}{2}\pi\mu R^3$

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

7. 设曲线 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在第一象限的一段，其线密度 $\mu=1$.

(1) 求 L 的形心;

(2) 求 L 对 x 轴，y 轴的转动惯量.

(1) 设 $x=a\cdot\cos^3 t$, $y=a\cdot\sin^3 t$

$x'_t=a\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)$, $y'_t=a\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t$

$\therefore x'^2+y'^2=9a^2\cdot\sin^2 t\cos^2 t$

$\therefore dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=3a\cdot|\sin t\cos t|\,dt$

$\therefore M=\mu\cdot\int_L dl=3a\mu\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d\sin t=\frac{3}{2}a\mu$.

$\mu\int_L y\,dl=3a^2\mu\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,d\sin t=\frac{3}{5}a^2\mu$.

$\therefore \bar{y}=\dfrac{\mu\int_L y\,dl}{\mu\int_L dl}=\frac{2}{5}a$

由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}$, $\therefore(\bar{x},\bar{y})=(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a)$

(2) $I_y=\mu\int_L y^2\,dl=\mu\cdot 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^6 t\sin t\,d\sin t=3a^3\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\,d\sin t$

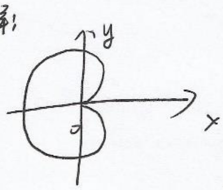
$=3a^3\mu\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}a^3\mu$

由对称性知 $I_x=I_y=\frac{3}{8}a^3\mu=\frac{3}{8}a^3$

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

8. 求心形线 $\rho = a(1-\cos\theta)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 的形心.

解:



由对称性知 $\bar{y}=0$

$M = \int_L \mu \, dL$

$\rho' = a \cdot \sin\theta$

$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 \cdot (2-2\cos\theta) = 2a^2(1-\cos\theta)$

$\therefore M = \mu \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos\theta)} \, d\theta$

$= 2a \cdot \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} \, d\theta = 8a\mu$

$\oint_L x\mu \, dx = \mu \cdot \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cos\theta \cdot \sqrt{2} a \cdot \sqrt{1+\cos\varphi} \, d\varphi$

$= 4a^2\mu \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{\theta}{2} \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) d\varphi$

$= -8a^2\mu \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right) d\cos\frac{\theta}{2} =$

$= -8a^2\mu \times \frac{4}{5} = -\frac{32}{5}a^2\mu$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{-\frac{32}{5}a^2\mu}{8a\mu} = -\frac{4}{5}a$

$\therefore (\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{4}{5}a, 0\right)$

9. 设 L 是圆柱螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt\ (0 \le t \le 2\pi)$，其上任一点处的线密度与该点到 xOy 面的距离成正比，且已知在点 $(a, 0, 2\pi b)$ 处的线密度为 2，求 L 的质心.

解：

$x' = a \cdot -\sin t,\quad y' = a \cdot \cos t,\quad z' = b$

$\therefore \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore dl = \sqrt{a^2+b^2}\,dt,\quad \mu = kz = kbt$

$\therefore M = \int_L \mu\, dl = kb\int_0^{2\pi} t \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2} \cdot k \cdot b \cdot 2\pi^2$

$\int_L x\mu\, dl = kb \cdot \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} t \cdot a \cdot \cos t\, dt$

$= abk\sqrt{a^2+b^2} \cdot (t \cdot \sin t + \cos t)\Big|_0^{2\pi} = 0$

$\int_L y\mu\, dl = abk\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} t \cdot \sin t\, dt$

$= abk \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,(-t \cdot \cos t + \sin t)\Big|_0^{2\pi}$

$= abk \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot -2\pi = -2\pi abk\sqrt{a^2+b^2}$

$\int_L z\mu\, dl = b^2k\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} t^2\,dt$

$= b^2k \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{8}{3}\pi^3$

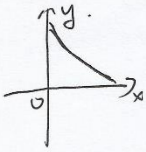
$\therefore \bar{x} = 0,\quad \bar{y} = \dfrac{-2\pi abk\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi^2 bk\sqrt{a^2+b^2}} = -\dfrac{a}{\pi}$

$\bar{z} = \dfrac{\frac{8}{3}\pi^3 b^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi^2 kb\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{4}{3}\pi b$

$\therefore (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, -\frac{a}{\pi}, \frac{4}{3}\pi b)$

第九章 曲线积分与曲面积分
第一节 第一类曲线积分

10. 设曲线 $L:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，其上任一点 (x,y) 处的线密度 $\mu=\sqrt{\dfrac{xy}{x+y}}$，求 L 对位于原点处单位质点的引力 $\boldsymbol{F}$.



设 $\sqrt{x}=\cos^2 t$，$\sqrt{y}=\sin^2 t$

由对称性可知 $F_x=F_y$.

$$F=\frac{Gm\,dm}{r^2},\quad dm=\mu dl,\quad r^2=x^2+y^2$$

$$x'=4\cos^3 t\sin t,\quad y'=4\sin^3 t\cos t$$

$$\therefore \sqrt{x'^2+y'^2}=4|\sin t\cos t|\cdot\sqrt{\sin^4 t+\cos^4 t}$$

$$\therefore \mu dl=4\sin^3 t\cos^3 t\,dt$$

$$F_y=F\cdot\frac{y}{r}=\frac{Gm\mu dl}{r^3}\cdot y$$

$$\therefore F_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}Gm\cdot\frac{4\sin^7 t\cdot\cos^3 t}{(\sin^8 t+\cos^8 t)^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$\cancel{=Gm\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^7}$$

$$=Gm\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^7 t}{(1+\tan^8 t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$=Gm\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^7 t\,d\tan t}{(1+\tan^8 t)^{\frac{3}{2}}}=Gm\cdot 4\times\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan^8 t}{(1+\tan^8 t)^{\frac{3}{2}}}$$

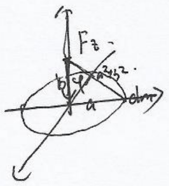
$$=Gm\,4\times\frac{1}{8}\times(-2)\cdot(1+\tan^8 t)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-Gm\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan^8 t}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=Gm=G.$$

$$\therefore F=(G,G)$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分

11. 设质量均匀分布的曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$，求 L 对位于点 $P(0,0,b)$ 处质量 m 为的质点的引力.



解：由对称性 $F_x=F_y=0$

$$F_z=\frac{Gm\cdot dm}{r^2}\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad r^2=a^2+b^2.$$

$$\therefore F_z'=\oint_L\frac{Gm\cdot\mu\, dl}{r^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{Gmb\mu}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\oint_L dl,\quad dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=a.$$

$$=\frac{Gmb\mu}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\int_0^{2\pi}a\,d\theta=\frac{2\pi ab\,Gm\mu}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_z=-\frac{2\pi G\mu abm}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore F=\left(0,0,-\frac{2\pi G\mu abm}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第一节　第一类曲线积分