北京理工大学 2021-2022 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准

2022年6月24日

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. 1
2. （$\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$）
3. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 0
5. -1

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 解： 法向量 $\vec{n}=\{y^x\ln y, xy^{x-1},-1\}|_{(2,2,4)}=\{4\ln 2,4,-1\}$ …………(3 分)

切平面方程为 $4\ln 2(x-2)+4(y-2)-(z-4)=0,$

即 $(4\ln 2)\ \boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}-8\ln 2-4=0$ …………(5 分)

2.

解: $\frac{\partial f}{\partial x}=ae^{ax}(x+y^2+by)+e^{ax}$， $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(2,-2)}=ae^{2a}(2+4-2b)+e^{2a}=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{ax}(2y+b)$， $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(2,-2)}=e^{2a}(-4+b)=0$

$\Rightarrow b=4, a=\frac{1}{2}.$ …………(3 分)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=a^2e^{ax}(x+y^2+by)+2ae^{ax},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=ae^{ax}(2y+b),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^{ax}.$$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(2,-2)}=\frac{e}{2}>0,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}|_{(2,-2)}=0,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{(2,-2)}=2e.$$

$B^2-AC=-e^2<0,$

所以 $f(x,y)$ 在驻点 $(2,-2)$ 处取得极值，且为极小值。 …………(5 分)

3. 解：记表面方程为 $\boldsymbol{z}=\sqrt{3-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}$ 的部分为 $\boldsymbol{S}_1$，另一部分记为 $\boldsymbol{S}_2$， 则两部分在 $\boldsymbol{xOy}$ 平面的投影均为： $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\leq 2,$

对 S_1 有 $dS=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}dxdy,$

对 S_2 有 $dS=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy,$ …………(2 分)

所以表面积

$$S=\iint_{S_1}dS+\iint_{S_2}dS$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2-y^2}}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3-r^2}}rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+r^2}rdr$$

$$=\frac{16\pi}{3}$$ …………(5 分)

4. 解： $P=\frac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2},Q=\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$ 在 R^2 上具有连续偏导.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2xy^2-2x(1+x^2)^2}{\left((1+x^2)^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$ …………(1 分)

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2}dx+\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}dy$$ …………(2 分)

$$=\int_0^y\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}dy$$

$$=\arctan\frac{y}{1+x^2}$$ …………(4 分)

所以 $u=\arctan\frac{y}{1+x^2}+C.$ …………(5 分)

三、(8 分) 解：从 $(2,1)$ 到 $(0,0)$ 的方向 $\vec{l}=\{-2,-1\}$，

其方向余弦 $\vec{e}=\{-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\}$ ……………（2 分）

记 $u=xy,v=x-y$，则

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=y\varphi'_u(u.v)+\varphi'_v(u,v);\ f'_x(2,1)=2; \\ f'_y(x,y)=x\varphi'_u(u,v)-\varphi'_v(u,v);\ f'_y(2,1)=1; \end{array}\right\}$$ ……………（5 分）

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(2,1)}=f'_x(2,1)\cdot(-\frac{2}{\sqrt{5}})+f'_y(2,1)\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$$ ……………（8 分）

四、(6 分) **解：** L 为圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=36$ 的逆时针方向，记 L_1 为椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的逆时针方向. L_1包含在L内，记L_1与L所围区域为D.

$$X=\frac{-y}{x^2+4y^2},\quad Y=\frac{x}{x^2+4y^2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{x^2+4y^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}$$ …………(2分)

在不含原点的复连通区域D上应用格林公式，有

$$\oint_{L-L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\iint_D(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y})dxdy=0$$

$$\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}-\oint_{L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=0$$

$$I=\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\oint_{L_1}\frac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}$$ …………(4分)

$$=\oint_{L_1}-ydx+xdy$$

$$=\iint_{D:x^2+4y^2\le 1}2dxdy=\pi.$$ (由格林公式) …………(6分)

(注：也可写出椭圆的参数方程，然后转化为定积分计算)

五、(8 分)

解：
$$I=\iiint_\Omega(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2dv$$

$$=\iiint_\Omega[(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2+2(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac})]dv$$

$$=\iiint_\Omega[(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2+(\frac{z}{c})^2]dv$$ …………(2 分)

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$$ ....(5 分)

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{4\pi R^5}{15}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}).$$ ....(8 分)

六、(8 分)

解： 曲线C的参数方程为：$\begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ y=\frac{R}{2}\sin t \\ z=R\sin\frac{t}{2} \end{cases}$ $,0\le t\le 2\pi.$ ....(3 分)

$$I_x+I_y+I_z=\int_C\sqrt{x}(y^2+z^2)ds+\int_C\sqrt{x}(z^2+x^2)ds+\int_C\sqrt{x}(x^2+y^2)ds$$

$$=2\int_C\sqrt{x}R^2ds=4R^2\int_{C^+}\sqrt{x}ds,$$

其中C^+是C上$y\ge 0$部分. ....(5 分)

由于$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}dt=\frac{R}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}dt,$

所以， $I_x+I_y+I_z=4R^2\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t}\cdot\frac{R}{2}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}dt$

$$=2R^{\frac{7}{2}}\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\sqrt{2-\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=R^{\frac{7}{2}}(2+\pi).$$ ....(8 分)

七、(8 分) 解：由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}}|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{2(n+1)(2n+1)}=0,-\infty<x<+\infty,$$

据比值判别法知，次幂级数收敛域为：$(-\infty,+\infty)$ ....(2 分)

设和函数 $S(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

则 $S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

于是有

$$S'(x)+S(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x,-\infty<x<\infty \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

那么，和函数$S(x)$是如下初值问题的解：

$$\begin{cases}S'(x)+S(x)=e^x\\ S(0)=1\end{cases}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

解得

$$S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),-\infty<x<\infty. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8\text{ 分})$$

八、(8 分)

解： 由获立克莱收敛定理得：$S(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1)\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ x-1, & x\in(1,\pi)\end{cases}$

由题意，$f(x)$需做偶延拓，$\therefore\quad S(-x)=S(x)$ ············(2 分)

$S(x)$在$(-\pi,0)$内的表达式为：

$$S(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-1,0)\\ \frac{1}{2}, & x=-1\\ -x-1, & x\in(-\pi,1)\end{cases}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

$$S(-4)=S(2\pi-4)=2\pi-5,\quad S(2\pi-1)=S(-1)=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8\text{ 分})$$

九、(8 分) 解：设$S:x^2+y^2\le 4,z=0$， 利用高斯公式

$$I=(\oiint_{\Sigma+S}-\iint_S)x^3dydz+2xz^2dzdx+3y^2zdxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=-\iiint_V 3(x^2+y^2)dV-0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\text{ 分})$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho\int_0^{4-\rho^2}dz \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6\text{ 分})$$

$$=-32\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8\text{ 分})$$

十、（6 分）证明：

(1) 因为

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})| =|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$\le \frac{1}{3}|x_n-x_{n-1}|\le \frac{1}{3^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le \frac{1}{3^{n-1}}|x_2-x_1| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛. …………(3 分)

(2) 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛，以及 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_{n+1}-x_1$,

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. …………(4 分)

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$，以及 $f(x)$是可导函数，

可得 $A=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=f(A)$，且$A\ne 0$,

$\frac{f(A)-f(0)}{A-0}=\frac{A-1}{A}<\frac{1}{3}$,

可得$0<A<\frac{3}{2}$. …………(6 分)