刘莹. 1320171072. 05611713

1. 计算下列第二类曲线积分.

(1) $\int_L \frac{1}{y}dx+(2y+\ln x)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 从 $A(1,1)$ 到 $B(2,4)$ 一段；

(2) $\int_L (e^x+y)dx-xdy$，其中 L 从 $A(1,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(-1,0)$；

$y^2=1-x^2$ $x^2+y^2=1$

(3) $\int_L xdy-ydx$，L 从 $O(0,0)$ 沿摆线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 到点 $A(2\pi,0)$；

(4) $\int_L (x+2y)dx+xdy$，其中 L 从点 $(0,1)$ 沿曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\ (x\ge 0)$ 到点 $(1,0)$；

(5) $\int_L (x^2+y^2)dy$，其中 L 从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $x=\begin{cases}\sqrt{y} & 0\le y\le 1\\ 2-y & 1<y\le 2\end{cases}$ 到点 $B(0,2)$；

(6) $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L 是折线 $y=1-|1-x|$ 上由 $O(0,0)$ 到 $A(2,0)$ 的一段；

(7) $\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$，$L$ 是以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线的逆时针方向；

(8) $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 沿逆时针方向；

(9) $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中 L 是曲线上 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段；

(10) $\int_L (1+2xy)dx+x^2dy$，L 为上半椭圆 $x^2+2y^2=1$ 上从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$.

解：(1). $\int_L \frac{1}{y}dx+(2y+\ln x)dy=\int_1^2 [\frac{1}{x^2}+(2x^2+\ln x)\cdot 2x]dx=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx+\int_1^2 4x^3dx+2\int_1^2 x\cdot\ln x\,dx$

$=(-\frac{1}{x})\Big|_1^2+x^4\Big|_1^2+2(x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+16-1+4\ln 2-2+\frac{1}{2}=14+4\ln 2$

(2). $\int_L (e^x+y)dx-xdy=\int_1^{-1}(e^x+\sqrt{1-x^2})dx-x\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_1^{-1}(e^x+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=\int_1^{-1}e^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=e^x\Big|_1^{-1}+\arcsin x\Big|_1^{-1}=\frac{1}{e}-e-\pi$

(3). $\cancel{\int_L xdy-ydx}$ 由题可知 $0\le t\le 2\pi$ 曲线由 0 变到 2π

$\therefore \int_L xdy-ydx=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(\sin t)-(1-\cos t)(1-\cos t)dt$

$=\int_0^{2\pi}t\cdot\sin t-\sin^2 t-1+2\cos t-\cos^2 t\,dt$

$=\int_0^{2\pi}t\cdot\sin t-2\cos^2 t-2\,dt=(\sin t-t\cdot\cos t)\Big|_0^{2\pi}-2\times 4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-2\pi$

$=0-2\pi\cdot 1-0-2\pi-2\pi=-6\pi$

第九章　曲线积分与曲面积分
第二节　第二类曲线积分

1.

(4). 设 $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$，由题有 $\frac{\pi}{2}\ge t\ge 0$，即 t 由 $\frac{\pi}{2}$ 至 0 变化.

$\therefore \int_L (x+2y)dx+xdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left[(\cos^3 t+2\sin^3 t)\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)+\cos^3 t\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t\right]dt$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-3\cos^5 t\sin t-6\sin^4 t\cdot\cos^2 t+3\sin^2 t\cos^4 t)dt$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3\cos^5 t\,d\cos t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}6\cdot\sin^4 t(1-\sin^2 t)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3(1-\cos^2 t)\cos^4 t\,dt$

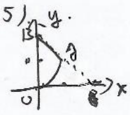
$=\int_0^1 3u^5du-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}6\cdot\sin^4 t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}6\cdot\sin^6 t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3\cos^4 t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3\cos^6 t\,dt$

$=\frac{1}{2}u^6\Big|_0^1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\cdot\sin^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin^6 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^4 t\,dt+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,dt$

$=\frac{1}{2}+3\cdot\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt\right]=\frac{1}{2}+3\cdot\left[\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right]$

$=\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{32}\pi$

(5)

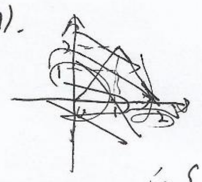


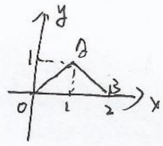
$\int_L (x^2+y^2)dy=\int_{\overset{\frown}{OA}}(x^2+y^2)dy+\int_{AB}(x^2+y^2)dy$

$=\int_0^1(y+y^2)dy+\int_1^2(4-4y+y^2+y^2)dy$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+(4-6+\frac{14}{3})=\frac{7}{2}$.

(6).





$y=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ -x+2, & 1\le x\le 2.\end{cases}$

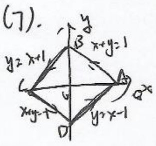
$\therefore \int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=\int_{OA}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy+\int_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$

$=\int_0^1(x^2+x^2)dx+\int_0^1(x^2-x^2)\cdot 1dx+\int_1^2(x^2+(x-2)^2)dx+\int_1^2(x^2-(x-2)^2)\cdot(-1)\cdot dx$

$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2(2x^2-4x+4)dx+\int_1^2(4x-4)dx=\int_0^1 2x^2+\int_1^2 2x^2dx+\int_1^2 4-4x\,dx$

$=\int_0^2 2x^2dx+2\int_1^2(2-2x)dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2+2(2x-x^2)\Big|_1^2=\frac{16}{3}+2(4-2\times 3)=\frac{4}{3}$.

1. (7).



$\oint_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_{AB}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{BC}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{CD}\frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{DA}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$

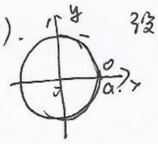
$\cancel{= \int_1^0 \frac{dx}{x+1-x} + \int_0^{-1}\frac{d}{-x+x+1}}$

$= \int_1^0 \left(\frac{dx}{x+1-x} + \frac{-dx}{x+1-x}\right) + \int_0^{-1}\left(\frac{dx}{-x+x+1} + \frac{dx}{-x+x+1}\right)$

$+ \int_{-1}^0 \frac{dx}{-x+x+1} + \int_{-1}^0 \frac{-dx}{-x+x+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x+1-x} + \int_0^1 \frac{1\cdot dx}{x+1-x}$

$= 0 + (-2) + 0 + 2 = 0$

(8).



设：$x = a\cdot\cos t$, $y = a\cdot\sin t$

$\therefore \oint \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi}\left[\frac{a\cdot\cos t + a\sin t}{a^2}\cdot a\cdot(-\sin t) - \frac{a\cos t - a\sin t}{a^2}\cdot a\cdot\cos t\right]dt$

$= \int_0^{2\pi}[-\sin t(\cos t+\sin t) - \cos t(\cos t - \sin t)]\,dt$

$= \int_0^{2\pi}[-\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t]\,dt$

$= \int_0^{2\pi}(-1)\,dt = -2\pi$

(9). 由题知，t 由0到1 $\therefore \int_L (x+y)dx + (y-x)dy$

$= \int_0^1 [(3t^2+2t+2)\cdot(4t+1) + (-t^2-t)\cdot 2t]\,dt$

$= \int_0^1 (10t^3+5t^2+8t+2)\,dt = \left(\frac{10}{4}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 2t\right)\Big|_0^1 = \frac{32}{3}$

(10). ~~设 $x=\cos t$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin$~~ 设 $x=\cos t$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t$

由题知 $0\le t\le\pi$.

$\therefore \int_L (1+2xy)dx + x^2dy = \int_0^{\pi}\left[(1+\sqrt{2}\cos t\sin t)\cdot(-\sin t) + \cos^2 t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right]dt$

$= \int_0^{\pi}(-\sin t)\,dt - \sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos t\cdot\sin^2 t\,dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}\cos^3 t\,dt$

$= \int_0^{\pi}(-\sin t)\,dt = -\int_0^{\pi}\sin t\,dt = -2.$

2. 计算下列第二类曲线积分.

(1) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 L 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线;

(2) $\oint_L \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$，其中 L 为折线 $ACBA$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$;

(3) $\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$，$L$ 为柱面螺线 $x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = bt$ 上对应 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段;

(4) $\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限与三坐标面的交线，其方向为从 $A(1,0,0)$，经 $B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ 再回到 A.

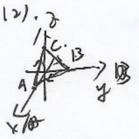
解：(1). 直线方向向量 $\vec{s} = (1,2,3)$

$\therefore$ 有 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x-1 \\ z = 3x-2 \end{cases}$

$\therefore \int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z = \int_1^2 (x + (2x-1)\cdot 2 + (x+2x-1-1)\cdot 3)\mathrm{d}x$

$= \int_1^2 (14x-8)\mathrm{d}x = (\frac{14}{2}x^2 - 8x)\Big|_1^2 = 7\times 3 - 8 = 13$

(2).



直线 AC: $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ 直线 CB $\begin{cases} y+z=1 \\ x=0 \end{cases}$ 直线 BA: $\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

$\therefore \oint_L \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \int_{AC}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z) + \int_{CB}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z) + \int_{BA}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z)$

$= \int_1^0 (1 - 0 + 0\cdot 1)\mathrm{d}x + \int_0^1 (0 - 1 + (-y))\mathrm{d}y + \int_0^1 (1 - 1\cdot(-1) + (1-x)\cdot 0)\mathrm{d}x$

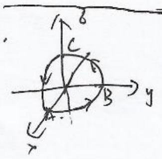
$= -1 + (-1) + -\frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{2}$

(3) $\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} [a\sin t \cdot a\cdot(-\sin t) + bt\cdot a\cos t + ab\cos t]\mathrm{d}t$

$= \cancel{\int_0^{2\pi} a^2(\cos^2 t - 1)\mathrm{d}t} = \int_0^{2\pi} -a^2\sin^2 t + ab\int_0^{2\pi} t\cos t\mathrm{d}t$

$= -a^2\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2 t + ab\cdot(t\sin t + \cos t)\Big|_0^{2\pi} = -\pi a^2.$

(4).



$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x^2+y^2=1\ (x\geq 0, y\geq 0) \\ z=0 \end{cases}$ $\overset{\frown}{BC}: \begin{cases} y^2+z^2=1\ (y\geq 0, z\geq 0) \\ x=0 \end{cases}$，$\overset{\frown}{CA}: \begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$

由对称性可知，$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) = \int_{\overset{\frown}{BC}} \vec{F}\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$

$= \int_{\overset{\frown}{CA}} \vec{F}\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z).$

$\therefore \oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$

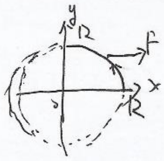
令 $x=\cos t, y=\sin t$ 原式 $= 3\int_{\overset{\frown}{AB}} (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}z = 3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 t\cdot(-\sin t) - \cos^2 t\cos t]\mathrm{d}t$

$= 3\times 2\times -\frac{2}{3}\times 1 = -4$

第九章 曲线积分与曲面积分

第二节 第二类曲线积分

3. 一力场由沿 x 轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 构成，试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时力场所做的功.



解：如图.

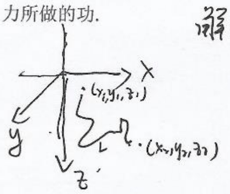
$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{l}$

$=\int_L |\vec{F}|dx+0dy=\int_R^0 |\vec{F}|dx=$

$=-|\vec{F}|\cdot R.$

第九章　曲线积分与曲面积分
第二节　第二类曲线积分

4. 设 z 轴与重力的方向一致，求质量为 m 的质点从位置 (x_1, y_1, z_1) 沿直线移到 (x_2, y_2, z_2) 时重力所做的功.



解：$W=\int_L \vec{F}\,dl$，$|\vec{F}|=mg$

$$\therefore W=\int_L 0dx+0dy+|\vec{F}|\cdot dz$$

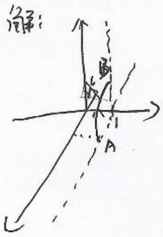
$$=\int_{z_1}^{z_2}|\vec{F}|dz=\int_{z_1}^{z_2} mg\,dz$$

$$=mg(z_2-z_1)$$

$F = k\rho$

5. 设有一力场，场力的大小与作用点到 z 轴的距离成反比(比例系数为 k)，方向垂直于 z 轴并指向 z 轴，试求一质点沿曲线 $x=\cos t$, $y=1$, $z=\sin t$ 从点 $(1,1,0)$ 依 t 增加的方向移动到点 $(0,1,1)$ 时场力所做的功.

解：



$d = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+\cos^2 t}$

$\therefore |\vec{F}| = k/d = k/\sqrt{1+\cos^2 t}$

$F_x = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha = |\vec{F}| \cdot \frac{x}{d} = k \cdot \frac{\cos t}{1+\cos^2 t}$

$F_y = |\vec{F}| \cdot \sin\alpha = |\vec{F}| \cdot \frac{y}{d} = k \cdot \frac{1}{1+\cos^2 t}$

$\therefore W = \int_L F_x dx + F_y dy + 0 dz$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \left(\frac{\cos t \cdot (-\sin t)}{1+\cos^2 t} + k \cdot \frac{1 \cdot 0}{1+\cos^2 t} \right) dx$

$= k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \, d\cos t}{1+\cos^2 t} = \frac{k}{2} \int_1^0 \frac{du^2}{1+u^2}$

$= \frac{k}{2} \cdot \ln(1+u^2) \Big|_1^0 = \frac{k}{2} \cdot \ln 2 = -\frac{k}{2} \ln 2$.

$|W| = \frac{k}{2} \ln 2$.

第九章　曲线积分与曲面积分
第二节　第二类曲线积分

6. 把 $\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$ 化成第一类曲线积分，其中 L 为:

(1) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$；

(2) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$. $(x^2-1)^2+y^2=1$ $\sqrt{1-(x-1)^2}$

$dx=\cos\theta\, dl$, $dy=\sin\theta\, dl$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, $\sin\theta=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

$\therefore$ (1) $y'=2x$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\sin\theta=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$.

$\therefore \int_L X dx+dy=\int_L \frac{X+2xY}{\sqrt{1+4x^2}}dl$

(2)

$y=\sqrt{2x-x^2}$, $y'=\frac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2-2x)$

$=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{2x-x^2+(1-x)^2}{(2x-x^2)}}}=\sqrt{2x-x^2}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=1-x$.

$\therefore \int_L X dx+Y dy=\int_L[\sqrt{2x-x^2}X+(1-x)Y]dl$

第九章　曲线积分与曲面积分
第二节　第二类曲线积分

$x'\ \sin t \quad \cos t \quad 3t^2.$

7. 把$\int_L X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分，其中 L 为 $x = 1-\cos t$，$y=\sin t$，$z=t^3$ 上从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 一段.

$x' = \sin t,\ y' = \cos t,\ z' = 3t^2$，其切向量 $\vec{s}\,(\sin t, \cos t, 3t^2)$

$dx = \cos\alpha\, dl,\ dy = \cos\beta\, dl,\ dz = \cos\gamma\, dl$

$$\cos\alpha = \frac{\sin t}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9t^4}} = \frac{y}{\sqrt{1+9z^{\frac{4}{3}}}}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos t}{\sqrt{1+9z^{\frac{4}{3}}}} = \frac{1-x}{\sqrt{1+9z^{\frac{4}{3}}}}$$

$$\cos\gamma = \frac{3t^2}{\sqrt{1+9z^{\frac{4}{3}}}} = \frac{3\cdot z^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1+9z^{\frac{4}{3}}}}$$

$$\therefore \int_L X dx + Y dy + Z dz$$

$$= \int_L \left[\frac{y\cdot X + (1-x)\cdot Y + 3z^{\frac{2}{3}}\cdot Z}{\sqrt{1+9z^{\frac{2}{3}}}}\right] dl$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第二节　第二类曲线积分