132017072. 刘壁. 050113

1. 求下列函数的极值点.

(1) $z=x^2+(y-1)^2$;

(2) $z=xy(a-x-y)$;

(3) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2(y-1)$

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=0\end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

$\therefore A=2, B=0, C=2$

$\therefore AC-B^2>0$, $A>0$.

$z|_{(0,1)}=0$ 为极小值.

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=ay-2y\cdot x-y^2$

$\frac{\partial z}{\partial y}=ax-2x\cdot y-x^2$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{a}{3}\\ y=\frac{a}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y$. $\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=a-2x-2y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x$

当 $x=0$, $y=0$ 时, $A=0$, $B=a$, $C=0$

$AC-B^2=-a^2<0$, 不存在极值

当 $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{a}{3}$ 时, $A=-\frac{2}{3}a$, $B=-\frac{1}{3}a$.

$C=\frac{-2}{3}a$. $AC-B^2=\frac{1}{3}a^2>0$,

故当 $a<0$ 时, $z=\frac{a^3}{27}$ 是极小值

当 $a>0$ 时, $z=\frac{a^3}{27}$ 是极大值.

(3). $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}(2x+2y^2+4y+1)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2y}(2y+2)$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 解得. $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4\cdot e^{2x}\cdot(x+y^2+2y+1)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cdot e^{2x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4\cdot e^{2x}(y+1)$

代入有 $A=2\cdot e$, $B=0$. $C=2e$.

$\because AC-B^2=4e^2>0$, $A>0$

故 $z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{e}{2}$ 为极小值.

第七章 多元函数微分学

第九节 多元函数的极值

2. 求由 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

原式等价于

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$.

表示球心为 $(1,-1,2)$ 半径为4的球面.

故当 $x=1,\ y=-1$ 时

最大值 $z=6$，最小值 $z=2$.

3. 求下列函数在指定区域$D$上的最大值和最小值.

(1) $z=x^3+y^3-3xy$，$D:0\le x\le 2,-1\le y\le 2$；

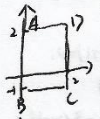
(2) $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$，$D:0\le x\le 2\pi,0\le y\le 2\pi$；

(3) $f(x,y)=e^{-xy}$，$D:x^2+4y^2\le 1$；

(4) $f(x,y)=1+xy-x-y$，$D$是由曲线$y=x^2$和直线$y=4$所围成的有界闭区域.

解：(1). $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 可得驻点 $(1,1)$, $(0,0)$.




在AB上, $x=0$, 有 $z=y^3$

$\frac{dz}{dy}=3y^2$, 令 $\frac{dz}{dy}=0$

有点 $(0,0)$

在BC上, $y=-1$

$z=x^3+3x-1$,

$\frac{dz}{dx}=3x^2+3$, 令 $\frac{dz}{dx}=0$

无解

在CD上, $x=2$

有 $z=y^3-6y+8$

$\frac{dz}{dy}=3y^2-6$.

令 $\frac{dz}{dy}=0$, 得

$y=\sqrt{2}$, 得点 $(2,\sqrt{2})$

在AD上, $y=2$, 代入 $z=x^3-6x+8$.

$\frac{dz}{dx}=3x^2-6$, ~~得...~~ 令 $\frac{dz}{dx}=0$

有 $x=\sqrt{2}$, 得点 $(\sqrt{2},2)$.

$z(0,0)=0$, $z(1,1)=-1$, $z(2,\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$.

$z(\sqrt{2},2)=8-4\sqrt{2}$, $z_A=z(0,2)=8$

$z_B=-1$, $z_C=13$, $z_D=4$.

故 $z_{max}=z(2,-1)=13$, $z_{min}=z(1,1)=-1$.

(2). $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x+\cos(x+y)$. $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos y+\cos(x+y)$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 有 $\cos x=\cos y$ 即

$x=y$ 或 $x+y=2\pi$.

若 $x=y$, 代入有 $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

得 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=\frac{1}{2}$.

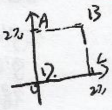
若 $x+y=2\pi$, 代入 $\cos x=-1$

综上解得 $\begin{cases}x=\pi\\ y=\pi\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\ y=\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{5}{3}\pi\\ y=\frac{5}{3}\pi\end{cases}$.

得驻点 $(\pi,\pi)$, $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{5}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi)$.

$f(\pi,\pi)=0$, $f(\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{3}\pi)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$f(\frac{5}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi)=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.




如图在AD上, $x=0$,

$f=2\sin y$, $(0\le y\le 2\pi)$

最大值 $f(0,\frac{\pi}{2})=2$, 最小值 $f(0,\frac{3}{2}\pi)=-2$.

在BC上, $x=2\pi$.

$f=2\sin(y+2\pi)=2\sin y$ $(0\le y\le 2\pi)$

有最大值 $f(2\pi,\frac{1}{2}\pi)=2$, 最小值 $f(2\pi,\frac{3}{2}\pi)=-2$

在CD上, $y=0$, 有 $f=2\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$

最大值 $f(\frac{1}{2}\pi,0)=2$, 最小值 $f(\frac{3}{2}\pi,0)=-2$

在AB上, $y=2\pi$, 有 $f=2\sin x$ $(0\le x\le 2\pi)$

最大值 $f(\frac{1}{2}\pi,2\pi)=2$, 最小值 $f(\frac{3}{2}\pi,2\pi)=-2$.

∴综上可得 $f_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$f_{min}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

第七章　多元函数微分学

第九节　多元函数的极值

(3). $f(x,y)=e^{-xy}$.

由 $\frac{\partial f}{\partial x}=-y\cdot e^{-xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-x\cdot e^{-xy}$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$,

得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 有驻点 $(0,0)$

$\therefore f(0,0)=1$

在边界 $x^2+4y^2=1$ 上,

$x^2=1-4y^2$;

$\therefore f(x,y)=e^{\pm y\cdot\sqrt{1-4y^2}}$, $y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

其与 $g(y)=y^2(1-4y^2)$ 有相同的极值点

$g'(y)=2y(1-8y^2)$, 令 $g'(y)=0$.

有 $y=0$ 或 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $y=0$ 时, 代入 $x^2+4y^2=1$, 有 $x=\pm1$

当 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore f(0,0)=1$, $f(\pm1,0)=1$

$f(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4})=e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4})=f(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4})=e^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$\therefore f_{max}=1$, $f_{min}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

(4). $\frac{\partial f}{\partial x}=y-1$, 由 $\frac{\partial f}{\partial x}=x-1$

令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 有 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 驻点 $(1,1)$

在边界线上 $f(x,y)=1+x^3-x-x^2$

令 $g(x)=1+x^3-x^2-x$,

$g'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)=0$.

得驻点 $(1,1)$, $(-\frac{1}{3},\frac{1}{9})$

在边界线 $f(x,y)=1+4x-x-4=3(x-1)$

令 $h(x)=3(x-1)$, $h'(x)=3\neq0$, 无驻点

当 $x=\pm2$ 时, $y=4$

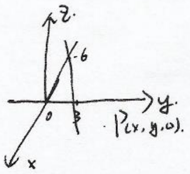
$\therefore f(1,1)=0$, $f(-\frac{1}{3},\frac{1}{9})=\frac{32}{27}$, $f(2,4)=3$

$f(-2,4)=-9$.

综上. $f_{max}=f(2,4)=3$

$f_{min}=f(-2,4)=-9$.

4. 在 $xOy$ 面上求一点，使它到 $x$ 轴，$y$ 轴及直线 $x+2y+6=0$ 的距离的平方之和最小.




设 $P(x_0, y_0, 0)$.

$d_1 = x$

$d_2 = y$

$d_3 = \frac{|x+2y+6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|x+2y+6|}{\sqrt{5}}$

$\therefore z = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$

$= x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y+6)^2$.

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y+6)$.

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y+6)$

令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

解得 $\begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{6}{5} \end{cases}$，驻点 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = A$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + \frac{8}{5} = \frac{18}{5} = C$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4}{5} = B$

$AC - B^2 > 0$. 且 $A > 0$.

点 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$ 为极小值点.

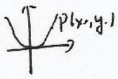
$\therefore$ 函 z 的极小值

$z(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}) = \frac{666}{125}$

第七章　多元函数微分学
第九节　多元函数的极值

5. 求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

设 $P(x_0,y_0)$ 在 $y=x^2$ 上.



P到直线 $x-y-2=0$ 的距离为d

$$d=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}},\quad d^2=\frac{1}{2}(x-y-2)^2.$$

设 $z=\frac{1}{2}\cdot(x-y-2)^2.$

$$\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-y-2).\ \frac{\partial z}{\partial y}=2(x-y-2).}$$

$$z=\frac{1}{2}(x-x^2-2)^2.$$

$$\frac{dz}{dx}=(x-x^2-2)\cdot(1-2x).$$

$$=\left(-(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{7}{4}\right)\cdot(1-2x)$$

令 $\frac{dz}{dx}=0$

$\because -(x-\frac{1}{2})^2-\frac{7}{4}<0$

故可得 $x=\frac{1}{2}$

当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $\frac{dz}{dx}<0$

当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $\frac{dz}{dx}>0.$

故 $x=\frac{1}{2}$ 为极小值点.

$\therefore x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}$

$$\therefore d=\frac{|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

第七章 多元函数微分学
第九节 多元函数的极值

6. 在所有对角线长为$2\sqrt{3}$的长方体中，求体积最大的.

解：$V=xyz$，$(x,y,z>0)$

$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{3}$

∴ 即求在 $x^2+y^2+z^2-12=0$ 的约束条件下

V的最大值.

设. $F(x,y,z)=\cancel{xyz}\ xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-12)=0$

$$\begin{cases} F_x'=yz+2\lambda x=0 \\ F_y'=x\cdot z+2\lambda\cdot y=0 \\ F_z'=xy+2\lambda\cdot z=0 \\ x^2+y^2+z^2=12. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot F_x'=0 & ① \\ y\cdot F_y'=0 & ② \\ z\cdot F_z'=0 & ③ \end{cases}$$

可得. $3xyz+2\lambda(x^2+y^2+z^2)=0$ 即 $3V=-24\lambda$. 即 $V=-8\lambda$

由 $\begin{cases} xyz+2\lambda\cdot x^2=0 \\ xyz+2\lambda\cdot y^2=0 \\ xyz+2\lambda\cdot z^2=0 \end{cases}$ 可得 $x^2=y^2=z^2$. ∵ $x,y,z>0$

∴ $x=y=z$ 代入原方程.可解得 $\begin{cases} x=y=z=2 \\ \lambda=-1 \end{cases}$

∴ $V=8$

由问题的实际意义知，V有最大值，在长宽高为2时.

其体积最大为8.

第七章 多元函数微分学

第九节 多元函数的极值

7. 做一个容积为$1m^3$的有盖圆柱形铁桶，问如何选取尺寸才能使所用的材料最省.

解：由题 $V=\pi r^2 \cdot h=1$

$S=\pi r^2+2\pi r\cdot h$

目标函数 $S=\pi r^2+2\pi r\cdot h$

约束条件. $V=\pi r^2\cdot h=1$

$F=S+\lambda(V-1)=2\pi r^2+2\pi r\cdot h+\lambda(\pi r^2 h-1)=0$

$$\therefore\begin{cases}F_r'=4\pi r+2\pi h+2\lambda\pi h\cdot r=0\\F_h'=2\pi r+\lambda\cdot\pi r^2=0\\\pi r^2 h=1\end{cases}$$

解得唯一解 $\begin{cases}r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\\h=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}\end{cases}$

由实际意义可得.当 $r=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$，$h=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$ 时.

用料最省 $S=\dfrac{6\pi}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}}$

第七章　多元函数微分学
第九节　多元函数的极值

8. 在抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 所截得的椭圆上，求到原点的最长和最短的距离.

解：目标函数为 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，($d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)

约束条件：$z=x^2+y^2$，
$x+y+z=1$

构造拉格朗日函数. $F=f+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)=0$

$$\begin{cases} F_x'=2x+2\lambda x+\mu=0 & ① \\ F_y'=2y+2\lambda y+\mu=0 & ② \\ F_z'=2z-\lambda+\mu=0 & ③ \\ x^2+y^2=z & ④ \\ x+y+z=1 & ⑤ \end{cases}$$

若 $\lambda=-1$ 时，有 $\mu=0$，$z=-\frac{1}{2}$ 与 $x^2+y^2=z\geq0$ 矛盾

故 $\lambda\neq-1$

由 $(2\lambda+2)\cdot x+\mu=0$，$(2\lambda+2)\cdot y+\mu=0$

有 $x=y$，$z=2x^2$ 代入⑤有

$2x^2+2x-1=0$

解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}=y$.

$z=2\mp\sqrt{3}$.

即得点 $P_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right)$ 或 $P_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$

原点为 O.

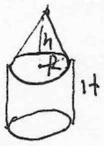
$f_{P_1}=OP_1=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$

$f_{P_2}=OP_2=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$

由实际意义知：所得有最大值为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$

最小值为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

9. 一圆柱形帐幕，其顶为圆锥形，体积为一定值，证明圆柱的底面半径 $R$，高 $H$，以及圆锥形的高 $h$ 满足 $R:H:h=\sqrt{5}:1:2$ 时幕帐所用的布最省




设. $H=1$. 则证明. $R=\sqrt5$ 和 $h=2$ 时, 用料最省.

∴ 约束函数. $V=\pi R^2\cdot(H+\frac{1}{3}h)$, $V$为常数.

目标函数. $S=2\pi R\cdot H+\pi R\cdot\sqrt{h^2+R^2}$ (注:无底布)

构造拉格朗日函数.

$$F=S+\lambda(\pi R^2\cdot(H+\tfrac{1}{3}h)-V)$$

$$=2\pi R\cdot H+\pi R\cdot\sqrt{h^2+R^2}+\lambda(\pi R^2\cdot(H+\tfrac{h}{3})-V)$$

$$\begin{cases} F_R'=2\pi H+\pi\cdot\sqrt{h^2+R^2}+\pi R^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{h^2+R^2}}+\lambda(2\pi R(H+\frac{1}{3}h))=0 & ① \\ F_H'=2\pi R+\lambda\pi R^2=0 & ② \\ F_h'=\pi R\cdot\dfrac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}+\dfrac{1}{3}\lambda\pi R^2=0 & ③ \\ \pi R^2\cdot H+\dfrac{1}{3}\pi R^2\cdot h=V. & ④ \\ H=1 & ⑤ \end{cases}$$

∵ $R,H,h>0$. 故由. ②得 $\lambda=-\frac{2}{R}$

代入③有 $5h^2=4R^2$ $\Rightarrow$ $\frac{R}{h}=\frac{\sqrt5}{2}$, $\frac{R^2}{h^2}=\frac{5}{4}$

将 $\lambda=-\frac{2}{R}$, $\frac{R}{h}=\frac{\sqrt5}{2}$, $\frac{R^2}{h^2}=\frac{5}{4}$ 代入①

有. $2+\frac{3}{2}h+\frac{5}{4}h^2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}h}-4(1+\frac{1}{3}h)=0$

有 $h=2$, $R=\sqrt5$

$$\therefore \begin{cases} R=\sqrt5 \\ H=1 \\ h=2. \end{cases} \Rightarrow R:H:h=\sqrt5:1:2.$$

由实际意义知. S有最小值.

又在 $R,H,h>0$ 时有唯一驻点.

故当 $R:H:h=\sqrt5:1:2$ 时, S最小.

用料最省.

第七章　多元函数微分学
第九节　多元函数的极值

10. 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 上点的 $z$ 坐标的最大值和最小值.

解：由 $z = x^2 + 2y^2 = 6 - 2x^2 - y^2$.

可得约束条件. $x^2 + y^2 = 2$.

∵ 目标函数 $z = x^2 + 2y^2$.

∴ 构造拉格朗日函数.

$F = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda+1) \cdot x = 0 \\ (\lambda+2) \cdot y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

当 $x = 0$ 时，有 $y = \pm\sqrt{2}$，$\lambda = -2$.

当 $y = 0$ 时，有 $x = \pm\sqrt{2}$，$\lambda = -1$.

∴ $z(0, \pm\sqrt{2}) = 4$，$z(\pm\sqrt{2}, 0) = 2$.

∴ 由实际意义知，$z$ 坐标存有最小值 $z(\pm\sqrt{2}, 0) = 2$.

最大值 $z(0, \pm\sqrt{2}) = 4$.

第七章　多元函数微分学
第九节　多元函数的极值

11. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点 $M$，使函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $l=(1,-1,0)$ 的方向导数最大.

解：$\vec{e}=\frac{\vec{l}}{|l|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=2y$，$\frac{\partial f}{\partial z}=2z$.

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$

$=\sqrt{2}(x-y)$.

设 $g(x,y)=x-y$，

约束函数 $2x^2+2y^2+z^2=1$

构造拉格朗日函数.

$F=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)=0$

$$\begin{cases}F_x'=1+4\lambda x=0\\F_y'=-1+4\lambda y=0\\F_z'=2\lambda\cdot z=0\\2x^2+2y^2+z^2=1\end{cases}$$

由上式知 $\lambda\neq0$.

故有 $z=0$

$$\begin{cases}4\lambda x=-1,\ 4\lambda x=1.\\x^2+y^2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore \lambda^2x^2=\frac{1}{16}$，$\lambda^2 y^2=\frac{1}{16}$

$\therefore \lambda^2(x^2+y^2)=\frac{1}{8}$

$\lambda^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \lambda=\pm\frac{1}{2}$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时有 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\\z=0\end{cases}$

当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，有 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\\z=0\end{cases}$

$\therefore g\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-1$，

$g\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=1$.

故点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 为所求的极大值点，

$\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}$.

故 $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

第七章　多元函数微分学
第九节　多元函数的极值

12. 铝的含量为 $p\%$ 的铝合金，对应的熔解点为 $T$℃，测得一组数据如下表所示，试求经验公式 $T=ap+b$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 铝含量 $P$ | 36.9 | 46.7 | 63.7 | 77.8 | 84.0 | 87.5 |
| 熔解点 $T$℃ | 181 | 197 | 235 | 270 | 283 | 292 |

令 $S=\sum_{i=1}^{6}(T(p)-T_i)^2$ $\quad \frac{\partial S}{\partial a}=2\cdot\sum_{i=1}^{6}(ap_i+b-T_i)\cdot p_i$ $\quad \frac{\partial S}{\partial b}=2\cdot\sum_{i=1}^{6}(ap_i+b-T_i)$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a}=a\cdot\sum_{i=1}^{6}p_i^2+b\sum_{i=1}^{6}p_i-\sum_{i=1}^{6}p_i\cdot T_i=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial b}=a\cdot\sum_{i=1}^{6}p_i+6b-\sum_{i=1}^{6}T_i=0\end{cases}$$

由上表.

$\sum_{i=1}^{6}p_i=396.6$

$\sum_{i=1}^{6}T_i=1458$

$\sum_{i=1}^{6}p_i^2=28365.28$

$\sum_{i=1}^{6}T_i\cdot p_i=101176.3$

$$\therefore\begin{cases}28365.28\cdot a+396.6\cdot b=101176.3\\ 396.6\cdot a+6b=1458\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a\approx 2.234\\ b\approx 95.33\end{cases}$

$\therefore T=2.234\cdot p+95.33$

第七章　多元函数微分学
第九节　多元函数的极值

13. 测得 $x, y$ 的一组数据如下表所示，试求经验公式 $y=ax^2+bx+c$.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | −6 | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| $y$ | 5 | 8 | 10 | 11 | 9 | 6 | 2 |

$$S=\sum_{i=1}^{7}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=2\cdot\sum_{i=1}^{7}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\cdot x_i^2=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=2\cdot\sum_{i=1}^{7}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)\cdot x_i=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial c}=2\cdot\sum_{i=1}^{7}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)=0\end{cases}$$

可得.
$$\begin{cases}a\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i^4+b\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i^3+c\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i^2=\sum_{i=1}^{7}x_i^2y_i\\ a\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i^3+b\sum_{i=1}^{7}x_i^2+c\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i=\sum_{i=1}^{7}x_iy_i\\ a\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i^2+b\cdot\sum_{i=1}^{7}x_i+7c=\sum_{i=1}^{7}y_i\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{7}x_i=0$, $\sum_{i=1}^{7}x_i^2=112$, $\sum_{i=1}^{7}x_i^3=0$, $\sum_{i=1}^{7}x_i^4=3136$

$\sum_{i=1}^{7}y_i=51$, $\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=-28$, $\sum_{i=1}^{7}x_i^2y_i=552$.

$$\begin{cases}3136\cdot a+112\cdot c=552\\ 112b=-28\\ 112\cdot a+7c=51.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-0.1964\\ b=-0.25\\ c=10.428.\end{cases}$$

$$\therefore y=-0.1964\cdot x^2-0.25x+\cancel{10}\,10.428.$$

第七章 多元函数微分学
第九节 多元函数的极值