J19　1320171012. 刘逸.　[illegible]

阅

1. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分。

(1) $\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，从 z 轴正向看去，L 取逆时针方向;

(2) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ $(a>0,b>0)$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 取逆时针方向; $z=\frac{b}{a}x$

(3) $\oint_L z^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 位于第一卦限部分的边界线，从 z 轴正向看去，L 取逆时针方向;

(4) $\oint_L x^2z\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$，其中 L 是抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 位于第一卦限部分的边界线，从 z 轴正向看去，L 取逆时针方向;

(5) $\oint_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$，其中 L 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=y$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 的方向为逆时针方向.

解 (1)

如图. $\oint_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$

$\oint_L y\,dx+z\,dy+x\,dz=\iint_S\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}$

$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$，由于 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{\sqrt3}\iint_S\begin{vmatrix}1&1&1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X&Y&Z\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt3}\iint_S(-1-1-1)dS=-\sqrt3\iint_S dS$

$=-\sqrt3\pi a^2$

(2)

$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,0,a)$

$\therefore \oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$

$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S\begin{vmatrix} b & 0 & a\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S -2(a+b)dS=-\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S dS$

$\because dS=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2+0}\,dxdy$

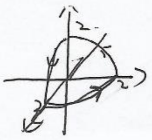
$\therefore \iint_S dS=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}\iint_{D_{xy}}dxdy$

$\therefore$ 原式 $=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\pi a^2=-2\pi a(a+b)$

第九章　曲线积分与曲面积分

第七节　斯托克斯公式与旋度

1. (3).



$$\oint z^2dx+x^2dy+y^2dz=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

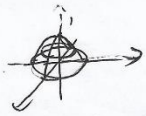
$$=\iint\limits_S 2ydydz+2zdzdx+2xdxdy.$$

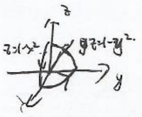
由于轮换对称性有原式 $=2\times3\cdot\iint\limits_{D_{xy}}(x)dxdy$

$$=2\times3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2\rho^2(\cos\theta)d\rho=2\times3\times\frac{8}{3}\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$=16.$$

(4).





$$\oint_L x^2zdx+xy^2dy+z^2dz$$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & xy^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

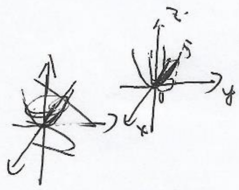
$$=\iint\limits_S -2y(1-y^2)dydz+[(1-2z)+2x(1-x^2)]dzdx+(1-3x^2)dxdy.$$

$$=\iint\limits_{D_{zx}}(1-2z)dzdx+\iint\limits_{D_{xy}}(1-3x^2)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{1-x^2}(1-2z)dz+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho(1-3\rho^2\cos^2\theta)d\rho$$

$$=\int_0^1(x^2-x^4)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\cos^2\theta)d\theta=\frac{2}{15}+\frac{1}{16}\pi$$

(5).



$$\oint_L xydx+x^2dy+z^2dz$$

$$=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint\limits_S 2ydydz+2(x^2+y^2)2x\,dzdx+x\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(2y\cdot(-2x)+4xy\cdot(-1)+x)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}x\,dxdy$$ ，由于 x 为奇函数

∴ 原式 $=0$

2. 求下列向量场的旋度.

(1) $A=x^2\sin y\,i+y^2\sin z\,j+z^2\sin x\,k$;

(2) $A=(z+\sin y)i-(z-x\cos y)j$.

解：(1)

$$\operatorname{rot} A=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin z & z^2\sin x \end{vmatrix}=(0-y^2\cos z)\hat{i}+(0-z^2\cos x)\hat{j}+(0-x^2\cos y)\hat{k}$$

$$=-y^2\cos z\cdot\hat{i}-z^2\cos x\cdot\hat{j}-x^2\cos y\cdot\hat{k}$$

$$=(-y^2\cos z,\ -z^2\cos x,\ -x^2\cos y)$$

(2).

$$\operatorname{rot} A=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix}=(0+1)\hat{i}+(1-0)\hat{j}+(\cos y-\cos y)\cdot\hat{k}$$

$$=\hat{i}+\hat{j}=(1,1)$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第七节　斯托克斯公式与旋度