1. 计算 $\iint\limits_S |xyz|\,\mathrm{d}S$，其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 所割下的有限部分.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$. 区域 D_{xy}：$x^2+y^2\le 1$

$\therefore dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

$\iint\limits_S |xyz|\,dS = 4\iint\limits_{S'} xyz\,dS$

S' 为第一卦限的部分

$\therefore$ 上式 $=4\cdot\iint\limits_{D_{xy}} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$

$=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 \rho^4\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho d\rho$

$=(-\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^1 \rho^4\sqrt{1+4\rho^2}\cdot d\frac{1}{2}\rho^2$

$=\int_0^1 u^2\sqrt{1+4u}\,du$，令 $\rho^2=u$ 替换.

其中 $u^2\sqrt{1+4u}=\frac{1}{16}\left((1+4u)^{\frac{5}{2}}-2(1+4u)^{\frac{3}{2}}+(1+4u)^{\frac{1}{2}}\right)$

$\therefore$ 上式 $=\int_0^1\frac{1}{16}\left[(1+4u)^{\frac{5}{2}}-2(1+4u)^{\frac{3}{2}}+(1+4u)^{\frac{1}{2}}\right]du.$

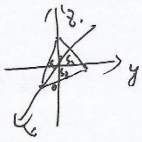
$=\frac{1}{64}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{7}(1+4u)^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1-\frac{2}{5}(1+4u)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{3}(1+4u)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right]$

$=\frac{1}{32}\cdot\left[\frac{1}{7}\cdot(\sqrt{5})^7-\frac{2}{5}(\sqrt{5})^5+\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{5})^3+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\right].$

$=\frac{1}{32}\cdot\left[\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right]=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$

第九章 曲线积分与曲面积分
第四节 第一类曲面积分

2. 计算 $\oiint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$，其中 S 为四面体 $x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$ 的边界曲面.



解：分别设在 $y=0$, $x=0$, $z=0$ 的边界面为 S_1, S_2, S_3; $x+y+z=1$ 为 S_4.

S_3: $z=0$.

$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=dxdy$

$\therefore \iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}dy$

$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\,dx=\left(\ln(1+x)-\frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1$

$=\ln 2-\frac{1}{2}$

对于 $x=0$, $y=0$ 具有轮换对称性

$\therefore \iint\limits_{S_2}\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\iint\limits_{S_1}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$.

对 S_2: $x=0$

$dS=dydz$.

$\iint\limits_D \frac{1}{(1+y)^2}dydz=\int_0^1 dy\cdot\int_0^{1-y}\frac{1}{(1+y)^2}dz$

$=\int_0^1\frac{1-y}{(1+y)^2}dy=\int_0^1\frac{2}{(1+y)^2}-\frac{1}{(1+y)}dy$

$=\left[-\frac{2}{1+y}-\ln(1+y)\right]\Big|_0^1=1-\ln 2$.

在 S_4 面上，$z=1-x-y$. $dS=\sqrt{3}\,dxdy$

$\iint\limits_{S_4}\frac{1}{(1+x+y)^2}dS=\sqrt{3}\iint\limits_D\frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy=\sqrt{3}\cdot\iint\limits_{S_3}\frac{dS}{(1+x+y)^2}$

$=\sqrt{3}\cdot\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \oiint\limits_S\frac{dS}{(1+x+y)^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\cdot\ln 2$.

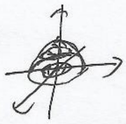
第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分

3. 计算$\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z \geq h\,(0<h<a)$的部分.

解：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 且在xoy面上投影

为 $x^2+y^2 \leq a^2-h^2$.

$\therefore dS = \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$



$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$

原式 $= \iint\limits_{D_{xy}} (x+y+z)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+a\right)dxdy$

由对称性知. $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ 与 $\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ 在 D_{xy} 上为奇函数

$\therefore \iint\limits_{D} \frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = 0$

$\therefore$ 原式 $= \iint\limits_{D_{xy}} a\,dxdy = a\cdot|D_{xy}| = a\cdot\pi(a^2-h^2)$

第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分

4. 计算$\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中$S$是圆柱面$x^2+y^2=R^2$上介于$z=0$和$z=h$之间的部分.

解：$dS = 2R\pi \cdot dz$.

$\therefore$ 原式 $= \iint\limits_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^h \frac{2\pi R \cdot dz}{R^2+z^2}$.

$$= 2\pi \cdot \int_0^h \frac{d(\frac{z}{R})}{1+(\frac{z}{R})^2} = 2\pi \cdot \arctan(\frac{z}{R}) \Big|_0^h$$

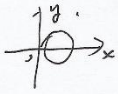
$$= 2\pi \cdot \arctan \frac{h}{R}.$$

5. 计算 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解: $z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, $D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax$

$$dS=\left(1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,dxdy$$

$$\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS=\sqrt{2}\cdot\iint\limits_{D_{xy}}[xy+(x+y)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]dxdy.$$



$$=\sqrt{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\cos\theta+\sin\theta)]rdr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta)\cdot\frac{1}{4}\cdot(2a\cos\theta)^4d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4(\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta)\cdot\cos^4\theta\, d\theta.$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta.$$

$$=8\sqrt{2}a^4\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

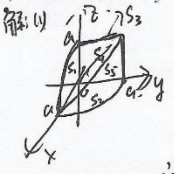
第九章 曲线积分与曲面积分
第四节 第一类曲面积分

6. 计算 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$，其中：

(1) S 为两圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=a^2$ 及三个坐标面在第一卦限所围成立体的边界曲面;

(2) S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2\ (-1\le z\le 2)$.

解：(1)



如图：$y=0$ 与 $x^2+z^2=a^2$，所围成面为 S_1

$z=0$ 与 $x^2+y^2=a^2$ 所围成面为 S_2.

$x=0$ 与 $y=a$ 和 $z=a$，所围成面为 S_3

$x^2+y^2=a^2$ 与 $y=0$ 和 $x=z=0$ 所围成面为 S_4 和 S_5.

$$\therefore \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\iint\limits_{S_1}(x^2+z^2)\,dx\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\frac{\pi}{8}a^4$$

$$\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\frac{\pi}{8}a^4$$

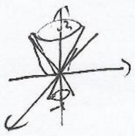
$$\iint\limits_{S_3}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\iint\limits_{S_3}(y^2+z^2)\cdot dy\,dz=\int_0^a dy\int_0^a(y^2+z^2)\,dz=\frac{2}{3}a^4$$

$$\iint\limits_{S_{4,5}}(x^2+y^2+z^2)\,dS=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\,d\theta\int_0^{a\sin\theta}(a^2+z^2)\,dz=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=a^4\cdot\frac{11}{9}$$

$$\therefore \iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\,dS=\frac{11}{9}a^4\times 2+\frac{2}{3}a^4+\frac{\pi}{8}a^4\times 2=\frac{\pi}{4}a^4+\frac{28}{9}a^4.$$

(2).



如图 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\therefore dS=\sqrt{2}\cdot dx\,dy$

$$\therefore \iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)\,dS=\iint\limits_{S_1}2(x^2+y^2)\,dx\,dy+\iint\limits_{S_2}2(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 2\rho^2\cdot\rho\,d\rho+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2\rho^2\cdot\rho\,d\rho\right]\cdot\sqrt{2}$$

$$=\left[2\pi\cdot\frac{1}{2}\rho^4\Big|_0^2+2\pi\cdot\frac{1}{2}\rho^4\Big|_0^1\right]\cdot\sqrt{2}$$

$$=17\pi\cdot\sqrt{2}.$$

第九章 曲线积分与曲面积分

第四节 第一类曲面积分

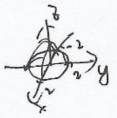
7. 计算 $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，其中:

(1) S 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$；

(2) S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成立体的边界曲面.

(1). $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$\therefore dS=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(\sqrt{4-x^2-y^2})^2}}\,dxdy=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy.$



$\therefore \iint\limits_S (x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$

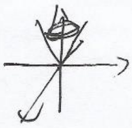
$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2\cdot\frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}}\cdot\rho d\rho$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\frac{u}{\sqrt{4-u}}\,du$, 令 $u=\rho^2$.

令 $\sqrt{4-u}=t$, $4-t^2=u$, 原式 $=2\pi\cdot\int_2^0(4-t^2)\cdot(-2)\,dt=2\pi\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}\pi$.

(2). 设圆锥面为 S_1，平面为 S_2.

$\therefore$ 对 S_1 上. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.



$\therefore dS=\sqrt{2}\cdot dxdy.$, 其中 $D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$\therefore \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS=\sqrt{2}\cdot\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho$

$=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

对 S_2 上. $z=1$ $\therefore dS=dxdy.$

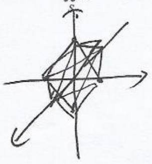
$\therefore \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho d\rho$

$=2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\pi$

$\therefore \iint\limits_S (x^2+y^2)dS=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot\pi.$

第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分

8. 计算 $I=\oiint\limits_{S}(x+2y+4z+5)^2\mathrm{d}S$，其中 S 是八面体 $|x|+|y|+|z|\le 1$ 的表面.



表面为 $|x|+|y|+|z|=1$.

$\therefore (\frac{\partial z}{\partial x})^2=1$，$(\frac{\partial z}{\partial y})^2=1$

$\therefore dS=\sqrt{1+1+1}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$

同理：$(\frac{\partial x}{\partial y})^2=1$，$(\frac{\partial x}{\partial z})^2=1$，$(\frac{\partial y}{\partial x})^2=1$，$(\frac{\partial y}{\partial z})^2=1$

$\therefore dS=\sqrt{3}\,dxdy=\sqrt{3}\,dydz=\sqrt{3}\,dxdz$.

$\therefore \oiint\limits_{S}(x+2y+4z+5)^2 dS$

$=\oiint\limits_{S}(x^2+4y^2+16z^2+4xy+8xz+10x+16zy+20y+40z+25)\,dS$

由对称性知，$\oiint\limits_{S}x\,dS=0$，$\oiint\limits_{S}y\,dS=0$，$\oiint z\,dS=0$，$\oiint\limits_{S}xy\,dS=0$，$\oiint\limits_{S}xz\,dS=0$

$\oiint\limits_{S}yz\,dS=0$.

$\therefore$ 原式 $=\oiint\limits_{S}(x^2+4y^2+16z^2+25)\,dS$

$=8\sqrt{3}\,(\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_1}4y^2dydx+\iint\limits_{D_2}16z^2dydz+\iint\limits_{D_1}25dxdy)$

其中 D_1 为 $\{x+y\le 1,\ x,y\ge 0\}$　D_2 为 $\{y+z\le 1,\ y,z\ge 0\}$.

$\therefore$ 原式 $=8\sqrt{3}\,(\int_0^1 x^2(1-x)dx+\int_0^1 4y^2(1-y)dy+\int_0^1 16z^2(1-z)dz+\int_0^1 25(1-x)dx)$

$=8\sqrt{3}\,(21\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+25\times\frac{1}{2})=8\sqrt{3}\times\frac{57}{4}=114\sqrt{3}$.

第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分

9. 求抛物面 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$ 的质量，其面密度为 $\mu=z$.

解：$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le 1$ 　D_{xy}: $x^2+y^2\le 2$.

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

$$\therefore M=\iint_S \mu\, ds=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\,r\,dr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}}r^2(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr^2.$$

令 $r^2=u$

$$原式=\frac{\pi}{2}\int_0^2 u(1+u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^2 u\cdot(1+u)^{\frac{1}{2}}+(1+u)^{\frac{1}{2}}-(1+u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

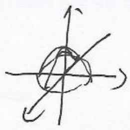
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^2 (1+u)^{\frac{3}{2}}-(1+u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{2}{5}(1+u)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2-\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\right].$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot(6\sqrt{3}+1)$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分

10. 求面密度为常数 μ 的半球壳 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 对 z 轴的转动惯量.



解：

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

区域 D_{xy}: $x^2+y^2\le a^2$

$\therefore I=\iint_S \mu(x^2+y^2)\,dS$

$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$

$\cancel{\therefore I=\iint_{S} \mu\cdot(x^2+y^2)\,dS}=$

$\therefore I=\iint_S \mu(x^2+y^2)\,dS=\iint_{D_{xy}}\mu\cdot(x^2+y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy$

$=\mu\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}\frac{a\cdot\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho$

$=\mu a\cdot\pi\cdot\int_0^a\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho^2$ 令 $\rho^2=u$.

原式 $=\mu a\pi\int_0^{a^2}\frac{u}{\sqrt{a^2-u}}\,du$　令 $\sqrt{a^2-u}=t\Rightarrow u=a^2-t^2$.

$\therefore$ 原式 $=\mu a\pi\int_{a}^{0}\frac{a^2-t^2}{t}\cdot(-2t)\,dt$

$=\mu a\pi\cdot 2\int_0^a a^2-t^2\,dt=2\mu a\pi\cdot(a^3-\frac{1}{3}a^3)$

$=\frac{4}{3}a^4\mu\pi$.

第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分

11. 试求面密度 $\mu=1$，半径为 R 的球壳对与球心距离为 $a\,(a>R)$ 处的单位质点的引力.

F 设点在 $(0,0,a)$ 处.

由对称性知. $F_x=F_y=0$

$$F_z=\iint\limits_S \frac{Gm\cdot\mu\,ds}{a^2}$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+1}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore F_z=\frac{Gm\mu}{a^2}\cdot R\cdot 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$=\frac{Gm\mu}{a^2}\cdot R\cdot 2\pi\cdot(-2)\cdot(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R$$

$$=\frac{Gm\mu\cdot 4\pi R^2}{a^2}$$

$$\therefore F\left(0,0,-\frac{Gm\mu\cdot 4\pi R^2}{a^2}\right)$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第四节　第一类曲面积分