北京理工大学2020年春季学期期末试卷

一、填空题

1. 点 $M(1,0,2)$ 到直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的距离是____________.

2. 函数 $u=xyz$ 在点 $P(5,1,2)$ 处沿从点 $P(5,1,2)$ 到点 $Q(9,4,14)$ 方向的方向导数为______________.

3. 设 $f(x,y)$ 在全平面上连续，交换累次积分的积分次序 $I=\int_0^{\pi}dx\int_0^{c\ \alpha\ s}f(x,y)dy=$_________.

4. 已知 L 为右半圆: $x^2+y^2=R^2(x\geq 0)$, 计算 $\int_L|y|dl=$_________.

5. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^{p-3}}$ 条件收敛,则 p 的取值范围为__________.

二、计算题

1. 求点 $P(1,\ 2,\ -1)$ 在平面 $2x-y+z=5$ 上的投影点的坐标.

2. 设 $z=f(x+\varphi(x-y),y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，φ 有二阶导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 计算 $I=\iiint\limits_V(x+y+z)dV$，其中 V 是由 $z=xy,y=x,x=1,z=0$ 所围成的区域.

4. 已知函数 $u=x^2+yz$, 计算 $div(grad u)$.

三、设 $f(x)$ 连续, $F(x)=\int_0^x(\int_0^t uf(u^2+t^2)du)dt$,求 $F''(x)$.

四、设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和曲面 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成的密度为 1 的均匀几何体. 试计算 Ω 关于 z 轴的转动惯量.

五、求常数 a,b,c 的值, 使函数 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿 z 轴正方向的方向导数有最大值 64.

六、已知在半平面 $x>0$ 内 $(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda}dx+(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda}dy$ 为二元函数

$f(x,y)$ 的全微分.

(1) 求 λ 的值；

(2) 求 $f(1,\sqrt{3})-f(2,0)$ 的值.

七、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛区间及和函数.

八、将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求收敛区间及 $f^{(5)}(1)$ 的值.

九、计算曲面积分 $I=\iint_S\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R, z=-R(R>0)$ 所围成的立体表面的外侧.

十、设 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，其中 $t>0$. 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，又设 $F(t)=\iiint_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

（1）求证：$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，并求 $F'(t)$ 的表达式；

（2）设 $f(0)\ne 0$，求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\lambda}F'(\frac{1}{n})$ 在 $\lambda>0$ 时收敛，$\lambda\le 0$ 时发散.