1. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)}$.

解：$\operatorname{grad} \vec{r}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$

$=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\therefore \operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}$.

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

2. 设椭圆 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，求 $\oint_L\left(2xy+3x^2+4y^2+5x+1\right)\mathrm{d}l$.

解：设 $x=2\rho\cos\theta$，$y=\sqrt{3}\rho\sin\theta$.

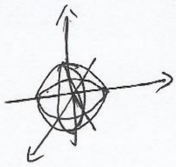
$\therefore \oint_L (2xy+3x^2+4y^2+5x+1)\,dl = \int_0^{2\pi}(4\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+12+10\cos\theta+1)\,d\theta$.

$= \oint 13\,dl + \int_0^{2\pi}(4\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+10\cos\theta)\,d\theta$.

$= 13a + 0 = 13a$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

3. 计算$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}l$，其中$L$为$x^2+y^2+z^2=a^2$与$y=x$的交线.

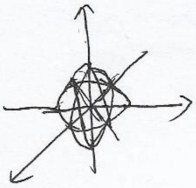


如图. 交线为一个半径为a的圆，$\because y=x$

$\therefore \int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,dl = \int_L \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dl$

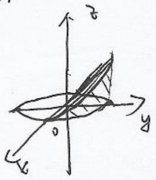
$= a\cdot\int_L dl = a\cdot 2\pi a$

$= 2\pi a^2.$



4. 求柱面$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$位于$xOy$面上方和平面$z=y$下方那部分的侧面积.

解：



如图.

$$A=\int_L z\,dl=\int_L y\,dl$$

$\because$ 设 $x=\sqrt{5}\cos\theta,\ y=3\sin\theta$，$(0\le\theta\le\pi)$

$$A=\int_0^{\pi}3\sin\theta\cdot\sqrt{5\sin^2\theta+9\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=-3\int_0^{\pi}\sqrt{5+4\cos^2\theta}\,d\cos\theta$$

令 $u=\cos\theta$

$$A=-3\int_1^{-1}\sqrt{5+4u^2}\,du$$

$$=6\cdot\int_0^1\sqrt{5+4u^2}\,du$$

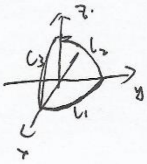
$$=12\left[\frac{u}{2}\sqrt{\frac{5}{4}+u^2}+\frac{5}{8}\ln\left(u+\sqrt{\frac{5}{4}+u^2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$=9+\frac{15}{4}\ln 5$$

第九章　曲线积分与曲面积分

第八节　综合例题

5. 设 L 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限部分的边界曲线，求 L 的形心.



解：由对称性知，L 的形心 (x_0, y_0, z_0) 必定满足 ~~……~~，$x_0=y_0=z_0$

故讨论 x_0，设线密度为 μ.

$$x_0=\frac{\mu\oint_L x\,dl}{M}$$

$$M=\frac{a}{2}\cdot\pi\cdot 3\cdot\mu=\frac{3}{2}\pi a\mu$$

$$\oint_L x\,dl=\int_{L_1}x\,dl+\int_{L_2}x\,dl+\int_{L_3}x\,dl$$

$$=2\int_{L_1}x\,dl$$

令 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

$$\therefore \oint_L x\,dl=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cdot\cos\theta\cdot\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta$$

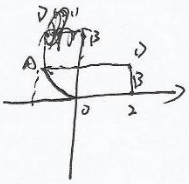
$$=2a^2.$$

$$\therefore x_0=\frac{\mu 2a^2}{\frac{3}{2}\pi a\mu}=\frac{4a}{3\pi}$$

$$\therefore (x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

6. 计算 $\int_L (12xy+e^y)dx-(\cos y - xe^y)dy$，其中 L 为由点 $A(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到 $O(0,0)$，再沿直线 $y=0$ 到点 $B(2,0)$ 的路径.



取 $D(2,1)$. 连接 AD, BD

$$\therefore I = \int_{AO+OB+BD+DA} (12xy+e^y)dx-(\cos y - xe^y)dy$$

$$- \int_{BD+DA} (12xy+e^y)dx-(\cos y - xe^y)dy$$

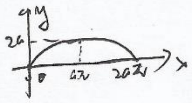
$$= \iint_D -12x\,dxdy + \int_0^1 (\cos y - 2e^y)dy - \int_2^{-1}(12x+e)dx$$

$$= -\int_{-1}^0 12x\,dx \int_{x^2}^1 dy - \int_0^2 12x\,dx \int_0^1 dy + \sin 1 + 2 - 2e + 18 + 3e$$

$$= e - 1 + \sin 1$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

7. 计算 $\int_L\left(e^x\sin y-m\right)dx+\left(e^x\cos y-my\right)dy$，其中 L 是摆线 $x=a\left(t-\sin t\right),y=a\left(1-\cos t\right)$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 一段(m 是任意常数).



解 $\frac{\partial Y}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial X}{\partial y}$

∴该曲线积分与路径无关

$\therefore \int_L (e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-my)dy$

$=\int_{L'}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-my)dy.$

L' 为由 $(0,0)$ 到 $(a\pi,0)$ 到 $(a\pi,2a)$

$=\int_0^{a\pi}-m\,dx+\int_0^{2a}(e^{a\pi}\cos y-my)dy$

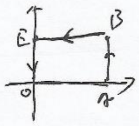
$=-ma\pi+e^{a\pi}\sin 2a-\frac{m}{2}\cdot 4a^2$

$=e^{a\pi}\sin 2a-2ma^2-m\pi a.$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

8. 计算 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_L\left(e^{y^2-x^2}\cos 2xy-2y\right)dx+e^{y^2-x^2}\sin 2xydy$，其中 L 是依次连接点 $A(a,0)$，$B\left(a,\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)$，$E\left(0,\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)$，$O(0,0)$ 的折线段.

解



连接AO：为L'

$\therefore \oint_{L+L'} Xdx+Ydy=\left(\int_L Xdx+Ydy\right)+\left(\int_{L'} Xdx+Ydy\right)$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy$

$=\iint\left[-2x\cdot e^{y^2-x^2}\cdot\sin 2xy+e^{y^2-x^2}\cdot 2y\cdot\cos 2xy\right)-\left(e^{y^2-x^2}\cdot 2y\cdot\cos 2xy+e^{y^2-x^2}\cdot(-\sin 2xy)\cdot 2x-2\right)$

$=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy=2\cdot\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}=2\sqrt{\pi}$

L'上 $y=0$

$\int_{L'} Xdx+Ydy=\int_0^a e^{-x^2}dx$

$\lim\limits_{a\to+\infty}\left(2\sqrt{\pi}-\int_0^a e^{-x^2}dx\right)=2\sqrt{\pi}-\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

$=2\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$

下证 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=T=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$T^2=\left[\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]\cdot\left[\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]=\iint\limits_{D}e^{-x^2-y^2}dxdy$

$(0\le x\le+\infty,\ 0\le y\le+\infty)$

$\therefore T^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{+\infty}\rho e^{-\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}(0+1)=\frac{\pi}{4}$

故 $T=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9. 设 L 为不自交的光滑闭曲线，求 $\oint_L \mathrm{grad}\left[\sin(x+y)\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$.

解：

$$\frac{\partial \sin(x+y)}{\partial x} = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial \sin(x+y)}{\partial y} = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial \sin(x+y)}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \oint \mathrm{grad}(\sin(x+y))\cdot dl = \cos(x+y)\cdot[dx+dy]$$

$$原式 = \oint_L \cos(x+y)dx + \cos(x+y)dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial(\cos(x+y))}{\partial x} - \frac{\partial(\cos(x+y))}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D 0\,dxdy = 0$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

10. 计算 $I=\oint\limits_{L^{+}}\left(x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\right)\mathrm{d}l$，其中 L 为 xOy 面上简单闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向.

解：由题知 $dl\cdot\cos(\vec{n},\vec{i})=-dx$

$dl\cdot\cos(\vec{n},\vec{j})=dy$

$$\therefore \text{原式}=\oint_{L^{+}} x\,dy-y\,dx=\iint\limits_{D_{xy}}(1+1)\,dxdy=2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$$

$=2S.$ S 为 L 所围成的面积

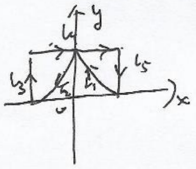
第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

11. 设$I=\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，证明在任何不包含原点的单连通区域内此曲线积分与路径无关，并当L为星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$上从$t=0$到$t=\pi$的一段时，计算曲线积分的值.

解：$I=\int_L X\,dx+Y\,dy$

$$\because \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial X}{\partial x}$$

∴ 在不含原点的单连通区域，曲线积分与路径无关.



如图 $\oint_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}=0$

$\int_{L_3+L_4+L_5}=\int_0^a \frac{y-a}{y^2+a^2}dy+\int_{-a}^{a}\frac{x-a}{x^2+a^2}dx+\int_a^0 \frac{y+a}{x^2+y^2}dy$

$=\int_0^a \frac{y}{y^2+a^2}dy+\int_a^0 \frac{y}{y^2+a^2}dy-2\int_0^a \frac{a}{y^2+a^2}dy-\int_{-a}^{a}\frac{x}{x^2+a^2}dx$

$-\int_{-a}^{a}\frac{a}{x^2+a^2}dx=-2\int_0^a \frac{a}{y^2+a^2}dy-2\int_0^a \frac{a}{x^2+a^2}dx$

$=-4\int_0^a \frac{a}{x^2+a^2}dx=-4\int_0^a \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}d(\frac{x}{a})$

$=-4\arctan(\frac{x}{a})\Big|_0^a=-4\times\frac{\pi}{4}=-\pi$

$\therefore \int_{L_1+L_2}=-\int_{L_3+L_4+L_5}=\pi.$

$\therefore \int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=\pi.$，$L$为星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$，t从0到π.

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

12. 已知函数 $f(x)$ 具有连续导数，$f(1)=\frac{1}{2}$，并且在右半平面 $x>0$ 内曲线积分 $\int_L\left(1+\frac{1}{x}f(x)\right)y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

解：由曲线积分与路径无关可得.

$$-f'(x)=1+\frac{1}{x}f(x)$$

$$f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=-1$$

$$\therefore f(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int -1\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[C+(-1)\cdot\frac{x^2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[C-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$\because f(1)=\frac{1}{2}\quad\therefore C=1$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$$

13. 已知 $f(0)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$f(x)$ 有二阶连续导数，试确定 $f(x)$，使曲线积分 $\int_L \left[f'(x)+6f(x)\right]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

解：由路径无关条件得

$$f''(x)=f'(x)+6f(x)$$

$$\therefore y''-y'-6y=0$$

特征方程 $r^2-r-6=0$

$$(r-3)(r+2)=0 \Rightarrow r=3 \text{ 或 } r=-2$$

$$\therefore f(x)=\cancel{C_1 e^{-3x}}\; C_1 e^{3x}+C_2 e^{-2x}$$

$$\therefore f(0)=C_1+C_2=1$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=C_1\cdot e^{\frac{3}{2}}+C_2\cdot e^{-1}=e^{-1} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x)=e^{-2x}.$$

14. 确定 λ 的值，使曲线积分 $I=\int_L\left(x^4+4xy^\lambda\right)\mathrm{d}x+\left(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并当 L 的起点与终点分别为 $(0,0),(1,2)$ 时计算此积分的值.

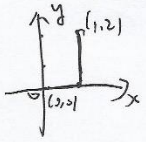
解：由路径无关条件有

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=6y^2\cdot(\lambda-1)\cdot x^{\lambda-2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=4x\cdot\lambda\cdot y^{\lambda-1}$$

$$\because \frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y} \text{ 有 } \begin{cases}\lambda-1=2\\ \lambda-2=1\\ 6(\lambda-1)=4\lambda\end{cases} \Rightarrow \lambda=3$$

$\therefore \lambda=3$



$$I=\int_L(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$$

$L_1:\begin{cases}y=0\\0\le x\le 1\end{cases}$, $L_2\begin{cases}x=1\\0\le y\le 2\end{cases}$

$$\therefore I=\int_0^1 x^4dx+\int_0^2(6y^2-5y^4)dy$$

$$=\frac{1}{5}+(2y^3-y^5)\Big|_0^2=\frac{1}{5}-16=-\frac{79}{5}$$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

15. 求n的值，使$\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^n}$为某函数$u(x,y)$的全微分，并求$u(x,y)$.

解：$\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{(x^2+y^2)^n-(x+y)n\cdot(x^2+y^2)^{n-1}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^{2n}}$

$\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{-(x^2+y^2)^n-(x-y)\cdot n(x^2+y^2)^{n-1}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^{2n}}$

令 $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$

$2(x^2+y^2)^n-2(x^2+y^2)\cdot n\cdot(x^2+y^2)^{n-1}=0$

$=2\ (x^2+y^2)^n\cdot(1-n)=0$

$\therefore\ n=1$

$\therefore u(x,y)=\int_0^x \frac{1}{x}dx+\int_0^y \frac{x+y}{x^2+y^2}dy+C$

$=\ln x+\left(\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)\Big|_0^y+C$

$=\ln x+\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\ln x^2+C.$

$=\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

16. 设函数 $f(x)$ 可导，满足 $\left(xe^x+f(x)\right)y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$ 及 $u(x,y)$.

解. 由题意知

$$f'(x)=f(x)+xe^x$$

$$f'(x)-f(x)=x\cdot e^x$$

$$f(x)=e^{\int 1\mathrm{d}x}\left[C+\int x\cdot e^x\cdot e^{-\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=e^x\left[C+\frac{x^2}{2}\right]$$

$\because f(0)=0$

$\therefore C=0$

$\therefore f(x)=e^x\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot e^x$

$$u(x,y)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{x^2}{2}\cdot e^x\cdot\mathrm{d}y+C$$

$$=0+\frac{x^2}{2}e^x\cdot y+C$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot e^x\cdot y+C.$$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

17. 设沿 xOy 面上任意简单闭曲线 L，都有曲线积分 $\oint_L \left(3xy^2-y^\alpha\right)\mathrm{d}x+\left(3x^\beta y-3xy^2\right)\mathrm{d}y=0$，求 α,β 的值及微分方程 $\left(3xy^2-y^\alpha\right)\mathrm{d}x-\left(3x^\beta y-3xy^2\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解：由曲线积分路径无关条件知

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=3y\cdot\beta\cdot x^{\beta-1}-3y^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=6xy-\alpha\cdot y^{\alpha-1}$$

由 $\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$ 知.
$$\begin{cases}3\beta=6\\ \beta-1=1\\ \alpha-1=2\\ \alpha=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$$

∴ $u(x,y)$ 为某中常数或为零的解函

$$u(x,y)=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y 3x^2y-3xy^2\,dy$$

$$=\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3$$

∴ 通解为 $\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3=C$. C 为常数.

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

18. 设 L 是圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$ 的逆时针方向，$f(x)$ 是恒为正的连续函数，证明

$$\oint_L xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geq 2\pi.$$

解：由格林公式知

$$\oint_L xf(y)\,dy-\frac{y}{f(x)}\,dx=\iint_{D_{xy}}\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)dxdy$$

由

由图知 L 关于 $y=x$ 对称.

$$\therefore \iint_D f(y)+\frac{1}{f(x)}\,dxdy=\iint_D [f(x)+[f(x)]^{-1}]\,dxdy$$

$\because f(x)>0$ 且连续

由均值定理有

$$f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2.$$

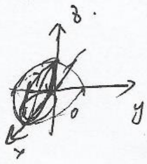
$$\therefore \iint_D f(y)+\frac{1}{f(x)}\,dxdy\geq\iint_D 2\,dxdy=2\pi$$

$$\therefore \oint_L xf(y)\,dy-\frac{y}{f(x)}\,dx\geq 2\pi.$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

19. 计算 $I=\oint\limits_L \frac{y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\x^2+y^2=2ax\end{cases}$，$a>0$，$z\geq 0$，从 z 轴正向往下看，L 的方向为顺时针方向.

解：



由题

$$\oint\limits_L \frac{y^2dx+z^2dy+x^2dz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\frac{1}{4a^2}\oint\limits_L y^2dx+z^2dy+x^2dz.$$

$$=\frac{-1}{4a^2}\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4a^2}\iint\limits_S 2(zdydz+xdzdx+ydxdy)$$

因L在zox面内投影为一条线

y在L的xoy面投影为奇函数且关于x轴对称

$\therefore \iint\limits_S xdzdx+ydxdy=0$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{4a^2}\iint\limits_S 2zdydz=\frac{1}{4a^2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\sin\theta}\rho^2\sin\theta d\rho$

$$=\frac{1}{4a^2}\cdot 2\times 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}a^3\cdot\sin^4\theta d\theta=\frac{1}{4a^2}\times 8a^3\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{a}{2}\pi=\frac{\pi}{2}a.$$

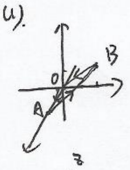
第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

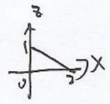
20. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分.

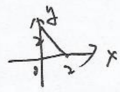
(1) $\oint_L A\cdot dl$，其中 $A=-3y^2 i+4z j+6x k$，L 为以 $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2,1)$ 为顶点的三角形边界，从 z 轴正向看去，L 的方向为逆时针方向;.

(2) $\oint_L 2y\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+z=R$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 的方向为逆时针方向.

解：(1).







$$\oint_L A\,dl=\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -3y^2 & 4z & 6x\end{vmatrix}$$

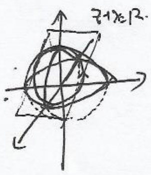
∵ 在 yoz 面内投影为一条直线

$$\therefore 上式=\iint_{D_{zx}} 6\,dzdx+\iint_{D_{xy}} 6y\,dxdy$$

$$=6\times2\times\frac{1}{2}\times1+\int_0^2 dx\int_0^{2-x} 6y\,dy$$

$$=6+\int_0^2 3(x^2-4x+4)dx=6+8=14$$

(2).



$$\oint_L 2ydx-zdy-xdz$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & -z & -x\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S dydz+2\iint dxdy$$

∵ L 在 xoy 面和 yoz 面投影相同

$$\therefore \oint_L=-\iint_{D_{xy}} dxdy，设\ x=\frac{\rho}{2}\cos\theta,\ y=\frac{\rho}{\sqrt2}\sin\theta$$

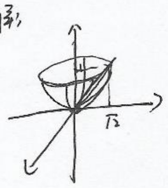
代入有 $\rho=R$

$$\therefore \oint_L=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho\,d\rho=-\frac{\pi R^2}{2\sqrt2}.$$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

21. 求曲面 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$ 的质量，其上每一点的面密度等于该点到面 xOy 的距离.

解：



$M=\iint \mu \, ds$，$\mu=z$．$\frac{\partial z}{\partial x}=x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=y$

$\therefore\ M=\iint\limits_{D_{xy}} z\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho$

$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}u\cdot\sqrt{1+u}\,du$，令 $\rho^2=u$.

$\therefore=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{3}}(t^2-1)\,2t^2\,dt$，令 $\sqrt{1+u}=t$

$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{3}}2t^4-2t^2\,dt$

$=\frac{1}{4}\times 2\pi\times\left(\frac{2}{5}t^5\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{3}}\right)$

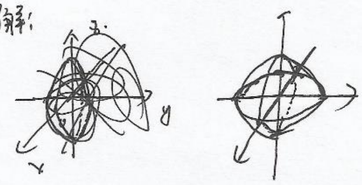
$=\frac{1}{4}\times 2\pi\times\left(\frac{2\times\sqrt{3}(27-15)}{15}+\frac{2\times 2}{15}\right)$

$=2\pi\cdot\frac{1}{15}(6\sqrt{3}+1)$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

22. 设 S 为椭圆面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，ρ 为原点到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解：



$F(x,y,z)=\frac{x^3}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2-1=0.$

$\therefore F_x'=x,\ F_y'=y,\ F_z'=2z.$

$\therefore$ 设 (x_0,y_0,z_0) 为椭面上一点.

$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

$\therefore x_0X+y_0Y+2z_0Z=2$

$\therefore \rho(x_0,y_0,z_0)=\frac{|2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+4z_0^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{x}{2z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x'}{F_y}=-\frac{x}{2z}$

$\therefore dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}{2z}$

$\therefore \iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{4}(x^2+y^2+4z^2)\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{4}(4-x^2-y^2)\,dxdy$

$=1\cdot\iint\limits_D dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{4}(x^2+y^2)dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt2}\rho d\rho-\frac{1}{4}4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt2}\rho^3d\rho$

$=2\pi-\frac{1}{4}\times2\pi\times\frac{1}{4}\times4=\frac{3}{2}\pi$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

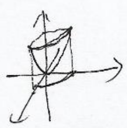
23. 计算$\oiint\limits_S \left(xz\cos\alpha + x^2y\cos\beta + y^2z\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$，其中$S$为$z=x^2+y^2, x^2+y^2=1$与三坐标面在第一卦限所围立体的边界曲面，$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为$S$的外法线向量.

解：由题

$$\oiint\limits_S (xz\cos\alpha + x^2y\cos\beta + y^2z\cos\gamma)dS$$

$$= \oiint\limits_S xz\,dydz + x^2y\,dzdx + y^2z\,dxdy$$

$$= \iiint\limits_V (z + x^2 + y^2)dV$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\rho^2} (z+\rho^2)dz$$

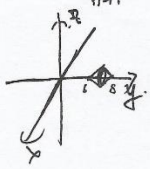
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\left(\frac{1}{2}\rho^4 + \rho^4\right)d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{3}{2}\rho^5 d\rho$$

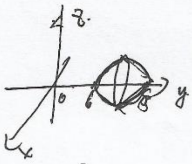
$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{8}$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

24. 设 $f(u)$ 有连续导数，计算 $I=\iint\limits_S \frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $y=x^2+z^2+6, y=8-x^2-z^2$ 所围立体表面的外侧.

解:





如图

$$I=\iint\limits_S X\,dydz+Y\,dzdx+Z\,dxdy$$

$$=\iiint\limits_V \left[\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y^2}+1\right]dv$$

$$=\iiint\limits_V dV$$

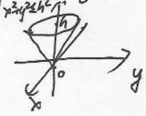
$$\iiint\limits_V dv=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho^2\cdot\rho\,d\rho=2\times2\pi\times\frac{1}{4}=\pi$$

$\therefore I=\pi$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题

25. 计算 $\iint\limits_S (x-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 是锥面 $z^2=x^2+y^2\ (0\le z\le h)$ 的上侧.

解： $\iint\limits_S = \iint\limits_{S^-}$　　补充 $S':\begin{cases} z=h \\ x^2+y^2\le h^2 \end{cases}$，上.



由高斯公式有.

$$\oiint\limits_{S+S'} = -\iiint\limits_V (1+1+1)\,dv = -3\iiint\limits_V dv = -3\times\frac{1}{3}\times\pi h^2\cdot h = -\pi h^3$$

$$\iint\limits_{S'} = -\iint\limits_{S}(h-x^2)\,dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}}(h-x^2)\,dxdy$$

$$= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h (h-\rho^2\cos^2\theta)\rho\,d\rho$$

$$\cancel{= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}h^3-\frac{1}{4}h^4 c\right.}$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}h^3-\frac{1}{4}h^4\cos^2\theta\right)d\theta$$

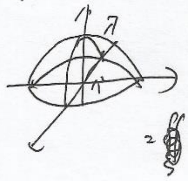
$$= \frac{1}{4}h^4\times 4\times\frac{1}{2}\times\pi-\frac{1}{2}h^3\times 2\pi = \frac{\pi}{4}h^4-\pi h^3$$

$$\therefore \iint\limits_S = \oiint\limits_{S+S'} - \iint\limits_{S'} = -\frac{\pi}{4}h^4.$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第八节　综合例题

26. 计算 $\iint\limits_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：



补充 S_1 为 $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2\le a^2 \end{cases}$.

$\therefore \oiint\limits_{S+S_1} (x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$

$=\iint\limits_S+\iint\limits_{S'}=\iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)dV$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2dr$

$=3\times2\pi\times1\times\frac{a^5}{5}=\frac{6}{5}\pi a^5$

$\iint\limits_{S'}=-\iint\limits_{D_{xy}} ay^2dxdy=-a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sin^2\theta\,\rho^2\cdot\rho\, d\rho$

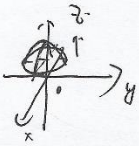
$=-a\times4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^a$

$=-\frac{\pi}{4}a^5$

$\therefore\iint\limits_S=\frac{6}{5}\pi a^5-\frac{1}{4}\pi a^5=(\frac{24}{20}+\frac{5}{20})\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.$

27. 设 $\boldsymbol{v}=\left(z\arctan y^2, z^3\ln\left(x^2+1\right), z\right)$，$S$ 为抛物面 $x^2+y^2+z=2$ 位于平面 $z=1$ 上方的那部分，求 $\boldsymbol{v}$ 流向 S 上侧的流量.

解：



$$Q=\iint_{S_{z}^{+}} z\arctan y^2\,dy\,dz+z^3\ln(x^2+1)\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$=\iint_{S_{z}^{+}} z\,dx\,dy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(2-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2-\rho^2)\rho\,d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^1\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\,d\theta=\frac{3}{4}\times 2\pi=\frac{3}{2}\pi$$

第九章 曲线积分与曲面积分
第八节 综合例题