1. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$. 当 $x=\pm1$ 时，级数发散 故收敛域为 $(-1,1)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}=1$. 当 $x=\pm1$ 时，级数收敛，故收敛域为 $[-1,1]$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{1+n}{n}\right)^n=0$ $\therefore R=+\infty$. 故收敛域 $(-\infty,+\infty)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}=2$ $\therefore R=\frac{1}{2}$，当 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时，该级数收敛

$\therefore$ 收敛域 $[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(x-1)^n$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln n}{\ln(1+n)}\right|=1$. $R=1$. 当 $x=0$ 时，原式 $=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 故发散

当 $x=2$ 时，原级数收敛.

$\therefore$ 收敛域 $(0,2]$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!!}$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{2(n+1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+2}=0$ $\therefore R=+\infty$. $\therefore$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}(3x+1)^n$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n}}=1$. $3R=\frac{1}{1}=1$ $R=\frac{1}{3}$，中心是 $x_0=-\frac{1}{3}$ 当 $x=0$ 时.

$a_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ 故级数发散，当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，级数收敛. $\therefore$ 收敛域 $[-\frac{2}{3},0)$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{2n-1}$; $\frac{1}{x}\cdot x^{2n}$ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{2^n}\right|=2$. $\therefore R=\frac{1}{2}$ $\therefore x^2=R\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

原级数为 $\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，故收敛域 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot2^n}x^{3n}$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot2=2$, $R=\frac{1}{2}$, $x^3=R\Rightarrow x=\pm\sqrt[3]{2}$. 当 $x=\sqrt[3]{2}$ 时. 原式为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n}$ 收敛.

当 $x=-\sqrt[3]{2}$ 时 原式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore$ 收敛域 $(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}]$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n\sqrt{n}}(x+1)^n$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{(n+1)^3}}\cdot\frac{\sqrt{n^3}}{2^{2n-1}}=4$, $R=\frac{1}{4}$, $\therefore x=-1\pm\frac{1}{4}\Rightarrow x=-\frac{5}{4}$ 或 $x=-\frac{3}{4}$

当 $x=-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{3}{4}$ 时 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛. $\therefore$ 收敛域 $[-\frac{5}{4},-\frac{3}{4}]$.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$, $R=+\infty$. $\therefore$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$.

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n$; $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\right)=1$ $\therefore R=1$. $\therefore$ 当 $x=\pm1$ 时

$\lim_{n\to\infty}a_n\cdot x_n\neq0$. 故级数发散，故收敛域 $(-1,1)$

(13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,b>0)$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$，设 $a>b$. 左式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^{n+1}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right)}=\frac{1}{a}$

同理若 $b>a$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{b}$ $\therefore R=\max\{a,b\}$，在 $a>b$ 时. $R=a$, $x=\pm a$.

当 $x=\pm a$ 时. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=1\neq0$. 故发散. $\therefore$ 收敛域 $(-R,R)$

$R=\max\{a,b\}$

第十章 级数

第四节 幂级数

2. 设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3$，求下列各级数的收敛半径.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-5)^{2n}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n-1}$.

(1). $R'=\frac{1}{3}$

$\frac{R}{2}=R' \Rightarrow R=\frac{2}{3}$

(2). $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$

$\therefore R'=\frac{1}{3}$, $R^2=R' \Rightarrow R=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3). $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{n-1}{n}=3$

$\therefore R'=\frac{1}{3}$, $R'=R'=\frac{1}{3}$

$\therefore R=\frac{1}{3}$

第十章　级数
第四节　幂级数

3. 求下列幂级数的和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{n-1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

(1). $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)\cdot x^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

$\therefore R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$，当 $x=2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ 发散，当 $x=-2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，$\therefore$ 收敛域 $(-2,2)$

$\therefore S(x) = \frac{1\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$，$x\in(-2,2)$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$，$\therefore R=1$，当 $x=\pm1$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot x^n \neq 0$，$\therefore$ 收敛域 $(-1,1)$

令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}2n\cdot x^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{n-1} + \frac{1}{1-x}$

讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{n-1}$ $\therefore \int\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int 2nx^{n-1}dx$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}2\cdot x^n = 2\cdot\frac{x}{1-x}$.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{n-1} = \left(\frac{2x}{1-x}\right)' = \frac{2(1-x)-(2x)\times(-1)}{(1-x)^2}$

$= \frac{2-2x+2x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

$\therefore S(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{3-x}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$，当 $x=\pm1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nx^n\neq0$，$\therefore$ 收敛域 $(-1,1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2}\cdot x^{n-1} + \frac{n}{2}x^{n-1}\right)$，$\therefore \int\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2}x^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\int_0^x n^2\cdot x^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n\cdot x^n$

$\int\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}x^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{2}x^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}x^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1-x} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}x^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1-1)x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n - \frac{x}{1-x}$

$\therefore \int\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^ndx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$ $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}$

$= \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} - \frac{x(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2}x^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{(1-x)^4}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2}x^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}x^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2+x^2-2x+1}{(1-x)^4} = \frac{1}{(1-x)^3}$

$\therefore S(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$.

第十章　级数
第四节　幂级数

3. (4). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n+5} = 1 \quad \therefore R = \frac{1}{1} = 1.$

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$ 发散

$x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$ 发散，收敛域 $(-1,1)$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$；$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} - 1 = \frac{1}{1-x^4} - 1$

$\therefore S(x) = \int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x \left(\frac{1}{1-x^4} - 1\right)dx$

$= \int_0^x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)\right) - 1\right]dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\arctan x + \frac{1}{4}\cdot\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1-x) - x$

$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$

(5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \therefore R = 2.$

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ 发散，当 $x=-2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 级数收敛，收敛域 $[-2,0)$

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$，$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n} = \int \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}dx = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$

$\therefore S(x) = -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$，当 $x=0$ 时常数项为 1

$\therefore S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2 \le x < 0 \cup 0 < x < 2 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

3.

(6). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$, $R=1$

~~当~~收敛域 $x\in[-1,1]$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

$\therefore S'(x)=\int S''\,dx=-\ln(1-x)$

$S(x)=\int S'(x)=\int -\ln(1-x)\,dx=-x\cdot\ln(1-x)-\int\frac{x}{1-x}\,dx$

$=-x\cdot\ln(1-x)-\int\frac{1}{1-x}-1\,dx=\ln(1-x)-x\cdot\ln(1-x)+x$

$=(1-x)\ln(1-x)+x$, $-1\le x<1$

当 $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1$

$\therefore S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & -1\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

4. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\right|=\frac{1}{2}$，$\therefore R^2=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore R=\sqrt{2}$. 当$x=\pm\sqrt{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}$ 发散.

故收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\cdot x^{2n-2}$

$\therefore \int S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{2n-1}{2^n}\cdot x^{2n-2}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot x^{2n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}$

$=\frac{x}{2-x^2}$.

$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{(2-x^2)+x\cdot 2x}{(2-x^2)^2}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$.

$S(1)=\frac{2+1}{2-1}=3$

$\therefore S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$

第十章 级数
第四节 幂级数