13021072. [illegible]. 05011713

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是 B .

A. 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B. 若存在非零常数 λ，使 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$，$\lambda \neq 0$，所以 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 的级数具有相同收敛性.

第十章　级数
第二节　正项级数

2. 判别下列级数的收敛性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n-5}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+3)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^{\frac{3}{2}}}$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^3}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(n+2)^2}{n(n+1)}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

(1) $\frac{3}{2^n-5}<\frac{3}{2^{n-1}}$ 当n充分大时，$\frac{3}{2^{n-1}}$ 的级数收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n-5}$ 收敛

(2). $\frac{4}{n(n+3)}<\frac{4}{n^2}$，$(n\in\mathbb{N}^+)$. $\frac{4}{n^2}$ 的级数收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+3)}$ 收敛.

(3) $\frac{n+1}{n^2+n+1}=\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}=\frac{1}{n}$，由于 $\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}$ 发散.

(4). $\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=(1+\frac{1}{n})\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2^{n-1}}$，由于 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 的级数收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot2^n}$ 收敛

(5). $\arctan n<\frac{\pi}{2}$，∴ $\frac{\arctan n}{n^{\frac{3}{2}}}<\frac{\frac{\pi}{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$，由 $\frac{3}{2}>1$，故 $\frac{\frac{\pi}{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛.

(6). 当 $p\le1$ 时. $\frac{\ln n}{n^p}\ge\frac{1}{n}$，由于 $\frac{1}{n}$ 的级数发散，故此时 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 发散. ~~当p>1时~~；

当 $p>1$ 时，$\frac{\ln n}{n^p}=\frac{\ln n}{n^{p-1-\delta}}\cdot\frac{1}{n^{1+\delta}}$　$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{p-1-\delta}}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n^{1+\delta}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{p-1-\delta}}=0$. ∵ $\frac{1}{n^{1+\delta}}$ 收敛

故 $\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛 $(\delta\to0)$

(7). $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{n}$ ∵ $\frac{1}{n}$ 发散. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 发散.

(8) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=(\ldots)\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^3>1$. ∴ 级数发散.

(9). $\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}=\frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}<\frac{2}{2\sqrt{n^3-1}}<\frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$ 由于 $\frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$ 的级数收敛，

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$ 收敛.

(10). $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}=\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}<\frac{2}{n\cdot2\sqrt{n-1}}<\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$ $(n\ge2)$

由 $\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$ $(n\ge2)$. 的级数收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$ 收敛.

(11). $\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$ ∴ $[1+(-1)^n]\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^2}$ ∵ $\frac{1}{n^2}$ 的级数收敛.

∴ $[1+(-1)^n]\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$ 收敛.

(12). $\ln\frac{(n+2)^2}{n(n+1)}=\ln\left(\frac{n^2+4n+4}{n^2+n}\right)=\ln\left(1+\frac{3n+4}{n^2+n}\right)$

$=\ln\left(1+\frac{3+\frac{4}{n}}{n+1}\right)\sim\frac{3}{n+1}$ ∵ $\frac{3}{n+1}$ 的级数发散

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{(n+2)^2}{n(n+1)}\right)$ 发散

(13) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$

∵ $\frac{1}{n^2}$ 的级数收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(\frac{n+1}{n})\right)$ 收敛

第十章　级数
第二节　正项级数

13207172. 刘鏊 45011713

3. 判别下列级数的收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\arctan\frac{\pi}{2^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$.

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$, $\cancel{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{4}\times\cdots\frac{n}{4}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{4}>1$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$ 发散

(2) $\lim_{n\to\infty}n^2\arctan\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{2^n}=0$,

$\because \frac{n^2}{2^n}$ 收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\arctan\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(3). $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3=\frac{1}{3}<1$.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$ 收敛

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!!}$ 收敛

$\cancel{(5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}\cdot n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}\cdot(1+\frac{1}{n})^n=e>1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 发散

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(7) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}=\sqrt{2}-1<1$, 级数收敛

第十章 级数

第二节 正项级数

4. 判别下列级数的收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^{2n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[n]{2}\right)^{n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{\ln(n+1)}(a>0)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}(a>0)$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2}=\frac{1}{4}<1$,

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n}$ 收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(2n\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\infty>1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ 发散.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\sqrt{2}-\sqrt[n]{2}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}-2^{\frac{1}{n}}=\sqrt{2}-1<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[n]{2}\right)^{n}$ 收敛

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-1}{n+1}\cdot n}=\frac{1}{e}<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 收敛

(5) $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{\ln(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{(\ln(n+1))^{\frac{1}{n}}}}$

① $a>1$ 时，$a^n=(1+a-1)^n>1+n(a-1)$，$\ln(1+n)<n$．$\frac{a^n}{\ln(1+n)}>a-1$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{\ln(n+1)}$ 不趋于0，此级数发散

② $a=1$ 时，$\ln(1+n)<n$　$\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$，$\therefore$ 级数发散

③ $a<1$ 时，$\frac{a^n}{\ln(1+n)}<a^n$，由于 a^n 的级数收敛，$\therefore$ 此时级数收敛

综上，$a\geq1$ 时，级数发散，$0<a<1$ 时收敛

(6) ~~① 当 $a=1$ 时，~~ $\cancel{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n}}=1}$

① 当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e}=\infty$，级数发散.

② 当 $a\neq1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{(a+\frac{1}{n})^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{a+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{na+1}=\frac{1}{a}$，~~当 $a<1$ 时~~

综上当 $0<a\leq1$ 时，级数发散，当 $a>1$ 时，级数收敛.

第十章　级数
第二节　正项级数

5. 判别级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ 的收敛性.

解：$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^2} dx$

$= \int_3^{\infty} \frac{1}{\ln x ((\ln \ln x))^2} d \ln x$

$= \int_3^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln x)^2} d(\ln \ln x)$

$= -\frac{1}{\ln(\ln x)} \Big|_3^{\infty} = 0 - (-\frac{1}{\ln(\ln 3)}) = \ln \ln 3$

∵该积分收敛

∴该级数收敛

第十章 级数

第二节 正项级数

6. 设 $a_n>0$，$b_n>0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\ (n=1,2,\ldots)$，证明当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛，当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

解：

$a_1\ge\frac{b_1}{b_2}a_2,\ a_2\ge\frac{b_2}{b_3}a_3,\ \cdots\ a_{n-1}\ge\frac{b_{n-1}}{b_n}a_n.$

$\therefore a_1\ge\frac{b_1}{b_n}a_n.$

$\therefore a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n.$

$\therefore$ 由比较法知，当 b_n 收敛时，$\sum a_n$ 收敛.

当 $\sum a_n$ 发散，$\sum b_n$ 发散

第十章　级数
第二节　正项级数

7. 设 $a_n \geq 0$，证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛.

解：设 $b_n = \sqrt{a_n a_{n+1}}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

∵ $\sum a_n$ 收敛. ∴ $a_{n+1} < a_n$

∴ $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lambda \quad (\lambda \geq 0)$

若 $\lambda = 0$，a_n 收敛，则 b_n 收敛.

若 $\lambda \neq 0$，b_n 与 a_n 具有相同的敛散性

综上. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛

另：

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

∵ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，∴ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛，

∴ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛

第十章 级数
第二节 正项级数

8. 设 $a_n \geq 0$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{a_n}-1\right)$ 的收敛性相同.

解：$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{a_n}-1}{a_n} = \ln 2 > 0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 2^{a_n}-1$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 具有相同收敛性.

第十章 级数
第二节 正项级数