课程编号：100172203　　北京理工大学 2020-2021 学年第二学期

《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

座号 ______　班级______________　学号______________　姓名______________

注: 试卷共 6 页, 十个大题;解答题必须有过程;试卷后面空白纸撕下做草稿纸;试卷不得拆散.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

得分	

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. 曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=13\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面 S 的方程为___________.

2. 已知 L 是曲线 $y=\sqrt{x}$ 上从点 $A(1,1)$ 到点 $B(4,2)$ 的弧段，计算第二类曲线积分

$$\int_L \frac{x^2}{y}dx+\frac{x}{y}dy=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

3. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，将累次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

交换积分次序后的累次积分形式为 $I=$____________________.

4. 设 L 是曲线弧 $x=e^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=e^t$（$0\le t\le 2$），则曲线积分

$$\int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}=\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$ 的收敛域为__________________.

得分	

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$ 在 $(2,1,1)$ 点处的法平面方程.

2. 设 $u(x,y)$ 是由方程 $u^2 - z^2 + 2y^2 - x = 0$ 确定的可微的隐函数，其中 $z = z(x,y) = xy^2 + y\ln y - y$，且 $u(x,y) > 0$，求 $(2,1)$ 点处 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

3. 试计算以曲面 $z = x + y$ 为上顶，以 xoy 平面上的区域 $D: x^2 + y^2 \le x + y$ 为下底的曲顶柱体 Ω 的体积.

4. 已知 L 是从点 $A(1,2)$ 到点 $B(3,4)$ 的直线，计算 $\int_L (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy.$

得分	

三、(8 分) 设 $z=f(u(x,y))$，其中 f 可微， $u(x,y)$ 是由方程 $g(u)+\int_{x^2}^{y^2}\varphi(t)dt=0$ 确定的可微函数，又设 $\varphi(t)$ 连续，$g(u)$ 可导，且 $g'(u)\neq 0$，试求 $y\varphi(y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\varphi(x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

得分	

四、(6 分) L 是圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$ 的逆时针方向，$f(x)$ 恒正，连续．证明：$\oint\limits_L xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$

得分	

五、(8 分) 试利用 Lagrange 乘数法在椭球面 $\Sigma: 2x^2+2y^2+z^2=5$ 上求一点 P，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在 P 点沿椭球面 Σ 在 $\mathrm{M}(1,1,1)$ 点处的外法线方向的方向导数最大.

得分	

六、(8 分) 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片，占有平面闭域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2, y\ge 0\}$, 过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P, $OP=a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

得分	

七、(8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$ 的值.

得分	

八、(8 分) 设 $S(x)$ 为函数 $f(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x\le 0\\ x^2 & 0<x\le\pi\end{cases}$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数展开式的和函数, 求 $S(6),S(-6),S(2\pi),S(3\pi)$ 的值.

得分	

九、(8 分) 计算曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz+[yf(yz)+y^3]dzdx+[z^3-zf(yz)]dxdy,$ 其中函数 f 有连续的导函数, Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

得分	

十、(6 分) 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2},0<b_n<\dfrac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n,$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(1) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0;$ (2) 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.