北京理工大学 2020-2021 学年第二学期《工科数学分析》（下）期末试题(A 卷)

标准答案及评分标准

2021年6月20日

一、填空题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. $3x^2+2y^2+2z^2=13$

2. $\dfrac{139}{10}$

3. $I=\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy$

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$

5. （$-2,0$）

二、计算题（每小题 5 分，共 20 分）

1．解：方程组两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} x+y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ x+y\dfrac{dy}{dx}-z\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases},\quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases},$$

得在点(2,1,1)处的切向量为; $\vec{T}=\{1,-2,0\}$ …………(**3 分**)

法平面方程为: $x-2y=0.$ …………(**5 分**)

2．解：将 $x=2,y=1$ 代入已知方程得 $u=1,z=1$

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-1=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2 \end{cases}$$

将 $x=2,y=1$，$u=1,z=1$ 代入得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{3}{2},\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$ …………(**3 分**)

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}+4y=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy+\ln y \end{cases}$$

将 $x=2,y=1$，$u=1,z=1$ 代入得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4$ …………(**5 分**)

3．解：$V=\iint\limits_D (x+y)dxdy$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\cos\theta+\sin\theta} \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)d\rho \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\ 分)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^4 d\theta=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 tdt \quad (令\ t=\theta+\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{4}{3}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4 tdt]\ =\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\ 分)$$

4．解：$X=6xy^2-y^3, Q=6x^2y-3xy^2$，且 $\frac{\partial X}{\partial y}=12xy-3y^2=\frac{\partial Y}{\partial x}$,

故在整个平面内，积分与路径无关， ············(**3 分**)

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$$

$$=\int_1^3(24x-8)dx+\int_2^4(54y-9y^2)dy=236. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\ 分)$$

三、(8 分) 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\frac{\partial u}{\partial x}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'\frac{\partial u}{\partial y}$, ············(**2 分**)

$$g'(u)\frac{\partial u}{\partial x}-2x\varphi(x^2)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x\varphi(x^2)}{g'(u)}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\ 分)$$

$$g'(u)\frac{\partial u}{\partial y}+2y\varphi(y^2)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2y\varphi(y^2)}{g'(u)}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6\ 分)$$

$$y\varphi(y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+x\varphi(x^2)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=y\varphi(y^2)f'\frac{2x\varphi(x^2)}{g'(u)}+x\varphi(x^2)f'\frac{(-2y\varphi(y^2))}{g'(u)}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8\ 分$$

四、(6 分)

证：由 Green 公式，$\oint\limits_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint\limits_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy$ ············(**2 分**)

由对称性，$\iint\limits_D f(y)dxdy=\iint\limits_D f(x)dxdy$， ············(**4 分**)

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy$$

$$=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\geq\iint_D 2\sqrt{f(y)\cdot\frac{1}{f(x)}}dxdy=2\pi$$ …………(**6 分**)

五、(8 分) 解：设 $P(x_0,y_0,z_0)$，椭球面在 $(1,1,1)$ 处的外法向量为：

$\vec{n}=\{4x,4y,2z\}|_{(1,1,1)}=\{4,4,2\}$. $\vec{n}^0=\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\}$. …………(**1 分**)

目标函数：$u=\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)$ …………(**3 分**)

约束条件：$2x_0^2+2y_0^2+z_0^2=5$

令 $F(x,y,z)=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)+\lambda(2x_0^2+2y_0^2+z_0^2-5)$

$$\begin{cases}F_x'=\frac{4}{3}+4\lambda x_0=0\\F_y'=\frac{4}{3}+4\lambda y_0=0\\F_z'=\frac{2}{3}+2\lambda z_0=0\\2x_0^2+2y_0^2+z_0^2=5\end{cases}$$ ，得驻点 $(1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$ …………(**6 分**)

又在(1,1,1)处：$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)=\frac{10}{3}$；

在(-1,-1,-1)处：$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}=\frac{2}{3}(2x_0+2y_0+z_0)=-\frac{10}{3}$.

所以使方向导数最大的点为(1,1,1)，最大方向导数为$\frac{10}{3}$. …………(**8 分**)

六、(8 分) 解：设 P 点的坐标为 $(0,0,a)$. 薄片的面密度为 $\mu=\frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $F=(F_x,F_y,F_z)$. 由于薄片关于 y 轴对称，所以 $F_x=0$.

…………(**2 分**)

$$F_y = G\iint_D \frac{m\mu y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma = m\mu G\int_0^{\pi} d\theta\int_0^R \frac{\rho^2\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\rho$$

$$= \frac{4GmM}{\pi R^2}(\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a} - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}),$$ …………(**5 分**)

$$F_z = -G\iint_D \frac{m\mu a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma = -m\mu Ga\int_0^{\pi} d\theta\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\rho$$

$$= -\pi m\mu Ga\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\rho = -\frac{2GmM}{R^2}(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}).$$ …………(**8 分**)

七、(8 分) 解： $2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$.

显然 $s_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 的前 n 项部分和. …………(**2 分**)

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$,

则 $S(x) = [\int_0^x S(x)dx]' = [\sum_{n=1}^{\infty} x^n]' = [\frac{1}{1-x}-1]' = \frac{1}{(1-x)^2}$. …………(**6 分**)

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{1}{3}S(\frac{1}{3}) = \frac{3}{4}$，所以 $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4}$,

从而，$\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}] = \lim_{n\to\infty} 2^{s_n} = 2^{\frac{3}{4}}$. …………(**8 分**)

八、(8 分)

解： $$S(x) = \begin{cases} 2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 < x < \pi \\ 1 & x = 0 \\ 1+\dfrac{\pi^2}{2} & x = \pm\pi \end{cases}$$ …………(**4 分**)

$S(6) = S(6-2\pi) = 2 \qquad S(-6) = S(2\pi-6) = (2\pi-6)^2$

$S(2\pi) = S(0) = 1 \qquad S(3\pi) = S(\pi) = 1+\frac{\pi^2}{2}$ …………(**8 分**)

九、(8 分) 解：设 $S: x^2+y^2\le 1, z=0$，利用高斯公式

$$I=(\oiint_{\Sigma+S}-\iint_{S})x^3dydz+[yf(yz)+y^3]dzdx+[z^3-zf(yz)]dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\textbf{2 分})$$

$$=\iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)dV-0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\textbf{4 分})$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\textbf{6 分})$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{6\pi}{5} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\textbf{8 分})$$

十、（6 分）

（1）证明： 由 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$，得 $a_n=\cos a_n-\cos b_n>0,$

从而 $0<a_n<b_n.$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ，故 $\lim_{n\to\infty}a_n=0.$ …………(**2 分**)

（2）证明：由 $a_n=\cos a_n-\cos b_n$，得

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}=\frac{-2\sin(\frac{a_n+b_n}{2})\sin(\frac{a_n-b_n}{2})}{b_n}\sim\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\textbf{4 分})$$

因 $0\le\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}\le\frac{b_n}{2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n}$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛. …………(**6 分**)