1. 将下列函数展成x的幂级数并指出收敛域.

(1) $\ln(2+x)$;

(2) $\dfrac{1}{4+x^2}$;

(3) $\sin^2 x$;

(4) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$;

(5) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$;

(6) xa^x;

(7) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(8) $\arcsin x$;

(9) $(1+x)\ln(1+x)$;

(10) $\int_0^x \dfrac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$.

(1) 解: $\ln(2+x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$

$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\cdot x^n$.

$\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$, $R=2$

$\because -2<x$, $\therefore$ 收敛半径 $(-2,2]$.

(2). $f(x)=f\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$, $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\right)$ $\quad \dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

$f(x)=\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{4^{n+1}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$, $\therefore R^2=4\Rightarrow R=2$.

当$x=\pm 2$时 级数发散 $\therefore$ 收敛域 $(-2,2)$.

(3). $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}\cdots\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}\cdots\right)=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n}}{2(2n)!}\cdot x^{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(n+1)\cdot 2\cdot 4}=0$, $\therefore R=\infty$

$\therefore$ 收敛域 $(-\infty,+\infty)$.

(4). $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\leq -1$, 收敛域为 $(-1,1)$

$\therefore f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)\cdot(-2)(-3)\cdots(-(n+1))}{n!}x^n$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\cdot x^n$, $x\in(-1,1)$

第十章 级数
第五节 泰勒级数

1. (5) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+2}}}{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+2}}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right)}{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}=\frac{1}{2}$ $\therefore R=\frac{1}{l}=2$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 无定义，当 $x=-2$ 时，级数发散，故收敛域 $x\in(-2,2)$

(6). $f(x)=x\cdot a^x=x\cdot e^{x\ln a}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}\cdot x^{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a}{n+1}=0$，$\therefore R=0$，收敛域 $(-\infty,+\infty)$

(7). $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=x\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot(x^2)^n\right)$

$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$，$\because -1<\alpha\le 0$ $\therefore$ 收敛域 $(-1,1]$。

(8). $f(x)=\arcsin x$，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-x^2)^n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n}$

$\therefore f(x)=\int_0^x f'(x)dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}=1$ $\therefore R^2=1\Rightarrow R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，级数收敛。收敛域为 $[-1,1]$.

(9) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，$\because \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{(n+1)}$

$=x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$

$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n n+(-1)^{n+1}(n+1)}{n(n+1)}\right]x^{n+1}$

$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}x^{n+1}$，收敛域 $(-1,1]$

(10).

由(8)知

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore \frac{\arcsin x}{x} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$\therefore \int_0^x \frac{\arcsin x}{x}dx = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)^2}\cdot x^{2n+1}$$

$$= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$ 收敛域 $[-1,1]$ 与(8)相同

(11).

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{3n}$$

$$\therefore \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{3n+1}\cdot x^{3n+1},$$

当 $x=\pm1$ 时，级数收敛，收敛域为 $[-1,1]$

2. 将下列函数展成 $x-x_0$ 的幂级数，并指出收敛域.

(1) $\sqrt{x}$，$x_0=1$；

(2) $\dfrac{1}{x^2}$，$x_0=1$；

(3) $\ln\dfrac{x}{1+x}$，$x_0=1$；

(4) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，$x_0=-4$；

(5) $\sin x$，$x_0=\dfrac{\pi}{4}$；

(6) $\dfrac{1}{2x^2+x-3}$，$x_0=3$.

(1). $\sqrt{x}=\sqrt{1+(x-1)}=1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}(x-1)^n$

$\cancel{=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times4}x^2}\ \cancel{=1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{(2n)!!}(x-1)^n}$

$=1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(x-1)^n$，$x\in[0,2]$

(2). $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(1+x-1)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-(n+1))}{n!}(x-1)^n$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)\cdot(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\cdot(x-1)^n$

$R=1$，∵当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，级数发散

∴收敛域 $(0,2)$

(3). $\ln\frac{x}{1+x}=\ln x-\ln(1+x)=\ln(1+(x-1))-\ln(2+(x-1))=\ln(1+(x-1))-\ln 2(1+\frac{x-1}{2})$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{x-1}{2})^n=-\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(1-\frac{1}{2^n})(x-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$，$R=1$. ∴当 $x=0$ 时 $f(x)$ 无定义，当 $x=2$ 时 $f(x)=\ln\frac{1}{2}=-\ln2$，

∴收敛域 $(0,2]$.

(4). $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{1+x-4+4}-\frac{1}{2+x-4+4}=\frac{1}{-3+(x+4)}-\frac{1}{-2+(x+4)}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x+4}{2})}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x+4}{3})}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{x+4}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{x+4}{3})^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{2}$，$R=2$，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 无定义，

$x=-6$ 时，级数发散. ∴ 收敛域 $(-6,-2)$.

(5). $\sin x=\sin(\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4}))=\frac{\sqrt2}{2}(\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4}))=\frac{\sqrt2}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}$

$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}]=\frac{\sqrt2}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{4})^{2n}]$

收敛域 $(-\infty,+\infty)$

第十章　级数
第五节　泰勒级数

2.(6).

$$\frac{1}{2x^2+x-3}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x+3}\right]=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2(1+\frac{x-3}{2})}-\frac{2}{9\left(\frac{2}{9}(x-3)+1\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-3}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{9}\left(\frac{2}{9}(x-3)\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{5\times 2^{n+1}}-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right](x-3)^n.$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$，$R=2$，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，级数发散

当 $x=5$ 时，级数发散

$\therefore$ 收敛域 $(1,5)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，利用幂级数求 $f^{(n)}(0)$，$n=1,2,3,\dots$.

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$f(x)=\frac{1}{x}\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(x)}{n!}x^n$

$\frac{f^{2n}(0)}{(2n)!}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$f^{2n}(0)=\frac{(-1)^n}{2n+1}$

$f^{2n+1}(0)=0$

∴ 当 n 为偶数，$\frac{(-1)^k}{2k+1}$，$n=2k$.

当 n 为奇数，0，$n=2k-1$

$\therefore f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ \frac{(-1)^k}{2k+1}, & n=2k.\end{cases}$

第十章 级数
第五节 泰勒级数

4. 求下列各数的近似值.

(1) $\sin 3°$ （误差不超过10^{-5}）;

(2) $\sqrt{e}$ （误差不超过10^{-3}）;

(3) $\sqrt[9]{522}$ （误差不超过10^{-5}）;

(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4+1}$ （误差不超过10^{-4}）;

(5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx$ （误差不超过10^{-3}）;

(6) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ （精确到10^{-3}）;

(7) $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ （精确到10^{-2}）.

(1) $x_0 = \frac{\pi}{60}$，$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$，$\frac{x_0^3}{5!} < 10^{-5}$

$\sin 3° \approx x_0 - \frac{x_0^3}{3!} + \frac{x_0^5}{5!} = 0.052335$

(2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdots + \frac{x^n}{n!}$，$\frac{1}{2^n n!} < 10^{-3}$ $n=5$

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{5} \frac{x^n}{n!} \approx 1.64872$

(3) $\sqrt[9]{522}$

$\sqrt[9]{522} = (10+2^9)^{\frac{1}{9}} \approx (\frac{10}{2^9}+1)^{\frac{1}{9}} \cdot 2$

$(1+\frac{10}{2^9})^{\frac{1}{9}}$ 看成 $(1+x)^{\frac{1}{9}}$

$(1+x)^{\frac{1}{9}} = 1 + \frac{1}{9}x - \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{17}{9}}{3!}x^3$

$\because \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{17}{9}}{3!}x^3 < 10^{-5}$

$\therefore \sqrt[9]{522} = 2.004303$

(4).

$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 \cdots + (-1)^n x^{4n}$

$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^4+1} = x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9$

$x = \frac{1}{2}$，代入得 原式 $= 0.493967$

(5). $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$

$\frac{\arctan x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx = x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n+1}$；$x=0.5$

当 $2n+1=7$ 时即 $n=3$，满足精度 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} dx \approx x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} \Big|_{x=0.5}$

$= 0.4872 \approx 0.487$

(6). $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot (\frac{x^2}{2})^2 - \frac{1}{3!} \cdot (\frac{x^2}{2})^3 + \frac{1}{4!} \cdot (\frac{x^2}{2})^4$

$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \approx x - \frac{x^3}{3\times 2} + \frac{x^5}{5\times 4\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 8\times 3!} + \frac{x^9}{9\times 16\times 4!}$，$x=1$

$\approx 0.855646 \approx 0.856$

第十章 级数

第五节 泰勒级数

4. (7).

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} x - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} - \frac{x^9}{9 \cdot 8!} \cdots$$

$$\approx \frac{1}{2!} x - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!} \approx 0.486388 \approx 0.49$$