北京理工大学2020年春季学期期末试卷参考答案

一、1. $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$；　　2. $\dfrac{98}{13}$；　　3. $\int_0^1 dy\int_0^{\arccos y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\arccos y}^{\pi} f(x,y)dx$；

4. $2R^2$；　　5. $3<p\le 4$.

二、1. 解：过 $P(1,2-1)$ 点且垂直于平面 $\pi: 2x-y+z=5$ 的直线 L 的参数方程为

$x=1+2t; y=2-t; z=-1+t;$

代入平面 π 的方程，得

$2+4t-2+t-1+t=5$

解得 $t=1,$ 故 P 在平面 π 上投影点的坐标为（3，1，0）.

2. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot(1+\varphi')$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot(-\varphi')+f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}''\cdot(-\varphi')+f_{12}''](1+\varphi')-f_1'\cdot\varphi''$$

3. 解：

$$I=\iiint_V (x+y+z)dxdydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy}(x+y+z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x[(x+y)xy+\frac{1}{2}x^2y^2]dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{6}x^5]dx=\frac{7}{36}.$$

4. 解：

$$gradu=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(2x,z,y)$$

$$div(gradu)=div(2x,z,y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(z)+\frac{\partial}{\partial z}(y)$$

$$=2.$$

三、解：记 $\int_0^t uf(u^2+t^2)du=g(t),$　　$F(x)=\int_0^x g(t)dt,$

故　$F'(x)=g(x)=\int_0^x uf(u^2+x^2)du$　　令

$y=u^2+x^2$，则 $F'(x)=\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^{2x^2} f(y)dy$,

得 $$F''(x)=2xf(2x^2)-xf(x^2).$$

四、解：所求转动惯量 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$

做球面坐标变换 $\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho\varphi,\theta)}=\rho^2\sin\varphi$

Ω 边界曲面的球坐标方程分别为 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\rho=2\cos\varphi$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\phi\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\sin^2\phi\rho^2\sin\phi d\rho$$
$$=2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi\sin^3\varphi d\varphi$$
$$=\frac{64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi(\cos^2\varphi-1)d\cos\varphi$$
$$=\frac{64\pi}{5}\left(\frac{u^8}{8}-\frac{u^6}{6}\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{11\pi}{30}$$

（注：柱坐标计算同样可得，评分标准参考以上球坐标的方法）

五、解： $f'_x=ay^2+3cx^2z^2 \quad f'_y=2axy+bz \quad f'_z=by+2cx^3z$

$$\mathrm{grad}\,f(M)=\{4a+3c,4a-b,2b-2c\}$$

$$4a+3c=0 \quad 4a-b=0 \quad 2b-2c=64$$

解得 $\quad a=6 \quad b=24 \quad c=-8$

六、解：1). $P(x,y)=(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda},Q(x,y)=(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-(x^2+y^2)^{\lambda}+2y\lambda(x-y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(x^2+y^2)^{\lambda}+2x\lambda(x+y)(x^2+y^2)^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}}=\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}}\Rightarrow 2(\lambda+1)(x^2+y^2)^{\lambda}=0\Rightarrow\lambda=-1$$

2). $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

$$df(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$f(1,\sqrt{3})-f(2,0)=\int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}Q(1,y)dy+\int_2^1 P(x,0)dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1+y}{1+y^2}dy+\int_2^1\frac{x}{x^2}dx$$

$$=\arctan y\,|_0^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\,|_0^{\sqrt{3}}-\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{3}$$

七、解： $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}\bullet x^2=x^2$$

当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时级数收敛.

故收敛区间为: $-1<x<1$

设 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}$$

$$S'(x)=2\arctan x$$

$$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

八、 解： $$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{x-1+2}-\frac{1}{x-1+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)(x-1)^{n-1}$$

收敛区间 $(-1,3)$

$$f^{(5)}(1)=-5!(\frac{1}{2^6}-\frac{1}{3^6})$$

九、解: 记 $S_1: z=R, x^2+y^2\le R^2$，取上侧； $S_2: z=-R, x^2+y^2\le R^2$, 取下侧；

S_3：S 的侧面（即圆柱面部分）；

$S_{3前}: x=\sqrt{R^2-y^2}, -R\le y\le R, -R\le z\le R$, 取前侧；

$S_{3后}: x=-\sqrt{R^2-y^2}, -R\le y\le R, -R\le z\le R$, 取后侧；

$$\iint_S \frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{S_1}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{S_2}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{S_3}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint_{S_{3前}}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}+\iint_{S_{3后}}\frac{xdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}-\iint_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}dydz}{R^2+z^2}$$

$$=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}dy\int_{-R}^{R}\frac{dz}{R^2+z^2}=\frac{\pi^2 R}{2}$$

其中 $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,-R\le y\le R, -R\le z\le R\}$.

$$\iint_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy=\iint_{S_1}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy+\iint_{S_2}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy+\iint_{S_3}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy$$

$$=\iint_{S_1}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy+\iint_{S_2}\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{R^2}{x^2+y^2+R^2}dxdy-\iint_{D_{xy}}\frac{(-R)^2}{x^2+y^2+R^2}dxdy$$

$$=0$$

所以，原式 $I=\frac{\pi^2 R}{2}$.

十、解：1). $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi\int_0^{t}\rho^2 f(\rho^2)\sin\phi d\rho$

$$=4\pi\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)d\rho$$

$$F'(t)=4\pi t^2 f(t^2)$$

2). $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\lambda}F'(\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{\infty} 4\pi \frac{1}{n^{1+\lambda}} f(\frac{1}{n^2})$

因 $f(0)\neq 0$ 且 $f(x)$ 在 0 点连续， $f(x)$ 在 0 点右小邻域有局部保号性，此时 $f(x)$ 要么正，要么负.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\pi}{n^{1+\lambda}} f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^{1+\lambda}}}=4\pi f(0)$$

$\lambda>0$ 时收敛， $\lambda\leq 0$ 时发散。