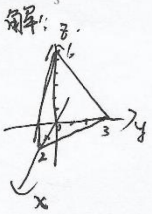
05011713、刘煌、13201?072、

1. 计算 $\iint\limits_S xdydz + xydzdx + xzdxdy$，其中 $S$ 是平面 $3x+2y+z=6$ 在第一卦限部分的上侧.

解:




$$\iint\limits_{S^+} xdydz + xydzdx + xzdxdy$$

$$= \iint\limits_{S^+} (6-2y-z)\times\frac{1}{3}dydz + x\cdot\frac{1}{2}(6-3x-z)\cdot dzdx + x\cdot(6-3x-2y)dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}(6-2y-z)dz$$

$$+ \int_0^2 dx\int_0^{6-3x}\frac{1}{2}\cdot x(6-3x-z)dz$$

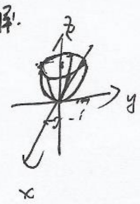
$$+ \int_0^2 dx\int_0^{\frac{1}{2}(6-3x)}(6-3x-2y)dy$$

$$= \frac{1}{3}\times\int_0^3(6-2y)dy + \int_0^2\frac{9}{4}x\cdot(2-x)^2dx$$

$$+ \int_0^2\frac{1}{4}(6-3x)^2dx = \frac{1}{3}\times 18 + 3 + 3 = 12.$$

2. 计算 $\iint\limits_S e^y dydz + ye^x dzdx + x^2 ydxdy$，其中 $S$ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x=0, x=1, y=0$，$y=1$ 所截得部分的上侧.

解.




$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y$

原式 $=\iint\limits_S e^y dydz + y\cdot e^x dzdx + x^2 y\, dxdy$

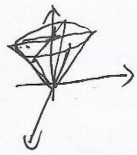
$=\iint\limits_S \left(e^y\cdot(-2x)+y\cdot e^x\cdot(-2y)+x^2y\right)dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_0^1 (x^2y-e^y\cdot 2x-2y^2e^x)\,dy$

$=\int_0^1 \frac{1}{2}x^2-2x(e-1)-\frac{2}{3}e^x\,dy$

$=\frac{1}{6}-(e-1)-\frac{2}{3}(e-1)=\frac{11-10e}{6}$

3. 计算 $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dzdx + zdxdy$，$S$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\le 1)$ 的那一部分的下侧.



$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\therefore 原式 = \iint\limits_S (x^2+y^2)dzdx + z\,dxdy$$

$$= \iint\limits_S \left((x^2+y^2)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - z\right)dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho\cdot(\rho\sin\theta\,\rho - \rho)\,d\rho$$

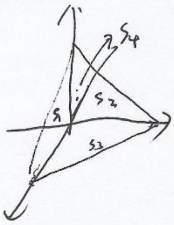
$$\cancel{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^3\sin\theta - \rho^2)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\rho^4\sin\theta - \frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\sin\theta - \frac{1}{3}\right)d\theta = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第五节　第二类曲面积分

4. 计算 $\oint\!\!\oint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$S$ 是平面 $x+y+z=1$ 与三坐标面所围成的空间区域的边界曲面的外侧.




由题 $S=S_1+S_2+S_3+S_4$

$\therefore \cancel{\oint\!\!\oint_S xz = \iint_{S_1} xz}$

$$\oint\!\!\oint_S xz\,dxdy = \oint\!\!\oint_{S_1} xz\,dxdy + \oint\!\!\oint_{S_2} xz\,dxdy + \oint\!\!\oint_{S_3} xz\,dxdy + \oint\!\!\oint_{S_4} xz\,dxdy$$

$$= 0+0+0+\iint_{S_4} x(1-x-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} [(1-x)-y]\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 x\,dx = \frac{1}{24}$$

由轮换对称性知 $\oint\!\!\oint_S xz\,dxdy = \oint\!\!\oint_S xy\,dydz = \oint\!\!\oint_S yz\,dzdx$

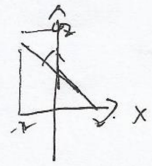
$$\therefore \oint\!\!\oint_S xz\,dxdy + xy\,dydz + yz\,dzdx = 3\times\frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第五节　第二类曲面积分

5. 计算 $\iint\limits_S -y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $z=0$ 和 $x+z=2$ 所截得部分的外侧.

$dS=3R\,d\theta$

解：




$\iint\limits_S (z+1)dxdy=0$

∵经xoy面投影为一条圆线，故为0.

∴原式 $=\iint\limits_S -y\,dzdx$

$=\iint\limits_D -\sqrt{4-x^2}\,dzdx$

$+(-1)\iint\limits_D -\sqrt{4-x^2}\,dzdx$

$=-2\iint\limits_D \sqrt{4-x^2}\,dzdx$

$=-2\int_{-2}^{2}dx\int_0^{2-x}\sqrt{4-x^2}\,dz$

$=-2\int_{-2}^{2}\left(2\cdot\sqrt{4-x^2}-x\sqrt{4-x^2}\right)dx$

∵ $x\sqrt{4-x^2}$ 为奇函数

故 $\cancel{\int_{-2}^{2}x\cdot\sqrt{4-x^2}=0}$

$\int_{-2}^{2}x\cdot\sqrt{4-x^2}=0$

∴原式 $=-4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

令 $x=2\sin\theta$

$=-4\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta$

$=-16\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times2=-8\pi$

第九章　曲线积分与曲面积分
第五节　第二类曲面积分

6. 计算 $\iint\limits_{S} x^2y^2z\,dxdy$，其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\ (z\le 0)$ 的下侧.

解：$\iint\limits_{S_{*-}} x^2y^2z\,dxdy$

$$= \iint\limits_{S_{*-}} x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) dxdy$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} -x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho\cdot\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$

$$= 4\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)\,d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cdot\cos^2\theta\cdot R^7\,d\theta$$

$$= 4\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)\cdot R^7\cdot\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1-\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$= R^7\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2\pi R^7}{105}$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第五节　第二类曲面积分

7. 计算 $\oiint\limits_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $S$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所围立体的表面外侧.

解：$\oiint\limits_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial z} dV$

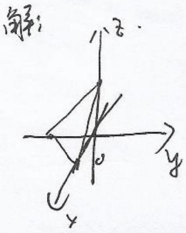
$= \iiint\limits_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dz$

$= \int_1^2 e^z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{\rho}\cdot\rho dr$

$= \int_1^2 e^z \cdot z \cdot 2\pi dz = 2\pi e^2.$

8. 计算 $\iint\limits_S [f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $S$ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解：




平面 $x-y+z=1$ 上侧法向量

为 $\vec{n}=(1,-1,1)$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \iint\limits_S (f+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2f+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(f+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_S (f+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(2f+y)\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(f+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_S \left(f+x-(2f+y)+f+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$z=1-x+y$

$\therefore$ 原式 $=\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^0\mathrm{d}y=\int_0^1 -x+1\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{2}.$

第九章 曲线积分与曲面积分
第五节 第二类曲面积分

9. 把第二类曲面积分 $\iint\limits_S X(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Y(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一类曲面积分，

其中：

(1) $S$ 为抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 $xOy$ 面上方部分的上侧；

(2) $S$ 为平面 $3x+2y+z=1$ 位于第一卦限部分的上侧.

解：(1). $\iint\limits_S X\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S (X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma)\mathrm{d}S$

$\because\ F=z+x^2+y^2-8=0,\ \vec{n}=(F_x',F_y',F_z')=(2x,2y,1)$

$\therefore\ \vec{n}^0=\dfrac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}(2x,2y,1)$

$\therefore\ \iint\limits_S X\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cancel{\iint\limits_S 2x\cdot X(x,y,z)}$

$=\iint\limits_S \dfrac{2x\cdot X(x,y,z)+2y\,Y(x,y,z)+Z(x,y,z)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\mathrm{d}S$

(2). 同理，$\vec{n}=\{3,2,1\}$，$\vec{n}^0=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3,2,1)$

$\therefore\ \iint\limits_S X\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+Z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\iint\limits_S (3X+2Y+Z)\mathrm{d}S$

第九章　曲线积分与曲面积分
第五节　第二类曲面积分