0S011713. 刘~~望~~望, 13201712

1. 利用格林公式计算下列积分.

(1) $\oint_L (x+y+xy)\mathrm{d}x+(x-y+xy)\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的正向;

(2) $\oint_L (1+y^2)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin x$ 所 $(0\le x\le\pi)$ 围区域边界的正向;

(3) $\oint_L (y^2+\sin x)\mathrm{d}x+(\cos^2 y-2x)\mathrm{d}y$，$L$ 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所围区域边界的正向;

(4) $\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，$L$ 为圆周 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ 与直线 $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ 在第一象限所围区域的正向边界;

(5) $\oint_L (yx^3+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y$，其中 L 为 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 的正方向;

(6) $\oint_L (y^2+2x\sin y)\mathrm{d}x+x^2(\cos y+x)\mathrm{d}y$，其中 L 是以 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $E(-1,0)$, $F(0,-1)$ 为顶点的正方形边界的逆时针方向;

(7) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y$,，其中 L 为区域 $D:0\le y\le\sqrt[3]{x}, a\le x\le 2a$ 的逆时针边界;

(8) $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-1)\mathrm{d}y$，其中

(i) L 为上半圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0, y\ge 0)$ 上从点 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 一段;

(ii) L 为直线段 $\overline{AB}:A(0,a),B(a,0)$;

(9) $\int_L y\mathrm{d}x+\left(\sqrt[3]{\sin y}-x\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是连接 $A(-1,0)$, $B(2,1)$, $C(1,0)$ 的折线段;

(10) $\int_L \left[\cos(x+y^2)\right]\mathrm{d}x+2y\cos(x+y^2)\mathrm{d}y$，$L$ 是沿 $y=\sin x$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,0)$ 一段.

解

(1) $\frac{\partial Y}{\partial x}=1+y$, $\frac{\partial X}{\partial y}=1+x$, 由格林公式 $\oint_{L^+} X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\iint_D (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

令 $x=a\rho\cos\theta$, $y=b\rho\sin\theta$ 上式 $=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2(b\sin\theta-a\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0$

(2) $\frac{\partial Y}{\partial x}=0$, $\frac{\partial X}{\partial y}=2y$. $\oint_{L^+} X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\iint_D -2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{2\sin x}-2y\,\mathrm{d}y=-\int_0^{\pi}3\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

$=-3\cdot 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=-\frac{3}{2}\pi$.

(3) $\frac{\partial Y}{\partial x}=-2$, $\frac{\partial X}{\partial y}=2y$ $\oint_{L^+} X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\iint_D -2-2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(-2)\cdot\iint_D(1+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

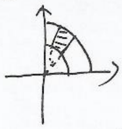
由对称性知 $\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 上式 $=(-2)\cdot\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(-2)\cdot 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\cdot\sin^4\theta\, 3\cos^2\theta\cdot(-1)\mathrm{d}\theta$

$=4\times(-2)a^2 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)\mathrm{d}\theta=(-2)\cdot a^2\cdot 4\times 3\times\frac{\pi}{32}=-\frac{3}{4}\pi a^2$

第九章　曲线积分与曲面积分

第三节　格林公式, 平面曲线积分与路径无关的条件

1.(4)



$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{2}{y}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \oint_{L^+} X dx+Y dy=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^2 \rho\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot d\rho$$

$$=\frac{\pi}{12}\cdot\ln\rho\Big|_1^2=\frac{\pi}{12}\ln 2$$

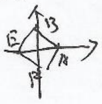
(5) $\frac{\partial Y}{\partial x}=y^3+e^y$, $\frac{\partial X}{\partial y}=x^3+e^y$

$$\therefore \oint_{L^+} X dx+Y dy=\cancel{\iint_D (y^3-x^3+e^y)dxdy}=\iint_D (y^3-x^3)dxdy$$

由D区域为一个半径为a的圆，y^3 与 x^3 皆为奇函数

$$\therefore \iint_D (y^3-x^3)dxdy=0 \quad \therefore \oint_{L^+} X dx+Y dy=0$$

(6).



$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\cos y\cdot 2x+3x^2,\ \frac{\partial X}{\partial y}=2y+2x\cdot\cos y$$

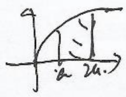
$$\therefore \oint_{L^+} X dx+Y dy=\iint_D (3x^2-2y)dxdy=\iint_D 3x^2 dxdy-2\iint_D y\,dxdy$$

$$=\iint_D 3x^2 dxdy=2\times\int_0^1 dx\int_{x-1}^{3-x}3x^2 dy=12\int_0^1 x^2(1-x)dx$$

$$=12\times(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1=12\times\frac{1}{12}=1$$

(7) $\frac{\partial Y}{\partial x}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\oint_L X dx+Y dy$

$$=\iint_D y^2 dxdy=\int_a^{2a}dx\int_0^{x^{\frac{1}{3}}}y^2 dy=\frac{1}{3}\int_a^{2a}x\,dx$$



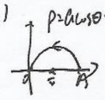
$$=\frac{1}{6}x^2\Big|_a^{2a}=\frac{1}{2}a^2.$$

1,

1.(8) $\frac{\partial Y}{\partial x}=\cos y\cdot e^x$, $\frac{\partial X}{\partial y}=e^x\cdot\cos y-1$

$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=1$

(i) $\rho=a\cos\theta$.



$\oint_{L^+} Xdx+Ydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho d\rho$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{a^2}{8}\pi.$

(ii)

$\cancel{\oint_{L} Xdx+Ydy=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}a^2}$

利用格林公式,原式$=\iint_D 1dxdy-\int_0^a(\cos y-1)dy-0$

$=\frac{a^2}{2}+a-\sin a.$

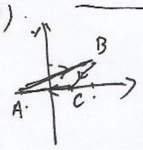
~~y=a-x~~ 为非闭区域

$\oint_L Xdx+Ydy=\int_a^0(-1)\cdot(e^{a-y}\sin y-y)+(e^{a-y}\cos y-1)dy.$

$=\int_0^a y-1+e^{a-y}(\cos y-\sin y)=a-\frac{a^2}{2}+e^{a-y}\sin y\Big|_0^a=a+\frac{a^2}{2}+\sin a.$

$=\frac{a^2}{2}+\sin a-a.$

(9)

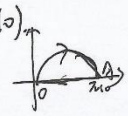


$\frac{\partial Y}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial X}{\partial y}=1$

$\therefore\oint_{L^-}Xdx+Ydy=-\oint_{L^+}Xdx+Ydy=-\iint_D(-2)dxdy$

$=2\cdot\iint_D dxdy=2\times2\times1\times\frac{1}{2}=2.$

(10)



$\frac{\partial Y}{\partial x}=2y\cdot-\sin(x+y^2)$ $\frac{\partial X}{\partial y}=2y\cdot(-\sin(x+y^2))+2+y$

$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-2y$

$\cancel{\oint_{L} Xdx+Ydy=\iint dxdy=\iint_D(-2)dxdy=\int_{\pi}^{0}}$

$\cancel{\oint_{L}dxdy=-[\iint(-2)dxdy+\int_0^{\pi}2y\cos(y^2)dy]}$

$\oint_{L^-}Xdx+Ydy=-\oint_{L^+}Xdx+Ydy=\iint_D 4ydxdy$

$=4\cdot\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}ydy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi$

补y=0时 $\int_{\pi}^{0}\cos xdx=0$

$\therefore$原式$=\oint_{L^-}Xdx+Ydy-\int_{\pi}^{0}\cos xdx=\pi$

60

2. 利用第二类曲线积分求星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 所围成图形的面积.

解：

$$A=\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\oint x\,dy-y\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t-a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)]dt$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t\cos^4 t+\sin^4 t\cos^2 t)dt$$

$$=\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

第九章 曲线积分与曲面积分

第三节 格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件

3. 计算下列曲线积分.

(1) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-4xy^3\right)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(0,0)}^{(4,8)}\mathrm{e}^{-x}\sin y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-x}\cos y\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(0,0)}^{(a,b)}\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{1+(x+y)^2}$;

(4) $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$;

(5) $\int_L\left(2xy^3-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $(0,0)$ 沿 $y^2=\dfrac{2}{\pi}x$ 到 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 的弧段.

解 (1). $\because \dfrac{\partial Y}{\partial x}=2x-4y^3=\dfrac{\partial X}{\partial y}$ 故可得 $du=Xdx+Ydy$.

$\therefore u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=\int_0^x 3dx+\int_0^y(x^2-4xy^3)dy+C$

$=3x+x^2y-xy^4+C$

$\therefore$ 原式 $=u(2,1)-u(1,0)=8-3=5$

(2) $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=-(e^{-x})'\cos y=e^{-x}\cos y=\dfrac{\partial X}{\partial y}$

故得 $du=Xdx+Ydy$ $\therefore u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}e^{-x}\sin y\,dx-e^{-x}\cos y\,dy+C$

$=\int_0^x 0dx-\int_0^y e^{-x}\cos y\,dy+C=0-e^{-x}\sin y+C=-e^{-x}\sin y+C$

$\therefore$ 原式 $=u(4,8)-u(0,0)=-e^{-4}\sin 8$

(3). $\dfrac{\partial Y}{\partial x}=-\dfrac{2(x+y)}{(1+(x+y))^2}=\dfrac{\partial X}{\partial y}$，故与路径无关，原式可经 $(0,0)$ 至 $(a,0)$ 至 (a,b) 的折线路径.

原式 $=\int_0^a\dfrac{1}{1+x^2}dx+\int_0^b\dfrac{dy}{1+(a+y)^2}$

$=\arctan a+\arctan(a+b)-\arctan a$

$=\arctan(a+b)$

第九章 曲线积分与曲面积分

第三节 格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件

3.(4). $\frac{\partial Y}{\partial x} = \cos\frac{y}{x}\cdot -\frac{y}{x^2} + -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\left[\sin\frac{y}{x}\cdot(-1)\right]\cdot -\frac{y}{x^2}$

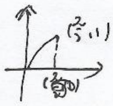
$= \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} - 2\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} = \frac{\partial X}{\partial y}$.

故与路径无关可由A$(1,\pi)$至B$(2,\pi)$画线段求解

原式$=\int_1^2 \left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx = \left(x+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Big|_1^2 = 2+\pi-(1+0)=\pi+1$

(5) $\frac{\partial Y}{\partial x} = -2y\cos x + 6y^2x = \frac{\partial X}{\partial y}$ 故与路径无关

可沿A$(0,0)$ B$(\frac{\pi}{2},0)$, C$(\frac{\pi}{2},1)$ 折线ABC路径



$\therefore$ 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot dx + \int_0^1 \left(1-2y+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot 3y^2\right)dy$

$= \left(1-y^2+\frac{\pi^2}{4}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$

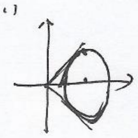
4. 计算 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{2\left(x^2+y^2\right)}$，其中 L 为

(1) 椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ 的逆时针方向;

(2) $(x-1)^2+y^2=2$ 的逆时针方向.

对于 $(x,y)\neq(0,0)$ 区域.

(1)



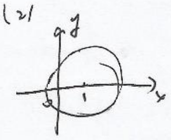
解: $Y=\frac{x}{2(x^2+y^2)}$，$X=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{(y^2-x^2)}{2(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial X}{\partial y}$$

由左图知 L不包含原点，则与路径无关

$$\oint_L Xdx+Ydy=0$$

(2)



如图，包含原点

故可挖洞.

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{2(x^2+y^2)}-\oint_{L'}\frac{xdy-ydx}{2(x^2+y^2)}=0$$

其中 L'，$x^2+y^2=r^2$

$$\therefore \oint_L \frac{xdy-ydx}{2(x^2+y^2)}=\oint_{L'}\frac{xdy-ydx}{2(x^2+y^2)},$$

$$=\frac{1}{2r^2}\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)d\theta=\pi.$$

第九章　曲线积分与曲面积分
第三节　格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件

5. 下列 $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$ 是否为某函数的全微分，若是，求其原函数.

(1) $\left(3x^2+2xy^3\right)\mathrm{d}x+\left(3x^2y^2+2y\right)\mathrm{d}y$;

(2) $\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)\mathrm{d}x+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)\mathrm{d}y$;

(3) $\left(3x^2y+xe^x\right)\mathrm{d}x+\left(x^3-y\sin y\right)\mathrm{d}y$.

解：(1) $\frac{\partial Y}{\partial x}=6y^2x=\frac{\partial X}{\partial y}$. 故有 $du=Xdx+Ydy$.

$\therefore u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2+2xy^3)\,dx+(3x^2y^2+2y)\,dy+C$

$=\int_0^x 3x^2\,dy+\int_0^y(3x^2y^2+2y)\,dy+C$

$=x^3+x^2y^3+y^2+C$.

(2) $\frac{\partial Y}{\partial x}=2y\cdot(-\sin x)-2x\sin y=\frac{\partial X}{\partial y}$ 故 $du=Xdy+Ydy$

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\,dx+(2y\cos x-x^2\sin y)\,dy+C$

$=\int_0^x 2x\,dy+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)\,dy+C$

$=x^2+y^2\cos x+x^2\cos y\Big|_0^y+\ldots=y^2\cos x+x^2\cos y+C$.

(3) $\frac{\partial Y}{\partial x}=3x^2=\frac{\partial X}{\partial y}$.

$\therefore u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+x\cdot e^x)\,dx+(x^3-y\sin y)\,dy+C$

$=\int_0^x x\cdot e^x\,dx+\int_0^y x^3-y\sin y\,dy$

$=e^x(x-1)+x^3y+y\cos y-\sin y+C$

第九章　曲线积分与曲面积分

第三节　格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件

6. 求下列微分方程的通解.

(1) $\sin x\sin 2y\mathrm{d}x-2\cos x\cos 2y\mathrm{d}y=0$;

(2) $\left(x^2-y\right)\mathrm{d}x-\left(x+\sin^2 y\right)\mathrm{d}y=0$;

(3) $yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y=0$;

(4) $\sin\left(x+y\right)\mathrm{d}x+\left[x\cos\left(x+y\right)\right]\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right)=0$.

解：(1) $\frac{\partial Y}{\partial x}=2\sin x\cos 2y=\frac{\partial X}{\partial y}$. 故为全微分方程

其中一解为 $u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\sin x\sin 2y\,dx-2\cos x\cos 2y\,dy$

$=\int_0^x 0\,dx-\int_0^y 2\cos x\cos 2y\,dy=-\cos x\sin 2y$

∴通解为 $\cos x\sin 2y=0$

(2) $\frac{\partial Y}{\partial x}=-1=\frac{\partial X}{\partial y}$ 故为全微分方程，其中一解

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$

$=\int_0^x x^2dx-\int_0^y x+\sin^2 y\,dy$

$=\frac{1}{3}x^3-xy-\int_0^y\sin^2 y\,dy=\frac{1}{3}x^3-xy-\int_0^y\frac{1-\cos 2y}{2}dy$

$=\frac{1}{3}x^3-xy-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y$

故通解：$\frac{1}{3}x^3-xy-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\sin 2y=C$.

第九章　曲线积分与曲面积分
第三节　格林公式，平面曲线积分与路径无关的条件

6.(3) $\frac{\partial Y}{\partial x} = y\cdot x^{y-1}\ln x + x^{y-1} = \frac{\partial X}{\partial y}$.

∴ 为全微分方程 其中一解

$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} y\, x^{y-1}\,dx + x^{y}\ln x\,dy$

$= \int_1^x 0\,dx + \int_0^y x^{y}\ln x\,dy = x^{y}$

∴通解 $x^{y} = C$

(4) $X = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$

$Y = x\cdot\cos(x+y)$

∴ $\frac{\partial X}{\partial y} = \cos(x+y) - x\sin(x+y) = \frac{\partial Y}{\partial x}$

∴ 其中一通解

$u = \int_{(0,0)}^{(x,y)} X\,dx + Y\,dy$

$= \int_0^x \sin x + x\cos x\,dx + \int_0^y x\cos(x+y)\,dy$

$= x\cdot\sin x + x\cdot \sin(x+y)\Big|_0^y$

$= x\cdot\sin(x+y)$

∴通解：$x\cdot\sin(x+y) = C$