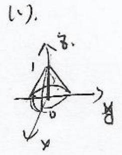
1. 试用二重积分表示下列空间区域的体积.

(1) 锥体 $V:\sqrt{x^2+y^2}\le 1-z$，$0\le z\le 1$；$\frac{1}{3}\pi$.

(2) 由曲面 $z=2-x^2-y^2$，$x^2+y^2=1$ 及 xOy 面所围成的区域. 2π.

解：

(1).



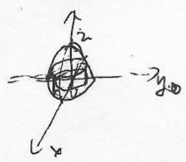
∵ 在锥面上面 $1-\sqrt{x^2+y^2}=z$.

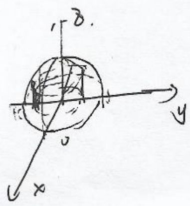
∴

$$V=\iint_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$$

(2).





∵ $z=2-x^2-y^2$

$x^2+y^2\le 1$

$$\therefore V=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(2-x^2-y^2\right)d\sigma$$

第八章　重积分

第一节　二重积分的概念与性质

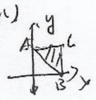
2. 比较下列二重积分的大小.

(1) $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \ln^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点在 $(1,0),(0,1),(1,1)$ 的三角形区域;

(2) $I_1=\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \ln(x^3+y^3)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le 1$;

(3) $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D \ln(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 及 $I_3=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=\frac{1}{2}$，$x+y=1$ 所围成的区域.

解：(1)



在 $\triangle ABC$ 中，

可得 $1\le x+y\le 2$

$\therefore 0\le \ln(x+y)\le \ln 2<1$

$\therefore \ln(x+y)\ge \ln^2(x+y)$

$\therefore I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma \ge \iint\limits_D \ln^2(x+y)\mathrm{d}\sigma = I_2$.

$\therefore I_1\ge I_2$.

(2). $\because x^2+y^2\le 1$

$\therefore x\le 1,\ y\le 1$

$\therefore x^2\ge x^3,\ y^2\ge y^3$

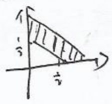
$\therefore x^2+y^2\ge x^3+y^3$

$\therefore I_1=\iint\limits_D x^2+y^2\ \mathrm{d}\sigma$

$I_2=\iint\limits_D x^3+y^3\ \mathrm{d}\sigma$

$\therefore I_1\ge I_2$.

(3)



在 D 中

有 $\frac{1}{2}\le x+y\le 1$

$\therefore \ln(x+y)\le 0$

$0\le (x+y)^2\le x+y$

$\therefore \ln(x+y)\le (x+y)^2\le x+y$

$\therefore I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$

$I_3=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$

$\therefore I_1<I_2<I_3$

第八章　重积分

第一节　二重积分的概念与性质

3. 估计下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$;

(2) $I=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 2$;

(3) 其中 $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\mathrm{d}\sigma$, $D:1\le x^2+y^2\le 4$;

(4) $I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, 其中 $D:|x|+|y|\le 10$.

解：(1) $z=xy(x+y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\cancel{2x}\,2xy+y^2$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2xy+x^2$.

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $x=y=0$

在边界 $x=0$ 或 $y=0$

$z=0$

在边界 $x=1$ 上

$z=y(y+1)$

$\frac{dz}{dy}=2y+1$

令 $\frac{dz}{dy}=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

在边界上不存在极值点

同理当 $y=1$ 时边界上

没有极值点

$\therefore z(0,0)=0$, $z(0,1)=z(1,0)=0$

$z(1,1)=2$

$\therefore z_{min}=0$, $z_{max}=2$.

$\therefore D=\cancel{1\times 1}\ 1\cdot 1=1$.

$\therefore 0\le I\le 2$.

(2). $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

$\therefore x=0, y=0$, 为极值点

$z(0,0)=0$

在边界 $x=0$, $y=0$ 时

$z=x$ 或 $z=y$ 单调递增

在边界 $x=1$ 时

$z=\sqrt{y^2+1}$

在边界 $y=2$ 时

$z=\sqrt{x^2+4}$

皆单调递增

故 $z(0,1)=z(1,0)=1$

$z(0,0)=0$, $z(1,2)=\sqrt{5}$

$D=1\times 2=2$.

$\therefore z_{min}=0$, $z_{max}=\sqrt{5}$

$\therefore 0\le I\le 2\sqrt{5}$.

(3). $z=x^2+4y^2+9$

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=8y$.

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 得 $x=y=0$

不在区域内

$\therefore$ 在边界 $x^2+y^2=1$ 内

$z=\cancel{13}-3x^2+13$

$\frac{dz}{dx}=-6x$ 令 $\frac{dz}{dx}=0$, $x=0$.

不在区域内, 端点

$\therefore z|_{x=0}=13$, $z|_{x=1}=10$

在边界 $x^2+y^2=4$ 时

$z=-3x^2+25$

$\frac{dz}{dx}=-6x$, 同上, $\frac{dz}{dx}=0 \Rightarrow x=0$, 不在区域内,

$\therefore z|_{x=0}=25$, $z|_{x=2}=13$

$\therefore z(0,1)=13$, $z(1,0)=10$

$z(0,2)=25$, $z(2,0)=13$

$\therefore z_{max}=25$, $z_{min}=10$

$D=4\pi-\pi=3\pi$

$\therefore 30\pi\le I\le 75\pi$

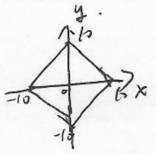
第八章 重积分
第一节 二重积分的概念与性质

(4)

$I=\iint\limits_{D}\dfrac{d\sigma}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，$(|x|+|y|\leq 10)$

设 $z=\dfrac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}$

区域 D 为 $|x|+|y|\leq 10$.



$S=20\times 10=200$

当 $\cos^2x=\cos^2y=0$ 时，z 有最大值 $z_{max}=\dfrac{1}{100}$

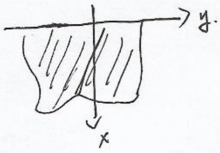
当 $\cos^2x=\cos^2y=1$ 时，z 有最小值 $z_{min}=\dfrac{1}{102}$

$\therefore\ \dfrac{1}{102}\times 200\leq I\leq\dfrac{1}{100}\times 200$

$\therefore\ \dfrac{100}{51}\leq I\leq 2$.

4. 设一平面薄片铅直浸没在水中，取 x 轴铅直向下，y 轴位于水面处，并设薄片占有 xOy 面上的有界闭区域 D，试用二重积分表示薄片一侧所受到的水压力.

解:



设 $f(x,y)$ 为 (x,y) 点处压强

$f(x,y) = \rho_{水} g \cdot x$

$\therefore F = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

$\therefore F = \rho_{水} g \iint\limits_D x\,d\sigma$

D为图中阴影.

5. 设 D 是平面有界闭区域，$f(x,y)$ 是定义在 D 上的连续非负函数，且 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，证明在 D 上 $f(x,y)\equiv 0$.

解：由题 $f(x,y)\geq 0$

设 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$

$I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$

λ 为 $\lambda=\max\{\Delta\sigma_i$ 的直径$\}$.

$\therefore \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i=0$

$\because \Delta\sigma_i>0$，$f(\xi_i,\eta_i)\geq 0$ 且 $f(x,y)$ 连续

根据极限的性质可知，在 D 上.

$f(x,y)\equiv 0$

(即若存在 $f(x,y)>0$，根据极限保号性

必有 $I=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i>0$

与题意不符).

第八章　重积分

第一节　二重积分的概念与性质

6. 设D是平面有界闭区域，$f(x,y)$在D上连续非负且不恒为零，证明$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$.

解：~~由题意~~ $\cancel{f(x,y)}$ $f(x,y)\geq 0$

$\exists x_0,y_0\in D$ 且 $f(x_0,y_0)>0$

$I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint f(x,y)d\sigma$

$\because \cancel{I=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i$

$\therefore I=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{\lambda\to 0}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

$\lambda=\max\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$.

$\therefore$ 若 $f(\xi_i,\eta_i)>0$，且$f(x,y)$连续

根据极限保号性

$\sum\limits_{i=1}^{n}\lim f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i>0$

即$I>0$

$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma>0$

第八章　重积分
　　第一节　二重积分的概念与性质