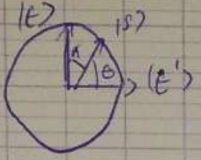
Partie 2 :

1) 

On observe alors : $\cos(\alpha) = \langle t|s\rangle$.

On sait que : $|s\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{N}} |x_i\rangle$ où $N = 2^n$

On calcule donc :

$\cos(\alpha) = \langle t| \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{N}} |x_i\rangle \right)\rangle$. On sait que $\langle t|x_i\rangle_{\forall i \in [1,n]}$

$= \begin{cases} 1 \text{ si } |x_i\rangle \text{ est marqué} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Dans l'algorithme de Grover, il n'y a que 1 seul état marqué

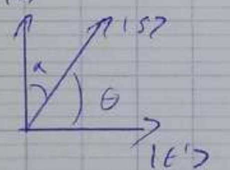
$\Rightarrow \langle t| \sum_{i=1}^{n} |x_i\rangle\rangle = 1.$

On conclu donc : $\cos(\alpha) = \langle t| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{n} |x_i\rangle\rangle$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N}} \langle t| \sum_{i=1}^{n} |x_i\rangle\rangle$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N}} \times 1$

$\Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

2) 

On observe : $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \Leftrightarrow \theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$

On sait que : $P(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\theta_T) = 1$

où $\theta_T = \frac{\pi}{2} - (2n+1)\theta \Leftrightarrow \theta_T = \frac{\pi}{2} - (2n_{iter}+1)(\alpha - \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow \theta_T = \frac{\pi}{2} - 2n_{iter}\alpha + 2n_{iter}\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \theta_T = \pi(n_{iter}+1) - \alpha - 2n_{iter}\alpha$

On conclu donc : $\cos^2(\theta_f) = 1 \Leftrightarrow \theta_f = 0\,[\pi]$

$\Leftrightarrow \pi(n_{iter}+1) - \alpha - 2n_{iter}\alpha = 0\,[\pi]$

$\Leftrightarrow -2n_{iter}\alpha = \alpha\,[\pi]$

3) Soit $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; On sait que $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

On calcul alors : $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow \beta - \frac{\pi}{2} = -\alpha$

$\Leftrightarrow \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) \Leftrightarrow \sin(\beta) = \cos(\alpha)$

$\Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \Leftrightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

4) On sait que : $-2n_{iter}\alpha = \alpha\,[\pi]$ et $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

On calcul donc : $-2n_{iter}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\pi}{2} - \beta\,[\pi]$

$\Leftrightarrow 2n_{iter}\beta - \cancel{\frac{2n_{iter}\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \beta\,[\pi]$

$\Leftrightarrow 2n_{iter}\beta = \frac{\pi}{2} - \beta\,[\pi]$

5) On sait que : $-2n_{iter}\alpha = \alpha\,[\pi]$

On calcul donc : $-2n_{iter} = 1\,\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]$

$\Leftrightarrow n_{iter} = -\frac{1}{2}\,\left[\frac{\pi}{\alpha}\right]$

6) On sait que : $2 n_{iter} \beta = \frac{\pi}{2} - \beta \; [\pi]$

Alors : $n_{iter} = \frac{\pi}{4\beta} - \frac{1}{2} \; [\frac{\pi}{\beta}]$

$\Leftrightarrow n_{iter} \simeq \frac{\pi}{4\beta} - \frac{1}{2}$ $\beta = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{N}}) \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ car N très grand $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}$ très petit.

On a donc $n_{iter} \simeq \frac{\pi}{4}\sqrt{N} - \frac{1}{2} \approx \left\lceil \frac{\pi\sqrt{N} - 1}{4} \right\rceil$