Лабораторная работа №1, задание 1

18 апреля 2023 г.

1 Уточнённое условие

Дана совокупность из $(n+1)$-го человека. $(n+1)$-ый человек два раза независимо выбирает человека, которому отправит письмо. Итого он отправит два письма случайным людям (возможно одному и тому же, возможно даже себе). Эти люди образуют "первое поколение". На каждом шаге люди поколения r посылают два письма по описанному алгоритму и получившие их люди образуют поколение $(r+1)$. Если человек получил несколько писем, то он вс равно посылает только два письма. Задача: найти ans_r - вероятность того, что $(n+1)$-ый человек не входит ни в одно поколение с первого по r-тое, найти медиану распределения при $n \to \infty$.

2 Нахождение вероятности

Положим $dp_{r,j}$ - вероятность того, что $(n+1)$-ый человек не входит ни в одно поколение с первого по r-тое, и в поколение r входят j человек.
Тогда:

$$ans_r = \sum_{j=1}^{n} dp_{r,j}$$

Теперь давайте найдём переход от поколения r к $r+1$:

$$dp_{r,j} = \sum_{i=1}^{n} dp_{r-1,i} \cdot \frac{C_n^j \cdot \left\{ {2i \atop j} \right\}}{(n+1)^{2i}}$$

, где $\left\{ {2i \atop j} \right\}$ - число Стирлинга второго рода. То есть, если у нас есть i человек в поколении $(r-1)$, а мы хотим перейти к j людям в поколении r, то нам нужно выбрать этих j людей (биномиальный коэффициэнт), и для каждого выбрать хотя бы одно пришедшее ему письмо (число Стирлинга). И разделить это на количество исходов случайного выбора адресатов для $2i$ писем. Теперь мы можем найти ответ.

3 Медиана распределения

Медиана распределения в нашем случае - это минимальный r, при котором вероятность ans_r будет меньше 0.5. Если мы преобразуем формулу:

$$ans_r = \sum_{j=1}^{n} dp_{r,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} dp_{r-1,i} \cdot \frac{C_n^j \cdot \left\{ {2i \atop j} \right\}}{(n+1)^{2i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} dp_{r-1,i} \cdot \frac{C_n^j \cdot \left\{ {2i \atop j} \right\}}{(n+1)^{2i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{dp_{r-1,i}}{(n+1)^{2i}} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_n^j \cdot \left\{ {2i \atop j} \right\} = \sum_{i=1}^{n} dp_{r-1,i} \cdot \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^{2i}$$

Понятно, что в таком случае при $n \to \infty$, $(ans_r - ans_{r+1}) \to 0$, а значит $m \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, где m - медиана.