Задание 3: (вариант 2)

$A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geq 0$

$\forall i, j$ св-ва $\begin{cases} 1) P(A_i) \cdot P(B_j) = P(A_i \cap B_j) \text{ — из условия} \\ 2) P(A_i) \cdot P(A_j) = 0, \text{ если } i \neq j \\ 3) P(B_i) \cdot P(B_j) = 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}$

$P(A_i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$, $\lambda > 0$, $i \geq 0$

$P(B_j) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^j}{j!}$, $\mu > 0$, $j \geq 0$

$P(X = i \mid X + Y = j) = P(A_i \mid \bigcup_k (A_k \cap B_{j-k})) =$

(сразу положим, что $j \geq i$)

$$= \frac{P(A_i \cap \bigcup_k (A_k \cap B_{j-k}))}{P(\bigcup_k (A_k \cap B_{j-k}))} \cancel{\neq P(A_i \cap B_{j-i})} =$$

1) $P(A_i \cap \bigcup_k (A_k \cap B_{j-k})) = P(A_i \cap B_{j-i})$, т.к. ~~P(A~~ $A_i \cap (A_k \cap B_{j-k}) \subset A_i \cap A_k$, что при $i \neq k$ равно $\varnothing$

2) $P(\bigcup_k (A_k \cap B_{j-k})) = \sum_k P(A_k \cap B_{j-k}) =$
$= \sum_k P(A_k) \cdot P(B_{j-k})$, т.к. $(A_k \cap B_{j-k}) \cap$
$\cap (A_z \cap B_{z-k}) = \varnothing$ при $k \neq z$; и A_k и
B_{j-k} — незав.

$$= \frac{P(A_i) \cdot P(B_{j-i})}{\sum_k P(A_k) \cdot P(B_{j-k})} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\mu} \frac{\mu^{j-i}}{(j-i)!}}{\sum_k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^{j-k}}{(j-k)!}} =$$

$$= \frac{\frac{C_j^i \cdot \lambda^i \cdot \mu^{j-i}}{j!}}{\frac{(\lambda+\mu)^j}{j!}} = \frac{C_j^i \cdot \lambda^i \cdot \mu^{j-i}}{(\lambda+\mu)^j}$$

Ответ: $P(X=i \mid X+Y=j) = \frac{C_j^i \cdot \lambda^i \cdot \mu^{j-i}}{(\lambda+\mu)^j}$