Лабораторная работа №2

21 мая 2023 г.

1 Задание 1

Случайная величина X принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями p_1 , p_2 и p_3 соответственно. Какие условия нужно наложить на p_1 , p_2 , p_3 , чтобы случайная величина X была представима в виде суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин?
Давайте возьмём характеристическую функцию X:

$$\phi_X(t) = p_1 \cdot e^{-it} + p_2 + p_3 \cdot e^{it}$$

Мы хотим наложить такие ограничение, которые позволят существовать таким двум i.i.d случайным величинам, что характеристическая функция их суммы будет равна характеричстической функции X. Назовём их Y и Z, их характеристические функции одинаковы ввиду идентичности распределений ($\phi_Y(t) = \phi_Z(t)$) и характеристическая функция суммы этих с.в. равна произведению их характеричстических функций.

$$\phi_{(Y+Z)}(t) = \phi_Y(t) \cdot \phi_Z(t)$$

И так как мы хотим представить X как $X = Y + Z$, то это то же самое что:

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) \cdot \phi_Z(t) = \phi_Y^2(t) = \phi_Z^2(t)$$

Значит:

$$\phi_X(t) = p_1 \cdot e^{-it} + p_2 + p_3 \cdot e^{it} = \phi_Y^2(t) \Rightarrow \phi_Y(t) = (z_1 \cdot e^{\frac{-it}{2}} + z_2 \cdot e^{\frac{it}{2}})$$

$$p_1 \cdot e^{-it} + p_2 + p_3 \cdot e^{it} = z_1^2 \cdot e^{-it} + 2z_1 z_2 + z_2^2 \cdot e^{it}$$

$$p_1 = z_1^2,\ p_2 = 2z_1 z_2,\ p_3 = z_2^2$$

А значит, что условиями представимости X в виде суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин является: $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_3} = 1$