2.1 Кватернионы

Название проекта: **1_quaternions**

1. класс кватернионов
2. основные арифметические операции (алгебра кватернионов)
3. повороты пространства через кватернионы

*Политех

Содержание

Введение

В компьютерной графике для описания позиции в пространстве (перемещения), а также ориентации в пространстве (поворота) используются матрицы. Также можно также использовать одну матрицу преобразований для описания масштаба объекта. Существует альтернативный способ описания ориентации объекта (поворота) в пространстве при помощи кватернионов.

Вспомним все о комплексных числах: их сложение, вычитание, умножение, частное; нахождение длины. Там просто, известно со школы.

До этого рассматривалась комплексная плоскость, а теперь необходимо для рассмотрения объекта со всех сторон перейти в трехмерное пространство. Для этого необходимо добавить ещё два мнимых числа, и в итоге получаем: i, j, k.

Тогда комплексное число, являющееся линейной комбинацией этих трех мнимых чисел и есть кватернион: $q = s + x * i + y * j + z * k$, где s, x, y, z – вещественные числа.

Кватернион — это ось, относительно которой будем вращать объект и угол, на который мы будем вращать объект относительно этой оси. Всего у кватерниона четыре компоненты: X, Y, Z и W. XYZ — та самая ось поворота (нормализуем и каждый компонент умножаем на синус половины угла), W — угол поворота (который задается через косинус половины угла).

Согласно Гамильтону, получаем следующие правила:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$\begin{gathered} ij = k \\ jk = i \\ ki = j \\ ji = -k \\ kj = -i \\ ik = -j \end{gathered}$$

Также мы можем представить кватернионы в виде упорядоченной пары:

$$q = [s, \mathbf{v}], s \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$q = [s, x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}], s, x, y, k \in \mathbb{R}$$

Алгебра кватернионов

Теперь более подробно рассмотрим алгебру кватернионов:

Сложение (вычитание)

$$\begin{gathered} \mathrm{q_a} = [\mathrm{s_a}, \boldsymbol{a}] \\ \mathrm{q_b} = [\mathrm{s_b}, \boldsymbol{b}] \\ \mathrm{q_a} + \mathrm{q_b} = [\mathrm{s_a} + \mathrm{s_b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}] \\ \mathrm{q_a} - \mathrm{q_b} = [\mathrm{s_a} - \mathrm{s_b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}] \end{gathered}$$

Умножение

$$\begin{gathered} q_a = [s_a, \boldsymbol{a}] \\ q_b = [s_b, \boldsymbol{b}] \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} q_a q_b = [s_a, \boldsymbol{a}][s_b, \boldsymbol{b}] &= (s_a + x_a i + y_a j + z_a k)(s_b + x_b i + y_b j + z_b k) \\ &= (s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b) \end{aligned}$$

$$+(s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)i$$
$$+(s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)j$$
$$+(s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)k$$

Если в последнем выражении i, j, k заменить на их упорядоченные пары (кватернионные единицы), то получим:

$$i = [0, \boldsymbol{i}] \ \ j = [0, \boldsymbol{j}] \ k = [0, \boldsymbol{k}]$$

Далее упростим выражение и получим:

$$[s_a, \boldsymbol{a}][s_b, \boldsymbol{b}] = [s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, \mathbf{0}]$$
$$+[0, (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)\boldsymbol{i}]$$
$$+[0, (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)\boldsymbol{j}]$$
$$+[0, (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)\boldsymbol{k}]$$

Извлечем общие векторные компоненты:

$$[s_a, \boldsymbol{a}][s_b, \boldsymbol{b}] = [s_a s_{\mathrm{b}} - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, \mathbf{0}]$$
$$+[0, s_a(x_b \boldsymbol{i} + y_b \boldsymbol{j} + z_b \boldsymbol{k}) + s_b(x_a \boldsymbol{i} + y_a \boldsymbol{j} + z_a \boldsymbol{k})$$
$$+(y_a z_b - y_b z_a)\boldsymbol{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\boldsymbol{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\boldsymbol{k}]$$

Это уравнение даёт нам сумму двух упорядоченных пар. Первая упорядоченная пара — это **вещественный кватернион (**кватернион, в который входит вектор **0)**, а вторая — **чистый (**кватернион с нулевым скалярным членом**)** кватернион.

Скалярное произведение

$$q_1 = [s_1, x_1 i + y_1 j + z_1 k]$$
$$q_2 = [s_2, x_2 i + y_2 j + z_2 k]$$
$$q_1 \cdot q_2 = s_1 s_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Умножение на скаляр

При умножении кватерниона на скаляр умножаются и скалярная, и мнимая части пары: $\lambda q = \lambda[s, v] = [\lambda s, \lambda v]$

Норма

$$N(q) = xx + yy + zz + ss$$

Модуль

$$|q| = sqrt(N(q)) = sqrt(xx + yy + zz + ss)$$

Сопряжение

$$\mathrm{q}' = [s, -\mathbf{v}]$$

Единичные кватернионы

К кватернионам также применимо правило аддитивности: $q = [s, v] = [s, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, v]$. Рассмотренные ранее i, j, k – это не единичные кватернионы. Взяв произвольный вектор v, можно выразить этот вектор и через его скалярную величину, и через его направление следующим образом:

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}, \text{где } v = |\mathbf{v}| \text{ и } |\hat{\mathbf{v}}| = 1$$
$$\mathrm{q} = [0, \mathbf{v}] = [0, v\hat{\mathbf{v}}] = v[0, \hat{\mathbf{v}}]$$

И только теперь получаем единичный кватернион:

$$\hat{\mathrm{q}} = [0, \hat{\mathbf{v}}]$$

Повороты пространства через кватернионы

Вращение в 3D-пространстве часто описывается углами Эйлера: крен (roll), тангаж (pitch) и рыскание (yaw), которые представляют последовательные повороты вокруг осей координат. Однако вращение через углы Эйлера страдает от проблемы «захвата кардана» (gimbal lock), что затрудняет стабильное представление сложных поворотов.

Кватернионы — это альтернатива, представляющая вращение единичным вектором в четырёхмерном пространстве, где:

Для использования углов Эйлера при вращении в пространстве, их можно преобразовать в кватернион. Этот процесс состоит из:

1. Конвертации углов в радианы и вычисления половинных углов.

2. Использования тригонометрических функций для расчета компонентов кватерниона:

$$s = \cos\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{roll}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{roll}}{2}\right)$$
$$x = \sin\left(\frac{\text{roll}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right) - \cos\left(\frac{\text{roll}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right)$$
$$y = \cos\left(\frac{\text{roll}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\text{roll}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right)$$
$$\mathrm{z} = \cos\left(\frac{\text{roll}}{2}\right) cos\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\sin\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\text{roll}}{2}\right) sin\left(\frac{\text{pitch}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{yaw}}{2}\right)$$

Для поворота вектора в пространстве с помощью кватерниона:

1. Преобразуем вектор в кватернион v.

2. Выполняем операцию $q \cdot v \ \cdot q'$, где q' $-$ сопряжение кватерниона.

Это преобразование возвращает новый вектор, повернутый относительно оси и угла, заданных исходными углами Эйлера. Кватернионы помогают избежать проблемы захвата кардана и позволяют стабильно выполнять цепочку сложных вращений.

Список использованных источников

1. Understanding Quaternions [электронный ресурс] URL: https://www.3dgep.com/understanding-quaternions/
2. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела [электронный ресурс] URL: https://www.keldysh.ru/papers/2013/prep2013_39.pdf
3. Вращение и кватернионы. Сборник рецептов [электронный ресурс] URL: https://www.3dgep.com/understanding-quaternions/